

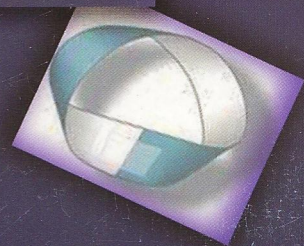
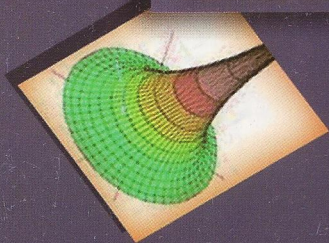
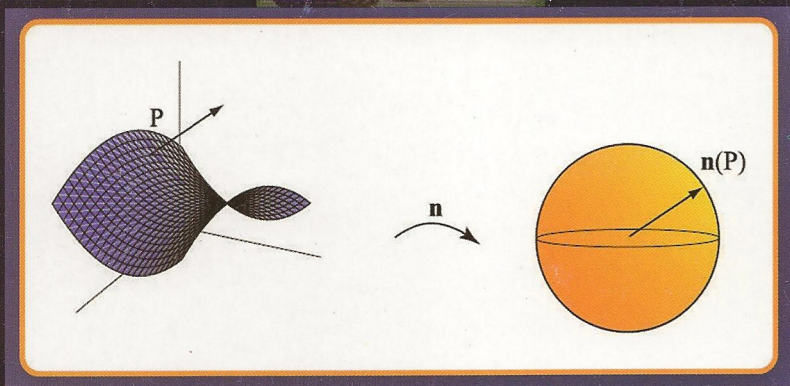


دانشگاه گیلان
مرکز تحقیقات

هندسه دیفرانسیل

مقدمه ای بر خم ها و رویه ها

تألیف: تئودور شیفرین



ترجمه: دکتر اعظم اعتماد

هندسه دیفرانسیل

مقدمه‌ای بر
خم‌ها و رویه‌ها

تألیف:

تئودور شیفرین
دانشگاه جرجیا

ترجمه:

اعظم اعتماد

استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

پیشگفتار مترجم

با وجود اینکه کتاب‌های متعددی در زمینه هندسه دیفرانسیل مقدماتی نوشته شده است، خط مشی‌های متفاوت این کتاب‌ها در اغلب موارد از کارایی آنها جهت تدریس در کلاس دوره کارشناسی می‌کاهد.

بنابراین کتاب حاضر بر اساس پیش نیازهای بنیادی در مبحث هندسه دیفرانسیل خم‌ها و رویه‌ها و با توجه به سرفصل‌های عمومی این درس تألیف و تدوین گردیده است. لازم به ذکر است که در اینجا دسته‌بندی ضمنی مطالب در مورد خم‌ها به دو گروه خم‌های مسطح و خم‌های فضایی، با این هدف انجام گردیده است که ورود دانشجو به این مبحث با استناد به مطالب فراگرفته شده توسط وی در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، به آسانی صورت پذیرد.

به علاوه در انتهای مبحث خم‌های مسطح و در تمرین‌ها، مطالب تازه‌ای نظیر ساختن خم‌های جدید از خم‌های اولیه می‌تواند در فعال سازی قوه ابتکار دانشجو مفید باشد. البته در پایان بحث خم‌ها در فصل یک، نتایجی با تفکیک لازم در مورد هر دو نوع خم مسطح و فضایی مطرح می‌شود که منجر به حصول چند نتیجه کلی می‌شود.

در مبحث رویه‌ها با دسته بندی مطالب به دو بخش، ابتدا نظریه موضعی رویه‌ها با بیانی موجز و بطور کامل بیان می‌گردد و سپس تا حد ممکن نظریه سرتاسری رویه مطرح می‌گردد.

در مجموع این کتاب با رعایت اختصار به روشی مطالب هندسه دیفرانسیل را مطرح می‌سازد که علاوه بر بیانی کلاسیک برای یک درس هندسه دیفرانسیل در سطح کارشناسی، می‌تواند مقدمه‌ای بر دروس پیشرفته‌تر مثل هندسه خمینه‌ها باشد.

لازم به ذکر است که تمرین‌هایی که پاسخ یا راهنمایی آنها در انتهای کتاب آمده است با یک ستاره (*) مشخص شده‌اند. تمرین‌های اساسی که بطور خاص مهم هستند (و بعداً به آنها ارجاع داده می‌شود) با یک دخشه (#) مشخص شده‌اند.

اعظم اعتماد

در کتاب حاضر مفاهیم برجسته‌ای از مبانی هندسه دیفرانسیل به شکل متن‌هایی قابل تأمل ارائه گردیده است. در واقع، مباحث نظری به کمک تعداد زیادی مثال و تصاویر با رنگ آمیزی زیبا در این کتاب، فهم مطالب را آسان‌تر ساخته‌اند. علاوه بر این مطالب مطرح به عنوان مقدمه‌ای بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک، دارای کاربردهای فراوان در ریاضیات نوین و مهندسی در زمینه‌های مختلف نیز هست.

بطور خاص تکیه مطالب موجود بر خم‌ها در صفحه و فضای سه بعدی و همچنین رویه‌ها در فضای سه بعدی است، اما سیر بیان مطالب به قسمی است که می‌تواند الگویی مناسب برای مباحث پیشرفته‌تر هندسه دیفرانسیل باشد. مطالب این کتاب با کمی فشردگی می‌تواند به عنوان درس در یک ترم مقطع کارشناسی تدریس شود اما در صورتی که هدف فهم دقیق مطالب در یک ترم باشد، می‌توان از بعضی بخش‌ها مانند مقدمه‌ای بر هندسه هذلولوی در فصل سوم صرف‌نظر کرد. پیش‌نیازهای مورد استفاده در این مبحث عبارت است از: هندسه دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره، جبر خطی و معادلات دیفرانسیل عادی برای مطالعه‌ی هندسه خم‌ها و رویه‌ها در \mathbb{R}^3 .

در مجموع مطالب این کتاب، برای همه‌ی افرادی مفید است که خواهان یا نیازمند یادگیری مطالب بنیادی در هندسه دیفرانسیل بدون صرف وقت اضافه در مطالب غیر ضروری هستند.

تئودور شیفرین

فهرست مطالب

	فصل ۱	خم‌ها
۱	۱-۱	مثال‌ها، پارامتری با طول قوس
۱۱	۲-۱	نظریه موضعی: کنج فرنه
۲۷	۳-۱	چند نتیجه سراسری
	فصل ۲	رویه‌ها: نظریه موضعی
۴۳	۱-۲	رویه‌های پارامتری شده و اولین فرم اساسی
۵۴	۲-۲	نگاشت گاوس و دومین فرم اساسی
۷۱	۳-۲	معادلات کدآزی و گاوس و قضیه اساسی رویه‌ها
۸۳	۴-۲	مشق همورد، انتقال موازی و ژئودزی‌ها
	فصل ۳	رویه‌ها: مباحث دیگر
۱۰۱	۱-۳	هولونومی و قضیه گاوس-بونه
۱۱۷	۲-۳	مقدمه‌ای بر هندسه هذلولوی
۱۳۰	۳-۳	نظریه رویه با فرم‌های دیفرانسیل
۱۳۷	۴-۳	محاسبه تغییرات و رویه‌ها با انحنا متوسط ثابت
۱۴۷		پیوست
۱۵۷		پاسخ تمرین‌های برگزیده
۱۶۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۶۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۷۳		مراجع
۱۷۴		واژه‌یاب

فصل ۱

خم‌ها

۱-۱ مثال‌ها، پارامتری با طول قوس

برای $k = 0, 1, 2, \dots$ یک تابع برداری $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ را C^k گویند، اگر f و همه مشتق آن، $f', f'', \dots, f^{(k)}$ پیوسته باشند. تابع f را هموار گویند اگر C^k ، برای هر عدد صحیح k باشد. خم پارامتری یک نگاشت C^3 (یا هموار)، $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ است، که در آن $I = (a, b)$ یا $I = [a, b]$ زیر مجموعه (احتمالاً نامتناهی) از \mathbb{R} است. خم α را منظم گوئیم، هرگاه برای هر $t \in I$ ، $\alpha'(t) \neq 0$.

می‌توان ذره‌ای را در حال حرکت در امتداد مسیر α با موقعیت $\alpha(t)$ در زمان t تصور کرد. آنچنان که در محاسبات برداری فرا گرفته‌ایم، سرعت ذره در زمان t عبارتست از

$$\alpha'(t) = d\alpha/dt = \lim_{h \rightarrow 0} (\alpha(t+h) - \alpha(t))/h$$

بردار سرعت $\alpha'(t)$ بر خم در $\alpha(t)$ مماس است و طول آن برابر $\|\alpha'(t)\|$ است.

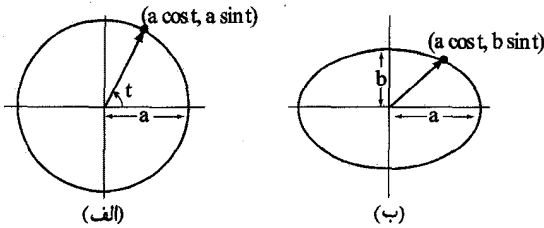
مثال ۱ با چند مثال استاندارد آغاز می‌کنیم.

(a) مثالی آشنا در جبر خطی و محاسبات برداری یک خط پارامتری شده است. برای هر دو نقطه P و Q در \mathbb{R}^3 ، فرض کنید $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$ و برای $t \in \mathbb{R}$ قرار دهید $\alpha(t) = P + t\mathbf{v}$. توجه شود که $\alpha(0) = P$ ، $\alpha(1) = Q$ و برای هر $0 \leq t \leq 1$ ، روی پاره خط \overline{PQ} است. در تمرین ۸ از خواننده خواسته خواهد شد که کوتاه‌ترین بودن «مسیر خط راست» α را در بین همه مسیرها از P به Q بررسی کند. این مطلب نمونه‌ای از مسائلی است که در آینده به آن می‌پردازیم.

(b) همانند آنچه در شکل ۱-۱ الف تصویر شده است، طبق بسیاری از تعریف‌ها با توابع مثلثاتی کسینوس و سینوس، اساساً یک پارامتری طبیعی از دایره به شعاع a به دست

می آوریم.

$$\alpha(t) = a(\cos t, \sin t) = (a \cos t, a \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



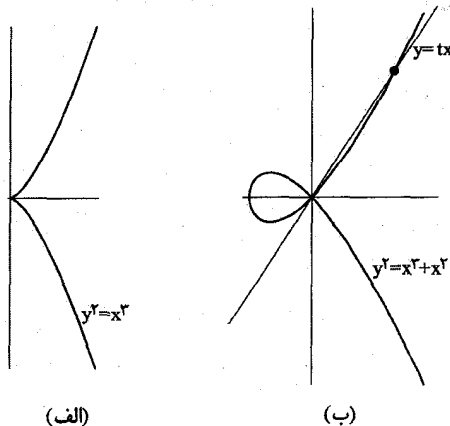
شکل ۱-۱

(c) اگر $a, b > 0$ ، نگاشت خطی $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(x, y) = (ax, by)$ را به کار ببریم. ملاحظه می شود که با این نگاشت دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ به بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نگاشته می شود. چون $T(\cos t, \sin t) = (a \cos t, b \sin t)$ ، طرف دوم یک پارامتری طبیعی از بیضی می دهد، همچنان که در شکل ۱-۱-ب، نشان داده شده است.

(d) دو خم مکعبی را در نظر بگیرید که در شکل ۱-۲ نشان داده شده است. در سمت چپ مکعبی گوشه دار $y^2 = x^3$ و مکعبی گره ای $y^2 = x^3 + x^2$ در سمت راست قرار دارد. این دو می توانند به ترتیب از سمت چپ به طریق زیر پارامتری شوند.

$$\alpha(t) = (t^2, t^3) \quad , \quad \alpha(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$$

(در دومین حالت، همچنان که در شکل مشخص شده است، تقاطع خط $y = tx$ با خم در هنگامی که $(tx)^2 = x^2(x+1)$ دیده می شود، یعنی وقتی که $x = 0$ یا $x = t^2 - 1$.)

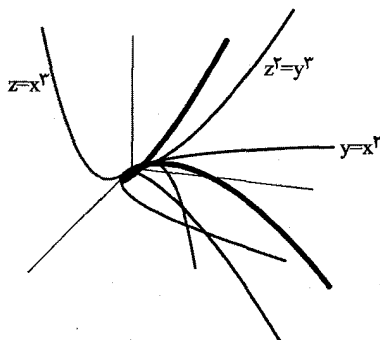


شکل ۱-۲

(e) مکعبی پیچیده شده^۱ در \mathbb{R}^3 با شکل ۱-۳ و پارامتری به صورت زیر است.

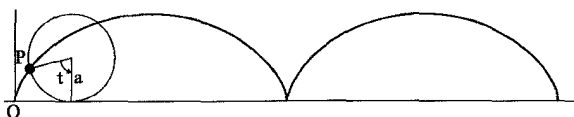
$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3) \quad t \in \mathbb{R}$$

تصویر آن روی صفحات مختصات xy ، xz و yz ، به ترتیب خم‌های $z = x^3$ ، $y = x^2$ و $z^2 = y^3$ (یعنی مکعبی گوشه دار) است.



شکل ۱-۳

(f) مثال بعدی ما یک مثال کلاسیک با نام سیکلوئید^۲ است. این خم مکان هندسی یک نقطه روی یک چرخ (دایره) دوار است. آنچه در شکل ۱-۴ تصویر شده است را در نظر بگیرید. فرض کنید چرخ بدون هیچ لغزشی می‌چرخد، مسافت طی شده در امتداد زمین برابر با طول کمانی از دایره روبرو به زاویه‌ای است که چرخ دوران کرده است. عبارتی اگر شعاع دایره برابر a و زاویه چرخش برابر t باشد آنگاه نقطه تماس دایره با محور x —ها یعنی Q به اندازه at واحد در سمت راست مبدأ است.



شکل ۱-۴

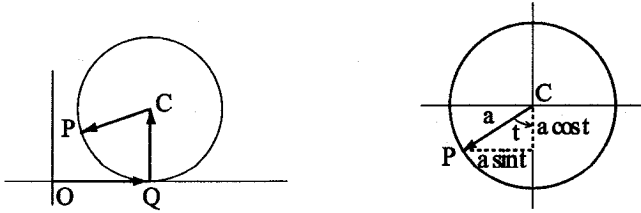
بردار واصل از مبدأ به نقطه P را می‌توان به صورت مجموع سه بردار \vec{OQ} ، \vec{QP} و \vec{CP} بیان کرد (شکل ۱-۵).

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OQ} + \vec{QP} + \vec{CP} \\ &= (at, 0) + (0, a) + (-a \sin t, -a \cos t) \end{aligned}$$

و از این رو تابع

$$\alpha(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t) \quad t \in \mathbb{R}$$

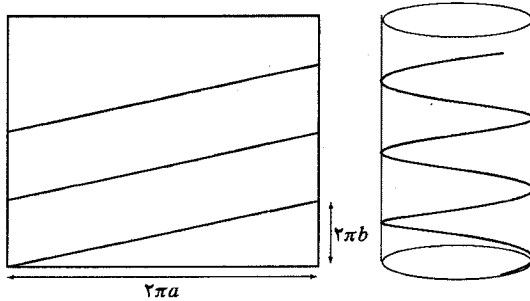
یک پارامتری از سیکلوئید را بیان می‌کند.



شکل ۱ - ۵

(g) ماریچ ۱ دوار، مسیریچ مانند ی از یک حشره است که یک استوانه دوار قائم را سربالا، با یک شیب یا سرازیری ثابت می‌پیماید. اگر استوانه دارای شعاع a باشد و شیب b/a باشد، می‌توانیم رسم کردن خطی را با این شیب روی یک تکه کاغذ به درازای $2\pi a$ تصور کنیم و سپس این تکه کاغذ را به دور استوانه بپیچیم. خط مذکور، یک حلقه از ماریچ را همانند شکل ۱-۶ نشان می‌دهد. اگر محور استوانه را قائم فرض کنیم، تصویر ماریچ روی صفحه افقی، دایره‌ای به شعاع a است و بنابراین پارامتری زیر را برای ماریچ به دست می‌آوریم.

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$



شکل ۱ - ۶

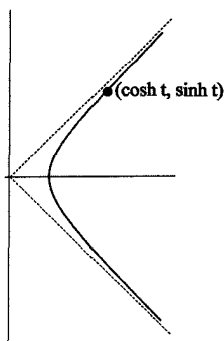
مروری مختصر بر توابع مثلثاتی هذلولوی: همانند یک دایره $x^2 + y^2 = 1$ که توسط $(\cos \theta, \sin \theta)$ پارامتری می‌شود، همچنان که در شکل ۱-۷ نشان داده شده است، قسمتی از هذلولوی $x^2 - y^2 = 1$ که در سمت راست محور y -ها واقع است، به وسیله $(\cosh t, \sinh t)$ در حالی پارامتری می‌شود، که

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

مشابه با مثلثات دایره‌ای، قرار می‌دهیم $\coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t}$ و $\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$ صحت روابط زیر به آسانی قابل بررسی است.

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad \tanh^2 t + \operatorname{sech}^2 t = 1, \quad \sinh'(t) = \cosh t$$

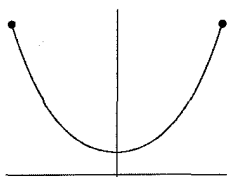
$$\cosh'(t) = \sinh t, \quad \tanh'(t) = \operatorname{sech}^2 t, \quad \operatorname{sech}'(t) = -\tanh t \operatorname{sech} t$$



شکل ۱ - ۷

(h) هنگامی که یک زنجیر یکنواخت و قابل ارتجاع از دو میخ آویزان می‌شود، وزن آن به طور یکنواخت در طول آن تقسیم می‌شود. شکل آن (۱-۸) را در این حالت زنجیروار یا کاتیاری نامند.

همچنان که در تمرین ۹ از خواننده خواسته می‌شود، برای هر عدد ثابت $C > 0$ ، زنجیروار نمودار تابع $f(x) = C \cosh(x/C)$ است. این خم به دفعات زیاد در این مبحث ظاهر می‌شود. ∇ .

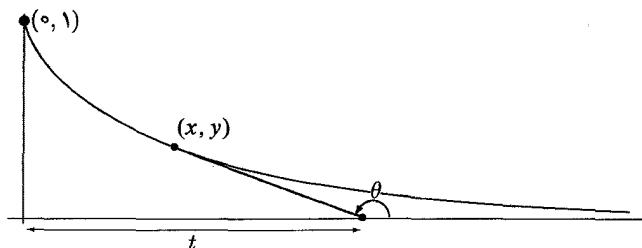


شکل ۱ - ۸

مثال ۲ یکی از خم‌های جالب‌تری که «در طبیعت» رخ می‌دهد، تراکتریکس^۲ نام دارد. قصه سنتی آن به این صورت است که: یک سگ در انتهای یک افسار با طول یک واحد بسته شده است و یک استخوان در نقطه $(0, 1)$ دفن شده است، در حالی که صاحب سگ با شروع از مبدأ در امتداد محور x - ها قدم می‌زند. سگ سعی می‌کند که به سمت استخوان برگردد، پس همچنان که سگ توسط صاحب خود در طول یک تراکتریکس حرکت داده می‌شود، وی همواره افسار را به محکمی می‌کشد. کشش محکم افسار توسط سگ به این معنی است که افسار بر خم مماس خواهد بود. هنگامی که صاحب سگ در $(t, 0)$ است،

۱- catenary (با ریشه کلمه لاتین catena) به معنی زنجیر - ۲ tractrix (با ریشه کلمه لاتین trahere tractus به معنی کشیدن)

اجازه دهید موقعیت سگ را با $(x(t), y(t))$ نشان دهیم و فرض کنیم افسار زاویه $\theta(t)$ با قسمت مثبت محور x -ها می‌سازد.



شکل ۱ - ۹

آنگاه داریم $x(t) = t + \cos(\theta(t))$ و $y(t) = \sin(\theta(t))$. بنابراین،

$$\tan(\theta(t)) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\cos(\theta(t))\theta'(t)}{1 - \sin(\theta(t))\theta'(t)}$$

ازاین رو $\theta'(t) = \sin(\theta(t))$ با روش جداسازی متغیرها داریم، $\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int dt$ و بنابراین برای ثابت c ، $t = -\ln(\csc(\theta) + \cot(\theta)) + c$ ، چون در $t = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، ملاحظه می‌شود $c = 0$ حال چون

$$\csc \theta + \cot \theta = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cos^2(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} = \cot(\theta/2)$$

می‌توانیم این مطلب را به صورت $t = \ln(\tan(\frac{\theta}{2}))$ بازنویسی کنیم. ازاین رو پارامتری تراکتریکس به صورت زیر است.

$$\alpha(\theta) = (\cos(\theta) + \ln(\tan(\frac{\theta}{2})), \sin(\theta)) \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta < \pi$$

با روشی دیگر چون $\tan(\frac{\theta}{2}) = e^t$ داریم:

$$\sin(\theta) = 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{2e^t}{1 + e^{2t}} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{sech}(t)$$

$$\cos(\theta) = \cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} = \frac{e^{-t} - e^t}{e^t + e^{-t}} = -\tanh(t)$$

و بنابراین به طور جایگزین تراکتریکس قابل پارامتری به صورت زیر است.

$$\beta(t) = (t - \tanh(t), \operatorname{sech}(t)) \quad t \geq 0 \quad \nabla$$

مفهوم اساسی در زمینه هندسه خم‌ها طول قوس از یک خم پارامتری است.

تعریف اگر $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم پارامتری باشد، آنگاه برای هر $a \leq t \leq b$ طول خم α از a تا t را به صورت $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ تعریف می‌کنیم. یعنی مسافتی که یک ذره طی می‌کند - طول قوس مسیر آن - برابر انتگرال تندی آن است.

یک رویکرد جانشین برای طول خم به شکل زیر آغاز می‌شود.

تعریف فرض کنیم $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم پارامتری (پیوسته) باشد. با در نظر گرفتن افراز

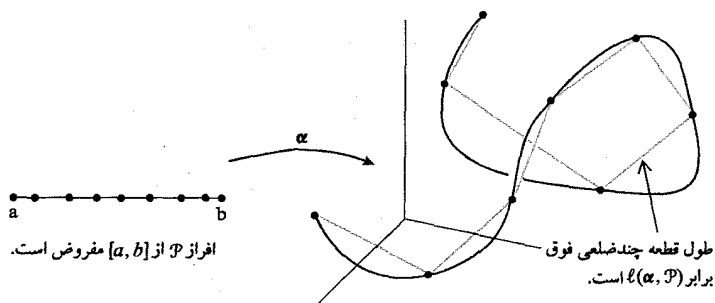
$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ از فاصله $[a, b]$ ، فرض کنیم:

$$l(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

یعنی همچنانکه در شکل ۱-۱۰ مشخص شده است، $l(\alpha, \mathcal{P})$ برابر طول اضلاع چند

ضلعی (یا قطعه خم شکسته‌ای) توصیف شده توسط رئوس در $\alpha(t_i)$ برای $i = 0, \dots, k$ باشد.

باشد.



شکل ۱-۱۰

با شرط این که مجموعه طول اضلاع چند ضلعی از بالا کراندار است، طول قوس α با نماد $l(\alpha)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$l(\alpha) = \sup l(\alpha, \mathcal{P})$: است \mathcal{P} افراز $[a, b]$

حال با استفاده از این تعریف، می‌توانیم ثابت کنیم که مسافتی که ذره طی می‌کند برابر انتگرال تندی آن است. ما نیازمند استفاده از نتیجه تمرین ۴-۲-۱ خواهیم بود.

گزاره ۱-۱ فرض کنیم $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم پارامتری باشد که به طور قطعه‌ای C^1 است. در این صورت، طول α با نماد $l(\alpha)$ برابر است با:

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

اثبات برای هر افراز \mathcal{P} از $[a, b]$ داریم:

$$\begin{aligned} l(\alpha, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \end{aligned}$$

بنابراین $l(\alpha) \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$. همین مطلب برای هر فاصله‌ای برقرار است. حال برای $a \leq t \leq b$ را طول قوس خم α روی فاصله $[a, t]$ تعریف می‌کنیم. آنگاه برای $h > 0$ داریم:

$$\frac{\|\alpha(t+h) - \alpha(t)\|}{h} \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\alpha'(u)\| du$$

دلیل نامساوی آخرین است که، $s(t+h) - s(t)$ طول قوس خم α در فاصله $[t, t+h]$ است (برای نامساوی اول به تمرین ۸ مراجعه کنید). اکنون،

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|\alpha(t+h) - \alpha(t)\|}{h} = \|\alpha'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\alpha'(u)\| du$$

بنابراین طبق اصل فشردگی، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \|\alpha'(t)\|$$

بحث مشابه برای $h < 0$ نیز کارایی دارد و نتیجه می‌گیریم که $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$. در نتیجه،

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du, \quad a \leq t \leq b$$

و به ویژه، آنچنان که انتظار می‌رفت، $\square.s(b) = l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ ، خم α را پارامتری شده با طول قوس گوئیم، اگر برای هر t ، $\|\alpha'(t)\| = 1$. در این صورت $s(t) = t - a$. در این حالت اغلب از پارامتر s استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $\alpha(s)$.

مثال ۳ الف) پارامتری استاندارد دایره به شعاع a برای $t \in [0, 2\pi]$ عبارتست از: $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ پس $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t))$ و $\|\alpha'(t)\| = a$. براحتی ملاحظه می‌شود که اگر $\beta(s) = (a \cos(s/a), a \sin(s/a))$ پارامتری مجدد خم برای $s \in [0, 2\pi a]$ باشد، آنگاه برای هر s ، $\beta'(s) = (-\sin(s/a), \cos(s/a))$ و $\|\beta'(s)\| = 1$. در نتیجه خم β ، پارامتری با طول قوس است.

ب) فرض کنید برای $s \in (-1, 1)$ ، $\alpha(s) = (\frac{1}{\sqrt{3}}(1+s)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{3}}(1-s)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{3}}s)$. آنگاه برای هر s داریم، $\alpha'(s) = (\frac{1}{\sqrt{3}}(1+s)^{1/2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}(1-s)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ و $\|\alpha'(s)\| = 1$. بنابراین α پارامتری با طول قوس است. ∇

از دیدگاه نظری، یک شهود مهم آن است که هر خم پارامتری منظم می‌تواند توسط طول قوس پارامتری شود. چون اگر α منظم باشد، تابع طول قوس $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ یک تابع صعودی است (زیرا برای هر t ، $\|\alpha'(t)\| > 0$) و بنابراین دارای یک تابع وارون $t = t(s)$ است. بنابراین می‌توانیم پارامتری زیر را در نظر بگیریم.

$$\beta(s) = \alpha(t(s))$$

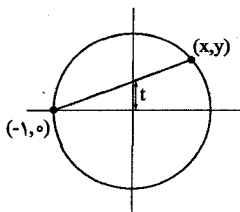
قابل توجه است که قاعدهٔ زنجیری به ما می‌گوید که

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \alpha'(t(s))/s'(t(s)) = \alpha'(t(s))/\|\alpha'(s)\|$$

همه جا یک بردار یکه است، به عبارت دیگر β با تندی یک حرکت می‌کند.

تمرین ۱-۱

(۱) دایرهٔ واحد را توسط طول t مشخص شده در شکل ۱-۱۱، پارامتری کنید.



شکل ۱-۱۱

(۲) مارییج $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ را در نظر بگیرید. بردار سرعت $\alpha'(t)$ و تندی $\|\alpha'(t)\|$ را محاسبه کنید و α را پارامتری با طول قوس کنید.

(۳) خم $\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t)$ را در نظر بگیرید. بردار سرعت $\alpha'(t)$ و تندی $\|\alpha'(t)\|$ را محاسبه کنید و α را پارامتری مجدد با طول قوس کنید.

(۴) برای $a \leq x \leq b$ ، نمودار $y = f(x)$ را پارامتری کنید و نشان دهید طول قوس آن توسط رابطهٔ سنتی روبرو به دست می‌آید.

$$\text{طول} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(۵) a. نشان دهید که طول قوس کاتناری $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ برای $0 \leq t \leq b$ برابر $\sinh b$ است.

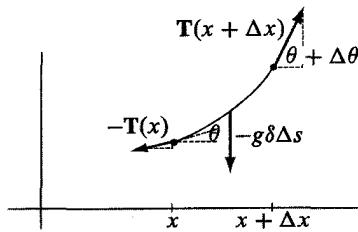
b. کاتناری را با طول قوس مجدداً پارامتری کنید (راهنمایی: با استفاده از فرمول درجه دوم، وارون \sinh را بیابید).

* (۶) خم $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ را در نظر بگیرید. بردار سرعت $\alpha'(t)$ و تندی $\|\alpha'(t)\|$ را محاسبه کنید و α را پارامتری مجدد با طول قوس کنید.

(۷) طول قوس تراکتریکس در مثال ۲ را از نقطه شروع $(0, 1)$ تا یک نقطه دلخواه بیابید.

(۸) فرض کنید $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ هر خم پارامتری با $\alpha(a) = p$ و $\alpha(b) = q$ باشد و قرار دهید $v = q - p$. ثابت کنید که $l(\alpha) \geq \|v\|$ ، بنابراین پاره خط واصل p به q کوتاه‌ترین مسیر ممکن است (راهنمایی: انتگرال $\int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt$ را در نظر بگیرید و نامساوی کوشی - شوارتز $\|u \cdot v\| \leq \|u\| \|v\|$ را به کار ببرید).

(۹) یک کابل یکنواخت با چگالی δ را در حالت تعادل در نظر بگیرید.



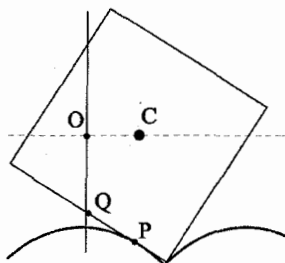
شکل ۱-۱۲

همچنان که در شکل ۱-۱۲ نشان داده شده است، نیروهای کشش $T(x)$ ، $T(x + \Delta x)$ و وزن قطعه‌ای از کابل که بالای فاصله $[x, x + \Delta x]$ واقع است در تعادل هستند. اگر انتهای کابل در $x = 0$ باشد، T_0 اندازه کشش در این نقطه است و کابل، نمودار تابع $y = f(x)$ است. نشان دهید $f''(x) = \frac{g\delta}{T_0} \sqrt{1 + f'(x)^2}$ (به یاد داشته باشید که $\tan \theta = f'(x)$). با قرار دادن $C = T_0 / g\delta$ ، نشان دهید که برای یک ثابت c ، $f(x) = C \cosh(x/C) + c$ ، راهنمایی: برای انتگرال گیری $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$ ، جانشانی $u = \sinh v$ را انجام دهید).

(۱۰) همان طور که در شکل ۱-۱۳ نشان داده شده است، فردی فلینستون می‌خواهد ماشین خود را که چرخ‌های مربعی دارد، در امتداد یک جاده ناشناس براند. جاده را باید چگونه طراحی کنید که رانندگی وی به طور کامل هموار باشد، یعنی به قسمی باشد که چرخ وی در یک خط افقی حرکت کند؟ (راهنمایی: با مربعی شروع کنید که رئوس آن در $(\pm 1, \pm 1)$ و مرکز آن در مبدأ باشد.)

اگر $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ یک پارامتری طول قوس از جاده با شروع از $(0, 1)$ باشد، بردار

$\vec{OC} = \vec{OP} + \vec{PQ} + \vec{QC}$ را در نظر بگیرید که در آن $P = \alpha(s)$ نقطه تماس و Q نقطه وسط ضلع مربع است. با استفاده از اینکه $\vec{QP} = s\alpha'(s)$ و این مطلب که \vec{QC} یک بردار واحد عمود بر \vec{QP} است. این واقعیت را که C افقی حرکت می‌کند را برای نشان دادن اینکه $s = -\frac{y'(s)}{x'(s)}$ تشریح کنید، شما به یک مشتق گیری غیر منتظره نیاز خواهید داشت. حال از نتیجه تمرین ۴ برای یافتن $y = f(x)$ استفاده کنید. همچنین راهنمایی تمرین ۹ را ببینید.



شکل ۱-۱۳

(۱۱) نشان دهید خم $\alpha(t) = \begin{cases} (t, t \sin(\pi/t)), & t \neq 0 \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$ دارای طول نامتناهی در

فاصله $[0, 1]$ است. (راهنمایی: $l(\alpha, P)$ را بصورت زیر در نظر بگیرید.
 $(P = \{0, 1/N, 2/(2N-1), 1/(N-1), \dots, 1/2, 2/3, 1\})$

(۱۲) ثابت کنید هیچ چهار نقطه متمایزی روی مکعبی پیچیده شده (مثال ۲) در یک صفحه واقع نمی‌شوند.

(۱۳) حالت خاصی از یک مسئله اخیر ماهنامه ریاضی آمریکا) خم مسطح به طور هموار پارامتری شده $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید (که احتمالاً پارامتری با طول قوس نیست). ثابت کنید اگر طول وتر $\|\alpha(s) - \alpha(t)\|$ فقط وابسته به $|s - t|$ باشد، آنگاه α باید یک (زیرمجموعه) از یک خط یا یک دایره باشد. (تا چه مرتبه‌ای لازم است که از مشتقات α استفاده کنید؟)

۲-۱ نظریه موضعی: کنج فرنه

چیزی که یک دایره یا مارپیچ را از یک خط متمایز می‌سازد، انحنای آنها یعنی گردش خمها در هنگام تغییر جهت آن است. خواهیم دید که می‌توانیم به هر خم به طور هموار پارامتری شده (C^2) مثل α یک کنج متحرک مناظر ساخت (یعنی یک پایه متعامد یکه برای \mathbb{R}^2 در هر نقطه از خم انتخاب کرد).

با مطلبی از محاسبات برداری آغاز می‌کنیم که در طی این مبحث ظاهر خواهد شد.

لم ۲-۱ فرض کنید $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ مشتق پذیر باشند و برای هر t مقدار $f(t) \cdot g(t)$

ثابت باشد. آنگاه $f'(t) \cdot g(t) = -f(t) \cdot g'(t)$ به خصوص،

$$\|f(t)\| = \text{مقدار ثابت} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad f(t) \cdot f'(t) = 0 \quad \text{برای هر } t$$

اثبات چون یک تابع روی یک فاصله ثابت است اگر و فقط اگر مشتق آن همه جا صفر باشد، از قاعده زنجیری نتیجه می‌گیریم،

$$(f \cdot g)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

یعنی اگر $f \cdot g$ ثابت باشد، آنگاه $f \cdot g' = -f' \cdot g$ به خصوص $\|f\|$ ثابت است اگر و فقط اگر $f \cdot f' = 0$ ثابت باشد و این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $f \cdot f' = 0$.

تذکر این نتیجه بطور شهودی واضح است. اگر ذره‌ای روی یک کره به مرکز مبدا حرکت کند، آنگاه بردار سرعت آن باید بر بردار موقعیتش عمود باشد، یعنی هر مؤلفه در جهت بردار موقعیت ذره را به خارج کره می‌رانند. به طور مشابه، فرض کنید f و g دارای طول ثابت باشند و زاویه بین آنها ثابت باشد. آنگاه برای اینکه زاویه بین آنها در هنگام چرخش f به سمت g ثابت بماند، ملاحظه می‌کنیم که چرخش g باید به همان مقدار به صورت دور شدن از f باشد.

اکنون با استفاده مکرر از لم ۲-۱، می‌توانیم کج فرنه از یک خم منظم مناسب را بسازیم. در این بین فرض می‌کنیم خم α پارامتری با طول قوس باشد. در این صورت برای شروع، $\alpha'(s)$ بردار مماس یکه به خم است که آن را با $T(s)$ نمایش می‌دهیم. چون T دارای طول ثابت است، $T'(s)$ بر $T(s)$ عمود خواهد بود. فرض کنید $T'(s) \neq 0$ ، بردار قائم اصلی به صورت $N(s) = T'(s)/\|T'(s)\|$ و انحنای $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ تعریف می‌شود. تاکنون داریم،

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

اگر $\kappa(s) = 0$ ، بردار قائم اصلی تعریف می‌شود. با فرض $\kappa \neq 0$ ، ادامه می‌دهیم. بردار قائم دوم را به صورت $B(s) = T(s) \times N(s)$ تعریف می‌کنیم. آنگاه $\{T(s), N(s), B(s)\}$ تشکیل یک پایه راست‌گرد متعامد برای \mathbb{R}^3 می‌دهند.

برای هر s ، $N'(s)$ باید یک ترکیب خطی از $T(s)$ و $B(s)$ باشد. اما طبق لم ۲-۱ می‌دانیم که $N'(s) \cdot N(s) = 0$ و $N'(s) \cdot T(s) = -T'(s) \cdot N(s) = -\kappa(s)$. بنابراین $N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$ در نتیجه:

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

بالاخره، $B'(s)$ باید ترکیبی خطی از $T(s)$ ، $N(s)$ و $B(s)$ باشد. لم ۲-۱ به ما می‌گوید

$$\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = -\mathbf{N}'(s) \cdot \mathbf{B}(s) \text{ و } \mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = -\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 0, \mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 0 \\ -\tau(s) \text{ بنا بر این،}$$

$$\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{T}(s)$$

به طور خلاصه داریم:

روابط فرنه		
$\mathbf{T}'(s) =$	$\kappa(s)\mathbf{N}(s)$	
$\mathbf{N}'(s) =$	$-\kappa(s)\mathbf{T}(s)$	$+\tau(s)\mathbf{B}(s)$
$\mathbf{B}'(s) =$	$-\tau(s)\mathbf{N}(s)$	

پاد متقارن^۱ بودن این معادلات با بیان روابط فرنه به شکل ماتریسی، واضح تر است.

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) & \mathbf{N}'(s) & \mathbf{B}'(s) \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) & \mathbf{N}(s) & \mathbf{B}(s) \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

درواقع، توجه شود که ماتریس ضرایب واقع در سمت راست پادمتقارن است. این حالتی است که از یک ماتریس متعامد وابسته به یک پارامتر (در اینجا s) مشتق گیری می کنیم (تمرین ۴-۱-۱-۱-۱ ببینید).

دقت شود که طبق تعریف انحنا، κ همواره غیر منفی است، در حالی که همچنان که در مثال های زیر خواهیم دید تاب τ ، دارای یک علامت است.

مثال ۱ ماریچ پارامتری شده با طول قوس را در نظر بگیرید (تمرین ۲-۱-۱-۱)، یعنی $\alpha(s) = (a \cos(s/c), a \sin(s/c), bs/c)$ که در آن $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. آنگاه داریم:

$$\mathbf{T}(s) = \frac{1}{c}(-a \sin(s/c), a \cos(s/c), b)$$

$$\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{c^2}(-a \cos(s/c), -a \sin(s/c), 0) = \frac{a}{c^2} \underbrace{(-\cos(s/c), -\sin(s/c), 0)}_{\mathbf{N}}$$

پس به طور خلاصه،

$$\mathbf{N}(s) = (-\cos(s/c), -\sin(s/c), 0) \quad \text{و} \quad \kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{(a^2 + b^2)}$$

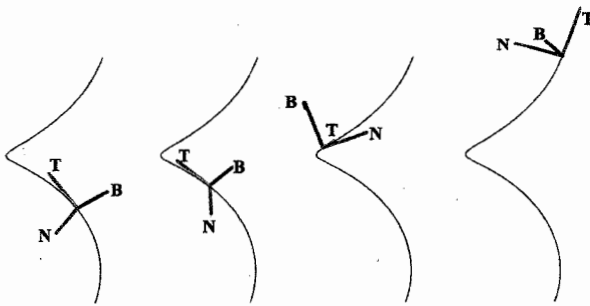
اکنون به سراغ \mathbf{B} و تاب می رویم:

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \frac{1}{c}(b \sin(s/c), -b \cos(s/c), a)$$

$$\mathbf{B}'(s) = \frac{1}{c^2}(b \cos(s/c), b \sin(s/c), 0) = -\frac{b}{c^2}\mathbf{N}(s)$$

$$\tau = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{(a^2 + b^2)} \text{ که، درمی یابیم}$$

توجه شود که هر دوی انحنا و تاب ثابت هستند. تاب برای مارپیچ راست گرد ($b > 0$) مثبت است و برای مارپیچ چپ گرد ($b < 0$) منفی است. به عنوان مثال در شکل ۱-۲ کنج های فرنه در چند نقطه نشان داده شده است (در دو شکل آخر، دورنما گمراه کننده است. \mathbf{N} ، \mathbf{T} و \mathbf{B} هنوز یک کنج راست گرد را بوجود می آورند. در سومی، \mathbf{T} در جلوی \mathbf{N} و در آخری \mathbf{B} به طرف بالا و خارج از صفحه تصویر اشاره می کند.)



شکل ۱-۲

لحظه ای مکث می کنیم تا درباره این مطلب فکر کنیم که چه اتفاقی رخ می دهد، وقتی با یک خم منظم غیر پارامتری شده با طول قوس α سروکار داریم. همچنان که در بخش ۱ انجام دادیم، (از نظر تئوری) می توانیم پارامتری مجدد با طول قوس کنیم تا β به دست آید. آنگاه داریم $\alpha(t) = \beta(s(t))$ ، پس طبق قاعده زنجیری،

$$(*) \quad \alpha'(t) = \beta'(s(t))s'(t) = v(t)\mathbf{T}(s(t))$$

در حالی که $v(t) = s'(t)$ تندی α است. به طور مشابه طبق قاعده زنجیری، هرگاه بردار مماس یکه را به عنوان تابعی از t داشته باشیم، با مشتق گیری نسبت به t داریم،

$$(\mathbf{T} \circ s)'(t) = \mathbf{T}'(s(t))s'(t) = v(t)\kappa(s(t))\mathbf{N}(s(t))$$

با استفاده از نماد غیر جدی تر اما معمول لاینیز برای مشتق،

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad \text{یا} \quad \kappa N = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds} dt}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

مثال ۲ اجازه دهید انحناى تراکتريکس (مثال ۲ از بخش ۱) را محاسبه کنیم. با استفاده از پارامتری اول، داریم: $\alpha'(\theta) = (-\sin \theta + \csc \theta, \cos \theta)$ و بنابراین،

$$\nu(\theta) = \|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{(-\sin \theta + \csc \theta)^2 + \cos^2 \theta} = \sqrt{\csc^2 \theta - 1} = -\cot \theta$$

(توجه شود که علامت منفی بخاطر این است که $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \pi$ در نتیجه،

$$\mathbf{T}(\theta) = -\frac{1}{\cot \theta}(-\sin \theta + \csc \theta, \cos \theta) = (-\cos \theta, -\sin \theta)$$

البته با توجه به شکل ۱-۹، رابطه به دست آمده برای \mathbf{T} تعجب آور نیست. پس برای یافتن انحنا، محاسبه زیر را داریم:

$$\kappa N = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{(\sin \theta, -\cos \theta)}{-\cot \theta} = (-\tan \theta)(\sin \theta, -\cos \theta)$$

چون $-\tan \theta > 0$ و $(\sin \theta, -\cos \theta)$ یک بردار یکه است، نتیجه می گیریم که،

$$\mathbf{N}(\theta) = (\sin \theta, -\cos \theta) \quad \text{و} \quad \kappa(\theta) = -\tan \theta$$

بعدها یک نتیجه هندسی جالب از تساوی انحنا و (قدر مطلق) شیب خواهیم دید. ∇ .

مثال ۳ اجازه دهید «ابزار فرنه» را برای خم پارامتری زیر محاسبه کنیم.

$$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$$

با محاسبه α' شروع می کنیم و بردار مماس یکه \mathbf{T} و تندی ν را تعیین می کنیم.

$$\text{پس، } \alpha'(t) = (3(1-t^2), 2t, 1+t^2)$$

$$\text{و } \nu(t) = \|\alpha'(t)\| = 3\sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2 + (1+t^2)^2} = 3\sqrt{2}(1+t^2)$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1+t^2)} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1 \right)$$

حال

$$\begin{aligned} \kappa N &= \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\nu(t)} \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}(1+t^2)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0 \right) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3\sqrt{2}(1+t^2)^2} \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\kappa} \cdot \frac{2}{1+t^2} \underbrace{\left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 0\right)}_N$$

در اینجا ضریب طول بردار مشتق را خارج کرده‌ایم و برای خود یک بردار یک‌جهت آن باقی گذاشته‌ایم که باید همان بردار قائم اصلی N باشد و اندازه باقی مانده هم باید انحنای κ باشد. تا اینجا به طور خلاصه داریم:

$$N(t) = \left(-\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 0\right) \quad \text{و} \quad \kappa(t) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

در ادامه قائم دوم B را با محاسبه حاصلضرب خارجی زیر به دست می‌آوریم.

