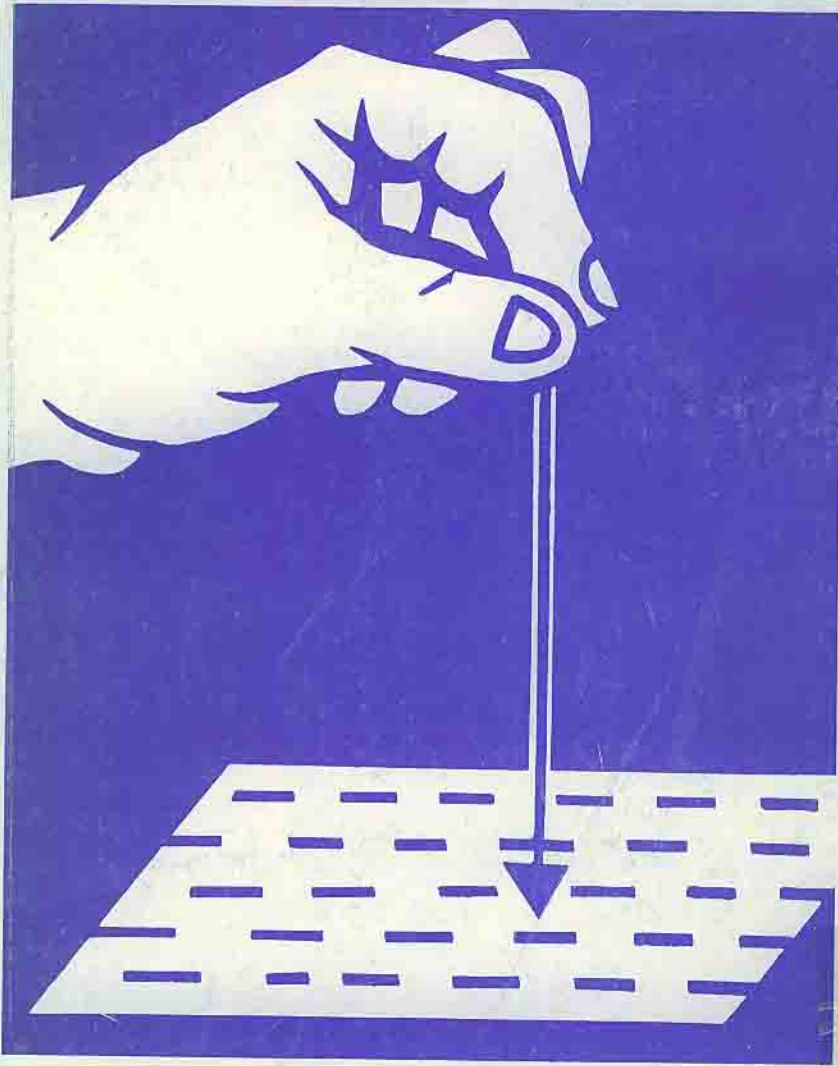




جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش پرورش
تعمیر و تعلیم عالی

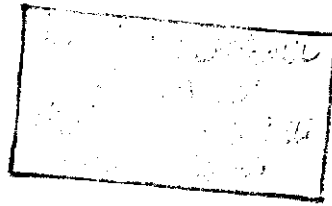
هندسه



سال دوم

آموزش متوسطه عمومی - ریاضی و فیزیک

۲۳۳



۱۳۵۰
۵۱۶
۲۵۲
۲۰۰۰

پدید آورندگان :

محمود کرباسی

محمود فصیحیان

مؤلفان :

فرهاد مجذوب

رسام :

حقوق مادی این اثر متعلق به وزارت
آموزش و پرورش است .

چاپ از : چاپخانه اتحاد

فهرست

۲	فصل ۱ - نسبت و تناسب
۱۸	فصل ۲ - تشابه اشکال
۳۳	فصل ۳ - رابطه‌های طولی در مثلث و دایره

نسبت و تناسب

نسبت دو کمیت

نسبت دو کمیت همجنس کسری است که صورت و معخرج آن، اندازه‌های آن دو کمیت برحسب يك واحد باشند. با تشکیل نسبت دو مقدار نوعی مقایسه مابین آنها انجام می‌گیرد و معلوم می‌کند یکی چند برابر دیگری، یا یکی چه کسری از دیگری است. نسبت دو کمیت «عدد مطلق» است و برحسب واحد معینی بیان نمی‌شود، مثلاً نسبت دو پاره خط را که یکی ۱۰ سانتیمتر و دیگری ۱۵ سانتیمتر است چنین می‌نویسند $\frac{10}{15}$ ، چون نسبت دو عدد خارج قسمت آنهاست که به صورت کسر نوشته می‌شود، بنابراین دارای همان خواصی است که در حساب وجیر برای کسر گفته‌ایم از آن جمله «صورت و معخرج کسری را می‌توان در عددی (جز عدد صفر) ضرب و یا بر عددی (جز عدد صفر) تقسیم نمود» لذا نسبت دو پاره خط بالا به صورت $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ است، و نیز می‌توان گفت که اندازه پاره خط کوچکتر $\frac{2}{3}$ اندازه پاره خط بزرگتر است، یا پاره خط بزرگتر $\frac{3}{2}$ پاره خط کوچکتر می‌باشد (یعنی پاره خط بزرگتر يك و نیم برابر پاره خط کوچکتر است) نسبت دو عدد یا دو کمیت با نمادهای زیر نشان داده می‌شود (به فرض آن که این دو عدد ۳ و ۴ اختیار شوند).

الف : ۴ : ۳ یا ۴ ÷ ۳ ، ب : ۳ به ۴ که همان ۳ تقسیم بر ۴ است ،
ج : $\frac{3}{4}$ ، د : $\frac{3}{4}$ ، ه : ۷۵٪

نسبت دو کمیت همجنس بستگی به واحد اندازه‌گیری آنها ندارد.

مثال ۱- نسبت دو پاره خط به اندازه‌های سه متر و پنج متر برابر است با $\frac{3}{5}$ که هر دو پاره خط با واحد متر اندازه‌گیری شده‌اند، اگر واحد اندازه‌گیری آن دو پاره خط دسیمتر اختیار شود نسبت آنها $\frac{30}{50}$ می‌شود که مساوی $\frac{3}{5}$ است، اگر واحد اندازه‌گیری آنها سانتیمتر باشد نسبت آنها برابر است با $\frac{300}{500}$ یعنی برابر با $\frac{3}{5}$ است.

مثال ۲ - نسبت دوپاره‌خط به اندازه‌های ۲ سانتیمتر و ۱۵ میلیمتر برابر است با $\frac{۲}{۱۵}$ که مساوی $\frac{۴}{۳}$ می‌باشد.

به مثالهای زیر توجه کنید :

می‌خواهیم نسبتهای زیر را که با دو عدد یا دو جمله جبری نشان داده شده‌است تعیین کنیم.

الف : ۵۰ به ۶۰ ، ب : $\frac{۶}{۳}$ به $\frac{۵}{۹}$ ، ج : ۱۲ به $\frac{۳}{۸}$ ،
 د : $۵x$ به $۲x$ ($x \neq 0$) ، ه : a^2 به $۵a^2$ ($a \neq 0$)
 این نسبتها به ترتیب عبارتند از: $\frac{۵}{۶}$ ، ۷ ، ۳۲ ، $\frac{۵}{۲}$ و $\frac{۵}{۵}$

پاره‌خطهای متناسب - تناسب

در شکل مقابل $\frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۵}$ و

$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{۲/۴}{۳}$ چون $\frac{۳}{۵} = \frac{۲/۴}{۳}$ ،

نتیجه می‌شود $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ (۱)

با توجه به رابطه (۱) گوئیم پاره‌خطهای (AB و CD) با پاره‌خطهای (A'B' و C'D') متناسب هستند .

تناسب

تناسب بیان تساوی دو نسبت است.

تناسب بین چهار پاره‌خط را گاهی با رابطه $(A'B' و C'D') \sim (AB و CD)$ هم نمایش

می‌دهند. با چهار پاره‌خط بالا می‌توان تناسبهای دیگری نیز تشکیل داد، مثلا تناسب $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$ (۲)

مقدار مشترك نسبتهای تناسب (۱) عدد مطلق $\frac{۵}{۶}$ است، مقدار مشترك نسبتهای تناسب (۲) کدام عدد مطلق است ؟

به طور کلی اگر چهار پاره‌خط به اندازه‌های $a < b < c < d$ چنان اختیار کنیم که تناسب

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ بین آنها برقرار باشد مقادیر یا اندازه‌های $a < b < c < d$ را به ترتیب جزء های اول

تا چهارم تناسب می‌نامیم ، تناسب بالا را می‌توان به صورت $a : b = c : d$ در یک سطر نوشت :

دو جزء اول و چهارم یعنی a و d را طرفین تناسب و دو جزء دوم و سوم یعنی b و c را وسطین

تناسب می‌نامند .

خواص تناسب - در هر تناسب حاصل ضرب طرفین برابر است با حاصل ضرب وسطین، یعنی از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ نتیجه می شود: $ad = bc$ ؛ زیرا اگر مقدار مشترک دو نسبت مساوی را k فرض کنیم، داریم: $\frac{a}{b} = k$ و $\frac{c}{d} = k$ و از آنجا $a = bk$ و $dk = c$ و از ضرب دو تساوی اخیر نتیجه می شود $ad = bc$ و به طور خلاصه $adk = bck$.

از تساوی $ad = bc$ چندین تناسب دیگر به شکل های مختلف می توان نتیجه گرفت (مانند تناسب $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ «چرا؟»). تناسب دارای خواص دیگری نیز هست، ما در این کتاب به طور اختصار آنها را ذکر می کنیم.

از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های نظیر $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ و $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ نیز نتیجه می شود (چرا؟). همچنین تناسب های $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (۱) و $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (۲) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ نتیجه می شوند زیرا تناسب (۱) حاصل $1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{d}$ و تناسب (۲) حاصل $1 - \frac{a}{b} = 1 - \frac{c}{d}$ می باشد. (می گویند تناسب های (۱) و (۲) به ترتیب با عمل ترکیب نسبت در صورت و تفضیل نسبت در صورت از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ بدست آمده اند). از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$ و $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ را نیز می توان نتیجه گرفت (طریقه نتیجه گیری تناسب های اخیر به عهده دانش آموزان است).

مثال - از تناسب $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ می توان تناسب های $\frac{8}{5} = \frac{24}{15}$ و $\frac{8}{15} = \frac{24}{5}$ و $\frac{5}{15} = \frac{8}{24}$ را نتیجه گرفت؛ باید توجه داشت که مقدار نسبتها در سه تناسب اخیر با هم مساوی نیستند و مقدار آنها به ترتیب برابرند با $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ (دو عدد $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ عکس یکدیگرند و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}$ نیز عکس یکدیگر می باشند).

مسئله - اگر داشته باشیم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots = k$ ثابت کنید که:

$$\frac{a+b+c+\dots}{a'+b'+c'+\dots} = k$$

حل - داریم: $a = a'k$ و $b = b'k$ و $c = c'k$ و ... چون تساوی های اخیر را عضو به عضو با هم جمع کنیم حاصل می شود:

$$(a+b+c+\dots) = (a'+b'+c'+\dots)k$$

$$\frac{a+b+c+\dots}{a'+b'+c'+\dots} = k \quad \text{و از آنجا}$$

مسئله - مجموع دوپاره‌خط ۳۹ سانتیمتر است و نسبت آنها به یکدیگر مثل نسبت ۵ به ۸ می‌باشد . می‌خواهیم اندازه هریک از دوپاره‌خط را حساب کنیم .

حل - چون پاره‌خط کوچکتر را x فرض کنیم پاره‌خط بزرگتر $x - ۳۹$ می‌شود و بنا به فرض

$$\frac{x}{۳۹ - x} = \frac{۵}{۸} \quad \text{مسئله داریم:}$$

$$\frac{x}{۳۹ - x + x} = \frac{۵}{۸ + ۵} \quad \text{پس از ترکیب نسبت در مخرج تناسب نتیجه می‌شود}$$

$$\frac{x}{۳۹} = \frac{۵}{۱۳} \quad \text{و یا}$$

$$x = ۱۵ \quad \text{و از آنجا}$$

یعنی پاره‌خط کوچکتر ۱۵ سانتیمتر و در نتیجه پاره‌خط بزرگتر مساوی ۲۴ سانتیمتر است.
واسطه هندسی - اگر سه پاره‌خط به اندازه‌های a ، b و c چنان اختیار کنیم که مابین

آنها تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ برقرار باشد، در نتیجه تساوی $b^2 = ac$ نیز برقرار خواهد بود و در این صورت می‌گوییم پاره‌خط به اندازه b واسطه هندسی بین دوپاره‌خط به اندازه‌های a و c می‌باشد .

از تساوی $b^2 = ac$ نتیجه می‌شود : $b = \sqrt{ac}$ ، یعنی اندازه واسطه هندسی بین دوپاره‌خط برابر است با ریشه دوم (جذر) حاصل ضرب اندازه‌های آن دوپاره‌خط (بدیهی است آن دوپاره‌خط باید با یک واحد اندازه‌گیری شده باشند) . مثلاً پاره‌خطی به اندازه ۶ سانتیمتر واسطه هندسی بین دوپاره‌خط به اندازه‌های ۴ سانتیمتر و ۹ سانتیمتر می‌باشد (چرا ؟) .

مسئله - می‌خواهیم اندازه ضلع مربعی را حساب کنیم که مساحت آن برابر مساحت مستطیلی به درازای ۱۶ متر و به پهنای ۹ متر باشد .

حل - اگر اندازه ضلع مربع را a فرض کنیم مساحت آن a^2 خواهد شد که بنا به فرض $a^2 = ۹ \times ۱۶$ است و لذا $a = ۱۲$ می‌شود (ضلع مربع ۱۲ متر است) .

نمونه

۱- کدام يك از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است .

نسبت دوپاره‌خط مساوی است با نسبت اندازه‌های آنها - اگر درازای زمینی ۲۴ متر و پهنای آن ۸ متر باشد نسبت درازای زمین به پهنای زمین ۳ متر است - چهار پاره‌خط به اندازه‌های a و b و c و d که بین آنها رابطه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ برقرار است ، تناسبهای دیگری با اجزای a و b و c و d تشکیل می‌دهند که نسبت مشترک آنها k است - فقط يك پاره‌خط می‌توان یافت که واسطه هندسی بین دوپاره‌خط مفروض باشد - دريك تناسب می‌توان اندازه‌های نسبت اول را

با يك واحد و اندازه‌های نسبت دوم را با واحد دیگری اندازه‌گیری کرد.

۲- اگر اندازه‌های پاره‌خطهای AB و CD به ترتیب برابر ۲۵ سانتیمتر و ۳ دسیمتر باشد، نسبتهای $\frac{AB}{CD}$ و $\frac{CD}{AB}$ را تعیین کنید. AB چه جزئی از CD است.

۳- درازای يك زمین ۷ متر و ۲ دسیمتر و پهنای آن ۵ متر و ۶ دسیمتر است. نسبت درازای زمین به پهنای آن را تعیین کنید. نسبت پهنای زمین به درازای آن چیست؟ پهنای زمین چه جزئی از درازای آن است.

۴- محیط مستطیلی ۶۴ سانتیمتر است و نسبت درازا به پهنای آن $\frac{5}{3}$ است.

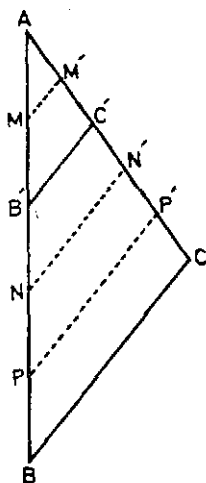
اولاً - اندازه‌های درازا و پهنای مستطیل را به دست آورید.

ثانیاً - درازای ضلع مربعی را حساب کنید که مساحت آن مساوی مساحت مستطیل باشد.

۵- مطلوب است تعیین اندازه‌های دوباره‌خط برحسب اعداد درست به طریقی که پاره‌خط به اندازه ۸ سانتیمتر واسطه هندسی آن دوباره‌خط باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

۶- سه پاره‌خط به اندازه‌های ۴، ۵ و ۸ که با يك واحد اندازه‌گیری شده‌اند مفروضند.

کلیه تناسباتی را تشکیل دهید که x یکی از اجزا و ۴، ۵ و ۸ سه جزء دیگر آن باشند و مقادیر x را در کلیه تناسبات به دست آورید.



قضیه تالس: خطی که به موازات

يك ضلع از مثلثی رسم شود دو ضلع دیگر را به يك نسبت قطع می‌کند.

در شکل مقابل پاره خط $B'C'$ به

موازات ضلع BC رسم شده است

می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$

برهان: ابتدا واحدی چنان اختیار می‌کنیم که اگر AB' را به دو قسمت مساوی تقسیم

کرد $B'B$ را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کند (ولی همیشه در چنین عملی ممکن نیست در این صورت می‌توان واحد کوچکتری انتخاب نمود تا واحد انتخاب شده باندازه صحیح در AB' و

BB' گنجانیده شود) بنا بر این داریم:

$$AM = MB' = B'N = NP = PB$$

سپس از نقاط تقسیم یعنی M و N و P خطوطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC

را به ترتیب در نقاط M' و N' و P' قطع کند و با توجه به اینکه
 $MM' \parallel B'C' \parallel NN' \parallel PP' \parallel BC$

نتیجه می‌شود که

$$AM' = M'C' = C'N' = N'P' = P'C$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

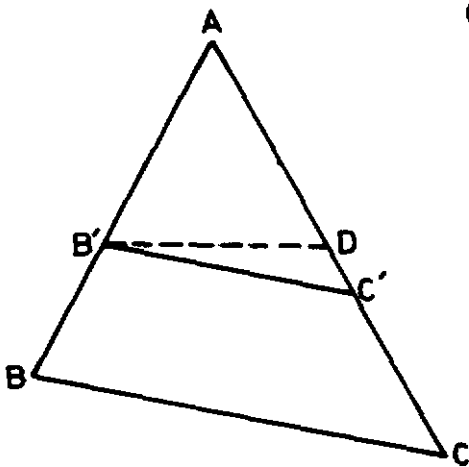
$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{AC'}{C'C} = \frac{2}{3}$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که :

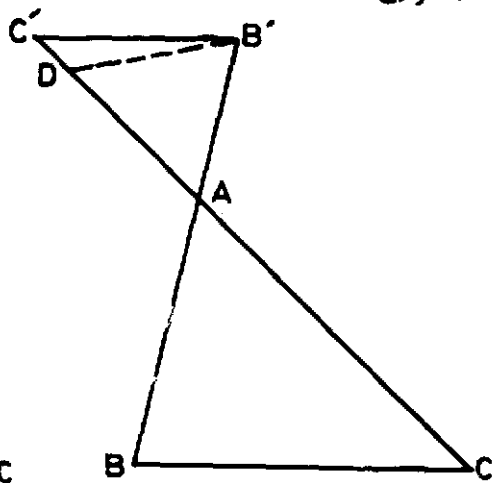
$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$$

توجه : از تساوی $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$ می‌توان رابطه $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ را نتیجه گرفت .

عکس قضیه تالس - هر خط که دو ضلع مثلثی (با امتداد آنها) را قطع کند و بر آن دو ضلع پاره‌خطهای متناظری پدید آورد که با اضلاع متناظر از آن مثلث متناسب باشند ، با ضلع سوم مثلث موازی است .



شکل (۱)



شکل (۲)

در شکل‌های (۱) و (۲) خط $B'C'$ اضلاع AB و AC و با امتداد آنها را به ترتیب در نقاط B' و C' قطع نموده است به قسمی که $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ می‌خواهیم ثابت کنیم $B'C'$ با BC موازی است .

پوهان خلف - اگر $B'C'$ موازی BC نباشد ، از نقطه B' خطی موازی BC رسم می‌کنیم ، این خط ضلع AC یا امتداد آن را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند ؛ چون $B'D$ موازی BC

است بنا به قضیه تالس داریم :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

از مقایسه این تساوی با تساوی فرض قضیه نتیجه می شود :

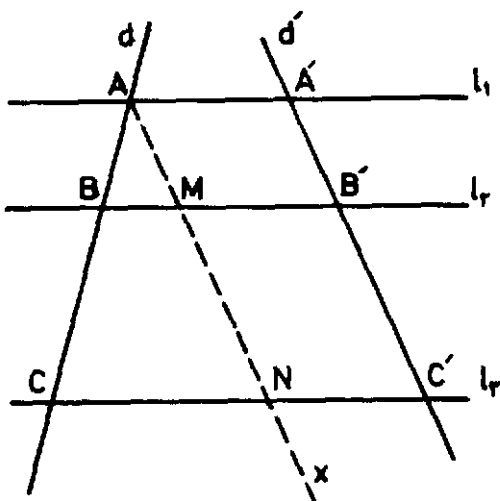
$$\frac{AC'}{AC} = \frac{AD}{AC}$$

در این تناسب چون مخارجها مساویند بدیهی است که صورتها نیز برابر خواهند بود ، یعنی : $AD = AC'$ پس دو نقطه D و C' برهم منطبق هستند ، به عبارت دیگر خط $B'D$ که موازی BC رسم شده بر $B'C'$ منطبق است .

قضیه - هرگاه دوخط مورب از يك صفحه به وسیله سه خط موازی دآن صفحه قطع شوند ، قطعات جدا شده از دوخط مورب نظیر به نظیر متناسبند .

در شکل زیر سه خط متوازی l_1 و l_2 و l_3 دوخط مورب d و d' را به ترتیب در نقاط

(A, B, C) و (A', B', C') قطع نموده اند؛ می خواهیم ثابت کنیم: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$



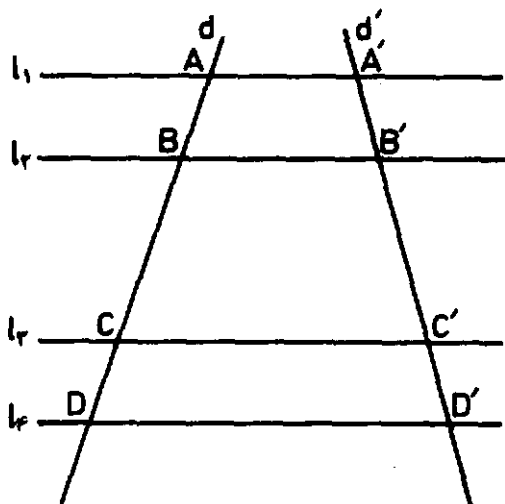
پوهان- از نقطه A نیم خط Ax را موازی خط d' رسم می کنیم تا خطوط l_2 و l_3 را در نقاط M و N قطع نماید ، چون $BM \parallel CN$ است بنا به قضیه تالس داریم :

$$(1) \quad \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}$$

چهارضلعیهای $AA'B'M$ و $MB'C'N$ متوازی الاضلاع هستند چرا ؟ ، بنابراین

$AM = A'B'$ و $MN = B'C'$ ؛ چون در تساوی (۱) به جای AM و MN مساوی آنها $A'B'$ و $B'C'$ را قرار دهیم خواهیم داشت: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

(۲) تعمیم قضیه قبل - هرگاه چند خط موازی در یک صفحه دو خط مورب را قطع کنند، قطعات متناظر جدا شده از دو خط مورب متناسبند.



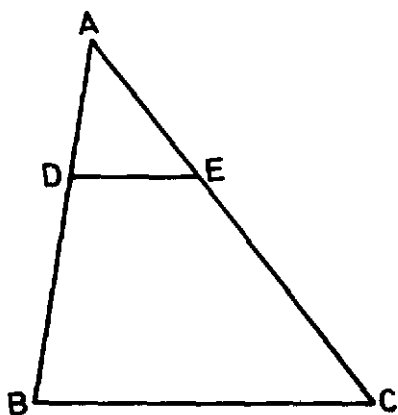
اثبات به سادگی از قضیه پیش نتیجه می‌شود.

مسئله - در شکل مقابل خط DE

موازی BC رسم شده است. اگر

$AC = 20$ و $BD = 10$ و $AD = 6$

باشد، اندازه‌های AE و EC را حساب کنید.



حل - داریم:

$$\frac{6}{16} = \frac{AE}{20} \quad \text{یا} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

و از آنجا داریم:

$$EC = 12/5 \quad \text{و} \quad AE = 7/5$$

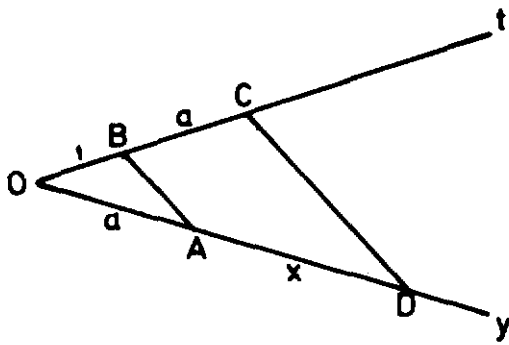
مسئله - پاره‌خطی به طول a

معلوم است:

اولاً تساوی $x = a^2$ را به یک تناسب تبدیل کنید.

ثانیاً به کمک ترسیم پاره‌خط به طول x را تعیین کنید.

حل - اولاً تساوی $x = a^2$ را به صورت $x \times 1 = a \times a$ نوشته سپس می نویسیم $\frac{a}{1} = \frac{x}{a}$.



ثانیاً برای تعیین اندازه x در روی دو نیم خط دلخواه Oy و Ot (مطابق شکل) طولهای OA ، OB و BC را به اندازه های a ، 1 و a جدا می کنیم و دو نقطه A و B را به هم وصل می کنیم و از نقطه C خطی موازی AB رسم می کنیم تا Oy را در نقطه D قطع کند، پاره خط AD جواب مسئله است. زیرا داریم

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{AD}{a}$$

$$AD = a^2$$

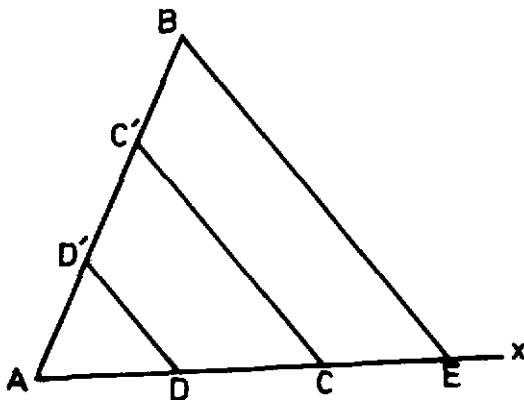
$$x = a^2$$

یا

یا

در نتیجه

مسئله - می خواهیم پاره خط AB را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم.



حل - از نقطه A (شکل مقابل)

نیم خطی مانند Ax رسم می کنیم و در روی آن سه پاره خط متوالی

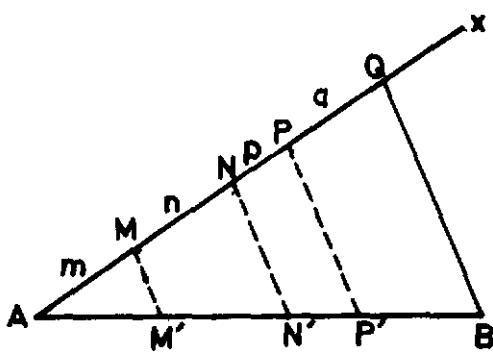
$$AD = DC = CE$$

را جدا می کنیم، سپس از E به B وصل می کنیم و خطوط CC' و DD' را موازی BE رسم می کنیم تا پاره خط AB را در نقاط C' و D' قطع کند. در این صورت پاره خط AB به وسیله نقاط C' و D' به سه قسمت مساوی تقسیم می شود (چرا؟).

مسئله - می خواهیم پاره خط مفروضی را به چند جزء که اندازه های آنها متناسب با اعداد

داده شده باشد تقسیم کنیم.

حل - در شکل مقابل فرض می‌کنیم می‌خواهیم پاره‌خط AB را به چهار قسمت متناسب با



اعداد p, n, m, q تقسیم کنیم؛
 برای این تقسیم از نقطه A نیم‌خط دلخواه
 Ax را رسم می‌کنیم و در روی آن
 پاره‌خطهای AM، MN، NP، PQ و
 را به ترتیب مساوی m, n, p, q و
 جدا می‌کنیم؛ خط BQ را رسم می‌کنیم
 و از نقاط M، N، P خطوط موازی
 BQ رسم می‌کنیم، این خطوط پاره‌خط

AB را در نقاط M', N', P' قطع می‌کند و پاره‌خطهای AM' و $M'N'$ و $N'P'$ و $P'B$
 جوابهای مسئله هستند، زیرا چند خط موازی دوخط مورب را قطع کرده‌اند و قطعات جدا شده
 از دوخط مورب متناسبند، یعنی:

$$\frac{AM'}{AM} = \frac{M'N'}{MN} = \frac{N'P'}{NP} = \frac{P'B}{PQ}$$

$$\frac{AM'}{m} = \frac{M'N'}{n} = \frac{N'P'}{p} = \frac{P'B}{q}$$

یا

یعنی پاره‌خطهای AM' ، $M'N'$ ، $N'P'$ ، $P'B$ به ترتیب با اعداد m, n, p, q متناسبند.

مسئله - پاره‌خطی به طول x پیدا کنید به طریقی که پاره‌خط به طول y واسطه هندسی بین

دوپاره‌خط به طولهای x و y باشد، یعنی بین پاره‌خطها رابطه $\frac{y}{x} = \frac{y}{y}$ برقرار باشد.

حل - در روی نیم‌خط Ox

پاره‌خطهای OA و AB را به ترتیب

مساوی 3 و 2 و در روی نیم‌خط Oy

پاره‌خط OC را مساوی 2 جدا می‌کنیم

(مطابق شکل) . از A به C وصل

می‌کنیم و از نقطه B خط BD را موازی

AC رسم می‌کنیم، پاره‌خط CD جواب

مسئله است. زیرا داریم:

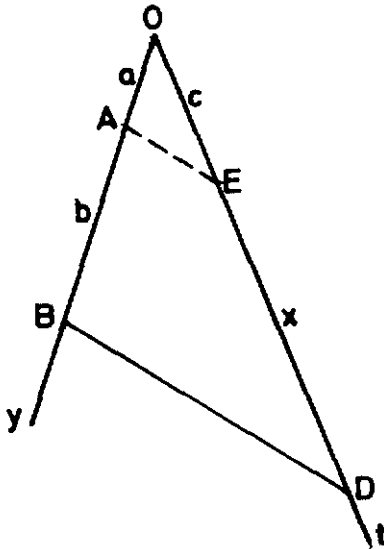
$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{CD}$$

یا

و در نتیجه $CD = x$ جواب مسئله است .

مسئله - رسم چهارم جزء تناسب - سه پاره‌خط به اندازه‌های a ، b و c داده شده‌اند .
می‌خواهیم پاره‌خطی به طول x رسم کنیم به طریقی که داشته باشیم: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.