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2}, 1\right)$$

و اکنون، بالاخره تاب را با دیفرانسیل‌گیری از B به طریق زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} -\tau N &= \frac{dB}{ds} = \frac{\frac{dB}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v(t)} \frac{dB}{dt} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}(1+t^2)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(t^2-1)}{(1+t^2)^2}, 0\right) \\ &= -\frac{1}{(1+t^2)^2} \underbrace{\left(-\frac{2t}{1+t^2}, -2\frac{1-t^2}{1+t^2}, 0\right)}_N \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \tau(t) = \kappa(t) = \frac{1}{3(1+t^2)^2} \quad \text{بنابراین}$$

اکنون ملاحظه می‌شود که هنگام محاسبه شتاب یک ذره متحرک، انحنای طبیعی ظاهر می‌شود. با مشتق‌گیری از (*) صفحه ۱۵، به دست خواهیم آورد،

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= v'(t)T(s(t)) + v(t)T'(s(t))s'(t) \\ &= v'(t)T(s(t)) + v(t)^2(\kappa(s(t))N(s(t))) \end{aligned}$$

با توقف لحظه‌ای استفاده از پارامتر، معادله را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$(**) \quad \alpha'' = v'T + \kappa v^2 N$$

مؤلفه مماسی شتاب، مشتق تندی است. مؤلفه قائم («شتاب جانب مرکز») در حالت حرکت دوار برابر حاصلضرب انحنای مسیر و مربع تندی است. بنابراین، از فیزیک حرکت می‌توانیم انحنای مسیر را کشف کنیم.

گزاره ۲-۲ برای هر خم پارامتری منظم α ، داریم $\kappa = \|\alpha' \times \alpha''\| / \|\alpha'\|^3$ اثبات چون $\alpha' \times \alpha'' = (\nu T) \times (\nu' T + \kappa \nu^2 N) = \kappa \nu^3 T \times N$ می‌آوریم $\kappa \nu^3 = \|\alpha' \times \alpha''\| / \nu^3$ و بنابراین $\kappa = \|\alpha' \times \alpha''\| / \nu^3$ چنان که انتظار می‌رفت \square .

در ادامه مطالعه نتایج نظری مختلف روابط فرنه را دنبال می‌کنیم.
گزاره ۲-۳ یک خم فضایی یک خط است اگر و فقط اگر انحنای آن همه جا صفر باشد.

اثبات خط در حالت کلی برای بردار یکه‌ای مانند ν و بردار ثابتی مانند c ، به صورت $\alpha(s) = s\nu + c$ بیان می‌شود. در این صورت $T(s) = \nu$ ثابت است، پس $\kappa = 0$. بالعکس، اگر $\kappa = 0$ ، آنگاه $T(s) = T_0$ یک بردار ثابت است و با انتگرال‌گیری برای یک بردار ثابت c به دست می‌آید $\alpha(s) = \int_0^s T(u) du = sT_0 + c$ ، که این مجدداً معادله پارامتری یک خط است. \square

مثال ۴ فرض کنید که همه خطوط مماس بر یک خم فضایی از یک نقطه ثابت بگذرند. در مورد این خم چه می‌توان گفت؟ بدون از دست دادن کلیت، نقطه ثابت را مبدأ فرض می‌کنیم و خم را پارامتری شده با طول قوس در نظر گرفته، با α نشان می‌دهیم. آنگاه برای یک تابع عددی λ و برای هر s داریم: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s)$. با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$T(s) = \alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)\kappa(s)N(s)$$

آنگاه $(\lambda'(s) - 1)T(s) + \lambda(s)\kappa(s)N(s) = 0$ پس چون $T(s)$ و $N(s)$ مستقل خطی هستند، نتیجه می‌گیریم که برای یک ثابت c ، $\lambda(s) = s + c$ و $\kappa(s) = 0$. بنابراین، خم باید یک خط گذرا بر نقطه ثابت باشد. ∇

مقداری درگیری بیشتر با مطلب در گزاره زیر رخ می‌دهد.

گزاره ۲-۴ یک خم فضایی مسطح است اگر و فقط اگر تاب آن همه جا صفر باشد. تنها خم‌های مسطح با انحنای ثابت غیر صفر (قسمت‌هایی از) دوایر هستند.

اثبات اگر یک خم در یک صفحه P واقع شود، آنگاه $T(s)$ و $N(s)$ صفحه P_0 موازی با P را پدید می‌آورند که از مبدأ می‌گذرد. بنابراین، $B = T \times N$ یک بردار ثابت (عمود بر P) است و از این رو $B' = -\tau N = 0$. از این مطلب نتیجه می‌گیریم که $\tau = 0$. بالعکس، اگر $\tau = 0$ ، بردار قائم دوم B یک بردار ثابت B_0 است. حال تابع $f(s) = \alpha(s) \cdot B_0$ را در نظر بگیرید، داریم $f'(s) = \alpha'(s) \cdot B_0 = T(s) \cdot B_0 = 0$ و بنابراین برای یک ثابت

$f(s) = c, c$ یعنی α در صفحه $x.B_0 = c$ قرار دارد.

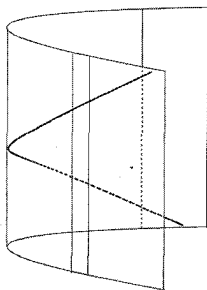
در تمرین ۲a بررسی این مطلب را به خواننده واگذار می‌کنیم که یک دایره به شعاع a دارای انحنای ثابت $1/a$ است (این مطلب همچنین می‌تواند از حالت خاصی در محاسبات مثال ۱ با $b = 0$ نتیجه شود). اکنون فرض کنید یک خم مسطح α دارای انحنای ثابت κ_0 است. تابع کمکی $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_0}N(s)$ را در نظر بگیرید. آنگاه داریم:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa_0}(-\kappa_0(s)T(s)) = T(s) - T(s) = 0$$

بنابراین برای هر s ، β یک تابع ثابت مثلاً به صورت $\beta(s) = P$ است. حال چون

$$\|\alpha(s) - P\| = \|\alpha(s) - \beta(s)\| = 1/\kappa_0.$$

پس ادعا می‌کنیم که α یک (زیر مجموعه) از دایره به مرکز P است. \square



شکل ۲-۲

قبلاً دیدیم که یک مارپیچ دوار دارای انحنای ثابت است. در تمرین ۱۰ از خواننده خواسته می‌شود که بررسی کند که مارپیچ‌ها تنها خم‌هایی با انحنای ثابت هستند. مطلب جالب‌تر خم‌هایی هستند که دارای نسبت τ/κ ثابت هستند.

یک مارپیچ تعمیم یافته^۱ یک خم فضایی با $\kappa \neq 0$ است که بردارهای مماس بر آن یک زاویه ثابت با یک جهت ثابت مفروض می‌سازند. همچنان که در شکل ۲-۲ نشان داده شده است، این خم روی یک استوانه تعمیم یافته قرار دارد که این استوانه خود از اتحاد خطوطی (هادی‌هایی) تشکیل شده است که در جهت ثابت از هر نقطه از خم می‌گذرند. حال می‌توانیم مارپیچ تعمیم یافته را به روش زیر توصیف کرد.

گزاره ۲-۵ یک خم، مارپیچ تعمیم یافته است اگر و فقط اگر τ/κ یک مقدار ثابت باشد. اثبات. فرض کنید α یک مارپیچ تعمیم یافته پارامتری شده با طول قوس باشد. آنگاه یک بردار (ثابت) یکه A با این خاصیت وجود دارد که برای یک θ ثابت، $T.A = \cos \theta$ با

مشتق‌گیری به دست می‌آوریم، $\kappa N \cdot A = 0$ ، پس $N \cdot A = 0$. با مشتق‌گیری مجدد داریم:

$$(-\kappa T + \tau B) \cdot A = 0 \quad (\dagger)$$

حال، با توجه به شمول A در صفحه تولید شده توسط T و B ، پس $B \cdot A = \pm \sin \theta$. از این رو، از معادله (\dagger) نتیجه می‌گیریم که $\tau/\kappa = \pm \cot \theta$ ، که در واقع مقداری ثابت است.

بالعکس اگر τ/κ ثابت باشد، برای یک زاویه $\theta \in (0, \pi)$ قرار دهید $\tau/\kappa = \cot \theta$. همچنین

قرار دهید: $A(s) = \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s)$. آنگاه $A'(s) = (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)N(s)$ ،

پس $A(s)$ یک بردار یکه ثابت A است و همچنان که انتظار داشتیم $T(s) \cdot A = \cos \theta$ ثابت

است. \square

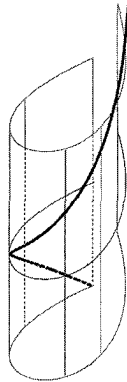
مثال ۵ در مثال ۳ یک خم α با $\kappa = \tau$ دیدیم، بنابراین از اثبات گزاره ۲-۵ ملاحظه

می‌شود که این خم باید یک زاویه ثابت $\theta = \pi/4$ با بردار $(0, 0, 1)$ $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$

بسازد (همچنان که این مطلب به تنهایی از فرمول T برای ما واضح بوده است). این مطلب

با رسم α در امتداد استوانه عمودی، ساخته شده روی تصویر α بر صفحه xy ، در شکل

۲-۳ نمایش داده شده است. ∇



شکل ۲-۳

روابط فرنه در واقع یک تصویر موضعی از یک خم فضایی را توصیف می‌کنند.

گزاره ۲-۶ (فرم کانونی موضعی) فرض کنید α یک خم پارامتری با طول قوس هموار

(C^2) یا بهتر) باشد. اگر $\alpha(0) = 0$ ، آنگاه برای یک s نزدیک صفر داریم:

$$\alpha(s) = (s - \frac{\kappa_0}{6}s^3 + \dots)T(0) + (\frac{\kappa_0}{6}s^2 + \frac{\kappa'_0}{6}s^3 + \dots)N(0) + (\frac{\kappa_0 T_0}{6}s^3 + \dots)B(0)$$

(در اینجا κ_0 ، T_0 و κ'_0 به ترتیب نمایش مقادیر κ ، T و κ' در صفر و $\lim_{s \rightarrow 0} \dots/s^3 = 0$ است).

اثبات با استفاده از قضیهٔ تیلر، می‌نویسیم:

$$\alpha(s) = \alpha(\circ) + s\alpha'(\circ) + \frac{1}{2}s^2\alpha''(\circ) + \frac{1}{6}s^3\alpha'''(\circ) + \dots$$

در حالی که $\lim_{s \rightarrow 0} \dots / s^2 = 0$ حال $\alpha'(\circ) = \mathbf{T}(\circ)$ ، $\alpha(\circ) = \circ$ و

$$\alpha''(\circ) = \mathbf{T}'(\circ) = \kappa_0 \mathbf{N}(\circ)$$

با مشتق‌گیری مجدد داریم:

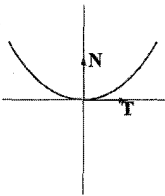
$$\alpha'''(\circ) = (\kappa \mathbf{N})'(\circ) = \kappa'_0 \mathbf{N}(\circ) + \kappa_0(-\kappa_0 \mathbf{T}(\circ)) + \tau_0 \mathbf{B}(\circ)$$

با جایگذاری، به دست می‌آوریم

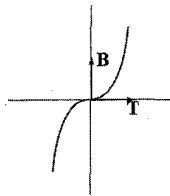
$$\alpha(s) = s\mathbf{T}(\circ) + \frac{1}{2}s^2\kappa_0\mathbf{N}(\circ) + \frac{1}{6}s^3(-\kappa_0^2\mathbf{T}(\circ) + \kappa'_0\mathbf{N}(\circ) + \kappa_0\tau_0\mathbf{B}(\circ)) + \dots$$

$$= (s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + \dots)\mathbf{T}(\circ) + (\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa'_0}{6}s^3 + \dots)\mathbf{N}(\circ) + (\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + \dots)\mathbf{B}(\circ)$$

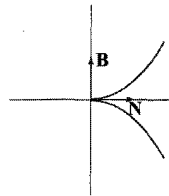
آن چنان که لازم بود. □



صفحه بوسان



صفحه راستگرد



صفحه قائم

شکل ۲ - ۴

اکنون سه صفحه اساسی در $P = \alpha(\circ)$ را معرفی می‌کنیم:

(i) صفحه بوسان، تولید شده توسط $\mathbf{T}(\circ)$ و $\mathbf{N}(\circ)$.

(ii) صفحه راستگرد، تولید شده توسط $\mathbf{T}(\circ)$ و $\mathbf{B}(\circ)$.

(iii) صفحه قائم، تولید شده توسط $\mathbf{N}(\circ)$ و $\mathbf{B}(\circ)$.

ملاحظه می‌کنیم که به طور موضعی تصویر روی این صفحات به ترتیب به صورت زیر به نظر می‌رسد.

(i) $(u, (\kappa_0/2)u^2 + \dots)$

(ii) $(u, (\kappa_0\tau_0/6)u^3 + \dots)$

(iii) $(u^2, (\frac{\sqrt{2}\tau_0}{3\sqrt{\kappa_0}})u^3 + \dots)$

در حالیکه $\lim_{u \rightarrow 0} \dots / u^2 = 0$ پس، تصویر α روی این صفحات، به طور موضعی آن چنان است که در شکل ۲ - ۴ نشان داده شده است.

صفحه مماس (بوسان)، نزدیک‌ترین صفحه‌ای است که می‌تواند α را در نزدیکی P در بر داشته باشد (تمرین ۲۳ را نیز ببینید). راستگردی («راست بودن») صفحه از آنجا می‌آید که در واقع صفحه‌ای است که نزدیک‌ترین صفحه به مسطح ساختن خم در نزدیکی P

است. صفحه قائم بر خم در P عمود است (به شکل ۱ - ۳ مراجعه کنید).

تمرین ۱-۲

(۱) انحناهای خم‌های پارامتری شده با طول قوس زیر را تعیین کنید.

$$a. \alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \sin s \right)$$

$$b. \alpha(s) = (\sqrt{1+s^2}, \ln(s + \sqrt{1+s^2}))$$

$$c.* \text{ برای } s \in (-1, 1), \alpha(s) = \frac{1}{3}(1+s)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-s)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}s$$

(۲) بردار مماس یکه، قائم اصلی و انحناهای خم‌های زیر را محاسبه کنید.

$$a. \text{ دایره‌ای به شعاع } a: \alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$$

$$b. \alpha(t) = (t, \cosh t)$$

$$c. \text{ برای } t \in (0, \pi/2), \alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

(۳) ابزار فرنه $(\tau, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \kappa, \mathbf{T})$ را برای خم‌های زیر به دست آورید.

$$a.* \text{ برای } s \in (-1, 1), \alpha(s) = \left(\frac{1}{3}(1+s)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-s)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}s \right)$$

$$b. \alpha(t) = \left(\frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t), \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t), e^t \right)$$

$$c.* \alpha(t) = (\sqrt{1+t^2}, t, \ln(t + \sqrt{1+t^2}))$$

$$d. \alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

$$e. \alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$$

(۴) ثابت کنید که انحناهای خم مسطح $y = f(x)$ ، به وسیله $\kappa = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}$ بیان می‌شود.

(۵) با استفاده از گزاره ۲-۲ و دومین پارامتری تراکتریکس که در مثال ۲ در بخش ۱ بیان شده است، انحناهای آن را مجدداً محاسبه کنید.

(۶) با مشتق‌گیری از $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ ، معادله $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$ را نتیجه بگیرید.

(۷) فرض کنید α یک خم فضایی پارامتری شده با طول قوس و با این خاصیت باشد که برای هر s باندازه کافی نزدیک به s_0 ، $\|\alpha(s)\| \leq \|\alpha(s_0)\| = R$ ، ثابت کنید $\kappa(s_0) \geq \frac{1}{R}$.

(راهنمایی: تابع $f(s) = \|\alpha(s)\|^2$ را در نظر بگیرید. در مورد $f''(s_0)$ چه می‌دانید؟).
 ۸) فرض کنید α یک خم (پارامتری شده با طول قوس) منظم، با انحنای غیر صفر باشد. خط قائم به α در $\alpha(s)$ ، خطی است گذرا بر $\alpha(s)$ با جهت بردار $N(s)$. فرض کنید همه خطوط قائم به α گذرا بر یک نقطه هستند. در مورد این خم چه می‌توانید بگویید؟

۹) a. ثابت کنید اگر همه صفحات قائم یک خم از یک نقطه خاص بگذرد، آنگاه آن خم روی یک کره واقع است.
 b. ثابت کنید اگر همه صفحات بوسان یک خم از یک نقطه خاص بگذرد، آنگاه آن خم مسطح است.

۱۰) ثابت کنید اگر $\kappa = \kappa_0$ و $\tau = \tau_0$ مقادیر ثابت غیر صفری باشند، آنگاه خم یک مارپیچ دوار (قائم) است (راهنمایی: تنها جواب‌های معادله دیفرانسیل $y'' + \kappa^2 y' = 0$ عبارتند از: $y = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt)$).

نکته: یک تمرین سرگرم کننده این است که (در فرمول مارپیچ دوار) a و b بر حسب κ_0 و τ_0 داده شوند.

۱۱) همانند مشتق‌گیری در گزاره ۲-۲ عمل کرده تا نشان دهید:

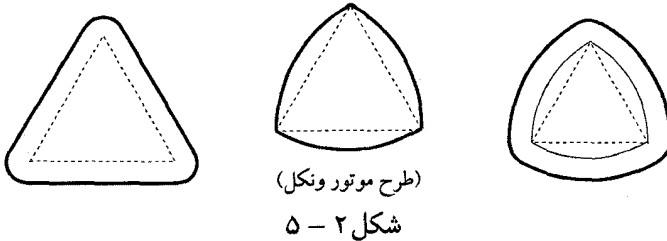
$$\tau = \frac{\alpha' \cdot (\alpha'' \times \alpha''')}{\|\alpha'' \times \alpha'''\|^2}$$

۱۲) فرض کنید α یک خم C^4 پارامتری شده با طول قوس و با $\kappa \neq 0$ باشد. ثابت کنید α یک مارپیچ تعمیم یافته است اگر و فقط اگر $\alpha'' \cdot (\alpha''' \times \alpha^{(iv)}) = 0$ (در اینجا $\alpha^{(iv)}$ نمایش مشتق چهارم α است).

۱۳) فرض کنید در P ، $\kappa\tau \neq 0$. نشان دهید که در میان تمام صفحات شامل خط مماس بر α در P ، α به طور موضعی در دو طرف فقط صفحه بوسان قرار می‌گیرد.

۱۴) فرض کنید α یک خم منظم با $\kappa \neq 0$ در P باشد. ثابت کنید که خم مسطحی که توسط تصویر α روی صفحه مماس آن در P به دست می‌آید، دارای همان انحنایی در P است که α در P دارد.

(۱۵) یک خم مسطح بسته C را دارای پهنای ثابت μ گویند، اگر فاصله بین خطوط موازی مماس به C همیشه به اندازه μ باشد (خیر، لازم نیست C یک دایره باشد. شکل ۲-۵ را ببینید). در ادامه این مسئله فرض کنید که خم C^2 باشد و $\kappa \neq 0$.



a. اجازه دهید دو نقطه با خطوط مماس موازی را «روبرو^۱» بنامیم. ثابت کنید اگر C دارای پهنای ثابت μ باشد، آنگاه وتر واصل نقاط روبرو در هر دو نقطه بر خم عمود است (راهنمایی: اگر $\beta(s)$ روبروی $\alpha(s)$ باشد، آنگاه $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\mathbf{T}(s) + \mu\mathbf{N}(s)$. ابتدا توضیح دهید چرا μ ضریب \mathbf{N} است، آنگاه نشان دهید که $\lambda = 0$).

b. ثابت کنید که مجموع عکس انحنای در نقاط روبرو برابر μ است (اخطار: اگر α یک پارامتری شده با طول قوس باشد، کاملاً بعید است که β چنین باشد).

(۱۶) فرض کنید α و β دو خم منظم تعریف شده روی $[a, b]$ باشند. گوئیم β یک گسترده^۲ از α است، اگر برای هر $t \in [a, b]$

(i) $\beta(t)$ روی خط مماس به α در $\alpha(t)$ واقع شود و

(ii) بردارهای مماس به α و β به ترتیب در $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ بر یکدیگر عمود باشند.

متقابلاً به α به عنوان یک پوش^۳ از β رجوع می‌کنیم.

a. فرض کنید α با طول قوس پارامتری شده باشد. نشان دهید β یک گسترده^۲ α است اگر و فقط اگر برای یک ثابت c ، $\beta(s) = \alpha(s) + (c-s)\mathbf{T}(s)$. (در اینجا $\alpha'(s) = \mathbf{T}(s)$). بطور معمول به خم β که با $c = 0$ بدست می‌آید به عنوان گسترده^۲ α رجوع می‌کنیم. اگر با شروع از $s = 0$ ، یک نخ را حول خم α پیچیده باشید، گسترده عبارتست از ادامه مسیر انتهای نخ، همان طور که آن را رها کرده‌اید. به عبارتی همچنان که در حالت یک دایره در شکل ۲-۶ نشان داده شده است، همیشه کشیدن یک نخ است که محکم شده است.

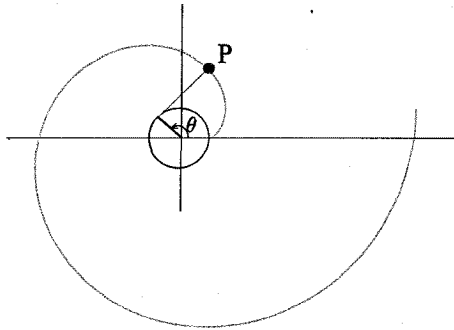
b. نشان دهید گسترده^۲ یک مارپیچ، یک خم مسطح است.

c. نشان دهید که گسترده^۲ یک کاتناری یک تراکتریکس است (راهنمایی: نیازی به یک پارامتری با طول قوس ندارید).

d. اگر α یک خم مسطح پارامتری شده با طول قوس باشد، ثابت کنید که خم β که به صورت زیر بیان می‌شود، یگانه گسترده^۲ α است که در صفحه α واقع می‌شود.

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{N}(s)$$

به علاوه ثابت کنید که اگر $\kappa' \neq 0$ ، این خم منظم است (راهنمایی: به تعریف اولیه برگردید).



شکل ۲-۶

(۱۷) برای $t \in [-\pi, \pi]$ گستردهٔ سیکلوئید (یا حلقوی) $\alpha(t) = (t + \sin t, 1 - \cos t)$ را با استفاده از $t = 0$ برای نقطهٔ شروع خود بیابید. یک توصیف هندسی برای پاسخ خود بیان کنید.

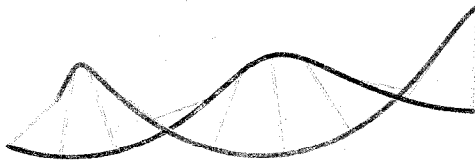
(۱۸) فرض کنید α یک خم پارامتری با طول قوس و با $\kappa, \tau \neq 0$ باشد.

a. خم α را واقع روی سطح یک کره به مرکز مبدأ در نظر بگیرید (یعنی برای هر s ، $\|\alpha(s)\|$ برابر مقدار ثابت باشد). ثابت کنید که

$$(*) \quad \frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0$$

(راهنمایی: برای توابعی چون λ, μ و ν بنویسید: $\alpha = \lambda \mathbf{T} + \mu \mathbf{N} + \nu \mathbf{B}$ و از این حقیقت استفاده کنید که $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ یک پایه برای \mathbb{R}^3 است.)

b. بر عکس آن را ثابت کنید: اگر α در معادله دیفرانسیل $(*)$ صدق کند، آنگاه α روی یک کره قرار دارد (راهنمایی: با به کارگیری مقادیر λ, μ و ν که در قسمت الف به دست آمده است، نشان دهید که $\alpha - \lambda \mathbf{T} + \mu \mathbf{N} + \nu \mathbf{B}$ یک بردار ثابت است که داوطلبی برای مرکز کره است).



شکل ۲-۷

(۱۹) دو خم پارامتری مجزای α و β را برای هر t ، جفت‌های برتراند^۲ گویند، اگر خط قائم به α در $\alpha(t)$ همان خط قائم به β در $\beta(t)$ باشد. یک مثال در این زمینه در شکل ۲-۷

تصویر شده است. فرض کنید α و β جفت‌های برتراند باشند.

a. اگر α پارامتری شده با طول قوس باشد، نشان دهید $\beta(s) = \alpha(s) + r(s)N(s)$ و $r(s)$ برابر مقدار ثابت است. بنابراین نقاط متناظر از α و β دارای یک فاصله مساوی از یکدیگر هستند.

b. به علاوه، نشان دهید که زاویه بین بردارهای مماس بر α و β در نقاط متناظر، مقداری ثابت است (راهنمایی): اگر T_α و T_β بردارهای مماس یکه به ترتیب بر α و β باشند، $T_\alpha \cdot T_\beta$ را در نظر بگیرید.

c. فرض کنید α پارامتری شده با طول قوس باشد و $\kappa \neq 0$. نشان دهید که α دارای یک جفت برتراند β است، اگر و فقط اگر ثابت‌های r و c موجود باشند چنان که $r\kappa + c\tau = 1$.
 d. برای α مفروض، ثابت کنید که اگر بیش از یک خم موجود باشد چنان که α و β جفت‌های برتراند باشند، آنگاه تعداد نامتناهی از این خم‌های β موجود است و این مطلب رخ می‌دهد اگر و فقط اگر α یک مارپیچ دوار باشد.

(۲۰) (تمرین ۱۹ را ببینید) فرض کنید α و β جفت‌های برتراند باشند. ثابت کنید که تاب α و تاب β در نقاط متناظر دارای حاصلضرب ثابت است.

(۲۱) فرض کنید Y یک تابع برداری C^2 روی $[a, b]$ با $\|Y\| = 1$ باشد و Y' و Y'' همه جا به طور خطی مستقل باشند. برای هر ثابت غیر صفر c و $t \in [a, b]$ تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(t) = c \int_a^t (Y(u) \times Y'(u)) du$$
 ثابت کنید خم α دارای تاب ثابت $1/c$ است (راهنمایی: نشان دهید $B = \pm Y$).

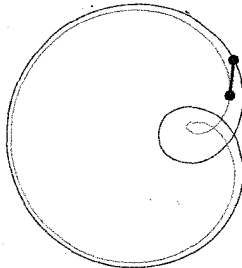
(۲۲) a. فرض کنید α یک خم مسطح پارامتری شده با طول قوس باشد. (برای یک مقدار مثبت کوچک و ثابت ϵ) یک خم «موازی» β را با قرار دادن $\beta = \alpha + \epsilon N$ خلق می‌کنیم. نماد گذاری را توضیح دهید و انحنای β را بر حسب ϵ و انحنای α بیان کنید.
 b. حال فرض کنید α یک خم فضایی پارامتری با طول قوس باشد. نشان دهید می‌توان یک خم «موازی» β را برای یک تابع مناسب θ با فرض $\beta = \alpha + \epsilon((\cos \theta)N + (\sin \theta)B)$ به دست آورد. چه تعدادی از چنین خم‌هایی وجود دارند؟
 c. یک خم موازی برای یک مارپیچ دوار رسم کنید.

(۲۳) فرض کنید α یک خم پارامتری شده با طول قوس با $P = \alpha(0)$ و $\kappa(0) \neq 0$ باشد. گزاره ۲-۶ را برای اثبات موارد زیر به کار برید.

- a*. فرض کنید $Q = \alpha(s)$ و $R = \alpha(t)$. نشان دهید که صفحه تولید شده توسط P ، Q و R ، وقتی $s, t \rightarrow 0$ به سمت صفحه بوسان α در P میل می‌کند.
- b. وقتی که $s, t \rightarrow 0$ ، دایره بوسان (یا مماس) در P موقعیت حدی دایره گذرا بر P ، Q و R است. ثابت کنید که مرکز دایره بوسان نقطه $(\circ)N(0) = P + (1/\kappa(0))N(0)$ و شعاع آن $(1/\kappa(0))$ است.
- c. کره بوسان (یا مماس) در P ، موقعیت حدی کره‌های گذرا بر P و سه نقطه همسایه آن روی خم است، همچنانکه نقاط اخیر بطور مستقل به سمت P میل می‌کنند. ثابت کنید که مرکز این کره بوسان نقطه $(\circ)B(0) = P + (1/\kappa(0))N(0) + (1/\tau(0))(1/\kappa'(0))B(0)$ و شعاع آن برابر $\sqrt{(1/\kappa(0))^2 + (1/\tau(0))(1/\kappa'(0))^2}$ است.
- d. چگونه نتیجه قسمت c، به تمرین ۱۸ مربوط می‌شود؟

- ۲۴) a. فرض کنید β یک خم مسطح و C_s دایره‌ای به مرکز $\beta(s)$ با شعاع $r(s)$ باشد. با فرض β و r به عنوان توابع دیفرانسیل پذیر، نشان دهید که وقتی $t > s$ ، دایره C_s در درون دایره C_r واقع است اگر و فقط اگر برای هر s ، $\|\beta'(s)\| \leq r'(s)$.
- b. فرض کنید α یک خم مسطح پارامتری شده با طول قوس و κ یک تابع نزولی باشد. ثابت کنید که وقتی $t > s$ ، دایره بوسان در $\alpha(s)$ در درون دایره بوسان در $\alpha(t)$ واقع می‌شود (تمرین ۲۳ را برای تعریف دایره بوسان ببینید).

- ۲۵) فرض کنید چرخ جلویی یک دوچرخه یک خم پارامتری با طول قوس α را طی می‌کند. مسیر β از چرخ عقبی را تعیین کنید که همانند شکل ۲-۸ به فاصله یک واحد دورتر است. (راهنمایی: اگر چرخ جلویی تحت زاویه θ از محور دوچرخه بچرخد، با نوشتن $\alpha - \beta$ بر حسب θ ، T و N شروع کنید. هدف شما باید یک معادله دیفرانسیل باشد که بایستی θ در آن صدق کند. توجه شود که مسیر چرخ عقبی به وضوح به موقعیت اولیه $\theta(0)$ وابسته خواهد بود. اما در کل، در ساده‌ترین حالت هم احتمال دارد که حل صریح معادله دیفرانسیل غیر ممکن باشد).



شکل ۲-۸

۱-۳ چند نتیجه سراسری

۱-۳ خم‌های فضایی. مفهوم اساسی در هندسه راجع به قابلیت انطباق است (بخش ۱ از ضمیمه را ببینید): چه موقع دو شکل فقط در یک حرکت صلب با هم تفاوت دارند؟ اگر خم α^* از خم α با انجام یک حرکت صلب (ترکیب یک انتقال و یک دوران) به دست آید، آنگاه کنج‌های فرنه در نقاط متناظر در همان حرکت صلب اختلاف دارند و چرخش کنج‌ها (که مبین انحنا و تاب) است، بایستی یکی باشد (توجه شود که یک انعکاس در انحنا تأثیری ندارد ولی ممکن است علامت تاب را عوض کند).

قضیه ۱-۳ (قضیه اساسی نظریه خم‌ها) دو خم فضایی $\alpha: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، α^* منطبق هستند (یعنی در یک حرکت صلب اختلاف دارند) اگر و فقط اگر پارامتری‌های متناظر آنها با طول قوس، دارای این خاصیت باشند که برای هر $s \in [0, L]$ داشته باشیم $\kappa(s) = \kappa^*(s)$ و $\tau(s) = \tau^*(s)$.

اثبات فرض کنید برای یک حرکت صلب $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $\alpha^* = \Psi \circ \alpha$. بنابراین برای یک ماتریس 3×3 متعامد A با $\det A > 0$ و یک بردار $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ، $\Psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. در این صورت $\alpha^*(s) = A\alpha(s) + \mathbf{b}$ و چون A متعامد است، $\|\alpha^*(s)\| = \|\alpha(s)\|$. از این رو α^* نیز پارامتری شده با طول قوس است و $T^*(s) = AT(s)$. با مشتق‌گیری مجدد داریم: $\kappa^*(s)N^*(s) = \kappa(s)AN(s)$. چون A متعامد است، $\|AN(s)\| = \|N(s)\|$ یک بردار یکه است، بنابراین $N^*(s) = aN(s)$ و $\kappa(s) = \kappa^*(s)$. اما در این صورت

$$B^*(s) = T^*(s) \times N^*(s) = AT(s) \times AN(s) = A(T(s) \times N(s)) = AB(s)$$

نظر به اینکه ماتریس‌های متعامد، پایه‌های متعامد یکه را به پایه‌های متعامد یکه می‌نگارند و $\det A > 0$ ، اطمینان حاصل می‌شود که جهت نیز حفظ می‌شود. بالاخره، $B^*(s) = -\tau(s)N^*(s)$ و $B(s) = -\tau(s)N(s)$ پس آنچنان که لازم بود: $\tau(s) = \tau^*(s)$.

بالعکس فرض کنید $\kappa(s) = \kappa^*(s)$ و $\tau(s) = \tau^*(s)$. اکنون یک حرکت صلب Ψ به طریق زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید: $\mathbf{b} = \alpha(0) - \alpha^*(0)$ و A ماتریس منحصربه‌فردی باشد که $AT(0) = T^*(0)$ ، $AN(0) = N^*(0)$ و $AB(0) = B^*(0)$. ماتریس A دارای دترمینان مثبت نیز است، چون هر دو پایه راست‌گرد هستند. قرار می‌دهیم $\tilde{\alpha} = \Psi \circ \alpha$. اکنون برای هر $s \in [0, L]$ ، ادعا می‌کنیم $\alpha^*(s) = \tilde{\alpha}(s)$. توجه شود که طبق بحثی که در قسمت اول اثبات شد، $\tilde{\kappa} = \kappa = \kappa^*$ و $\tilde{\tau} = \tau = \tau^*$. فرض کنید:

$$f(s) = \tilde{T}(s).T^*(s) + \tilde{N}(s).N^*(s) + \tilde{B}(s).B^*(s)$$

حال از f با استفاده از فرمول فرنه مشتق می‌گیریم:

$$f'(s) = (\tilde{T}'(s).T^*(s) + \tilde{T}(s).T^{*'}(s)) + (\tilde{N}'(s).N^*(s) + \tilde{N}(s).N^{*'}(s))$$

$$\begin{aligned}
 &+(\tilde{\mathbf{B}}'(s).\mathbf{B}^*(s) + \tilde{\mathbf{B}}(s).\mathbf{B}^{*'}(s)) \\
 &= \kappa(s)(\tilde{\mathbf{N}}(s).\mathbf{T}^* + \tilde{\mathbf{T}}(s).\mathbf{N}^*(s)) - \kappa(s)(\tilde{\mathbf{T}}(s).\mathbf{N}^* + \tilde{\mathbf{N}}(s).\mathbf{T}^*(s)) \\
 &+ \tau(s)(\tilde{\mathbf{B}}(s).\mathbf{N}^*(s) + \tilde{\mathbf{N}}(s).\mathbf{B}^*(s)) - \tau(\tilde{\mathbf{N}}(s).\mathbf{B}^*(s) + \tilde{\mathbf{B}}(s).\mathbf{N}^*(s)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

دلیل تساوی آخر این است که دو عبارت اول و دو عبارت آخر حذف می‌شوند. طبق ساختار $f, f(\circ) = \gamma$ پس برای هر $s \in [0, L]$ ، $f(s) = \gamma$. چون هر یک از حاصلضرب‌های داخلی مستقل هستند، آنها می‌توانند حداکثر ۱ باشند. تنها راه برای اینکه مجموع برای هر s برابر ۱ باشد، این است که برای هر s ، هر یک برابر ۱ باشند و این اتفاق هنگامی رخ می‌دهد که برای هر $s \in [0, L]$ ، $\tilde{\mathbf{B}}(s) = \mathbf{B}^*(s)$ و $\tilde{\mathbf{N}}(s) = \mathbf{N}^*(s)$ ، $\tilde{\mathbf{T}}(s) = \mathbf{T}^*(s)$ ، $s \in [0, L]$ ، چون $\tilde{\alpha}'(s) = \tilde{\mathbf{T}}(s) = \mathbf{T}^*(s) = \alpha^{*'}(s)$ و $\tilde{\alpha}(\circ) = \alpha^*(\circ)$ ، در نتیجه برای هر $s \in [0, L]$ ، همان طور که می‌خواستیم نشان دهیم: $\square. \tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s)$

نکته نیمه آخر این اثبات همان طور که در نظر اول مشخص می‌شود، قابل جایگزینی توسط حکم یگانگی جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل است. همچنین برای یک نوع محاسبات ماتریسی در اثبات قضیه که اکنون انجام شد به تمرین ۱-۳-A مراجعه کنید.

مثال ۱ اکنون مشاهده کردیم که تنها خم‌ها با κ و τ ثابت، ماریچ‌های دوار هستند. ∇

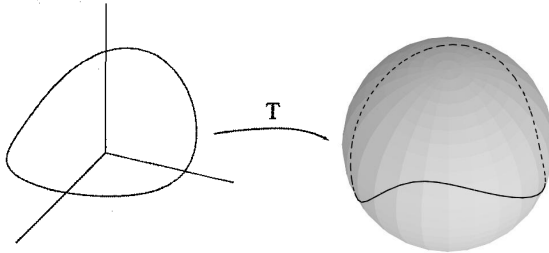
شاید مطلب مورد علاقه بیشتر، سؤال وجودی است: دو تابع پیوسته $\kappa, \tau : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (با τ همه جا مثبت) مفروض است، آیا یک خم فضایی با این انحنا و تاب وجود دارد؟ جواب بله است و این نتیجه مستقیم از قضیه اساسی وجود در معادلات دیفرانسیل، یا همان قضیه ۲-۱ در ضمیمه است. یعنی قرار می‌دهیم:

$$F(s) = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{T}(s) & \mathbf{N}(s) & \mathbf{B} \\ | & | & | \end{bmatrix}, \quad K(s) = \begin{bmatrix} \circ & -\kappa(s) & \circ \\ \kappa(s) & \circ & -\tau(s) \\ \circ & \tau(s) & \circ \end{bmatrix}$$

آنگاه انتگرال‌گیری از دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی $F'(s) = F(s)K(s)$ با شرط $F(0) = F_0$ ، به ما کنج فرنه در طول همه نقاط خم را می‌دهد و با انتگرال‌گیری از $\mathbf{T}(s)$ به دست می‌یابیم.

حال به مفهوم انحنا کلی برای یک خم بسته فضایی می‌پردازیم که به معنی انتگرال انحنا $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک خم پارامتری با طول قوس و $\alpha(\circ) = \alpha(L)$

باشد، انحنای کلی آن عبارتست از: $\int_0^L \kappa(s) ds$ این مقدار می‌تواند به طریق زیر تعبیر هندسی شود. نگاشت گاوسی برای α ، نگاشتی است از فاصله $[0, L]$ به کره واحد Σ که توسط بردار مماس $\Sigma \rightarrow [0, L]: T$ ارائه می‌شود. تصویر این نگاشت با نماد Γ ، به طور کلاسیک نمایه^۱ مماس α نامیده می‌شود.



شکل ۳ - ۱

به شرطی که نگاشت گاوس یک به یک باشد، مشاهده می‌شود که طول Γ برابر انحنای کلی α است، چون $\int_0^L \kappa(s) ds = \int_0^L \|T'(s)\| ds = \text{طول}(\Gamma)$.

یک سؤال مقدماتی این است که چه خم‌های مثل Γ در کره واحد می‌توانند تصویر نگاشت گاوس یک خم فضایی بسته α باشند؟ چون $\alpha(s) = \alpha(0) + \int_0^s T(u) du$ می‌بینیم که یک شرط لازم و کافی عبارتست از اینکه $\int_0^L T(s) ds = 0$ (به هر حال توجه شود که این مطلب به پارامتری با طول قوس خم اولیه بستگی دارد و یک شرط مستقل از پارامتری روی خم تصویر $\Gamma \subset \Sigma$ نیست). با این وجود، نتیجه هندسی زیر از این شرط را داریم. برای هر بردار (یکه) A داریم:

$$0 = A \cdot \int_0^L T(s) ds = \int_0^L (T(s) \cdot A) ds$$

و بنابراین مقدار متوسط $T \cdot A$ باید صفر باشد. بخصوص، نمایه مماس باید دایره عظیمه با بردار قائم A را قطع کند. یعنی، اگر خم Γ یک نمایه مماس باشد بایستی نسبت به هر جهت A «متعادل»^۲ باشد. طبیعی است که در مورد کوتاه‌ترین خم‌ها با این خاصیت پرسش شود. اگر $\xi \in \Sigma$ ، ξ^\perp را نمایش دایره عظیمه (جهت دار) با بردار قائم ξ قرار می‌دهیم. گزاره ۳-۲ (رابطه کروفتون)^۳ فرض کنید Γ یک خم تکه‌ای C^1 روی کره باشد. در این صورت،

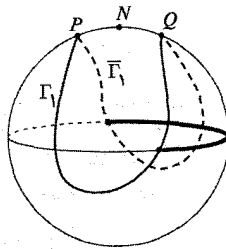
$$\begin{aligned} \text{طول}(\Gamma) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \#(\Gamma \cap \xi^\perp) d\xi \\ &= \pi \times (\text{عدد میانگین تقاطع‌های } \Gamma \text{ با همه دایره‌های عظیمه}) \end{aligned}$$

(در اینجا $d\xi$ ، نمایش معمول برای جزء مساحت رویه، روی Σ است).
اثبات در تمرین ۱۱ به خواننده واگذار می شود. □

نکته مجموعه ξ هایی که برای آنها $(\Gamma \cap \xi^\perp) \neq \emptyset$ متناهی است، یک مجموعه از اندازه صفر است و بنابراین انتگرال را قابل درک می کند، گرچه برای اثبات این مطلب در اینجا توقف نمی کنیم.

با به کارگیری این مطلب برای حالت نمایه مماس از یک خم فضایی بسته، نتیجه کلاسیک زیر را نتیجه می گیریم.

قضیه ۳-۳ (فنجل^۱) انحنا کلی هر خم فضایی بسته، حداقل 2π است و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر خم مورد نظر یک خم مسطح محدب باشد.



شکل ۳-۲

اثبات اگر Γ نمایه مماس خم فضایی باشد، تقریباً برای هر $\xi \in \Sigma$ داریم $\#(\Gamma \cap \xi^\perp) \geq 2$ و بنابراین از گزاره ۳-۲ نتیجه می شود که: $L(\Gamma) \geq \frac{1}{4} (2)(4\pi) = 2\pi$ حال ادعا می کنیم که اگر Γ یک خم بسته همبند در Σ با طول کمتر از 2π باشد، آنگاه در یک نیم کره بسته قرار گیرد. در این صورت نتیجه می شود که اگر Γ یک نمایه مماس از طول کمتر از 2π باشد، Γ باید یک دایره عظیمه باشد (چون اگر Γ در یک نیم کره $A \cdot x \geq 0$ واقع شود، $\int_0^L T(s) \cdot A \, ds = 0$ ایجاب می کند که $T \cdot A = 0$ پس Γ دایره عظیمه $A \cdot x = 0$ است). این نتیجه می دهد که خم مسطح است. برای اثبات ادعا به طریق زیر عمل می کنیم. فرض کنیم طول Γ کوچک تر یا مساوی 2π است. نقاط P و Q روی Γ را چنان اختیار می کنیم که کمان های $\Gamma_1 = \widehat{PQ}$ و $\Gamma_2 = \widehat{QP}$ دارای طول یکسان باشند. همچنان که در شکل ۳-۲ نشان داده شده است، نقطه N را وسط کمان کوتاه تر واصل P به Q اختیار می کنیم. برای وضوح، شکل را چنان می چرخانیم که N قطب شمال کره شود. حال فرض کنید که خم Γ_1 وارد نیم کره جنوبی شده باشد، $\bar{\Gamma}_1$ نمایش انعکاس Γ_1 در امتداد قطب شمال (یعنی

کمان‌های متوالی دایرهٔ عظیمهٔ گذرا بر N باشد. اکنون، $\Gamma_1 \cup \bar{\Gamma}_1$ یک خم بسته شامل زوجی از نقاط متقاطع است و بنابراین از یک دایرهٔ عظیمهٔ طویل‌تر است (تمرین ۱ را ببینید). چون $\Gamma_1 \cup \bar{\Gamma}_1$ دارای طولی مساوی Γ است، ملاحظه می‌شود که طول Γ بزرگ‌تر از 2π است، که یک تناقض است. بنابراین Γ واقعاً در نیم کرهٔ شمالی واقع است. \square

حال طرح اثبات نتیجه‌ای بیان می‌شود که راهنمای بسیاری از سؤالات در بعدهای بالاتر است. یک خم فضایی بسته ساده را 'گره دار' گویند، اگر نتوانیم آن را با یک دیسک پر کنیم.

قضیه ۳-۴ (فری - میلنر^۲) اگر یک خم فضایی ساده گره‌دار باشد، انحنا کلی آن حداقل 4π است.

طرح اثبات اگر انحنا کلی C کمتر از 4π باشد، آنگاه مقدار میانگین $\#(T \cap \xi^\perp)$ کوچک‌تر از ۴ است. چون (در هنگامی که دایرهٔ عظیمه بر Γ مماس نباشد) این عدد بطور ذاتی یک عدد زوج بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است، باید یک مجموعهٔ باز حول ξ ها موجود باشد که برای آنها داشته باشیم: $\#(T \cap \xi^\perp) = 2$. یکی از آنها مثلاً ξ_0 را اختیار می‌کنیم. این بدین معنی است که بردار مماس بر C فقط دو بار بر ξ_0 عمود است، پس تابع $f(x) = x \cdot \xi_0$ فقط دارای دو نقطهٔ بحرانی است. یعنی (طبق قضیهٔ رول^۳) صفحه‌های عمود بر $s \cdot \xi_0$ خم C را در یک پاره خط یا در یک نقطه تکین (در نوک یا ته) قطع می‌کنند، یعنی با حرکت دادن این صفحات از ته C به نوک آن یک دیسک را پر می‌کنیم، پس C گره‌دار نیست. \square

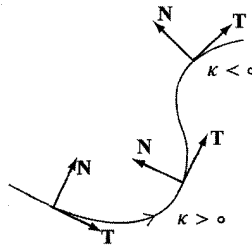
۳-۲ خم‌های مسطح این فصل را با چند نتیجه در مورد خم‌های مسطح خاتمه می‌دهیم. ابتدا در نظر گرفتن علامت برای انحنا ملموس است. ترجیحاً روندی را طی می‌کنیم که در بخش ۲ انجام شد، به جای آن برای هر خم پارامتری با طول قوس α ، $N(s)$ را به قسمی تعریف می‌کنیم که $\{T(s), N(s)\}$ یک پایهٔ راست‌گرد برای \mathbb{R}^2 باشد (یعنی از $T(s)$ به $N(s)$ در خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخیم) و قرار می‌دهیم: $T'(s) = \kappa(s)N(s)$. بنابراین وقتی T در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخد، $\kappa > 0$ و هنگامی که T در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد، $\kappa < 0$. گرچه انحنا کلی $\int_C |\kappa(s)| ds$ از یک خم ساده بسته ممکن است تنها مقداری جزئی از 2π بزرگتر باشد، به طور محسوس پذیرفتنی است که بردار مماس چه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت یا در جهت عقربه‌های ساعت،

باید یک دوران کامل باشد و بنابراین داریم.

قضیه ۳-۵ (هویف-اوملاوفستز^۱) اگر C یک خم مسطح ساده بسته باشد، آنگاه $\int_C \kappa ds = \pm 2\pi$.

عنصر تعیین کننده، پیگیری یک زاویه کلی پیوسته است که تحت آن بردار مماس چرخیده شده است. یعنی به مطلب بعدی نیاز داریم.

لم ۳-۶ فرض کنید $\alpha: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم مسطح پارامتری شده با طول قوس باشد. آنگاه یک تابع C^∞ مثل $\theta: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که برای هر $s \in [0, L]$ ، $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$. بعلاوه، برای هر دو تابع θ و θ^* از این نوع توابع داریم: $\theta(L) - \theta(0) = \theta^*(L) - \theta^*(0)$ عدد $(\theta(L) - \theta(0)) / 2\pi$ را نمایه چرخش^۲ گویند.



شکل ۳-۳

اثبات چهار نیم دایره $U_1 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}$ ، $U_2 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}$ ، $U_3 = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}$ و $U_4 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}$ را در نظر بگیرید:

آنگاه توابع زیر، نگاشت‌های هموار $\psi_{i,n}: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت هستند که برای هر

$$(\cos(\psi_{i,n}(x, y)), \sin(\psi_{i,n}(x, y))) = (x, y), n \in \mathbb{Z} \text{ و } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\psi_{1,n}(x, y) = \arctan(y/x) + 2n\pi$$

$$\psi_{2,n}(x, y) = \arctan(y/x) + (2n + 1)\pi$$

$$\psi_{3,n}(x, y) = -\arctan(x/y) + (2n + \frac{1}{2})\pi$$

$$\psi_{4,n}(x, y) = -\arctan(x/y) + (2n - \frac{1}{2})\pi$$

مقدار $\theta(0)$ را چنان تعریف می‌کنیم که $T(0) = (\cos \theta(0), \sin \theta(0))$ فرض کنید:

$S = \{s \in [0, L] : \theta(s) \text{ تعریف شده است و در این فاصله } C^\infty \text{ است}\}$

و قرار دهید $s_0 = \sup S$. ابتدا فرض کنید $s_0 < L$. عدد i را چنان اختیار کنید که

$T(s_0) \in U_i$ و $n \in \mathbb{Z}$ را به قسمی انتخاب کنید که $\psi_{i,n}(T(s_0)) = \lim_{s \rightarrow s_0^-} \theta(s)$ چون

T در s_0 پیوسته است، یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد به قسمی که برای هر s با $|s - s_0| < \delta$ ،

$T(s) \in U_i$. آنگاه قرار دادن $\theta(s) = \psi_{i,n}(T(s))$ برای هر $s_0 \leq s < s_0 + \delta$ یک تابع C^∞

۱- Hopf-Umlaufsatz

۲- rotation index

θ تعریف شده روی $[s_0, s_0 + \delta/2]$ را به ما می‌دهد، پس نمی‌توانیم داشته باشیم $s_0 < L$.
 توجه شود که برای هر $s_0 - \delta < s < s_0$ ، $\theta(s) = \psi_{i,n}(\mathbf{T}(s))$. چرا؟. اما همین بحث نشان می‌دهد که وقتی $s_0 = L$ ، تابع θ روی همه $[s_0, L]$ ، C^∞ است.

حال، چون $\mathbf{T}(L) = \mathbf{T}(s_0)$ می‌دانیم که باید $\theta(L) - \theta(s_0)$ مضرب صحیحی از 2π باشد. به علاوه برای هر تابع دیگر θ^* با همین خاصیت، برای عدد صحیحی چون $n(s)$ داریم:
 $\theta^*(s) = \theta(s) + 2\pi n(s)$. چون θ و θ^* ، هر دو تابع‌های پیوسته‌ای هستند، n هم باید تابعی پیوسته باشد و همچنین چون n مقادیر خود را از اعداد صحیح می‌گیرد، بایستی یک تابع ثابت باشد. بنابراین آن چنان که می‌خواستیم $\theta^*(L) - \theta^*(s_0) = \theta(L) - \theta(s_0)$.

طرح اثبات قضیه ۳-۵

اگر $\mathbf{T}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ ، آنگاه $\mathbf{T}'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$ ، پس $\kappa(s) = \theta'(s)$ و مقدار: $\int_{s_0}^L \kappa(s) ds = \int_{s_0}^L \theta'(s) ds = \theta(L) - \theta(s_0)$ برابر نمایه چرخش خم بسته α است.

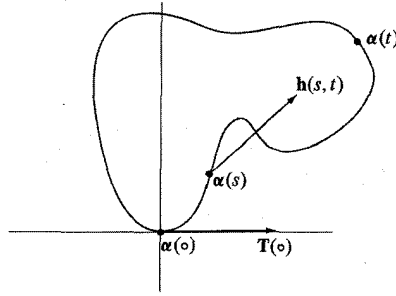
فرض کنید $\Delta = \{(s, t) : s_0 \leq s \leq t \leq L\}$. نگاشت سکانت $\mathbf{h} : \Delta \rightarrow S^1$ با تعریف زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{h}(s, t) = \begin{cases} \mathbf{T}(s), & s = t \\ -\mathbf{T}(s_0), & (s, t) = (s_0, L) \\ \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{\|\alpha(t) - \alpha(s)\|}, & s \neq t, s > s_0, t < L \end{cases}$$

آنگاه از گزاره ۲-۶ نتیجه می‌شود که \mathbf{h} پیوسته است (با استفاده از قضیه تیلور برای محاسبه ... $\alpha(t) = \alpha(s) + (t - s)\alpha'(s) + \dots$). یک نوع اثبات با سفسطه بیشتر از لم ۲ (تمرین ۱۲) ثابت می‌کند که یک تابع پیوسته $\tilde{\theta} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که برای هر $(s, t) \in \Delta$ ، $\mathbf{h}(s, t) = (\cos \tilde{\theta}(s, t), \sin \tilde{\theta}(s, t))$ ، آنگاه از لم ۳-۶ نتیجه می‌شود که

$$\int_C \kappa ds = \theta(L) - \theta(s_0) = \tilde{\theta}(L, L) - \tilde{\theta}(s_0, s_0) = \underbrace{\tilde{\theta}(L, L) - \tilde{\theta}(s_0, s_0)}_{N_1} + \underbrace{\tilde{\theta}(L, L) - \tilde{\theta}(s_0, L)}_{N_2}$$

بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که $\alpha(s_0)$ پایین‌ترین نقطه روی خم باشد (یعنی مختص y آن کوچک‌ترین باشد) و آنگاه، همان طور که در شکل ۳-۴ نشان داده شده است، فرض کنیم $\alpha(s_0) = e_1$ باشد (در آخری ممکن است لازم باشد که جهت خم معکوس شود).



شکل ۳ - ۴

اکنون N_1 زاویه‌ای است که تحت آن بردار موقعیت خم می‌چرخد که از صفر شروع و به π ختم می‌شود. چون خم در نیم صفحه بالایی واقع است، باید داشته باشیم: $N_1 = \pi$. اما N_2 نیز زاویه‌ای است که تحت آن قرینه بردار موقعیت می‌چرخد، پس $N_2 = \pi$. با این فرض‌ها، ملاحظه می‌شود که نمایه چرخش خم برابر ۱ است. در نتیجه، با مجوز تغییر جهت در صورت لزوم، نمایه چرخش همان طور که لازم بود باید ± 1 باشد. □

نتیجه ۳-۷ اگر C یک خم بسته باشد، برای هر نقطه $P \in C$ ، یک نقطه $Q \in C$ وجود دارد که بردار یک مماس بر Q در عکس جهت آن در P است.

اثبات همانند لم ۳-۶ فرض کنیم برای یک تابع C^1 ، $\theta: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ قرار دهیم: $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$. اگر $P = \alpha(s_0)$ نام گذاری می‌کنیم $\theta(s_0) = \theta_0$. چون $\theta(L) - \theta(0)$ مضرب صحیحی از 2π است، بایستی یک $s_1 \in [0, L]$ موجود باشد که $\theta(s_1) = \theta_0 + \pi$ یا $\theta(s_1) = \theta_0 - \pi$. قرار دهید $Q = \alpha(s_1)$. □

یادآوری می‌شود که یکی از راه‌های تشخیص یک تابع محدب $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ این است که نمودار آن در یک طرف هر یک از خطوط مماس آن واقع شود. بنابراین تعریف زیر را داریم.

تعریف. یک خم مسطح بسته منظم α محدب است اگر در هر نقطه در یک طرف خط مماس بر خود قرار گیرد.

گزاره ۳-۸ یک خم بسته ساده منظم C محدب است اگر و فقط اگر بتوان جهتی از خم را اختیار کرد که همه جا $\kappa \geq 0$.

نکته یافتن یک خم غیر ساده بسته که این گزاره برای آن برقرار نیست را به عنوان تمرین

۲ به خواننده واگذار می‌کنیم.

اثبات بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم که جهت خم در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است و $T(0) = (1, 0)$. با استفاده از تابع θ که در لم ۳ - ۶ ساخته شد، شرط $\kappa \geq 0$ معادل با این شرط است که θ یک تابع غیر نزولی با $\theta(L) = 2\pi$ است.

ابتدا فرض کنید θ غیر نزولی و C غیر محدب باشد. در این صورت می‌توانیم یک نقطه $P = \alpha(s_0)$ روی خم و مقادیر s'_1 و s'_2 را چنان بیابیم که $\alpha(s'_1)$ و $\alpha(s'_2)$ در دو طرف خط مماس بر C در P قرار گیرند. آنگاه طبق قضیه مقدار ماکزیمم مقادیر s_1 و s_2 موجودند که $\alpha(s_1)$ دارای بیشترین فاصله «بالای» خط مماس و $\alpha(s_2)$ دارای بیشترین فاصله «زیر» آن است. بردارهای مماس یکه $T(s_0)$ ، $T(s_1)$ و $T(s_2)$ را در نظر بگیرید. چون این بردارها موازی یا پاد موازی^۱ (یعنی موازی با جهت های عکس) هستند، بعضی از زوج‌ها باید بر هم منطبق باشند. با فرض اینکه مقدارهای متناظر s ، s^* و s^{**} با $s^* < s^{**}$ باشند، داریم: $\theta(s^*) = \theta(s^{**})$ (چون θ غیر نزولی است و $\theta(L) = 2\pi$)، مقادیر نمی‌توانند در مضربی از 2π تفاوت داشته باشند، و بنابراین برای هر $s \in [s^*, s^{**}]$ ، $\theta(s) = \theta(s^*)$ ، که مفهوم آن این است که تکه‌ای از C بین $\alpha(s^*)$ و $\alpha(s^{**})$ یک پاره خط موازی با خط مماس بر C در P است که یک تناقض است.

بالعکس فرض کنید C محدب و برای مقدارهای s_1 و s_2 با $s_2 < s_1$ ، $\theta(s_1) = \theta(s_2)$. طبق نتیجه ۳ - ۷، بایستی یک s_3 با شرط $T(s_3) = -T(s_2) = -T(s_1)$ موجود باشد. چون C محدب است، خط مماس در هر دو تا از $\alpha(s_1)$ ، $\alpha(s_2)$ و $\alpha(s_3)$ باید یکسان باشد، مثلاً در $P = \alpha(s^*)$ و $Q = \alpha(s^{**})$. اگر \overline{PQ} به طور کامل در C واقع نشود، $R \in \overline{PQ}$ را با $R \notin C$ اختیار می‌کنیم. چون C محدب است، خط گذرا بر R و عمود بر \overline{PQ} باید C را حداقل در دو نقطه مثل M و N ، با N با فاصله بیشتر از M نسبت به \overline{PQ} ، قطع کند. چون M در داخل مثلث $\triangle NPQ$ قرار دارد، همه سه رأس مثلث هیچ گاه نمی‌توانند در طرف یکسانی از هیچ خط گذرا بر M قرار گیرند. به ویژه، N ، P و Q نمی‌توانند در طرف یکسانی از خط مماس بر C در M واقع شوند. از این رو، باید $\overline{PQ} \subset C$ باشد، پس برای هر $s \in [s_1, s_2]$ ، $\theta(s) = \theta(s_1) = \theta(s_2)$. بنابراین θ غیر نزولی است و اثبات تمام است. \square

تعریف یک نقطه بحرانی κ را یک رأس^۲ برای خم C گویند.

یک خم بسته حداقل باید دارای دو رأس باشد، یعنی نقاط ماکزیمم و مینیمم برای تابع κ . هر نقطه روی یک دایره یک رأس است. این بخش را با گزاره زیر خاتمه می‌دهیم.

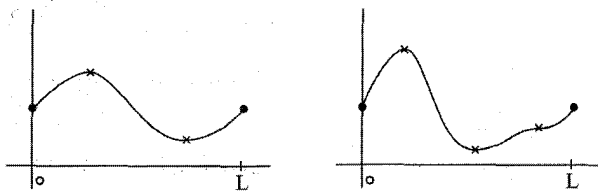
گزاره ۳-۹ (قضیه چهار رأس) یک خم مسطح محدب بسته حداقل چهار رأس دارد.

اثبات فرض کنید که خم C کمتر از چهار رأس داشته باشد. آنچنان که در شکل ۳-۵ ملاحظه می شود، κ باید دو نقطه بحرانی (ماکزیمم و مینیمم) یا سه نقطه بحرانی (ماکزیمم، مینیمم و نقطه عطف) داشته باشد.

با دقت بیشتر، فرض کنید κ از P به Q افزایش می یابد و از Q به P کاهش پیدا می کند. بدون کاستن از کلیت، P را مبدأ فرض کنید و معادله \vec{PQ} را بصورت $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ در نظر بگیرید. دقیقاً وقتی که $\mathbf{A} \cdot \alpha(s) \geq 0$ ، بردار \mathbf{A} را چنان اختیار کنید که $\kappa'(s) \geq 0$. در این صورت $\int_C \kappa'(s)(\mathbf{A} \cdot \alpha(s)) ds > 0$. فرض کنید \vec{A} بردار حاصل از دوران A با زاویه $\pi/2$ باشد. آنگاه با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} - \int_C \kappa'(s)(\mathbf{A} \cdot \alpha(s)) ds &= \int_C \kappa(s)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}(s)) ds \\ &= \int_C \kappa(s)(\vec{A} \cdot \mathbf{N}(s)) ds \\ &= \vec{A} \int_C \kappa(s) \mathbf{N}(s) ds \\ &= \vec{A} \int_C \mathbf{T}(s) ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

از این تناقض درمی یابیم که C باید حداقل چهار نقطه بحرانی داشته باشد. □



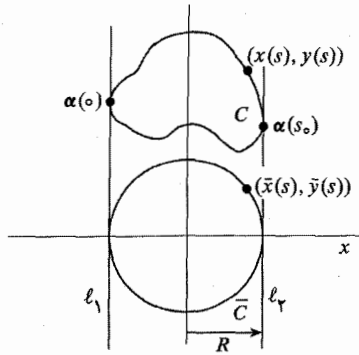
شکل ۳-۵

۳-۳ نامساوی متساوی المحيط یکی از سوالات کلاسیک در ریاضیات این است که: یک خم بسته مفروض به طول L ، چه شکلی را با بیشترین مساحت احاطه می کند؟ کمی آزمایش خواننده را به قضیه زیر راهنمایی می کند.

قضیه ۳-۱۰ (نامساوی متساوی المحيط) اگر C یک خم مسطح بسته ساده، دارای طول L باشد و مساحت محاط شده توسط آن برابر A باشد، آنگاه

$$L^2 \geq 4\pi A$$

و تساوی برقرار است اگر فقط اگر C یک دایره باشد.



شکل ۳-۶

اثبات تعدادی اثبات متفاوت وجود دارد، اما اثباتی که در اینجا ارائه می‌شود (و منسوب به اشمیت^۱ در ۱۹۳۹ است)، بر پایه قضیه گرین، قضیه ۲-۶ در ضمیمه است و جای تعجب نیست که شدیداً به نامساوی میانگین‌های حسابی و هندسی و نامساوی کشی-شوارتز تکیه دارد (تمرین ۲-۱-۱-۱ A-۱ ملاحظه فرمایید). مانند شکل ۳-۶ خطوط موازی l_1 و l_2 را مماس و محاط کننده C اختیار می‌کنیم. دایره \bar{C} به شعاع R را با همین خطوط مماس رسم می‌کنیم، مبدأ را مرکز آن و l_i ها را موازی محور y ها قرار می‌دهیم. حال C را برای $s \in [0, L]$ توسط $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ با طول قوس پارامتری می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\alpha(s_0) \in l_2$ و $\alpha(0) \in l_1$ آنگاه نگاشت $\bar{\alpha}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = \begin{cases} (x(s), -\sqrt{R^2 - x(s)^2}), & 0 \leq s \leq s_0 \\ (x(s), \sqrt{R^2 - x(s)^2}), & s_0 \leq s \leq L \end{cases}$$

(نیازی نیست $\bar{\alpha}$ یک پارامتری دایره \bar{C} باشد، چون ممکن است قسمت‌های معینی را چند بار ببوشاند، ولی مشکلی ایجاد نمی‌کند). با قرار دادن A برای نمایش مساحت احاطه شده توسط C و $\bar{A} = \pi R^2$ مساحت احاطه شده توسط \bar{C} (طبق تمرین ۵-۲-۱ A) داریم:

$$A = \int_0^L x(s)y'(s) ds$$

$$\bar{A} = \pi R^2 = - \int_0^L \bar{y}(s)\bar{x}'(s) ds = - \int_0^L \bar{y}(s)x'(s) ds$$

با جمع کردن این معادلات و به کارگیری نامساوی کشی-شوارتز، خواهیم داشت:

$$A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)) ds$$

$$= \int_0^L (x(s), \bar{y}(s)) \cdot (y'(s), -x'(s)) ds$$

$$(*) \leq \int_0^L \|(x(s), \bar{y}(s))\| \|(y'(s), -x'(s))\| ds$$

$$= RL$$

تساوی آخر برقرار است چون α پارامتری شده با طول قوس است، از آنجا

$$\|(y'(s), -x'(s))\| = \|(x'(s), y'(s))\| = 1$$

حال نامساوی میانگین‌های حسابی و هندسی برای هر دو عدد مثبت a و b عبارتست از:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq \frac{A + \pi R^2}{2} \leq \frac{RL}{2}$$

$$\text{پس } 4\pi A \leq L^2$$

حال فرض کنیم در اینجا تساوی برقرار است. آنگاه باید $A = \pi R^2$ و $L = 2\pi R$. این نتیجه می‌دهد که خم C دارای پهنای مساوی در همه جهت‌ها است (چون اکنون L تعیین کننده R است). اما تساوی باید در (*) هم برقرار باشد، پس همه جا باید بردارهای $\bar{\alpha}(s) = (x(s), \bar{y}(s))$ و $(y'(s), -x'(s))$ موازی باشند. چون اولین بردار دارای طول L و دومی دارای طول ۱ است، نتیجه می‌گیریم که

$$(x(s), \bar{y}(s)) = R(y'(s), -x'(s))$$

و از این رو $x(s) = Ry'(s)$. طبق یادآوری در آغاز این پاراگراف، همین نتیجه در صورت دوران محورها به اندازه $\pi/2$ برقرار است. فرض کنید $y = y_0$ خط نیمه راه، بین خط‌های افقی محاط کننده l_i باشد. حال با جایگذاری $y_0 - y$ برای x و $-x$ برای y نیز داریم:

$$y(s) - y_0 = -Rx'(s)$$

بنابراین $R^2(x'(s) + y'(s))^2 = R^2(x(s)^2 + (y(s) - y_0)^2)$ و در واقع یک دایره به شعاع R است. □

تمرین ۱-۳

۱) ثابت کنید کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه روی کره، کمانی از دایره عظیمه واصل آنها است. (راهنمایی: بدون کاستن از کلیت، فرض کنید یکی از نقاط $(0, 0, 1)$ و نقطه دیگر $(\sin u_0, 0, \cos u_0)$ باشد. با فرض $\alpha(t) = (\sin u(t) \cos v(t), \sin u(t) \sin v(t), \cos u(t))$ که $a \leq t \leq b$ به عنوان یک مسیر دلخواه با $u(a) = 0, v(a) = 0, u(b) = u_0, v(b) = 0$ طول قوس α را محاسبه کنید و نشان دهید هنگامی که برای هر t ، $v(t) = 0$ کوتاه‌ترین است.)

۲) ثابت کنید اگر P و Q نقاطی روی کره واحد باشند، کوتاه‌ترین مسیر بین آنها دارای طول $\arccos(P \cdot Q)$ است.

۳) یک خم مسطح بسته C با $\kappa > 0$ مثال بزنید که محدب نباشد.

(۳) خم‌های مسطح بسته با نمایه چرخش به ترتیب $0, 2, -2$ و 3 رسم کنید.

(۴*) فرض کنید C یک خم بسته ساده با $0 < \kappa \leq c$ باشد. ثابت کنید طول (C) بزرگ‌تر یا مساوی $2\pi/c$ است.

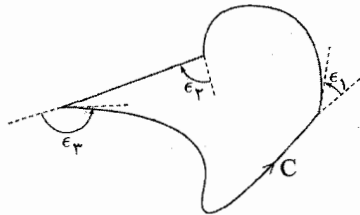
(۵) اثبات جایگزینی برای قسمت آخر قضیه ۳-۱ با فرض جانشینی تابع زیر ارائه دهید.

$$f(s) = \|\tilde{\mathbf{T}}(s) - \mathbf{T}^*(s)\|^2 + \|\tilde{\mathbf{N}}(s) - \mathbf{N}^*(s)\|^2 + \|\tilde{\mathbf{B}}(s) - \mathbf{B}^*(s)\|^2$$

(۶) قضیه ۳-۵ را تعمیم دهید تا ثابت کنید که اگر C یک خم مسطح تکه‌ای هموار با

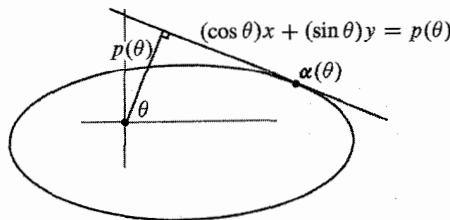
زاویه‌های خارجی ϵ_j برای $j = 1, \dots, s$ باشد، آنگاه $\int_C \kappa ds + \sum_{j=1}^s \epsilon_j = \pm 2\pi$ (همچنان

که در شکل ۳-۷ نشان داده شده است، زاویه خارجی ϵ_j در $\alpha(s_j)$ به صورت زاویه بین $\alpha'_-(s_j) = \lim_{s \rightarrow s_j^-} \alpha'(s)$ و $\alpha'_+(s_j) = \lim_{s \rightarrow s_j^+} \alpha'(s)$ با شرط $|\epsilon_j| \leq \pi$ تعریف می‌شود).



شکل ۳-۷

(۷) تمرین ۱۵-۱-۲ را ببینید) ثابت کنید اگر C یک خم مسطح (محدب) بسته ساده از پهنای ثابت μ باشد، آنگاه $\mu = \pi(C)$.



شکل ۳-۸

۸) یک خم مسطح محدب را می توان توسط خطوط مماس $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = p(\theta)$ مشخص کرد که به آنها خطوط مماس $p(\theta)$ تابع را تابع محمل گویند (در اینجا θ ، مختص قطبی است).

a. ثابت کنید که خط داده شده در فوق بر خم در نقطه زیر مماس است.

$$\alpha(\theta) = (p(\theta) \cos \theta - p'(\theta) \sin \theta, p(\theta) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta)$$

b. ثابت کنید که انحنای خم در $\alpha(\theta)$ توسط $L = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta$ به دست می آید.

c. ثابت کنید طول α از رابطه $L = \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 d\theta$ به دست می آید.

d. ثابت کنید مساحت احاطه شده توسط α با رابطه $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p(\theta))^2 - (p'(\theta))^2 d\theta$ به دست می آید.

e. با استفاده از جواب قسمت c، نتیجه تمرین ۷ را دوباره ثابت کنید.

۹) فرض کنید C یک خم فضایی بسته C^2 باشد که مثلاً توسط $\alpha: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ پارامتری با طول قوس شده است. یک میدان برداری قائم یکه X روی C یک تابع بردار مقدار C^1 با $X(0) = X(L)$ و نیز برای هر s ، $X(s) \cdot T(s) = 0$ و $\|X(s)\| = 1$ است. پیش X^2 را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$tw(C, X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^L X'(s) \cdot (T(s) \times X(s)) ds$$

a. نشان دهید اگر $X(s)$ و $X'(s)$ ، دو میدان برداری قائم روی C باشند، آنگاه $tw(C, X)$ و $tw(C, X')$ در یک عدد صحیح با هم تفاوت دارند. قسمت کسری $tw(C, X)$ (یعنی چرخش به پیمانه یک) را چرخش کلی C نامند.

$$(X(s) = \cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s))$$

b. ثابت کنید چرخش کلی C مساوی قسمت کسری $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \tau ds$ است.

c. ثابت کنید اگر یک خم بسته روی یک کره واقع شود، آنگاه چرخش کلی آن برابر صفر است. (راهنمایی: یک داوطلب صریح برای X انتخاب کنید.)

نکته شرر^۳ در ۱۹۴۰ ثابت کرد که اگر چرخش کلی از هر خم بسته روی یک رویه صفر باشد، آنگاه رویه باید یک (زیر مجموعه) از یک صفحه یا کره باشد.

۱۰) (تمرین ۲۲-۲-۱ را ببینید) تحت چه شرایطی یک خم فضایی بسته دارای یک خم موازی است که در ضمن بسته نیز است؟ (راهنمایی: تمرین ۸ مناسب خواهد بود.)

(۱۱) (کنج بیشاپ^۱) فرض کنید α یک خم پارامتری با طول قوس C^2 باشد. فرض کنید دارای میدان‌های برداری C^2 ، N_1 و $N_2 = T \times N_1$ در طول α هستیم به قسمی که

$$T \cdot N_1 = T \cdot N_2 = N_1 \cdot N_2 = 0$$

یعنی باید T, N_1, N_2 یک کنج متعامد راست‌گرد باشد که با حرکت در امتداد α بطور هموار تغییر می‌کند (تا اینجا اگر خم C^3 با $\kappa \neq 0$ بود، کنج فرنه بخوبی کار می‌کرد). اما اکنون می‌خواهیم شرط اضافه $N_1 \cdot N_2 = 0$ را تحمیل کنیم. میدان برداری قائم یکه N_1 را موازی در امتداد α گوئیم. یعنی این که تنها تغییر N_1 در جهت T است. در این رویداد T, N_1, N_2 ، یک کنج بیشاپ برای α نامیده می‌شود. کنج بیشاپ می‌تواند تعریف شود حتی وقتی کنج فرنه قابل تعریف نیست (یعنی وقتی $\kappa = 0$).

a. نشان دهید توابع κ_1 و κ_2 وجود دارند به قسمی که،

$$T' = \kappa_1 N_1 + \kappa_2 N_2$$

$$N_1' = -\kappa_1 T$$

$$N_2' = -\kappa_2 T$$

b. نشان دهید $\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$.

c. نشان دهید اگر $\kappa \neq 0$ باشد، آنگاه می‌توانیم فرض کنیم

$$N_1 = (\cos \theta)N + (\sin \theta)B$$

در حالی که $\theta' = -\tau$. بررسی کنید که $\kappa_1 = \kappa \cos \theta$ و $\kappa_2 = -\kappa \sin \theta$.

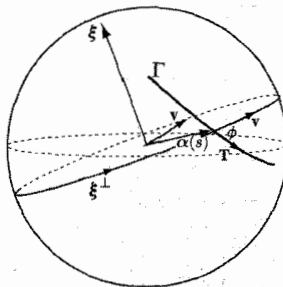
d. نشان دهید α روی سطح یک کره قرار دارد اگر و فقط اگر اعداد ثابت λ و μ موجود

باشند به قسمی که $\mu \kappa_2 + 1 = 0$. اگر α روی کره به شعاع R باشد، آنگاه $\lambda^2 + \mu^2 = R^2$

(رجوع کنید به تمرین ۱۸-۲-۱).

e. چه شرطی لازم است که کنج بیشاپ به طور کلی روی یک خم بسته تعریف شود؟ (تمرین

۹ را ببینید.) چگونه این پرسش به تمرین ۲-۲-۱ مربوط می‌شود؟



شکل ۳-۹

(۱۲) گزاره ۳-۲ را به طریق زیر ثابت کنید. فرض کنید $\alpha: [0, L] \rightarrow \Sigma$ پارامتری با طول قوس Γ باشد و $\mathbf{F}: [0, L] \times [0, 2\pi) \rightarrow \Sigma$ را با ضابطه $\mathbf{F}(s, \phi) = \xi$ تعریف می‌کنیم، در حالی که ξ^\perp دایره عظیمه‌ای است که زاویه ϕ با Γ در $\alpha(s)$ می‌سازد. بررسی کنید که \mathbf{F} مقدار ξ را دقیقاً $\#(\Gamma \xi^\perp)$ بار می‌گیرد، پس \mathbf{F} یک «پارامتری چندگانه» از Σ است که رابطه زیر را به ما می‌دهد.

$$\int_{S^2} \#(\Gamma \xi^\perp) d\xi = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \phi} \right\| d\phi ds$$

محاسبه کنید که

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \phi} \right\| = |\sin \phi|$$

(راهنمایی: همچنان که در شکل ۳-۹ تصویر شده است، نشان دهید

$$\mathbf{v}(s, \phi) = \cos \phi \mathbf{T}(s) + \sin \phi (\alpha(s) \times \mathbf{T}(s))$$

بردار مماس به دایره عظیمه ξ^\perp است و نتیجه بگیرید که $\mathbf{F}(s, \phi) = \alpha(s) \times \mathbf{v}(s, \phi)$. نشان دهید که $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \phi}$ و $\alpha \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}$ هر دو مضرب‌هایی از \mathbf{v} هستند.)

(۱۳) جزئیات اثبات از مراحل مشخص شده در اثبات قضیه ۳-۵ را به صورت زیر کامل کنید. یک نقطه داخلی $s_0 \in \Delta$ را برگزینید.

a. مقدار $\tilde{\theta}(s_0)$ را چنان اختیار کنید که $(\mathbf{h}(s_0) = \cos \tilde{\theta}(s_0), \sin \tilde{\theta}(s_0))$ برای هر $s \in \Delta$ مراحل اثبات لم ۳-۶ را برای تعیین $\tilde{\theta}$ به طور منحصر به فرد، به عنوان تابعی پیوسته روی هر نیم خط $\overline{s_0 s}$ استفاده کنید.

b. نقطه $s_1 \in \Delta$ را انتخاب کنید. ابتدا (با استفاده از این که یک تابع پیوسته روی یک فاصله $\overline{s_0 s_1}$ به طور یکنواخت پیوسته است،) نشان دهید که یک $\delta > 0$ به قسمی وجود دارد که هر گاه $\delta < \|s - s'\|$ و $s, s' \in \overline{s_0 s_1}$ ، آنگاه زاویه بین بردارهای $\mathbf{h}(s)$ و $\mathbf{h}(s')$ کمتر از π است.

c. برای یک $\epsilon > 0$ مفروض، نشان دهید که یک همسایگی U از s_1 وجود دارد به قسمی که هرگاه $s \in U$ داریم $\|s - s_1\| < \delta$ و $\|s - s_1\| < \delta$ و $\|\tilde{\theta}(s) - \tilde{\theta}(s_1)\| = 2\pi n(s) + \epsilon'$ ، برای عدد صحیح $n(s)$ و $|\epsilon'| < \epsilon$.

d. بالاخره با در نظر گرفتن $(\tilde{\theta}(s_0 + u(s - s_0)) - \tilde{\theta}(s_0 + u(s_1 - s_0)))$ نشان دهید $n = 0$. نشان دهید از اینکه f پیوسته است و $f(0) = 0$ نتیجه می‌شود $|f(1)| < \pi$ که این خود نتیجه می‌دهد $n = 0$.

فصل ۲

رویه‌ها: نظریه موضعی

۱-۲ رویه‌های پارامتری شده و اولین فرم اساسی

فرض کنیم U یک مجموعه باز در \mathbb{R}^2 باشد. یک تابع $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (برای ما به طور معمول $m = 1, 2, 3$) را C^1 نامند، اگر f و مشتقات جزئی آن $\frac{\partial f}{\partial u}$ و $\frac{\partial f}{\partial v}$ همگی پیوسته باشند. به طور معمول از (u, v) به عنوان مختصات در فضای پارامتر خود استفاده می‌کنیم و (x, y, z) را برای مختصات در \mathbb{R}^3 بکار می‌بریم. به طور مشابه برای هر $k, k \geq 2$ را C^k گوئیم، اگر همه مشتق‌های جزئی آن تا مرتبه k موجود و پیوسته باشند. تابع f را هموار نامند اگر f بردای هر عدد صحیح k, C^k باشد. از این به بعد برای $k \geq 2$ ، فرض می‌کنیم همه توابع ما C^k باشند. یکی از نتایج تعیین کننده در هندسه دیفرانسیل این است که اگر $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ باشد، آنگاه $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ (و به طور مشابه برای مشتق‌های مراتب بالاتر).
نماد گذاری: به طریق زیر اغلب از زیرنویس برای نمایش مشتق‌های جزئی استفاده خواهیم کرد،

$$\begin{array}{lll} \mathbf{f}_u & \longleftrightarrow & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \\ \mathbf{f}_v & \longleftrightarrow & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \\ \mathbf{f}_{uu} & \longleftrightarrow & \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u^2} \\ \mathbf{f}_{uv} = (\mathbf{f}_u)_v & \longleftrightarrow & \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v \partial u} \end{array}$$

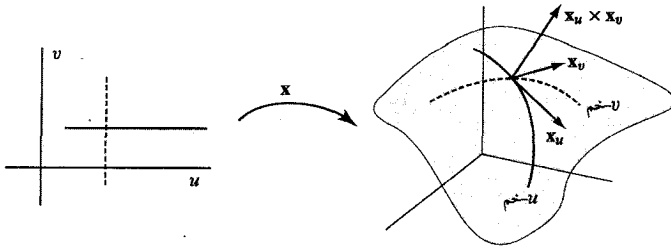
تعریف برای یک زیر مجموعه باز U در \mathbb{R}^2 ، یک پارامتری منظم برای یک زیر مجموعه $M \subset \mathbb{R}^3$ ، یک تابع یک به یک (C^2) ،

$$x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{به قسمی است که} \quad x_u \times x_v \neq 0.$$

۱- smooth

۲- به علاوه، به خاطر دلایل تکنیکی که در این مبحث با آنها سروکار نخواهیم داشت، باید فرض کنیم که تابع وارون $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$ پیوسته است.

یک زیر مجموعه همبند $M \subset \mathbb{R}^3$ یک رویه نامیده می شود اگر هر نقطه از آن دارای یک همسایگی باشد که به طور منظم پارامتری شده اند.

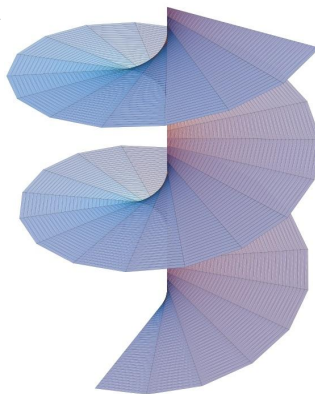


شکل ۱ - ۱

می توانیم خم هایی روی M ، حاصل از ثابت نگه داشتن $v = v_0$ و تغییر u ، با نام u -خم در نظر بگیریم و نیز خم هایی با ثابت نگه داشتن $u = u_0$ و تغییر v ، با نام v -خم به دست آوریم (شکل ۱-۱). ملاحظه می کنیم که در نقطه $P = x(u_0, v_0)$ ، $x_u(u_0, v_0)$ بر u -خم و $x_v(u_0, v_0)$ بر v -خم مماس است. نیازمند این مطلب هستیم که این بردارها صفحه ای را پدید آورند که $x_u \times x_v$ بردار قائم بر آن باشد.

مثال ۱ تعدادی از مثال های اساسی رویه های پارامتری شده را ارائه می دهیم. توجه شود که پارامتری های ما لزوماً روی یک مجموعه باز از مقادیر تغییر نمی کنند.

a. نمودار یک تابع $f : U \rightarrow R$ با $z = f(x, y)$ توسط $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$ پارامتری می شود. توجه شود که $x_u \times x_v = (-f_u, -f_v, 1) \neq 0$ پس این همیشه یک پارامتری منظم است.



شکل ۱ - ۲

b. حلزونی آنچنان که در شکل (۱ - ۲) نشان داده شده است، رویه ای است که از رسم نیم خط های افقی از محور ماریچ $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, bt)$ به نقاط روی ماریچ ایجاد

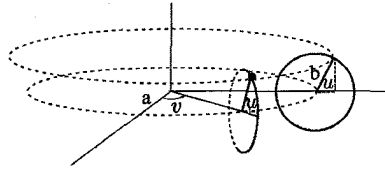
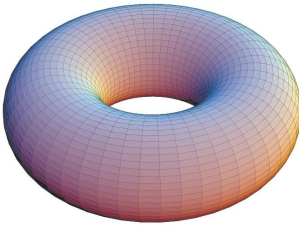
می‌شود.

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad u \geq 0, v \in \mathbb{R}$$

قابل توجه است که $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (b \sin v, -b \cos v, u) \neq 0$. در اینجا u -خم‌ها نیم‌خط‌ها و v -خم‌ها، مارپیچ‌ها هستند. c . چنبره (رویه یک دونات) همانند شکل (۱-۳) با چرخش یک دایره با شعاع b حول دایره‌ای از شعاع a با $a > b$ به دست می‌آید. یک پارامتری منظم از این رویه به شکل زیر است.

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a+b \cos u) \cos v, (a+b \cos u) \sin v, b \sin u) \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi$$

بنابراین $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = -b(a + b \cos u)(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ ، که هیچ‌گاه صفر نیست. ∇ .



شکل ۱-۳

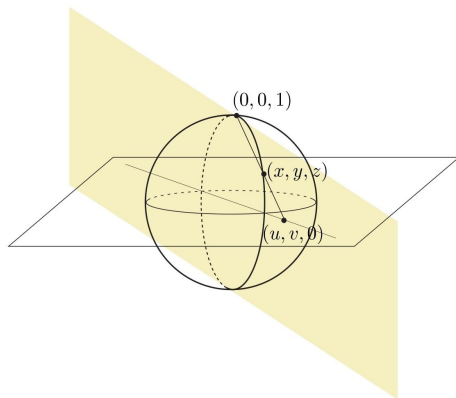
d. پارامتری استاندارد کره واحد Σ توسط مختصات کروی $(u, v) \leftrightarrow (\theta, \pi)$ ارائه می‌شود:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

چون $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) = (\sin u) \mathbf{x}(u, v)$ در چنین حالت‌های $\theta = 0, \pi$ منظم است که به هر حال آنها را مستثنی کرده‌ایم، چون در چنین نقاطی \mathbf{x} یک به یک نیست. در این پارامتری u -خم‌ها خطوط طول جغرافیایی^۱ نامیده می‌شوند و v -خم‌ها خطوط عرض جغرافیایی^۲ روی کره هستند.

e. دیگر پارامتری جالب برای کره توسط تصویر کنجنگاری^۳ (تمرین ۱-۱-۱) است. کره واحد منهای قطب شمال $(0, 0, 1)$ را توسط صفحه xy پارامتری می‌کنیم. همچنان که در شکل ۱-۴ نمایش داده شده است، به هر (u, v) ، نقطه‌ای $(\neq (0, 0, 1))$ را متناظر می‌کنیم که خط گذرا بر $(0, 0, 1)$ و $(u, v, 0)$ کره واحد را قطع می‌کند. استنتاج فرمول زیر را در تمرین ۱ به خواننده واگذار می‌کنیم.

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \quad \nabla$$



شکل ۱ - ۴

برای آخرین مثال‌های خود، دو دسته کلی از رویه‌ها ارائه می‌کنیم که در کار ما ظاهر خواهند شد.

مثال ۲ فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ یک فاصله و برای $u \in I$ $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$ یک خم مسطح پارامتری شده منظم با $f > 0$ باشد. رویهٔ دواری که از دوران α حول محور z -ها بدست می‌آید، به صورت زیر پارامتری می‌شود،

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad u \in I, \quad 0 < v < 2\pi$$

با توجه به این که $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = f(u)(-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u))$ بنابراین یک پارامتری منظم است. در اینجا u -خم‌ها را اغلب خم‌های مقطع عرضی^۱ یا نصف النهارها^۲ گویند، که در واقع کپی‌های α هستند که تحت زاویهٔ v حول محور z -ها می‌چرخند. همچنین v -خم‌ها را که دایره هستند، موازی‌ها یا مدارها^۳ نامند. ∇ .

مثال ۳ فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ یک فاصله، $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک خم پارامتری منظم و $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک تابع هموار دلخواه باشد که برای هر $u \in I$ با $\beta(u) \neq 0$ یک رویهٔ پارامتری شده به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

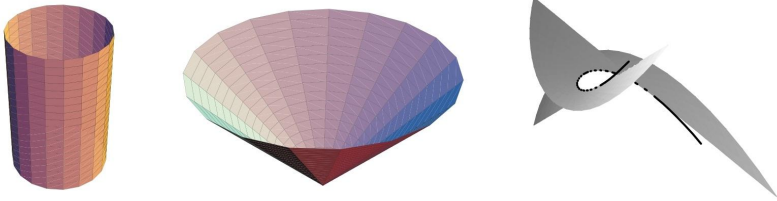
$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u) \quad u \in I, \quad v \in \mathbb{R}$$

این رویه را یک رویهٔ خط کشی شده با مولدها یا خط کشی‌ها^۴ $\beta(u)$ و هادی^۵ α گویند. به راحتی می‌توان بررسی کرد $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (\alpha'(u) + v\beta'(u)) \times \beta(u)$ که امکان دارد همه جا غیر صفر باشد یا این چنین نباشد.

به عنوان مثال‌های خاص حلزونی (شکل ۱-۲) و مثال زیر (شکل ۱-۵) را داریم. (۱) استوانه: در اینجا β یک بردار ثابت است و رویه منظم است تا زمانی که α یک به یک با $\beta \neq \alpha'$ باشد.