حل - دو نیم خط Oy و Ot را به طور دلخواه رسم می‌کنیم (مطابق شکل). در روی Oy طولهای OA و OB را به ترتیب به اندازه‌های a و b و در روی Ot پاره‌خط $OE = c$ را جدا می‌کنیم؛ خطی از A به E رسم می‌کنیم و از B خطی موازی AE می‌کشیم تا Ot را در نقطه D قطع کند، پاره‌خط ED جواب مسئله است، زیرا دوخط AE و BD موازیند و در نتیجه:

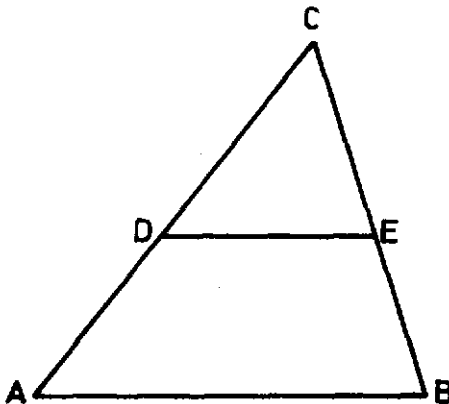
$$\frac{OA}{AB} = \frac{OE}{ED}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{ED} \quad \text{یا}$$

یعنی پاره‌خط ED همان پاره‌خط x می‌باشد .

تمرین

۱- آیا گزاره زیر درست است .
اگر در روی ضلع AB از مثلث ABC پاره‌خط AB' را به اندازه نصف AC و در روی ضلع AC پاره‌خط AC' را به اندازه نصف AB جدا کنیم، خط $B'C'$ موازی BC است .



۲- در شکل مقابل $AB \parallel DE$ است، تناسبهای زیر را کامل کنید:

(الف) $\frac{EB}{EC} = \frac{?}{?}$ (ب) $\frac{CA}{CD} = \frac{?}{?}$

(ج) $\frac{CE}{CD} = \frac{?}{?}$ (د) $\frac{CA}{DA} = \frac{?}{?}$

(ه) $\frac{BE}{AD} = \frac{?}{?}$ (و) $\frac{CD}{DA} = \frac{?}{?}$

۳- با توجه به شکل مقابل

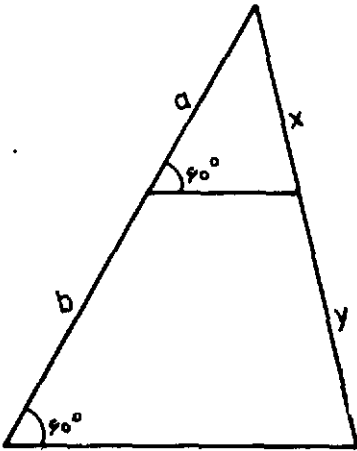
تناسبهای زیر را کامل کنید:

الف) $\frac{a+b}{a} = \frac{?}{x}$

ب) $\frac{a}{b} = \frac{?}{?}$ ، $\frac{a+b}{x+y} = \frac{?}{x}$ (ج)

د) $\frac{a+b}{b} = \frac{x+?}{?}$ (ا) ، $\frac{a}{x} = \frac{?}{?}$

و) $\frac{x+y}{a+b} = \frac{y}{?}$



۴- با توجه به شکل روبه‌رو

الف) اگر $RH=4$ و $FH=6$

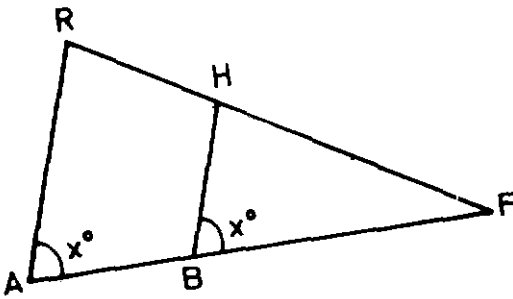
و $BF=10$ باشد، AB را حساب کنید.

ب) اگر $RH=6$ و $HF=10$

و $AB=3$ باشد، BF را حساب کنید.

ج) اگر $RH=5$ و $RF=20$

و $AF=18$ باشد، BF را تعیین کنید.



۵- در شکل مقابل $AB \parallel DE$

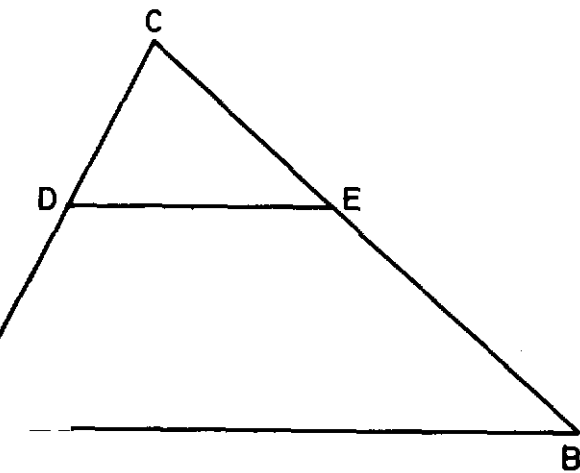
می‌باشد.

الف) اگر $AC=12$ و $CD=4$

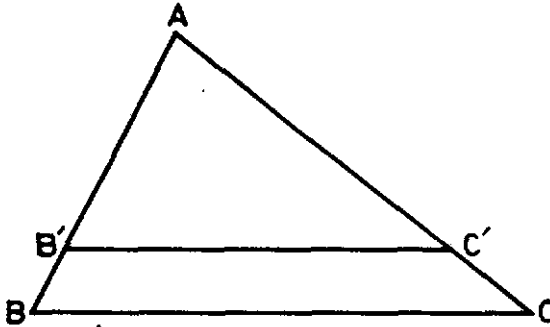
و $CE=8$ باشد، BC را حساب کنید.

ب) اگر $AD=6$ و $BE=10$

و $CD=4$ باشد، CE را پیدا کنید.



- ج) اگر $BC=22$ و $BE=6$ و $CD=8$ باشد، AC را تعیین کنید .
 د) اگر $AD=5$ و $CD=7$ و $BC=18$ باشد، BE را معلوم کنید .
 ه) اگر $AC=15$ و $CE=6$ و $BC=18$ باشد، AD را به دست آورید .



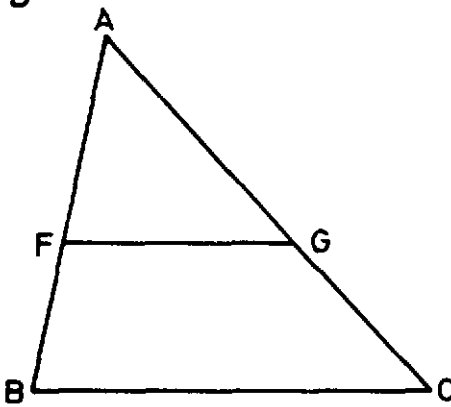
۶- در شکل روبه‌رو

داریم :

$$AB=20, AB'=16$$

$$AC=30 \text{ و } AC'=23$$

آیا $BC \parallel B'C'$ است.



۷- با توجه به شکل مقابل ،

در کدام یک از حالات زیر $BC \parallel FG$ است.

الف) $AB=14$ و $AF=6$

و $AC=7$ و $AG=3$

ب) $AB=12$ و $FB=3$ و

$AC=8$ و $AG=6$

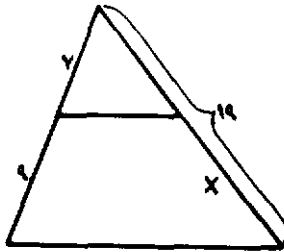
ج) $AF=6$ و $FB=5$ و

$AG=9$ و $CG=8$

د) $AC=21$ و $CG=9$ و $AB=14$ و

$AF=5$

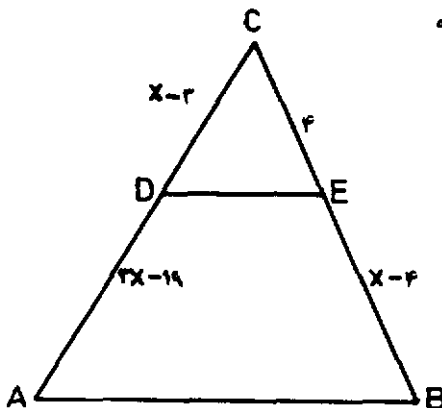
ه) $AB=24$ و $AC=6$ و $AF=8$ و $CG=4$



۸- با توجه به شکل مقابل ، آیا می‌توان

برای محاسبه x از تناسب $\frac{7}{9} = \frac{19-x}{x}$ استفاده

کرد ؟ اگر ممکن است مقدار x را حساب کنید .



۹- در شکل مقابل $AB \parallel DE$

است . در صورتی که $CD=x-3$ و

$CE=4$ و $DA=3x-19$

و $EB=x-4$ باشد ، مقدار x را

تعیین کنید .

۱۰ - در شکل مقابل نقطه D

وسط AB و $DE \parallel BC$ می باشد .

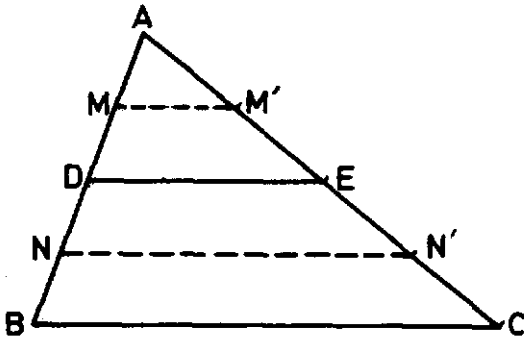
اولاً ثابت کنید نقطه E وسط AC

است .

ثانیاً اگر نقطه M وسط AD و

نقطه N وسط DB و $MM' \parallel NN' \parallel BC$

باشند ، ثابت کنید :



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AM'}{M'C} = \frac{NB}{NA} = \frac{N'C}{N'A}$$

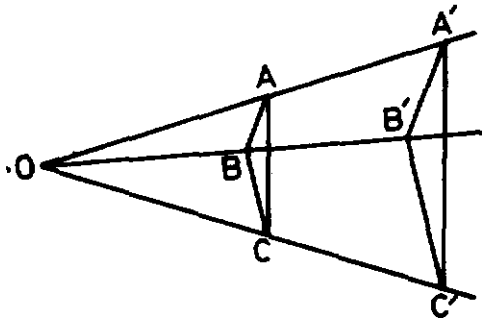
۱۱ - دو مثلث ABC و $A'B'C'$

طوری قرار گرفته اند که AA' و BB'

و CC' یکدیگر را در نقطه O قطع

کرده اند و $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$

(مطابق شکل) ثابت کنید $AC \parallel A'C'$.



۱۲ - می خواهیم از نقطه M واقع

در درون زاویه xOy پاره خطی محدود

به دو نیم خط Ox و Oy بگذرانیم که

در نقطه M به نسبت $\frac{3}{2}$ تقسیم شود

یعنی $\frac{MB}{MA} = \frac{3}{2}$ (مطابق شکل) .

حل - ابتدا نقطه M را به نقطه

O وصل می کنیم و پاره خط OM را به

سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم؛ سپس

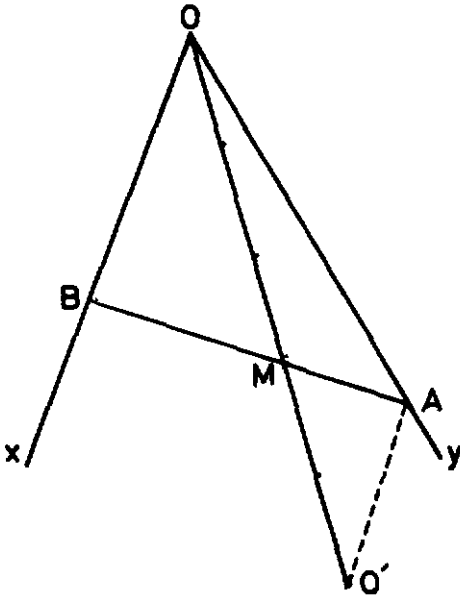
پاره خط MO' را در امتداد OM به اندازه

$\frac{2}{3}$ پاره خط OM جدا کرده از نقطه O'

خطی موازی Ox می کشیم تا Oy را

در نقطه A قطع کند؛ از A به M وصل

می کنیم، امتداد AM نیم خط Ox را در نقطه B قطع می کند و خط AB که از نقطه M گذشته

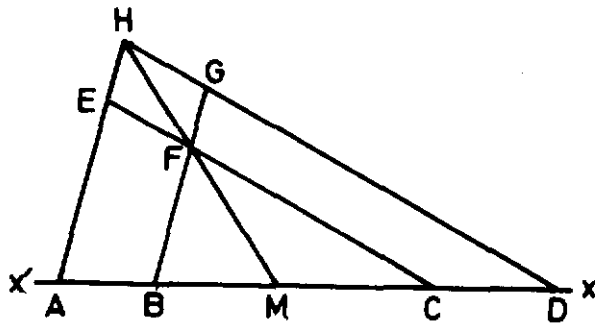


است جواب مسئله است. زیرا در مثلث MOB خط O'A موازی OB رسم شده است و بنا به قضیه تالس داریم :

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MO}{MO'} \quad \text{یا} \quad \frac{MB}{MA} = \frac{2}{3}$$

۱۳- نقاط A و B و C و D روی خط x'x مطابق شکل اختیار شده اند؛ دو خط موازی از نقاط B و A و دو خط موازی دیگر از نقاط C و D رسم نموده ایم، از تقاطع آنها متوازی الاضلاع EFGH حاصل شده است؛ امتداد FH خط x'x را در نقطه M قطع نموده است؛ ثابت کنید :

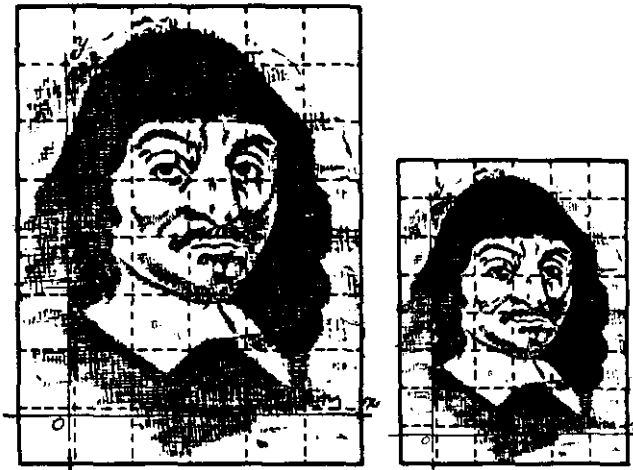
$$MA \cdot MC = MB \cdot MD$$



تشابه اشکال

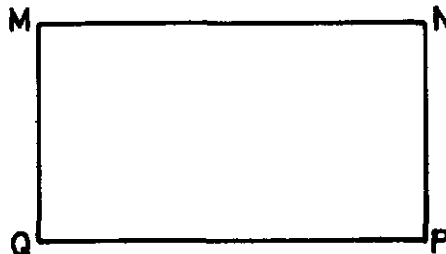
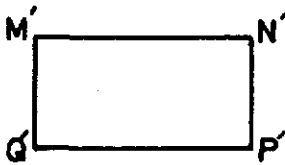
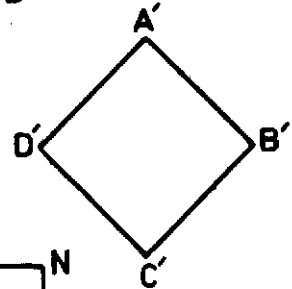
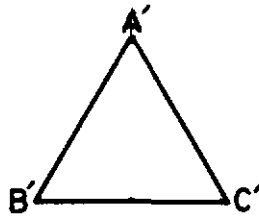
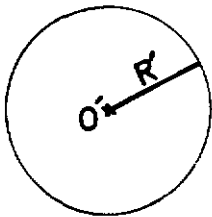
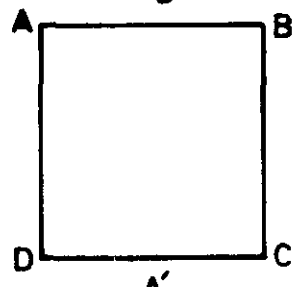
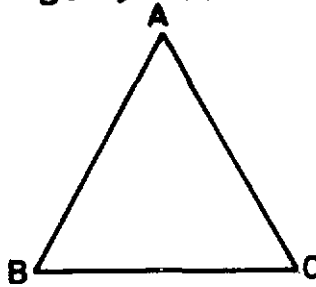
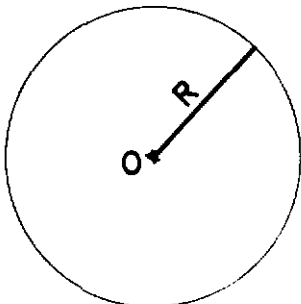
کلیات تشابه

تعریف - کلمه تشابه در زندگی روزانه ما بدون رعایت و توجه به تعریف ریاضی آن موارد استعمال فراوان دارد، گاهی هم اتفاق می افتد که طبیعت یا خلقت به کمک این کلمه می آید، مثلاً وقتی که دو برادر را که خیلی به هم شبیه هستند و در کنار هم می بینیم بی اختیار می گوئیم چه تشابه عجیبی! تشابه را با تمام ویژگیهای آن در دو عکس کوچک و بزرگی که از خود در دست دارید بهتر درک می کنید. عکسی از خود را دو برابر بزرگ کنید، می بینید تمام خطوط عکس بزرگ دو برابر خطوط متناظر در عکس کوچک است و زوایای بین خطوط متناظر دو عکس با هم مساویند، مثلاً اندازه ابروها و بینی در عکس بزرگ دو برابر اندازه ابروها و بینی در عکس کوچک است ولی مثلاً زاویه بین خط بینی و امتداد ابروها در هر دو عکس به یک اندازه است که این زاویه معمولاً در حدود 90° است. به این دو تصویر از دکارت که به اندازه های مختلف است دقت کنید، ترکیب چشم و ابرو و بینی و دهان و تناسب بین بزرگی و کوچکی فاصله های مختلف در هر دو صورت یکی است و تفاوت فقط در اندازه های آنهاست، ولی نسبت

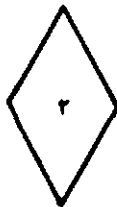
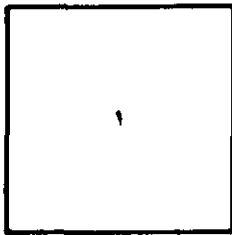


اندازه های طولهای متناظر یکی است و زوایای بین خطوط متناظر دو تصویر دو به دو با هم مساوی است.

حال به اشکال هندسی زیر دقت نمایید: دو دایره به مرکزهای O و O' و به شعاعهای R و R' ،
 دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، دو مربع $ABCD$ و $A'B'C'D'$ ، دو مستطیل $MNPO$ و $M'N'P'O'$ ،
 اشکال هندسی هستند که از حیث ساختمان با یکدیگر تفاوتی ندارند .

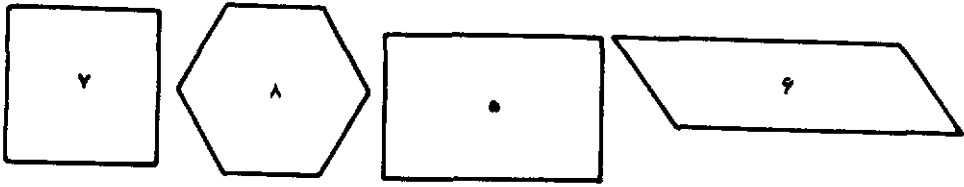


بدین معنی که مثلا دو دایره از همه لحاظ با هم شبیه هستند، فقط یکی بزرگتر از دیگری است. همچنین دو مربع را اگر در نظر بگیریم از تمام جهات با یکدیگر یکی هستند فقط یکی کوچکتر از دیگری می باشد. اگر به دو مثلث یا به دو مستطیل که در شکلهای فوق مشاهده می شوند توجه کنیم متوجه می شویم که تفاوت آنها فقط در اندازه اضلاع متناظر آنهاست ولی زاویه های متناظر آنها با هم مساوی می باشند .



حال اگر به شکلهای (۱ ، ۲) و (۳ ، ۴) دقت کنیم ، خواهیم دید که ساختمان شکلهای (۱ ، ۲) با هم و نیز ساختمان شکلهای (۳ ، ۴) با هم تفاوت دارد. مثلا اضلاع مربع دو برابر

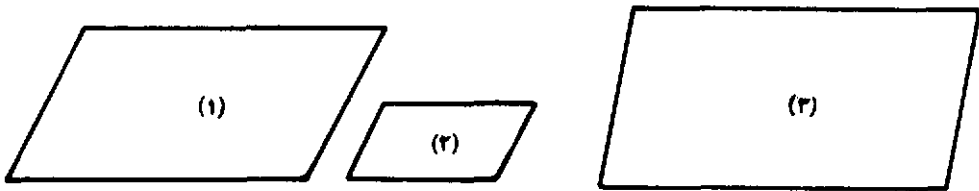
اضلاع لوزی است، بنابراین اضلاع شکلهای (۱، ۲) متناسب هستند ولی زاویه‌های آنها با هم مساوی نیستند. همچنین زاویه‌های شکلهای (۳، ۴) نظیر به نظیر با هم مساوی است ولی اضلاع آنها با هم متناسب نمی‌باشند.



اگر به شکلهای (۵، ۶) و (۷، ۸) دقت نمایید ملاحظه می‌شود که ساختمان آنها با هم یکی نمی‌باشد.

بنابراین شکلهای (۱، ۲) و (۳، ۴) و (۵، ۶) و (۷، ۸) هیچ‌کدام با دیگری متشابه نیست.

حال به سه متوازی‌الاضلاع (۱) و (۲) و (۳) زیر توجه کنید. دو متوازی‌الاضلاع



(۱) و (۲) از حیث ساختمان یکی هستند بدین معنی که متوازی‌الاضلاع (۲) همان متوازی‌الاضلاع (۱) است که اضلاع آن به یک نسبت کوچک شده است (هر کدام از اضلاع نصف اضلاع متناظرش می‌باشد).

ولی متوازی‌الاضلاع (۳) با هیچ‌یک از دو متوازی‌الاضلاع دیگر از حیث ساختمان یکی نیست. زیرا علاوه بر آن که تناسبی بین اضلاع متوازی‌الاضلاع (۳) با اضلاع متناظر دو متوازی‌الاضلاع (۱) و (۲) وجود ندارد زاویه‌های آنها هم مساوی نیستند (هریک از این دو اختلاف جداگانه برای آن که دو شکل متشابه نباشند کافی است).

حال که به کمک مثالهای فوق مفاهیمی از تشابه به دست آمد، اکنون به تعریف و توضیح علمی آن می‌پردازیم.

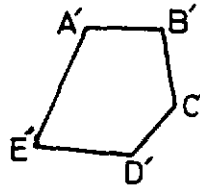
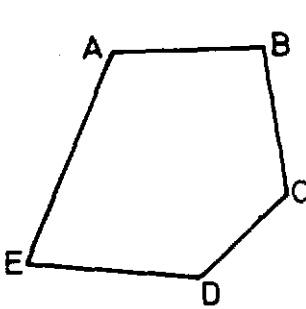
تشابه چندضلعیها

دو ضلعی را متشابه گوئیم هرگاه بتوان آن‌دورا به صورتهای $ABCD \dots K$ و $A'B'C'D' \dots K'$ چنان نامگذاری کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\angle A = \angle A' \text{ و } \angle B = \angle B' \text{ و } \angle C = \angle C' \text{ و } \dots \text{ و } \angle K = \angle K' \quad (\text{الف})$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots = \frac{KA}{K'A'} \quad (\text{ب})$$

مثلا دو پنج ضلعی $ABCDE$ و $A'B'C'D'E'$ متشابهند در صورتی که :



$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B' \\ \angle C &= \angle C' \\ \angle D &= \angle D' \\ \angle E &= \angle E' \end{aligned}$$

باشند و

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}$$

نسبت اضلاع متناظر یعنی $\frac{A'B'}{AB}$ یا $\frac{AB}{A'B'}$ را نسبت تشابه دو چند ضلعی می نامند .

به طور کلی اگر F و F' دو شکل متشابه باشند چنین می نویسند: $F \sim F'$ و چنین می خوانند: شکل F متشابه است با شکل F' .

از تعاریف بالا چنین بر می آید که :

الف - هر شکل با خودش متشابه است $F \sim F$

ب - اگر $F \sim F'$ باشد ، نتیجه می شود که $F' \sim F$

ج - از $F \sim F'$ و $F' \sim F''$ نتیجه می شود که $F \sim F''$.

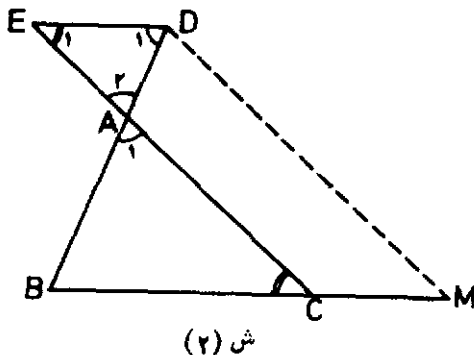
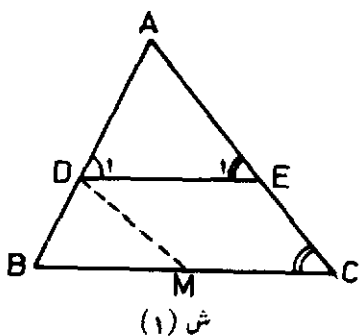
تشابه دومثلث

می دانیم وقتی که دو مثلث مساوی باشند ، سه ضلع و سه زاویه دومثلث نظیر به نظیر مساویند . ولی به علت ویژگیهای مثلث دیده ایم که اگر بعضی از اجزای دومثلث مساوی باشند سایر اجزا خود به خود نظیر به نظیر مساوی می شوند . از آن جمله ثابت شده است که مثلا برای تساوی دو مثلث کافی است که دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع از يك مثلث با دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند . در تشابه دومثلث نیز به خاطر ویژگیهای آن خواهیم دید که لازم نیست هر دو شرط تشابه یکجا وجود داشته باشد ، بدین معنی که وجود یکی از دو شرط ، یا قسمتی از هر دو شرط کفایت می کند که به صورت قضیه های تشابه دومثلث بیان می شوند ،

ولی قبل از عنوان قضیه‌های تشابه دو مثلث به اثبات قضیه زیر که آن را قضیه اصلی تشابه می‌نامیم می‌پردازیم :

قضیه اصلی تشابه دو مثلث - خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود ، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع می‌نماید و مثلثی پدید می‌آورد که با مثلث اصلی متشابه است .

پروهان - در شکل‌های (۱) و (۲) خط DE موازی ضلع BC رسم شده است ، و اضلاع AB و AC را در شکل (۱) و امتداد آنها را در شکل (۲) قطع نموده است ، می‌خواهیم ثابت کنیم دو مثلث ABC و ADE متشابهند ، یعنی باید برقراری دو شرط تشابه ، که زاویه‌ها نظیر به نظیر مساوی و اضلاع نظیر به نظیر متناسبند ، ثابت شود .



در شکل (۱) زاویه A در هر دو مثلث مشترك است و در شکل (۲) $\angle A_1 = \angle A_2$ چون دو زاویه متقابل به رأس هستند ؛ و $\angle B = \angle D_1$ و $\angle C = \angle E_1$ (دلیل مساوی بودن این زاویه‌ها را در هر دو شکل بیان کنید).

بنابراین زاویه‌های دو مثلث ABC و ADE نظیر به نظیر مساویند (یک شرط تشابه) . حال خط DM را موازی AC رسم می‌نماییم ، در مثلث ABC بنا بر قضیه تالس داریم :

$$(۱) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{MC}{BC}$$

چون MC مساوی DE است (چرا ؟) پس رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(۲) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

از طرفی چون DE موازی BC است ، بنا به قضیه تالس داریم :

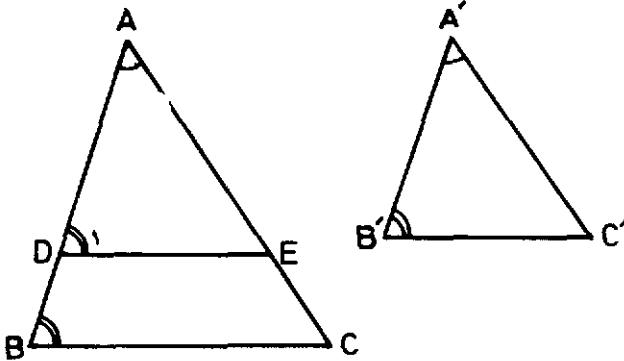
$$(۳) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

از تساویهای (۲) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{شرط دیگر تشابه})$$

یعنی اضلاع دو مثلث ADE و ABC نظیر به نظیر متناسبند ، بنابراین دو مثلث مذکور متشابه می‌شوند .

قضیه - هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند ، دو مثلث متشابهند .

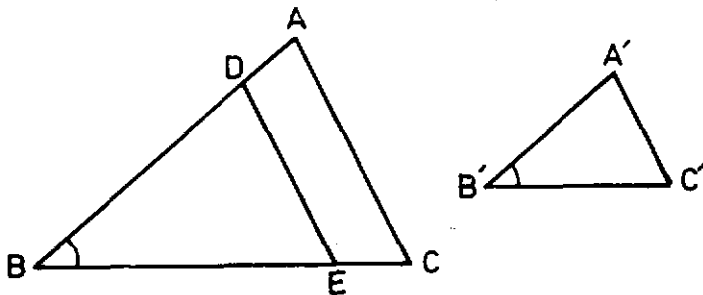


در شکل مقابل
به فرض $\angle A = \angle A'$ و
 $\angle B = \angle B'$ می‌خواهیم
ثابت کنیم

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
پرهان - در روی
ضلع AB از مثلث ABC
پاره‌خط AD را مساوی

A'B' جدا می‌کنیم و از نقطه D خط DE را موازی BC رسم می‌کنیم ؛ چون بنا به فرض $\angle B = \angle B'$ و از طرفی $\angle B = \angle D$ (چرا؟) ، پس $\angle D = \angle B'$ و در نتیجه دو مثلث ADE و A'B'C' در حالت (زضز) با هم مساوی می‌شوند . چون DE موازی BC شده است ، بنابراین قضیه اصلی تشابه دو مثلث ، دو مثلث ADE و ABC متشابهند و چون $\triangle ADE = \triangle A'B'C'$ پس $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است .

قضیه - هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر متناسب و زاویه بین آنها مساوی باشند ، دو مثلث متشابهند .



در شکل بالا به فرض :

$$\angle B = \angle B'$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

و

باید ثابت کنیم: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

پرهان - مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC قرار می‌دهیم به قسمی که زاویه B' روی زاویه B که مساوی آن است قرار گرفته و به‌وضع جدید DBE درآید؛ حال کافی است ثابت کنیم مثلث DBE با مثلث ABC متشابه است. در فرض داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

چون در این تساوی به جای $A'B'$ و $B'C'$ به ترتیب پاره‌خطهای BD و BE مساویهای آنها را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{BE}{BC}$$

از این تناسب نتیجه می‌گیریم که بنا به عکس قضیه تالس DE موازی AC است و دومثلث DBE و ABC بنا به قضیه اصلی تشابه دومثلث متشابه می‌شوند و چون دومثلث BDE و $A'B'C'$ مساویند پس دومثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه می‌شوند.

قضیه - هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر متناسب باشند،

دومثلث متشابهند.