(۲) مخروط: در اینجا یک نقطه (مثلاً مبدأ) را به عنوان رأس ثابت فرض می‌کنیم و α را یک خم پارامتری منظم با شرط $\alpha \times \alpha' \neq 0$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\beta = \alpha$. به وضوح منظم بودن رویه در رأس (وقتی $v = 1$) نقض می‌شود، اما در نقاط دیگر $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (v-1)\alpha(u) \times \alpha'(u)$ ، غیر صفر است (توجه شود که روش دیگر برای پارامتری این رویه با فرض $\alpha^* = 0$ و $\beta^* = \alpha$ خواهد بود.

(۳) توسعه پذیر مماس: فرض کنیم α یک خم پارامتری منظم با انحنای غیر صفر باشد و $\beta = \alpha'$ ؛ یعنی مولدها، خطوط مماس بر خم α باشند. آنگاه $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = -v\alpha'(u) \times \alpha''(u)$ در نتیجه (حداقل به طور موضعی) به جز در هادی یک رویه پارامتری منظم داریم. ∇ .



در مبحث مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال، آموخته‌ایم که برای یک تابع دیفرانسیل پذیر مفروض f ، بهترین تقریب خطی به نمودار $y = f(x)$ «در نزدیکی» $x = a$ ، توسط خط مماس $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ بیان می‌شود و این مطلب به طور مشابه در ابعاد بالاتر برقرار است. در حالت یک رویه پارامتری منظم، موجه بنظر می‌رسد که صفحه مماس در $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ باید شامل بردار مماس به u -خم $\alpha_1(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$ در $u = u_0$ و بردار مماس به v -خم $\alpha_2(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$ در $v = v_0$ باشد. یعنی صفحه مماس باید شامل بردارهای \mathbf{x}_u و \mathbf{x}_v باشد که در (u_0, v_0) محاسبه شده‌اند. اکنون چون طبق فرض $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ پس باید بردارهای \mathbf{x}_u و \mathbf{x}_v مستقل خطی باشند و بنابراین یک صفحه را تولید می‌کنند. حال این مطلب را رسمی می‌سازیم.

تعریف فرض کنیم M یک رویه پارامتری شده منظم و $P \in M$ باشد. آنگاه یک پارامتری منظم $\mathbf{x}: U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ با $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ اختیار می‌کنیم. صفحه مماس بر M در P را زیر فضای TPM از \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم که توسط \mathbf{x}_u و \mathbf{x}_v (محاسبه شده در (u_0, v_0)) تولید می‌شود.

نکته خواننده هوشیار ممکن است سؤال کند که چه اتفاقی رخ می‌دهد اگر دو مورد متفاوت از چنین پارامتری‌های موضعی برای M در نزدیکی P اختیار شود؟ آیا هر دوی آنها یک صفحه مماس TPM را معرفی می‌کنند؟ چنین پرسش‌هایی در هندسه دیفرانسیل متداول

است و چیزی نیست که در این مبحث مقدماتی قصد موشکافی روی آن باشد. به هر حال، برای اینکه خواننده چگونگی بحث روی این موارد را لمس کند، می‌تواند روی تمرین ۱۱ کار کند.

دو بردار یکه قائم بر صفحه مماس TPM وجود دارد. برای رویه پارامتری مفروض x می‌دانیم $x_u \times x_v$ یک بردار قائم غیر صفر بر صفحه مماس تولید شده توسط x_u و x_v است، بنابراین بردار یکه متناظر آن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

این بردار قائم یکه رویه پارامتری نامیده می‌شود.

مثال ۴ از هندسه پایه و محاسبات برداری می‌دانیم که بردار قائم یکه بر کره به مرکز مبدأ، بایستی بردار موقعیت خودش باشد. در واقع این مطلبی است که در مثال ۱ (d) کشف کردیم. ∇

مثال ۵ حلزونی مثال ۱ (b) را در نظر بگیرید. در این صورت همچنان که دیدیم،

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}}(b \sin v, -b \cos v, u) \quad \text{و} \quad \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (b \sin v, -b \cos v, u)$$

همچنان که در امتداد یک مولد $v = v_0$ حرکت می‌کنیم، در $u = 0$ بردار قائم به طور افقی شروع می‌شود (در جایی که رویه عمودی است) و در صفحه قائم بر مولد می‌چرخد، در حالی که در حین حرکت به سمت خارج این مولد، بیشتر و بیشتر قائم می‌شود. ∇

در فصل ۱ دیدیم که هندسه یک خم فضایی با محاسبات (حداقل در قاعده کلی)، بر حسب یک پارامتری با طول قوس، بهتر قابل درک است. پس به طور مشابه بهتر خواهد بود، اگر یک پارامتری $x(u, v)$ از یک رویه بیابیم به قسمی که در هر نقطه x_u و x_v تشکیل یک پایه متعامد یکه بدهند. بعداً خواهیم دید که این مطلب بندرت رخ می‌دهد. اما این مطلب، معرفی مفهومی را طبیعی می‌سازد که بطور کلاسیک اولین فرم اساسی نامیده می‌شود و برای $U, V \in TPM$ به صورت $I_p(U, V) = U \cdot V$ تعریف می‌شود. با به کارگیری یک پارامتری، پایه طبیعی $\{x_u, x_v\}$ را داریم و بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$E = I_p(x_u, x_u) = x_u \cdot x_u$$

$$F = I_p(x_u, x_v) = x_u \cdot x_v = x_v \cdot x_u = I_p(x_v, x_u)$$

$$G = I_p(x_v, x_v) = x_v \cdot x_v$$

و به طور غالب، مناسب است که این مقادیر را به عنوان درایه‌های یک ماتریس (متقارن) قرار دهیم:

$$I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

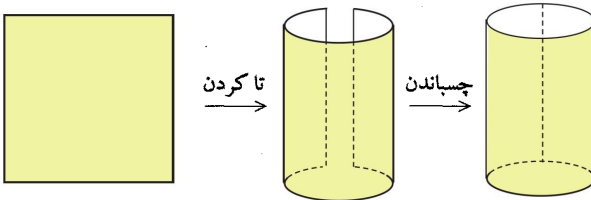
آنگاه برای دو بردار مماس مفروض $U = (ax_u + bx_v)$ و $V = (cx_u + dx_v)$ در $T_P M$ داریم:

$$U \cdot V = I_P(U, V) = (ax_u + bx_v) \cdot (cx_u + dx_v) = E(ac) + F(ad + bc) + G(bd)$$

$$\|U\|^2 = I_P(U, U) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2, \text{ بخصوص,}$$

فرض کنید M و M^* رویه باشند. این دورویه را به طور موضعی ایزومترآ گویند، اگر برای هر $P \in M$ یک پارامتری منظم $x: U \rightarrow M$ با $x(u_0, v_0) = P$ و یک پارامتری منظم $x^*: U \rightarrow M^*$ (با استفاده از همان دامنه U) با این خاصیت موجود باشد که $I_P = I_{P^*}$ ، که در اینجا برای یک $(u, v) \in U$ ، $(P^* = x^*(u, v))$. یعنی تابع $f = x^* \circ x: x(U) \rightarrow x^*(U)$ یک تناظر یک به یک است که اولین فرم اساسی را حفظ می‌کند و بنابراین حافظ فاصله است (تمرین ۳ را ببینید).

مثال ۶ یک قسمت از صفحه (مثلاً یک تکه از کاغذ) توسط $x(u, v) = (u, v, 0)$ و قسمتی از استوانه را توسط $x^*(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ پارامتری کنید. در این صورت به راحتی می‌توان محاسبه کرد که $E = E^* = 1$ ، $F = F^* = 0$ و $G = G^* = 1$ ، پس این رویه‌ها که در شکل ۶-۱ تصویر شده‌اند، به طور موضعی ایزومتر هستند.



شکل ۱-۶

از طرف دیگر، اگر u را از 0 تا 2π تغییر دهیم، مستطیل و استوانه بطور سرتاسری ایزومتر نیستند، چون نقاط دور از هم در مستطیل می‌توانند در استوانه به هم نزدیک (یا برهم منطبق) شوند. ∇

اگر $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ یک خم روی رویه پارامتری M با $\alpha(t_0) = x(u_0, v_0) = P$ باشد، آنگاه یک نتیجه مستقیم از قاعده زنجیری (قضیه ۲-۲ در ضمیمه) این است که،

$$\alpha'(t_0) = u'(t_0)x_u(u_0, v_0) + v'(t_0)x_v(u_0, v_0)$$

(رسم بر این است که به سادگی بنویسیم x_u ، یعنی نقطه (u_0, v_0) که در آن محاسبات انجام می شود را مفروض در نظر می گیریم). به عبارتی، اگر برگشت بردار مماس $(u'(t_0), v'(t_0))$ در «فضای پارامتر» $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ باشد، آنگاه بردار مماس به α در P ، ترکیب خطی متناظر $ax_u + bx_v$ است. به بیانی تفنی، این صرفاً یک نتیجه از خطی بودن مشتق x است. یک پارامتری $x(u, v)$ را همدیس^۱ گویند، هرگاه برای هر $P \in M$ ، زوایای محاسبه شده در صفحه uv با زوایای متناظر آنها در TPM مساوی باشد. بررسی این مطلب را در تمرین ۵ به خواننده واگذار می کنیم که همدیس بودن معادل با شرایط $E = G$ و $F = 0$ است.

به دلیل این که،

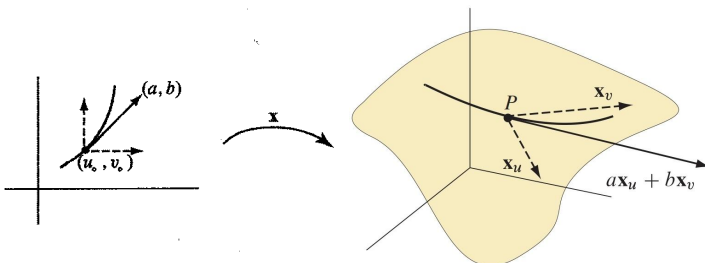
$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u \cdot x_u & x_u \cdot x_v \\ x_v \cdot x_u & x_v \cdot x_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ x_u & x_v \\ | & | \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} | & | \\ x_u & x_v \\ | & | \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \det \left(\begin{bmatrix} x_u \cdot x_u & x_u \cdot x_v \\ x_v \cdot x_u & x_v \cdot x_v \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} x_u \cdot x_u & x_u \cdot x_v & 0 \\ x_v \cdot x_u & x_v \cdot x_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} | & | & | \\ x_u & x_v & \mathbf{n} \\ | & | & | \end{bmatrix} \right) = \left(\det \begin{bmatrix} | & | & | \\ x_u & x_v & \mathbf{n} \\ | & | & | \end{bmatrix} \right)^2 \end{aligned}$$

که این مقدار مربع حجم متوازی السطوحی است که با x_u و x_v و \mathbf{n} ایجاد می شود. چون \mathbf{n} یک بردار یک عمود به صفحه تولید شده توسط x_u و x_v است، این مقدار می تواند مربع مساحت متوازی الاضلاعی باشد که توسط x_u و x_v پدید می آید. یعنی،

$$EG - F^2 = \|x_u \times x_v\|^2 \neq 0$$



شکل ۱-۷

به خواننده یادآوری می‌کنیم که مساحت رویه از یک رویه پارامتری $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ به وسیله انتگرال مکرر زیر به دست می‌آید:

$$\int \int_R \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du dv = \int \int_R \sqrt{EG - F^2} du dv = \int \int_R \sqrt{\det(\mathbf{I})} du dv$$

تمرین ۱-۲

(۱) فرمول داده شده در مثال (e) برای پارامتری کره واحد را به دست آورید.

(۲) برای رویه های پارامتری زیر \mathbf{I} (یعنی E, F, G) را به دست آورید.

a. کره از شعاع a : $\mathbf{x}(u, v) = a(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$

b. چنبره (با $0 < b < a$): $\mathbf{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$

c. حلزونی: $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$

d. کاتوئید: $\mathbf{x}(u, v) = a(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$

(۳) فرض کنید برای $a \leq t \leq b$ $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ یک خم پارامتری روی یک رویه M باشد. نشان دهید که طول α با نماد $l(\alpha)$ به صورت زیر است.

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\mathbf{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2} dt$$

نتیجه بگیرید که اگر $\alpha \subset M$ و $\alpha^* \subset M^*$ مسیرهای متناظری روی رویه های ایزومتر موضعی باشند، آنگاه $\text{طول}(\alpha^*) = \text{طول}(\alpha)$.

(۴) نشان دهید که اگر همه خطوط قائم بر یک رویه از یک نقطه ثابت بگذرند، آنگاه رویه (قسمتی از) یک کره است (منظور از خط قائم به M در P ، خط گذرا بر P با بردار هادی قائم یکه بر P است).

(۵) بررسی کنید که پارامتری $\mathbf{x}(u, v)$ همدیس است اگر و فقط اگر $E = G$ و $F = 0$ (راهنمایی: برای \Rightarrow ، دوزوج مناسب از جهت های متعامد را اختیار کنید).

(۶) بررسی کنید که یک پارامتری حافظ مساحت و همدیس است اگر و فقط اگر یک ایزومتری موضعی باشد.

(۷) بررسی کنید که پارامتری کره واحد توسط تصویر کنج‌نگاری (مثال (e) ۱) همدیس است.

(۸) (تصویر استوانه‌ای لامبرت^۱) کره واحد (بجز قطب‌های شمال و جنوب) را پرتو وار به طرف خارج به استوانه با شعاع ۱، با فرستادن (x, y, z) به $(x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2}, z)$ ، تصویر کنید. بررسی کنید این نگاشت حافظ مساحت است اما نه ایزومتر موضعی و نه همدیس است (راهنمایی: فرض کنید $x(u, v)$ پارامتری مختصات کروی کره باشد و فرض کنید $x^*(u, v) = (\cos v, \sin v, \cos u)$).

(۹) هذلولی گون یک پارچه M را در نظر بگیرید که با معادله $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ بیان می‌شود.

a. نشان دهید که $x(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$ یک پارامتری برای M به عنوان یک رویه دوار است.

b. دو پارامتری از M به عنوان یک رویه خط کشی شده $\alpha(u) + v\beta(u)$ بیابید.

c. نشان دهید که $x(u, v) = \left(\frac{uv+1}{uv-1}, \frac{u-v}{uv-1}, \frac{u+v}{uv-1}\right)$ یک پارامتری از M را بیان می‌کند در حالی که هر دو مجموعه از خم‌های پارامتری، هادی‌ها هستند.

(۱۰) یک رویه خط کشی شده $x(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ با $\alpha' \neq 0$ و $\|\beta\| = 1$ مفروض است. فرض کنید که $\alpha'(u)$ ، $\beta(u)$ و $\beta'(u)$ برای هر u مستقل خطی هستند. ثابت کنید یکی از حالات زیر به طور موضعی باید برقرار باشد:

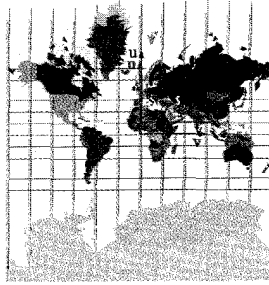
(i) مقدار ثابت $\beta = 0$.

(ii) یک تابع λ موجود است به قسمی که، مقدار ثابت $\alpha(u) + \lambda(u)\beta(u)$.

(iii) یک تابع λ موجود است به قسمی که برای هر u ، $(\alpha + \lambda\beta)'(u)$ یک مضرب غیر صفر از $\beta(u)$ است.

رویه را در هر یک از این حالات توصیف کنید. (راهنمایی: توابع c_1 ، c_2 و c_3 (از u) وجود دارند که هیچ‌گاه به طور همزمان صفر نیستند و بقسمی هستند که برای هر u ، $c_1(u)\alpha'(u) + c_2(u)\beta(u) + c_3(u)\beta'(u) = 0$ و $c_1(u) \neq 0$ را جداگانه در نظر بگیرید. در حالت دوم، تقسیم بندی کنید.

(۱۱) (نقشه کشی مرکاتور^۲) در ۱۵۹۶، حدود یک قرن قبل از ظهور حساب دیفرانسیل و انتگرال، مرکاتور دستگاه خود برای تصویر کردن زمین همانند تصویر ۱-۸، را توسعه داد.



شکل ۱ - ۸

خواهان یک پارامتری $x(u, v)$ برای کره با $u \in \mathbb{R}$ و $v \in [0, 2\pi)$ هستیم که برای آن $-u$ خم‌ها نصف النهارها باشند و به علاوه به قسمی باشد که یک پارامتری همدیس را بیان کند. زوج مرتب (ϕ, θ) را مختصات کروی معمولی در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم: $\phi = f(u)$ و $\theta = v$. نشان دهید که همدیسی و تقارن حول خط استوا مساوی با $f(u) = 2 \arctan(e^{-u})$ نتیجه بگیرید که،

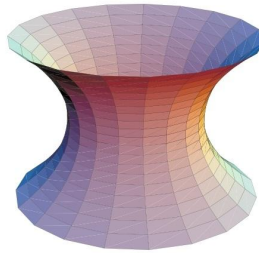
$$x(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$$

(به مثال ۲ از بخش ۱ در فصل ۱ رجوع کنید).

(۱۲) یک پارامتری $x(u, v)$ را یک شبکهٔ چبی شف^۱ نامند اگر اضلاع مقابل از هر چهارضلعی که با خم‌های مختصات به وجود می‌آید، دارای طول مساوی باشد. a ثابت کنید این اتفاق رخ می‌دهد، اگر و فقط اگر $\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial E}{\partial u} = 0$ (راهنمایی: طول $-u$ خم، $u_0 \leq u \leq u_1$ را به صورت یک انتگرال بیان کنید و از این حقیقت استفاده کنید که این طول مستقل از v است).

b . ثابت کنید که می‌توانیم به طور موضعی پارامتری مجدد $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ را چنان انجام دهیم که $\bar{E} = \bar{G} = 1$ و $\bar{F} = \cos \theta(\bar{u}, \bar{v})$ (بطوریکه $-\bar{u}$ و $-\bar{v}$ خم‌ها با طول قوس پارامتری شوند و یکدیگر را تحت زاویهٔ θ قطع کنند). (راهنمایی: \bar{u} را به عنوان تابعی از u اختیار کنید به قسمی که $\bar{x}_{\bar{u}} = x_u / (d\bar{u}/du)$ دارای طول واحد باشد.)

(۱۳) فرض کنید x و y دو پارامتری یک رویهٔ M در نزدیکی P باشند. قرار دهید: $x(u_0, v_0) = y(s_0, t_0) = P$. ثابت کنید $\operatorname{Span}(x_u, x_v) = \operatorname{Span}(y_s, y_t)$ (در حالی که مشتقات جزئی همگی در نقاط واضحی محاسبه می‌شوند). (راهنمایی: تابع $f = x^{-1} \circ y$ یک نگاشت C^1 از یک مجموعهٔ باز حول (s_0, t_0) به یک مجموعهٔ باز حول (u_0, v_0) می‌دهد. قاعدهٔ زنجیری را به کار برید تا نشان دهید: $(y_s, y_t) \in \operatorname{Span}(x_u, x_v)$.)



شکل ۱ - ۹

(۱۴) (یک ماشین حساب برنامه ریز یا میپل^۱) برای قسمت هایی از این مسئله مفید است) یک کاتنوئید همانند آنچه در شکل ۱-۹ تصویر شده است، برای $a > 0$ ثابت، به صورت زیر پارامتری می‌شود.

$$\mathbf{x}(u, v) = a(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \quad u \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

a. مساحت رویه‌ای قسمتی از کاتنوئید را بیابید که توسط $|u| \leq 1/a$ بیان می‌شود. (راهنمایی:

$$\cosh^2 u = \frac{1}{4}(1 + \cosh 2u)$$

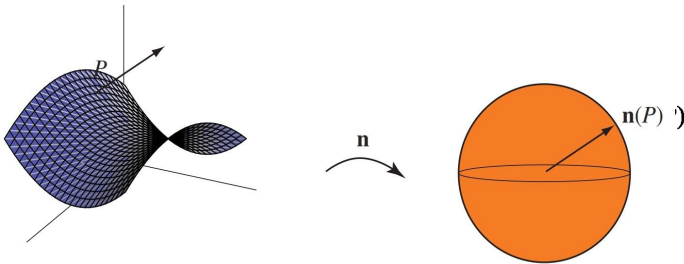
b. زوجی از دوائر موازی $x^2 + y^2 = R^2$ و $|z| = 1$ مفروض است، برای چه مقادیری از R ، حداقل یک کاتنوئید با این دواير به عنوان مرز وجود دارد؟ (راهنمایی: $f(t) = t \cosh(1/t)$ را رسم کنید).

c. برای مقادیر R در قسمت b، مساحت کاتنوئید(ها) را با $2\pi R^2$ یعنی مساحت زوجی از دیسک‌های پرکننده دواير مقایسه کنید. برای چه مقداری از R ، زوج دیسک‌ها دارای کمترین مساحت هستند؟

(۱۵) دو خانواده آشکار از دواير روی چنبره وجود دارد. خانواده سوم را بیابید. (راهنمایی: صفحه‌ای را جستجو کنید که بر چنبره در دو نقطه مماس است. از پارامتری چنبره استفاده کنید، شما باید بتوانید معادلات پارامتری خمی را بیابید که در تقاطع صفحه با دو نقطه تماس و چنبره قرار دارد).

۲-۲ نگاشت گاوس و دومین فرم اساسی

برای یک رویه پارامتری منظم M ، با توجه به شکل زیر، تابع $\mathbf{n} : M \rightarrow \Sigma$ که به هر نقطه $P \in M$ بردار قائم یکه $\mathbf{n}(P)$ را منسوب می‌کند، نگاشت گاوسی نامیده می‌شود. همان طور که در این فصل خواهیم دید، اکثر اطلاعات هندسی در مورد رویه ما M به صورت فشرده در نگاشت \mathbf{n} موجود است.



شکل ۲ - ۱

مثال ۱ تعدادی مثال اساسی به شرح زیر هستند.

a. روی یک صفحه، صفحه مماس هیچ گاه تغییر نمی‌کند، بنابراین نگاشت گاوسی ثابت است.

b. روی یک استوانه، صفحه مماس در امتداد هادی‌ها ثابت است، پس نگاشت گاوسی، کل رویه را به خط استوای کره می‌نگارد.

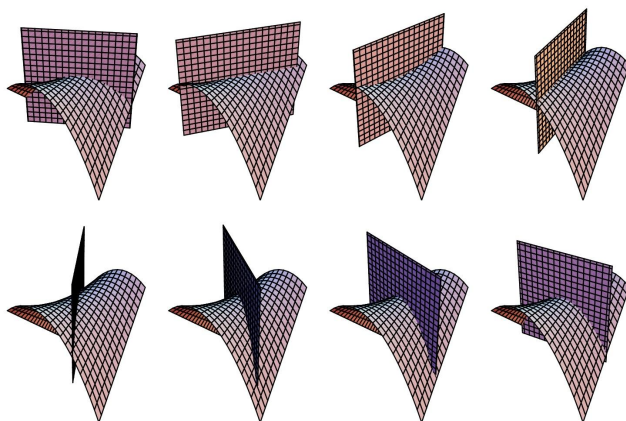
c. روی یک کره به مرکز مبدأ، نگاشت گاوسی فقط بردار موقعیت (یکه شده) است.

d. روی یک رویه زینی (همانند آنچه در شکل ۱ - ۲ تصویر شده است)، نگاشت گاوس به عنوان «عوض کننده جهت» ظاهر می‌شود. یعنی هنگامی که در یک دایره کوچک حول نقطه P در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که بردار یکه \mathbf{n} حول $\mathbf{n}(P)$ در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. ∇ .

در ضمیمه یادآوری می‌شود که برای هر تابع f روی M (حقیقی یا برداری) و هر بردار مماس $\mathbf{v} \in T_P M$ ، می‌توانیم با انتخاب یک خم $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ با $\alpha(0) = P$ و $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ ، مشتق سوپی $D_{\mathbf{v}} f(P)$ را با محاسبه $(f \circ \alpha)'(0)$ ، به دست آورد. برای دریافتن شکل M در نقطه P ، بایستی تلاش شود که انحناى خم های گوناگون گذرا بر P در M را بدانیم. شاید واضح ترین مورد عملی برای این کار، بررسی مقاطع یا برش‌های قائم از M است. یعنی M را با صفحات گذرا بر P ، تولید شده توسط $N(P)$ و یک بردار یکه $\mathbf{v} \in T_P M$ برش می‌دهیم. برش‌های قائم گوناگونی از این نوع برای یک رویه زینی در شکل ۲ - ۲ آمده است. فرض کنیم α یک خم پارامتری با طول قوس، حاصل از یک چنین برش قائمی باشد. داریم: $\alpha(0) = p$ و $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. آنگاه چون خم در صفحه تولید شده با بردارهای $\mathbf{n}(P)$ و \mathbf{v} قرار دارد، در این صورت بردار قائم اصلی خم در P ، باید $\pm \mathbf{n}(P)$ باشد (وقتی + است که خم به طرف \mathbf{n} خمیده شده باشد و زمانی - است که خم در خلاف آن خمیده شده باشد). با به کارگیری لم ۱ - ۲، مجدداً داریم:

$$(f) \quad \pm \kappa = \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}'(0) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{T} \cdot (\mathbf{n} \circ \alpha)'(0) = -D_{\mathbf{v}} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{v}$$

این مطلب ما را به مطالعه مشتق سوئی $D_V \mathbf{n}(P)$ با دقت بیشتر راهنمایی می کند.



شکل ۲-۲

گزاره ۱-۲ برای هر $\mathbf{v} \in T_P M$ ، مشتق سوئی $D_V \mathbf{n}(P)$ در $T_P M$ واقع است. به علاوه، نگاشت خطی $S_P: T_P M \rightarrow T_P M$ با ضابطه

$$S_P(\mathbf{v}) = -D_V \mathbf{n}(P)$$

یک نگاشت خطی متقارن است، یعنی برای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_P M$ داریم:

$$(*) \quad S_P(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot S_P(\mathbf{v})$$

S_P را عملگر شکل^۱ در P گویند.

اثبات برای هر خم $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ با $\alpha(\circ) = P$ و $\alpha'(\circ) = \mathbf{v}$ ، ملاحظه می شود که $no\alpha$ دارای طول ثابت یک است. بنابراین طبق لم ۱-۲ از فصل ۱، $D_V \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{n}(P) = \circ$. $(no\alpha)'(\circ) \cdot (no\alpha)(\circ) = \circ$ پس $D_V \mathbf{n}(P)$ در صفحه مماس بر M در P واقع است. اینکه S_P یک نگاشت خطی است، نتیجه ای مستقیم گزاره ۳-۲ از ضمیمه است.

تقارن اولین کاربرد مهم ما از تساوی مشتقات جزئی ترکیبی است. ابتدا $(*)$ را برای حالت

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_u \text{ و } \mathbf{v} = \mathbf{x}_v \text{ ثابت می کنیم. توجه شود که } \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \circ \text{ پس}$$

$$\circ = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v)_u = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu}$$

(به یاد داشته باشید که به جای $D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}$ می نویسیم \mathbf{n}_u). بنابراین،

$$S_P(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{x}_v = -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu}$$

$$= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uv} = -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_u = -D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{x}_u = S_P(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u$$

با آگاهی از این مطلب، در مرحلهٔ بعدی بردارهای عمومی U و V را دقیقاً به صورت ترکیب خطی x_u و x_v می‌نویسیم. اگر $U = ax_u + bx_v$ و $V = cx_u + dx_v$ آنگاه:

$$\begin{aligned} S_P(U) \cdot V &= S_P(ax_u + bx_v) \cdot (cx_u + dx_v) \\ &= (aS_P(x_u) + bS_P(x_v)) \cdot (cx_u + dx_v) \\ &= acS_P(x_u) \cdot x_u + adS_P(x_u) \cdot x_v + bcS_P(x_v) \cdot x_u \\ &\quad + bdS_P(x_v) \cdot x_v \\ &= acS_P(x_u) \cdot x_u + adS_P(x_v) \cdot x_u + bcS_P(x_u) \cdot x_v \\ &\quad + bdS_P(x_v) \cdot x_v \\ &= (ax_u + bx_v)(cS_P(x_u) + dS_P(x_v)) \\ &= U \cdot S_P(V) \end{aligned}$$

همچنان که لازم بود. \square

گزاره ۲-۲ اگر عملگر شکل S_P برای هر $P \in M$ برابر صفر باشد، آنگاه M زیرمجموعه‌ای از یک صفحه است.

اثبات چون مشتق سویی بردار قائم یکه n در همهٔ نقاط P و در همهٔ جهت‌های آن نقاط صفر است، برای هر پارامتری (موضعی) $x(u, v)$ از M داریم: $n_u = n_v = 0$. طبق گزارهٔ ۴-۲ از ضمیمه، نتیجه می‌شود که n ثابت است. (این دلیل ما برای فرض همبندی برای رویه‌ها است). \square

مثال ۲ فرض کنیم S یک کره به مرکز مبدأ و شعاع a باشد. آنگاه $n = \frac{1}{a}x(u, v)$ پس برای هر P داریم: $S_P(x_u) = -n_u = -\frac{1}{a}x_u$ و $S_P(x_v) = -n_v = -\frac{1}{a}x_v$ ، از این رو S_P برابر مضرب $1/a$ - از نگاهش همانی روی هر صفحهٔ مماس است. ∇

ارائهٔ ماتریسی برای عملگر شکل نسبت به پایهٔ $\{x_u, x_v\}$ ، مطلب آسانی به نظر نمی‌رسد، اما به طور کلی اثبات گزارهٔ ۱-۲، پیشنهاد می‌کند که دومین فرم اساسی را به طریق زیر تعریف کنیم. اگر $U, V \in T_P M$ ، قرار می‌دهیم:

$$II_P(U, V) = S_P(U) \cdot V$$

توجه شود که رابطهٔ (+) در صفحهٔ ۵۸ نشان می‌دهد که برش قائم در جهت V ($\|V\| = 1$) در نمادگذاری جدید ما به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\pm \kappa = -D_V n(P) \cdot V = S_P(V) \cdot V = II_P(V, V)$$

همان گونه که در انتهای بخش قبلی انجام دادیم، خواهان ارائه یک ماتریس در هنگام کار با یک رویه پارامتری هستیم. همانند مطالب ملاحظه شده در اثبات گزاره ۱-۲، داریم:

$$l = II_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = II_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} = II_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u)$$

$$n = II_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}$$

(با این روش، حضور علامت منفی در تعریف اصلی عملگر شکل توضیح داده می شود).
آنگاه می نویسیم:

$$II_P = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

اگر همانند قبل: $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ و $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$ ، آنگاه،

$$\begin{aligned} II_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= II_P(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v, c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= acII_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) + adII_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) + bcII_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u) + bdII_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) \\ &= l(ac) + m(bc + ad) + n(bd) \end{aligned}$$

در موقعیتی که $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ یک پایه متعامد یکه برای TPM باشد، ملاحظه می کنیم که ماتریس II_P نمایش عملگر شکل SP است. اما بررسی این مطلب مشکل نیست که در حالت کلی، ماتریس نگاشت خطی SP نسبت به پایه $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ توسط رابطه ماتریسی زیر بیان می شود (تمرین ۲).

$$I_P^{-1} II_P = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$

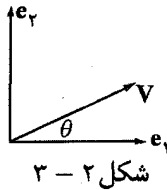
نکته در گزاره ۱-۲ ثابت کردیم که SP یک نگاشت خطی متقارن است. معنی این مطلب این است که ماتریس نمایش دهنده آن نسبت به یک پایه متعامد (یا به صورت کلی تر پایه متعامد با بردارهایی به طول مساوی) متقارن خواهد بود. در این حالت ماتریس I_P یک مضرب عددی از ماتریس همانی است و ضرب ماتریسی متقارن می ماند.

طبق قضیه اسپکترال^۱، قضیه ۳-۱ در ضمیمه، SP دارای دو مقدار ویژه حقیقی است که بطور معمول با $\kappa_1(P)$ و $\kappa_2(P)$ نمایش می دهند.

تعریف مقادیر ویژه S_P ، انحناهای اصلی یا اساسی M در P نامیده می‌شوند. بردارهای ویژه متناظر این مقادیر ویژه را جهت‌های اصلی گویند. یک خم در M یک خط انحنا نامیده می‌شود، اگر بردار مماس بر آن در هر نقطه یک جهت اصلی باشد.

از قضیهٔ اسپکترال به یاد آورید که جهت‌های اصلی متعامد هستند، پس همیشه می‌توان یک پایهٔ متعامد یکه از جهت‌های اصلی برای TPM اختیار کرد. با انجام این کار، به راحتی می‌توانیم انحناهای برش‌های قائم در جهت‌های دلخواه را به طریق زیر تعیین کنیم.

گزاره ۲-۳ (رابطهٔ آلر). فرض کنید در نقطهٔ P ، e_1 و e_2 بردارهای یکدای در جهت‌های اصلی و با انحناهای اصلی متناظر κ_1 و κ_2 باشند. همان گونه که در شکل ۲-۳ مشخص شده است، فرض کنید برای عددی چون $\theta \in [0, 2\pi)$ ، $V = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ در این صورت $II_P(V, V) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$.



اثبات مطلب مورد نظر یک محاسبهٔ سر راست است. برای $i = 1, 2$ ، $S_P(e_i) = \kappa_i e_i$ پس داریم:

$$\begin{aligned} II_P(V, V) &= S_P(V)V = A_p(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \cdot (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ &= \cos \theta \kappa_1 e_1 + \sin \theta \kappa_2 e_2 \cdot (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

و اثبات خاتمه می‌یابد. □

روی یک کره همهٔ برش‌های قائم دارای یک انحنا (غیر صفر) هستند. از طرف دیگر اگر به شکل ۲-۲ به دقت نگاه کنیم، ملاحظه می‌شود که برش‌های قائم معینی از رویهٔ زینی در واقع خطوط هستند. این مطلب باعث الزام وجود تعریف زیر است.

تعریف اگر برش قائم در جهت بردار V دارای انحنا صفر باشد، یعنی $II_P(V, V) = 0$ ، آنگاه V را یک جهت مجانبی^۱ نامند^۲. یک خم در M را یک خم مجانبی گویند اگر

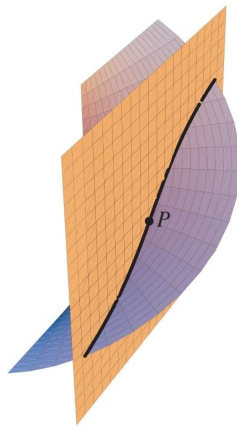
۱- asymptotic

۲- البته در اینجا $V \neq 0$. برای توضیحی در مورد این نامگذاری تمرین ۲۱ را ببینید

بردار مماس بر آن در هر نقطه، یک جهت مجانبی باشد.

مثال ۳ اگر M یک رویه شامل یک خط باشد، این خط یک خم مجانبی است. زیرا برش قائم در جهت خط، شامل خط است (و شاید بقیه موارد پراکنده باشند)، که البته دارای انحنای صفر است. ∇

نتیجه ۲-۴ جهت مجانبی در P وجود دارد اگر فقط اگر $\kappa_1 \kappa_2 \leq 0$.
 اثبات داریم $\kappa_2 = 0$ اگر فقط اگر e_2 یک جهت مجانبی باشد. حال فرض کنیم $\kappa_2 \neq 0$ ، اگر $V \neq 0$ یک بردار مجانبی یکه باشد که زاویه θ با e_1 می‌سازد، خواهیم داشت $\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = 0$ و از این رو $\tan^2 \theta = -\kappa_1 / \kappa_2$ ، در نتیجه $\kappa_1 \kappa_2 \leq 0$ بالعکس اگر $\kappa_1 \kappa_2 \leq 0$ ، θ را عددی با $\tan \theta = \pm \sqrt{-\kappa_1 / \kappa_2}$ فرض می‌کنیم و آنگاه V یک جهت مجانبی است. \square



شکل ۲-۴

مثال ۴ مانند شکل ۱-۲ حلزونی را در نظر می‌گیریم. این رویه یک رویه خط کشی شده است و بنابراین هادی‌ها خم‌های مجانبی هستند. آنچه که کمتر واضح است، این است که خانوادهٔ ماریچج‌ها روی رویه نیز خم‌های مجانبی هستند. ولی، چنان که در شکل ۲-۴ نمایش داده شده است، برش قائم مماس به ماریچج در P ، دارای یک نقطهٔ بازتابی^۱ در P است و بنابراین ماریچج یک خم مجانبی است. از خواننده در تمرین ۵ بررسی این مطلب با محاسبه خواسته شده است. ∇

این نیز یک نتیجه مستقیم از گزاره^{۲-۳} که انحناهای اصلی، همان انحناهای (علامت دار) ماکزیمم و مینیمم در برش‌های قائم، گوناگون هستند. فرض کنید $\kappa_2 \leq \kappa_1$ ، آنگاه:

$$\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa_1(1 - \sin^2 \theta) + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \sin^2 \theta \leq \kappa_1$$

(و به طور مشابه برای $\kappa_2 \geq \kappa_1$). به علاوه همچنان که قضیه اسپیکرال به ما می‌گوید، ماکزیمم و مینیمم در زاویه‌های قائمه نسبت به یکدیگر رخ می‌دهد. با نظری دیگر به شکل $2-2$ ، جایی که برش‌ها در زاویه‌هایی با فواصل $\pi/8$ انجام می‌شوند، ملاحظه می‌کنیم که برش‌های قائم با «بیشترین انحنا» در کنج‌های سوم و هفتم ظاهر می‌شوند و جهت‌های مجانبی در کنج‌های دوم و چهارم دیده می‌شوند (به تمرین ۸ مراجعه کنید).^۱

در ادامه به تعریف یکی از مهم‌ترین مفاهیم هندسه رویه‌ها می‌پردازیم.

تعریف حاصلضرب انحناهای اصلی، انحناهای گاوسی نامیده می‌شود، یعنی $K = \det Sp$ $\kappa_1 \kappa_2$. میانگین انحناهای اصلی با نماد H را انحنا متوسط^۱ گویند، یعنی $H = \frac{1}{2} \text{tr } Sp = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$. اگر $H = 0$ ، رویه^۲ M را مینیمال^۲ گوئیم.

قابل توجه است که با وجود تغییر علامت انحناهای اصلی با تغییر جهت بردار قائم \mathbf{n} ، انحناهای گاوسی K یعنی حاصلضرب آن دواز انتخاب قائم یکه مستقل است (ولی علامت انحنا متوسط به این انتخاب بستگی دارد).

مثال ۵ رویه^۲ زینی $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, uv)$ را در نظر بگیرید. محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1, 0, v) & \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{x}_v &= (0, 1, u) & \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 1) \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} = (-v, -u, 1) & \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

و بنابراین

$$m = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \quad l = n = 0 \quad \text{و} \quad G = 1+u^2, \quad F = uv, \quad E = 1+v^2$$

از این رو با $P = \mathbf{x}(u, v)$ داریم:

$$\mathbf{II}_P = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{I}_P = \begin{bmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس عملگر شکل نسبت به پایه $\{x_u, x_v\}$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$S_P = I_P^{-1} II_P = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} -uv & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv \end{bmatrix}$$

(توجه شود که در حالت کلی این ماتریس متقارن نیست.)
با مقداری محاسبه، تعیین می‌کنیم که انحنای اصلی (مقادیر ویژه) عبارتند از:

$$\kappa_2 = \frac{-uv - \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \quad \text{و} \quad \kappa_1 = \frac{-uv + \sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}$$

و $K = \det S_P = -1/(1+u^2+v^2)^2$. توجه شود که از فرم II ، u و $-v$ خم‌ها، خم‌های مجانبی هستند، همچنان که این مطلب باید از خط بودن این خم‌ها مشهود باشد. با مقداری کار بیشتر تعیین می‌کنیم که جهت‌های اصلی یعنی بردارهای ویژه S_P ، عبارتند از بردارهای:

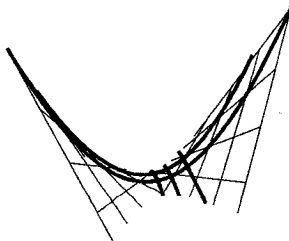
$$\sqrt{1+u^2}x_u \pm \sqrt{1+v^2}x_v$$

(بررسی این مطلب با ارزش است که این بردارها در واقع متعامد هستند) خم‌های متناظر در صفحه uv دارای بردارهای مماس $(\sqrt{1+u^2}, \pm\sqrt{1+v^2})$ هستند، بنابراین باید جواب معادله دیفرانسیل زیر باشند.

$$\frac{dv}{du} = \pm \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+u^2}}$$

داریم، پس با جداسازی متغیرها به دست می‌آوریم،
 $\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int dq = q = \arcsin hv$ ، که با جایگذاری $v = \sinh q$ به دست

$$\arcsinh u = \pm \arcsinh v + c \quad \text{یعنی} \quad \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \pm \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

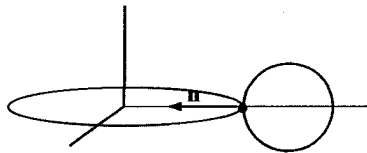


شکل ۲-۵

چون $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ نتیجه می‌گیریم،
 $v = \sinh(\pm \arcsinh u + c) = \pm(\cosh c)u + (\sinh c)\sqrt{1+u^2}$

هنگامیکه $c = 0$ به دست می‌آوریم $v = \pm u$ (همچنان که در زمینه هندسه قابل انتظار است). به طور کلی یک خانواده از هذلولی‌های $v = \pm u$ به عنوان مجانب به دست می‌آوریم. بعضی از خطوط نوعی انحنا روی رویه^۲ زینی در شکل ۲-۵ مشخص شده‌اند.

تعریف نقطه^۱ $P \in M$ را ثابت فرض کنید. اگر $\kappa_1 = \kappa_2$ ، گوئیم P یک نقطه^۱ نافی^۱ است. اگر $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ، P را یک نقطه^۲ مسطح گویند. اگر $K = 0$ ، اما P یک نقطه^۲ مسطح نباشد، P را یک نقطه^۳ سهموی^۲ نامند. اگر $K > 0$ ، P را نقطه^۳ بیضوی^۲ و اگر $K < 0$ ، P را نقطه^۳ هذلولوی^۲ گویند.



شکل ۲-۶

مثال ۶ (با توجه به شکل ۱-۳) در «خارج» یک چنبره، خمش همه^۳ برش‌های قائم در یک جهت است، پس همه^۳ آنها، نقاط بیضوی هستند. اکنون صفحه‌ای را تصور کنید که روی یک چنبره قرار گرفته است. این صفحه بر چنبره در امتداد «دایره^۳ بالایی» مماس است و بنابراین بردار قائم یکه بر رویه در هنگام حرکت حول این خم، ثابت می‌ماند. برای هر نقطه^۳ P روی این دایره و هر بردار V مماس بر این دایره داریم: $S_P(V) = -D_V \mathbf{n} = 0$. پس این جهت اصلی با انحنای اصلی متناظر صفر است. پس این نقاط سهموی هستند. از طرف دیگر، یک نقطه^۳ P روی داخلی‌ترین حلقه^۳ چنبره در نظر بگیرید. در چنین نقطه‌ای، رویه زینی شکل به نظر می‌رسد، یعنی با بردار قائم یکه، همچنان که در شکل ۲-۶ مشخص شده است، دایره افقی (که داخل چنبره می‌چرخد) یک خط انحنا با انحنای اصلی مثبت است و دایره عمودی یک خط انحنا با انحنای اصلی منفی است. بنابراین نقاط درونی چنبره، نقاط هذلولوی هستند.

نکته تعبیر اصلی گاوس از انحنای اصلی به صورت زیر بود: یک مستطیل با اضلاع خمیده^۳ P را در M با ضلع‌های h_1 و h_2 در امتداد جهت‌های اصلی تصور کنید. آنگاه، چون جهت‌های اصلی، بردارهای ویژه^۳ عملگر شکل هستند، تصویر P تحت نگاشت گاوسی تقریباً یک مستطیل کوچک با اضلاع خمیده در Σ $\mathbf{n}(P) \in \Sigma$ با اضلاع $\kappa_1 h_1$ و $\kappa_2 h_2$ است. بنابراین، $K = \kappa_1 \kappa_2$ ضریبی است که توسط آن \mathbf{n} ، مساحت علامت‌دار را هنگام نگاشتن M به Σ ، تغییر می‌دهد (قابل توجه است که برای استوانه، مستطیل مذکور به یک پاره خط فرو می‌ریزد و برای یک رویه^۳ زینی، جهت توسط \mathbf{n} معکوس می‌شود و بنابراین انحنای

گاوسی منفی می‌شود).