در شکل مقابل

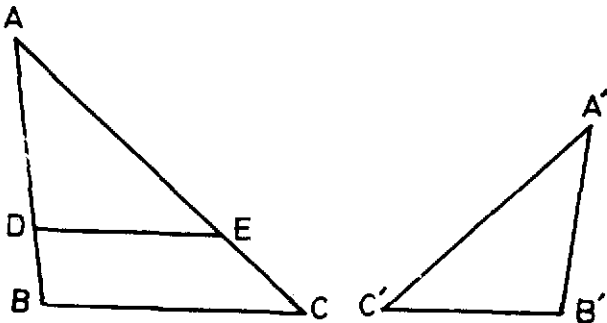
به فرض داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

باید ثابت کنیم:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

پرهان - در روی



ضلعهای AB و AC از مثلث ABC پاره‌خطهای AD و AE را به ترتیب مساوی $A'B'$ و $A'C'$ جدا نموده و دو نقطه D و E را بهم وصل می‌کنیم در فرض داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

در این تساوی به جای $A'B'$ و $A'C'$ مساویهای آنها AD و AE را قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

پس بنا به عکس قضیه تالس DE موازی BC می‌شود و در نتیجه بنا به قضیه اصلی تشابه

دومثلث، دومثلث ADE و ABC متشابهند و داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

از مقایسه این نسبتها با نسبتهای فرض قضیه نتیجه می شود که $DE = B'C'$ بنابراین دو مثلث ADE و $A'B'C'$ در حالت (ض ض ض) با هم مساویند و چون $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ پس $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

تشابه دو مثلث قائم الزاویه

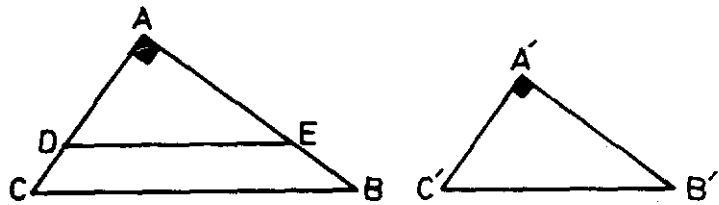
قضیه - اگر یک زاویه حاده از یک مثلث قائم الزاویه با یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه دیگر مساوی باشند، دو مثلث متشابهند.

اثبات به عهده دانش آموزان است.

قضیه - اگر دو ضلع زاویه قائمه از یک مثلث قائم الزاویه با دو ضلع زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه دیگر نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.

اثبات به عهده دانش آموزان است.

قضیه - اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگر نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابهند.



در شکل بالا بنا به فرض: $\angle A = \angle A' = 90^\circ$ و $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ ، می خواهیم ثابت

کنیم: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

پرهان - در روی ضلع AB پاره خط AE را مساوی $A'B'$ جدا می کنیم و از نقطه E خط

ED را موازی BC رسم می کنیم، در نتیجه $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ است (چرا؟) و از آنجا داریم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

از مقایسه این تناسب با تناسب فرض قضیه $(\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC})$ و با توجه به این که

$AE = A'B'$ است، نتیجه می شود که $DE = B'C'$ و دو مثلث قائم الزاویه ADE و $A'B'C'$

در حالت تساوی نظیر به نظیر وتر و یک ضلع با هم مساوی می شوند، و چون $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

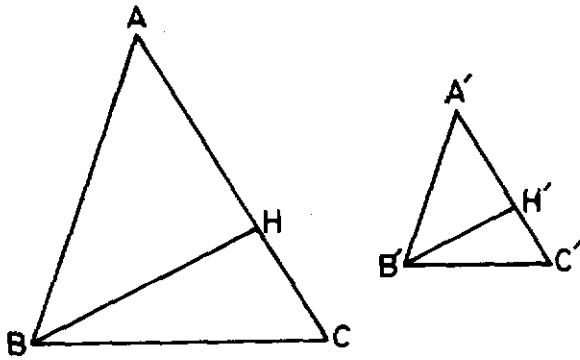
است پس $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

پروش - در دو مثلث متساوی الساقین ABC و A'B'C' به رأسهای A و A' داریم :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad ; \quad \text{آیا دو مثلث متشابهند (چرا؟) .}$$

نسبت مساحت‌های دو چند ضلعی متشابه

قضیه - در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاعهای متناظر با نسبت تشابه دو مثلث برابر است.



بنابه فرض در شکل

مقابل دو مثلث A'B'C'

و ABC متشابهند و

اضلاع AB و BC و AC

به ترتیب با اضلاع A'B'

و B'C' و A'C' متناظرند

و B'H' \perp A'C' و

BH \perp AC

می‌خواهیم ثابت کنیم: $\frac{B'H'}{BH} = \frac{A'B'}{AB}$ (نسبت $k = \frac{A'B'}{AB}$ را نسبت تشابه گویند)

پرهان - چون $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است (اضلاع متناظر متناسبند و زوایا نظیر به نظیر

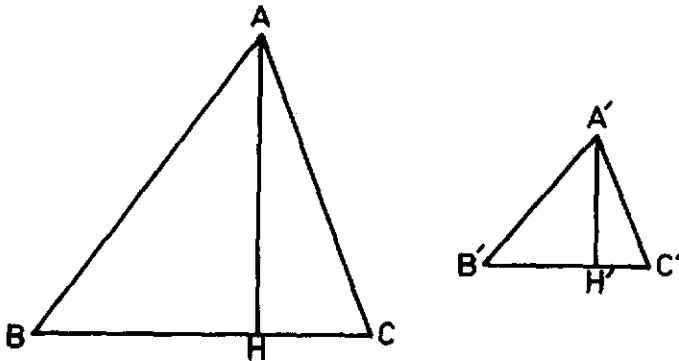
مساویند) پس $\angle A = \angle A'$ بنابراین دو مثلث قائم الزاویه ABH و A'B'H' در دو زاویه A و A'

مساویند، پس این دو مثلث قائم الزاویه متشابهند و در نتیجه $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'H'}{BH}$ یا $\frac{B'H'}{BH} = k$

قضیه - نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت تشابه آنهاست.

بنابه فرض در شکل زیر $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ و اضلاع AB و BC و AC به ترتیب با

اضلاع A'B' و B'C' و A'C' متناظرند و اگر نسبت تشابه دو مثلث k فرض شود، و S و S' به ترتیب



مساحت‌های مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ اختیار شوند، می‌خواهیم ثابت کنیم: $\frac{S'}{S} = k^2$.
 برهان - AH و $A'H'$ ارتفاع‌های وارد بر دو قاعده BC و $B'C'$ را در دو مثلث رسم می‌کنیم. داریم:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH \quad \text{و} \quad S' = \frac{1}{2} B'C' \cdot A'H'$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{B'C' \cdot A'H'}{BC \cdot AH} \quad \text{پس}$$

$$\frac{B'C'}{BC} = k \quad \text{و} \quad \frac{A'H'}{AH} = k \quad \text{اما}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{B'C'}{BC} \times \frac{A'H'}{AH} = k \cdot k = k^2 \quad \text{پس}$$

$$\frac{S'}{S} = k^2 \quad \text{یا}$$

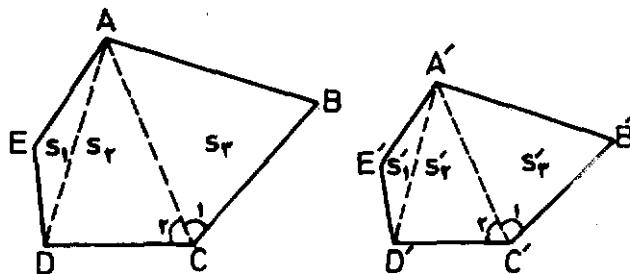
قضیه - نسبت مساحت‌های دو چند ضلعی متشابه مساوی توان دوم نسبت تشابه آنهاست.
 دو چند ضلعی $ABCDE$ و $A'B'C'D'E'$ متشابهند و بنابراین داریم:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = k$$

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{S'}{S} = k^2$$

(S' مساحت چند ضلعی $A'B'C'D'E'$ و S مساحت چند ضلعی $ABCDE$ می‌باشد).
 برهان - قطرهای دو چند ضلعی را از نقاط A و A' رسم می‌کنیم و مساحت مثلث‌های حاصل را s_1 و s_2 و s_3 و s_4 و s_1' و s_2' و s_3' و s_4' می‌نامیم. بسادگی ثابت می‌شود که



مثلث‌های متناظر متشابهند و در نتیجه داریم:

$$\frac{s_1'}{s_1} = \frac{s_2'}{s_2} = \frac{s_3'}{s_3} = \dots = k^2$$

و با استفاده از خاصیت تناسب خواهیم داشت :

$$\frac{s_1' + s_2' + s_3' + \dots}{s_1 + s_2 + s_3 + \dots} = k'$$

$$\frac{S'}{S} = k'$$

یا

نمونه

۱- کدام يك از گزاره‌های زیر درست و کدام يك نادرست است.

در دو چند ضلعی متشابه زاویه‌های متناظر مساوی یکدیگرند - يك لوزی که طول ضلع آن دو برابر طول ضلع لوزی دیگر باشد، با آن متشابه است - دو لوزی که هر يك دارای يك زاویه 30° باشند متشابهند - دو مستطیل که زاویه‌های حاده بین دو قطر آنها نظیر به نظیر مساوی باشند متشابهند - دو چند ضلعی متساوی متشابهند - دو مستطیل که اندازه درازا و پهنای یکی سه برابر درازا و پهنای دیگری باشد متشابهند - هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند - دو مثلث متساوی - الساقین که يك زاویه مجاور به قاعده از یکی با زاویه نظیر از مثلث دیگر مساوی باشد متشابهند - دو مثلث متشابهند و محیط یکی دو برابر محیط دیگری است؛ مساحت مثلث کوچکتر $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث بزرگتر است - نسبت مساحت دو متوازی الاضلاع متشابه به نسبت اضلاع آنها می باشد - در دو چند ضلعی متشابه اگر مساحت یکی ۹ برابر مساحت دیگری باشد اضلاع چند ضلعی بزرگتر سه برابر اضلاع متناظر از چند ضلعی کوچکتر است.

۲- A و B و C زاویه‌ها و a و b و c به ترتیب اضلاع مقابل به این زاویه‌ها در مثلث

ABC می باشند و A' و B' و C' و a' و b' و c' زاویه‌ها و اضلاع مثلث A'B'C' می باشند؛ در کدام يك از حالات زیر دو مثلث ABC و A'B'C' متشابهند (طول اضلاع بر حسب سانتیمتر می باشد).

(الف) $\angle C' = 70^\circ$ ، $\angle A' = 50^\circ$ و $\angle B = 50^\circ$ ، $\angle A = 60^\circ$

(ب) $\angle B' = 100^\circ$ ، $\angle A' = 60^\circ$ و $\angle B = 50^\circ$ ، $\angle A = 30^\circ$

(ج) $b' = 4/5$ ، $c' = 3$ ، $\angle A' = 75^\circ$ و $b = 3$ ، $a = 2$ ، $\angle C = 75^\circ$

(د) $\angle B' = \angle C'$ و $\angle A' = 40^\circ$ و $\angle A = \angle B = 70^\circ$

(ه) $a' = 6$ ، $b' = 9$ ، $\angle C' = 45^\circ$ و $b = 15$ ، $c = 10$ ، $\angle A = 45^\circ$

(و) $a' = 10$ ، $b' = 6$ ، $\angle C' = 60^\circ$ و $a = 5$ ، $b = 3$ ، $\angle C = 30^\circ$

(ز) $\angle B' = 60^\circ$ ، $\angle C' = 80^\circ$ ، $a' = 4$ و $\angle B = 30^\circ$ ، $\angle C = 40^\circ$ ، $a = 2$

(ح) $a' = 3$ ، $b' = 4/5$ ، $c' = 6$ و $c = 4$ ، $b = 3$ ، $a = 2$

(ط) $a' = 9$ ، $b' = 6$ ، $c' = 12$ و $c = 8$ ، $b = 6$ ، $a = 4$

$$y) \quad a' = 5, b' = 6, c' = 8 \text{ و } c = 10, b = 6, a = 5$$

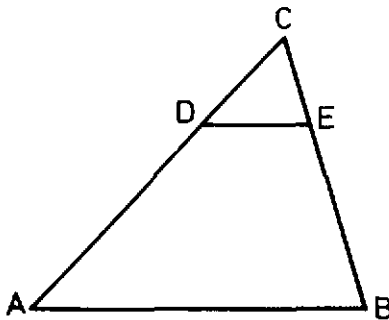
$$k) \quad \angle A' = \angle B' = 60^\circ, \text{ و } a = b = c = 4$$

$$l) \quad \frac{\angle C'}{2} = \angle B' = 30^\circ \text{ و } \frac{\angle A - \angle B}{2} = 15^\circ, \frac{\angle A + \angle B}{2} = 45^\circ$$

۳- دو مثلث متشابهند، اندازه‌های سه ضلع یکی ۱۲ سانتیمتر و ۱۵ سانتیمتر و ۲۱ سانتیمتر است و محیط مثلث دیگر ۱۶ سانتیمتر می‌باشد، اندازه ضلعهای مثلث دیگر را حساب کنید.

۴- دو مثلث متشابهند، اندازه‌های دو ضلع از یک مثلث ۱۲ سانتیمتر و ۱۰ سانتیمتر و اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر ۸ سانتیمتر و ۱۰ سانتیمتر است، اندازه ضلع سوم هر دو مثلث را حساب کنید.

۵- دو مثلث متشابهند، نسبت محیط آنها به یکدیگر مثل ۲ است به ۳، اگر اضلاع یکی از مثلثها ۶، ۹ و ۱۲ سانتیمتر باشد، اندازه‌های سه ضلع دیگری را حساب کنید.
(مسئله دوجواب دارد، هر دو جواب را به دست آورید)

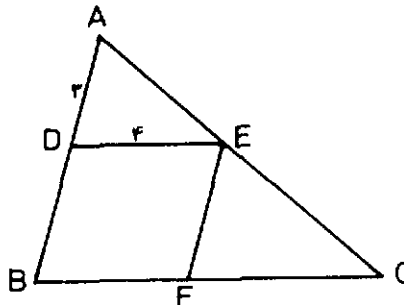


۶- در شکل مقابل $AB \parallel DE$ است.

الف) اگر $DE = 6$ و $AB = 15$ و $CD = 5$ باشند (واحد برای هر سه پاره خط سانتیمتر است) اندازه ضلع CA را حساب کنید.

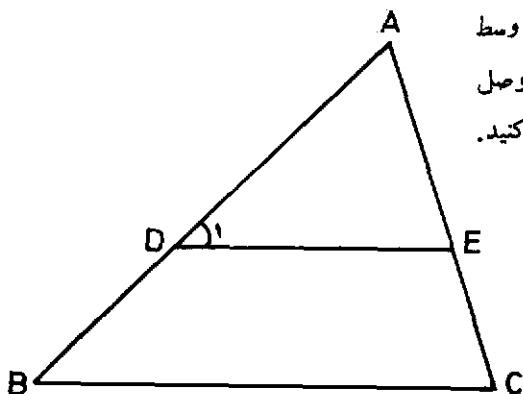
ب) اگر $DE = \frac{2}{3} AB$ و $CE = 4$ و $AB = 12$ سانتیمتر باشد، EB و CB را حساب کنید.

۷- در شکل زیر $EF \parallel AB$ و $DE \parallel BC$ و $AD = 3$ سانتیمتر و $DE = 4$ سانتیمتر و $FC = 5$ سانتیمتر است، اندازه BD را حساب کنید.



۸- اندازه سه ضلع مثلث ۶ سانتیمتر و ۸ سانتیمتر و ۱۰ سانتیمتر است؛ خطی از وسط ضلع بزرگتر به وسط کوچکترین ضلع وصل شده است، طول اضلاع مثلث حاصل را حساب کنید.

۹- در شکل مقابل با کدام یک از شرایط زیر DE موازی BC است :



(الف) $\angle D_1 = 70^\circ$ ، $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle C = 50^\circ$

(ب) $AB = 10$ ، $BD = 4$ ، $AE = 4/8$ ، $EC = 3/2$

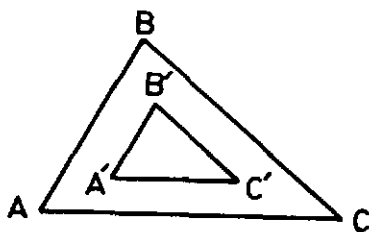
(ج) $DE = 5$ ، $BC = 12$ ، $AD = 3$ ، $BD = 4/2$

(د) $AE = 6$ ، $AB = 10$ ، $AD = 4/5$ ، $AC = 7/5$

(ه) $DE = 4$ ، $BC = 10$ ، $AE = 2$ ، $AB = 5$

(و) $DE = \frac{2}{3}BC$ ، $AD = 5$ ، $BD = 2/5$

(ز) $AB \cdot BD = AD \cdot EC$



(تمام اندازه‌ها با یک واحد اندازه‌گیری شده است).

۱۰- اضلاع دو مثلث ABC و

$A'B'C'$ نظیر به نظیر با هم موازیند

(مطابق شکل). ثابت کنید:

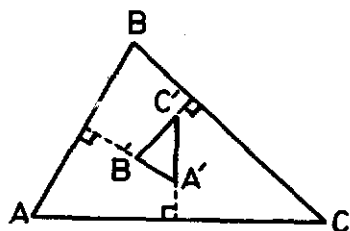
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است.

۱۱- اضلاع دو مثلث ABC و

$A'B'C'$ نظیر به نظیر برهم عمودند

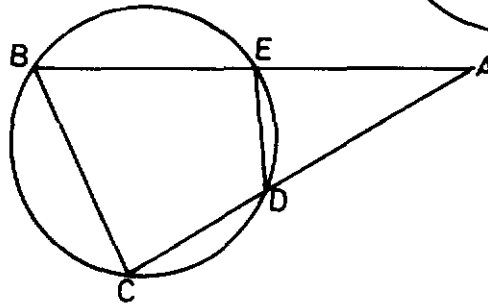
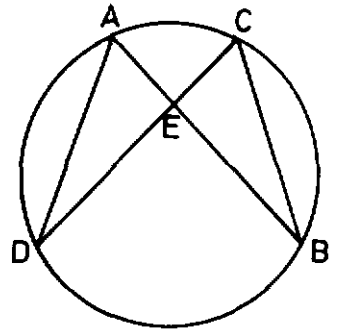
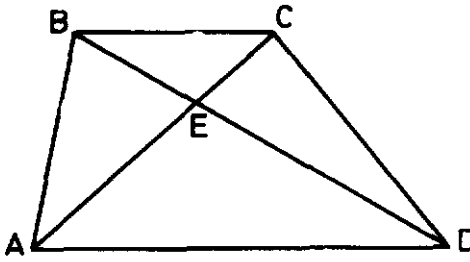
(مطابق شکل). ثابت کنید:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است.



۱۲- در هر کدام از سه شکل زیر دو مثلث متشابه وجود دارد، آنها را مشخص نموده و

علت تشابه آنها را بیان نمایید.

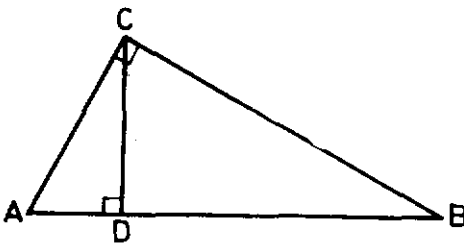


۱۳- در هر يك از شكلهاي زير ثابت كنيد مشاهاي خواسته شده با هم متشابهند .

(الف) $\angle D = \angle ACB = 90^\circ$

ثابت كنيد :

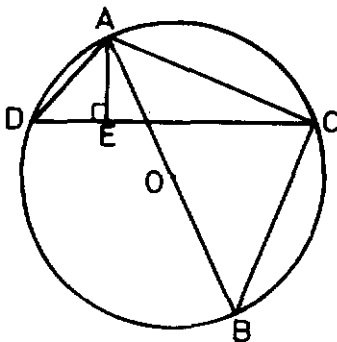
$\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (شكل الف)



شكل الف

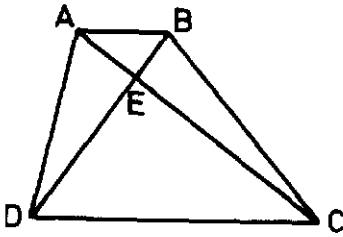
(ب) قطر دايره و $AE \perp DC$ ، ثابت كنيد:

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (شكل ج)



شكل ب

۱۴- شکلهای زیر را در نظر بگیرید .



شکل الف

در شکل الف) $AE = 4$ ، $BE = 3$ ، $DE = 9$ ،

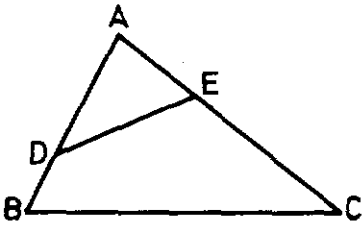
$CE = 12$ ثابت کنید :

$$\triangle AEB \sim \triangle DEC$$

در شکل ب) $AB = 12$ ، $AD = 9$ ، $AE = 6$ ،

$AC = 18$ ثابت کنید :

$$\triangle AED \sim \triangle ABC$$

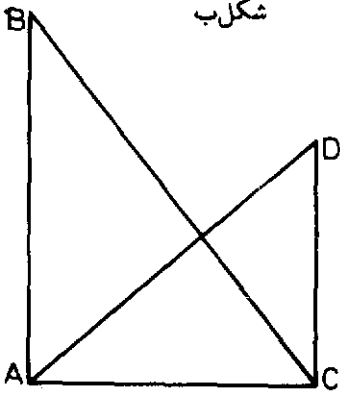


شکل ب

در شکل ج) $CD \perp AC$ ، $AB \perp AC$ ،

$AB = 25$ ، $DC = 16$ ، $AC = 20$ ثابت کنید :

$$\triangle ABC \sim \triangle ADC$$



شکل ج

۱۵- اگر نسبت تشابه دو مثلث $\frac{3}{4}$ باشد ، نسبت میانه‌های متناظر آن چیست ؟

۱۶- اضلاع مثلثی ۷ و ۶ و ۴ سانتیمتر می‌باشد ، مثلث دیگری است که با آن متشابه

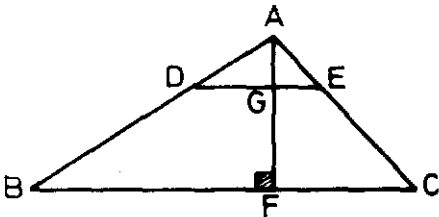
است و محیطش ۵۱ سانتیمتر می‌باشد ، اضلاع مثلث دوم را حساب کنید .

۱۷- در شکل مقابل داریم :

$AG = 3$ ، $AF = 10$ ، $AF \perp BC$

$DE \parallel BC$ ، $BC = 25$ ؛ اندازه ضلع DE

را به دست آورید .



۱۸- اگر نسبت اضلاع متناظر دو چندضلعی متشابه $\frac{4}{3}$ باشد ، نسبت محیط آنها چیست ؟

۱۹- نسبت محیط دو چهارضلعی متشابه $\frac{5}{4}$ است ؛ اگر یک ضلع از چهارضلعی کوچکتر

مساوی ۸ سانتیمتر باشد ، ضلع متناظر آن در چهارضلعی بزرگتر چیست ؟

رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه

(۱-۲) - کلیات

بین اجزای خطی هر شکل هندسی رابطه‌هایی می‌توان یافت که به اندازه‌های آنها بستگی ندارند، از این جمله آن است که

- در مثلث سه ارتفاع هم‌رسند.

- در دایره قطر عمود بر یک وتر نیمساز زاویه مرکزی مقابل به آن وتر است.

- خطی که وسط‌های دو ضلع از مثلثی را بهم وصل می‌کند با ضلع سوم مثلث موازی است.

و

در این گونه رابطه‌ها آنچه به عنوان یک خط یا یک پاره خط دخالت دارد، مجموعه نقطه‌ها

است و یک مفهوم هندسی است.

گاهی رابطه بین اجزای خطی یک شکل بر حسب اندازه‌های آنهاست که با اعداد بیان می‌شوند، این گونه رابطه‌های بین اجزای خطی یک شکل هندسی را «رابطه‌های طولی» می‌گوییم.

یعنی :

رابطه‌های طولی رابطه‌هایی هستند که بین اندازه‌های اجزای خطی یک شکل برقرار باشند.

(۲-۲) - تصویر قائم بر یک خط

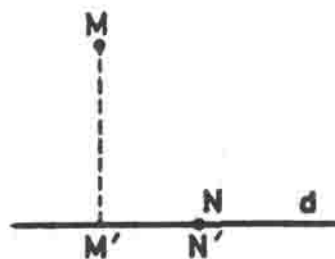
(۲-۲-۱) - تصویر نقطه - تصویر قائم نقطه مفروض

M بر خط d نقطه برخورد خط d با عمودی است که از

آن نقطه بر آن خط فرود می‌آید.

تصویر قائم هر نقطه M را بر خط مفروض d با

نماد $P_d M$ نمایش می‌دهیم.



شکل (۲ - ۱)

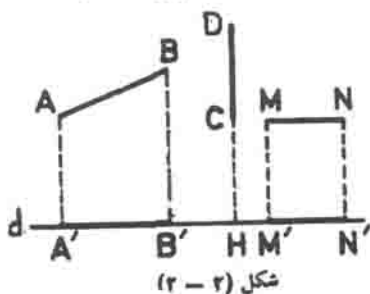
۱ - رابطه‌های طولی را به آن اعتبار که به اندازه‌ها مربوط هستند گاهی «رابطه‌های متری»

گفته‌اند.

در شکل (۲-۲)، $P_d^M = M'$ است. در تصویر، خط d را محور تصویر و پاره خط MM' را مَصَوِّرِ نقطه M بر آن خط می‌گوییم. از این تعریف نتیجه می‌شود که هر نقطه مفروض بر محور تنها يك تصویر قائم دارد.

اگر نقطه‌ای بر محور تصویر واقع باشد، تصویرش بر آن محور، برخود آن نقطه منطبق است (چون در این کتاب بانوع دیگری از تصویر سروکار نداریم، از این به بعد بجای «تصویر قائم» به اختصار «تصویر» می‌گوییم).

(۲-۲-۲) - تصویر يك پاره خط - تصویر هر پاره خط بر محوری که با آن در يك صفحه واقع باشد، پاره خطی است که دوسر آن تصویرهای ابتدا و انتهای آن پاره خط باشند.



در شکل (۲-۲)،

$$P_d^{AB} = A'B'$$

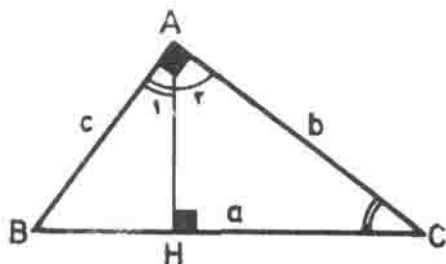
اگر خطی پاره خطی بر محور تصویر عمود باشد، تصویر آن منحصر به يك نقطه است. مانند پاره خط CD در شکل (۲-۲) که تصویر آن همان نقطه H است.

در حالت کلی، اندازه تصویر قائم هر پاره خط بريك محور از اندازه آن پاره خط کوچکتر است، مگر در حالتی که پاره خط با محور تصویر موازی باشد که در این صورت تصویر پاره خط با آن مساوی است (چرا؟). مانند پاره خط MN در شکل (۲-۲).

(۳-۲) - رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه

(۱-۳-۲) - قضیه - در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه هر ضلع زاویه قائمه مساوی است

با حاصل ضرب اندازه وتر در اندازه تصویر آن ضلع بر وتر.



شکل (۳-۲)

یعنی اگر در مثلث ABC شکل

$$\widehat{A} = 90^\circ \text{ و } AH \text{ ارتفاع نظیر وتر}$$

باشد:

$$AB^2 = BC \cdot BH$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \quad \text{و}$$

برهان - برای اثبات قضیه ملاحظه می کنیم که در دو مثلث HAB و ACB :

$$\angle A = \angle H \quad (\text{هر دو قائمه اند})$$

$$\angle C = \angle A_1 \quad (\text{هر دو متمم } \angle A_2 \text{ هستند})$$

بنابراین دو مثلث متشابهند و در نتیجه

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \quad \text{به دلیل مشابه ثابت می شود که}$$

اگر در هر مثلث ABC اندازه های اضلاع مقابل به رأسهای A و B و C را به ترتیب

با a و b و c ، که هم نام رأسهای مقابل آنها هستند، نمایش دهیم، دورابطه بالا به صورتهای ساده زیر نوشته می شوند :

$$c^2 = a \cdot BH \quad \text{و} \quad b^2 = a \cdot CH$$

قضیه را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد :

در هر مثلث قائم الزاویه هر ضلع زاویه قائمه واسطه هندسی است بین وتر و تصویر قائم

آن ضلع بر وتر .

مسئله - در مثلث قائم الزاویه ای اندازه يك ضلع زاویه قائمه 8 سانتیمتر و اندازه تصویر

آن ضلع بر وتر $6/4$ سانتیمتر است. اضلاع مثلث را حساب کنید .

حل - اگر در مثلث ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ و ضلع سانتیمتر $b = 8$ باشد :

$$b^2 = a \cdot CH \Rightarrow 8^2 = 6/4 a \Rightarrow a = 10$$

و چون $BH = a - CH$ است :

$$[c^2 = a \cdot BH \Rightarrow c^2 = 36] \Rightarrow c = 6$$

تمرین

۱ - در مثلث قائم الزاویه ای اندازه وتر 20 سانتیمتر است و ارتفاع نظیر وتر بر آن ضلع

دوپاره خط متناسب با اعداد 16 و 9 جدا می کند. اضلاع مثلث را حساب کنید .

۲ - در مثلث قائم الزاویه ای اندازه يك ضلع زاویه قائمه 8 سانتیمتر و اندازه تصویر آن

بر وتر 2 سانتیمتر است، سایر اضلاع مثلث را حساب کنید .

۳ - در مثلث قائم الزاویه ای اندازه های دوپاره خطی که ارتفاع نظیر رأس قائمه بر وتر

جدا می کند $m^2 a$ و $(1 - m^2)a$ هستند (m عددی حقیقی است). اندازه های سه ضلع مثلث را

بر حسب a و m حساب کنید (به ازاء مقادیر مختلف m بحث کنید).

۴ - بر پاره خط AB نقطه ای مانند C اختیار کرده و دو نیم دایره یکی به قطر AB و

دیگری به قطر AC در یک طرف AB رسم می‌کنیم. بر قطر AC نقطه D را اختیار کرده و از این نقطه خطی برخط AB عمود می‌کنیم تا دو نیم‌دایره را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند، ثابت کنید $\frac{AM^2}{AN^2}$ مقدار ثابتی است و بموضع نقطه D بر پاره خط AC بستگی ندارد.

(۲-۳-۲) - قضیه - (قضیه فیثاغورس) - در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازه وتر برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر.

یعنی اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، شکل (۲-۳)،

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{یا} \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$$

برهان - بنا به قضیه قبل:

$$b^2 = a \cdot CH$$

$$c^2 = a \cdot BH$$

چون این دو تساوی را عضو به عضو باهم جمع کنیم

$$b^2 + c^2 = a \cdot CH + a \cdot BH$$

$$= a(CH + BH)$$

$$CH + BH = a \quad \text{است}$$

و چون

$$b^2 + c^2 = a^2$$

نتیجه - در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازه هر ضلع زاویه قائمه با فزونی مربع اندازه وتر بر مربع اندازه ضلع دیگر برابر است.

یعنی در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$):

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{و} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

(۲-۳-۳) - قضیه - (عکس قضیه فیثاغورس) - هرگاه در مثلثی مربع اندازه یک ضلع مساوی مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد، مثلث قائم‌الزاویه است.