اجازه دهید که این بخش را با بازبینی بحث خود دربارهٔ انحناهای برش‌های قائم خاتمه دهیم. فرض کنید α یک خم روی M پارامتری شده با طول قوس باشد که در $\alpha(0) = p$ و $\alpha'(0) = \mathbf{V}$ صدق می‌کند. بنابراین محاسبه در فرمول (†) در صفحهٔ ۵۸ نشان می‌دهد که،

$$II_P(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \kappa N \cdot \mathbf{n}$$

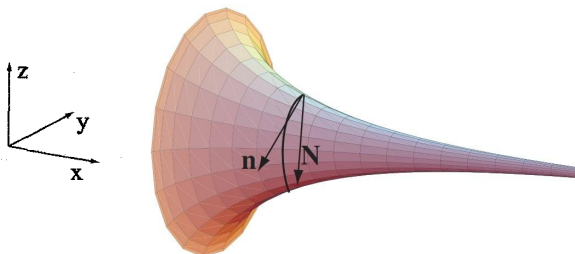
یعنی $II_P(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ مؤلفهٔ بردار انحنا κN از α ، عمود بر رویهٔ M در P را می‌دهد که آن را با κ_n نمایش می‌دهیم و به آن انحنا قائم α در P گوئیم. مطلب قابل توجه در مورد این فرمول آن است که نشان می‌دهد انحنا قائم تنها به جهت α در P و نه به خم، بستگی دارد (برای حالت برش قائم، در حد یک علامت، انحنا قائم همهٔ انحنا است). گزاره زیر نتیجهٔ فوری این بحث است.

گزاره ۲-۵ (رابطهٔ میونسیر^۱) اگر α یک خم روی M و گذرا بر P ، با بردار مماس \mathbf{V} باشد، آنگاه،

$$II_P(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \kappa_n = \kappa \cos \phi$$

در حالی که ϕ زاویهٔ بین قائم اصلی N از α با قائم رویه \mathbf{n} در P است.

به ویژه اگر α یک خم مجانبی باشد، آنگاه انحنا قائم در هر نقطه صفر است. مثال ۶ اجازه دهید یک رویهٔ بسیار جالب را با نام شبه-کره^۲ بررسی کنیم که در شکل ۲-۷ نمایش داده شده است.

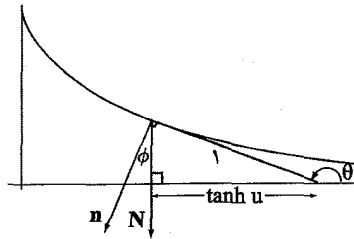


شکل ۲-۷

این مورد یک رویه دوار، حاصل از دوران یک تراکتریکس (مثال ۲ از بخش ۱ در فصل ۱) حول محور $-x$ ها است و بنابراین به طریق زیر پارامتری می‌شود:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - \tanh u, \operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v), \quad u > 0, \quad v \in [0, 2\pi)$$

توجه شود که دایره‌های (حاصل از دوران)، خطوط انحنا هستند. چه با به کارگیری تمرین ۱۳ یا با مشاهده مستقیم، نتیجه می‌گیریم که تنها مؤلفه قائم رویه که در حین حرکت حول دایره عوض می‌شود، قائم بر دایره در صفحه دایره است. به طور مشابه تراکتریکس‌های مختلف نیز خطوط انحنا هستند. در صفحه یک تراکتریکس، قائم رویه و قائم خم بر هم منطبق هستند.



شکل ۲ - ۸

اکنون، طبق تمرین ۱ - ۲ - ۵، انحنا تراکتریکس برابر $\kappa = 1/\sinh u$ است. چون در طول این خم $N = n$ داریم: $\kappa_1 = \kappa_n = 1/\sinh u$. حال چه چیزی در مورد دایره می‌توان گفت؟ در اینجا داریم: $\kappa = 1 \operatorname{sech} u = \cosh u$ ، اما این مقدار انحنا قائم نیست. زاویه ϕ بین N و n مکمل زاویه θ است که در شکل ۱ - ۹ از فصل ۱ ملاحظه کردیم (دلیل آن را در شکل ۲ - ۸ ببینید). بنابراین طبق فرمول میوسنیر، گزاره ۲ - ۵، داریم $\kappa_2 = \kappa_n = \kappa \cos \phi = (\cosh u)(-\tanh u) = -\sinh u$ داریم:

$$\nabla \cdot K = \kappa_1 \kappa_2 = (1/\sinh u)(-\sinh u) = -1$$

مثال ۸ اکنون اجازه دهید حالت یک رویه دوار کلی، پارامتری شده مانند مثال ۲ از بخش ۱ را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

در حالی که $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$. به یاد آورید که u -خم‌ها نصف‌النهارها و v -خم‌ها مدارها نامیده می‌شوند. در این صورت:

$$x_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))$$

$$x_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$$

$$n = x_u \times x_v = (-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u))$$

$$x_{uu} = (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, g''(u))$$

$$x_{uv} = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0)$$

$$x_{vv} = (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, 0)$$

و بنابراین داریم:

$$E = 1, F = 0, G = f(u)^2, l = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u), m = 0, n = f(u)g'(u)$$

آنگاه طبق تمرین ۲-۲-۱، $\kappa_1 = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)$ و $\kappa_2 = g'(u)/f(u)$ از این رو،

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = (f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)) \frac{g'(u)}{f(u)} = -\frac{f''(u)}{f(u)}$$

چون از $1 = f'(u)^2 + g'(u)^2$ ، نتیجه می‌گیریم که $f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0$ بنابراین

$$f'(u)g'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)^2 = -(f'(u)^2 + g'(u)^2)f''(u) = -f''(u)$$

توجه شود، همچنان که در حالت خاص مثال ۶ ملاحظه کردیم، در هر رویهٔ دوار نصف النهارها و مدارها، خطوط انحنای هستند. ∇

تمرین ۲-۲

* (۱) بررسی کنید که خم‌های پارامتری خطوط انحنای هستند اگر فقط اگر $F = m = 0$. به علاوه نشان دهید که در این حالت، انحناهای اصلی عبارتند از: $\kappa_1 = l/E$ و $\kappa_2 = n/G$.

(۲) a. نشان دهید که ماتریس نمایش نگاشت خطی $S_P : T_P S \rightarrow T_P M$ نسبت به پایه $\{x_u, x_v\}$ عبارتست از:

$$I_P^{-1} II_P = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$

(راهنمایی: کافی است $A_p(x_u) \cdot x_v$ ، $A_p(x_u) \cdot x_u$ و نظایر آن را بررسی کنید).

b. نتیجه بگیرید که: $K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$.

(۳) دومین فرم اساسی II_P را برای رویه‌های پارامتری زیر محاسبه کنید. سپس بعد از محاسبهٔ ماتریس عملگر شکل، H و K را تعیین کنید.

a. استوانه: $x(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$

b. چنبره: $x(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ ($0 < b < a$)

c. حلزونی (هلیکوئید): $x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$

d. کاتوئید: $x(u, v) = (a(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u))$

e. پارامتری مرکاتور از کره: $x(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$

(۴) انحناهای اصلی، جهت‌های اصلی و جهت‌های مجانبی را (در صورت وجود) برای هر یک از رویه‌های تمرین ۳ بیابید. خطوط انحنای و خم‌های مجانبی را تعیین کنید.

* (۵) با محاسبه ثابت کنید که هر یک از ماریچج‌ها $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ یک خم مجانبی روی حلزونی مفروض در مثال ۱ (b) از بخش ۱ هستند. همچنین، چگونگی تغییرات قائم رویه π را در هنگام حرکت در امتداد یک هادی محاسبه کنید و از آن برای توضیح این مطلب استفاده کنید که چرا هادی‌ها هم خم‌های مجانبی هستند.

* (۶) اولین و دومین فرم اساسی را برای شبه کره (مثال ۶) حساب کنید و صحت محاسبات ما در مورد انحناهای اصلی و انحناهای گاوسی را بررسی کنید.

(۷) نشان دهید رویه‌های خط کشی شده دارای انحناهای گاوسی $K \leq 0$ هستند.

(۸) a. ثابت کنید جهت‌های اصلی، جهت‌های مجانبی را نصف می‌کند (راهنمایی: رابطه آلرا بکار برید).

b. ثابت کنید اگر جهت‌های مجانبی M متعامد باشند، آنگاه M مینیمال است. با فرض M بدون نقاط مسطح، عکس آن را ثابت کنید.

(۹) فرض کنید $\kappa_n(\theta)$ نمایش انحناهای قائم در جهتی باشد که زاویه θ با اولین جهت اصلی می‌سازد. نشان دهید:

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \kappa_n(\theta) d\theta \quad \text{a.}$$

$$H = \frac{1}{\pi} (\kappa_n(\theta) + \kappa_n(\theta + \frac{\pi}{2})) \quad \text{برای هر } \theta \text{ هر } m \geq 3 \quad \text{b.}$$

$$H = \frac{1}{m} (\kappa_n(\theta) + \kappa_n(\theta + \frac{\pi}{m}) + \dots + \kappa_n(\theta + \frac{\pi(m-1)}{m})) \quad \text{برای هر } \theta \text{ و } m \geq 3 \quad \text{c.}$$

(۱۰) a. رابطه میونسیر را برای دایره‌های عرضی روی کره‌ای به شعاع a ، برای محاسبه انحناهای قائم به کار برید.

b. ثابت کنید که انحناهای هر خم روی کره به شعاع a ، در رابطه $\kappa \geq 1/a$ صدق می‌کند.

(۱۱) اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید: اگر یک رویه M با انحنای گاوسی $\kappa > 0$ باشد، آنگاه انحنای هر خم $C \subset M$ ، همه جا مثبت است (به خاطر آورد طبق تعریف $\kappa \geq 0$).

(۱۲#) فرض کنید که برای هر $P \in M$ ، عملگر شکل S_P مضرب عددی از ماتریس همانی باشد، یعنی برای هر $\mathbf{v} \in T_P M$ ، $S_P(\mathbf{v}) = \kappa(P)\mathbf{v}$ (در اینجا ممکن است که عدد $\kappa(P)$ به نقطه P وابسته باشد).

a. دیفرانسیل معادلات زیر را به خاطر تعیین κ_u و κ_v بگیرید و نتیجه بگیرید κ باید ثابت باشد.

$$D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} = \mathbf{n}_u = -\kappa \mathbf{x}_u$$

$$D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n} = \mathbf{n}_v = -\kappa \mathbf{x}_v$$

b. در گزاره ۲-۲ نشان داده شد که اگر $\kappa = 0$ آنگاه M مسطح است. نشان دهید هنگامی که $\kappa \neq 0$ ، M (قسمتی از) یک کره است.

(۱۳) a. ثابت کنید اگر α یک خط انحنای در M باشد، آنگاه $(\text{no}\alpha)'(t) = -\kappa(t)\alpha'(t)$ درحالی که $\kappa(t)$ انحنای اصلی در $\alpha(t)$ در جهت $\alpha'(t)$ است (به زبان ساده‌تر، با دیفرانسیل گیری در امتداد خم $\alpha(t)$ ، دقیقاً می‌نویسیم $\mathbf{n}' = -\kappa\alpha'$).
 b. دورویه M و M^* را در نظر بگیرید که در طول یک خم C تقاطع دارند. فرض کنید C یک خط انحنای M باشد. ثابت کنید C یک خط انحنای M^* است اگر و فقط اگر زاویه بین M و M^* همه جا در امتداد C ، ثابت باشد (در اثبات از طرف \Leftarrow ، مطمئن شوید که حالت مماسی M و M^* در امتداد C را در نظر گرفته‌اید).

(۱۴) اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید:

a. اگر خمی به طور همزمان یک خم مجانبی و یک خط انحنای باشد، آنگاه باید مسطح باشد.

b. اگر خمی به طور همزمان مسطح و یک خم مجانبی باشد، آنگاه باید یک خط باشد.

(۱۵) a. چگونه یک کنج فرنه در امتداد یک خم مجانبی به هندسه رویه مربوط می‌شود؟
 b. فرض کنید $\kappa(P) < 0$. اگر C یک خم مجانبی با $\kappa(P) \neq 0$ باشد، ثابت کنید که تاب آن در $|\tau(P)| = \sqrt{-K(P)}$ صدق می‌کند (راهنمایی: اگر $\{U, V\}$ یک پایه متعامد یکه برای $T_P M$ با U مماس بر C اختیار کنیم، ماتریس S_P چیست؟ نکته صفحه ۶۰ را به یاد آورید).

(۱۶) در ادامهٔ تمرین ۱۵، نشان دهید اگر $K(P) < 0$ ، آنگاه دو خم مجانبی در p دارای تاب با علامت‌های متضاد هستند.

(۱۷) ثابت کنید که تنها رویهٔ خط کشی شدهٔ مینیمال بدون هیچ نقطهٔ مسطحی، حلزونی است (راهنمایی: خم‌های عمود بر هادی‌ها را در نظر بگیرید. تمرین ۸(b) و ۱۹ - ۲ - ۱ را به کار برید).

(۱۸) فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^3$ باز باشد و $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک نگاشت هموار (از مرتبهٔ ۳) باشد به قسمی که x_u, x_v و x_w همواره متعامد باشند. در این صورت رویه‌های تراز (مقدار ثابت) $u = (مقدار ثابت)$ ، $v = (مقدار ثابت)$ و $w = (مقدار ثابت)$ یک دستگاه متعامد سه گانه از رویه‌ها را تشکیل می‌دهد.

a. نشان دهید که $x(u, v, w) = (u \sin v \cos w, u \sin v \sin w, u \cos v)$ یعنی نگاشت مختصات کروی چنین مثالی را ارائه می‌دهد.

b. ثابت کنید که خم‌های تقاطع هر دو عدد رویه از دستگاه‌های متفاوت (برای مثال: (مقدار ثابت) $v = (مقدار ثابت)$ و $w = (مقدار ثابت)$)، خطوط انحنای در هر یک از رویه‌های مربوطه است. (راهنمایی: از معادلات گوناگون $x_u \cdot x_u = 0$ ، $x_v \cdot x_w = 0$ ، $x_u \cdot x_v = 0$ نسبت به متغیر غایب دیفرانسیل بگیرید. عملگرهای شکل رویه‌های مختلف چیست؟)

(۱۹) در این تمرین، رویه‌های دوار مینیمال را تحلیل می‌کنیم. بر خلاف عادت پارامتری کردن رویه‌های دوار، کار با یک نصف النهار به عنوان یک نمودار $(y = h(u), z = u)$ واضح است.

a. با استفاده از تمرین ۱ - ۲ - ۴ و گزارهٔ ۲ - ۵ نشان دهید انحنای اصلی که عبارتند از:

$$\kappa_1 = \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{h \sqrt{1 + h'^2}}$$

b. نتیجه بگیرید که $H = 0$ اگر فقط اگر $h(u) = 1 + h'(u)^2$.

c. معادله دیفرانسیل را حل کنید (راهنمایی: جایگذاری کنید $z(u) = \ln h(u)$ یا معرفی کنید $w(u) = h'(u)$ ، $dw/dh = w(u)$ را پیدا کنید و با جداسازی متغیرها، انتگرال گیری کنید). جواب شما باید برای ثابت‌هایی چون b و c باید به صورت $\frac{1}{c} \cosh(cu + b)$ باشد.

(۲۰) با انتخاب خاصی از مختصات در \mathbb{R}^3 می‌توان فرض کرد که P مبدأ، صفحهٔ $T_P M$ صفحهٔ xy و محورهای x و y جهت‌های اصلی در P باشند.

a. نشان دهید که در این مختصات M ، به طور موضعی نمودار تابع زیر است،

$$z = f(x, y) = \frac{1}{4}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + \dots +$$

در حالی که $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\dots}{x^2 + y^2} = 0$ (امکان آغاز با قضیهٔ تیلر برای شما وجود دارد (قضیهٔ تیلر: اگر f یک تابع C^2 باشد، داریم:

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y +$$

$$\frac{1}{4}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + \dots$$

در حالی که $(\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\dots}{x^2 + y^2} = 0)$.

b. نشان دهید اگر P یک نقطهٔ بیضوی باشد، آنگاه یک همسایگی از P در $M \cap T_P M$ دقیقاً خود مبدأ است. نشان دهید اگر P یک نقطهٔ هذلولوی باشد، چنین همسایگی یک خم است که خود را در P قطع می‌کند و جهت‌های مماسی آن در P همان جهت‌های مجانبی هستند. چه اتفاقی در حالت یک نقطهٔ سهموی می‌افتد؟

(۲۱) فرض کنید $P \in M$ یک نقطهٔ غیر مسطح باشد و اگر $K \geq 0$ ، قائم یک را چنان اختیار کنید که $l, n \geq 0$.

a. نمایهٔ دوپین^۱ را آن مخروطی در $T_P M$ تعریف می‌کنیم که با معادلهٔ $II_P(V, V) = 1$ معرفی می‌شود. نشان دهید که اگر P یک نقطهٔ بیضوی باشد، نمایهٔ دوپین یک بیضی است، اگر P یک نقطهٔ هذلولوی باشد، نمایهٔ دوپین یک هذلولی است و اگر P یک نقطهٔ سهموی باشد، نمایهٔ دوپین زوجی از خطوط موازی است.

b. نشان دهید برای نقطهٔ هذلولوی P ، مجانب‌های نمایهٔ دوپین توسط $II_P(V, V) = 0$ یعنی مجموعهٔ جهت‌های مجانبی، بیان می‌شوند.

c. فرض کنید M نمایش دهندهٔ موضعی در نزدیکی P مثل تمرین ۲۰ باشد. نشان دهید که برای مقادیر کوچک مثبت c ، تقاطع M با صفحهٔ $z = c$ «مشابه» نمایهٔ دوپین به نظر می‌رسد. چگونه می‌توانید این حکم را دقیق‌تر بسازید؟

(۲۲) فرض کنید که رویهٔ M در نزدیکی P به عنوان رویهٔ ترازوی از یک تابع هموار $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f$ با $\nabla f(P) \neq 0$ بیان شده باشد. یک خط L را دارای (حداقل) k - نقطهٔ تماس^۲ با M در نقطهٔ P گویند، اگر برای هر پارامتری خطی α از L با $\alpha(0) = P$ تابع $f \circ \alpha$ تا مرتبهٔ $k - 1$ صفر باشد، یعنی $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ (چنین خطی به عنوان حد خطوطی تصور می‌شود که M را در P و در $k - 1$ دیگر نقطهٔ میل‌کننده به P ، قطع می‌کنند).

- a. نشان دهید L دارای ۲-نقطهٔ تماس با M در P است، اگر و فقط اگر L بر M در P مماس باشد، یعنی $L \subset T_P M$.
- b. نشان دهید که L دارای ۳-نقطهٔ تماس با M در P است، اگر و فقط اگر L یک جهت مجانبی در P باشد (راهنمایی: ممکن است، پیروی از مقدمه تمرین ۲۰ مفید باشد).
- c. (درگیری بیشتر) تماس ۴-نقطه‌ای با M در P چه مفهومی برای L دارد؟

۲-۳ معادلات کد آزی و گاوس و قضیهٔ اساسی رویه‌ها

اکنون خواهان پرداختن به فهم عمیق‌تری از انحنای گاوسی هستیم. در اینجا ناچار هستیم که فقط به مؤلفه‌های قائم‌مشتق‌های جزئی مرتبهٔ دوم یعنی x_{uv} و x_{uu} ، x_{vv} بپردازیم. چون $\{x_u, x_v, n\}$ یک پایه برای \mathbb{R}^3 تشکیل می‌دهند، توابع $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uv}^u, \Gamma_{uv}^v, \Gamma_{vv}^u, \Gamma_{vv}^v$ وجود دارند چنان که،

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uv}^u x_v + l n \\ x_{uv} &= \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + m n \\ x_{vv} &= \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + n n \end{aligned} \quad (\dagger)$$

(لازم به ذکر است که $x_{uv} = x_{vu}$ ، تقارن‌های $\Gamma_{uv}^* = \Gamma_{vu}^*$ را دیکته می‌کند). توابع Γ_{**} را نمادهای کریستوفل^۱ گویند.

مثال ۱ اجازه دهید نمادهای کریستوفل را برای پارامتری معمولی کره محاسبه کنیم. با محاسبهٔ مستقیم به دست می‌آوریم:

$$x_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$$

$$x_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$

$$x_{uu} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, -\cos u) = -x(u, v)$$

$$x_{uv} = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

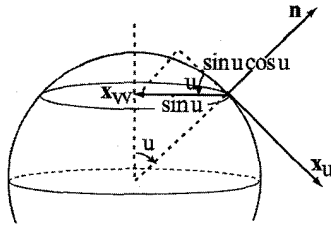
$$x_{vv} = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, 0) = -\sin u (\cos v, \sin v, 0)$$

(توجه کنید که u -خم‌ها، دوایر عظیمه هستند که پارامتری طول قوس دارند، پس جای تعجب نیست که بردار شتاب x_{uu} به طرف داخل اشاره می‌کند و دارای طول یک است. همچنین v -خم‌ها دوایر عرضی با شعاع $\sin u$ هستند و به طور مشابه بردار شتاب آنها x_{vv} به طرف داخل و مرکز دایرهٔ متناظر آنها است.)

چون x_{uu} به طور کامل در جهت n واقع است، داریم $\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uu}^v = 0$. اکنون با بررسی ملاحظه می‌شود $x_{uv} = \cot u x_v$ ، بنابراین $\Gamma_{uv}^u = \cot u$ و $\Gamma_{uv}^v = 0$. همچنان که در

^۱- Christoffel symbols

شکل ۳-۱ ملاحظه می‌کنیم، در نهایت داریم: $\mathbf{x}_{vv} = -\sin u \cos u \mathbf{x}_u - \sin^2 u \mathbf{n}$ در نتیجه $\Gamma_{vv}^v = 0$ و $\Gamma_{vv}^u = -\sin u \cos u$.



شکل ۳-۱

حال ضرب داخلی معادلات (†) در \mathbf{x}_u و \mathbf{x}_v نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F$$

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G$$

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F$$

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{uv}^v G$$

$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma_{vv}^u E + \Gamma_{vv}^v F$$

$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma_{vv}^u F + \Gamma_{vv}^v G$$

اکنون مشاهده می‌شود که

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{\sqrt{E}} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u = \frac{1}{\sqrt{E}} E_u$$

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{\sqrt{E}} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_v = \frac{1}{\sqrt{E}} E_v$$

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{\sqrt{E}} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_u = \frac{1}{\sqrt{E}} G_u$$

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} = F_u - \frac{1}{\sqrt{E}} E_v$$

$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_v - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uv} = F_v - \frac{1}{\sqrt{E}} G_u$$

$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{\sqrt{E}} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_v = \frac{1}{\sqrt{E}} G_v$$

بنابراین، معادلات خود را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} E_u \\ F_u - \frac{1}{\sqrt{E}} E_v \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} E_u \\ F_u - \frac{1}{\sqrt{E}} E_v \end{bmatrix}$$

$$(\ddagger) \quad \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} E_v \\ \frac{1}{\sqrt{E}} G_u \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} E_v \\ \frac{1}{\sqrt{E}} G_u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{\sqrt{F}} G_u \\ \frac{1}{\sqrt{F}} G_v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{\sqrt{F}} G_u \\ \frac{1}{\sqrt{F}} G_v \end{bmatrix}$$

آنچه در مورد این روابط کاملاً قابل توجه است، این است که نمادهای کریستوفل که به ما در مورد مؤلفه‌های مماسی مشتق‌های مرتبه دوم x_{\dots} اطلاعات می‌دهند، «دقیقاً» با دانستن E ، F و G ، یعنی اولین فرم اساسی قابل محاسبه هستند.

مثال ۲ اجازه دهید که نمادهای کریستوفل را برای کره واحد محاسبه کنیم و جواب خود را با مثال ۱ مقایسه نماییم. چون $E = 1$ ، $F = 0$ و $G = \sin^2 u$ داریم:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \csc^2 u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \csc^2 u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin u \cos u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cot u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \csc^2 u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin u \cos u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin u \cos u \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین مانند قبل تنها نمادهای کریستوفل غیر صفر عبارتند از: $\Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v = \cot u$ و $\nabla \cdot \Gamma_{vv}^u = -\sin u \cos u$

طبق تمرین ۲-۲-۲، ماتریس عملگر شکل S_p نسبت به پایه $\{x_u, x_v\}$ عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} lG - mF & mG - nF \\ -lF + mE & -mF + nE \end{bmatrix}$$

توجه شود که این ضرایب به ما می‌گویند که مشتقات n نسبت به u و v عبارتند از:

$$n_u = D_{x_u} \mathbf{n} = -S_p(x_u) = -(ax_u + bx_v)$$

$$(\dagger\dagger) \quad n_v = D_{x_v} \mathbf{n} = -S_p(x_v) = -(cx_u + dx_v)$$

اکنون دوباره از (\dagger) مشتق می‌گیریم و از تساوی مشتقات جزئی مخلوط استفاده می‌کنیم. برای شروع داریم:

$$\begin{aligned} x_{uvv} &= (\Gamma_{uu}^u)_v x_u + \Gamma_{uu}^u x_{uv} + (\Gamma_{uv}^v)_v x_v + \Gamma_{uv}^v x_{vv} + l_v \mathbf{n} + l n_v \\ &= (\Gamma_{uu}^u)_v x_u + \Gamma_{uu}^u (\Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + m \mathbf{n}) + (\Gamma_{uv}^v)_v x_v \\ &\quad + \Gamma_{uu}^v (\Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + n \mathbf{n}) + l_v \mathbf{n} - l (cx_u + dx_v) \\ &= ((\Gamma_{uu}^u)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - lc) x_u + ((\Gamma_{uv}^v)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v \\ &\quad + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - ld) x_v + (\Gamma_{uu}^u m + \Gamma_{uu}^v n + l_v) \mathbf{n} \end{aligned}$$

و به طور مشابه،

$$x_{uvu} = ((\Gamma_{uv}^u)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u - ma) x_u + ((\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uv}^v$$

$$+\Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v - mb) \mathbf{x}_v + (\Gamma_{uv}^u l + \Gamma_{uv}^v m m_u) \mathbf{n}$$

چون $\mathbf{x}_{uuu} = \mathbf{x}_{uvu}$ ، با مقایسه مؤلفه‌های تعیین شده، به دست می‌آوریم:

$$(\mathbf{x}_u) : (\Gamma_{uu}^u)_v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - lc = (\Gamma_{uv}^u)_u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uu}^u - ma$$

$$(\diamond) (\mathbf{x}_v) : (\Gamma_{uu}^v)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - ld = (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v - mb$$

$$(\mathbf{n}) : l_v + m \Gamma_{uu}^u + n \Gamma_{uu}^v = m_u + l \Gamma_{uv}^u + m \Gamma_{uv}^v$$

با همین روش با مقایسه مؤلفه‌های مورد اشاره از $\mathbf{x}_{uvv} = \mathbf{x}_{vvu}$ در می‌یابیم:

$$(\mathbf{x}_u) : (\Gamma_{uv}^u)_v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^u - mc = (\Gamma_{vv}^u)_u + \Gamma_{vv}^v \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{vv}^v \Gamma_{uv}^v - na$$

$$(\mathbf{x}_v) : (\Gamma_{uv}^v)_v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uv}^v - md = (\Gamma_{vv}^v)_u + \Gamma_{vv}^v \Gamma_{uu}^v - nb$$

$$(\mathbf{n}) : m_v + m \Gamma_{uv}^u + n \Gamma_{uv}^v = n_u + l \Gamma_{vv}^u + m \Gamma_{vv}^v$$

دو معادله حاصل از مؤلفه قائم، معادلات زیر را نتیجه می‌دهد.

معادلات کدازی^۱

$$\begin{aligned} l_v - m_u &= l \Gamma_{uv}^u + m(\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u) - n \Gamma_{uu}^v \\ m_v - n_u &= l \Gamma_{vv}^u + m(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - n \Gamma_{uv}^v \end{aligned}$$

با استفاده از $K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$ و روابط فوق برای a, b, c, d و چهار معادله درگیر با مؤلفه‌های \mathbf{x}_v و \mathbf{x}_u نتیجه می‌دهد،

معادلات گاوس

$$\begin{aligned} EK &= (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - (\Gamma_{uv}^v)^2 \\ FK &= (\Gamma_{uv}^u)_u - (\Gamma_{uu}^u)_v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u - \Gamma_{uu}^v \Gamma_{uv}^v \\ FK &= (\Gamma_{uv}^v)_v - (\Gamma_{vv}^v)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^v \\ GK &= (\Gamma_{vv}^u)_v - (\Gamma_{uv}^u)_v + \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{vv}^v \Gamma_{uv}^u - (\Gamma_{uv}^u)^2 - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^v \end{aligned}$$

برای مثال برای به دست آوردن اولین معادله، با استفاده از معادله $((\diamond))$ در فوق داریم:

$$(\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - (\Gamma_{uv}^v)^2 = ld - mb$$

و

$$\begin{aligned} ld - mb &= \frac{1}{EG - F^2} (l(-mF + nE) + m(lF - mE)) \\ &= \frac{E(ln - m^2)}{EG - F^2} = EK \end{aligned}$$

در حالت پارامتری متعامد ($F = 0$)، به خواننده بررسی درستی رابطه زیر در تمرین ۲ واگذار می‌شود.

$$(*) \quad K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

قضیه زیر یکی از نتایج با شکوه در هندسه دیفرانسیل موضعی است.

قضیه ۱-۳ (قضیه برجسته^۱ گاوس). انحنای گاوسی فقط توسط اولین فرم اساسی I تعیین می‌شود. یعنی K می‌تواند تنها به وسیله E, F, G و اولین و دومین مشتقات جزئی آنها محاسبه شود.

اثبات از هر یک از معادلات گاوس، ملاحظه می‌شود که K با دانستن هر یک از F, E و G ، همراه با نمادهای کریستوفل و مشتقات آنها قابل محاسبه است. اما معادلات (†) نشان می‌دهند که نمادهای کریستوفل (و بنابراین مشتقات آنها) می‌توانند بر حسب F, E و G و مشتقات آنها محاسبه شوند. □

نتیجه ۲-۳ اگر دو رویه به طور موضعی ایزومتر باشند، در نقاط متناظر دارای انحنای گاوسی یکسان هستند.

برای مثال صفحه و استوانه به طور موضعی ایزومتر هستند و بنابراین استوانه (همچنان که می‌دانیم) تخت است. اکنون نتیجه گرفتیم که چون کره دارای انحنای گاوسی ناصفر است، بنابراین نمی‌تواند به طور موضعی با صفحه ایزومتر باشد. از این رو نمی‌توان زمین را «صادقانه» (با حفظ فاصله) حتی بطور موضعی روی یک تکه صفحه نگاهت. به عبارتی، نگاهت مرکاتور (تمرین ۱۱-۱-۲) بهترین کاری است که می‌توانیم انجام دهیم، گرچه فاصله‌ها را خراب می‌کند، زاویه‌ها را حفظ می‌کند. اکنون اجازه دهید معادلات کد آزی را برای اثبات یک نتیجه نسبتاً قابل توجه درباره رویه‌هایی به کار می‌بریم که برای آنها در همه جا $K = 0$ است و رویه‌های تخت نامیده می‌شوند.

گزاره ۳-۳ اگر M یک رویه تخت و بدون نقاط مسطح باشد، آنگاه M یک رویه خط کشی شده است که صفحه مماس بر آن در امتداد هر مولد ثابت است.

اثبات چون M دارای نقاط مسطح نیست، پس می‌توان فرض کرد که در همه جا $\kappa_1 = 0$ و $\kappa_2 \neq 0$. در این صورت طبق قضیه ۳-۳ از ضمیمه، یک پارامتری برای M موجود است که u -خم‌ها اولین خط‌های انحنای v -خم‌ها دومین خط‌های انحنای هستند. در آغاز

این بدین معنی است که $F = m = 0$. حال چون $\kappa_1 = 0$ برای هر $P \in M$ داریم: $SP(x_u) = 0$. بنابراین در همه جا $n_u = 0$ و در طول $-u$ خم‌ها، n ثابت است.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که $-u$ خم‌ها در واقع خطوط هستند. ابتدا

$$l = II(x_u, x_u) = SP(x_u) \cdot x_u = 0$$

و $m \neq 0$ ، چون $\kappa_2 \neq 0$ پس از اولین معادله کد آزی نتیجه می‌گیریم که

$$0 = l_v - m_u = II_{uv}^u + m(\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u) - n\Gamma_{uu}^v = -n\Gamma_{uu}^v$$

و بنابراین $\Gamma_{uu}^v = 0$. این بدین معنی است که

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + ln = \Gamma_{uu}^u x_u$$

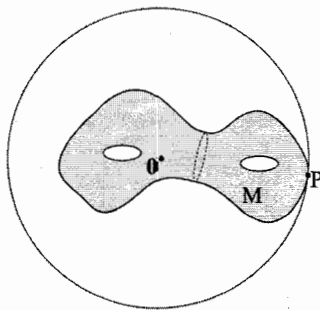
دقیقاً مضربی از x_u است. یعنی این که بردار مماس x_u در حین حرکت در طول $-u$ خم‌ها هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد که مفهوم آن این است که $-u$ خم‌ها باید خطوط باشند. در مجموع، یک رویه خط‌کشی شده داریم که صفحه مماس آن در امتداد مولدها ثابت است. □

نکته چنین رویه‌های خط‌کشی شده را قابل توسعه^۱ گویند (تمرین ۱۰ و تمرین ۱-۲-۸ را ببینید). وجه تسمیه این رویه از آن جنبه است که چنین رویه‌هایی می‌توانند روی یک صفحه باز یا پهن شوند.

در ادامه یک نتیجه سرتاسری برجسته در مورد رویه‌های فشرده بیان می‌شود (یادآوری می‌شود که یک زیر مجموعه \mathbb{R}^3 فشرده است، اگر بسته و کراندار باشد). خصیصه برجسته مجموعه‌های فشرده، قضیه مقدار ماکزیمم است: یک تابع پیوسته با مقادیر حقیقی روی یک مجموعه فشرده، مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند. با گزاره سراسر زیر شروع می‌کنیم.

گزاره ۳-۴ فرض کنیم $M \subset \mathbb{R}^3$ یک رویه فشرده باشد. آنگاه نقطه‌ای مانند $P \in M$ با $K(P) > 0$ وجود دارد.

اثبات چون M فشرده است، تابع پیوسته $f(x) = \|x\|$ ماکزیمم خود را در نقطه‌ای از M اختیار می‌کند و بنابراین همانند آنچه که در شکل ۳-۲ مشخص شده است، نقطه‌ای مثل $P \in M$ وجود دارد (که ممکن است در داخل M باشد یا نباشد)، که دورترین فاصله را تا مبدأ دارد. فرض کنیم $f(P) = R$. همچنان ۱-۲-۷ نشان می‌دهد، انحنای هر خم $\alpha \subset M$ در P حداقل $1/R$ است، بنابراین اگر بردار قائم یکه n را اشاره کننده به طرف داخل را اختیار کنیم، هر انحنای قائم M در P حداقل $1/R$ است. پس $K(P) \geq 1/R^2 > 0$ (یعنی M در P حداقل به اندازه کره محاطی به شعاع R ، مماس به M در P خمیده می‌شود). □



شکل ۳-۲

در تمرین ۱۶ از خواننده خواسته می‌شود که رویه‌های دوار با انحنا ثابت را بیابد. به طور جالبی مثال‌های غیر بدیهی بسیار وجود دارد. در هر حال اگر خود را با رویه‌های هموار محدود می‌کنیم، قضیه زیبایی زیر را داریم.

قضیه ۳-۵ (لیب مان^۱). اگر M یک رویه فشرده، هموار و با انحنا گاوسی ثابت K باشد، آنگاه $K > 0$ و M باید یک کره از شعاع $1/\sqrt{K}$ باشد. برای اثبات این قضیه به لم زیر نیاز داریم.

لم ۳-۶ (هیلبرت^۲). فرض کنیم P نقطه غیرنافی باشد و $\kappa_1 > \kappa_2$ باشد. هرگاه κ_1 در P دارای یک ماکزیمم موضعی و κ_2 دارای یک مینیمم موضعی در P باشد، آنگاه $K(P) \leq 0$.

اثبات در یک پارامتری سازی مختصاتی «اساسی» کار می‌کنیم^۳، بنابراین u -خم‌ها خطوط انحنای اصلی κ_1 و v -خم‌ها خطوط انحنای اصلی κ_2 هستند. در این صورت داریم $\kappa_1 = l/E$ ، $\kappa_2 = n/G$ و $F = m = 0$. بر طبق معادلات کدآزی و معادلات (‡) در صفحه ۷۳ داریم:

$$(*) \quad l_v = \frac{1}{E} E_v (\kappa_1 + \kappa_2) \quad \text{و} \quad n_u = \frac{1}{G} G_u (\kappa_1 + \kappa_2)$$

چون $l = \kappa_1 E$ داریم: $l_v = (\kappa_1)_v E + \kappa_1 E_v$; به طور مشابه $n_u = (\kappa_2)_u G + \kappa_2 G_u$. آنگاه با استفاده از معادلات (*) به دست می‌آوریم:

$$(**) \quad (\kappa_1)_v = \frac{E_v}{E} (\kappa_1 - \kappa_2) \quad \text{و} \quad (\kappa_2)_u = \frac{G_u}{G} (\kappa_1 - \kappa_2)$$

چون در P ، $\kappa_1 \neq \kappa_2$ و $(\kappa_1)_v = (\kappa_2)_u = 0$ نتیجه می‌گیریم که در P ، $E_v = G_u = 0$.

۱- Liebmann

۲- Hilbert

۳- چون در اینجا به طور موضعی نقاط نافی وجود ندارد، وجود چنین پارامتری، یک نتیجه فوری از قضیه ۳-۲ در ضمیمه است.

با دیفرانسیل گیری از معادلات (***) و همچنین یادآوری این که در P ، $(\kappa_1)_u = (\kappa_2)_v$ ، برابر صفر است، خواهیم داشت:

$$(\kappa_1)_{vv} = \frac{E_{vv}}{\sqrt{E}}(\kappa_2 - \kappa_1) \leq 0 \quad (\text{چون } \kappa_1 \text{ در } P \text{ دارای ماکزیمم موضعی است})$$

$$(\kappa_2)_{uu} = \frac{G_{uu}}{\sqrt{G}}(\kappa_1 - \kappa_2) \geq 0 \quad (\text{چون } \kappa_2 \text{ در } P \text{ دارای مینیمم موضعی است})$$

و بنابراین در P ، $E_{vv} \geq 0$ و $G_{uu} \geq 0$. با استفاده از معادله (*) در صفحه ۷۵، برای انحنای گاوسی، ملاحظه می کنیم که برای توابعی چون $a(u, v)$ و $b(u, v)$ داریم:

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + a(u, v)E_v + b(u, v)G_u$$

پس آنچنان که انتظار می رفت، نتیجه می گیریم $\square.K(p) \leq 0$

اثبات قضیه ۳-۵ طبق گزاره ۳-۴، نقطه ای وجود دارد که در این نقطه انحنای گاوسی M مثبت است و چون انحنای گاوسی ثابت است، باید داشته باشیم: $K > 0$. اگر هر نقطه نافی باشد، آنگاه طبق تمرین ۲-۲-۱۲، می دانیم که M یک کره است. اگر نقاط غیر نافی وجود داشته باشد، چون M فشرده است، انحنای اصلی بزرگ تر یعنی κ_1 ماکزیمم مقدار خود را در نقطه ای مانند P می گیرد. در این حالت، چون $K = \kappa_1 \kappa_2$ ثابت است، تابع $\kappa_2 = K/\kappa_1$ بایستی مینیمم خود را در P داشته باشد. به دلیل این که P لزوماً یک نقطه غیرنافی است (چرا؟)، از لم ۳-۶ نتیجه می شود که $K(P) \leq 0$ ، که تناقض است. \square

نکته هاپف^۱ نتیجه قوی تری را ثابت کرد که اثبات آن نیاز به استفاده از روش هایی در هندسه مختلط دارد. در واقع وی ثابت کرد که: اگر M یک رویه فشرده با انحنای متوسط ثابت و بطور توپولوژیکی هم ارز با یک کره باشد، آنگاه M بایستی خود یک کره باشد. « این بخش را با مشابه ای از قضیه ۳-۱ از فصل ۱ خاتمه می دهیم.

قضیه ۳-۷ (قضیه اساسی نظریه رویه ها). یگانگی: دو رویه پارامتری $x, x^* : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ بر هم منطبق هستند (یعنی در حد یک حرکت صلب با هم اختلاف دارند)، اگر و فقط اگر $I = I^*$ و $II = II^*$ وجود: به علاوه، برای توابع مفروض E, F, G, m و n با $E > 0$ و $EG - F^2 > 0$ نیز صادق در معادلات گاوس و کدازی، یک رویه (موضعی) پارامتری $x(u, v)$ با I و II مربوطه وجود دارد.

اثبات اثبات حکم وجود، جدا از آنچه ما در این مرحله به آن رسیده ایم، نیاز به قضایایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارد. اما حکم یگانگی، بسیار شبیه اثبات قضیه ۳-۱

در فصل ۱ است (اختلاف اصلی در روش در این است که دیگر سعادت کار با یک پایه متعامد در هر نقطه را نداریم، آنچنان که قبلاً از کنج فرنه استفاده می‌کردیم).

ابتدا برای حرکت صلیبی چون $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (یعنی برای یک ماتریس 3×3 متعامد A و برداری چون b)، $(\Psi(x) = Ax + b)$ ، فرض کنید $x^* = \Psi \circ x$. چون انتقال در مشتقات جزئی تأثیر ندارد، می‌توانیم فرض کنیم که $b = 0$. اکنون چون ماتریس‌های متعامد حافظ طول و ضرب داخلی هستند، در نتیجه: $E = \|x_u\|^2 = \|Ax_u\|^2 = \|x_u^*\|^2 = E^*$ و به همین ترتیب برای بقیه موارد، بنابراین $I = I^*$. اگر $\det A > 0$ آنگاه $n^* = An$ ، در غیر این صورت $\det A < 0$ و آنگاه $n^* = -An$. از این رو

$$l^* = x_{uu}^* \cdot n^* = Ax_{uu} \cdot \pm An = \pm l$$

علامت مثبت وقتی برقرار است که $\det A > 0$ و علامت منفی زمانی صدق می‌کند که $\det A < 0$. در نتیجه $II^* = II$ هرگاه $\det A > 0$ و $II^* = -II$ اگر $\det A < 0$. بالعکس، فرض کنیم $I = I^*$ و $II^* = \pm II$. با ترکیب x^* با یک انعکاس^۱ در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که $II^* = II$.

اکنون به لم زیر نیاز داریم که اثبات آن پس از اتمام اثبات قضیه بیان می‌شود.

لم ۳-۸ فرض کنیم α و α^* توابع همواری روی $[0, b]$ ، v_1, v_2, v_3 و v_1^*, v_2^*, v_3^* پایه‌هایی به طور هموار متغیر برای \mathbb{R}^3 باشند که روی $[0, b]$ به قسمی تعریف می‌شوند که،

$$v_i(t) \cdot v_j(t) = v_i^*(t) \cdot v_j^*(t) = g_{ij}(t), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^3 p_i(t) v_i(t) \quad , \quad \alpha^{*'}(t) = \sum_{i=1}^3 p_i(t) v_i^*(t)$$

$$v_j'(t) = \sum_{i=1}^3 q_{ij} v_i(t) \quad , \quad v_j^{*'}(t) = \sum_{i=1}^3 q_{ij} v_i^*(t), \quad j = 1, 2, 3$$

(توجه شود که توابع ضرایب p_i و q_{ij} برای هر دو معادله ستاره‌دار و بدون ستاره یکسان هستند). اگر $\alpha(0) = \alpha^*(0)$ و $v_j(0) = v_j^*(0)$ برای $i = 1, 2, 3$ آنگاه برای هر $t \in [0, b]$

$$v_i(t) = v_i^*(t) \quad \text{و} \quad \alpha(t) = \alpha^*(t), \quad i = 1, 2, 3$$

یک نقطه $u_0 \in U$ را ثابت فرض می‌کنیم. با ترکیب x^* با یک حرکت صلب، می‌توان فرض کرد که در u_0 داریم $x = x^*$ ، $x_u = x_u^*$ ، $x_v = x_v^*$ و $n = n^*$ (چرا؟). یک نقطه دلخواه $u_1 \in U$ را انتخاب می‌کنیم و u_0 را به u_1 توسط یک مسیر $u(t)$ برای $t \in [0, b]$ وصل می‌کنیم و لم را با $\alpha = x \circ u$ و $\alpha^* = x^* \circ u$ ، $v_1 = x_u \circ u$ ، $v_2 = x_v \circ u$ ، $v_3 = n \circ u$ و $p_i = u_i'$ تعیین شده توسط (†) و (††)، به کار می‌بریم. چون $I = I^*$ و $II = II^*$ همین معادلات برای $\alpha^* = x^* \circ u$ برقرارند و بنابراین آنچنان که انتظار می‌رفت $x(u_1) = x^*(u_1)$ یعنی دورویه پارامتری بر هم منطبق هستند. □

اثبات لم ۳-۸ تابع ماتریسی از t به صورت

$$M(t) = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1(t) & v_2(t) & v_3(t) \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

و به طور مشابه برای $M^*(t)$ را تعریف می کنیم. در این صورت معادلات ظاهر شده در صورت لم، قابل بیان به شکل زیر هستند.

$$M'(t) = M(t)Q(t) \quad \text{و} \quad M^{*\prime}(t) = M^*(t)Q(t)$$

از طرف دیگر داریم که $M(t)^T M(t) = G(t)$. چون برای هر t ، $v_i(t)$ ها یک پایه برای \mathbb{R}^3 هستند، می دانیم که ماتریس G وارون پذیر است. دیفرانسیل گیری از $G(t)G^{-1}(t) = I$ نتیجه می دهد $(G^{-1})'(t) = -G^{-1}(t)G'(t)G^{-1}(t)$ و با دیفرانسیل گیری از معادله $G(t) = M(t)^T M(t)$ حاصل می شود،

$$G'(t) = M'(t)^T M(t) + M(t)^T M'(t) = Q(t)^T G(t) + G(t)Q(t)$$

حال فرض کنید:

$$\begin{aligned} (M^*G^{-1}M^T)'(t) &= M^{*\prime}(t)G(t)^{-1}M(t)^T + M^*(t)(G^{-1})'(t)M(t)^T \\ &\quad + M^*(t)G(t)^{-1}M'(t)^T \\ &= M^*(t)Q(t)G(t)^{-1}M(t)^T + M^*(t)(-G(t)^{-1}G'(t) \\ &\quad G(t)^{-1})M(t)^T + M(t)^*G(t)^{-1}Q(t)^T M(t)^T \\ &= M^*(t)Q(t)G(t)^{-1}M(t)^T - M^*(t)G(t)^{-1}Q(t)^T M(t)^T \\ &\quad - M^*(t)Q(t)G(t)^{-1}M(t)^T + M^*(t)G(t)^{-1}Q(t)^T M(t)^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

چون $M(0) = M^*(0)$ داریم:

$$M^*(0)G(0)^{-1}M(0)^T = M(0)M(0)^{-1}M(0)^T = I$$

و بنابراین برای هر $t \in [0, b]$ ، $M^*(t)G(t)^{-1}M(t)^T = I$ ، $t \in [0, b]$ و بنابراین برای هر $t \in [0, b]$ ، در نتیجه برای هر $t \in [0, b]$ ، $M^*(t) = M(t)$ و از این رو مجدداً برای هر t ، $\alpha^*(t) - \alpha'(t) = 0$. چون $\alpha^*(0) = \alpha(0)$ در نتیجه همان طور که می خواستیم اثبات کنیم برای هر $t \in [0, b]$ ، $\alpha(t) = \alpha^*(t)$. \square

تمرین ۲-۳

(۱) نمادهای کریستوفل را برای یک مخروط، $x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ، به دو روش مستقیم و استفاده از فرمول های (+) بیابید.

(۲) با استفاده از اولین معادله گاوس، رابطه (*) در صفحه ۷۵ برای انحناى گاوس را به دست آورید.

(۳) انحناى گاوسى کره را با استفاده از رابطه (*) در صفحه ۷۵ بررسی کنید.

(۴) برای یک رویه پارامتری با $E = G = \lambda(u, v)$ و $F = 0$ ، بررسی کنید که انحناى گاوسى از رابطه $K = -\frac{1}{\lambda} \nabla^2 (\ln \lambda)$ به دست می آید (در اینجا $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ لاپلاسین f است).

(۵) نمادهای کریستوفل را برای رویه‌های پارامتری زیر محاسبه کنید. آنگاه صحت معادلات کدآزی و اولین معادله گاوس را بررسی کنید.

a. صفحه پارامتری شده با مختصات قطبی: $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0)$.

b. یک حلزونی: $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, cu)$.

c. یک مخروط: $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$.

d. یک رویه دوار: $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$.

(۶) ثابت کنید که هیچ رویه $M \subset \mathbb{R}^3$ وجود ندارد که فشرده مینیمال باشد.

(۷) تعیین کنید آیا رویه پارامتری $\mathbf{x}(u, v)$ باموارد زیر وجود دارد؟

a. $m = 0, l = 1 = -n, F = 0, E = G = 1$.

b. $m = 0, l = 1 = -n, F = 0, E = G = 1$.

c. $n = 1, m = 0, l = \cos^2 u, G = \cos^2 u, F = 0, E = 1$.

(۸) اثبات قضیه ۳-۵ را بهتر سازید، با اثبات این که یک رویه فشرده هموار با $K > 0$ و انحناى متوسط ثابت، یک کره است.

b. با یک مثال نشان دهید که نتیجه لم ۳-۶ با فرض κ_1 داراى مینیمم موضعی در نقطه P و κ_2 داراى ماکزیمم موضعی در نقطه P غلط است.

(۹) مثالی از رویه‌های پارامتری $\mathbf{x}(u, v)$ و $\mathbf{x}^*(u, v)$ با شرایط زیر بنویسید که (به طور موضعی) قابل انطباق نیستند.

a. $\mathbf{I} = \mathbf{I}^*$.

b. $\mathbf{II} = \mathbf{II}^*$ (راهنمایی: سعی کنید بعضی از ساده‌ترین رویه‌ها را دوباره پارامتری کنید).

۱۰) پارامتری $\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ از یک رویه خط کشی شده را در نظر بگیرید. ثابت کنید که صفحه مماس در طول هادی‌ها ثابت است (یعنی رویه تخت است)، اگر فقط اگر $\alpha'(u)$ ، $\beta(u)$ و $\beta'(u)$ برای هر u مستقل خطی باشند (راهنمایی: به هنگامی $\mathbf{x}_v = 0$ به جای آن $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ را در نظر بگیرید و تمرین ۱-۲-۳ را به کار ببرید).

۱۱) ثابت کنید α یک خط انحنای در M است، اگر فقط اگر رویه خط کشی شده حاصل از قائم‌های رویه در طول α ، تخت باشد (راهنمایی تمرین ۱۰ را ببینید).

۱۲) نشان دهید که انحنای گاوسی رویه‌های پارامتری زیر برای هر (u, v) برابر است، هر چند اولین فرم‌های اساسی I_x و I_y مساوی نیستند (بنابراین عکس نتیجه ۳-۲ غلط است).

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

$$\mathbf{y}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln u)$$

۱۳) فرض کنید که رویه M بطور مکرر توسط خطوط متعامد خط کشی شده باشد (یعنی از هر نقطه M دو خط متعامد می‌گذرد).

a. با استفاده از معادلات گاوس، ثابت کنید که $K = 0$.

b. اکنون نتیجه بگیرید که M باید یک صفحه باشد.

(راهنمایی: به طور معمول خانواده خط‌ها، u -خم‌ها و v -خم‌ها هستند).

۱۴) فرض کنید M یک رویه بدون نقاط نافی باشد که یک انحنای اصلی ثابت $\kappa_1 \neq 0$ دارد. ثابت کنید که M (یک زیر مجموعه) تیوب (چنبره) به شعاع $r = 1/|\kappa_1|$ حول یک خم است. یعنی یک خم α وجود دارد به قسمی که M (یک زیر مجموعه) اتحاد دایری به شعاع r و مرکزهایی در طول خم، در هر صفحه قائم است. (راهنمایی: به طور معمول با یک پارامتری کار کنید که u -خم‌ها، خط‌های انحنای آن و با انحنای اصلی κ_1 باشند و v -خم‌ها، خط‌های انحنای آن با انحنای اصلی κ_2 باشند. از معادلات کدآزی استفاده کنید برای اینکه نشان دهید که u -خم‌ها مسطح و دارای انحنای $|\kappa_1|$ هستند. آنگاه به طور اختصاصی α را تعریف کنید و بررسی کنید که منظم است.)

(۱۵) رویه‌های پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{x}(u, v) = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, u) \quad (\text{یک کاتنویید})$$

$$\mathbf{y}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad (\text{یک حلزونی})$$

a. اولین و دومین فرم اساسی هر دو رویه را محاسبه کنید و بررسی کنید که هر دو مینیمال هستند.

b. خم‌های مجانبی هر دو رویه را به دست آورید.

c. نشان دهید که می‌توان حلزونی را مجدداً بطور موضعی چنان پارامتری کرد که اولین فرم‌های اساسی دورویه مساوی شوند، به این معنی که دورویه به طور موضعی ایزومتر هستند. (راهنمایی: صفحه ۴۸ را ببینید. در پارامتری حلزونی به جای u قرار دهید $\sinh u$. چرا این کار مجاز است؟)

d. چرا این دورویه به طور کلی ایزومتر نیستند؟

e. (برای افرادی که مقداری در مورد متغیرهای مختلط می‌دانند) به عنوان یک راهنمایی برای آنچه که در اینجا آمد، فرض کنیم $z = u + iv$ و $Z = x + iy$. با ادامه جایگذاری از قسمت c، بررسی کنید که $Z = (\sin iz, \cos iz, z)$. حال می‌دانیم که چگونه می‌توان یک خانوادهٔ یک پارامتری از رویه‌های ایزومتر را یافت که فاصلهٔ بین حلزونی و هلیکویید را پر کنند.

(۱۶) همهٔ رویه‌های دوار با هر یک از انحناهای ثابت زیر را بیابید.

$$K = 0. \quad \text{a.}$$

$$K = 1. \quad \text{b.}$$

$$K = -1. \quad \text{c.}$$

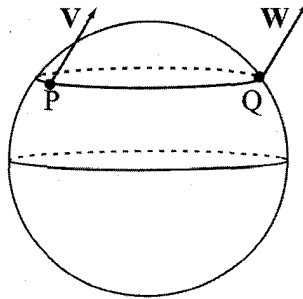
(راهنمایی: خیلی بیشتر از آنچه که شما گمان می‌کنید از این رویه‌ها وجود دارد. اما جواب‌های شما با انتگرال‌هایی سر و کار دارد که نمی‌توانید بر حسب توابع مقدماتی بیان کنید.)

۲-۴ مشتق همورد، انتقال موازی و ژئودزی‌ها

اکنون به هندسه ذاتی رویه‌ها برمی‌گردیم، یعنی هندسه‌ای که توسط یک ساکن (برای مثال یک مورچهٔ مسطح) روی رویه قابل مشاهده است، کسی که تنها قادر به درک اتفاقات روی (یا به بیانی مماس بر) رویه است. هر شخصی که هندسهٔ اقلیدسی را مطالعه کرده است، اهمیت مفهوم توازی را می‌داند (و هندسه نااقلیدسی کلاسیک هنگامی پدید آمد که اصل توازی اقلیدس حذف شد که قید می‌کرد برای هر خط L در صفحه و هر نقطهٔ P غیر واقع بر L ، یک خط یگانه گذرا بر P و موازی با L وجود دارد). با کار کردن فقط در \mathbb{R}^3 ، با بیانی کاملاً شهودی، دو بردار V (که «مماس بر P » در نظر گرفته می‌شود) و W (که

«مماس بر Q » در نظر گرفته می‌شود) را با این شرط موازی گویند که به بردار W برسیم هرگاه بردار V را از نقطه P به نقطه Q به طور موازی با خودش حرکت دهیم؛ به عبارت دیگر، اگر $W = V$. اما یک ساکن رویه در این مورد چه می‌تواند بگوید؟ وی چگونه می‌تواند یک بردار مماس در یک نقطه از رویه را با یک بردار مماس در نقطه دیگر مقایسه کند و معین کند که آنها «موازی» هستند یا نه؟ (شکل ۴ - ۱) شاید سؤال بهتر این باشد: برای یک خم مفروض α روی رویه و یک میدان برداری X ، تعریف شده در طول α ، آیا می‌توان گفت که X موازی است اگر دارای مشتق صفر در طول α باشد؟

پیش از این می‌دانستیم که چگونه یک ساکن رویه از یک تابع عددی $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ، با در نظر گرفتن مشتق سویی $D_V f$ برای هر بردار مماس $V \in T_P M$ دیفرانسیل‌گیری می‌کند. اکنون با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.



شکل ۴ - ۱

(آیا W و V موازی هستند؟)

تعریف یک تابع $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ را یک میدان برداری روی M گویند هرگاه،

$$(۱) \quad X(P) \in T_P M, P \in M$$

(۲) برای هر پارامتری $x: U \rightarrow M$ تابع $X \circ x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (پیوسته) دیفرانسیل‌پذیر باشد.

حال می‌توانیم از یک میدان برداری X روی M را به روش معمولی دیفرانسیل‌گیری کنیم، اگر $V \in T_P M$ ، یک خم α با $\alpha(0) = P$ و $\alpha'(0) = V$ اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم $D_V X = (X \circ \alpha)'(0)$ (به طور عادی قاعده زنجیری به ما می‌گوید که این خوش تعریف است). ولی ساکنین رویه تنها قادر به مشاهده قسمتی از این بردار هستند که در صفحه مماس قرار دارد. این مطلب ما را به تعریف زیر راهنمایی می‌کند.

تعریف برای یک میدان برداری X و یک $V \in T_P M$ مشتق همورد^۲ را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم:

۱ - vector field

۲ - covariant derivative

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{X} = (D_{\mathbf{V}}\mathbf{X})^{\parallel} = T_P M \text{ روی } D_{\mathbf{V}}\mathbf{X} = D_{\mathbf{V}}\mathbf{X} - (D_{\mathbf{V}}\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

برای خم مفروض α روی M ، میدان برداری \mathbf{X} را همورد ثابت یا موازی در طول α گویند اگر برای هر t ، $\nabla'_{\alpha}(t)\mathbf{X} = 0$ (این بدین معنی است که $(\mathbf{X}\alpha\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}\mathbf{X}$ مضربی از بردار قائم $\mathbf{n}(\alpha(t))$ است).

مثال ۱ اگر M یک کره و α دایره عظیمه در M باشد، مشتق بردار مماس یکه بر α به طرف مرکز دایره عظیمه اشاره می‌کند که در اینجا همان مرکز کره است و بنابراین کاملاً به کره عمود است. از این رو میدان برداری مماس یکه α ، در امتداد α موازی است. ملاحظه می‌شود میدان برداری ثابت $(0, 0, 1)$ در امتداد خط استوای $z = 0$ از یک کره به مرکز مبدأ، موازی است. آیا مطلب اخیر برای هر میدان برداری ثابت صحیح است؟ ∇ ؟

مثال ۲ یک مثال اساسی مستلزم بازیینی نمادهای کریستوفل است. با در نظر گرفتن رویه پارامتری $\mathbf{x}: U \rightarrow M$ ، داریم:

$$\nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_{uu})^{\parallel} = \Gamma_{uu}^u\mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v\mathbf{x}_v$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_{uv})^{\parallel} = \Gamma_{uv}^u\mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v\mathbf{x}_v = \nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_v$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_{vv})^{\parallel} = \Gamma_{vv}^u\mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v\mathbf{x}_v \quad \nabla$$

اولین نتیجه‌ای که ثابت می‌کنیم به صورت زیر است.

گزاره ۴-۱ برای خم مفروض $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ با $\alpha(0) = P$ و $\mathbf{X}_0 \in T_P M$ ، یک میدان برداری منحصربه فرد \mathbf{X} موجود است که در امتداد α به صورت $\mathbf{X}(p) = \mathbf{X}_0$ تعریف می‌شود.

اثبات فرض کنیم α در تکه پارامتری (نقشه) $\mathbf{x}: U \rightarrow M$ واقع شود، قرار می‌دهیم $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ و می‌نویسیم:

$$\mathbf{X}(\alpha(t)) = a(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t))$$

در این صورت $\alpha'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v$ (در حالی که متغیر پر زحمت $(u(t), v(t))$ مستفاد است). بنابراین طبق قاعده‌های حاصلضرب و زنجیری داریم:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'(t)}\mathbf{X} &= (\mathbf{X}\alpha\alpha)'(t)^{\parallel} = \left(\frac{d}{dt}(a(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t)))\right)^{\parallel} \\ &= a'(t)\mathbf{x}_u + b'(t)\mathbf{x}_v + a(t)\left(\frac{d}{dt}\mathbf{x}_u(u(t), v(t))\right)^{\parallel} + b(t)\left(\frac{d}{dt}\mathbf{x}_v(u(t), v(t))\right)^{\parallel} \\ &= a'(t)\mathbf{x}_u + b'(t)\mathbf{x}_v + a(t)(u'(t)\mathbf{x}_{uu} + v'(t)\mathbf{x}_{uv})^{\parallel} + b(t)(u'(t)\mathbf{x}_{vu} + v'(t)\mathbf{x}_{vv})^{\parallel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a'(t)\mathbf{x}_u + b'(t)\mathbf{x}_v + a(t)(u'(t)(\Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_v) + v'(t)(\Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_v)) \\
 &+ b(t)(u'(t)(\Gamma_{vu}^v \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v) + v'(t)(\Gamma_{vu}^v \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v)) \\
 &= (a'(t) + a(t)(\Gamma_{uu}^u u'(t) + \Gamma_{uv}^u v'(t)) + b(t)(\Gamma_{vu}^u u'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)))\mathbf{x}_u \\
 &+ (b'(t) + a(t)(\Gamma_{uv}^u u'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)) + b(t)(\Gamma_{vu}^v u'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)))\mathbf{x}_v
 \end{aligned}$$

در نتیجه گفتن این که \mathbf{X} در طول α موازی است معادل با این است که $a(t)$ و $b(t)$ جواب‌های دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر هستند.

$$\begin{aligned}
 (\clubsuit) \quad &a'(t) + a(t)(\Gamma_{uu}^u u'(t) + \Gamma_{uv}^u v'(t)) + b(t)(\Gamma_{vu}^u u'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)) = 0 \\
 &b'(t) + a(t)(\Gamma_{uv}^u u'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)) + b(t)(\Gamma_{vu}^v u'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)) = 0
 \end{aligned}$$

حال طبق قضیه ۳-۲ از ضمیمه اگر $a(0)$ و $b(0)$ مشخص باشند، این دستگاه در فاصله $[0, 1]$ دارای یک جواب یگانه است و بنابراین یک میدان برداری موازی \mathbf{X} با $\mathbf{X}(P) = \mathbf{X}_0$ به دست آورده‌ایم. \square

تعریف در قضیه فوق اگر $Q = \alpha(1)$ ، آنگاه به $\mathbf{X}(Q)$ ، به عنوان انتقال موازی \mathbf{X}_0 در طول α یا نتیجه انتقال موازی در طول α رجوع می‌کنیم.

مثال ۳ یک دایره عرضی $u = u_0$ ($u_0 \neq 0, \pi$) را روی کره واحد، ثابت فرض می‌کنیم و اثر انتقال موازی بردار $\mathbf{X}_0 = x_v$ با شروع از نقطه P و با مختصات $v = 0, u = u_0$ را حول این دایره در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بررسی می‌کنیم. این خم را توسط $0 \leq t \leq 2\pi, v(t) = t, u(t) = u_0$ پارامتری می‌کنیم. با استفاده از محاسبه قبلی خود در مورد نمادهای کریستوفل برای کره در مثال ۱ یا ۲ از بخش ۳، از (\clubsuit) ، معادلات دیفرانسیل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 a'(t) &= \sin u_0 \cos u_0 b(t), & a(0) &= 0 \\
 b'(t) &= \cot u_0 a(t), & b(0) &= 1
 \end{aligned}$$

این دستگاه را با دیفرانسیل‌گیری مجدد از معادله دوم و جایگذاری در معادله اول، حل می‌کنیم:

$$b''(t) = -\cot u_0 a'(t) = -\cos^2 u_0 b(t), \quad b(0) = 1$$

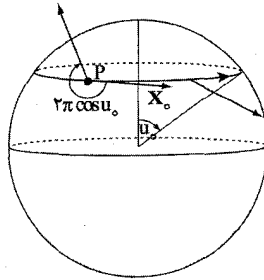
بنابراین جواب عبارت است از:

$$a(t) = \sin u_0 \sin((\cos u_0)t), \quad b(t) = \cos((\cos u_0)t)$$

قابل توجه است که برای هر t ، $\|X(\alpha(t))\|^2 = Ea(t)^2 + 2fa(t)b(t) + gb(t)^2$ ، یعنی بردار اولیه X هنگام انتقال موازی حول دایرهٔ عرضی، دوران می‌کند و طول آن حفظ می‌شود. همان طور که در شکل (۲-۴) مشاهده می‌شود هنگام سیر روی دایرهٔ عرضی (در نیم کرهٔ بالایی)، بردار در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند.

مثال ۴ (آونگ فوکالت^۱) فوکالت در ۱۸۵۱ مشاهده کرد که صفحهٔ نوسان یک آونگ که روی دایرهٔ عرضی $u = u_0$ واقع است، با تناوب $T = 24 / \cos u_0$ ساعت پیش می‌رود (جلو می‌افتد). برای توضیح این مطلب می‌توانیم از نتیجهٔ مثال ۳ استفاده کنیم. زمین را ثابت تصور می‌کنیم و آونگ نوسان کننده را یک بار حول دایره در ۲۴ ساعت «انتقال» می‌دهیم. اگر آونگ را بسیار دراز بسازیم و نسبتاً کوتاه نوسان دهیم، حرکت «اساساً» بر سطح کره مماسی خواهد بود: به خصوص با فرض R نمایش دهندهٔ شعاع زمین، مؤلفهٔ مماسی شتاب جانب مرکز (شکل ۴ - ۲) عبارت است از:

$$(R \sin u_0) \cos u_0 \left(\frac{2\pi}{24}\right)^2 \leq \frac{2\pi^2 R}{24^2} \approx 0.0558 \text{ ft/sec}^2 \approx 0.17\%$$



شکل ۴ - ۲

بنابراین «میدان برداری نوسان» برای همهٔ اهداف عملی، در طول خم موازی است. از این رو اگر تحت زاویهٔ 2π در یک سیر حول دایره بچرخد، آنگاه $\frac{2\pi}{(2\pi \cos u_0)/24} = \frac{24}{\cos u_0}$ ساعت طول می‌کشد تا به صفحهٔ نوسان اولیهٔ خود برگردد.

تجربهٔ ما در مثال ۳، گزارهٔ زیر را پیشنهاد می‌کند.

گزاره ۲-۴ انتقال موازی حافظ طول و زاویه است. یعنی اگر X و Y دو میدان برداری موازی در طول یک خم از P به Q باشند، آنگاه $\|X(P)\| = \|Y(Q)\|$ و زاویهٔ بین $X(P)$ و $Y(P)$ برابر با زاویهٔ بین $X(Q)$ و $Y(Q)$ است.

اثبات فرض کنیم $f(t) = X(\alpha(t)).Y(\alpha(t))$ در این صورت:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (X\alpha)'(t).(Y\alpha)(t) + X\alpha(t).(Y\alpha)'(t) \\ &= D_{\alpha'(t)}X.Y + X.D_{\alpha'(t)}Y \stackrel{(1)}{=} \nabla_{\alpha'(t)}X.Y + X.\nabla_{\alpha'(t)}Y \stackrel{(2)}{=} 0. \end{aligned}$$

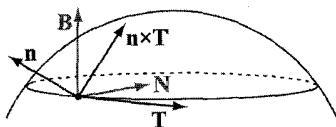
توجه شود که دلیل تساوی (۱) این است که X و Y بر M مماس هستند و بنابراین حاصلضرب داخلی آنها با هر بردار عمود بر رویه صفر است. همچنین دلیل تساوی (۲) این است که X و Y در طول α موازی فرض شده‌اند.

در نتیجه حاصلضرب داخلی $X.Y$ در طول α ثابت می‌ماند. با فرض حالت $Y = X$ در می‌یابیم که $\|X\|$ (و به طور مشابه $\|Y\|$) ثابت است. همچنین با توجه به فرمول معروف $\cos \theta = X.Y / \|X\|\|Y\|$ برای زاویه θ بین X و Y ، نتیجه می‌شود که زاویه هم ثابت می‌ماند. \square

اکنون تا حدودی سیر مطلب را تغییر می‌دهیم. در تمرین ۱-۱-۸ دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر واصل دو نقطه در R^3 یک پاره خط است. یک مشخصه پاره خط این است که هیچ گاه جهت عوض نمی‌کند، به این معنی که بردار مماس یکه آن در همه نقاط موازی است (بنابراین با چرخش هیچ فاصله‌ای از بین نمی‌رود). پذیرفتنی است که به طور مشابه بدون چرخش، ساکنین افسانه‌ای رویه ما M سعی کنند که از یک نقطه به نقطه دیگر M با ماندن در M ، سفر کنند، یعنی به قسمی که میدان برداری مماس یکه وی در امتداد مسیر او موازی باشد. به طور فیزیکی این مطلب به این مفهوم است که اگر وی با سرعت ثابت سفر کند، شتاب باید بر رویه عمود باشد. این مطلب ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

تعریف یک خم پارامتری α روی رویه M را یک ژئودزی^۱ گوییم اگر میدان برداری مماس در طول خم موازی باشد یعنی $\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0$.

یادآوری می‌شود که چون انتقال موازی حافظ طول است، α بایستی دارای سرعت ثابت باشد، هر چند ممکن است یک پارامتری با طول قوس نباشد. به طور کلی به یک خم غیر پارامتری به عنوان یک ژئودزی ارجاع می‌دهیم اگر پارامتری مجدد آن بر حسب طول قوس، در واقع یک ژئودزی باشد.



شکل ۴ - ۳

کنج های فرنه و داربوکس

در حالت کلی برای هر خم مفروض α با پارامتری طول قوس واقع بر M ، انحنای قائم آن را در انتهای بخش ۲ تعریف کردیم. بر این اساس است که، به جای استفاده از کنج فرنه، طبیعی است که کنج داربوکس^۱ برای α در نظر گرفته شود (هر دو در شکل ۴ - ۳ تصویر شده‌اند) چون این واقعیت را به حساب می‌آورد که α روی رویه M قرار دارد. پایه متعامد یک‌ه راست‌گرد $\{T, n \times T, n\}$ را در نظر می‌گیریم، توجه شود که دو بردار اول یک پایه برای TPM تشکیل می‌دهند. می‌توانیم بردار انحنا را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$\kappa N = \underbrace{(\kappa N \cdot (n \times T))}_{\kappa_g} (n \times T) + \underbrace{(\kappa N \cdot n)}_{\kappa_n} n$$

همچنان که قبلاً مشاهده کردیم، κ_n مؤلفه قائم از بردار انحنا را بیان می‌کند و κ_g مؤلفه مماسی بردار انحنا را می‌دهد و انحنای ژئودزی نامیده می‌شود. این نام‌گذاری ناشی از این حقیقت است که α یک ژئودزی است اگر و فقط اگر انحنای ژئودزی آن صفر باشد.

مثال ۵ در مثال ۱ دیدیم که هر دایره عظیمه روی کره یک ژئودزی است. آیا ژئودزی‌های دیگری هم وجود دارند؟ فرض کنیم α یک ژئودزی روی کره به مرکز مبدأ باشد. چون $\kappa_g = 0$ ، برای هر s بایستی بردار شتاب $\alpha''(s)$ برای هر s ، باید مضرربی از $\alpha(s)$ باشد و بنابراین $\alpha'' \times \alpha = 0$. در نتیجه $\alpha' \times \alpha = A$ یک بردار ثابت است و از این رو α در صفحه‌ای گذرا بر مبدأ و با بردار قائم A ، واقع است. یعنی α یک دایره عظیمه است. ∇

حال با استفاده از معادلات (♣) اجازه دهید معادلاتی ارائه شود که خم $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ صادق در آنه ایک ژئودزی باشد. چون $X = \alpha'(t) = u'(t)x_u + v'(t)x_v$ داریم $a(t) = u'(t)$ و $b(t) = v'(t)$ و معادلات حاصل عبارتند از:

$$\begin{aligned} (\clubsuit\clubsuit) \quad & u''(t) + \Gamma_{uu}^u u'(t)^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'(t)v'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)^2 = 0 \\ & v''(t) + \Gamma_{uu}^v u'(t)^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'(t)v'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)^2 = 0 \end{aligned}$$

نتیجهٔ زیر منتج از نتایج اساسی در معادلات دیفرانسیل است (قضیه ۱ - ۳ از ضمیمه را ببینید).

گزاره ۳-۴ برای هر نقطهٔ مفروض $P \in M$ و هر بردار غیر صفر $V \in T_P M$ ، یک $\epsilon > 0$ و یک ژئودزی یگانه $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ با $\alpha(0) = P$ و $\alpha'(0) = V$ وجود دارد.

مثال ۶ حال از معادلات (♣♣♣)، جهت حل ژئودزی‌های، به روش تحلیلی برای چند مثال می‌پردازیم.

(a) فرض کنیم $x(u, v) = (u, v)$ پارامتری صریحی از صفحه باشد. آنگاه همهٔ نمادهای کریستوفل صفر هستند و ژئودزی‌ها جواب دستگاه زیر هستند:

$$u''(t) = v''(t) = 0$$

بنابراین آن چنان که انتظار می‌رفت، خطوط $\alpha(t) = (u(t), v(t)) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$ را به دست می‌آوریم. توجه شود که در واقع α دارای سرعت ثابت است. (b) با استفاده از پارامتری در مختصات کروی استاندارد، معادلات زیر را به دست می‌آوریم (مثال‌های ۱ و ۲ از بخش ۳ را ببینید).

$$(*) \quad u''(t) - \sin u(t) \cos u(t) v'(t)^2 = 0 = v''(t) + 2 \cot u(t) u'(t) v'(t)$$

یک مجموعهٔ واضح از جواب عبارتند از $u(t) = t$ و $v(t) = 0$ (که همان دایرهٔ عظیمهٔ گذرا بر قطب شمال است). در حالت کلی‌تر اجازه دهید شرط اضافی خم پارامتری با طول قوس را اعمال کنیم:

$$(**) \quad u'(t)^2 + \sin^2 u(t) v'(t)^2 = 1$$

با انتگرال‌گیری از معادله در (*) به دست می‌آوریم:

$$\ln v'(t) = -2 \ln \sin u(t) + \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین برای یک مقدار ثابت c ,

$$v'(t) = \frac{c}{\sin^2 u(t)}$$

با قرار دادن این مطلب در اولین معادله از (*) درمی‌یابیم که

$$u''(t) - \frac{c^2 \cos u(t)}{\sin^4 u(t)} = 0$$

با ضرب دو طرف در $u'(t)$ («حقیقهٔ انرژی» در فیزیک) و انتگرال‌گیری برای یک ثابت C به دست می‌آوریم،

$$u'(t)^2 = C^2 - \frac{c^2}{\sin^2 u(t)}$$

و بنابراین

$$u'(t) = \pm \sqrt{C^2 - \frac{c^2}{\sin^2 u(t)}}$$

به دلایل روشن با تأکید روی نماد لاینیز به دست می‌آوریم،

$$\frac{dv}{du} = \frac{v'(t)}{u'(t)} = \pm \frac{c \csc^2 u \, du}{\sqrt{C^2 - c^2 \csc^2 u}}$$

بنابراین از جداسازی متغیرها حاصل می‌شود:

$$dv = \pm \frac{c \csc^2 u \, du}{\sqrt{C^2 - c^2 \csc^2 u}} = \pm \frac{c \csc^2 u \, du}{\sqrt{(C^2 - c^2) - c^2 \cot^2 u}}$$

اکنون جایگذاری $c \cot u = \sqrt{C^2 - c^2} \sin w$ را انجام می‌دهیم؛ آنگاه خواهیم داشت:

$$dv = \pm \frac{c \csc^2 u \, du}{\sqrt{(C^2 - c^2) - c^2 \cot^2 u}} = \mp dw$$

و در نتیجه از آخرین عبارت برای یک ثابت a داریم: $w = \pm v + a$. پس

$$\begin{aligned} c \cot u = \sqrt{C^2 - c^2} \sin w &= \sqrt{C^2 - c^2} \sin(\pm v + a) \\ &= \sqrt{C^2 - c^2} (\sin a \cos v \pm \cos a \sin v) \end{aligned}$$

و بالاخره معادله زیر به دست می‌آید،

$$c \cos u + \sqrt{C^2 - c^2} \sin u (A \cos v + B \sin v) = 0$$

که مشخص است که معادله یک دایره عظیمه (در صفحه $(\sqrt{1 - c^2}(Ax + By) + cz = 0$)

است. ∇ .

اکنون می‌توانیم یک توصیف زیبای هندسی از ژئودزی‌ها روی یک رویه دوار ارائه دهیم.

گزاره ۴-۴ (رابطه کلیراوت^۱) ژئودزی‌ها روی یک رویه دوار در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$r \cos \Phi = C \quad (\diamond)$$

در اینجا r فاصله از محور دوران، Φ زاویه بین ژئودزی و موازی (مدار) است و C نیز یک مقدار ثابت است. بالعکس هر خم صادق در (\diamond) که موازی نباشد یک ژئودزی است.

اثبات برای رویهٔ دوار پارامتری شده در مثال ۷ از بخش ۲، داریم: $G = 0$, $F = 0$, $E = 1$.
 $\Gamma_{uv}^u = -f(u) f'(u)$, $\Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v = f'(u)/f(u)$, $f(u)^2$ و بقیهٔ نمادهای کریستوفل صفر هستند (تمرین ۳-۲-۳ را ببینید). بنابراین دستگاه معادلات دیفرانسیل (♣♣) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} (\dagger_1) \quad & u'' - \frac{f f'(v')^2}{f} = 0 \\ (\dagger_2) \quad & v'' + \frac{2 f'}{f} u' v' = 0 \end{aligned}$$

با بازنویسی (\dagger_1) خواهیم داشت:

$$\frac{v''(t)}{v'(t)} = -\frac{2 f'(u(t)) u'(t)}{f(u(t))}$$

اکنون از انتگرال‌گیری رابطهٔ فوق برای مقدار ثابت c ، حاصل می‌شود:

$$\ln v'(t) = -2 \ln f(u(t)) + c$$

$$v'(t) = \frac{c}{f(u(t))^2}$$

بنابراین در طول یک ژئودزی مقدار $Gv' = f(u)^2 v'$ ثابت است. قابل تشخیص است که عبارت آخر حاصل ضرب نقطه‌ای ژئودزی ما با بردار x_v است و نتیجه می‌گیریم که $\|x_v\| \cos \Phi = r \cos \Phi$ ثابت است (یادآوری می‌شود که بردار مماس بر ژئودزی‌ها دارای طول ثابت است).

تا اینجا دیدیم که معادلهٔ (\dagger_2) هم ارز با شرط مقدار ثابت $r \cos \Phi$ است، مشروط بر این که فرض کنیم مقدار $\|\alpha'\|^2 = u'^2 + Gv'^2$ نیز ثابت است. اما اگر برای یک مقدار ثابت c داشته باشیم:

$$u'(t)^2 + Gv'(t)^2 = u'(t)^2 + f(u(t))^2 v'(t)^2 = c.$$

پس از دیفرانسیل‌گیری خواهیم داشت:

$$u'(t)u''(t) + f(u(t))^2 v'(t)v''(t) + f(u(t))f'(u(t))u'(t)v'(t)^2 = 0$$

حال با استفاده از (\dagger_2) با جایگذاری $v''(t)$ ، به دست می‌آوریم:

$$u'(t)(u''(t) - f(u(t))f'(u(t))v'(t)^2) = 0$$

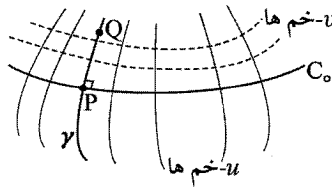
به عبارت دیگر به شرط این که $u'(t) \neq 0$ ، یک خم با سرعت ثابت صادق در شرط (\dagger_1) ، در شرط (\dagger_2) نیز صدق می‌کند (برای حالت موازی‌ها، تمرین ۵ را ببینید). □

نکته می‌توانیم یک تعبیر فیزیکی ساده از رابطهٔ کلی‌راوت ارائه دهیم. یک ذره را تصور کنید که برای حرکت در امتداد یک رویه ساخته شده است. اگر هیچ نیروی خارجی عمل نکند، اندازهٔ حرکت زاویه‌ای در حین حرکت ذره در امتداد یک ژئودزی حفظ می‌شود. در حالتی که رویه ما دوار باشد، مؤلفهٔ قائم از اندازهٔ حرکت زاویه‌ای $L = \alpha \times \alpha'$ با تعجب $f^2 v'$

است که نشان خواهیم داد که ثابت است. شاید مقداری نیروی قائم به رویه لازم باشد تا ذره روی رویه بماند، آنگاه گشتاورهای حاصل هیچ مؤلفهٔ قائمی ندارند، تا آنجایی که $(\alpha \times n) \cdot (0, 0, 1) = 0$

به انگیزه اصلی خود برای ژئودزی‌ها برمی‌گردیم، اکنون مطلب زیر را ثابت می‌کنیم. گزاره ۴ - ۵ ژئودزی‌ها بطور موضعی کوتاه‌کنندهٔ فاصله هستند.

اثبات نقطهٔ دلخواه $P \in M$ و یک ژئودزی γ ، گذرا بر P را اختیار می‌کنیم. با رسم خم C_0 گذرا بر P و عمود بر γ آغاز می‌کنیم. حال پارامتری $x(u, v)$ را برای رویهٔ M اختیار می‌کنیم، با این شرط که $x(0, 0) = P$ ، خم‌ها ژئودزی‌های عمود بر C_0 و $-v$ خم‌ها مسیرهای عمود بر $-u$ خم‌ها، (از قضیهٔ ۳ - ۳ در ضمیمه نتیجه می‌شود که می‌توان چنین کاری را در یک همسایگی از P انجام داد). می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر نقطهٔ $Q = x(u_0, 0)$ روی γ ، هر مسیری از P به Q حداقل با طول قطعه ژئودزی است.



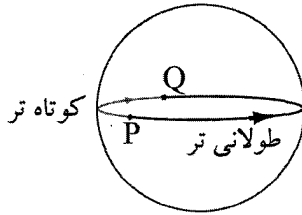
شکل ۴ - ۴

در این پارامتری داریم $F = 0$ و $E = E(u)$ (تمرین ۱۰ را ببینید). اکنون اگر برای $a \leq t \leq b$ ، هر مسیری از $P = x(0, 0)$ به $Q = x(u_0, 0)$ باشد، برای طول l_α داریم:

$$l_\alpha = \int_a^b \sqrt{E(u(t))u'(t)^2 + G(u(t), v(t))v'(t)^2} dt \geq \int_a^b \sqrt{E(u(t))}|u'(t)| dt \geq \int_0^{u_0} \sqrt{E(u)} du$$

که طول قطعه ژئودزی γ از P به Q است. \square

مثال ۷ چرا قضیهٔ ۴ - ۵ یک حکم موضعی است؟ همچنان که در شکل ۴ - ۵ نشان داده شده است، یک دایره عظیمه روی یک کره در نظر بگیرید. اگر بیش از نصف راه را طی کنیم، به وضوح مسیر کوتاه‌تر را اختیار نکرده‌ایم. ∇



شکل ۴-۵

نکته این مطلب روشن است که هر رویه‌ای می‌تواند به یک متر (یا محاسب فاصل) به این طریق مجهز شود که فاصله بین دو نقطه، اینفیمم (یا اغلب مینیمم) طول همه مسیرهای C^∞ واصل آن دو نقطه تعریف شود (اگر چه ممکن است محاسب فاصله از فاصله اقلیدسی روی رویه به عنوان یک زیر مجموعه واقع در \mathbb{R}^3 متفاوت باشد، اما توپولوژی (یعنی همان مفهوم همسایگی))، حاصل از این متر بر توپولوژی موروثی رویه به عنوان یک زیر فضا از \mathbb{R}^3 منطبق است). این مطلب که روی یک رویه «تام»^۱ (یعنی رویه‌ای که هر ژئودزی پارامتری شده آن برای همه زمان‌ها تعریف شده است)، هر دو نقطه می‌توانند توسط یک ژئودزی با کوتاه‌ترین طول به هم وصل شوند یکی از نتایج قضیه هاپف - رینو^۲ است (و در اغلب کتاب‌های هندسه دیفرانسیل مثل [۱] و [۸]، موجود است). اثبات این نتیجه کاملاً آزار دهنده است، برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از P به Q ، شخص حول «دایره ژئودزی» از نقاط در فاصله کم از P ، قدم می‌زند و نقطه R را روی آن می‌یابد که به Q نزدیک‌ترین باشد. آنگاه ثابت می‌کند که ژئودزی منحصر به فردی که از P آغاز و از R می‌گذرد، در واقع باید از Q نیز بگذرد و مسیر کوتاه‌تری نمی‌تواند موجود باشد.

قبلاً به دورویه M و M^* به عنوان کلاً ایزومتر ارجاع دادیم (برای مثال در مثال ۶ در بخش ۱). اکنون می‌توانیم تعریف رسمی‌تری ارائه کنیم: بایستی یک تابع $f: M \rightarrow M^*$ موجود باشد که یک تناظر یک به یک و حافظ فاصله را ایجاد کند، یعنی برای هر $P, Q \in M$ ، فاصله بین P و Q در M باید با فاصله $f(P)$ و $f(Q)$ در M^* برابر باشد.

تمرین ۲-۴

(۱) نتیجه انتقال موازی بردار $(0, 0, 1)$ را یک بار حول دایره $z = 0$ ، $x^2 + y^2 = a^2$ روی استوانه دوار قائم $x^2 + y^2 = a^2$ تعیین کنید.

(۲) ثابت کنید که $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$.

(۳) فرض کنید α خمی باشد که پارامتری با طول قوس نیست. با استفاده از رابطه $(**)$ در صفحه $\alpha, 174$ در طول α موازی است اگر و فقط اگر $\kappa_g = 0$ و $v' = 0$.

(۴*) خمیدگی ژئودزی κ_g از یک دایره طولی $u = u_0$ روی کره واحد را به هر یک از دو صورت زیر بیابید.
 a. به طور مستقیم
 b. با استفاده از تمرین ۲.

(۵) مخروط دوار قائم با زاویه رأس 2ϕ و پارامتری زیر را در نظر بگیرید.

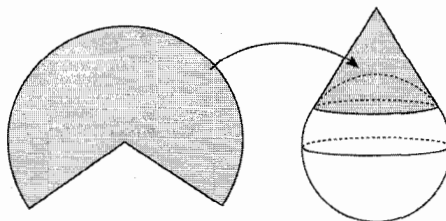
$$\mathbf{x}(u, v) = (u \tan \phi \cos v, u \tan \phi \sin v, u), \quad 0 < u \leq u_0, 0 \leq v \leq 2\phi$$
 انحناى ژئودزی κ_g دایره $u = u_0$ را بطور مستقیم محاسبه کنید. بررسی کنید که جواب شما با انحناى دایره‌ای برابر است که با گسترده کردن مخروط به شکل تصویر شده در ۴-۶ به دست می‌آورد (برای اثبات این که این انحناها باید برابر باشند تمرین ۱-۳-۸ را ببینید).

(۶) بررسی کنید که موازی $u = u_0$ یک ژئودزی روی رویه دوار پارامتری شده همانند گزاره ۴-۴ است اگر و فقط اگر $f'(u_0) = 0$. یک توصیف هندسی از این موضوع ارائه دهید و آن را توضیح دهید.

(۷) از معادله (\clubsuit) استفاده کنید و زاویه چرخش در یک بار انتقال موازی حول دایره $u = u_0$ روی مخروط $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, cu), c \neq 0$ را تعیین کنید.

(۸) ثابت کنید اگر دورویه M و M^* در طول خم C مماس باشند، آنگاه انتقال موازی در طول C برای هر دورویه یکسان است.

b. از قسمت (b) برای تعیین اثر انتقال موازی حول دایره عرضی $u = u_0$ روی کره واحد استفاده کنید. احتمالاً شکل ۴-۶ و مبانی هندسه اقلیدسی مفید است. (مثال ۳)



شکل ۴-۶

(۹*) کدامیک از خم‌های واقع روی کره دارای انحناى ژئودزى ثابت هستند؟

(۱۰) معادله‌های $(\clubsuit\clubsuit)$ را برای یافتن ژئودزى‌های واقع در صفحه و پارامتری شده با مختصات u, v ، به کار برید.

(۱۱#) a. فرض کنید $F = 0$ و u -خم‌ها ژئودزى باشند. با استفاده از $(\clubsuit\clubsuit)$ ثابت کنید که E فقط تابعی از u است.

b. تخت بودن رویه را با فرض $F = 0$ و نیز u -خم‌ها و v -خم‌ها ژئودزى، ثابت کنید.