برهان - مثلثی به اضلاع a و b و c در نظر

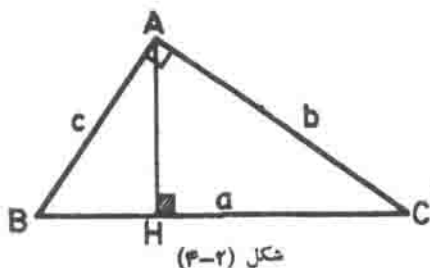
می‌گیریم چنان‌که $a^2 = b^2 + c^2$ باشد. بر اضلاع

Ox و Oy از زاویه قائمه xOy، شکل (۳-۲)

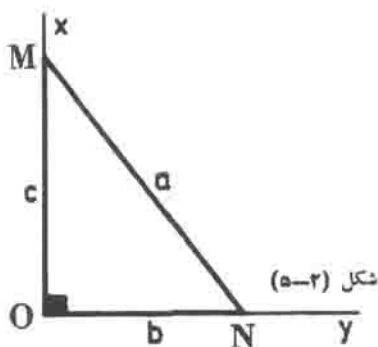
دو پاره خط $OM = c$ و $ON = b$ را جدا کرده و نقاط M و N را بهم می‌پیوندیم. در مثلث

قائم‌الزاویه OMN بنا به قضیه ۲:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 = c^2 + b^2$$



شکل (۲-۳)



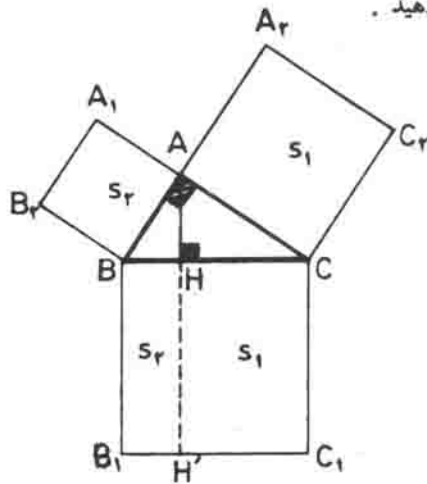
شکل (۳-۲)

۳ - در مثلثی اندازه‌های دوطرف به ترتیب ۱۲ و ۲۴ سانتیمتر و زاویه بین آنها 60° است، اندازه ضلع سوم و ارتفاعهای مثلث را تعیین کنید .

۴ - از نقطه M وسط ضلع AB از مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس A قائمه‌است عمودی بر وتر BC فرود می‌آوریم تا آن را در نقطه N قطع کند، ثابت کنید :

$$NC^2 - NB^2 = AC^2$$

۵ - اگر مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه باشد، به کمک شکل (۷-۲) درستی قضیه فیثاغورس را نشان دهید .



شکل (۷-۲)

(۲ - ۳ - ۴) - قضیه - در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازه ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های پاره‌خطهایی که پای ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد.
به بیان دیگر :

در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر و ترواسطه هندسی است بین دو پاره خطی که پای ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد .

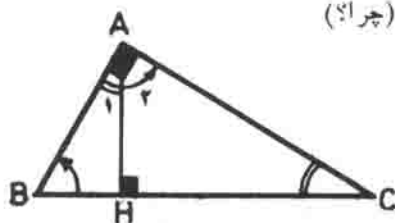
برهان - اگر مثلث ABC شکل (۸-۲) در رأس A قائم‌الزاویه باشد ، در دو مثلث

قائم‌الزاویه AHB و AHC

$$\angle A_1 = \angle C \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA \quad (\text{چرا؟})$$

از تشابه دو مثلث مزبور حاصل می‌شود،

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$



شکل (۸-۲)

(۲-۳) - قضیه - در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه برابر است با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر .

برهان - در شکل (۲-۸) مساحت مثلث قائم الزاویه ABC (قائمه در رأس A) را با حرف S نشان می دهیم و ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می کنیم و ملاحظه می کنیم که اگر ضلع AB

را قاعده مثلث بگیریم ، AC ارتفاع مثلث می شود و داریم

$$(۱) \quad S = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

و چنانچه BC و AH را قاعده و ارتفاع مثلث بگیریم داریم

$$(۲) \quad S = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

و از مقایسه تساویهای (۱) و (۲) واضح می شود که

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH$$

(۲-۴) - رسم واسطه هندسی دو پاره خط

دو پاره خط به اندازه های m و n مفروضند ، می خواهیم پاره خطی رسم کنیم که واسطه

هندسی بین آن دو پاره خط باشد .

حل- با استفاده از قضیه ۴ ، کافی

است مثلث قائم الزاویه ای رسم کنیم که

پاره خطهایی که ارتفاع بر وتر آن جدا

می کند به اندازه های m و n باشند .

بنابراین مسئله را به صورتی که در شکل

(۲-۹) دیده می شود حل می کنیم .

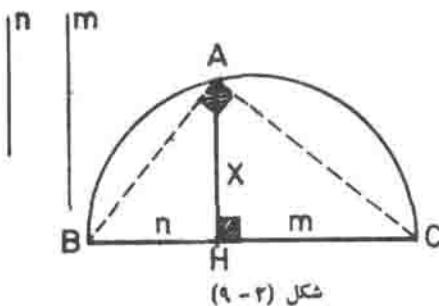
(به چه طریق ؟) با توجه به این که ،

$$x^2 = m \cdot n$$

است ، پاره خط AH همان پاره خط مطلوب خواهد بود .

آیامی توانید با استفاده از شکل (۲-۱۰) و ویژگی دیگری از مثلث قائم الزاویه راه حل دیگر

مسئله را پیدا کنید ؟



شکل (۲-۹)

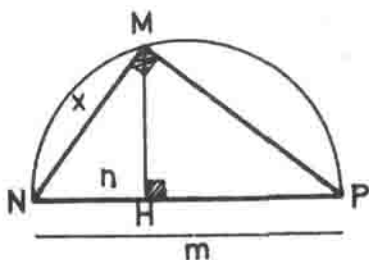
(۲-۵) - حل مسئله های نمونه

مسئله ۱ - در مثلث قائم الزاویه ای

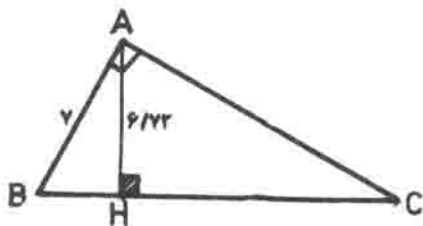
یک ضلع زاویه قائمه ۷ سانتیمتر و ارتفاع

وارد بر وتر آن ۶٫۷۲ سانتیمتر است ،

سایر اضلاع مثلث را تعیین کنید .



شکل (۲-۱۰)



شکل (۲ - ۱۱)

حل - اگر مثلث ABC شکل
 (۲-۱۱)، در رأس A قائم الزاویه و AH
 ارتفاع وارد بر وتر آن باشد، به موجب
 قضایایی که ثابت شد :

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 49 - 36/121 = 49 \cdot 121 - 36 / 121 \Rightarrow BH = 1/96$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow 49 = 1/96 BC \quad : \text{ در مثل قائم الزاویه } ABC$$

و در نتیجه $BC = 25$ سانتیمتر است، بنابراین :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 625 - 49 = 576$$

و از آنجا $AC = 24$ سانتیمتر به دست می آید.

مسئله ۳ - عدد m بزرگتر از يك را در نظر می گیریم. اگر اندازه های سه ضلع مثلثی
 $m^2 + 1$ و $m^2 - 1$ و $2m$ باشند، نوع مثلث را تعیین کنید. ثابت کنید این سه عدد در هر حال می تواند
 اندازه های سه ضلع يك مثلث باشند.

حل - با ملاحظه آن که

$$(m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2$$

یعنی، مجموع مربعات دو عدد اخیر مساوی مربع عدد اولی است. وجود این رابطه بین
 اعداد مزبور نشان می دهد که این اعداد می توانند اندازه های سه ضلع يك مثلث قائم الزاویه باشند.
 از مجموعه اعداد مفروض به ازای مقادیر مختلف m مجموعه های سه عضوی متعدد
 می توان به دست آورد که اعضای هر مجموعه اندازه های اضلاع يك مثلث قائم الزاویه اند. چنان
 که به ازای $m = 2$ ، $a = m^2 + 1 = 5$ و $b = m^2 - 1 = 3$ و $c = 2m = 4$ اندازه های
 سه ضلع يك مثلث قائم الزاویه مشخص می شوند.

به ازای $m = 3$ ، $a = 10$ و $b = 8$ و $c = 6$ ، اندازه های اضلاع مثلث قائم الزاویه

دیگری به دست می آیند.

و اگر $m = 4$ باشد، $a = 17$ و $b = 15$ و $c = 8$ حاصل می شوند که اندازه اضلاع

مثلث قائم الزاویه دیگری هستند.

به همین ترتیب مجموعه های سه عضوی عددهای درستی می توان مشخص کرد که عضوهای

هر مجموعه اندازه های سه ضلع يك مثلث قائم الزاویه اند. به ازای هر عدد حقیقی m از عبارات

فوق مجموعه اندازه های اضلاع يك مثلث قائم الزاویه مشخص می شوند.

مجموعه های سه عضوی اعداد درستی را که اضلاع يك مثلث قائم الزاویه اند،

عددهای فیثاغورسی می گوئیم.

برای اینکه سه عدد مذکور در هر حال اندازه های سه ضلع يك مثلث باشند، باید نامساویهای مثلثی برقرار باشند، بنابراین

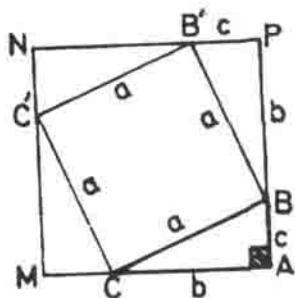
$$m^2 + 1 < (m^2 - 1) + 2m \Rightarrow m > 1$$

$$2m > (m^2 + 1) - (m^2 - 1) \Rightarrow m > 1$$

و این شرط بنا بر فرض مسئله برقرار و حکم ثابت است.
در خواندنی شماره ۲ این کتاب درباره این گونه اعداد توضیح بیشتری داده شده است.

تمرین

- ۱- در مثلث قائم الزاویه ای ارتفاع وارد بر وتر ۲۴ سانتیمتر و دو پاره خطی که ارتفاع بر وتر پدید می آورد به نسبت ۹ و ۱۶ هستند. هر يك از اضلاع مثلث را تعیین کنید.
- ۲- در دوزنقه متساوی الساقینی اندازه های دو قاعده ۱۴ و ۲۶ سانتیمتر و اندازه هر قطر ۲۴ سانتیمتر است، اولاً روش ترسیم دوزنقه را بیان کنید، ثانیاً اندازه های ارتفاع و هر يك از دوساق را تعیین کنید.
- ۳- ثابت کنید اگر دو قطر يك دوزنقه قائم الزاویه بر هم عمود باشند، ارتفاع دوزنقه واسطه هندسی بین دو قاعده است.
- ۴- دوزنقه متساوی الساقینی بريك دایره محیط است، ثابت کنید قطر دایره واسطه هندسی بین دو قاعده دوزنقه است.
- ۵- نقطه P را بر نیمدایره ای به قطر AB اختیار کرده و از نقطه اختیاری H واقع بر قطر AB عمودی بر آن قطر اخراج می کنیم تا دو خط AP و BP را به ترتیب در نقاط C و D و نیمدایره را در نقطه F قطع کند، ثابت کنید پاره خط HF واسطه هندسی بین دو پاره خط HD و HC است.



شکل (۲-۱۴)

- ۶- اگر مثلث ABC در رأس A قائم الزاویه باشد، با استفاده از شکل (۲-۱۲) درستی قضیه فیثاغورس را نشان دهید.

هر سه عدد حقیقی، درست و مثبت که مربع یکی از آنها مساوی مجموع مربعات دو عدد دیگر باشد، از آن جهت که اندازه‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند، عددهای فیثاغورسی نامیده می‌شوند. مانند اعداد ۳ و ۴ و ۵ و هر مضرب دلخواه آنها چون $3k$ و $4k$ و $5k$.

ریشهٔ اندیشه را دربارهٔ عددهای فیثاغورسی در مصر قدیم باید جستجو کرد. زیرا مسلم است که مصریان با کمک زیسمانهایی با اندازه‌های متناسب با عددهای ۳ و ۴ و ۵ مثلث قائم‌الزاویه و درحقیقت زاویه‌های قائمه می‌ساختند. با همان اطمینان می‌توان گفت که این کار مصریها مبتنی بر تجربه بوده است نه بر علم و اطلاع از رابطه‌ای مجرد دربارهٔ مثلث قائم‌الزاویه که در زمانی خیلی دیرتر به وسیلهٔ فیثاغورس مطرح گردید.

عددهای فیثاغورسی به ۳ و ۴ و ۵ یا مضربهای این سه عدد محدود نیستند. برای تعیین مجموعهٔ اعدادی از این گروه دستورهایی کلی می‌توان در نظر گرفت.

فرض می‌کنیم a و b و c سه عدد درست و مثبت و مخالف صفر و $a^2 = b^2 + c^2$ باشد، در این صورت $a^2 - b^2 = c^2$ یا $(a+b)(a-b) = c^2$ است. طرف اول این تساوی حاصل ضرب دو عامل است که مساوی یکدیگر نیستند، (چرا؟). پس اگر یکی از آنها مساوی cm باشد دیگری مساوی $\frac{c}{m}$ است و دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} a+b=cm \\ a-b=\frac{c}{m} \end{cases}$$

ازحل این دستگاه معادله‌ها $a = \frac{c(m^2+1)}{2m}$ و $b = \frac{c(m^2-1)}{2m}$

به دست می‌آید، اما a در صورتی عدد درست است که c مضرب $2m$ یا مضرب m باشد. اگر c مضرب زوج عدد m ، یعنی اگر $c = 2km$ باشد.

$$a = k(m^2+1) \quad \text{و} \quad b = k(m^2-1)$$

است و هر مجموعهٔ سه عضوی اعداد a و b و c که از دستورهایی فوق به ازای هر دو عدد

درست و مثبت اختیاری k و $m > 1$ به دست می‌آیند يك مجموعه اعداد فیثاغورسی هستند. اگر c مضرب فرد عدد m ، یعنی $c = (2k+1)m$ باشد،

$$a = \frac{(2k+1)(m^2+1)}{2}$$

است و این عدد در صورتی عدد درست است که m عددی فرد باشد. در این صورت

$$b = \frac{(2k+1)(m^2-1)}{2}$$

نیز عدد درستی خواهد بود؛ بنابراین هر مجموعه سه‌عضوی که از دستوره‌های اخیر به‌ازای هر عدد فرد $m < 1$ و عدد درست اختیاری k حاصل شود يك مجموعه اعداد فیثاغورسی است.

از دستوره‌های بالا با گرفتن $k=0$ و $k=1$ مجموعه‌هایی حاصل می‌شود که عضوه‌های آن $a = m^2 + 1$ و $b = m^2 - 1$ و $c = 2m$ یا $a = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$ و $b = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$ و $c = m$ (به‌ازای هر عدد فرد m) می‌باشند.

مشهورترین اعداد این مجموعه به‌ازای $m=2$ یا $m=3$ به دست می‌آیند که همان سه عدد ۵ و ۴ و ۳ هستند.

از دستوره‌های دیگر نیز برای تعیین اعداد فیثاغورسی می‌توان استفاده کرد. چنان‌که اگر u و v اعداد درست مثبت و $2uv$ مربع کامل باشد، سه عدد:

$$a = u + v + \sqrt{2uv} \quad b = u + v - \sqrt{2uv} \quad c = v + \sqrt{2uv}$$

اعداد فیثاغورسی تشکیل می‌دهند.

تحقیق کنید اگر $u=3$ باشد، عدد v را چگونه باید اختیار کرد تا a و b و c عددهای فیثاغورسی باشند.

چند ضلعیهای منتظم

(۳-۱) - تعریف

چند ضلعی منتظم آن است که همه اضلاع آن باهم و نیز همه زاویه‌های آن باهم مساوی باشند. مانند مثلث متساوی‌الاضلاع که سه زاویه آن مساوی یکدیگر و سه ضلعش نیز متساویند. یا مربع، که چهار ضلعی منتظم است. زیرا چهار زاویه آن مساوی هم و چهار ضلع آن نیز مساوی یکدیگرند.

(۳-۲) - خواص چند ضلعیهای منتظم

(۳-۲-۱) - قضیه - هر چند ضلعی منتظم قابل معاط شدن در یک دایره است.
برهان - دایره $C(O, R)$ را که بر سر رأس A و B و C چند ضلعی می‌گذرد رسم می‌کنیم، شکل (۳-۱).

در مثلث OBC داریم :

$$OB = OC \Rightarrow \angle B_1 = \angle C_1$$

و چون $\angle B = \angle C$ است، خواهیم داشت : $\angle B_1 = \angle C_1$

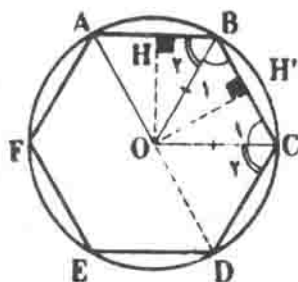
و در نتیجه

$$(AB = CD \text{ و } \angle B_1 = \angle C_1 \text{ و } OB = OC) \Rightarrow \triangle OAB = \triangle OCD$$

و بنابراین :

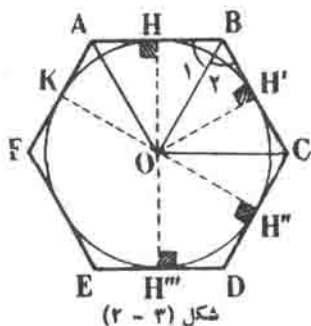
$$OD = OA \Rightarrow OD = R$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که سایر رأسهای چند ضلعی بر دایره $C(O, R)$ قرار دارند. پس چند ضلعی در دایره مزبور معاط است.



شکل (۳-۱)

(۳-۲-۲) - قضیه - هر چند ضلعی منتظم قابل محیط شدن بیک دایره است .



شکل (۳ - ۲)

برهان - نیمسازهای دوزاویه B و C از چند ضلعی

منتظم ... ABCDE ... یکدیگر را در نقطه ای مانند O قطع می کنند (چرا؟) ، و این نقطه از سه ضلع AB و BC و CD به یک فاصله است شکل (۳-۲). بنابراین دایره ای که به مرکز O و شعاع OH رسم می کنیم بر سه ضلع مزبور مماس است . اما دوشکل OBC و OAB به حالت (ض ز ض) متساویند ، پس

$$OA = OB = OC$$

و بنابراین نقطه O مرکز دایره محیطی چند ضلعی است. از طرفی اضلاع چند ضلعی وترهای متساوی از این دایره اند و از مرکز آن به یک فاصله اند، پس $OH'''' = OH$ و دایره مرسوم بر ضلع DE نیز مماس است .

به همین ترتیب ثابت می شود که همه اضلاع چند ضلعی بر دایره به مرکز O و شعاع OH' مماس هستند، یعنی چند ضلعی محیطی است .

هر چند ضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره و قابل محیط شدن بر دایره دیگر است . دایره های محاطی و محیطی چند ضلعی منتظم هم مرکزند. شعاعهایی از دایره ها که مرکز مشترک آنها را به رأسهای چند ضلعی وصل می کنند باهم زاویه های مرکزی متساوی تشکیل می دهند و زاویه های چند ضلعی را نصف می کنند .

در هر چند ضلعی منتظم پاره خطهایی که مرکز مشترک دایره محیطی و محاطی را به رأسها وصل می کنند، شعاع دایره محیطی هستند که گاهی با تسامح شعاع چند ضلعی منتظم گفته می شوند. پاره خطهایی را که از مرکز دایره بر اضلاع چند ضلعی عمود رسم می شوند و با شعاع دایره محاطی چند ضلعی مساویند، سهمای چند ضلعی می نامند . ثابت می شود که

(۳-۲-۳) - قضیه - اگر دایره ای را به چند کمان متساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم را متوالیاً با پارچه خطهایی به هم وصل کنیم ، یک چند ضلعی منتظم محاط در دایره پدید می آید .

(۳-۲-۴) - قضیه - اگر دایره ای را به چند کمان متساوی تقسیم کرده و در نقاط تقسیم مماسهایی بر آن رسم کنیم ، از برخورد مماسهای متوالی با یکدیگر چند ضلعی منتظم محیط بر دایره پدید می آید .

اثبات به عهده دانش‌آموزان است .

بنابراین :

هر دایره قابل محیط‌شدن بريك n ضلعی منتظم وقابل محاط‌شدن در n ضلعی منتظم دیگر است.

(۳-۲-۵) - اندازه زاویه n ضلعی منتظم — قبلاً ثابت کرده‌ایم که مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی گوی، $(2n-4)$ زاویه قائمه، یا $180^\circ \times (n-2)$ است. چون در n ضلعی

منتظم زاویه‌ها متساویند، اندازه هر زاویه درونی n ضلعی منتظم $180^\circ \times \frac{1}{n}(n-2)$ یا

برونی $180^\circ \times \frac{n-2}{n}$ است. و چون هر زاویه برونی مکمل يك زاویه درونی آن است، اندازه هر زاویه

برونی n ضلعی منتظم $180^\circ - \frac{n-2}{n} \times 180^\circ$ یا $\frac{360^\circ}{n}$ است.

تمرین

- ۱ - هر يك از عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که گزاره درست حاصل شود .
 - در هر چند ضلعی منتظم همه...ها با یکدیگر و همه...ها نیز باهم مساویند .
 - مربع يك چهارضلعی است .
 - مستطیل يك چهارضلعی قابل دایره است .
 - لوزی يك چهارضلعی قابل دایره است .
 - هر n ضلعی منتظم در يك دایره است .
 - هر زاویه يك ده ضلعی منتظم مساوی ... درجه است .
- ۲ - کدام يك از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است ؟
 - هر چند ضلعی منتظم قابل محیط‌شدن بر دایره است .
 - هر چند ضلعی محاط در دایره يك چند ضلعی منتظم است .
 - در هر چند ضلعی منتظم محاطی کمانهای نظیر اضلاع ، متساویند .
 - هر چند ضلعی محیطی يك چند ضلعی منتظم است .
 - بر هر چند ضلعی محاطی يك دایره محیط است .
 - چند ضلعی در صورتی منتظم است که همه اضلاع آن مساوی یکدیگر باشند .
 - در هر چند ضلعی منتظم همه اضلاع متساویند .
 - چند ضلعی محاطی که همه زاویه‌های آن مساوی یکدیگر باشند، يك چند ضلعی منتظم است .

۳ - بردایره‌ای پنج نقطه A و B و C و D و E را متوالیاً چنان اختیار کرده‌ایم که کمانهای AB و BC و CD و DE هر يك 72° است. آیا چند ضلعی محاطی $ABCDE$ چند ضلعی منتظم است؟

۴ - ثابت کنید:

۱) در هر پنج ضلعی منتظم، هر دو ضلع مجاور با دو قطر گذرنده از رأسهای غیر مشترک آنها لوزی تشکیل می‌دهند.

۲) هر قطر پنج ضلعی با یکی از اضلاع موازی است.

۳) از تلاقی قطرهای یکدیگر پنج ضلعی منتظم دیگری پدید می‌آید.

۵ - اندازه‌های هر يك از زاویه‌های چهارضلعی، شش ضلعی، هشت ضلعی، و دوازده ضلعی منتظم را حساب کنید.

۶ - ثابت کنید اگر متوازی‌الاضلعي بردایره محیط باشد، يك لوزی است.

۷ - ثابت کنید اگر متوازی‌الاضلعي در دایره محاط باشد، مستطیل یا مربع است.

۸ - ثابت کنید اگر متوازی‌الاضلعي در يك دایره محاط و بريك دایره دیگر محیط باشد، مربع است.

(۳-۳) - رابطه‌های طولی در چند ضلعیهای منتظم

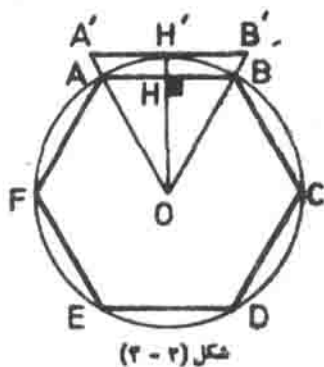
از خواص چند ضلعیهای منتظم راههایی برای ترسیم آنها، همچنین برای محاسبه اجزای آنها، می‌توان نتیجه گرفت. در این بخش بعضی از این راهها را مطالعه می‌کنیم.

(۳-۳-۱) - شش ضلعی منتظم - اگر شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ در دایره $C(O, R)$

محاط باشد، شکل (۳-۳)، $\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ و در نتیجه مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $AB = R$ و از این ویژگی برای رسم شش ضلعی منتظم محاط در دایره استفاده می‌شود. به این ترتیب که بردایره شش کمان متوالی که اندازه و وتر هر يك از آنها مساوی شعاع دایره باشد جدا کرده و نقاط تقسیم را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم.

اگر در نقاط تقسیم مماسهایی بردایره رسم کنیم، از برخورد آنها شش ضلعی منتظم محیط بردایره حاصل می‌شود.

اگر OH ارتفاع مثلث AOB باشد، $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (چرا؟).



اگر بردایره مماسی موازی وتر AB رسم کنیم و این مماس شعاعهای OA و OB را به ترتیب در نقاط A' و B' قطع کند، بازه خط A'B' ضلع شش ضلعی منتظم محیط بر دایره است (چرا؟). و می توان داشت:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OH'}{OH}$$

و چون $AB=R$ و $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ و $OH'=R$ است:

$$A'B' = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$$

در هندسه معمولاً اندازه ضلع n ضلعی منتظم محیط در یک دایره را با نماد C_n و اندازه ارتفاع یا سهم آن را با r_n و اندازه ضلع n ضلعی منتظم محیط بردایره را با C'_n نمایش می-دهیم. پس در یک دایره با شعاع R طبق آنچه اثبات شد:

$$C'_n = \frac{2}{3}R\sqrt{3}, r_n = \frac{R}{3}\sqrt{3}, C_n = R$$

(۳-۳-۲) - صورت کلی محاسبه اضلاع چند ضلعیهای محیطی و محیطی یک دایره هر گاه AB ضلع n ضلعی منتظم محیط در دایره $C(O, R)$ باشد، شکل (۳-۳)، به موجب

تعریف $\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{n}$ و بنابراین $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$ و اگر $OH \perp AB$ باشد،

$$\widehat{HOB} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n} \text{ است. در مثلث } OHB:$$

$$HB = OB \times \sin \widehat{HOB} = R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

و با ملاحظه آن که $AB = 2HB$ است:

$$C_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

در همان مثلث قائم الزاویه حاصل می شود:

$$r_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

و بد آسانی ثابت می شود که $C'_n = rR \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$

زیرا در مثلث $OH'A'$ داریم :

$$\operatorname{tg} \widehat{A'OH'} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{A'H'}{OH'} = \frac{C'_n}{r}$$

$$C'_n = rR \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

مثال - می دانید که $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است، بنابراین

در شش ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی يك دایره :



شکل (۳-۴)

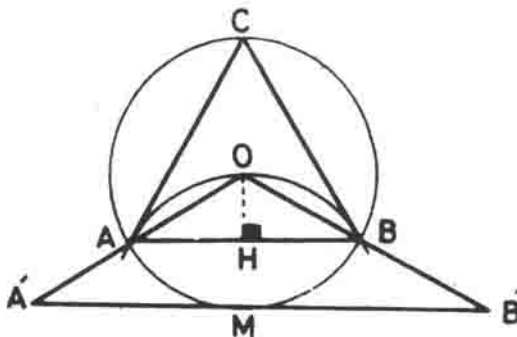
$$C_p = rR \times \frac{1}{2} = Rr$$

$$r_p = R \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$C'_p = rR \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(۳-۳-۳) مثلثهای متساوی الاضلاع محاطی و محیطی

دایره



شکل (۳-۵)

برای رسم مثلث متساوی الاضلاع محاط در يك دایره ، باید دایره را به سه کمان متساوی تقسیم کنیم، برای این منظور نقطه دلخواه M از دایره را در نظر گرفته، شکل (۳-۵)، و به مرکز M شعاع R کمانی رسم می کنیم تا دایره را در دو نقطه A و B قطع کند. ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره است. (چرا؟)

اگر OH عمود بر AB رسم شود، چون $\widehat{OAH} = 30^\circ$ است، $OH = \frac{R}{2}$ و با استفاده

از قضیه فیثاغورس می توان داشت: $AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ و در نتیجه $C_p = AB = R\sqrt{3}$ است
 از آنجا $C'_p = A'B' = 2R\sqrt{3}$ به دست می آید .
 یعنی در دایره به شعاع R :

$$C'_p = 2R\sqrt{3} , r_p = \frac{R}{2} , C_p = R\sqrt{3}$$

با استفاده از دستورهای کلی نیز با ملاحظه آن که $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ و
 $tg 60^\circ = \sqrt{3}$ است، اضلاع مثلثهای محاطی و محیطی دایره با شعاع R و سهم مثلث متساوی-
 الاضلاع محاطی به همین صورت به دست می آیند .

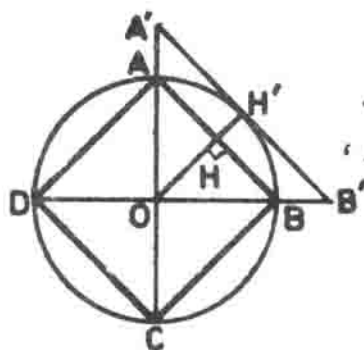
تمرین

- ۱ - اندازه های سهم و شعاع مثلث متساوی الاضلاع و شش ضلعی منتظم محاطی و محیطی دایره ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر، همچنین مساحت هریک از این شکلها را حساب کنید .
- ۲ - در مثلث متساوی الاضلاعی اندازه هر ضلع آن ۱۲ سانتیمتر است ، اندازه های شعاعهای دایره های محاطی و محیطی آن را تعیین کنید .
- ۳ - با استفاده از دستورهای مربوط به محاسبه اضلاع چند ضلعیهای محاطی و محیطی دایره ، اندازه های اضلاع مربعهای محاطی و محیطی دایره ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را حساب کنید .
- ۴ - هریک از عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که يك گزاره درست حاصل شود .
 - هر چند ضلعی منتظم بريك دایره ... و دريك دایره ... است، نسبت شعاعهای دو دایره درشش ضلعی منتظم برابر است با
- مرکزهای دایره های محاطی و محیطی هر چند ضلعی منتظم
- ۵ - اضلاع شش ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی دایره ای به شعاع ۱۵ سانتیمتر نظیر به نظیر موازی یکدیگرند، مساحت سطح محصور بین دو چند ضلعی را حساب کنید. صورت کلی مساحت سطح مزبور را بر حسب R شعاع دایره تعیین کنید. آیا اگر اضلاع شش ضلعیها موازی نباشند، این مساحت تغییر می کند ؟

(۳-۳-۴) - مربعهای محاطی و محیطی دایره

برای رسم مربع محاط در دایره $C(O, R)$ قطر AC از دایره را رسم کرده، شکل (۳-۳-۶)، و قطر BD را بر آن عمود می کنیم ، این دو قطر دایره را به چهار کمان متساوی تقسیم می کنند

(چرا؟). از وصل کردن نقاط متوالی تقسیم به یکدیگر مربع ABCD پدید می آید که در دایره محاط است .