(۱۲) a. ثابت کنید یک خم پارامتری با طول قوس α روی یک رویه M با $\kappa \neq 0$ یک ژئودزى است اگر و فقط اگر $n = \pm N$.

b. هرگاه α یک خم مسطح روی یک رویه M باشد و M یک رویه خط کشی شده تولید شده توسط قائم‌های دوم خود باشد، ثابت کنید که خم یک ژئودزى روی M است.

(۱۳) a. ثابت کنید اگر یک ژئودزى مسطح باشد و خط نیز نباشد، آنگاه یک خط انحنا است (راهنمایی: از تمرین ۱۱ استفاده کنید).

b. ثابت کنید اگر هر ژئودزى در یک رویه (همبند) مسطح باشد، آنگاه رویه در یک صفحه یا یک کره قرار دارد.

(۱۴) اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید.

a. یک خط روی یک رویه، هم یک خم مجانبی و هم یک ژئودزى است.

b. اگر یک خم هم خم مجانبی و هم ژئودزى باشد، باید یک خط باشد.

c. اگر یک خم هم یک ژئودزى و هم یک خط انحنا باشد، آنگاه باید مسطح باشد.

(۱۵) نشان دهید که انحناى ژئودزى در P از یک خم C روی M (در مقدار قدر مطلق) برابر با انحنا در P از تصویر C روی $T_P M$ است.

(۱۶) با استفاده از رابطه کليراوت، گزاره ۴ - ۴ بررسی کنید که دایره عظیمه، ژئودزى‌های روی یک کره هستند (راهنمایی: نتیجه تمرین ۳ - ۱ - A ممکن مفید خواهد بود).

(۱۷) فرض کنیم M یک رویه و $P \in M$. گوییم $U, V \in T_P M$ ، مزدوج^۱ هستند اگر $\text{II}_P(U, V) = 0$.

a. فرض کنیم $C \subset M$ یک خم باشد. پوش^۲ M^* از صفحات مماس به M در طول C ، به صورت رویه^۳ خط کشی شده‌ای تعریف می‌شود که مولد آن در $P \in C$ ، موقعیت حدی خط تقاطع صفحات مماس به M در P و Q است وقتی که $Q \rightarrow P$. ثابت کنید مولد در P مزدوج خط مماس به C در P است.

b. ثابت کنید اگر C در هیچ کجا بر یک جهت مجانبی مماس نباشد، آنگاه M^* (حداقل در نزدیکی C) هموار است. به علاوه ثابت کنید که M^* در طول C به M مماس است و یک رویه^۴ توسعه پذیر (خط کشی شده^۵ تخت) است.

c. با استفاده از قسمت b یک روش هندسی برای محاسبه انتقال موازی ارائه دهید. به خصوص این مطلب را برای یک دایره^۶ طولی روی کره به کار برید (تمرین ۷).

(۱۸) فرض کنید روی رویه^۷ M ، انتقال موازی یک بردار از یک نقطه به نقطه^۸ دیگر مستقل از مسیر انتخابی باشد. ثابت کنید M بایستی تخت باشد (راهنمایی: یک پایه^۹ متعامد یکه^{۱۰} e_1 و e_2 برای $T_P M$ اختیار کنید و میدان‌های برداری e_1 و e_2 را با انتقال موازی تعریف کنید. مختصات را چنان اختیار کنید که u - خم‌ها همواره بر e_1 و v - خم‌ها همواره بر e_2 مماس باشند (تمرین ۱۰ را ببینید).

(۱۹) رابطه^{۱۱} کلیراوت، گزاره^{۱۲} ۴-۴ را برای توصیف ژئودزی‌های روی یک چنبره با پارامتری مثال ۱ (c) از بخش ۱ بکار برید (با یک ژئودزی شروع کنید که ابتدای آن در مدار (موازی) خارجی است و زاویه^{۱۳} ϕ با آن می‌سازد. توصیف شما باید بین حالت‌های $\cos \phi \leq \frac{a-b}{a+b}$ و $\cos \phi > \frac{a-b}{a+b}$ تمایز قائل شود. کدام ژئودزی هیچ‌گاه مدار (موازی) خارجی را قطع نمی‌کند؟ همچنین به خاطر آورید که یک ژئودزی یگانه گذرا بر هر نقطه در هر جهت وجود دارد).

(۲۰) با استفاده از رابطه^{۱۴} کلیراوت، گزاره^{۱۵} ۴-۴، نشان دهید یک ژئودزی روی یک رویه^{۱۶} دوار بر حسب پارامتری استاندارد در مثال ۷ از بخش ۲ با رابطه^{۱۷} زیر نمایش داده می‌شود که در آن c یک مقدار ثابت است.

$$v = c \int \frac{du}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - c^2}} + c_0.$$

اکنون نتیجه بگیرید که در حالتی که پارامتری با طول قوس نباشد، خواهیم داشت:

$$v = c \int \frac{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - c^2}} du + c_0.$$

(۲۱) با استفاده از تمرین ۲۰ نشان دهید که هر ژئودزی روی سهمی $z = x^2 + y^2$ که نصف‌النهار نباشد هر نصف‌النهار را قطع می‌کند (راهنمایی: نشان دهید که به طور مجانبی نمی‌توان به سمت یک نصف‌النهار میل کرد).

(۲۲) فرض کنید M هذلولی $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ باشد و C دایره $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ باشد.

a. رابطه کلیروات، گزاره ۴-۴، را برای نشان دادن این مطلب به کار برید که به جز دایره C ، هر ژئودزی‌ها روی M بیکران است.
 b. نشان دهید که ژئودزی‌هایی وجود دارند که به طور مجانبی به C میل می‌کنند (راهنمایی: تمرین ۲۰ را به کار برید).

(۲۳) رابطه کلیروات، گزاره ۴-۴ و تمرین ۱۹ را برای توصیف ژئودزی‌های روی شبه کره به کار برید (تمرین ۶ از بخش ۲). به خصوص نشان دهید که تنها ژئودزی‌های بیکران، نصف‌النهارها هستند.

(۲۴) رویه $z = f(x, y)$ را در نظر بگیرید. یک خم α که در هر نقطه $(u, v, f(u, v)) = P$ بردار مماس آن به مضرربی عددی از $\nabla f(u, v)$ تصویر می‌شود یک خم از تندترین شیب سربالایی است (چرا؟). فرض کنید چنین خمی یک ژئودزی نیز باشد.

a. ثابت کنید تصویر α روی صفحه uv یک ژئودزی است (راهنمایی: بردار مماس به رویه و عمود بر α' افقی است. چرا؟ کنج داربوکس در امتداد α و تصویر آن را بررسی کنید).
 b. نتیجه بگیرید که α یک خط انحنای است (راهنمایی: تمرین ۱۲ را ببینید).
 c. نشان دهید اگر همه خم‌ها با تندترین شیب سربالایی، ژئودزی باشند، آنگاه f در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر صدق می‌کند (راهنمایی: چه هنگامی خم‌های انتگرال ∇f ، خطوط هستند؟).

$$f_u f_v (f_{vv} - f_{uu}) + f_{uv} (f_u^2 - f_v^2) = 0$$

d. نشان دهید که خم‌های تراز f موازی هستند (تمرین ۱-۲-۲۲ را ببینید) (راهنمایی: نشان دهید که $\|\nabla f\|$ در امتداد خم‌های تراز ثابت است).

e. یک مشخصه از یک رویه با این خاصیت بدهید که همهٔ خم‌ها از تندترین شیب سربالایی، ژئودزی‌ها باشند.

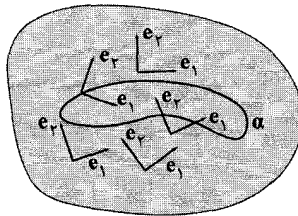
فصل ۳

رویه‌ها: مباحث دیگر

با این که مطالعهٔ اولین بخش لازم است، اما بقیهٔ بخش‌ها در این فصل از یکدیگر مستقل هستند.

۱-۳ هولونومی و قضیهٔ گاوس-بونه

اجازه دهید مبحث انتقال موازی را تعقیب کنیم که در فصل ۲ آغاز کردیم. فرض کنید M یک رویه و α یک خم بسته در M باشد. همانند شکل ۱-۱ در زیر، با ثابت نگه داشتن یک پایهٔ متعامد یکه e_1 و e_2 با تغییرات هموار (و با اصطلاح قاب)، برای صفحات مماس M در یک مجموعهٔ باز M شامل α آغاز می‌کنیم. اکنون تعریف زیر را می‌آوریم.



شکل ۱-۱

تعریف فرض کنیم α یک خم بسته روی یک رویهٔ M باشد. زاویهٔ چرخش یک بردار هنگامی که یک دور حول α انتقال موازی می‌یابد را هولونومی 1 حول α گویند. برای نمونه در مثال ۳ از بخش ۴ در فصل ۲ دیدیم که هولونومی حول یک دایرهٔ عرضی $u = u_0$ از کرهٔ واحد برابر $2\pi \cos u_0$ است. البته با استفاده از تعریف ژئودزی، هولونومی حول یک ژئودزی بسته، همیشه باید صفر باشد (چرا؟).

جهت فهم آسان در ادامهٔ اکتشاف خود، اجازه دهید با یک پارامتری متعامد کار کنیم و قرار دهیم:

$$e_1 = \frac{x_u}{\sqrt{E}} \quad \text{و} \quad e_2 = \frac{x_v}{\sqrt{G}}$$

چون (همانند حالت خم‌ها) در هر نقطه، e_1 و e_2 یک پایه متعامد برای فضای مماس رویه ما هستند، همهٔ اطلاعات ذاتی انحنا (مثل آنچه با نمادهای کریستوفل داده می‌شود)، در آگاهی از چگونگی چرخش e_1 به سمت e_2 ، در هنگام حرکت حول رویه خلاصه می‌شود. به خصوص اگر برای $a \leq t \leq b$ ، $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ یک خم پارامتری باشد، می‌توانیم قرار دهیم:

$$\phi_{12}(t) = \frac{d}{dt}(e_1(u(t), v(t))) \cdot e_2(u(t), v(t))$$

که در اینجا بیشتر بطور غیر عمدی و با توجه به اینکه همه موارد باید بر حسب پارامتری انجام شود، عبارت فوق را به طور خلاصه به صورت $e_1'(t) \cdot e_2(t)$ می‌نویسیم. تأکید می‌کنیم که به طور اساسی، ϕ_{12} به خم پارامتری α بستگی دارد. شاید بهتر است که بنویسیم،

$$\phi_{12} = \nabla_{\alpha'} e_1 \cdot e_2$$

به هر حال با توجه به اثبات گزارهٔ ۲-۴ در فصل ۲، $\nabla_{\alpha'} e_2 \cdot e_1 = -\phi_{12}$ و $\nabla_{\alpha'} e_1 \cdot e_1 = 0$ (چرا؟).

نکته گرچه نمادگذاری پر زحمت به نظر می‌رسد، ولی به ما یادآوری می‌کند که ϕ_{12} محاسب چگونگی چرخش e_1 به سمت e_2 است در هنگامی که در امتداد α حرکت می‌کنیم. این نمادگذاری در مفهومی کلی‌تر در بخش ۳ گنجانده می‌شود.

حال اجازه دهید دستور واضحی برای تابع ϕ_{12} به دست آوریم.

گزاره ۱-۱ در یک پارامتری متعامد با $e_1 = x_u/\sqrt{E}$ و $e_2 = x_v/\sqrt{G}$ داریم:

$$\phi_{12} = \frac{1}{\sqrt{EG}}(-E_u u' + G_u v')$$

اثبات نقطه کلیدی بهره‌برداری کامل از تعامد x_u و x_v است.

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x_u}{\sqrt{E}} \right) \cdot \frac{x_v}{\sqrt{G}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (x_{uu} u' + x_{uv} v') \cdot x_v \end{aligned}$$

(چون عبارت حاصل از دیفرانسیل‌گیری \sqrt{E} نتیجه خواهد داد $x_u \cdot x_u = 0$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{EG}} ((\Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v) u' + (\Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v) v') \cdot x_v \\ &= \frac{G}{\sqrt{EG}} (\Gamma_{uu}^v u' + \Gamma_{uv}^v v') = \frac{1}{\sqrt{EG}} (-E_u u' + G_u v') \end{aligned}$$

طبق رابطه (‡) در صفحه ۷۳ □.

اکنون فرض کنید که α یک خم بسته است و علاقه‌مند به هولوئومی حول α هستیم. اگر اتفاقاً e_1 در امتداد α موازی باشد، البته هولوئومی صفر خواهد بود. در غیراین صورت، اجازه دهید فرض کنیم $X(t)$ انتقال موازی e_1 در امتداد α باشد و با فرض $\psi(0) = 0$ می‌نویسیم: $X(t) = \cos \psi e_1 + \sin \psi e_2$ ، آنگاه X در طول α موازی است اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\alpha'} X \\ &= \nabla_{\alpha'} (\cos \psi e_1 + \sin \psi e_2) \\ &= \cos \psi \nabla_{\alpha'} e_1 + \sin \psi \nabla_{\alpha'} e_2 + (-\sin \psi e_1 + \cos \psi e_2) \psi' \\ &= \cos \psi \phi_{12} e_2 - \sin \psi \phi_{12} e_1 + (-\sin \psi e_1 + \cos \psi e_2) \psi' \\ &= (\phi_{12} + \psi')(-\sin \psi e_1 + \cos \psi e_2) \end{aligned}$$

بنابراین X در طول α موازی است اگر و فقط اگر $\psi'(t) = -\phi_{12}(t)$. پس به نتیجه مورد نظر دست یافته‌ایم.

گزاره ۱-۲ هولوئومی حول یک خم بسته C برابر است با $\Delta \psi = -\int_a^b \phi_{12}(t) dt$.

مثال ۱ به مثال قبلی در مورد دایره عرضی $u = u_0$ روی کره واحد برمی‌گردیم. در این حالت، $e_1 = x_u$ و $e_2 = (1/\sin u)x_v$. اگر خم را برای $0 \leq t \leq 2\pi$ ، به صورت $t = v$ پارامتری کنیم، (با توجه به مثال ۱ از بخش ۳ در فصل ۲) داریم:

$$\nabla_{\alpha'} e_1 = \nabla_{\alpha'} x_u = x_{uv} = \cot u_0 x_v = \cos u_0 e_2$$

و از این رو $\phi_{12} = \cos u_0$. بنابراین، هولوئومی حول دایره عرضی (با جهت خلاف عقربه‌های ساعت) برابر است با $\Delta \psi = -\int_0^{2\pi} \cos u_0 dt = -2\pi \cos u_0$. که نتیجه قبلی ما را تأیید می‌کند.

قابل توجه است که اگر می‌خواستیم خم را با طول قوس پارامتری کنیم (همچنان که بزودی مهم خواهد بود)، برای $0 \leq t \leq 2\pi \sin u_0$ قرار می‌دادیم، $s = (\sin u_0)v$. آنگاه طبق این پارامتری داشتیم: $\phi_{12}(s) = \cot u_0$. (چرا؟)

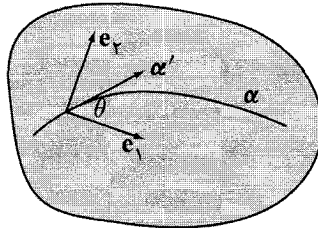
برای تمامیت، می‌توانیم از گزاره ۱.۱ برای محاسبه ϕ_{12} به این طریق استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \text{با } E = 1, G = \sin^2 u, u = u_0, \text{ و } v(s) = s/\sin u_0, \text{ همانند قبل داریم} \\ \nabla \cdot \phi_{12} = \frac{1}{\sqrt{\sin u_0}} (2 \sin u_0 \cos u_0 \cdot \frac{1}{\sin u_0}) = \cot u_0. \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید α یک خم پارامتری با طول قوس است و اجازه دهید (طبق لم ۳-۶ از فصل ۱) برای $s \in [0, L]$ و یک تابع C^∞ ، $\theta(s)$ ، بنویسیم $\alpha(s) = x(u(s), v(s))$ و $T(s) = \alpha'(s) = \cos \theta(s)e_1 + \sin \theta(s)e_2$ ، آنچنان که در شکل ۱-۱ مشخص شده است. یک رابطه که در ادامه کار ما اساسی است به شرح زیر است.

گزاره ۱-۳ هرگاه α یک خم پارامتری باشد، انحناى ژئودزى α از رابطه زیر به دست می آید:

$$\kappa_g(s) = \phi_{12}(s) + \theta'(s) + \frac{1}{\sqrt{EG}}(-E_v u'(s) + G_u v'(s)) + \theta'(s)$$



شکل ۱ - ۲

اثبات به یاد آورید که $\kappa_g = \kappa N \cdot (n \times T) = T' \cdot (n \times T)$ اکنون چون $n \times T = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ و $T = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ بنابراین،

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \nabla_T T \cdot (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ &= \nabla_T (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \cdot (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ &= (\cos \theta \nabla_T e_1 + \sin \theta \nabla_T e_2) \cdot (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ &\quad + ((-\sin \theta) \theta' (-\sin \theta) + (\cos \theta) \theta' (\cos \theta)) \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (\phi_{12} + \theta') \\ &= (\phi_{12} + \theta') \end{aligned}$$

همچنان که لازم بود. حال وقتی α پارامتری شده با طول قوس است، نتیجه با به کار بردن گزاره ۱-۱ حاصل می شود. □

نکته در لیست، اولین تساوی در گزاره ۱-۲ نباید تعجب آور باشد. انحناى یک خم مسطح محاسبه کننده اندازه ای است که بردار مماس یکه آن نسبت به یک جهت ثابت مرجع می چرخد. به طور مشابه، انحناى ژئودزى یک خم در یک رویه، اندازه ای را می سنجد که بردار مماس یکه آن نسبت به یک میدان برداری موازی در امتداد خم می چرخد، θ' چرخش آن نسبت به e_1 را محاسبه می کند که خود آن به میزان داده شده توسط ϕ_{12} می چرخد، پس انحناى ژئودزى مجموع این دو اندازه است.

اکنون فرض کنید α یک خم بسته باشد که ناحیه $R \subset M$ را محصور کرده است. مرز R را با ∂R نمایش می دهیم. آنگاه طبق قضیه گرین (قضیه ۲-۶ از ضمیمه) داریم:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \phi_{12}(s) ds &= \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} (-E_v u'(s) + G_u v'(s)) ds \\
 &= \int_{\partial R} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (-E_v du + G_u dv) \\
 (\dagger) \quad &= \int \int_R \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right) du dv \\
 &= \int \int_R \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) \underbrace{\sqrt{EG}}_{dA} du dv \\
 &= - \int \int_R K dA
 \end{aligned}$$

طبق رابطه (*) برای انحناى گاوسى در صفحه ۷۵. (از انتهای بخش ۱ در فصل ۲ به یاد آورید که عنصر مساحت رویه یک رویه پارامتری شده قابل بیان به صورت $dA = \|x_u \times x_v\| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv$ است.) حال می‌بینیم که انحناى گاوسى و هولونومى به طور نزدیکی به هم مربوط هستند.

نتیجه ۱-۴ هنگامی که R یک ناحیه با مرز هموار، تولید شده توسط یک پارامتری متعامد باشد، هولونومى حول ∂R عبارتست از: $\Delta\psi = \int \int_R K dA$.

اثبات نتیجه مستقیم از گزاره ۱-۲ و رابطه (†) در فوق است. □
به علاوه از گزاره ۱-۳ نتیجه می‌شود که

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds = \int_{\partial R} \phi_{12} ds + \underbrace{\theta(L) - \theta(0)}_{\Delta\theta}$$

بنابراین زاویه کلی که تحت آن بردار مماس بر ∂R می‌چرخد عبارتست از:

$$\Delta\theta = \int_{\partial R} \kappa_g ds + \int \int_R K dA$$

در حالتی که R همبند ساده باشد (یعنی به طور پیوسته قابل تغییر شکل به یک نقطه باشد)، خیلی تعجب آور نیست که $\Delta\theta = 2\pi$. بطور شهودی، هنگامی که خم را به یک نقطه جمع می‌کنیم، e_1 تقریباً در امتداد خم ثابت می‌شود. اما بردار مماس (به عنوان نتیجه‌ای از قضیه هویف هوملافساتز، قضیه ۳-۵ فصل ۱) بایستی یک دور کامل بزند. چون $\Delta\theta$ مضرب صحیحی از 2π است که بطور پیوسته در هنگام تغییر شکل خم، تغییر می‌کند. پس همیشه بایستی برابر با 2π باقی بماند.

نتیجه ۱-۵ اگر R یک ناحیه همبند ساده باشد که خم مرزی آن یک ژئودزی است، آنگاه $\int \int_R K dA = \Delta\theta = 2\pi$.

مثال ۲ ناحیه R را نیم کره بالایی در نظر گرفته و پارامتری با مختصات کروی معمولی را به کار می‌بریم. آنگاه بردار مماس یکه در امتداد ∂R همه جا e_2 است، پس $\Delta\theta = 0$ که با نتیجه ۱ - ۵ تناقض دارد. از طرف دیگر $C = \partial R$ یک ژئودزی است، در نتیجه هولونومی حول C (که نسبت به این قاب محاسبه می‌شود) باید صفر باشد.

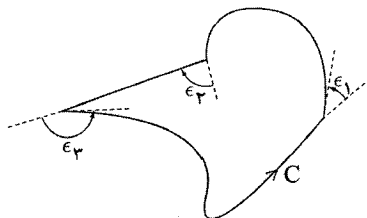
چگونه این پارادوکس را حل کنیم؟ خوب، هر چند در مورد این نکته مسامحه کرده‌ایم ولی پارامتری مختصات کروی در قطب شمال (چون $x_3 = 0$) شکست می‌خورد. در واقع هیچ قابی از نیم کره بالایی با e_2 همه جا مماس بر خط استوا وجود ندارد. به هر حال خواننده می‌تواند مطمئن باشد که یک پارامتری متعامد از نیم کره بالایی مثل تصویر کنجنگاری از قطب شمال وجود دارد (به مثال ۱ (e) در بخش ۱ از فصل ۲ مراجعه کنید). ∇ .

نکته در بیشتر مباحث پیشرفته، هولونومی حول خم بسته α به عنوان چرخشی از صفحه مماس بر M در $\alpha(0)$ است. یعنی موضوع مطرح $\Delta\psi$ (به پیمانه 2π)، به مفهوم تغییر در زاویه بدون در نظر گرفتن مضارب 2π است. این مقدار به انتخاب قاب e_1 و e_2 بستگی ندارد.

حال کار روی یکی از نتایج عالی نظریه رویه را آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱-۶ (قضیه موضعی گاوس - بونه ۱). فرض کنیم R یک ناحیه همبند ساده با مرز به طور قطعه‌ای هموار در یک رویه پارامتری باشد. اگر ∂R دارای زاویه‌های خارجی ϵ_j برای $j = 1, \dots, s$ باشد، آنگاه

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \iint_R K dA + \sum_{j=1}^s \epsilon_j = 2\pi$$



شکل ۱-۳

توجه شود که همچنان که در شکل ۱-۳ مشخص شده است، زاویه‌های خارجی چنان محاسبه شده‌اند که برای هر j ، $|\epsilon_j| \leq \pi$.

اثبات اگر ∂R هموار باشد، از بحث قبلی نتیجه می‌گیریم که،

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int \int_R K dA = \Delta\theta = 2\pi$$

اما بردار مماس یک‌به‌اندازه کمترین طبق مقدار $\sum_{j=1}^3 \epsilon_j$ می‌چرخد، پس نتیجه حاصل می‌شود (بررسی جزئیات در تمرین ۱۷ به خواننده واگذار می‌شود). □

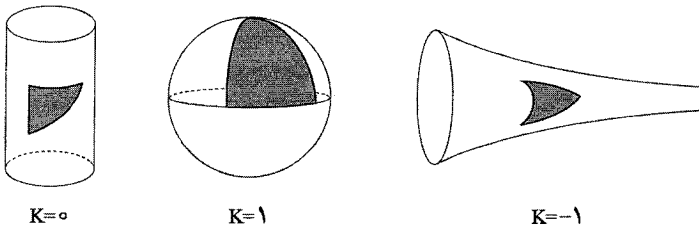
نتیجه ۱-۷ برای یک مثلث ژئودزی R (یعنی یک ناحیه محصور توسط مرزی شامل سه قطعه ژئودزی)، با زاویه‌های درونی $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ داریم: $\int \int_R K dA = (\iota_1 + \iota_2 + \iota_3) - \pi$ ، که همان فزونی زاویه است.

اثبات چون مرز شامل قطعات ژئودزی است، انتگرال مربوط به انحنا ی ژئودزی حذف می‌شود و باقیمانده عبارت است از:

$$\int \int_R K dA = 2\pi - \sum_{j=1}^3 \epsilon_j = 2\pi - \sum_{j=1}^3 (\pi - \iota_j) = \sum_{j=1}^3 \iota_j - \pi$$

آن چنان که لازم بود. □

نکته شایسته است که برای نتیجه فوق، همچنان که در شکل ۱-۴ تصویر شده است، سه حالت خاص $K = 0, K = 1, K = -1$ در نظر گرفته شود.



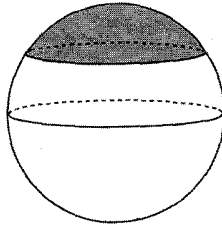
شکل ۱-۴

هنگامی که M تخت است، مجموع زاویه‌های مثلث مانند حالت اقلیدسی π است. در زمانی که انحنا M مثبت است، برای تشکیل یک مثلث باید مقدار مجموع زاویه‌های مثلث بیش از π باشد و وقتی که انحنا M منفی است، مقدار مذکور کمتر از π است. به طور شهودی، دلیل این است که به نظر می‌رسد وقتی $K > 0$ ، ژئودزی‌ها «خارج شده‌اند»^۱ و زمانی که $K < 0$ ، آنها «به داخل کشیده شده‌اند»^۲ (تمرین ۳-۲-۱۵).

۱- bow out

۲- bow in

مثال ۳ اجازه دهید قضیه ۱-۶ را در حالت عرق چین کروی، همانند شکل ۱-۵، در نظر بگیریم. با استفاده از پارامتری مختصات قطبی معمولی داریم $0 \leq u \leq u_0$.



شکل ۱-۵

طبق گزاره ۱-۳ و مثال ۱، چون در امتداد v -خم، $\theta = \pi/2$ ، پس داریم: $\kappa_g = \phi_{12}(s) = \cot u_0$ (همچنین به تمرین ۲-۴-۴ مراجعه کنید). بنابراین خواهیم داشت:

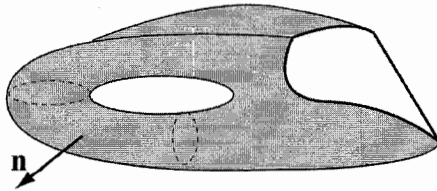
$$\iint_R K \, dA = 2\pi - \int_{\partial R} \kappa_g \, ds = 2\pi(1 - \cos u_0)$$

که البته صحیح است، چون $K = 1$ و در واقع مساحت این عرق چین کروی برابر است با:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{u_0} \sin u \, du \, dv = 2\pi(1 - \cos u_0) \quad \nabla$$

نکته قابل توجه است که علامت κ_g به هر دوی جهت α و جهت رویه بستگی دارد. اگر رویه را به اندازه یک ضریب c بزرگ یا کوچک کنیم، آنگاه انتگرال $\int_{\partial R} \kappa_g \, ds$ تغییر نخواهد کرد، به دلیل اینکه همچنان که طول قوس با ضریب c تغییر می‌کند، انحنا κ نیز با ضریب $1/c$ تغییر خواهد کرد. بطور مشابه انتگرال $\iint_R K \, dA$ هنگام c به مقیاس کوچک‌تر ترسیم کردن رویه تغییر نمی‌کند، چون مساحت با ضریب c^2 تغییر می‌کند و انحنا κ با ضریب $1/c^2$ تغییر می‌کند.

اکنون به یکی از نتایج درخشان ریاضیات نوین می‌پردازیم که به بسیاری از تحقیقات دنباله‌دار و نیز تعمیم‌ها منجر شده است. یک رویه $M \subset \mathbb{R}^3$ را جهت دار^۱ گوییم هرگاه یک میدان برداری قائم یکه پیوسته، روی همه M انتخاب کرده باشیم. اکنون یک رویه جهت‌دار با مرز به طور تکه‌ای هموار مانند شکل ۱-۶ را در نظر می‌گیریم.



شکل ۱ - ۶

ردو^۱ در ۱۹۲۵ ثابت کرد که چنین رویه M ای قابل مثلث بندی است. یعنی می‌توانیم بنویسیم $M = \bigcup_{\lambda=1}^m \Delta_\lambda$ ، درحالی که:

(i) Δ_λ تصویر یک مثلث تحت یک پارامتری متعامد (جهت نگاه‌دار) است،
 (ii) $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu$ تهی است، یک رأس منفرد یا یک ضلع منفرد است،
 (iii) هنگامی که $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu$ یک رأس منفرد است، جهت‌های اضلاع در Δ_λ و Δ_μ متضاد یکدیگر است.
 اکنون یک استاندارد می‌سازیم.

تعریف برای یک مثلث بندی مفروض τ از یک رویه M که دارای V رأس، E ضلع و F وجه است، مشخصه اُزر^۲ را به صورت $\chi(M, \tau) = V - E + F$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۴ می‌توان دیسک را مانند شکل ۱ - ۷، مثلث بندی‌های متفاوت کنیم تا به دست آوریم $\chi = ۱$.



شکل ۱ - ۷

$$V - E - F = ۵ - ۸ + ۴ = ۱ \qquad V - E - F = ۹ - ۱۸ + ۱۰ = ۱$$

همچنین اگر پیرو مطابقت با تعریف باشیم به این معنی که هر Δ_λ تصویر یک مثلث تحت یک پارامتری متعامد باشد، ممکن است به دیسک در صورت به عنوان یک مثلث منفرد نگاه کنیم که اضلاع آن به خارج منفجر^۳ شده است، در این صورت دوباره خواهیم داشت:

۱- T.Rado

۲- Euler characteristic

۳- puffed out

$$\chi(S, \tau) = V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1$$

مثلت بندی یک کره و بررسی اینکه $\chi(\Sigma, \tau) = 2$ به خواننده واگذار می‌شود. ▽

تذکر توجه به این نکته مهم است که با انتخاب به طور سازگار جهت روی «مثلت‌های» Δ_λ ، یک جهت روی مرز M به دست می‌آوریم. یعنی یک انتخاب n روی M تعیین می‌کند که کدام جهت روی ∂M را تعقیب کنیم. این دقیقاً حالتی است که با قضیه گرین (یا تعمیم آن به رویه‌های جهت‌دار یعنی قضیه استوکس) سروکار پیدا می‌کنیم. به هر حال با پیروی از نکته صفحه ۱۰۹ علامت κ_g روی ∂M از انتخاب جهت روی M مستقل است، برای این که اگر n را به $-n$ تغییر دهیم، جهت روی ∂M تغییر می‌کند و $\mathbf{n} \times \mathbf{T}$ گویای همین است.

نتیجه زیبایی که به دنبال آن بوده‌ایم، اکنون به شرح زیر است.

قضیه ۱-۸ (قضیه سرتاسری گاوس - بونه). فرض کنیم M یک رویه جهت‌دار با مرز تکه‌ای هموار مجهز به یک مثلث‌بندی τ به روش بالا باشد. اگر برای $k = 1, \dots, l$ $-\epsilon_k$ ها زاویه‌های خارجی ∂M باشند، آنگاه

$$\int_{\partial S} \kappa_g ds + \int \int_S K dA + \sum_{k=1}^l \epsilon_k = 2\pi \chi(S, \tau)$$

اثبات همچنان که در شکل ۱-۸ نشان داده‌ایم، رأس‌های روی مرز را از رأس‌های درونی رویه متمایز می‌سازیم، تعداد کلی متناظر آنها را به ترتیب با V_i و V_b نمایش می‌دهیم. به طور مشابه بین اضلاع روی مرز، اضلاع درون رویه و اضلاع واصل یک رأس روی مرز به یک رأس درون رویه تمایز قائل می‌شویم، تعداد متناظر آنها را به ترتیب با E_i و E_{ib} ، E_b نشان می‌دهیم. اکنون مشاهده می‌شود که،

$$\int \int_S K dA = \sum_{\lambda=1}^m \int \int_{\Delta_\lambda} K dA$$

چون همه جهت‌ها سازگار هستند و

$$\int_{\partial S} \kappa_g ds = \sum_{\lambda=1}^m \int_{\partial \Delta_\lambda} \kappa_g ds$$

چون انتگرال‌های خطی روی اضلاع درونی و اضلاع درونی / مرزی به صورت زوج‌ها حذف می‌شود. فرض کنیم برای $j = 1, 2, 3$ $\epsilon_{\lambda j}$ نمایش زاویه‌های خارجی «مثلت» Δ_λ باشد. در این صورت با به کارگیری قضیه ۱-۵ برای Δ_λ داریم:

$$\int_{\partial\Delta_\lambda} \kappa_g ds + \int \int_{\Delta_\lambda} K dA + \sum_{j=1}^r \epsilon_{\lambda j} = 2\pi$$

و اکنون از جمع بندی روی همه مثلث‌ها بدست می‌آوریم:

$$\int_{\partial S} \kappa_g ds + \int \int_S K dA + \sum_{\lambda=1}^m \sum_{j=1}^r \epsilon_{\lambda j} = 2\pi m = 2\pi F$$

حال باید کمی حسابرسی دقیق انجام دهیم. با قرار دادن $\epsilon_{\lambda j}$ به عنوان نمایش زاویه‌های داخلی متناظر مثلث Δ_λ و $i.v$ برای رأس‌های درونی، داریم:

$$(*) \quad \sum_{i.v} \epsilon_{\lambda j} = \sum_{i.v} (\pi - \iota_{\lambda j}) \pi (2E_i + E_{ib}) - 2\pi V_i$$

چون که هر ضلع داخلی با دو رأس داخلی سروکار دارد، در حالی که هر ضلع داخلی/مرزی دقیقاً با یک رأس درگیر است و مجموع زوایای داخلی در هر رأس برابر 2π است. در ادامه با قرار دادن $b.v$ برای رأس‌های مرزی خواهیم داشت:

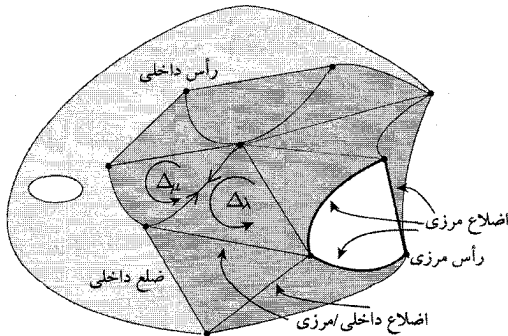
$$(**) \quad \sum_{b.v} \epsilon_{\lambda j} = \pi E_{ib} + \sum_{k=1}^l \epsilon_k$$

برای ملاحظه این مطلب به روش زیر استدلال می‌کنیم. برای یک رأس مرزی مفروض v ، یک نمای (v) برای نمایش زاویه یا عدد وابسته‌ای است که رأس v درگیر است. برای v به عنوان یک رأس مرزی هموار و مفروض ثابت داریم:

$$\pi = \sum_{v \in \Delta_\lambda} \iota_\lambda^{(v)} = \sum_{v \in \Delta_\lambda} (\pi - \epsilon_\lambda^{(v)}) = \pi (E_{ib}^{(v)} + 1) - \sum_{v \in \Delta_\lambda} \epsilon_\lambda^{(v)}$$

از طرف دیگر، هنگامی که v یک گوشه از ∂M با زاویه خارجی ϵ_k باشد، خواهیم داشت:

$$\epsilon_k = \pi - \sum_{v \in \Delta_\lambda} \iota_\lambda^{(v)} = \pi - \sum_{v \in \Delta_\lambda} (\pi - \epsilon_\lambda^{(v)}) = \sum_{v \in \Delta_\lambda} \epsilon_\lambda^{(v)} - \pi E_{ib}^{(v)}$$



شکل ۱ - ۸

بنابراین با استفاده از نماد $v.c$ برای رأس زاویه‌دار و نماد $v.s$ برای رأس هموار داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{b.v} \epsilon_{\lambda j} &= \sum_{v.c} \epsilon_{\lambda}^{(v)} + \sum_{v.s} \epsilon_{\lambda}^{(v)} \\ &= \sum_{k=1}^l \epsilon_k + \sum_{v.c} \pi E_{ib}^{(v)} + \sum_{v.s} \pi E_{ib}^{(v)} \\ &= \sum_{k=1}^l \epsilon_k + \pi E_{ib}^{(v)} \end{aligned}$$

با جمع معادلات (*) و (***) حاصل می شود:

$$\sum_{\lambda,j} \epsilon_{\lambda j} = \sum_{i.v} \epsilon_{\lambda j} + \sum_{b.v} \epsilon_{\lambda j} = 2\pi(E_i + E_{ib} - V_i) + \sum_{k=1}^l \epsilon_k$$

بنابراین، بالاخره حساب ما به پایان می رسد:

$$\int_{\partial S} \kappa_g ds + \int \int_S K dA + \sum_{k=1}^l \epsilon_k = 2\pi(F - (E_i + E_{ib})V_i) = 2\pi(V - E - F) = 2\pi\chi(S, \tau)$$

چون از این حقیقت که خم مرزی ∂M بسته است، می توانیم نتیجه بگیریم که $V_b = E_b$

اکنون چند نتیجه جالب به دست می آوریم.

نتیجه ۱-۹ مشخصه آلر $\chi(M, \tau)$ به مثلث بندی τ از M بستگی ندارد.

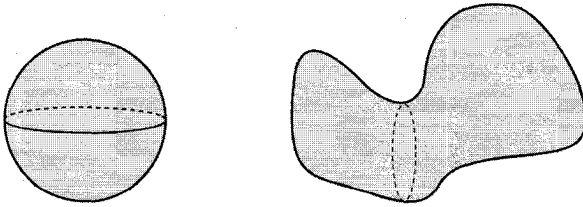
اثبات طرف چپ تساوی در قضیه ۱-۸ به هیچ وجه به مثلث بندی بستگی ندارد. □

بنابراین نمایش مشخصه آلر با $\chi(S)$ بدون ارجاع به مثلث بندی، یکسان است. در مبحث «توپولوژی جبری» ثابت شده است که مشخصه آلر یک پایای توپولوژی^۱ است، به این معنی که اگر رویه M در یک حالت پیوسته و دوسویی تغییر شکل یابد (آنچنان که یک رویه همریخت^۲ حاصل شود)، مشخصه آلر تغییر نمی کند. از این رو نتیجه می گیریم:

نتیجه ۱-۱۰ مقدار زیر یک پایای توپولوژی است که هنگام تغییر شکل هموار رویه S ، تغییر نمی کند.

$$\int_{\partial S} \kappa_g ds + \int \int_S K dA + \sum_{k=1}^l \epsilon_k$$

به خصوص هنگامی که $\partial S = \emptyset$ ، یعنی برای رویه بسته M داریم: $\int \int_M K dA = 2\pi$



شکل ۱ - ۹

نتیجه ۱-۱۱. برای رویه جهت دار، بسته و بدون مرز M داریم: $\int_S K dA = 2\pi\chi(S)$.

بسیار جالب است که انحنا کلی $\int_S K dA$ ، هنگام تغییر شکل هموار رویه بدون تغییر می‌ماند، برای مثال همچنان که در شکل ۱ - ۹ نشان داده شده است. مقدار انحنای کلی برای هر دو شکل همریخت زیر برابر 4π است.

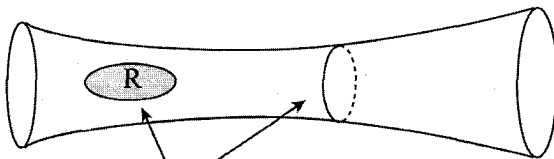
در یک مبحث از درس توپولوژی ثابت می‌شود که هر رویه جهت دار، بسته بدون مرز باید از نوع توپولوژی کره یا برای یک عدد صحیح مثبت g ، از نوع توپولوژی با یک چنبره با g حفره باشد. بنابراین (با مراجعه به تمرین ۵ و ۶)، مشخصه آلر ممکن برای چنین رویه‌هایی $0, 2, 4, \dots, -2, 0, 2, 4, \dots$ است. به علاوه انتگرال $\int_S K dA$ نوع توپولوژی رویه را مشخص می‌کند.

این بخش را بانعدادی کاربرد از قضیه گaus - بونه خاتمه می‌دهیم.

مثال ۵ فرض کنید M یک رویه از انحنا غیر مثبت باشد. در این صورت نمی‌توان یک ژئودزی با دو حفره (گون) R^1 روی M را یافت که یک ناحیه همبند ساده را محصور کرده باشد. به خاطر این که در صورت وجود، طبق قضیه ۱ - ۵ خواهیم داشت:

$$0 \geq \int_S K dA = 2\pi - (\epsilon_1 + \epsilon_2) > 0$$

که یک تناقض است (توجه شود که زاویه‌های خارجی باید بطور مطلق از π کوچک‌تر باشند، زیرا یک ژئودزی (هموار) یگانه با یک جهت مماس مفروض وجود دارد). ∇ .



α باید مثل یکی از این دو باشد.

شکل ۱ - ۱۰

مثال ۶ فرض کنیم رویه M بطور توپولوژیکی با یک استوانه هم ارز و انحنا ی گاوسی آن منفی باشد. در این صورت حداکثر یک ژئودزی بسته ساده در M وجود دارد. ابتدا توجه شود که همچنان که در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده است، اگر یک ژئودزی بسته ساده α موجود باشد، بایستی M را تفکیک کند (یعنی مرز یک ناحیه نیست) یا در غیر این صورت یک دیسک R را محصور کند که در این حالت خواهیم داشت،

$$0 \geq \iint_S K \, dA = 2\pi\chi(R) = 2\pi$$

که یک تناقض است. از طرف دیگر فرض کنید دو عدد از این نوع ژئودزی ها موجود باشد. اگر این دو متقاطع نباشند، پس مرزهای یک استوانه R هستند و به دست می آوریم $0 \geq \iint_S K \, dA = 2\pi\chi(R) = 0$ که باز تناقض است. اگر این دو ژئودزی تقاطع داشته باشند، آنگاه یک ژئودزی با دو حفره داریم که یک ناحیه همبند ساده را محصور کرده است که طبق مثال ۵ نمی تواند رخ دهد. ∇

تمرین ۳-۱

(۱) هولونومی حول یک موازی را در هر یک از رویه های زیر حساب کنید:

a*. یک چنبره

b. $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$

c. کاتوئید $\mathbf{x}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$

(۲) تعیین کنید آیا یک ژئودزی (هموار) بسته روی یک رویه وجود دارد اگر:

a. $K > 0$ b. $K = 0$ c. $K < 0$

اگر ژئودزی بسته بتواند یک ناحیه همبند ساده را محصور کند، یک مثال بریزید.

(۳*) کوچک ترین عدد غیر منفی n را ارائه کنید که برای آن یک ژئودزی با n حفره روی یک رویه وجود دارد اگر:

a. $K > 0$ b. $K = 0$ c. $K < 0$

(۴) انحنا ی گاوسی یک چنبره را حساب کنید و بررسی کنید که قضیه گاوس-بونه (به صورت نتیجه ۱-۱۰) برقرار است.

(۵) یک استوانه، یک کره، یک چنبره و یک چنبره دو حفره ای را مثلث بندی کنید و بررسی کنید که به ترتیب $\chi = 0, 2, 0, -2$ است.

(۶) نتیجه تمرین ۵ را تعمیم دهید و با استقرا ثابت کنید که چنبره با n -حفره دارای $\chi = 2 - 2g$ است.

(۷) فرض کنید M یک رویه جهت دار بسته بدون مرز باشد که از نوع توپولوژی یک کره نیست. ثابت کنید که روی M نقاط با انحنا ی گاوسی مثبت، صفر و منفی وجود دارند.

(۸) هر گاه M یک رویه با $K > 0$ باشد که بطور توپولوژیکی یک استوانه است، ثابت کنید که نمی‌تواند دو ژئودزی بسته ساده روی رویه وجود داشته باشد که هر دو حول گردن رویه باشند.