شکل (۲-۶)

اگر در نقاط تقسیم مماسهایی بردایره رسم کنیم ، از برخورد آنها مربعی پدید می آید که بردایره محیط است . حال ملاحظه می کنیم که در مثلث قائم الزاویه AOB ،

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$$

اگر OH ارتفاع نظیر رأس O از این مثلث باشد :

$$(چرا؟) \quad OH = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

و به موجب استدلالی مشابه آنچه قبلا ذکر شد ، ثابت می شود که $A'B' = 2R$ بنابراین در دایره به شعاع R

$$C'_n = 2R , \quad r_n = R\frac{\sqrt{2}}{2} , \quad C_n = R\sqrt{2}$$

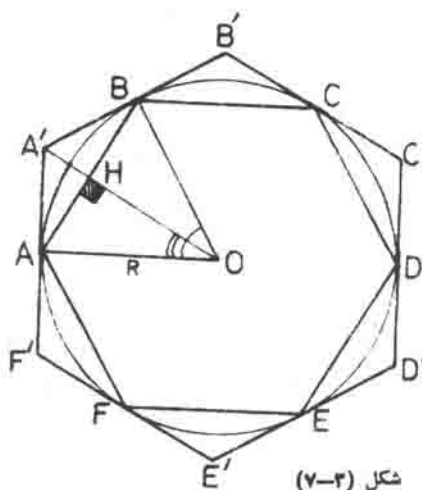
(۳-۴) - محیط و مساحت دایره

(۱-۴-۳) - محیط دایره

ثابت می شود که در هر دایره داده شده ، محیط هر چند ضلعی محاطی کوچکتر از محیط هر چند ضلعی محیطی است و در نتیجه دست کم یک عدد یافت می شود که از همه محیطهای چندضلعی-های محاطی بزرگتر و از همه محیطهای چند ضلعی های محیطی کوچکتر است . قضیه زیر نشان می دهد که چنین عددی یکتا است.

(۳-۴-۳) - قضیه- تنها يك عدد پیدا می شود که از همه محیطهای چند ضلعیهای محاط در يك دایره داده شده بزرگتر و از همه محیطهای چند ضلعیهای محیطی (آن دایره) کوچکتر باشد.

برهان - n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی دایره $C(O, R)$ در شکل (۳-۴) را در نظر گرفته پاره خطهای OA و OH سهمهای آنها را رسم می کنیم . اگر P_n و P'_n به ترتیب محیطهای دو چند ضلعی باشند :



شکل (۷-۲)

$$P_n = r_n \cdot AH$$

$$P'_n = r_n \cdot AA'$$

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{AH}{AA'} \quad \text{و بنابراین:}$$

اما دو مثلث OAA' و OHA متشابهند،

(چرا؟)، در نتیجه $\frac{AH}{AA'} = \frac{OH}{OA}$ و با ملاحظه

آن که $OA = R$ و $OH = R \cos \frac{360^\circ}{2n}$ است

می‌توان نوشت:

$$\frac{AH}{AA'} = R \cos \frac{360^\circ}{2n} : R = \cos \frac{360^\circ}{2n}$$

$$\frac{P_n}{P'_n} = \cos \frac{360^\circ}{2n} \quad \text{یا}$$

اما هر قدر عدد صحیح n بزرگ شود، زاویه $\frac{360^\circ}{2n}$ کوچکتر و کسینوس آن که همواره از

عدد يك کوچکتر است، بزرگ می‌شود و به عدد يك نزدیکتر می‌شود. پس کسر $\frac{P_n}{P'_n}$ نیز وقتی

که n بزرگ می‌شود به عدد ۱ نزدیک می‌شود. بنابراین P_n و P'_n می‌توانند به هر اندازه دلخواه به یکدیگر نزدیک شوند. این نشان می‌دهد که تنها يك عدد می‌تواند از همه محیطهای چند ضلعیهای محاطی بزرگتر و از همه محیطهای چند ضلعیهای محیطی کوچکتر باشد.

تعریف — محیط هر دایره برابر است با عددی که از همه محیطهای چند ضلعیهای محاط در

آن دایره بزرگتر و از همه محیطهای چند ضلعیهای محیطی آن دایره کوچکتر است. محیط دایره با همان واحدی اندازه گیری می‌شود که محیط چند ضلعیها اندازه گیری شده‌اند.

تمرین

۱ - محیطهای ۸ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر را

حساب کنید. نصف مجموع این دو محیط را تعیین کنید و اختلاف آن را با محیط دایره بدست آورید.

۲ - ثابت کنید مساحت شش ضلعی منتظم محاط در يك دایره واسطه هندسی است بین مساحت‌های مثلثهای متساوی‌الاضلاع محاطی و محیطی همان دایره .

محاسبه محیط دایره

(۳-۴-۳) - قضیه - نسبت محیط هر دایره به اندازه قطر آن مقدار ثابتی است .

پرهان - اگر دودایره که اندازه شعاعهای آنها R و R' است در نظر بگیریم، محیطهای n ضلعیهای منتظم محاط در آنها به ترتیب :

$$P_n = \gamma n R \sin \frac{360^\circ}{\gamma n} \quad \text{و} \quad P'_n = \gamma n R' \sin \frac{360^\circ}{\gamma n} \quad (\text{چرا؟})$$

و نسبت آنها

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}$$

است ، یعنی نسبت محیطهای n ضلعیهای محاط در دودایره مقداری ثابت و مساوی نسبت شعاعهای آنهاست . وقتی n عدد بسیار بزرگ باشد P_n و P'_n به محیطهای دودایره نزدیک می‌شوند. پس اگر محیطهای دودایره را با C و C' نمایش دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$$

این تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{C}{\gamma R} = \frac{C'}{\gamma R'}$$

یعنی: نسبت محیط دایره به قطر آن در همه دایره‌ها یکی است و مقداری ثابت دارد. این مقدار ثابت يك عدد گنگ است که تا يك ده هزارم تقریب $3/1416$ می‌باشد .
اندازه واقعی نسبت محیط دایره را به قطر آن در کتابهای ریاضی با حرف یونانی π نشان می‌دهند. تعیین عدد π سابقه تاریخی جالب دارد و برای این منظور ریاضیدانان روشهای مختلف به کار برده و کوششهای بسیار داشته‌اند. یکی از روشهای ابتدایی محاسبه π را ضمن خواندنیهایی خارج از متن کتاب ارائه نموده‌ایم .
از آنچه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت :

(۳-۴-۴) - قضیه - محیط هر دایره مساوی حاصل ضرب اندازه قطر آن دایره در عدد π است. یعنی اگر محیط دایره‌ای به شعاع R را با نماد C نمایش دهیم:

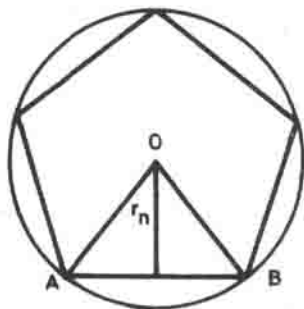
$$C = \pi R$$

(۳-۴-۵) - مساحت دایره

از خاصیت‌های مساحت که در سال گذشته دیدیم به سادگی نتیجه می‌شود که مساحت هر چند ضلعی محاط در یک دایره از مساحت هر چندضلعی محیط بر همان دایره کوچکتر است، و از خاصیت‌های عددی حقیقی نیز نتیجه می‌شود که دست کم یک عدد یافت می‌شود که از همه مساحت‌های چند ضلعی محاط در آن دایره بزرگتر و از همه مساحت‌های چند ضلعی محیط بر آن دایره کوچکتر است. قضیه زیر نشان می‌دهد که چنین عددی یکتا است.

(۳-۴-۶) - قضیه - تنها یک عدد یافت می‌شود که از همه مساحت‌های چندضلعی‌های محاطی در یک دایره بزرگتر و از همه مساحت‌های چندضلعی‌های محیط بر آن دایره کوچکتر است.

برهان - مساحت هر n ضلعی منتظم برابر است با حاصلضرب محیط آن در نصف اندازه سهم، زیرا در شکل زیر مساحت مثلث OAB برابر است با حاصلضرب AB در نصف سهم. چند ضلعی و بنابراین مساحت n ضلعی منتظم برابر است با



شکل (۳-۸)

$n \cdot AB \cdot \left(\frac{1}{2}n \cdot AB\right) \cdot r_n$ که محیط چندضلعی و

r_n سهم آن است. بنابراین S_n و S'_n (مساحت‌های

n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در دایره بشعاع

R) به ترتیب با عددهای $\frac{1}{2}P_n R \cos \frac{180^\circ}{n}$ و

$\frac{1}{2}P'_n R$ برابرند. بنا به آنچه پیشتر دیدیم

هنگامی که n بزرگ می‌شود $\cos \frac{180^\circ}{n}$ و $\frac{P_n}{P'_n}$

هر دو به عدد ۱ نزدیک می‌شوند. در نتیجه $\frac{S_n}{S'_n}$ نیز به عدد ۱ نزدیک می‌شود. این نشان می‌دهد که

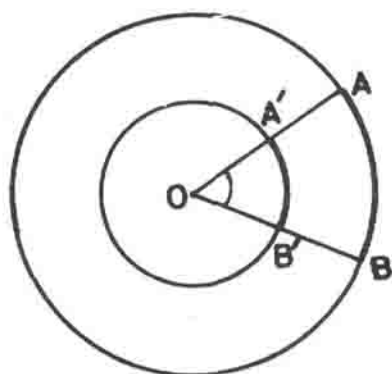
تنها یک عدد می‌تواند از همه مساحت‌های چندضلعی‌های محاطی دایره بزرگتر و از همه مساحت‌های چند ضلعی‌های محیطی دایره کوچکتر باشد.

تعریف - عدد یکتایی که از همه مساحت‌های چند ضلعیهای محاطی در یک دایره بزرگتر و از همه مساحت‌های چند ضلعیهای محیط بر آن دایره کوچکتر است، مساحت آن دایره نامیده می‌شود. مساحت دایره با همان واحد اندازه‌گیری سنجیده می‌شود که مساحت‌های چند ضلعیها سنجیده شده‌اند.

(۳-۴-۷) - قضیه - مساحت هر دایره برابر است با حاصلضرب توان دوم شعاع در عدد π برهان - فرض کنیم شعاع دایره برابر با R است. در برهان قضیه پیش دیدیم که با بزرگ شدن n عددهای S_n و S'_n به هر اندازه دلخواه به یکدیگر نزدیک می‌شوند؛ و چون مساحت دایره همواره بین S_n و S'_n قرار دارد، پس عددهای S_n و S'_n به هر اندازه دلخواه به مساحت دایره نزدیک می‌شوند. اما $S'_n = \frac{1}{2} n R P'_n$ که با بزرگ شدن n به عدد $\frac{1}{2} R (2\pi R)$ (به هر اندازه دلخواه) نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2$$

(۳-۵) - رادیان، واحد دیگر اندازه‌گیری کمانها



شکل (۳-۹)

(۳-۵-۱) - **تعریف -** رادیان اندازه‌گیری کمانی از هر دایره است که درازای آن مساوی اندازه شعاع دایره باشد. اگر قطعه ریسمانی به اندازه شعاع دایره بریده و آن را دقیقاً بر کمانی از دایره قرار دهیم تا آن کمان را ببوشاند، اندازه کمانی را که بین دوسر این ریسمان محدود است، یک «رادیان» می‌گوییم. درازای کمانی که اندازه آن یک رادیان باشد در دایره‌های مختلف متفاوت است و این موضوع را در دایره‌های هم مرکز، شکل (۳-۹)، به خوبی می‌توان دید.

می‌دانید که اندازه محیط هر دایره به شعاع R مساوی $2\pi R$ است. پس نسبت درازای یک دور کامل دایره، به کمانی که درازای آن مساوی شعاع دایره باشد 2π است. از این رو اندازه نیم دایره را بر حسب رادیان با π و اندازه ربع دایره را با $\frac{\pi}{2}$ نشان می‌دهیم.

(۳-۵-۲) - **تبدیل رادیان به دیگر واحدهای اندازه‌گیری کمانها -** اگر اندازه \widehat{AB} بر حسب

رادیان r و بر حسب درجه D باشد، با ملاحظه آن که هر رادیان $\frac{1}{2\pi}$ و هر درجه $\frac{1}{360}$ اندازه

يك دور كامل دایره است ، اندازه \widehat{AB} بر حسب دور كامل دایره از طرفی $\frac{r}{2\pi}$ و از طرفی $\frac{D}{360}$

$$\frac{r}{2\pi} = \frac{D}{360} \quad \text{است ، بنابراین :}$$

یعنی بین اندازه‌های يك کمان بر حسب رادیان و درجه رابطه زیر برقرار است :

$$\boxed{\frac{r}{\pi} = \frac{D}{180}}$$

به کمک این رابطه وقتی اندازه کمان را بر حسب یکی از دو واحد داشته باشیم ، اندازه آن بر حسب واحد دیگر به دست می آید .

مثال - اندازه کمان 60° بر حسب رادیان از رابطه بالا به صورت $r = \frac{\pi}{3}$ به دست می آید .

(۳-۵-۳) - محاسبه درازای کمان دایره - از آنچه ذکر شد می توان نتیجه گرفت که اگر اندازه کمانی بر حسب رادیان مساوی α باشد ، درازای آن از دستور زیر به دست می آید :

$$\boxed{l = R\alpha}$$

مثال - درازای نیم دایره ای به شعاع R مساوی $R\pi$ و درازای کمان 90° همان دایره $\frac{R\pi}{3}$ است .

تمرین

- دو دایره هم مرکز به شعاعهای R و R' مفروضند ، مساحت سطح محصور بین آنها را تعیین کنید .
- مساحت دایره ای به شعاع 12 سانتیمتر را حساب کنید . اختلاف بین مساحت این دایره را با مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در آن تعیین کنید :

$$\left(\sin 22^\circ 30' = \frac{1}{4} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)$$

- در دایره به شعاع 12 سانتیمتر درازای کمانی را که اندازه آن بر حسب رادیان $\frac{\pi}{8}$ است تعیین کنید .

۴ - دو قطر AB و CD از دایره $C(O,R)$ بر یکدیگر عمودند . به مرکز C و شعاع CA

کمانی از دایره رسم می‌کنیم که در درون دایره و به دو نقطه A و B از دایره محدود باشد. بین این کمان و نیمدایره‌هایی که با آن کمان در نقاط A و B تلاقی کرده‌اند سطحهایی محصور می‌شوند، مساحت هر یک از این دو جزء دایره را تعیین کنید.

۵- مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. به قطرهای AB و AC دو نیمدایره در خارج مثلث رسم می‌کنیم. بین این نیمدایره‌ها و دایره محیطی مثلث دو سطح هلالی شکل پدیدمی‌آیند. ثابت کنید مجموع مساحت‌های سطح‌های هلالی شکل مزبور با مساحت مثلث متساوی است.

۳

خواندنی

سخنی در باره عدد π

قدیمترین سابقه تاریخی در باره عدد π پاپیروسی است که اکنون در مسکو نگهداری می‌شود، در این سند محاسبه محیط دایره به وسیله مصریان داده شده است. به موجب این محاسبه نسبت محیط دایره به قطر آن مساوی ۳ است. در محاسبات بابلیان نیز این نسبت ۳ گرفته شده است. به اغلب احتمال این نسبت را از کوششهای تجربی نتیجه گرفته‌اند و مبنای دقیق علمی نداشته است. نخستین ریاضی‌دانی که در باره عدد π بر اساس تفکر ریاضی پژوهشهایی انجام داد بقراط بود که در سده پنجم پیش از میلاد می‌زیست. وی دریافت که مساحت‌های دودایره با مربعاتی قطرهای آنها متناسبند.

ارشمیدس، نابغه علم، به ثابت بودن نسبت محیط دایره به قطر آن پی برد و به کمک ۹۶ ضلعی منتظم محاط در دایره این نسبت را بین $3\frac{1}{71}$ و $3\frac{1}{70}$ تعیین کرد که به مقدار واقعی π بسیار نزدیک است.

در جریان دگرگونیهای علوم ریاضی، دانشمندان بسیار برای محاسبه عدد π صرف وقت کرده‌اند. تیکو براهه منجم معروف دانمارکی در حدود ۳۰۰ سال پیش در محاسبات خود برای محاسبه π به عدد $3/1409$ رسید. مقارن همین اوقات فرانسوا ویت (François Viète) ریاضی‌دان معروف فرانسوی به کمک 3997216 ضلعی منتظم مقدار π را تا ۹ رقم اعشار حساب کرد.

ریاضی‌دان نامدار ایرانی شیخ‌الدین جمشیدکاشانی (۷۶۳-۸۰۷ هجری)، که در نجوم و حساب ابتکارهای بسیار جالب داشته است، در حدود یک قرن و نیم پیش از ویت در کتاب «رساله محیط‌دایره» نسبت محیط دایره به قطر آن را تا بیش از ۱۵ رقم اعشار حساب کرده بود. نتیجه این محاسبه چنین بوده است: $3/141592653589793$ در ادوار اخیر با پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال و با استفاده از رشته‌های عددی نامتناهی در محاسبه عدد π پیشرفتهای قابل ملاحظه حاصل شده. با این روشها، با زحمت خیلی کمتر عدد π را با دقت به مراتب بیشتر تعیین می‌کنند. در سال ۱۸۷۳ میلادی ویلیام شنگ انگلیسی عدد π را با ۷۰۷ رقم دهدهی حساب کرد. این عدد در قصر اکتشافات پاریس در غرفه مربوط به علوم ریاضی به صورت نواری دور تا دور تالار نوشته شده است.

در قرن اخیر در سال ۱۳۳۳ با استفاده از ماشینهای حسابگر الکترونیکی بیش از ۳۰۰۰ رقم دهمی عدد π را تعیین کردند. روشن است که این محاسبه بیشتر جنبه تفنن دارد و نمودار قدرت و ارزش روشهای جدید است، زیرا با همه پیشرفتهای صنعتی و علمی امروز در عمل برای دقیقترین و حساسترین کاربردهای محاسبه تنها ده رقم دهمی اول بعد از ممیز عدد π از اعتبار و دقت کافی بهره‌مند است.

درباره وجه نامگذاری این عدد باید گفت که نماد π برای «نسبت محیط دایره به قطر آن» از اوایل قرن هجدهم به کار رفته و به این مناسبت بود که واژه محیط در زبان یونانی با حرف π شروع می‌شود. اما به طوری که ذکر شد توجه به این عدد سابقه قدیمتر دارد و آن چنان مشغله فکری انسان متمدن بوده است که درباره آن در تاریخ زندگی علمی ملل داستانها آمده و افسانه‌ها و شعرها گفته‌اند. از آن جمله در زبانهای مختلف شعرهایی گفته‌اند که با کلمات و حروف آن رقمهایی از عدد π مشخص می‌شود و برای به خاطر سپردن این عدد بسیار مفید است. قدیمیترین شعر در این زمینه به زبان فرانسه سروده شده است و چنین است:

« Que J'aime à faire apprendre un nombre Utile aux
sages

Immortel Archimède, artiste, ingénieur

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?

Pour moi ton problème est de pareils avantages »

شمارش تعداد حرفهای کلمات این متن عدد π را به صورت زیر با سی رقم اعشار نشان می‌دهد.

۳/۱۴۱ ۵۹۲ ۶۵۳ ۵۸۹ ۷۹۳ ۲۳۸ ۴۶۲ ۶۴۳ ۲۸۴ ۲۷۹

در زبان فارسی شعر زیر در این زمینه سروده شده است:

گر کسی از تو پرسد ره آمختن π پاسخی ده که خردمند ترا آموزد

« خرد و بینش و آگاهی دانشمندان ره سرمزل توفیق به ما آموزد »

تعداد حروف کلمه‌های بیت دوم شعر، عدد π را با ده رقم اعشار مشخص می‌کند.

خط و صفحه در فضای سه بعدی اقلیدسی

(۱-۲) - کلیات

(۱-۱-۴) - فضای سه بعدی اقلیدسی - فضائی که در آن زندگی می کنیم مدلی از فضای اقلیدسی یا فضای سه بعدی است. فضای سه بعدی اقلیدسی یکی از مفهومیهای نخستین (تعریف نشده) می باشد و در این کتاب همه جا منظور ما از فضا همان فضای سه بعدی اقلیدسی است. فضا مجموعه ای از بی نهایت نقطه می باشد، خط و صفحه نیز که به ترتیب دارای یک بعد و دو بعد می باشند هر یک زیر مجموعه ای از فضا می باشند.

(۲-۱-۴) - نیم فضا - مجموعه همه نقطههایی که در یک طرف یک صفحه قرار دارند یک نیم فضا نامیده می شود هر نیم فضا صفحه مشخص کننده خود را که مرز آن نیم فضا نامیده می شود در بردارد. ویژگیهای زیر بدیهی هستند:

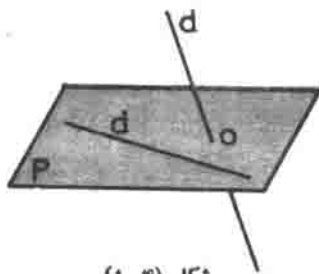
(الف) - هر گاه دوسر پاره خطی در یک نیم فضای داده شده باشند، همه آن پاره خط در آن نیم فضا است.

(ب) - هر گاه از دوسر پاره خطی فقط یکی در یک نیم فضای داده شده باشد، آن پاره خط مرز نیم فضا را تنها در یک نقطه قطع می کند.

اگر صفحه P و نقطه A غیر واقع بر آن داده باشند، نیم فضایی که با P مشخص می شود و A را در بر دارد با نماد $[P, A]$ نمایش داده می شود.

(۲-۲) - اوضاع نسبی دوخط در فضا

- (۱) دوخط که تنها در یک نقطه مشترك باشند، خطهای متقاطع نامیده می شوند.
- (۲) دوخط متمایز که در یک صفحه باشند و نقطه مشترك نداشته باشند، خطهای موازی گفته می شوند.
- (۳) دوخط متمایز که نقطه مشترك نداشته و در یک صفحه نیز واقع نباشند، متناظر نامیده می شوند شکل (۱-۲).



شکل (۱-۴)



شکل (۲-۳)

هر خط d و يك نقطه O واقع در خارج آن خط يك صفحه مانند P مشخص می کنند ، (چرا؟) شکل (۲-۲)، در این صفحه بر نقطه O يك خط فقط يك خط موازی خط d مرور می کند (اصل اقلیدس) . هر خط دیگری که بر نقطه O بگذرد و در صفحه P نباشد ، موازی خط d نیست (چرا؟).

بنابراین :

بر هر نقطه واقع در خارج يك خط ، فقط يك خط موازی آن مرور می کند، و این صورت کلی اصل اقلیدس در مورد هر خط و نقطه دلخواه از فضاست .

با ملاحظه آن که انطباق دو خط را نیز حالت خاصی از توازی گرفته ایم، اصل اقلیدس را به صورت کلی تر زیر نیز می توان بیان کرد :

بر هر نقطه تنها يك خط موازی خط مفروض مرور می کند .

از آنچه ذکر شد می توان نتیجه گرفت که

اگر دو خط متوازی باشند ، هر صفحه که بر یکی از آن دو خط و نقطه ای از خط دیگر بگذرد، همه نقاط خط دوم را شامل خواهد بود، زیرا در غیر این صورت دو خط متمایز مفروض متناظرند نه متوازی .

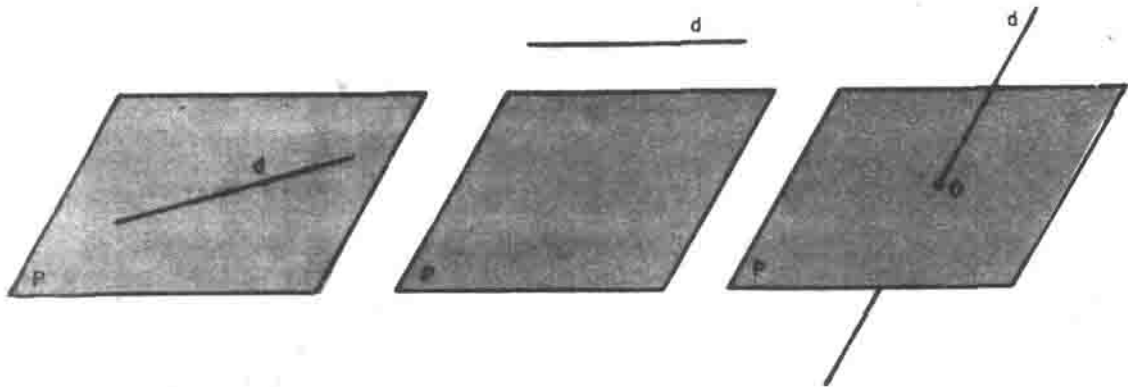
(۳-۲) - اوضاع نسبی خط و صفحه

هر گاه صفحه P و خط راست d بعنوان مجموعه نقاط در نظر گرفته شوند، وضع خط و صفحه نسبت به هم از سه حال خارج نیست :

۱- اشتراك دو مجموعه ، مجموعه ای شامل تنها نقطه O است. در این صورت گوئیم خط d و صفحه P در نقطه O متقاطند (شکل ۳-۲).

۲- دو مجموعه عضو مشترك ندارند، یعنی اشتراك آن مجموعه تهی است (شکل ۳-۲).

۳- اشتراك دو مجموعه بیش از يك عضو دارد. در این صورت به موجب خاصیت اصلی صفحه، همه نقطه های خط d بر صفحه P واقعند یعنی خط d بر صفحه P واقع است (شکل ۳-۵) تعریف - يك خط را موازی يك صفحه می گوئیم هر گاه بر آن صفحه منطبق باشد یا با آن صفحه اصولاً نقطه مشترك نداشته باشد (حالت های ۲ و ۳).



شکل (۳-۵)

شکل (۳-۴)

شکل (۳-۳)

در این حالت صورت نمادی توأزی خط و صفحه چنین است :

$$(d \cap P = \phi) \text{ یا } (d \subset P) \implies d \parallel P$$

اگر توأزی خط و صفحه به صورت فوق در نظر گرفته شود، وضع نسبی خط و صفحه شامل

دو صورت خواهد بود :

- خط و صفحه متوازیند .

- خط و صفحه متقاطعند .

تمرین

۱- صفحه P و نقطه O روی آن مفروضند، نیم خط OM نسبت به صفحه P چه وضعهایی می تواند داشته باشد ؟

۲- صفحه P و نقطه O روی P و نقطه M خارج P مفروضند. نیم خط OM نسبت به نیم فضای که M را در بر ندارد چه وضعی دارد.

۳- صفحه P و $O \in P$ مفروضند و خط d بر O می گذرد. اگر $d \parallel P$ باشد، وضع مجموعه نقاط خط و صفحه را بیان کنید

(۳-۲) - اوضاع نسبی دو صفحه

(۳-۲-۱) - فصل مشترك دو صفحه - طبق اصول خوانده شده ، سه نقطه غیر واقع بر يك خط راست يك صفحه مشخص می كند . اکنون ثابت می كنیم كه این صفحه منحصر به یکی است.

یعنی :

(۳-۴-۴) - قضیه - بر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست فقط یک صفحه می‌گذرد .

برهان - ثابت می‌کنیم که هر دو صفحه مانند P و P' ، که سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست، مانند A و B و C را شامل باشند، بر یکدیگر منطبق هستند، یعنی در شکل (۶-۲) .

$$(A, B, C \in P \text{ و } A, B, C \in P' \text{ و } C \notin AB) \Rightarrow P = P'$$

اگر نقطه M از P را به نقطه N روی AB و بین B و A وصل کنیم، خواهیم داشت

$MN \subset P$

خط MN دست کم یکی از دو خط BC و AC را قطع می‌کند، (چرا؟)

اگر این خط مثلا AC را در نقطه L قطع کند:

$$\left. \begin{array}{l} AB \subset P' \Rightarrow N \in P' \\ AC \subset P' \Rightarrow L \in P' \end{array} \right\} \Rightarrow LN \subset P'$$

و چون M بر امتداد LN قرار دارد، $M \in P'$ یعنی: هر نقطه M از صفحه P نقطه‌ای از صفحه P' است .

با همین روش ثابت می‌شود که هر نقطه M' از صفحه P' بر صفحه P واقع است . پس صفحه P' همان صفحه P است. یعنی: بر سه نقطه A, B, C فقط یک صفحه می‌گذرد.

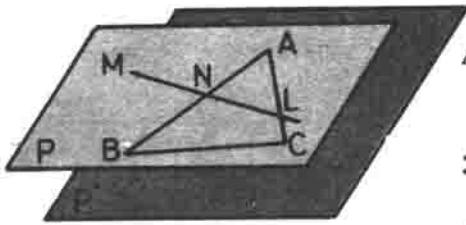
(۳-۴-۴) - قضیه - اگر دو صفحه متمایز P و P' یک نقطه مشترک A داشته باشند، آن دو صفحه فقط دو خط راست که بر A می‌گذرد، مشترکند .

برهان - نقطه M ($M \in P$) را به نقطه A وصل کرده و خط حاصل را امتداد می‌دهیم

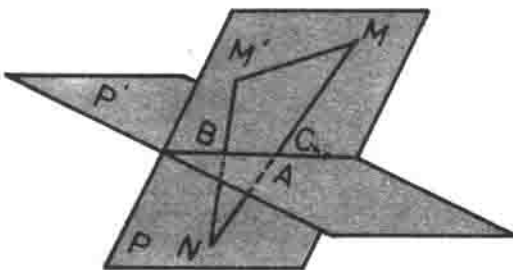
و بر امتداد آن نقطه N را اختیار می‌کنیم، شکل (۷-۲)؛ از این فرض که $A \in P'$ و A

بین دو نقطه M و N است نتیجه می‌شود که دو نقطه اخیر در دو طرف صفحه P' قرار دارند .

حال اگر نقطه دیگری مانند M' روی P و در نیم فضای $[P', M]$ اختیار کنیم، چون نقطه N در نیم فضای $[P', M]$ نیست، دو نقطه M' و N در دو طرف صفحه P' واقع می‌شوند و



شکل (۶-۴)



شکل (۷-۴)

بنابر این پاره خط NM' با صفحه P نقطه مشترکی مانند B دارد و $B \in P$ زیرا

$$B \in M'NCP$$

یعنی، دو صفحه P و P' در نقطه دیگری مانند B نیز مشترکند و خط AB زیر مجموعهٔ هر دو صفحه P و P' است، یعنی دو صفحه P و P' در خط AB مشترکند.

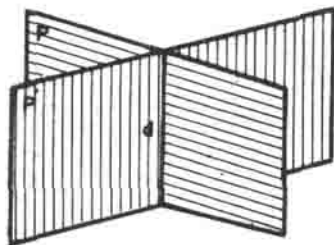
چون بر صفحه P به تعداد بی شمار نقاط مانند M' می توان اختیار کرد، با همین استدلال ثابت می شود که دو صفحه P و P' نقطه های مشترک بی شمار دارند. اما هر نقطه دیگر مانند C که بر دو صفحه P و P' واقع باشد ناچار بر خط AB واقع است، زیرا اگر نقاط A, B, C بر يك خط راست نباشند لزوماً باید قبول کنیم که بر سه نقطه غیر واقع بر يك خط راست دو صفحه متمایز P و P' گذشته اند، و این ممکن نیست. پس نقاط مشترک دو صفحه تمام بر خط AB واقعند. یعنی $P \cap P' = \text{يك خط راست است}$.

دو صفحه متمایز را که در يك خط راست مشترک باشند دو صفحه متقاطع و خط مزبور را فصل مشترک آن دو صفحه می گوئیم.

تمرین

- ۱- دو صفحه P و P' در نقطه A مشترکند، در وضع نسبی آنها بحث کنید.
- ۲- دو صفحه P و P' و خط d مفروضند، از رابطه های $d \subset P$ و $d \subset P'$ چه نتیجه ای می توان گرفت؟ وضع نسبی P و P' را در این حالت بررسی کنید.
- ۳- دو صفحه متمایز P و P' مفروضند، نقاط A, B, C را چنان در نظر می گیریم که $A, B, C \in P$ و $A, B, C \in P'$ است. وضع نقاط مزبور را تعیین کنید.

(۴-۴-۴) - وضع نسبی دو صفحه - دو صفحه P و P' را به عنوان مجموعه نقاط در نظر می گیریم، وضع دو صفحه از سه حال خارج نیست:



شکل (۴-۴)

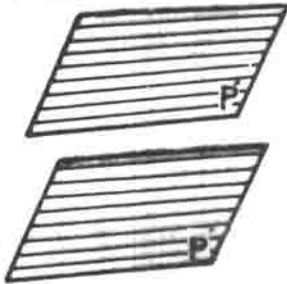
- ۱- دو صفحه متمایزند ولی اشتراك آنها تهی نیست. در این صورت دو صفحه فقط در يك خط راست مشترکند که فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می شود. چنین صفحه هایی را متقاطع گوئیم، مانند صفحه های P و P' در شکل (۴-۴) که در خط d متقاطعند:

$$P \cap P' = d$$

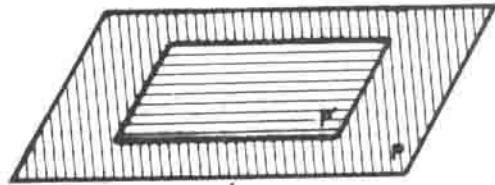
$$P \cap P' = P = P'$$

۲- دو صفحه بر هم منطبقند (شکل ۹-۴) :

$$P \cap P' = \emptyset \quad : (10-4)$$



شکل (۱۰-۴)



شکل (۹-۴)

تعریف - دو صفحه موازی نامیده می‌شوند هرگاه یا نقطه مشترکی نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند (حالت‌های ۲ و ۳).

(۵-۴) - توازی خط و صفحه

چنان‌که ذکر شد، یک خط را وقتی موازی صفحه می‌گوییم که بر آن صفحه واقع باشد یا آن‌که با صفحه نقطه مشترک نداشته باشد.

در حالتی که خط با صفحه فقط یک نقطه مشترک داشته باشد، گوییم خط و صفحه یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شرط توازی خط و صفحه

(۱-۵-۴) - قضیه - هر خط که با یکی از خطهای صفحه‌ای موازی باشد با آن صفحه موازی است.

یعنی اگر d مجموعه نقاط یک خط و P مجموعه نقاط یک صفحه باشد:

$$(d \parallel d_1 \text{ و } d_1 \subset P) \implies d \parallel P$$

برهان - دو خط موازی d و

d_1 صفحه‌ای چون P' مشخص می‌کنند.

(چرا؟)، شکل (۱۱-۴)، اگر خط d

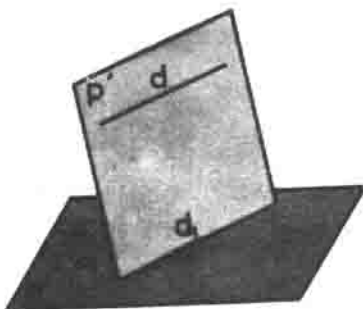
صفحه P را در نقطه‌ای مانند M قطع

کند:

$$[d \cap P = \{M\}, d \subset P'] \implies M \in P'$$

اما

$$(M \in P, M \in P') \implies M \in (P \cap P') \implies M \in d,$$



شکل (۱۱-۴)

بنابراین :

$$(Med, Med_{\setminus}) \Rightarrow M \in (d \cap d_{\setminus}) \Rightarrow d \parallel d_{\setminus}$$

و این مخالف فرض است ، پس $d \parallel P$.

اگر خط d بر صفحه P واقع باشد، در این صورت بنا بر تعریف، d با صفحه موازی است و قضیه ثابت است.

(۴-۵-۲) - صورتهای مختلف نمایش صفحه - از آنچه گذشت می توان نتیجه گرفت که:

۱) هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست یک صفحه مشخص می کنند ، بنابراین هر صفحه را با سه نقطه از آن که بر یک خط راست واقع نباشند می توان نمایش داد .

۲) اگر یک خط و نقطه ای خارج آن خط مفروض باشند ، سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست می توان در نظر گرفت که دو نقطه آنها بر خط و نقطه سوم همان نقطه ای باشد که خارج خط فرض شده است . برای سه نقطه یک صفحه و فقط یک صفحه می گذرد . بنابراین

هر صفحه را با یک خط آن و نقطه ای از آن که خارج خط باشد می توان نمایش داد.

۳) هر گاه دو خط d و d' موازی باشند، در یک صفحه واقعند پس یک صفحه را مشخص

می کنند ، بنابراین

هر صفحه را با دو خط متوازی از آن می توان نمایش داد.

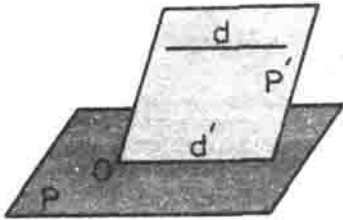
۴) اگر دو خط d و d' در O متقاطع باشند. نقطه O و دو نقطه دیگر یکی بر d و دیگری بر d' سه نقطه غیر واقع بر یک امتدادند که یک صفحه را مشخص می کنند. پس هر صفحه را با دو خط متقاطع از آن می توان نمایش داد.

تمرین

- ۱ - عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که هر یک گزاره ای درست باشد .
- یک خط را موازی یک صفحه می گوئیم در صورتی که
- شرط لازم و کافی برای آن که خطی یا صفحه ای موازی باشد آن است که ...
- ۲ - بر یک نقطه O واقع در خارج یک صفحه P چند خط موازی آن صفحه می گذرد؟ چرا؟
- ۳ - بر یک نقطه واقع در خارج یک خط d چند صفحه موازی آن خط می گذرد؟ چرا؟
- ۴ - دو خط متنافر d و d' مفروضند ، صفحه ای مشخص کنید که خط d' را شامل باشد و با خط d موازی باشد . همچنین صفحه ای مشخص کنید که بر خط d بگذرد و با خط d' موازی باشد .

مزاره‌هایی در بارهٔ توازی خط و صفحه

(۳-۵-۴) - قضیه - هرگاه خطی با صفحه‌ای موازی باشد، هر صفحه‌که بر آن خط بگذرد و با صفحه مفروض موازی نباشد آن صفحه را در خطی قطع می‌کند که با خط مفروض موازی است. یعنی اگر خط d با صفحه P موازی باشد و صفحه P' بر d بگذرد و صفحه P را در خط d' قطع کند، آن گاه $d' \parallel d$ (شکل ۱۲-۴).

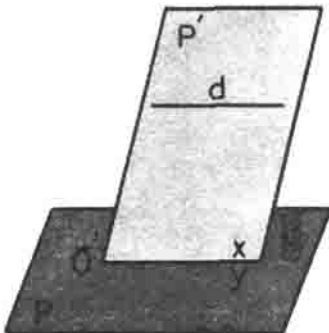


شکل (۱۲-۴)

برهان - دو خط d و d' متنافر نیستند زیرا در یک صفحه واقعند، پس باهم یا موازیند و یا متقاطع، هرگاه موازی باشند قضیه ثابت است و اگر متقاطع باشند نقطهٔ تقاطع آنها روی خط d و در نتیجه روی صفحه P قرار می‌گیرد یعنی خط d صفحه P را قطع می‌کند و این خلاف فرض است، پس $d \parallel d'$.

(۴-۵-۴) - قضیه - اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، هر خط که از یک نقطه صفحه، موازی آن خط رسم شود، بر آن صفحه قرار خواهد داشت.

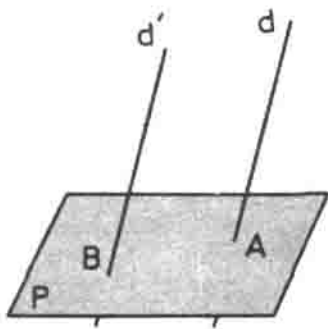
برهان - فرض می‌کنیم خط d با صفحه P موازی و نقطه O در P است. اگر d در صفحه باشد و نقطه O نیز بر d قرار داشته باشد در آن صورت خطی که از O موازی d رسم می‌شود بر d منطبق است و در نتیجه در P قرار دارد. پس فرض می‌کنیم O روی d نیست ولی خط d در صفحه یا خارج صفحه است. از نقطه O خط Oy را موازی d رسم می‌کنیم و صفحه‌ای که بر d و Oy می‌گذرد P' می‌نامیم. اگر P' بر P منطبق شود (و این در صورتی است که d در P باشد)



شکل (۱۳-۴)

آنگاه خط Oy هم در P قرار می‌گیرد و قضیه ثابت است. اگر P' با P متمایز باشد، آنگاه فصل مشترک P و P' خطی مانند Ox است که موازی d می‌باشد (قضیه قبل). اما اصل توازی اقلیدس می‌گوید که از یک نقطه O واقع در صفحه P' تنها یک خط می‌توان در آن صفحه موازی d رسم کرد. پس $Oy = Ox$ یعنی Oy در صفحه P قرار دارد. (شکل ۱۳-۴).

(۵-۵-۴) - قضیه - اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.



شکل (۴-۱۴)

یعنی اگر d و d' مجموعه‌های تقاطع دوخط و P مجموعه نقاط يك صفحه باشد :

$$(d \parallel d', d \not\parallel P) \Rightarrow d' \not\parallel P$$

برهان - اگر خط d صفحه P را در نقطه A

قطع کرده باشد، شکل (۴-۱۴) به موجب قضیه قبل:

$$(d' \parallel d, d' \parallel P, A \in d \cap P) \Rightarrow d \subset P$$

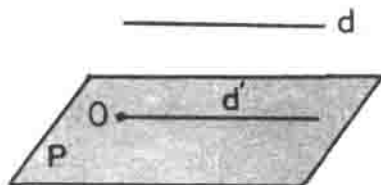
و این مخالف فرض است، یعنی می‌دانیم که چنین نیست. یعنی خط d' با صفحه P موازی نیست.

نتیجه - هرگاه خطی با صفحه‌ای موازی باشد، هر خط موازی با آن خط نیز با آن صفحه موازی است.

یعنی اگر d و d' مجموعه‌های تقاطع دوخط و P مجموعه نقاط يك صفحه باشد،

$$(d \parallel P \text{ و } d' \parallel d) \Rightarrow d' \parallel P$$

برهان - اگر خط d' با صفحه P نقطه مشترکی مانند O داشته باشد (شکل ۴-۱۵) بر صفحه منطبق است، پس $d' \parallel P$. اگر d' با P نقطه مشترکی نداشته باشد، بدیهی است که $d' \parallel P$.



شکل (۴-۱۵)

تمرین

- ۱ - هر يك از گزاره‌های زیر را چنان کامل کنید که يك گزاره درست باشد.
 - هر خطی که صفحه‌ای را قطع نکند با آن صفحه ... است.
 - اگر دوخط موازی باشند هر صفحه موازی با یکی از آنها با دیگری ...
 - هر دوخط متقاطع يك صفحه فقط مشخص می‌کنند.
 - دوخط متوازی زیر مجموعه‌هایی از مجموعه نقاط يك ... اند.
 - هر خط و يك نقطه واقع در خارج آن ... صفحه مشخص می‌کنند.
 - بر هر نقطه خارج يك صفحه خط موازی آن صفحه می‌گذرد، چرا؟
- ۲ - صفحه P و خط D و نقطه O واقع در خارج آن خط مفروضند، خطی مشخص کنید که از نقطه O بگذرد و خط D را قطع کند و با صفحه P موازی باشد.
- ۳ - دو خط d و d' و نقطه O مفروضند، خطی مشخص کنید که از نقطه O بگذرد و با دوخط مزبور متقاطع باشد.

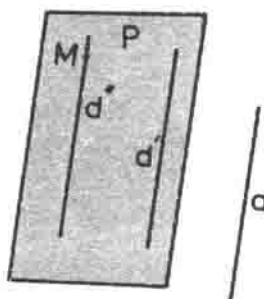
(۴-۵-۶) - قضیه - دو خط راست موازی با خط سوم، خود موازی یکدیگرند .

یعنی اگر d و d' و d'' سه خط راست باشند ،

$$(d' \parallel d, d \parallel d'') \Rightarrow d' \parallel d''$$

برهان - اگر سه خط d و d' و d'' در یک صفحه باشند حکم معقول است (چرا؟).

بنابراین فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که سه خط مفروض در یک صفحه نباشند (حالت



شکل (۴-۱۶)

فضایی قضیه) . در این حالت برای اثبات

قضیه گوییم : اولاً دو خط d' و d''

نمی‌توانند متقاطع باشند، شکل (۴-۱۶) .

زیرا در آن صورت از نقطه تقاطع آنها

دو خط متمایز موازی d رسم شده است .

و این مخالف اصل اقلیدس است . پس :

$$d' \cap d'' = \emptyset$$

ثانیاً دو خط d' و d'' متناظر نیستند،

زیرا اگر این دو خط متناظر باشند، صفحه P که برخط d' و نقطه دلخواه M روی d'' می‌گذرد خط d''

را تنها در نقطه M قطع خواهد کرد، و چون خط d'' صفحه P را در نقطه M قطع می‌کند، خط d که

موازی d'' است نیز صفحه P را قطع می‌کند، و اگر خط d صفحه P را قطع کند، خط d'

هم که موازی d است صفحه P را قطع می‌کند و حال آنکه $d' \subset P$ و d' نمی‌تواند با صفحه

P متقاطع باشد . پس d' و d'' متناظر نیستند . بنابراین دو خط d' و d'' که متقاطع نبوده و

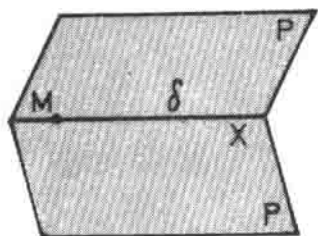
متناظر هم نیستند ، متوازیند .

(۴-۵-۷) - قضیه - اگر خطی با دو صفحه متقاطع موازی باشد ، با فصل مشترک آن دو صفحه

موازی است .

یعنی اگر P و P' دو صفحه و d یک خط راست باشد :

$$(P \cap P' = \delta \text{ و } d \parallel P \text{ و } d \parallel P') \Rightarrow d \parallel \delta$$



د

شکل (۴-۱۷)

برهان - بر نقطه دلخواه M روی δ یک خط فقط

یک خط موازی d ، مانند Mx می‌گذرد شکل (۴-۱۷) ،

خط Mx بر صفحه P و همچنین بر صفحه P' واقع است

(قضیه ۴-۵-۴) . و در این صورت خواهیم داشت :

$$(Mx \subset P, Mx \subset P') \Rightarrow$$

$$P \cap P' = Mx \Rightarrow Mx = \delta$$

$$d \parallel \delta \quad \text{بنابراین}$$

(۴-۶) - توازی دو صفحه

می‌دانید که دو صفحه متمایز وقتی موازی هستند که هیچ نقطه مشترک نداشته باشند .
اگر دو صفحه موازی باشند ، هر خط واقع بر یکی با صفحه دیگر موازی است . یعنی اگر
P و P' دو صفحه باشند و خط d در صفحه P باشد :

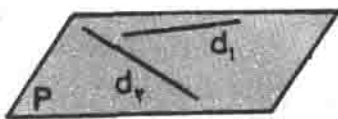
$$(P \parallel P' \text{ و } d \subset P) \Rightarrow d \parallel P'$$

زیرا اگر خط d صفحه P' را در نقطه‌ای مانند M قطع کند ، لزوماً باید نقطه M بر صفحه P واقع باشد (چرا ؟) ، یعنی دو صفحه P و P' نقطه مشترک داشته باشند و این مخالف فرض است ، پس $d \parallel P'$.

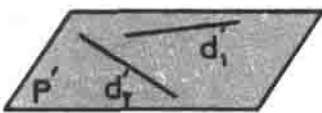
به همین دلیل هر خط واقع بر صفحه P' با صفحه P موازی است .

شرط توازی دو صفحه

(۴-۶-۱) قضیه - هرگاه دو خط غیر موازی از صفحه‌ای با دو خط از صفحه دیگر موازی باشند آن دو صفحه متوازیند .



یعنی اگر دو خط ناموازی d_1 و d_2 از صفحه P به ترتیب با دو خط d'_1 و d'_2 از صفحه P' موازی باشند ، دو صفحه P و P' متوازیند ، شکل (۴-۱۸) .



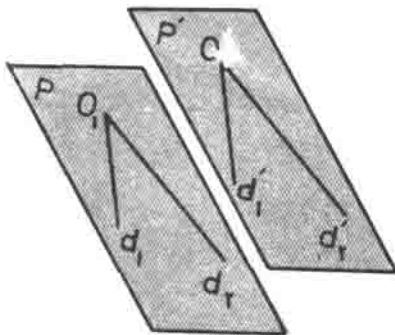
برهان - اگر دو صفحه P و P' متوازی نباشند پس فصل مشترکی مانند δ دارند . (δ در شکل مشخص نمی‌شود) خط δ که در صفحه P واقع است دست کم یکی از دو خط d_1 و d_2 ، مثلاً d_1

شکل (۴-۱۸)

را در نقطه‌ای چون M قطع می‌کند ، (چرا ؟) . این نقطه بر صفحه P' واقع است ، یعنی در این صورت باید خط d_1 با صفحه P' متقاطع باشد و این مخالف فرض است ، زیرا $d_1 \parallel P'$ است (قضیه ۴-۵-۱) .
بنابراین خط δ نمی‌تواند وجود داشته باشد . یعنی $P \cap P' = \emptyset$ و به بیان دیگر :

$$P \parallel P'$$

(۴-۶-۲) - قضیه - بر هر نقطه واقع در خارج صفحه ای يك صفحه فقط يك صفحه موازی آن صفحه میگذرد.



شکل (۴-۱۹)

برهان - صفحه P و نقطه O در خارج آن مفروضند ، شکل (۴ - ۱۹) .
بر نقطه دلخواه $O' \in P'$ دو خط متقاطع d_1 و d_2 را در صفحه P' مرور می دهیم و از نقطه O دو خط d'_1 و d'_2 را به ترتیب موازی آنها رسم می کنیم . دو خط اخیر صفحه ای مانند P' مشخص می کنند که بر نقطه O می گذرد و با صفحه P موازی است (قضیه قبل) .

حال ثابت می کنیم که این صفحه منحصر به یکی است . زیرا اگر صفحه دیگر P'_1 بر نقطه O بگذرد و با صفحه P موازی باشد با هر يك از دو خط d_1 و d_2 موازی است و بنابراین خطی را که از نقطه O واقع بر آن ، موازی d_1 یا d_2 رسم شود شامل خواهد بود (قضیه ۴ - ۵ - ۴) .
بنابراین : $d'_1 \subset P'$ ، $d'_2 \subset P'$ ، اما بر دو خط d'_1 و d'_2 تنها يك صفحه می گذرد ، از این روی لزوماً باید $P'_1 = P'$ باشد ، یعنی P'_1 نیز همان صفحه P' است .

تمرین

- ۱ - صفحه P' با دو خط متقاطع Ox و Oy از يك صفحه P موازی است ، ثابت کنید $P \parallel P'$.
- ۲ - دو خط d و d' با خط δ از يك صفحه P موازیند ، ثابت کنید بر دو خط مزبور يك صفحه مرور می کند . در وضعی که این صفحه نسبت به صفحه P می تواند داشته باشد ، بحث کنید .
- ۳ - بر خط d واقع در خارج صفحه P صفحه ای مرور دهید که با صفحه P موازی باشد . شرط امکان مسئله چیست ؟
- ۴ - ثابت کنید اگر دو صفحه موازی باشند ، هر خط که یکی از آنها را قطع کند دیگری را نیز قطع می کند .
- ۵ - ثابت کنید اگر دو صفحه متوازی باشند هر خط موازی با یکی از آنها با دیگری نیز موازی است .
- ۶ - ثابت کنید اگر دو خط متوازی باشند هر صفحه موازی یکی با دیگری نیز موازی است .

(۴-۶-۳) - قضیه - اگر دو صفحه با صفحه سوم موازی باشند، خود موازی یکدیگرند .

یعنی اگر P و P' و P'' سه صفحه باشند :

$$(P' \parallel P \text{ و } P \parallel P'') \Rightarrow P' \parallel P''$$

برهان - اگر دو صفحه P' و P'' متقاطع باشند ، لزوماً از هر نقطه واقع بر فصل مشترك

آنها دو صفحه موازی P رسم شده است ، و می دانیم که این ممکن نیست . بنابراین صفحه های

P' و P'' موازیند .

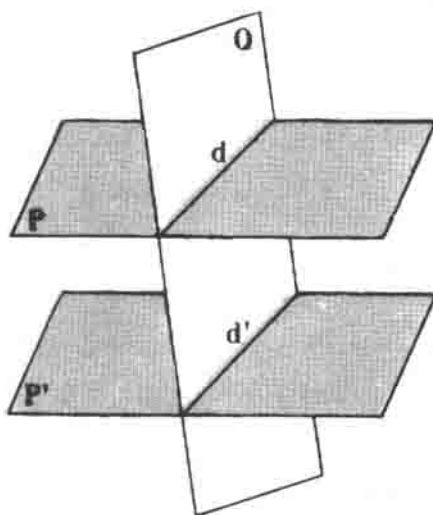
(۴-۶-۴) - قضیه - اگر دو صفحه متمم نیز متوازی باشند، هر صفحه که یکی از آنها را قطع کند، دیگری را

نیز قطع می کند و فصل مشترکهای آن با دو صفحه مزبور دو خط متوازیند.

یعنی اگر P و P' و Q سه صفحه متمم نیز باشند (شکل ۴-۲۰) .

$$(P \parallel P' \text{ و } P \cap Q = d) \Rightarrow$$

$$(P' \cap Q = d' \text{ و } d' \parallel d)$$



شکل (۴-۲۰)

برهان - صفحات P و Q نمی تواند متوازی باشند،

زیرا توازی آنها به این معنی است که بر هر نقطه از

خط d دو صفحه موازی با صفحه P گذشته است .

(صفحه های Q و P) و این ممکن نیست .

دو خط d و d' متنافر نیستند (چرا؟) پس یا هم

یاموازیند و یا متقاطع ، در صورت موازی بودن حکم

ثابت است و اگر متقاطع باشند فصل مشترك آنها

روی دو صفحه P و P' هم قرار میگیرد در نتیجه این

دو صفحه متقاطع میشوند و این ممکن نیست پس $d \parallel d'$.

(۴-۶-۵) - قضیه - همه خطهای همرسی که با يك صفحه موازی هستند بر صفحه ای موازی با

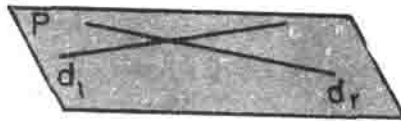
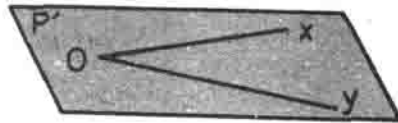
آن صفحه قرار دارند .

برهان - صفحه P و نقطه O را در خارج آن فرض می کنیم ، اگر از نقطه O دو نیم

خط Ox و Oy را موازی دو خط ناموازی d_1 و d_2 از صفحه P در نظر بگیریم، (شکل ۴-۲۱)،

آن دو نیم خط صفحه ای مانند P' مشخص می کنند که بر نقطه O می گذرد و با صفحه P موازی

است (قضیه ۴-۶-۱) .



شکل (۴-۲۱)

حال ملاحظه می‌کنیم که هر خط که از نقطه O موازی صفحه P رسم شود بایکی از خطهای صفحه P موازی است و بنابراین بر صفحه P' منطبق خواهد بود (قضیه ۴-۵-۴).

تمرین

- ۱ - هر يك از عبارات زیر را چنان کامل کنید که يك گزاره درست حاصل شود .
 - اگر دو صفحه موازی باشند هر خط واقع بر یکی با دیگری
 - اگر دو صفحه موازی باشند فصل مشترکهای آنها با هر صفحه دلخواه دو خط
 - مجموعه خطهایی که از يك نقطه خارج صفحه‌ای موازی آن صفحه رسم می‌شوند

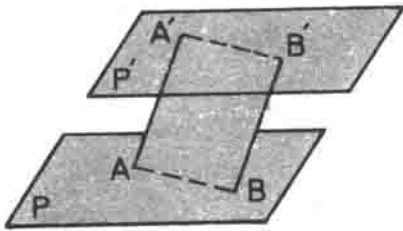
- ۲ - اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، همه خطهایی که آن خط را قطع می‌کنند با صفحه مفروض موازی هستند بر صفحه‌ای موازی صفحه مفروض قرار دارند .
- ۳ - چهار نقطه A و B و C و D بر يك صفحه واقع نیستند ، اولاً چند صفحه می‌توان در نظر گرفت به صورتی که هر صفحه شامل سه نقطه از نقطه‌های مفروض باشد. ثانیاً چند جفت صفحه‌های موازی می‌توان در نظر گرفت چنان که از هر جفت صفحه‌های موازی يك صفحه بر سه نقطه از نقطه‌های مزبور و دیگری بر نقطه چهارم مرور کند .

(۴-۷) - صورت فضایی قضیه تالس

(۴-۷-۱) - قضیه - پاره خطهای متوازی محصور بین دو صفحه متوازی ، متساویند .

یعنی اگر P و P' دو صفحه باشند ، شکل (۴-۲۲):

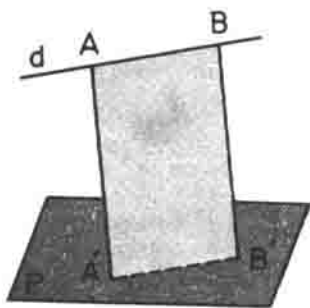
$$(A, B \in P \text{ و } A', B' \in P' \text{ و } AA' \parallel BB' \text{ و } P \parallel P') \Rightarrow AA' = BB'$$



شکل (۴-۲۲)

برهان - دو خط موازی AA' و BB' صفحه‌ای مشخص می‌کنند که با صفحه P در خط AB و با صفحه P' در خط $A'B'$ مشترك است و $AA' \parallel BB'$ (چرا؟) ، بنابراین چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی-الاضلاع است و $AA' = BB'$.

(۴-۷-۲) - قضیه - پاره خطهای متوازی که بین يك صفحه و يك خط موازی با آن محصور باشند ، متساویند .



شکل (۴-۲۳)

برهان - اگر صفحه P و خط d موازی باشند ، شکل (۴-۲۳) ، و دوباره خط AA' و BB' را که دوسرهريك از آنها به ترتیب یکی بر خط d و دیگری بر صفحه P واقع است و با یکدیگر موازیند در نظر بگیریم ، این دو خط موازی ، صفحه‌ای مشخص می‌کنند که با صفحه P در خط $A'B'$ مشترك است . خط $A'B'$ با خط d موازی است (چرا؟) ، بنابراین چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است و $AA' = BB'$.

(۴-۷-۳) - قضیه تالس - صفحه‌های متوازی بر خطهایی که آنها را قطع می‌کنند پاره خطهایی پدید می‌آورند که نظیر به نظیر متناسبند .

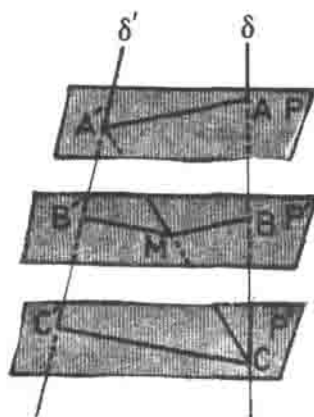
یعنی اگر سه صفحه متوازی P و P' و P'' ، شکل (۴-۲۴) ، خط δ را در نقاط A و B و C و خط δ' را در نقاط A' و B' و C' قطع کرده باشند داریم : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.
برهان - اگر نقطه A' روی P را به نقطه C روی P'' وصل کنیم ، پاره خط حاصل صفحه P' را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند (چرا؟) .

صفحه مثلث ACA' با صفحه P' در خط BM مشترك است و $BM \parallel AA'$ (قضیه ۴-۶-۴)

بنابراین :

$$(۱) \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'M}{MC}$$

به همین دلیل $B'M \parallel CC'$ و در نتیجه :



شکل (۴ - ۲۴)

$$(۲) \quad \frac{A'M}{MC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

از مقایسه تساویهای (۱) و (۲) می توان داشت:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{یا} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

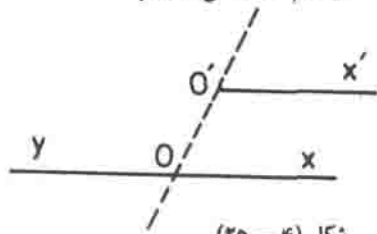
تمرین

- ۱- صفحه P و نقطه O خارج صفحه مفروضند. نقطه ای مانند M بر صفحه P در نظر گرفته و وسط پاره OM را N می نامیم، مکان هندسی نقطه N را وقتی نقطه M بر صفحه P جا به جا می شود تعیین کنید.
- ۲- سه صفحه بردو خط که آنها را قطع کرده اند پاره خطهای متناسب پدید آورده اند، آیا صفحه ها لزوماً موازی یکدیگرند؟ (نتیجه میشود که عکس قضیه تالس در فضا درست نیست).
- ۳- دو صفحه P و P' متوازیند. مکان هندسی وسطهای پاره خطهایی را که دوسر آنها بر این دو صفحه واقعند تعیین کنید.

(۲-۸) - زاویه دوخط

(۴-۸-۱) - نیم خطهای موازی و هم جهت - دو نیم خط موازی Ox و $O'x'$ را در صورتی هم جهت می گوئیم که در صفحه آنها هر دو نقطه x و x' در یک طرف خط OO' واقع باشند، شکل (۲۵-۲).

اگر دو نیم خط $O'x'$ و Oy که موازی یکدیگرند چنان رسم شده باشند که نقاط x' و y در طرفین خط OO' باشند، آن گاه نیم خطهای مرسوم را غیر هم جهت می گوئیم.

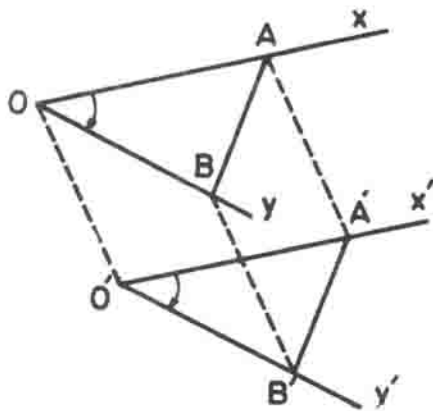


شکل (۴ - ۲۵)

(۴-۸-۲) - قضیه - هرگاه اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی و هم جهت (یا غیر هم جهت) باشند، آن دو زاویه مساوی یکدیگرند.

برهان - بردو ضلع موازی و هم جهت Ox و

$O'x'$ از دو زاویه پاره خطهای داخواه و متساوی OA و $O'A'$ را جدا می کنیم، شکل (۲۶-۲)،



شکل (۴ - ۲۶)

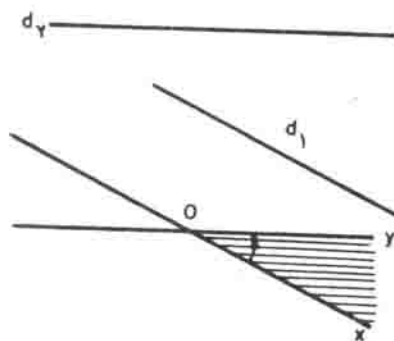
را به ترتیب بر نیم خطهای Oy و $O'y'$ مساوی یکدیگر جدا کنیم ، به همین دلیل پاره خط BB' با پاره خط OO' متوازی و متساوی است، از اینجا نتیجه می شود که پاره خطهای AA' و BB' متوازی و متساویند و بنابراین چهارضلعی $ABB'A'$ متوازی الاضلاع است و $AB = A'B'$.

از تساوی این دوپاره خط می توان نتیجه گرفت :

$$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'} \quad \text{و} \quad \triangle AOB = \triangle A'O'B'$$

اگر اضلاع دوزاویه نظیر به نظیر موازی و غیرهم جهت باشند، قضیه را چگونه ثابت می کنید؟

(۴-۸-۳) - قضیه - هرگاه اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی و یکی از آنها هم جهت و دوضلع دیگر غیرهم جهت باشند ، دو زاویه مکمل یکدیگرند .
اثبات به عهده دانش آموزان است .



شکل (۴ - ۲۷)

اگر دو نقطه O و O' ، همچنین نقاط A و A' را به هم وصل کنیم ، چون Ox و $O'x'$ هم جهت هستند نقاط A و A' در یک طرف OO' واقع می شوند و چهارضلعی $OAA'O'$ پدید می آید که دوضلع OA و $O'A'$ آن متوازی و متساویند، پس چهارضلعی متوازی الاضلاع است و بنابراین پاره خط OO' با پاره خط AA' متوازی و متساوی است .

اگر پاره خطهای OB و $O'B'$

(۴-۸-۴) - زاویه دوخط متنافر - زاویه دو

خط متنافر، معمولاً زاویه حاده یا قائمه بین دوخط است که از يك نقطه موازی دوخط متنافر رسم شده باشند.

درحالات خاصی که دوخط d_1 و d_2 متوازی باشند، زاویه بین دوخط موازی صفر است وگوئیم دوخط مزبور هم راستا هستند .

اگر زاویه بین دوخط متنافر قائمه باشد،

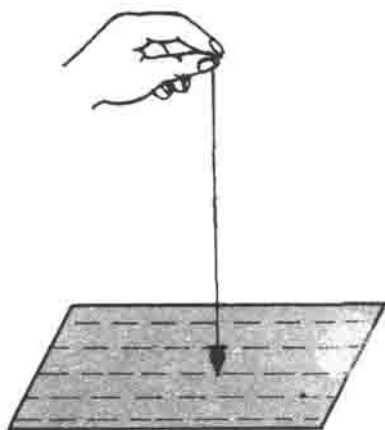
می‌گوییم دو خط مزبور متناظر آ بر یکدیگر عمودند یا باهم زاویه قائمه تشکیل می‌دهند یا راستا های عمود بر هم دارند.

تمرین

- ۱ - اگر دوزاویه حاده متساوی باشند و یک ضلع از یکی موازی يك ضلع از دیگری باشد: آیا اضلاع دیگرشان لزوماً موازیند؟ چرا؟
- ۲ - ثابت کنید اگر اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی باشند، نیمسازهای آنها با یکدیگر موازی یا برهم عمودند.

(۹-۴) - خط و صفحه عمود بر هم

(۹-۴-۱) - تعریف - خط d را در صورتی بر صفحه P عمود می‌گوییم که با هر خط از آن صفحه زاویه قائمه ساخته باشد، به بیان دیگر بر هر خط دلخواه از آن صفحه عمود باشد.



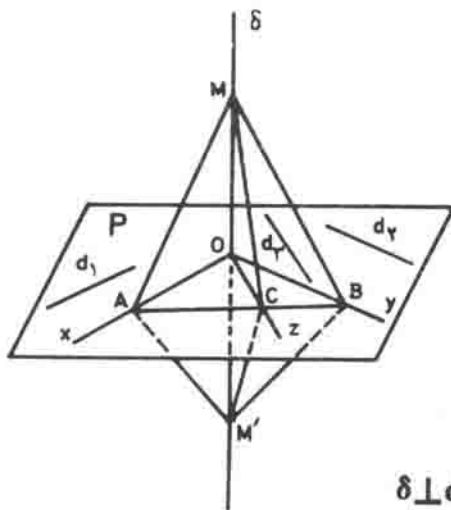
شکل (۴ - ۲۸)

از امتداد آزاد يك شاغول نسبت به صفحه افقی می‌توان تصویريك خط عمود بر صفحه را در ذهن ایجاد کرد. چنان‌که اگر شاغول را در بالای سطح آرام وساکن آب استخر به حال تعادل نگاه داریم، امتداد ریسمان آن بر سطح آب عمود است (شکل (۴-۲۸)).
 امتداد شاغولی را در هر محل امتداد قائم محل صفحه عمود بر آن امتداد را سطح تراز یا افقی محل می‌گوییم.

شرط آن که خطی بر صفحه‌ای عمود باشد

(۹-۴-۲) - قضیه - اگر خطی بر دو خط ناموازی از صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط دیگر آن صفحه، و در نتیجه، بنا بر تعریف، بر آن صفحه عمود است.

در شکل (۴-۲۹) فرض می‌کنیم خط δ بر دو خط ناموازی d_1 و d_2 از صفحه P عمود باشد، خط دلخواهی مانند d_p از آن صفحه در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم خط δ بر آن



خط نیز عمود است ، پس بر همه خطهای صفحه P عمود است و بنابراین بر صفحه P عمود است .

پوهان - خط δ صفحه P را در نقطه ای مانند O قطع می کند، از این نقطه نیم خطهای Ox و Oy و Oz را به ترتیب با d_1 و d_2 و d_3 موازی رسم می کنیم .

$$\delta \perp d_2 \Rightarrow \delta \perp Oy \quad \text{و} \quad \delta \perp d_1 \Rightarrow \delta \perp Ox$$

شکل (۴-۲۹)

حال خط دلخواهی از صفحه P در نظری می گیریم که Ox را در یک نقطه A و Oy را در نقطه B و Oz را در نقطه C قطع کرده باشد ولی بر O نگذرد. بر خط δ در دو طرف نقطه O دو نقطه M و M' را چنان اختیاری کنیم که $OM' = OM$ باشد، در این صورت نیم خطهای Ox و Oy هر یک در صفحه ای معین ، عمود منصف MM' است، بنابراین $AM = AM'$ و $BM = BM'$ و از این رابطه ها می توان نتیجه گرفت :

$$(AM = AM' , BM = BM' , AB = AB) \Rightarrow (\triangle MAB = \triangle M'AB) \Rightarrow (\widehat{MAB} = \widehat{M'AB})$$

$$\text{در نتیجه} \quad \triangle MAC = \triangle M'AC \quad (\text{ض ز ض})$$

و از آنجا $CM = CM'$ و چون نقطه O وسط MM' است، ناچار نیم خط OC یک عمود منصف از پاره خط MM' است و با ملاحظه آن که $d_3 \parallel OC$ است ، $MM' \perp d_3$ ، یعنی خط δ بر هر خط مانند d_3 از صفحه P عمود است ، بنابراین $\delta \perp P$.

تمرین

- ۱- عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که هر یک از احکام درست باشد .
- دو خط متناظر را وقتی بر یکدیگر عمود می گوئیم که
- امتداد قائم هر محل بر ... آن محل عمود است .
- شاغولی که به صورت آویخته و آزاد در حال تعادل باشد، امتداد ... محل را مشخص می کند.
- ۲- در هر نقطه از یک خط چند عمود بر آن خط می توان در نظر گرفت؟ چرا؟
- ۳- از هر نقطه واقع در خارج یک خط ، چند خط مرور می کند که با آن خط زاویه قائمه

بسازد؟ چرا؟

۴ - کدام يك از گزاره‌های زیر درست و کدام يك نادرست است؟ چرا؟

۱) $d \perp CP$ و $d \perp CP'$ و $d \perp P \Rightarrow d \perp d_1$

۲) $d_1 \perp CP$ و $d_2 \perp CP$ و $d_1 \not\parallel d_2$ و $d \perp d_1, d \perp d_2 \Rightarrow d \perp P$

۵ - ثابت کنید اگر یکی از دوخط متوازی بر صفحه‌ای عمود باشد، دیگری نیز بر آن

صفحه عمود است.

گزاره‌هایی درباره خط عمود بر صفحه

(۴-۹-۳) - قضیه - بر هر نقطه واقع بر يك خط راست یا در خارج آن، يك صفحه فقط يك صفحه عمود

بر آن خط مرور می‌کند.

برهان - ۱ - نقطه O بر خط d

واقع است.

در این حالت برای اثبات قضیه

دو صفحه متمایز P و Q در نظر می‌گیریم

که هر دو تای آنها خط d را شامل باشند،

شکل (۴-۳۰)، در هر يك از این دو صفحه

نیم خطی در نظر می‌گیریم که در نقطه O

بر خط d عمود باشد (مانند Ox و Oy). این

دو نیم خط صفحه‌ای مانند R مشخص

می‌کنند که در نقطه O بر خط d عمود

است (قضیه ۴-۹-۲).

حال ثابت می‌کنیم که صفحه گذرنده از نقطه O و عمود بر خط d منحصر به همان صفحه

R است. برای اثبات این مطلب گوئیم هر صفحه دیگر مانند R' که در نقطه O بر خط d عمود

باشد، صفحه‌های P و Q را به ترتیب در دوخط مانند Ox' و Oy' قطع می‌کند و خط

بر هر دوخط اخیر عمود است (چرا؟)، اما

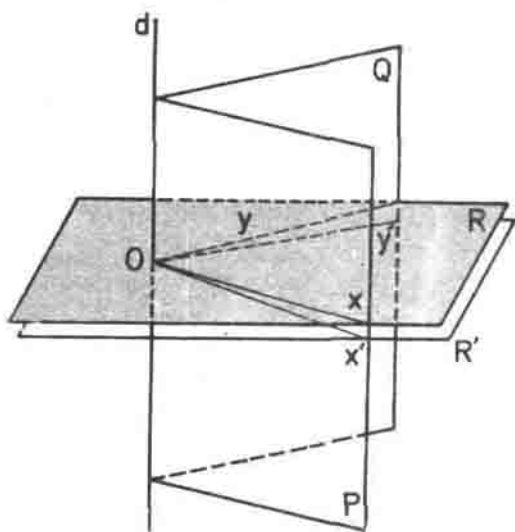
$$[Ox \perp d \text{ و } Ox' \perp d \text{ و } Ox \subset P \text{ و } Ox' \subset P] \Rightarrow Ox \equiv Ox'$$

$$[Oy \perp d \text{ و } Oy' \perp d \text{ و } Oy \subset Q \text{ و } Oy' \subset Q] \Rightarrow Oy \equiv Oy'$$

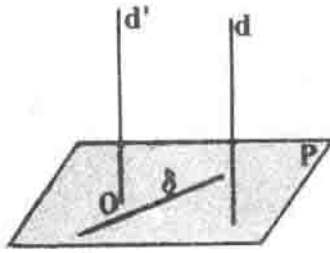
یعنی صفحه R' دو نیم خط Ox و Oy را شامل است و چون دو نیم خط متقاطع فقط يك

صفحه مشخص می‌کنند، صفحه R' بر صفحه R منطبق است. یعنی R' همان R است و بنابراین

بر نقطه O فقط يك صفحه عمود بر خط d مرور می‌کند.



شکل (۴-۳۰)



شکل (۴-۳۱)

۲ - نقطه O خارج خط d است .

در این حالت برای اثبات قضیه از نقطه O خط d' را موازی خط d رسم می کنیم ، شکل (۴-۳۱) ، صفحه P که در نقطه O برخط d' عمود است بر موازی آن نیز عمود می باشد ، زیرا که :

$$(d' \perp P, \delta \subset P) \Rightarrow d' \perp \delta$$

$$(d' \perp \delta, d \parallel d') \Rightarrow d \perp \delta$$

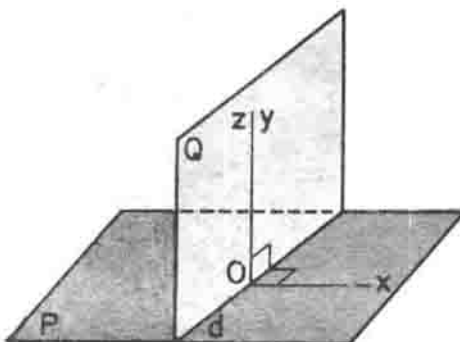
یعنی خط d بر هر خط دلخواه delta از صفحه P عمود است ، بنابراین $d \perp P$.

می توان ملاحظه کرد که اگر صفحه دیگری شامل نقطه O و عمود بر خط d باشد ، ناچار برخط d' نیز عمود است (چرا ؟) ، چون بر نقطه O فقط يك صفحه عمود برخط d' مرور می کند ، صفحه اخیر نیز باید بر صفحه P منطبق باشد . یعنی صفحه شامل نقطه O و عمود برخط d فقط یکی است .

تمرین

- ۱ - خط d بر صفحه P عمود است ، از نقطه O واقع بر صفحه P خط d' را چنان مرور می دهیم که با خط d زاویه قائمه تشکیل دهد ، ثابت کنید $d' \subset P$.
- ۲ - ثابت کنید همه خطهایی که از يك نقطه O می گذرند و با خط مفروض d زاویه قائمه تشکیل می دهند در صفحه ای هستند که بر خط d عمود است .
- ۳ - بر نقطه مفروض خطی مرور دهید که با دو خط متناظر d و d' زاویه های قائمه بسازد .
- ۴ - ثابت کنید دو صفحه متمایز عمود بر يك خط راست موازی یکدیگرند .

(۴-۹-۴) - قضیه - بر هر نقطه يك خط و فقط يك خط عمود بر صفحه مفروض مرور می کند .



شکل (۴-۳۲)

برهان - ۱ - نقطه O بر صفحه P واقع است .

نیم خط $Ox \subset P$ و صفحه Q را که در

نقطه O بر این نیم خط عمود است در نظر می گیریم ، شکل (۴-۳۲) .

از نقطه O در صفحه Q نیم خط Oy را برخط

d فصل مشترك دو صفحه P و Q عمود می کنیم ، خط

Ox \perp Oy بر صفحه P عمود است ، زیرا

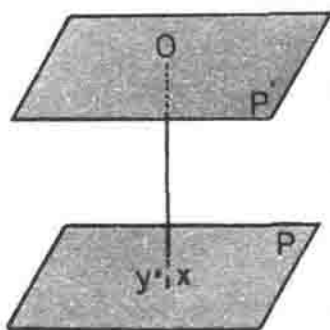
Ox \perp Oy و Oy \perp P پس بر نقطه O خطی

می گذرد که بر صفحه P عمود است.

حال ثابت می کنیم که خط عمود فقط یکی است، زیرا اگر خط دیگر Oz در نقطه O بر صفحه P عمود باشد، صفحه yOz صفحه P را در خطی مانند δ قطع می کند (چرا؟). و

$$(Oy \perp P \text{ و } Oz \perp P \text{ و } \delta \subset P) \Rightarrow Oy \perp \delta \text{ و } Oz \perp \delta$$

یعنی در این صورت لازم می آید که در صفحه yOz در نقطه O دو خط متمایز عمود بر خط δ وجود داشته باشند و این نشدنی است. پس $Oz = Oy$ ؛ یعنی خطی که در نقطه O بر صفحه P عمود است فقط یکی و همان Oy است.



شکل (۳۳-۴)

۲- نقطه O خارج صفحه P است.

بر نقطه O صفحه P' را موازی P

مروزمی دهیم شکل (۳۴-۴)، اگر نیم خط

Ox بر صفحه P' عمود باشد:

$$(P' \parallel P, Ox \perp P') \Rightarrow Ox \perp P$$

حال ثابت می کنیم خط عمود فقط یکی

است، زیرا اگر خط دیگری مانند Oy بر

صفحه P عمود باشد، بر موازی آن، یعنی بر صفحه P' نیز عمود است و در این صورت لازم می آید که از نقطه O دو خط بر صفحه P' عمود شده و این ممکن نیست. پس $Oy = Ox$ ، یعنی عمودی که از نقطه O بر صفحه P رسم می شود فقط یکی است.

نتیجه - دو خط عمود بر یک صفحه موازی یکدیگرند.

پرهان - اگر دو خط d و d' بر

صفحه P عمود باشند، شکل (۳۴-۴) و از

نقطه O، محل تلاقی خط d با صفحه P،

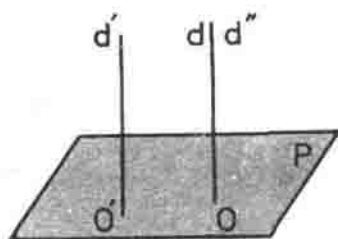
خط d'' را موازی d' رسم کنیم،

$$(d \cap d'' = O, d, d'' \perp P) \Rightarrow d = d''$$

یعنی خطی که از نقطه O موازی d' رسم

می شود همان خط d است، به بیان دیگر

$$d \parallel d'$$



شکل (۳۴-۴)

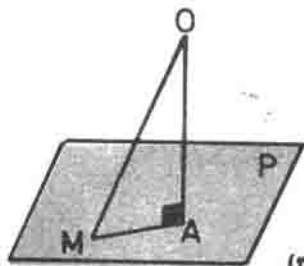
تمرین

۱- هر يك از عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که يك گزاره درست حاصل شود.

- خطی که بر یک صفحه عمود باشد آن صفحه را در یک نقطه
- خطی که بر یک صفحه عمود باشد با هر خط واقع بر آن صفحه زاویه
- خطی که بر یک صفحه عمود باشد با هر خط موازی آن صفحه زاویه
- از هر نقطه مفروض فقط یک خط عمود بر یک
- ۲- ثابت کنید هر خط که بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.
- ۳- صفحه P و نقطه O واقع بر آن مفروضند. خطی از صفحه P مشخص کنید که از نقطه O بگذرد و بر خط مفروض δ عمود باشد.

۴- بر نقطه مفروض O واقع در خارج خط d خطی مرور دهید که با صفحه مفروض P

موازی باشد و با خط d زاویه قائمه تشکیل دهد.



شکل (۴-۳۵)

(۴-۱۰) - فاصله نقطه از صفحه

صفحه P و نقطه O واقع در خارج

آن را در نظر می‌گیریم، شکل (۴-۳۵)، از

نقطه O عمودی بر صفحه P فرود می‌آوریم و فرض می‌کنیم صفحه را در نقطه‌ای مانند A قطع کرده‌است. می‌دانید که این عمود منحصر به یکی است و هر خط دیگری که بر نقطه O بگذرد و صفحه P را قطع کند بر آن صفحه عمود نیست.

هر خط که صفحه‌ای را قطع کند و بر آن عمود نباشد، نسبت به آن صفحه یک خط مایل

نامیده می‌شود، مانند مایل OM در شکل (۴-۳۵).

اگر نقطه‌های A و M را با خط راستی به هم وصل کنیم، در مثلث OAM زاویه A

قائم‌است (چرا؟)، و بنابراین $OA < OM$ ، یعنی:

اندازه پاره‌خطی که از هر نقطه O بر صفحه P عمود شود، از اندازه هر پاره‌خط

دیگری که از نقطه O بگذرد و از سر دیگرش به صفحه P محدود باشد، کوتاهتر است.

به بیان دیگر،

پاره خطی که از یک نقطه خارج صفحه‌ای بر آن صفحه عمود رسم می‌شود کوتاهترین پاره

خطی است که بین آن نقطه و صفحه مفروض محصور باشد، این کوتاهترین پاره خط محدود به نقطه

O و صفحه P را فاصله آن نقطه از صفحه می‌گوییم. اگر نقطه روی صفحه باشد، فاصله نقطه از

صفحه را صفر می‌گیریم.

(۴-۱۰-۱) - عمود و مایل نسبت به صفحه - هر گاه پاره خط OA شکل (۴-۳۵) عمودی

باشد که از نقطه O نسبت به صفحه P رسم می‌شود و پاره خط OM مایل دلخواهی گذرنده از

همان نقطه O باشد، معمولاً نقاط A و M را به ترتیب پای عمود و پای مایل می‌نامیم.
اندازه‌های دو پاره‌خط OA و OM نیز به ترتیب اندازه عمود و اندازه مایل نامیده می‌شوند و چنان که ذکر شد، به ویژه اندازه عمود را، که منحصر به یکی است، فاصله نقطه O از صفحه P می‌گوییم.

درباره عمود و مایلهایی که از یک نقطه نسبت به یک صفحه رسم می‌شوند، گزاره‌هایی نظیر آنچه درباره عمود و مایل نسبت به یک خط در صفحه دیده‌اید، می‌توان داشت که عبارتند از:

(۴-۱۰-۳) - قضیه - پاره‌خط عمودی که از یک نقطه نسبت به صفحه‌ای رسم می‌شود از هر پاره‌خط مایلی که از همان نقطه می‌گذرد کوچکتر است.

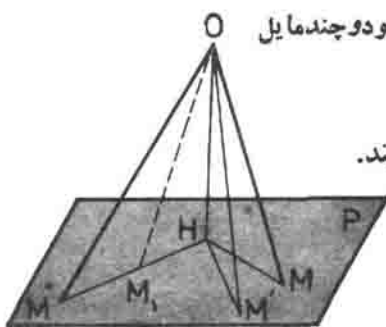
اثبات این قضیه در بالا گفته شده است. (در شکل ۴-۳۵ در مثلث قائم الزاویه OAM وتر OM از اضلاع دیگر بیشتر می‌باشد.)

(۴-۱۰-۳) - قضیه - هرگاه از یک نقطه خارج صفحه یک عمود و چند مایل نسبت به آن صفحه رسم شده باشند:

- مایلهایی که پای آنها از پای عمود به یک فاصله باشند متساوینند.

- از دو مایل که پای آنها از پای عمود به یک فاصله نیست، آن که پایش به پای عمود نزدیکتر است، کوچکتر است.

شکل (۴-۳۶)



برهان - صفحه P و نقطه O در خارج آن در نظر گرفته و پای عمودی که از O بر P رسم می‌شود با H نمایش می‌دهیم. اگر مایلهای OM و OM' چنان باشند که $MH = M'H$ باشد، (شکل ۴-۳۶)، ثابت می‌شود که $OM = OM'$ ، زیرا که در دو مثلث OHM و OHM' زاویه‌های H هر دو قائمه‌اند و ضلع OH مشترک است و $MH = M'H$ ، بنابراین دو مثلث متساوینند و در نتیجه $OM = OM'$.

در همین شکل اگر مایل OM'' نسبت به صفحه P چنان رسم شده باشد که $M''H > MH$ و نقطه M_1 را بر پاره‌خط $M''H$ چنان اختیار کنیم که $M_1H = MH$ باشد در آن صورت $OM_1 = OM$ و چون $OM'' > OM_1$ است نتیجه می‌شود که $OM'' > OM$.

(۴-۱۰-۴) - عکس قضیه - اگر از نقطه‌ای یک عمود و چند مایل نسبت به صفحه‌ای رسم شده باشند، پای مایلهای متساوی از پای عمود به یک فاصله است، اگر مایلهایی متساوی نباشند مایلی که

بزرگتر است پایش از پای عمود دورتر است.
اثبات به عهده دانش‌آموزان است.

(۴-۱۰-۵) - فاصله دو صفحه متوازی - از آنچه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت که اگر دو صفحه متمایز متوازی باشند، پاره خطهایی که بر دو صفحه عمود و از دو طرف به صفحه‌ها محدود باشند، مساوی یکدیگرند (چرا؟). هر يك از این پاره خطها در حقیقت فاصله يك نقطه دلخواه يك صفحه، از صفحه دیگر است و آن را فاصله دو صفحه می‌گوییم. فاصله هر صفحه از خودش را صفر تعریف می‌کنیم.

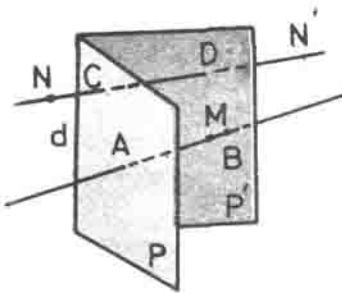
(۴-۱۰-۶) - فاصله خط از صفحه موازی با آن - اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، همه نقطه‌های آن خط از صفحه به يك فاصله‌اند، (چرا؟). در این صورت فاصله هر نقطه خط را از صفحه، فاصله خط از صفحه می‌گوییم. یعنی:

فاصله خط از صفحه موازی با آن عبارت است از فاصله هر نقطه دلخواه خط از آن صفحه.

تمرین

- ۱- هر يك از عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که يك گزاره درست حاصل شود.
- فاصله هر نقطه O از صفحه مفروض P
- فاصله دو صفحه متوازی
- فاصله هر خط از صفحه‌ای که با آن خط موازی است برابر است با ...
- ۲- ثابت کنید اگر دو نقطه A و B از صفحه مفروض P به يك فاصله و هر دو در يك طرف آن صفحه باشند، پاره خط AB موازی با صفحه P است.
- ۳- ثابت کنید اگر دو نقطه A و B از صفحه P به يك فاصله و در دو طرف صفحه P باشند، صفحه P بر وسط پاره خط AB می‌گذرد.
- ۴- ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B به يك فاصله باشند، صفحه‌ای است که بر وسط پاره خط AB می‌گذرد و بر آن پاره خط عمود است.
- ۵- خط δ و نقاط A و B که با آن خط در يك صفحه واقع نیستند مفروضند، بر خط δ نقطه‌ای مانند C مشخص کنید که مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین باشد.
- ۶- صفحه‌ای مشخص کنید که خط مفروض d را شامل باشد و دو نقطه مفروض A و B از آن به يك فاصله باشند.

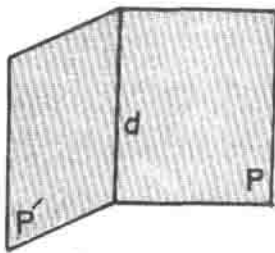
(۳-۱۱) - زاویه دو صفحه - فرجه



شکل (۴ - ۳۷)

(۴-۱۱-۱) - فرجه - فرجه بخشی از فضا است که به دو نیم صفحه با مرز مشترك مخلود می شود. مرز مشترك دو نیم صفحه را یال فرجه و هر نیم صفحه را يك وجه فرجه می نامند. فرجه وجهها و یالهای خود را در بر دارد. اگر P و P' وجههای يك فرجه و d یال آن باشند، فرجه را با نماد (PdP') نمایش می دهیم. با هر دو نیم صفحه دو فرجه مشخص

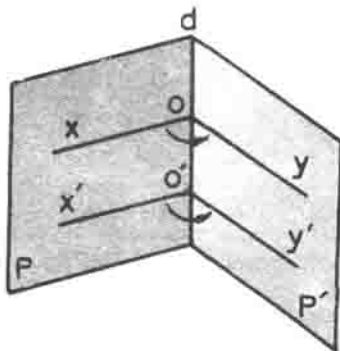
می شوند. در حالتی که اجتماع نیم صفحه های P و P' يك صفحه تشکیل دهد، هر يك از دو فرجه بدست آمده يك نیم فضا است و خاصیت های نیم فضا را قبلا دانستیم. در حالت های دیگر دو فرجه نابرابرند و می توان یکی را بر زیر مجموعه ای از دیگری منطبق کرد. هر نقطه M در فرجه



شکل (۴ - ۳۸)

کوچکتر را می توان چنین توصیف کرد: هر خطی که از نقطه M بگذرد و وجه های فرجه را در A و B قطع کند، نقطه M خارج A و B قرار نمی گیرد. هر نقطه N در فرجه یزدگتر را می توان چنین توصیف کرد؛ هر خطی که از نقطه N بگذرد و دو وجه فرجه را در C و D قطع کند، نقطه N بین C و D قرار نمی گیرد.

فرجه در فضامانند زاویه است در صفحه؛ فرجه را گاهی زاویه دوسطعی می گوئیم.



شکل (۴ - ۳۹)

(۴-۱۱-۲) - زاویه مسطحه فرجه - زاویه مسطحه فرجه زاویه ای است که در فرجه قرار گرفته و رأس آن نقطه ای از یال فرجه و هر ضلع آن در یکی از وجهها بر یال فرجه عمود باشد.

در شکل (۴-۳۹)، \widehat{xOy} که در آن ضلع Ox روی صفحه P و عمود بر یال d و ضلع Oy روی صفحه P' و عمود بر d است، يك زاویه مسطحه فرجه (PdP') است.

در هر نقطه از پال يك فرجه، يك زاويه مسطحه مي توان ساخت، يعنى هر فرجه زاويه هاى مسطحه
 بي شمار دارد، اما همه اين زاويه ها مساوي يكديگرند. زيرا اگر زاويه هاى xOy و $x'O'y'$ دو
 زاويه مسطحه فرجه (PdP') باشند، چون Ox و $O'x'$ در صفحه P واقع بوده و Oy و $O'y'$
 بر صفحه P' قرار دارند،

$$\left. \begin{array}{l} Ox, O'x' \perp d \Rightarrow Ox \parallel O'x' \\ Oy, O'y' \perp d \Rightarrow Oy \parallel O'y' \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$$

صفحه هر زاويه مسطحه يك فرجه بريال آن عمود است، (چرا؟)، بنا بر اين مي توان گفت:
 مقطع هر صفحه عمود بريال يك فرجه با آن فرجه، يك زاويه مسطحه فرجه است.

(۴-۱۱-۳) قضيه - اگر زاويه هاى مسطحه دو فرجه متساوي باشند، فرجه ها مساوي يكديگرند.

برهان - اگر \widehat{xOy} مسطحه فرجه (P, d, P') و $\widehat{x'O'y'}$ مسطحه فرجه

(P_1, d_1, P'_1) باشد، $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$ باشد،

شکل (۴-۱۰) و فرجه (P, d, P')

را در فضا جابه جا كنيم تا \widehat{xOy} بر مساوي

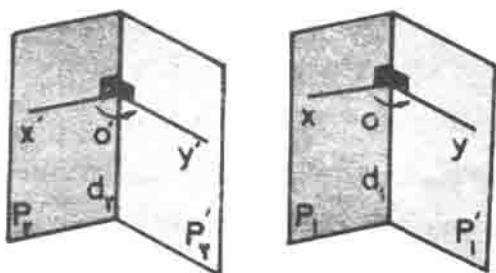
آن $\widehat{x'O'y'}$ منطبق شود، با توجه به

آن كه يالهاى دو فرجه بر صفحه هاى

دو زاويه مسطحه فرجه ها عمودند، ناچار

خطهاى d_1 و d كه بر صفحه هاى زاويه ها

عمود هستند بريكديگر منطبق خواهند شد،



شکل (۴ - ۱۰)

پس در حالت انطباق زاويه هاى مسطحه، دو وجه P_1 و P_1 ، كه در دو خط متقاطع Ox و d_1 ،

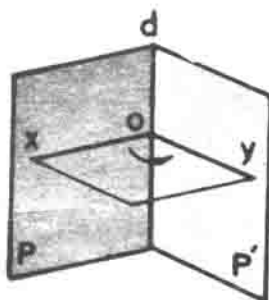
(يا در دو خط $O'x'$ و d_1)، مشتركند بريكديگر منطبق مي شوند، زيرا بر دو خط متقاطع تنها يك

صفحه مي گذرد. به همين دليل در حالت انطباق دو زاويه مسطحه، دو وجه P_1 و P_1 از دو

فرجه روي هم قرار مي گيرند، پس دو فرجه بريكديگر منطبق خواهند شد، بنا بر اين مساوي يكديگرند.

روشن است كه در دو فرجه متساوي زاويه هاى مسطحه مساوي يكديگرند. يعنى عكس

قضيه فوق نيز صحيح است.



شکل (۴ - ۱۱)

(۴-۱۱-۴) - اندازه فرجه - هر فرجه با

زاويه مسطحه اش شناخته مي شود، زيرا

اگر \widehat{xOy} يكي از زاويه هاى مسطحه

فرجه اي باشد، شکل (۴-۱۱)، و در رأس

اين زاويه خط d را عمود بر صفحه آن در

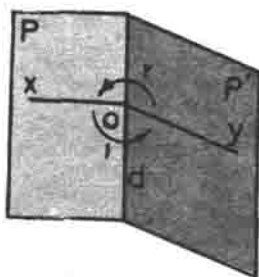
نظر بگیریم، هر يك از وجه‌های فرجه با دو خط متقاطع، $(d, O_y$ یا $d, O_x)$ مشخص می‌شود و بنابراین فرجه‌ای که \widehat{xOy} مسطحه آن است، مشخص می‌گردد.

باتوجه به آن که در هر فرجه همه زاویه‌های مسطحه متساویند و اندازه زاویه مسطحه مستقل از انتخاب رأس زاویه است، اندازه زاویه مسطحه به عنوان اندازه فرجه به کار می‌رود. یعنی اندازه زاویه مسطحه هر فرجه را اندازه فرجه در نظر می‌گیریم.

اندازه فرجه را مانند اندازه زاویه می‌توان بر حسب درجه و دقیقه و ثانیه، یا بر حسب گراد، یا بر حسب رادیان، بیان کرد.

زاویه دو صفحه - اگر دو صفحه متقاطع باشند، از تقاطع آنها فرجه‌هایی پدید می‌آید. مسطحه‌های فرجه‌های مزبور اندازه فرجه‌ها را مشخص می‌کنند. هر يك از این زاویه‌های مسطحه فرجه‌هایی که پدید آمده‌اند يك زاویه بین دو صفحه گفته می‌شوند و در حالت کلی معمولاً آن زاویه را که کوچکتر است زاویه بین دو صفحه می‌گیرند. بنابراین:

زاویه بین دو صفحه، زاویه مسطحه فرجه‌ای است که از تقاطع آنها پدید می‌آید. به بیان دیگر، اگر دو صفحه در خطی مانند d متقاطع باشند و در يك نقطه از خط d صفحه‌ای بر آن عمود کنیم، این صفحه با دو صفحه مزبور در دو خط متقاطع است، زاویه بین دو خط مزبور را زاویه بین دو صفحه می‌گوییم.



شکل (۴ - ۴۲)

(۴-۱۱-۵) - فرجه‌های گوز و کاو -
دو نیم صفحه که مرز مشترک داشته باشند، دو فرجه مشخص می‌کنند که معمولاً زاویه مسطحه یکی از آنها زاویه گوز (کوچکتر از یا برابر با 180°) و زاویه مسطحه دیگری، زاویه کاو (بزرگتر از 180°) است، مانند زاویه‌های O_1 و O_2 در شکل (۴-۲۲).

فرجه‌ای را که زاویه مسطحه آن گوز باشد، فرجه گوز و آن را که زاویه مسطحه‌اش کاو باشد، فرجه کاو می‌گوییم.

معمولاً وقتی از فرجه حاصل از دو نیم صفحه، به عنوان مطلق و بدون قید نوع سخن می‌گوییم، مقصود همان فرجه گوز بین دو نیم صفحه است. در تعیین زاویه بین دو صفحه نیز عموماً در مطالعات خود زاویه کوچکتری را که بین دو صفحه تشکیل می‌شود زاویه دو صفحه می‌گیریم.

فرجه نیم فضا - فرجه‌ای را که دو وجه آن بر يك صفحه واقع باشند، فرجه نیم فضا می‌گوییم. اندازه زاویه مسطحه فرجه نیم فضا 180° است. بنابراین می‌توان گفت:

نیم فضا فرجه‌ای است که اندازه زاویه مسطحه‌اش 180° باشد.
 فرجه قائمه - فرجه قائمه آن است که اندازه زاویه مسطحه‌اش 90° باشد. هر فرجه قائمه نصف يك فرجه نیم فضا است.

تمرین

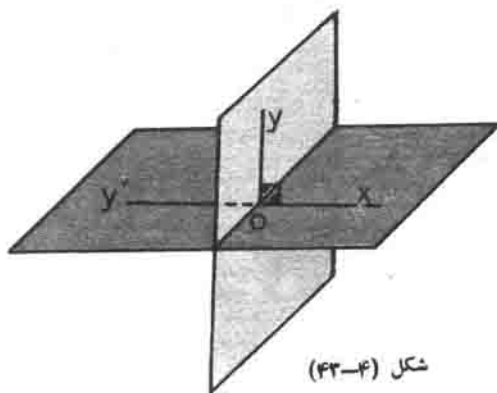
- ۱- هر يك از عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که يك گزاره درست حاصل شود.
 - هر فرجه بادونیم صفحه که ... باشند مشخص می‌شود.
 - هر فرجه دارای دو... و يك... است.
 - هر فرجه بازوویه مسطحه خود ... است.
 - فرجه گوژ فرجه‌ای است که
- ۲- آیا می‌توانید صفحه نیمساز يك فرجه را تعریف کنید؟ هر فرجه چند صفحه نیمساز دارد؟
- ۳- دو صفحه متقاطع چند فرجه مشخص می‌کنند؟
- ۴- دونیم صفحه در چه صورت فرجه پدید می‌آورند؟ چند فرجه؟
- ۵- اندازه زاویه مسطحه فرجه‌ای 180° است، فرجه گوژ است یا کاو؟
- ۶- صفحه نیمساز يك فرجه قائمه از آن فرجه چه فرجه‌هایی پدید می‌آورد؟
- ۷- آیا می‌توانید به همان صورت که در مورد زاویه‌ها دیده‌اید، فرجه‌های مجاور و مجانب و متقابل به یال را تعریف کنید؟
- ۸- درباره دو فرجه مجانب و متقابل به یال چه گزاره‌هایی می‌توانید بیان کنید؟

(۴-۱۲) - صفحه‌های عمود برهم

(۴-۱۲-۱) - تعریف - دو صفحه متقاطع را در صورتی عمود برهم می‌گوییم که فرجه‌های بین آنها

قائم باشند. روشن است که اگر یکی از چهار فرجه گوی که از تقاطع دو صفحه پدید می‌آیند قائمه باشد، سه فرجه دیگر قائمه‌اند (چرا؟)، بنابراین:

دو صفحه متقاطع وقتی برهم عمود هستند که از تقاطع آنها فرجه‌های قائمه پدید آید شکل (۴-۴۳).



شکل (۴-۴۳)

شرط آن که دو صفحه برهم عمود باشند.

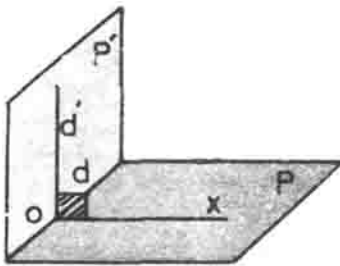
(۴-۱۳-۲) - قضیه - اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، هر صفحه که بر آن خط بگذرد، بر صفحه مفروض عمود است.

یعنی اگر d' يك خط و P و P' دو صفحه باشند،

$$(d' \perp P, d' \subset P') \Rightarrow (P' \perp P)$$

برهان - اگر در شکل (۴-۲۲)، خط d' بر صفحه P عمود باشد، آن صفحه را در

نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. هر صفحه P' که بر خط d' بگذرد، صفحه P را در خطی مانند d که بر نقطه O می‌گذرد قطع می‌کند (چرا؟). و اگر نیم‌خط Ox در صفحه P بر خط d عمود باشد،



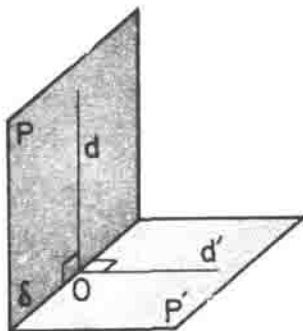
شکل (۴-۲۲)

$$d' \perp P \Rightarrow (d' \perp d, d' \perp Ox)$$

اما خطهای d' و Ox که در نقطه O بر خط d عمودند به ترتیب بر دو صفحه P و P' واقعند. بنابراین $\widehat{d'Ox}$

مسطحه فرجه بین دو صفحه است و چون این زاویه قائمه است، $P' \perp P$. نتیجه - دو صفحه در صورتی بر یکدیگر عمودند که يك خط از یکی بر دیگری عمود باشد.

(۴-۱۳-۳) - قضیه - اگر دو صفحه برهم عمود باشند، هر خطی که در یکی از آنها بر فصل مشترکشان



شکل (۴-۲۳)

عمود باشد، بر صفحه دیگر عمود است.

برهان - فرض می‌کنیم که در شکل

(۴-۲۳)، دو صفحه P و P' به صورتی

در نظر گرفته شده باشند که $P \perp P'$ و

$P \cap P' = \delta$ باشد و خط d در صفحه P'

بر خط δ ، فصل مشترک دو صفحه عمود

باشد. در این صورت با ملاحظه آن که دو

خط d و d' در دو صفحه مفروض و در یک

نقطه بر فصل مشترک آنها عمودند، $\widehat{d'Od}$ مسطحه فرجه بین دو صفحه است. اما دو صفحه

برهم عمودند، بنابراین $\widehat{d'Od} = 90^\circ$ و در نتیجه $d' \perp d$ و $d' \perp \delta$ پس $d' \perp P$.

روشن است که بر هر خط d صفحه‌های بی‌شمار می‌گذرد. پس اگر خط d بر صفحه‌ای مانند P عمود باشد، همه صفحه‌هایی که بر d می‌گذرند بر صفحه P عمودند. بنابراین :

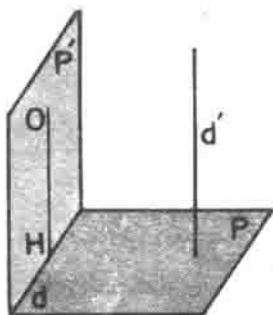
بر هر خط عمود بر یک صفحه، صفحه‌های بی‌شمار عمود بر آن صفحه می‌گذرند.

تمرین

- ۱- هر يك از این عبارتها را چنان کامل کنید که يك گزاره درست حاصل شود.
 - دو نیم صفحه که مرز مشترك داشته باشند در صورتی بر یکدیگر عمودند که
 - دو صفحه متقاطع وقتی بر یکدیگر عمودند که
 - بر هر خط عمود بر يك صفحه، صفحه‌های بی‌شمار می‌گذرند که همه آنها بر ... عمودند.
 - بر هر خط از يك صفحه ... می‌گذرد که بر صفحه مزبور عمود است .
- ۲- از هر نقطه واقع در خارج يك صفحه، چند صفحه عمود بر آن صفحه می‌گذرد .
- ۳- صفحه P و نقطه O روی P و نقطه A خارج P مفروضند. صفحه‌ای مشخص کنید که بر نقاط A و O بگذرد و بر صفحه P عمود باشد. در وجود جواب بحث کنید.
- ۴- صفحه P و دو نقطه A و B در خارج آن صفحه مفروضند ، صفحه‌ای مشخص کنید که بر دو نقطه A و B بگذرد و بر صفحه P عمود باشد (بحث) .
- ۵- ثابت کنید اگر یکی از دو صفحه متوازی بر صفحه‌ای عمود باشد، دیگری نیز بر آن صفحه عمود است .

گزاره‌هایی درباره صفحه‌های عمود بر هم

(۴-۱۲-۴) - قضیه - اگر دو صفحه بر یکدیگر عمود باشند هر خط عمود بر یکی از آنها با دیگری موازی است.

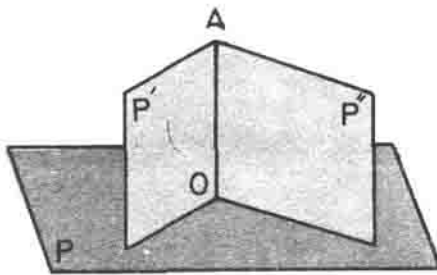


شکل (۴-۴)

پروهان - دو صفحه P و P' و يك خط d' در نظر می‌گیریم، چنان که $P \perp P'$ و $d' \perp P$ باشد، شکل (۴-۴). گوییم اگر خط d' با صفحه P' در نقطه‌ای مثلا نقطه O ، متقاطع باشد، از نقطه O نیم خطی مانند OH در صفحه P' می‌توان رسم کرد که بر خط d فصل مشترك دو صفحه عمود باشد، به موجب قضیه قبل

این نیم خط بر صفحه P عمود است. اما زهر نقطه فقط يك عمود بريك صفحه می توان رسم کرد، پس اگر خط d' از نقطه O بگذرد لزوماً بر OH منطبق است. یعنی: $d' \subset P'$.
 پس d' یا اصلاً نقطهٔ مشترکی با P' ندارد و یا تماماً روی P' قرار دارد.
 نتیجه ۱ - اگر دو صفحه برهم عمود باشند، خطی که از يك نقطهٔ واقع بر یکی بر صفحهٔ دیگر عمود باشد، بر صفحهٔ اول منطبق خواهد بود.

نتیجه ۲ - اگر دو صفحه متقاطع بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترك آنها بر آن صفحه عمود است.

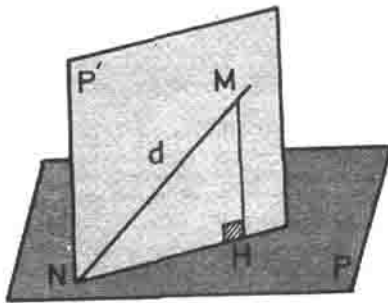


شکل (۴ - ۴۷)

برهان - اگر دو صفحه متقاطع P' و P'' بر صفحه P عمود باشند و AO فصل مشترك آنها باشد، خطی که از نقطه A می گذرد و بر صفحه P عمود است بر هر دو صفحه P' و P'' منطبق خواهد بود، (نتیجه ۱) و بنابراین فصل مشترك دو صفحه

است، یعنی فصل مشترك دو صفحه P' و P'' خود بر صفحه P عمود است، شکل (۴-۴۷).

(۴-۱۲-۵) قضیه - بر هر خطی که بر صفحه‌ای عمود نباشد، يك صفحه فقط يك صفحه عمود بر صفحه مفروض می گذرد.



شکل (۴ - ۴۸)

برهان - صفحه P و خط d را که بر آن عمود نیست در نظر می گیریم، شکل (۴-۴۸).

از نقطه دلخواه M روی d يك خط مانند MH می گذرد که بر صفحه P عمود است. چون خط d بر صفحه P عمود نیست، دو خط d و MH امتدادهای

مختلف دارند و بنابراین دو خط متمایزند که در نقطه M متقاطع هستند، بنابراین صفحه‌ای مانند P' مشخص می کنند. این صفحه بر صفحه مفروض P عمود است (قضیه ۴-۱۲-۲).

حال ثابت می کنیم صفحه‌ای که بر خط d می گذرد و عمود بر صفحه P است، منحصر به یکی است. برای این منظور گوئیم اگر صفحه دیگری، مثلاً P'' ، شامل خط d و بر صفحه P عمود باشد:

$$(P'' \perp P, M \in P'', MH \perp P) \Rightarrow MH \subset P''$$

یعنی صفحه P'' نیز دو خط d و MH را شامل است و بنابراین همان صفحه P' است (چرا؟).

تمرین

- ۱- هر يك از عبارتهای زیر را چنان کامل کنید که يك گزاره درست حاصل شود.
 - اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد... صفحه بر آن می‌گذرد که بر صفحه مزبور عمود باشد.
 - اگر خطی بر صفحه‌ای... باشد صفحه‌های بی‌شمار وجود دارند که بر آن خط می‌گذرند و بر صفحه مزبور....
 - اگر صفحه‌ای بر دو صفحه متقاطع عمود باشد، بر... آنها عمود است.
- ۲- آیا دو صفحه عمود بر يك صفحه لزوماً متوازیند؟ چرا؟
- ۳- صفحه P و خط d و نقطه A که خارج خط و صفحه است، مفروضند. صفحه‌ای مشخص کنید که بر نقطه A بگذرد و با خط d موازی و بر صفحه P عمود باشد (بحث).
- ۴- صفحه P و خط d منطبق بر آن صفحه و خط دیگر d' که موازی آن صفحه است مفروضند، پاره خطی مشخص کنید که بر صفحه P عمود باشد و دو سر آن بر دو خط d و d' واقع باشند (بحث).

ریاضی‌دان، منجم، فیلسوف و شاعر معروف ایرانی، حکیم عمر خیام، از مناخر تاریخ تمدن انسانی است. نامش را غیاث‌الدین ابوالفتح عمر ضبط کرده‌اند و تولدش را در حدود ۴۳۹ هجری قمری در نیشابوریا در حوالی آن شهر نوشته‌اند، به هر حال وی از نیشابور بود و در همان منطقه زیست و در بیش از ۷۰ سال زندگی خویش تنها چند سفر کوتاه داشت که از آن جمله سفر حجاز و اصفهان و هرات و بلخ در تاریخ آمده‌اند. خیام به علت تسلطی که بر فلسفه و نجوم و ریاضیات داشت از حکمای معروف دوره اسلامی به شمار می‌رود و با رباعیات معروفش، که هر یک در قالب کلماتی چند یک دنیا معنی و مفهوم ارائه می‌کنند، در جهان متمدن شخصیتی شناخته شده و مورد احترام دارد. پژوهشهای عمر خیام در بخشهای مختلف نجوم، جبر و مقابله و هندسه درخور توجه هستند و در هر زمینه رساله‌هایی از وی به یادگار مانده است که نسبت به آثار گذشتگان نوآوریها و تازه‌هایی را ارائه می‌دهند.

روشی که خیام در حل مسائل به کار می‌برد حکایت از این دارد که وی در مسئله‌های هندسه از معادله‌های جبری استفاده می‌کرده است و در حل معادله‌های درجه سوم و ویژگیهای مقاطع مخروطی را مورد توجه قرار می‌داده است. این درحقیقت یک قدم بزرگ در ابتکار هندسه تحلیلی است. همان ابتکاری که دکارت در حدود چهار صد سال بعد به تدوین اصول آن پرداخته است.

از کوششهای دیگری که در زمینه تلفیق مباحث مختلف ریاضیات به عمل آمده است تعریف نسبتهای مثلثاتی کمانها و زاویه‌ها و استفاده از آنها در حل مسئله‌های هندسه از طریق محاسبه است. عمر خیام در این زمینه نیز از پیشقدمان به شمار می‌رود و در پایه‌گذاری تقویم جلالی و مطالعات نجومی، با همکاری حکمای معاصر خویش، از این روش بهره شایان گرفته است.

در مقاله‌هایی که از عمر خیام باقی مانده‌اند از توجه وی به اعداد گنگ آثاری ارزنده دیده می‌شود و هر چند در زمان او رده‌بندی اعداد به صورت امروزی آن شکل نگرفته و عنوان نشده بود، اما ملاحظات آنان درباره شناخت اعداد گویا و گنگ شامل پیشرفتهایی است که به عنوان مقدمات شناسایی سیستم اعداد پایه‌هایی استوار به شمار می‌روند و هنوز

در حدود ده قرن وقت لازم بود تا نگره اعداد به صورت امروزی آن شکل گیرد .
گاهی در تاریخ تکوین علم ، مدتی در حدود هزار سال ، برای پیدایش يك نگره و پذیرفته شدن آن ، زمانی چندان دراز نیست . بنابراین به تعبیری می توان عمر خیام را از پایه گذاران نگره اعداد به شمار آورد .

" مسائل مختلف "

۱- در متوازی‌الاضلاع ABCD از نقطه A خطی رسم می‌کنیم تا قطر BD یا امتداد آن را در نقطه M و خطهای BC و CD را به ترتیب در نقاط N و L قطع کند، ثابت کنید: $AM^2 = ML \cdot MN$.

۲- دوزنقه متساوی‌الساقین ABCD بر دایره‌ای محیط است. ثابت کنید نقاط تماس دایره محاطی با دوساق آن و نقطه تقاطع دو قطر دوزنقه سه نقطه واقع بر یک خط راستند.
 ۳- سه نقطه A و B و C مفروضند، اولاً از نقطه C خطی رسم کنید که نسبت فاصله‌های آن از دو نقطه A و B مساوی عدد مفروض k باشد، (مسئله چند جواب دارد؟). ثانیاً در صفحه این سه نقطه خطی رسم کنید که فاصله‌های آن از سه نقطه مزبور به ترتیب با سه عدد ۲ و ۳ و ۴ متناسب باشند (مسئله چند جواب دارد؟).

۴- نقطه‌های M و N به ترتیب بر ضلعهای AB و AC از مثلث ABC چنانند که $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{AC} = \alpha$. اگر MN امتداد BC را در P قطع کند، نسبت $\frac{PC}{BC}$ را بر حسب α بدست آورید.

۵- دو خط متقاطع d و d' و نقطه A در صفحه P مفروضند، بر نقطه A خطی مرور دهید که دو خط d و d' را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند و: اولاً $MA = AN$ ، ثانیاً $AM:AN = k$ باشد (k عدد مفروضی است). در حالتی که d و d' موازی باشند (بحث کنید).

۶- در مثلث ABC خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند. نقطه تلاقی دو پاره خط CM و BN را P می‌نامیم. مکان هندسی نقطه P را وقتی پاره خط MN تغییر می‌کند تعیین کنید.

۷- در چهار ضلعی گویا ABCD خطی موازی قطر BD رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند و خط دیگری موازی همان قطر رسم می‌کنیم تا به اضلاع BC و CD به ترتیب در نقاط M' و N' برخورد کند. ثابت کنید دو خط MM' و NN' در نقطه‌ای واقع بر قطر AC تلاقی می‌کنند یا با قطر AC موازی‌اند. در چه صورت موازی AC هستند؟

۸- دو مستطیل متشابهند. اندازه های درازاهای آنها به نسبت ۳ و ۴ هستند. اگر اندازه درازا و پهناى مستطیل کوچکتر به ترتیب ۹ و ۵ سانتیمتر باشند، اندازه های درازا و پهناى مستطیل بزرگتر را تعیین کنید. نسبت تشابه در این دو شکل چیست؟ نسبت مساحتهاى آنها را تعیین کنید. آیا نسبت مساحتها با نسبت تشابه یکی است؟

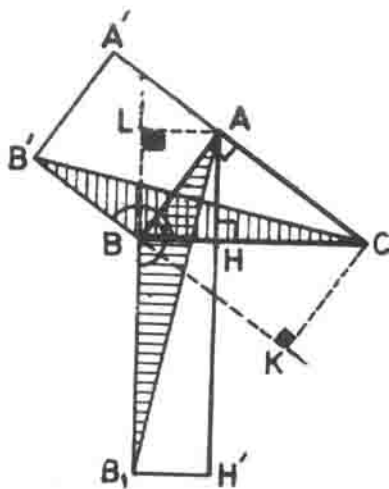
۹- دو مثلث متشابهند، اندازه های دوضلع از مثلث اول ۲۰ و ۳۵ و اندازه های دوضلع از مثلث دوم ۱۴ و ۱۸ سانتیمترند. اندازه سومین ضلع هر مثلث را تعیین کنید.

۱۰- در لوزی ABCD زاویه A مساوی ۶۰° است، از رأس C خطی اختیاری رسم می کنیم تا ضلع AB را در نقطه M و امتداد ضلع AD را در نقطه L قطع کند. ثابت کنید مثلثهای MBD و DBL متشابهند.

۱۱- در مثلث ABC زاویه A از دو زاویه B و C بزرگتر است. بر ضلع BC نقطه های M و N را چنان اختیاری کنیم که AM و AN به ترتیب با اضلاع AB و AC زاویه های مساوی \hat{B} و \hat{C} تشکیل دهند. ثابت کنید اولاً مثلث AMN مساوی الساقین است. ثانیاً دو مثلث ABM و ACN با مثلث ABC متشابهند و در نتیجه خود با یکدیگر متشابهند و از آنجا نتیجه بگیرید که

$$AM \cdot AN = BM \cdot CN$$

تحقیق کنید در چه صورت دو خط AM و AN بر یکدیگر منطبق می شوند و در این حالت خط مزبور کدام یک از اجزای مثلث است و رابطه فوق به چه صورت تبدیل می شود؟ آیامی توانید از صورت اخیر رابطه گزوده ای درباره نوع آن مثلث بیان کنید.



شکل ۱

۱۲- در مثلث ABC زاویه A قائمه است. ارتفاع AH را رسم کنید. بر ضلع AB مربع $ABB'A'$ را بنا کنید و برپاره خط BH مستطیلی بسازید که ضلع دیگر آن مساوی BC باشد، ثابت کنید در شکل (۱):

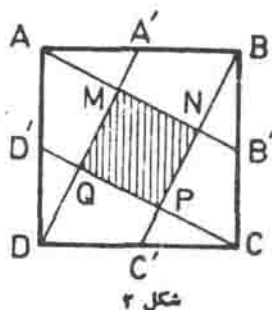
$$\triangle ABB_1 = \triangle B'BC$$

رابطه بین مساحت مثلث $B'BC$ را با مساحت مربع $ABB'A'$ و همچنین رابطه بین مساحت مثلث ABB_1 را با مساحت مستطیل $BB_1H'H$ تعیین کنید. از این استدلال چه نتیجه ای می گیرید؟

۱۳- ثابت کنید اگر در مثلث قائم الزاویه ای اندازه یکی از زاویه های حاده ۱۵° باشد،

اندازه ارتفاع وارد بر وتر آن $\frac{1}{p}$ اندازه وتر است.

۱۴- در مثلث قائم الزاویه‌ای اندازه يك زاویه 15° است و اندازه يك ضلع زاویه قائمه 12 سانتیمتر است. اندازه‌های اضلاع و زاویه‌های دیگر مثلث و اندازه ارتفاع وارد بر وتر را حساب کنید (مسئله را در دو حالت حل کنید).



شکل ۲

۱۵- در شکل (۲) چهارضلعی ABCD

مربعی است که اندازه هر ضلع آن مساوی a است. نقاط A' و B' و C' و D' وسط‌های اضلاع مربعند. ثابت کنید چهارضلعی MNPQ مربع است. مساحت این مربع را بر حسب a تعیین کنید.

۱۶- در دوزنقه متساوی‌الساقینی اندازه‌های دوقاعده به ترتیب 16 و 8 سانتیمتر و یکی از زاویه‌ها 60° است. مساحت و محیط دوزنقه را حساب کنید (اندازه هریک از دوقطر و پاره خط‌هایی را که دوقطر بر یکدیگر جدا می‌کنند تعیین کنید. اگر دوساق دوزنقه در نقطه O یکدیگر را قطع کرده باشند، اندازه‌های اضلاع هریک از دوشکل را که نقطه O رأس و یکی از قاعده‌های دوزنقه قاعده آنها است تعیین کنید).

۱۷- ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌هایی که از تلاقی اضلاع مقابل يك چهارضلعی محیطی پدید می‌آیند، بر یکدیگر عمودند.

۱۸- بر قطر AB از نیمدایره‌ای به شعاع R نقطه M را چنان اختیار می‌کنیم که $AM = 2x$ باشد. دو نیمدایره به قطرهای AM و BM رسم می‌کنیم، مساحت محصور بین سه نیمدایره را بر حسب x و R تعیین کنید (در ۴ حالت).

ثابت کنید درحالتی که هر سه نیمدایره در یک طرف قطر AB واقع باشند مساحت محصور بین آنها با مساحت دایره‌ای به قطر MP برابر است (نقطه P محل تلاقی نیمدایره مفروض با عمودی است که در نقطه M بر قطر AB رسم می‌شود). نقطه M را به چه فاصله از نقطه A باید اختیار کرد تا نیمدایره‌های مرسوم در این حالت سطح نیمدایره مفروض را به دو جزء هم‌ارز تجزیه کنند. مجموع درازاهای دو نیمدایره را حساب کنید.

۱۹- نیمدایره به قطر AB را در نظر گرفته و نقطه M را بر قطر انتخاب می‌کنیم و دو نیمدایره به قطرهای AM و MB رسم می‌کنیم. تحقیق کنید مجموع درازای دو نیمدایره با درازای نیمدایره مفروض چه رابطه‌ای دارد. برپاره خط AM نقطه‌ای مانند M' اختیار کرده و به قطرهای AM' و $M'M$ دو نیمدایره رسم می‌کنیم، مجموع درازاهای دو نیمدایره اخیر با نیمدایره

به قطر AM چه رابطه‌ای دارد؟ نقطه M را برپاره خط MB اختیار کرده و به اقطار MM' و $M'B$ نیم‌دایره‌هایی رسم می‌کنیم، مجموع درازاهای چهارنیم‌دایره با درازای نیم‌دایره مفروض چه رابطه‌ای دارد؟ اگر این کار را ادامه دهیم، نیم‌دایره‌ها تدریجاً به قطر AB نزدیک می‌شوند، چه نتیجه‌ای می‌توانید داشته باشید؟ آیا درازای قطر AB با نیم‌دایره مفروض یکی است؟ نتیجه را چگونه توجیه می‌کنید؟

۲۰- دو صفحه موازی P و P' و خط D که موازی آنها نیست مفروضند، خطی مشخص کنید که از نقطه معین A بگذرد و خط D را در نقطه‌ای مانند O و دو صفحه P و P' را در نقاط M و M' قطع کند چنان که نقطه O وسط MM' باشد.

۲۱- دو خط متناظر D و D' و خط δ که با هیچ یک از آنها موازی نیست مفروضند، خطی مشخص کنید که سه خط مزبور را به ترتیب در نقاط M و M' و O قطع کند و نقطه O وسط MM' باشد.

۲۲- دو خط متناظر d و d' مفروضند. ثابت کنید برای آن که بتوانیم برخط d صفحه‌ای

مرور دهیم که برخط d' عمود باشد، باید دو خط مزبور برهم عمود باشند.

۲۳- از نقطه O واقع در خارج صفحه P خط d را عمود بر صفحه در نظر گرفته و از همان نقطه خطی مانند d' را عمود برخط δ از صفحه P در نظر می‌گیریم، ثابت کنید پاره خطی که پایهای دو عمود را به هم وصل می‌کند برخط δ عمود است.

۲۴- ثابت کنید اگر خط و صفحه‌ای بر یک خط مفروض عمود باشند، موازی یکدیگرند.

۲۵- ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از یک صفحه P به یک فاصله‌اند، دو صفحه موازی با صفحه P است.

۲۶- مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله باشند.

۲۷- نقاط A و B و C غیر واقع بر یک خط راست و نقطه O خارج صفحه آنها مفروضند؛ صفحه‌ای مشخص کنید که نقطه O را شامل باشد و سه نقطه A و B و C از آن صفحه به یک فاصله باشند.