- (۹) سهموی M را در نظر بگیرید، که برای $u \geq 0$ و $0 \leq v \leq 2\pi$ به صورت $x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ پارامتری شده است. نماد M_r را برای قسمتی از سهموی به کار می‌بریم که $0 \leq u \leq r$.
- انحنای گاوسی دایره مرزی و مقدار $\int_{\partial M_r} \kappa_g ds$ را محاسبه کنید.
 - مقدار $\chi(M_r)$ را به دست آورید.
 - قضیه گاوس-بونه را برای محاسبه $\int \int_{M_r} K dA$ به کار ببرید. حد مقدار بدست آمده را وقتی $r \rightarrow \infty$ بیابید (این مقدار انحنا کلی سهموی است).
 - به طور مستقیم (به هر طریق که دوست دارید) K را حساب کنید و صریحاً مقدار $\int \int_M K dA$ را محاسبه کنید.
 - ارتباط بین انحنا کلی و تصویر نگاشت گاوسی M را توضیح دهید.

- (۱۰) شبه کره (با مرز) M ، پارامتری شده مانند مثال ۶ از بخش ۲ در فصل ۲ را در نظر بگیرید، با این تفاوت که در اینجا $u \geq 0$ است. نماد M_r را برای قسمتی به کار می‌بریم که $0 \leq u \leq r$ است (تعریف شده است (توجه شود که دایره مرزی $u = 0$ را هم در نظر گرفته‌ایم)).
- انحنای ژئودزی دایره $u = u_0$ و مقدار $\int_{\partial M_r} \kappa_g ds$ را محاسبه کنید.
 - مقدار $\chi(M_r)$ را محاسبه کنید.
 - قضیه گاوس-بونه را برای محاسبه $\int \int_{M_r} K dA$ به کار ببرید. حد مقدار به دست آمده را وقتی $r \rightarrow \infty$ بیابید (این مقدار انحنا کلی شبه کره است).
 - به طور مستقیم مساحت M_r را حساب کنید و آن را برای محاسبه مقدار $\int \int_M K dA$ به کار ببرید.

e. ارتباط بین انحنای کلی و تصویر نگاشت گاوسی M را توضیح دهید.

(۱۱) صورت متفاوتی از شمارش در اثبات قضیه ۱-۸ به طریق زیر بیان کنید.

a. نشان دهید که $3F = (2E_i + E_{ib}) + E_b$ و نتیجه بگیرید که $2F = 2E - V_b$

b. نشان دهید $\sum_{i.v} \iota_{\lambda_j} = 2\pi V_i$ و $\sum_{b.v} \iota_{\lambda_j} = \pi V_b - \sum \epsilon_k$

c. نتیجه بگیرید که $\sum_{\lambda,j} \epsilon_{\lambda j} = 3\pi F - \sum_{\lambda,j} \iota_{\lambda j} = 2\pi(E - V) + \sum \epsilon_k$ و اثبات قضیه را کامل کنید.

(۱۲) a از نتیجه ۱-۳ برای اثبات این مطلب استفاده کنید که M تخت است اگر و فقط اگر

هولونومی حول همه خم‌های بسته محصور کننده یک ناحیه در M صفر باشد.

b نشان دهید حتی در یک رویه تخت، هولونومی حول خم‌های خاص غیر صفر است.

(۱۳) نتیجه تمرین ۲-۳-۱۳ را با در نظر گرفتن هولونومی حول یک چهارضلعی (باندازه

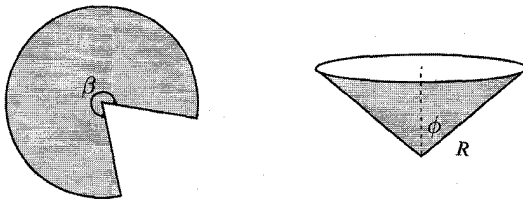
کافی کوچک) متشکل از چهار خط، دوباره اثبات کنید. آیا نتیجه برقرار است اگر دو خانواده

از ژئودزی‌ها در M یکدیگر را با زاویه‌های قائمه قطع کنند؟

(۱۴) در این تمرین کاوش می‌کنیم که هنگام استفاده از قضیه گاوس - بونه چه اتفاقی برای

ساده‌ترین رویه غیر هموار، یک مخروط دوار قائم، رخ می‌دهد. فرض کنیم R نمایش رویه

مفروض در تمرین ۲-۴-۵ و ∂R خم مرزی آن باشد.



شکل ۱-۱۱

a. نشان دهید اگر R را با یک قطاع دوار با زاویه مرکزی β ، همانند تصویر ۱-۱۱ بسازیم،

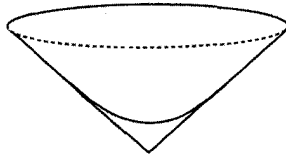
آنگاه $\int_{\partial R} \kappa_g ds = 2\pi \sin \phi = \beta$ گوئیم β زاویه مخروطی R در رأس آن است.

b. نشان دهید قضیه ۱-۶ برای R برقرار است اگر $2\pi - \beta$ را به $\int \int_R K dA$ اضافه کنیم.

c. نشان دهید، همچنان که در شکل ۱-۱۲ تصویر شده است، با هموار کردن «نقطه

مخروطی» همان نتیجه را به دست می‌آوریم (راهنمایی: $\int \int_R K dA$ را به عنوان مساحت

تصویر نگاشت گاوسی تفسیر کنید).



شکل ۱-۱۲

(۱۵) فرض کنید α یک خم بسته با $\kappa \neq 0$ باشد. همچنین ایندیکاتوریکس^۱ قائم (یعنی خم حاصل از اثر قائم اصلی روی کره واحد) را به عنوان یک خم بسته ساده در نظر بگیرید. آنگاه ثابت کنید که این خم کره واحد را به دو ناحیه با مساحت مساوی تقسیم می‌کند (راهنمایی: قضیه گاوس-بونه را برای یکی از دو ناحیه به کار ببرید).

(۱۶) فرض کنید $M \subset \mathbb{R}^3$ یک رویه دار بسته بدون مرز و با $K > 0$ باشد. نتیجه می‌شود که M به طور توپولوژیکی یک کره است (چرا؟). ثابت کنید M محدب است، یعنی برای هر $P, M \in M$ فقط در یک طرف صفحه مماس $T_P M$ واقع می‌شود (راهنمایی: قضیه گاوس-بونه و تعبیر اصلی گاوس از انحنا را به کار ببرید که در نکته صفحه ۶۳ برای اثبات لزوم یک به یکی نگاشت گاوس، به آن اشاره شده است. آنگاه انتهای اثبات قضیه ۳-۴ از فصل ۱ را ملاحظه کنید).

(۱۷) جزئیات اثبات قضیه ۱-۶ را در حضور گوشه‌ها بررسی کنید (تمرین ۱-۳-۶ را ببینید).

۲-۳ مقدمه‌ای بر هندسه هذلولوی

هیلبرت در ۱۹۰۱ ثابت کرد که هیچ رویه (بدون مرز) در \mathbb{R}^3 از انحنای ثابت منفی با این خاصیت وجود ندارد که یک زیر مجموعه بسته از \mathbb{R}^3 باشد (یعنی هر دنباله کشی از نقاط در این رویه همگرا به یک نقطه از رویه باشد). شبه کره در شرط آخر صدق نمی‌کند. با این وجود امکان ارائه یک تعریف از «رویه مطلق^۲» (غیر واقع در درون \mathbb{R}^3) همراه با یک اولین فرم اساسی وجود دارد. همچنان که می‌دانیم، این همه آن چیزی است که برای محاسبه نمادهای کریستوفل، انحنا (قضیه ۳-۱ از فصل ۲)، ژئودزی‌ها و غیره، نیاز داریم.

تعریف صفحه هذلولوی \mathbb{H}^1 ، به صورت نیم صفحه $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ تعریف می‌شود که با اولین فرم اساسی I بیان شده توسط $F = 0$ ، $E = G = 1/v^2$ ، مجهز شده است.

اکنون با استفاده از (‡) در صفحه ۷۳ در می‌یابیم که

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{E_u}{2E} = 0 & \Gamma_{uu}^v &= -\frac{E_v}{2G} = \frac{1}{v} \\ \Gamma_{uv}^u &= \frac{E_v}{2E} = -\frac{1}{v} & \Gamma_{uv}^v &= -\frac{G_u}{2G} = 0 \\ \Gamma_{vv}^u &= -\frac{G_u}{2E} = 0 & \Gamma_{vv}^v &= -\frac{G_v}{2G} = -\frac{1}{v} \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (*) برای انحنای گاوسی در صفحه ۷۵ به دست می‌آوریم،

$$K = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + (\sqrt{G_u}\sqrt{EG})_u \right) = -\frac{v^2}{2} \left(-\frac{2}{v^3} \cdot v^2 \right)_v = -\frac{v^2}{2} \frac{2}{v^2} = -1$$

بنابراین صفحه هذلولوی دارای انحنای ثابت -1 است. توجه شود که دست آوردی از نتیجه ۱-۶ این است که مساحت یک مثلث ژئودزی در \mathbb{H} برابر است با $\pi - (\iota_1 + \iota_2 + \iota_3)$. ژئودزی‌ها در این رویه چه هستند؟ با استفاده از معادلات (♣♣) در صفحه ۹۰ معادلات زیر را به دست می‌آوریم.

$$u'' - \frac{2}{v}u'v' = v'' = \frac{1}{v}(u'^2 - v'^2) = 0$$

به وضوح نیم‌خط عمودی مقدار ثابت u جواب را به ما می‌دهد (با $v(t) = c_1 e^{ct}$). در مرحله بعدی طالب ژئودزی‌ها با $u' \neq 0$ هستیم، پس در جستجوی v به عنوان تابعی از u خواهیم بود و (با استفاده بسیار دقیق از قاعده زنجیری) به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{du^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{v'}{u'} \right) = \frac{u'v'' - u''v'}{u'^2} \cdot \frac{1}{u'} \\ &= \frac{1}{u'^3} \left(u' \left(\frac{1}{v} \right) (v'^2 - u'^2) - v' \left(\frac{2}{v} u'v' \right) \right) \\ &= -\frac{1}{v} \left(1 + \left(\frac{v'}{u'} \right)^2 \right) = -\frac{1}{v} \left(1 + \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

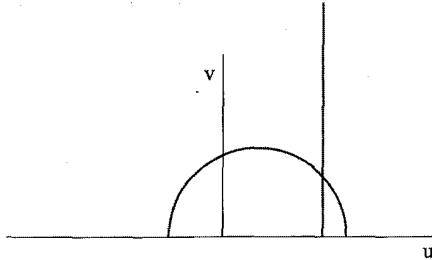
این یعنی معادله دیفرانسیل زیر باقی می‌ماند.

$$v \frac{d^2 v}{du^2} + \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} \left(v \frac{dv}{du} \right) = -1$$

و دوبار انتگرال‌گیری از آن جواب‌های زیر را به ما می‌دهد.

$$u^2 + v^2 = au + b$$

یعنی ژئودزی‌ها در \mathbb{H} همانند شکل ۲-۱ نیم خط‌های عمودی و نیم دایره‌ها، با مرکز روی محور u -ها هستند. توجه شود که هر نیم دایره با مرکز روی محور u -ها هر خط عمودی را حداکثر یک بار قطع می‌کند.



شکل ۲-۱

اکنون این مطلب نتیجه می‌دهد که هر دو نقطه $P, Q \in \mathbb{H}$ توسط یک ژئودزی یگانه وصل می‌شوند. اگر P و Q روی یک خط عمودی واقع باشند، آنگاه نیم خط عمودی گذرا بر آنها، ژئودزی یگانه واصل آنها است. اگر P و Q روی یک خط عمودی نباشند، فرض کنیم C تقاطع عمود منصف \overline{PQ} و محور u -ها باشد، آنگاه نیم دایره به مرکز C ، تنها ژئودزی واصل P و Q است.

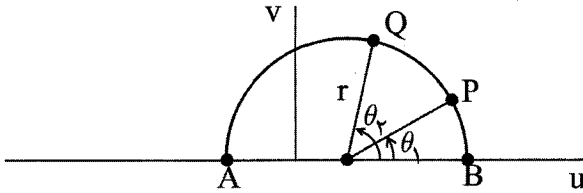
مثال ۱ برای نقاط مفروض $P, Q \in \mathbb{H}$ می‌خواهیم رابطه‌ای برای فاصله (ژئودزی) $d(P, Q)$ بین آنها بیابیم. اجازه دهید برای $0 < a < b$ با $P = (u_0, a)$ و $Q = (u_0, b)$ آغاز کنیم. با پارامتری پاره خط از P به Q ، برای $a \leq t \leq b$ با $u = u_0$ و $v = t$ داریم:

$$d(P, Q) = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + Gv'(t)^2} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}$$

توجه شود که با ثابت نگه داشتن Q و اجازهٔ میل P به سمت محور u -ها، $d(p, Q) \rightarrow \infty$ بنابراین این مطلب موجه به نظر می‌رسد که از نقاط روی محور u -ها به عنوان نقاط مجازی^۱ در بی نهایت یاد کنیم.

به طور کلی همانند آنچه در شکل ۲-۲ نشان داده شده است، کمان یک نیم دایره واصل P به Q را برای $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$ به صورت $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$ پارامتری می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{Eu'(t)^2 + Gv'(t)^2} dt \right| = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r dt}{r \sin t} \right| = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{dt}{\sin t} \right| \\ &= \left| \ln \left(\frac{1 + \cos \theta_1}{\sin \theta_1} / \frac{1 + \cos \theta_2}{\sin \theta_2} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{2 \cos(\theta_1/2)}{2 \sin(\theta_1/2)} / \frac{2 \cos(\theta_2/2)}{2 \sin(\theta_2/2)} \right) \right| \\ &= \left| \ln \left(\frac{AP}{BP} / \frac{AQ}{BQ} \right) \right|, \end{aligned}$$



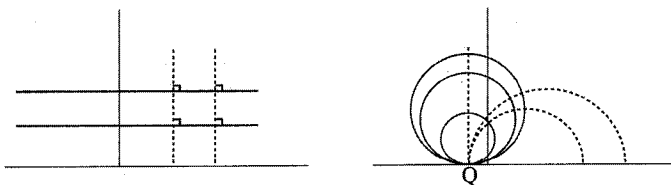
شکل ۲-۲

در اینجا طول‌ها در فرمول نهایی اقلیدسی هستند (تمرین ۱۰ را برای ارتباط با نسبت ناهمساز^۱ ببینید). ▽

از قسمت اول مثال ۱ نتیجه می‌شود که خم‌های $v = a$ و $v = b$ همانند خطوط موازی در هندسه اقلیدسی، دارای یک فاصله ثابت از هم هستند (که در امتداد ژئودزی‌های عمود به هر دو محاسبه می‌شود). این خم‌ها بطور کلاسیک دایره زمانی^۲ نامیده می‌شوند. همان‌طور که در شکل ۲-۳ می‌بینیم این خم‌ها، خم‌های عمود به خانواده‌ای از ژئودزی‌های عمودی^۳ هستند. به جای آن اگر همه ژئودزی‌های گذرا بر یک نقطه مفروض Q ، در بی نهایت روی $v = 0$ را در نظر بگیریم، مسیرهای متعامد، خم‌هایی در \mathbb{H} با نمایش دایره‌های مماس بر محور u —ها در Q خواهند بود، همچنان که از خواننده در تمرین ۴ بررسی آن را خواهیم خواست.

مثال ۲ اجازه دهید انحنای ژئودزی دایره زمانی $v = a$ را حساب کنیم. با پارامتری خم توسط $\alpha(t) = (t, a)$ آغاز می‌کنیم. آنگاه $\alpha'(t) = (1, 0)$. البته قابل توجه است که $v(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{E(1)^2 + G(0)^2} = 1/a$ طبق گزاره ۱-۱.

$$\phi_{12} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{a^2}}} = \frac{1}{2a}$$



شکل ۲-۳

(در اینجا در نقطه \mathbb{H} $(u, v) \in \mathbb{H}$ ، $e_1 = v(1, 0)$ و $e_2 = v(0, 1)$ چرا؟) برای محاسبه انحنای ژئودزی، می‌خواهیم گزاره ۱-۳ را به کار ببریم که نیاز به دیفرانسیل‌گیری نسبت به

طول قوس دارد، پس از قاعدهٔ زنجیری همانند فصل ۱ با ضرب کردن مشتق t در $1/v(t)$ ، استفاده خواهیم کرد. همچنین توجه شود که α' ، زاویهٔ ثابت $\theta = 0$ با e_1 می‌سازد، پس $\theta' = 0$. بنابراین،

$$\kappa_g = \frac{1}{v(t)} \phi_{12} = a \cdot \frac{1}{a} = 1,$$

همچنان که لازم بود. ∇

در تمرین ۴ از خواننده می‌خواهیم که محاسبات مشابه را برای دواير مماس بر محور u —ها انجام دهد. به علاوه، هر خم در \mathbb{H} با انحنای ژئودزی ثابت $\kappa_g = 1$ یک دایرهٔ زمانی است، همچنان که در تمرین ۵ بررسی آن را از خواننده خواهیم خواست. ایزومتري های صفحهٔ اقلیدسی تشکیل یک گروه می‌دهند، گروه اقلیدسی $E(2)$ ؛ به طور مشابه ایزومتري های کره تشکیل یک گروه می‌دهند، گروه متعامد $O(3)$. هر کدام از آنها یک گروه لی ۳—بعدي هستند. بطور شهودی سه درجه آزادی وجود دارد، چون باید مشخص کنیم یک نقطه P کجا می‌رود (دو درجه آزادی) و یک بردار مماس یکه تنها در نقطه P کجا می‌رود (یک درجهٔ دیگر آزادی). به طور مشابه انتظار این را داریم که ایزومتري های \mathbb{H} ، تشکیل یک گروه ۳—بعدي بدهند و در واقع این چنین است. دقیقاً در اینجا با ایزومتري های حافظ جهت سروکار داریم.

با فرض (u, v) متناظر با $z = u + iv \in \mathbb{C}$ ، $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم و مجموعهٔ تبدیلات کسری خطی زیر را فرض می‌کنیم.

$$T(Z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

اکنون باید چند چیز را بررسی کنیم:

(i) با ترکیب توابع متناظر با ضرب ماتریس های 2×2 ، $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با دترمینان ۱، یک گروه بدست می‌آوریم.

(ii) T, \mathbb{H} را به صورت دوسویی به \mathbb{H} می‌نگارد.

(iii) T ، یک ایزومتري به \mathbb{H} است.

بررسی دو مورد اول را در تمرین ۶ به خواننده واگذار می‌کنیم و سومی را بررسی می‌کنیم. نقطهٔ $z = u + iv$ مفروض است، می‌خواهیم طول بردارهای T_u و T_v را در نقطهٔ تصویر $T(z) = x + iy$ بیابیم و ملاحظه کنیم که دو بردار بر هم عمود هستند. توجه شود که

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{(a(u + iv) + b)(c(u - iv) + d)}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{(ac(u^2 + v^2) + (ad + bc)u) + i(ad - bc)v}{|cz + d|^2} \end{aligned}$$

بنابراین $\frac{v}{|cz+d|^2}$. اکنون داریم^۱،

$$x_u + iy_u = -ix_v + y_v = T'(z) = \frac{(cz+d)a - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

از این رو داریم،

$$\tilde{E} = \frac{x_u^2 + y_u^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{|cz+d|^4} = \frac{1}{v^2} = E$$

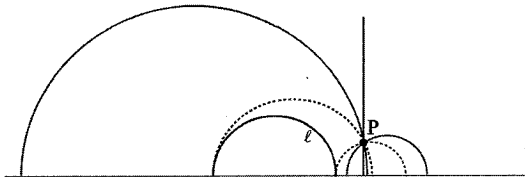
و به طور مشابه $\tilde{G} = \frac{x_v^2 + y_v^2}{y^2} = G$ از طرف دیگر،

$$\tilde{F} = \frac{x_u y_u + x_v y_v}{y^2} = \frac{x_u(-x_v) + x_v(x_u)}{y^2} = 0 = F$$

همچنان که انتظار می‌رفت.

اکنون، همچنان که در تمرین ۱۰ یا ۱۲ ثابت می‌کنیم، تبدیلات کسری خطی، خطوط و دوائر در \mathbb{C} را به خطوط یا دوائر می‌برند. چون تبدیل کسری خطی خاص ما محور حقیقی $(U\{\infty\})$ را حفظ می‌کند و نیز حافظ زاویه‌ها است، در نتیجه خطوط عمودی و نیم دایره‌های با مرکز روی محور حقیقی را به یکدیگر می‌نگارد. بنابراین در حقیقت ایزومتري‌های ما ژئودزی‌ها را به ژئودزی‌ها می‌نگارند (چقدر راحت).

اگر به \mathbb{H} ، به عنوان مدلی برای هندسهٔ نااقلیدسی فکر کنیم که خط در این هندسه ژئودزی باشد، توجه شود که برای هر خط مفروض l و $P \in l$ ، تعداد نامتناهی خط گذرا بر P و «موازی» (غیر متقاطع) با l موجود است. همچنان که در شکل ۲-۴ می‌بینیم، همچنین دو خط خاص گذرا بر P وجود دارد که «با l در بی نهایت تلاقی دارند»، این خطوط را فراموازی^۲ می‌نامند.



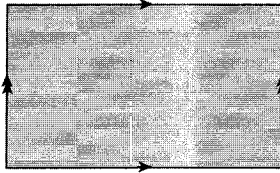
شکل ۲-۴

با یک کاربرد جالب خاتمه می‌دهیم. آنچنان که در بخش قبل دیدیم، قضیهٔ گاوس-بونه، یک رابطهٔ عمیق بین انحنای کلی از یک رویه و ساختار توپولوژی آن (مشخصهٔ آلر)

۱- این روابط، معادلات کشی-ریمان از مبانی آنالیز مختلط هستند.

می‌دهد. می‌دانیم که اگر یک رویهٔ فشردهٔ M ، به طور توپولوژیکی با یک کره هم ارز باشد، آنگاه انحنا کلی آن باید برابر با انحنا کلی کره دوار یعنی 4π باشد. اگر M ، به طور توپولوژیکی با یک چنبره هم ارز باشد، آنگاه (چنان که خواننده در تمرین ۳-۱-۴ بررسی می‌کند)، انحنا کلی آن باید صفر باشد. می‌دانیم که هیچ روشی برای ساختن چنبره در \mathbb{R}^2 وجود ندارد که در این روش دارای انحنا گوسی $K = 0$ شود (چرا؟)، اما می‌توانیم یک چنبره تخت در \mathbb{R}^4 به صورت زیر بسازیم.

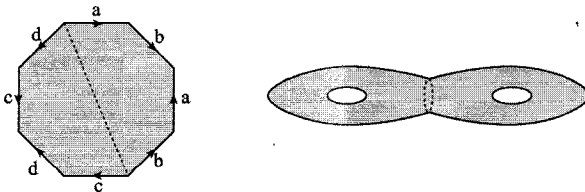
$$x(U, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi$$



شکل ۲-۵

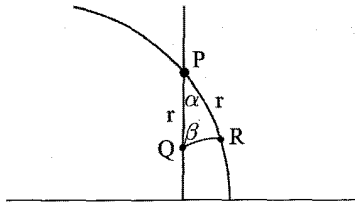
(یک تکه کاغذ را برداشته و اضلاع روبروی آن را چنان که در شکل ۲-۵ مشخص شده، بر هم قرار می‌دهیم، این در \mathbb{R}^3 می‌تواند به یک استوانه تبدیل شود و فقط در \mathbb{R}^4 می‌تواند یک چنبره شود). پس چه اتفاقی برای یک چنبره ۲ حفره‌ای می‌افتد؟ در این حالت $\xi(M) = -2$ ، بنابراین انحنا کلی باید -4π باشد و بطور منطقی می‌توانیم بپرسیم آیا یک چنبره ۲ حفره‌ای با انحنا منفی ثابت وجود دارد. توجه شود که می‌توانیم یک چنبرهٔ ۲ حفره‌ای با بر هم نهادن اضلاع یک هشت ضلعی، همانند شکل ۲-۶ به دست آوریم.

این مطلب که بتوانیم n -ضلعی منظم در R در \mathbb{H} داشته باشیم، ما را شگفت زده می‌کند. طبق رابطهٔ گاوس-بونه خواهیم داشت $\sum t_j = (n-2)\pi - \text{مساحت}(R)$ ، پس به وضوح لازم است که $\sum t_j < (n-2)\pi$.



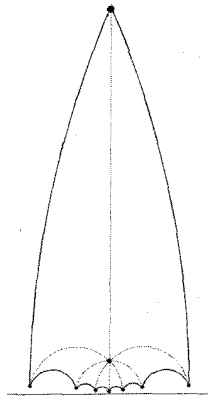
شکل ۲-۶

تا وقتی که $n \geq 3$ این مطلب نباید مشکل باشد. ابتدا اجازه دهید خود را قانع کنیم که برای هر نقطهٔ مفروض $P \in \mathbb{H}$ ، $0 < \alpha < \pi$ و $0 < \beta < (\pi - \alpha)/2$ ، می‌توانیم یک مثلث متساوی الساقین با زاویهٔ رأسی α در P و زاویه قاعده β بسازیم.



شکل ۲-۷

همانند آنچه در شکل ۲-۷ نشان داده شده است، دو ژئودزی با آغاز از P با زاویه α بین آنها رسم می‌کنیم. روی هر یک از آنها یک فاصله ژئودزی r تا نقاط Q و R پیش می‌رویم، آنگاه یک مثلث متساوی الساقین ΔPQR با زاویه رأس α بدست می‌آوریم. اکنون زاویه قاعده مثلث وقتی $r \rightarrow 0^+$ به سمت $(\pi - \alpha)/2$ میل می‌کند و به سمت 0 میل می‌کند وقتی $r \rightarrow \infty$. در نتیجه (با فرض این که زاویه بطور پیوسته با r تغییر می‌کند)، برای یک r زاویه قاعده مورد نظر را بدست می‌آوریم.



شکل ۲-۸

حال اجازه دهید این ساختار را برای $n \geq 5$ با $\alpha = 2\pi/n$ و $\beta = \pi/n$ بکار ببریم. با تکرار این ساختار n بار (با تقسیم زاویه در P به n زاویه $2\pi/n$)، یک ضلعی با این خاصیت که $\sum \nu_j = 2\pi$ بدست می‌آوریم، همچنان که (به طور تقریبی) در شکل ۲-۸ برای حالت $n = 8$ نشان داده شده است.

نکته این است که چون زاویه های درونی تا حد 2π جمع می‌شوند، وقتی اضلاع روبرو را همانند شکل ۲-۸ روی هم قرار می‌دهیم، یک چنبره هموار ۲-حفره‌ای با انحناى ثابت $K = -1$ بدست می‌آوریم. ساختار مشابه برای چنبره g -حفره‌ای با ساختن یک $4g$ ضلعی منظم با مجموع زوایای 2π ، کار می‌کند.

تمرین ۲-۳

(۱) ژئودزی‌های واصل P و Q در \mathbb{H} را بیابید و $d(P, Q)$ را محاسبه کنید.

a*. $P = (0, 1)$ و $Q = (1, 2)$.

b. $P = (-1, 8)$ و $Q = (2, 7)$.

c. $P = (0, 9)$ و $Q = (4, 7)$.

(۲) فرض کنید یک ژئودزی قائم به دو ژئودزی در \mathbb{H} وجود دارد. چه مطلبی می‌توانید در مورد این دو ثابت کنید؟

(۳) قضیهٔ قابلیت انطباق زاویه-زاویه را برای مثلث‌های هذلولوی ثابت کنید: اگر $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (راهنمایی: $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ و $\angle C \cong \angle C'$ ، آنگاه $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (راهنمایی: یک ایزومتري برای حرکت A' به A ، B' در امتداد ژئودزی از A به B و C' در امتداد ژئودزی از A به C به کار برید).

(۴) a. ثابت کنید دایره‌های مماس به محور u —ها دارای $\kappa_g = 1$ هستند.

b. ثابت کنید دایره‌های مماس به محور u —ها در مبدأ، مسیرهای متعامد از ژئودزی‌های $u^2 - 2cu + v^2 = 0$ برای $c \in \mathbb{R}$ هستند.

c. نشان دهید دایره‌های زمانی $u^2 + v^2 - 2av = 0$ و $u^2 + v^2 - 2bv = 0$ از یک فاصله ژئودزی ثابت از یکدیگر هستند (راهنمایی: تقاطع‌های دو دایرهٔ زمانی با یک ژئودزی $u^2 - 2cu + v^2 = 0$ عمود بر هر دوی آنها را در نظر بگیرید).

(۵) ثابت کنید هر خم در \mathbb{H} از انحنای ژئودزی $\kappa_g = 1$ ، به شکل داده شده در تمرین ۴ است (راهنمایی: فرض کنید با یک پارامتری با طول قوس $(u(s), v(s))$ شروع کنیم و گزاره ۱-۲ را به کار ببریم تا نشان دهیم که داریم $1 = \frac{u'}{v} + \theta'$ و $u'^2 + v'^2 = v^2$. معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید:

$$v \frac{d^2 v}{du^2} = \left(1 + \frac{dv}{du}\right)^{3/2} - \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 1$$

و آن را با جایگذاری $z = dv/du$ و به دست آوردن یک معادله دیفرانسیل جدا شدنی برای dz/dv ، حل کنید.

(۶) فرض کنید $ad - bc = 1$ با $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ، $T_{a,b,c,d} = \frac{az+b}{cz+d}$ فرض کنید a . فرض کنید $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ و $a'd' - b'c' = 1$. بررسی کنید که،
 $T_{a',b',c',d'} \circ T_{a,b,c,d} = T_{a'a+b'c, a'b+b'd, c'a+d'c, c'b+d'd}$ و
 $(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = 1$

به علاوه نشان دهید که $T_{d,-b,-c,-a} = T_{a,b,c,d}^{-1}$ (توجه شود که $T_{-a,-b,-c,-d}$ خواننده که نظریه گروه را گذرانده است، تشخیص خواهد داد که ما یک یکرختی بین گروه تبدیلات کسری خطی و گروه $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ از ماتریس های 2×2 با دترمینان یک، با یکی کردن یک ماتریس و وارون جمعی آن، تعریف می کنیم).

b. فرض کنید $T = T_{a,b,c,d}$. ثابت کنید اگر $z = u + iv$ و $v > 0$ آنگاه $T(z) = x + iy$ با $y > 0$. نتیجه بگیرید T, \mathbb{H} را به طور دوسویی به خودش می نگارد.

(۷) نشان دهید که انعکاس^۱ نسبت به ژئودزی $u = 0$ توسط $r(z) = -\bar{z}$ بیان می شود. از این مطلب استفاده کنید تا فرم انعکاس نسبت به یک ژئودزی کلی را تعیین کنید.

(۸) دایره ژئودزی به شعاع R با مرکز در P مجموعه نقاط Q است که $d(P, Q) = R$ ثابت کنید دایره های ژئودزی در \mathbb{H} ، دایره های اقلیدسی هستند. یک راه پیگیری این مطلب بطریق زیر است: دایره ژئودزی با مرکز در $P = (0, 1)$ با شعاع $R = \ln a$ ، باید از $(0, a)$ و $(0, 1/a)$ بگذرد و بنابراین باید یک دایره اقلیدسی به مرکز $(0, \frac{1}{4}(a + 1/a))$ باشد. بررسی کنید که در واقع همه نقاط روی این دایره، یک فاصله R از P دارند (راهنمایی: احتمالاً کار با معادلات دکارتی دایره آسان تر است).

نکته این نتیجه می تواند با استفاده از مدل دیسک پوانکاره ارائه شده در تمرین ۱۵، با رنج کمتری ثابت شود.

(۹*) انحنای ژئودزی یک دایره ژئودزی از شعاع R در \mathbb{H} چقدر است؟ (تمرین های ۴ و ۸ را ببینید.)

(۱۰) به یاد آورید که (برای مثال صفحه ۲۹۸ از مقاله ۱ - ۳۵۰ جبر مجرد، رویکردی هندسی^۲ نوشته شیفین) نسبت ناهمسان از چهار عدد $A, B, P, Q \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ به طریق

زیر تعریف می‌شود.

$$[A : B : P : Q] = \frac{Q - A}{P - A} / \frac{Q - B}{P - B}$$

a. نشان دهید که P, B, A و Q روی یک خط یا دایره قرار دارند اگر و فقط اگر نسبت ناهمساز آنها یک عدد حقیقی باشد.

b. ثابت کنید اگر S یک تبدیل کسری خطی با $S(A) = 0$ ، $S(B) = \infty$ و $S(P) = 1$ باشد، آنگاه $S(Q) = [A : B : P : Q]$. از این مطلب استفاده کنید تا نتیجه بگیرید که برای هر تبدیل کسری خطی T داریم، $[T(A) : T(B) : T(P) : T(Q)] = [A : B : P : Q]$.

c. ثابت کنید تبدیلات کسری خطی، خطوط و دوائر را به خط‌ها یا دوائر می‌نگارند (برای کدامیک از چنین تبدیلاتی خطوط لزوماً به خطوط نگاشته می‌شوند؟).

d. نشان دهید اگر P, B, A و Q روی یک خط یا دایره باشند، آنگاه

$$[A : B : P : Q] = \frac{AQ}{AP} / \frac{BQ}{BP}$$

نتیجه بگیرید $d(P, Q) = |\ln[A : B : P : Q]|$ ، در حالی که P, B, A و Q همانند آنچه هستند که در شکل ۲-۲ تصویر شده است.

e. بررسی کنید که اگر T یک تبدیل کسری خطی باشد که A را به 0 ، B را به ∞ و P را به P' و Q را به Q' می‌برد، آنگاه $d(P, Q) = d(P', Q')$.

(۱۱) a. فرض کنید O هر نقطه‌ای غیر واقع بر یک دایره C و فرض کنید P و Q نقاط روی C چنان باشند که O, P و Q هم خط هستند. نقطه T روی C را چنان فرض کنید که \overline{OT} مماس بر C باشد. ثابت کنید که $(OP)(OQ) = (OT)^2$.

b. تجانس (وارون سازی) 1 در یک دایره به شعاع R و با مرکز در O با فرستادن یک نقطه P به نقطه P' روی نیم خط OP با شرط $\|OP\| \|OP'\| = R^2$ ، تعریف می‌شود. نشان دهید که هر تجانس در یک دایره با مرکز در مبدأ، یک دایره C با مرکز روی محور u —ها و غیر گذرا بر O را به دایره دیگر C' با مرکز روی محور u —ها می‌نگارد. (راهنمایی: برای هر $P \in C$ ، فرض کنید Q نقطه دیگری روی C ، همخط با O و P باشد و فرض کنید Q' تصویر Q تحت تجانس باشد. نتیجه قسمت a را بکار ببرید تا نشان دهید $OP/OQ' = OP'/OQ$ ثابت است. اگر C مرکز C باشد، فرض کنید C' نقطه‌ای روی محور u —ها باشد چنانکه $CP \parallel C'Q'$. نشان دهید که رد (مکان هندسی) Q' یک دایره C' به مرکز C' است).

c. نشان دهید که تجانس در یک دایره از شعاع R با مرکز در O ، خطوط عمودی را با دوائر به مرکز روی محور u —ها و گذرا بر O می‌نگارد و برعکس.

(۱۲) a. ثابت کنید هر ایزومتري (حافظ جهت) از \mathbb{H} می تواند به صورت ترکیب تبدیلات کسری خطی به شکل زیر نوشته شود.

$$T_1(z) = z + b \quad \text{و} \quad T_2(z) = -\frac{1}{z} \quad , b \in \mathbb{R} \text{ برای یک}$$

(راهنمایی: احتمالاً کار با ماتریس ها آسان تر است. نشان دهید که ماتریس هایی به شکل $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و بنابراین به شکل $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ دارید و اینکه هر ماتریس با دترمینان یک می تواند با عملیات سطری و ستونی از این ماتریس ها به دست آید).

b. ثابت کنید که T_2 ، دایره با مرکز روی محور u —ها و خطوط عمودی را به دایره ها با مرکز روی محور u —ها و خطوط عمودی (نه لزوماً به ترتیب) می نگارد. این مطلب را به صورت جبری انجام دهید یا تمرین ۱۱ را به کار برید.

c. نتیجه قسمت های a و b را به کار برید تا ثابت کنید ایزومتري های \mathbb{H} ژئودزی ها را به ژئودزی ها می برند.

(۱۳) یک تبدیل کسری خطی $T = T_{a,b,c,d}$ را سهموی گویند، هرگاه یک نقطه ثابت داشته باشد، بیضوی گویند هرگاه یک نقطه ثابت در بی نهایت داشته باشد و هذلولوی گویند هرگاه دارای دو نقطه ثابت در بی نهایت باشد.

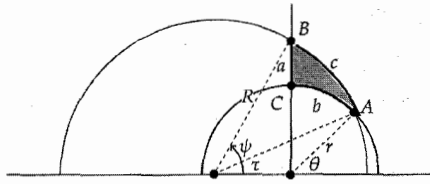
a. نشان دهید T سهموی است اگر $|a+d| < 2$ ، بیضوی است اگر $|a+d| = 2$ و هذلولوی است اگر $|a+d| > 2$.

b. سه نوع از ایزومتري ها را به صورت هندسی تشریح کنید (راهنمایی: به خصوص، چه رابطه ای بین دایره زمانی و تبدیلات کسری خطی سهموی وجود دارد؟).

(۱۴) فرض کنید $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاویه با «وتر» c باشد. از شکل ۲-۹ استفاده کنید تا موارد زیر را ثابت کنید:

$$\sin < A = \frac{\sinh a}{\sinh c}, \quad \cos < A = \frac{\tanh a}{\tanh c}, \quad \cosh c = \cosh a \cosh b$$

(آخرین رابطه، قضیه فیثاغورس هذلولوی است) (راهنمایی: برای مثال با نشان دادن این مطلب شروع کنید که $\cosh b = \csc \theta$ ، $\cosh c = (\csc \psi \sin \tau) / (\sin \psi \sin \tau)$ ، $\cos \tau - \cos \psi = \sin \tau \cot \theta$ و $\csc \tau - \csc \psi = \sin \tau \cot \theta$ و r نیاز دارید).



شکل ۲-۹

(۱۵) یک نقطه P روی یک رویه M مفروض است، دایره ژئودزی از شعاع R با مرکز در P را مکان هندسی نقاطی تعریف می‌کنیم که فاصله (ژئودزی) آنها از P برابر R است. فرض کنید $C(R)$ نمایش محیط باشد. a . نشان دهید روی کره واحد داریم،

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{2\pi R - C(R)}{\pi R^2} = \frac{1}{3}$$

b . نشان دهید که انحنای ژئودزی κ_g از یک دایره ژئودزی کروی از شعاع R برابر است با

$$\cot R \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{R^2}{3} + \dots \right)$$

دیسک پوانکاره به صورت «رویه مطلق»، $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ با اولین فرم اساسی مفروض توسط $F = 0$ ، $E = G = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}$ تعریف می‌شود. این مورد متر هذلولوی روی D نامیده می‌شود.

c . بررسی کنید که در D ژئودزی‌های گذرا بر مبدأ، پاره خط‌های اقلیدسی هستند؛ نتیجه بگیرید که دایره اقلیدسی از شعاع r با مرکز در مبدأ یک دایره هذلولوی با شعاع $R = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ است و بنابراین $r = \tanh \frac{R}{2}$.

d . بررسی کنید که محیط یک دایره هذلولوی برابر $2\pi \sinh R \approx 2\pi \left(R + \frac{R^3}{4} + \dots \right)$ است و بنابراین،

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{2\pi R - C(R)}{\pi R^2} = -\frac{1}{3}$$

e . (با استفاده از انتگرال دو گانه،) نشان دهید مساحت یک دیسک از شعاع هذلولوی R

برابر است با $4\pi \sinh^2 \frac{R}{2} \approx \pi R^2 \left(1 + \frac{R^2}{12} + \dots \right)$. قضیه گاوس-بونه را استفاده کنید تا نتیجه بگیرید که انحنای ژئودزی κ_g از یک دایره ژئودزی از شعاع R برابر است با $\coth R \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{R^2}{3} + \dots \right)$.

(۱۶) در اینجا الگوی دیگری برای هندسه هذلولوی با نام الگوی کلین-بلمترامی^۱ بیان می‌کنیم. پارامتری زیر را برای دیسک هذلولوی در نظر بگیرید: با دیسک واحد باز

$\{x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$ آغاز کنید، به طور عمودی آن را به نیم کره جنوبی از کره واحد تصویر کنید و آنگاه با تصویر کنجنگاری (از قطب شمال) به دیسک واحد برگردید. a. نشان دهید که این نگاشت توسط فرمول زیر (بر حسب مختصات قطبی) بیان می‌شود.

$$x(R, \theta) = (r, \theta) = \left(\frac{R}{1 + \sqrt{1 - R^2}}, \theta \right)$$

محاسبه کنید که اولین فرم اساسی مترپوانکاره روی D (در تمرین ۱۵) عبارت هستند از $E = \frac{4}{(1 - r^2)^2}$, $F = 0$, $G = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2}$ ، که بیان آنها در مختصات قطبی به صورت $\tilde{E} = \frac{1}{(1 - R^2)^2}$, $\tilde{F} = 0$, $\tilde{G} = \frac{R^2}{1 - R^2}$ است (راهنمایی: با دقت و اقتصادی محاسبه کنید).

b. اکنون مختصات را به صورت اقلیدسی (u, v) تغییر دهید و نشان دهید که،

$$\hat{E} = \frac{1 - v^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \quad \hat{F} = \frac{uv}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \quad \hat{G} = \frac{1 - u^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

که از آنجا به دست می‌آورد،

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, & \Gamma_{uu}^v &= 0 \\ \Gamma_{uv}^u &= \frac{v}{1 - u^2 - v^2}, & \Gamma_{uv}^v &= \frac{u}{1 - u^2 - v^2} \\ \Gamma_{vv}^u &= 0, & \Gamma_{vv}^v &= \frac{2v}{1 - u^2 - v^2} \end{aligned}$$

c. از قسمت b استفاده کنید تا با استفاده از اولین فرم اساسی \hat{I} نشان دهید که ژئودزی‌های دیسک، وترهای دایره $u^2 + v^2 = 1$ هستند (راهنمایی: (با استفاده از قاعده زنجیری) نشان دهید که معادلات برای یک ژئودزی می‌دهد $d^2v/du^2 = 0$). فواید و اشکالات این الگورا (در مقایسه با الگوی پوانکاره) تشریح کنید. d. فاصله $(0, 0)$ را از $(a, 0)$ حساب کنید و با فرمول فاصله در الگوی پوانکاره مقایسه کنید. e. جواب خود در قسمت c را با اثبات (هندسی) این مطلب بررسی کنید که دایره توسط x به ژئودزی‌ها در دیسک هذلولوی نگاشته می‌شود (تمرین ۲ - ۱ - ۶).

۳-۳ نظریهٔ رویه با فرم‌های دیفرانسیل

ملاحظه شد که کار با مختصات برای مطالعهٔ رویه‌ها، می‌تواند کاملاً بدون لطف باشد (برای مثال معادلات گاوس و کد آزی در بخش ۳ از فصل ۲ از زیبایی دور هستند). به واسطهٔ مطالبی که در مورد فرم‌های دیفرانسیل می‌آموزیم، می‌توانیم یک تدبیر برانزده و سریع ارائه دهیم که به طور قابل درکی تمیز است. (بسیار شبیه به وضعیت خم‌ها) با کنج متحرک، e_1, e_2, e_3 روی (یک مجموعهٔ بان) از

رویه (جهت دار) خود، M شروع می‌کنیم. در اینجا e_i ها میدان‌های برداری تعریف شده روی M با خواص زیر هستند:

(i) $\{e_1, e_2, e_3\}$ تشکیل یک پایه متعامد برای \mathbb{R}^3 در هر نقطه می‌دهند (از این رو ماتریسی که ستونهای آن این بردارها هستند، یک ماتریس متعامد است).

(ii) $\{e_1, e_2\}$ یک پایه برای فضای مماس M است و $e_3 = n$.

چگونه می‌دانیم که چنین کنج متحرکی وجود دارد؟ اگر $x: U \rightarrow M$ یک رویه پارامتری باشد، می‌توانیم با بردارهای معمولی خود x_u و x_v شروع کنیم و روش گرام-اشمیت^۱ را برای دستیابی به یک پایه متعامد بکار گیریم، یا اگر U یک ناحیه بدون نقاط نافی باشد آنگاه می‌توانیم e_1 و e_2 را بردارهای یکه در سوی جهت های اصلی اختیار کنیم (این راهی بود که در خیلی از اثبات‌های قبلی ما بطور ضمنی استفاده شد).

اگر $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ نگاهت شمول باشد (که در یک مقام محاسباتی ممکن است آن را به عنوان نگاهت پارامتری $U \rightarrow \mathbb{R}^3$ در نظر بگیریم)، در این صورت ۱- فرم های ω_1 و ω_2 روی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$$

یعنی برای هر $V \in T_P M$ داریم: $V = \omega_1(V) e_1 + \omega_2(V) e_2$ ، بنابراین برای $\alpha = 1, 2$ ، $\omega_\alpha(V) = I(V, e_\alpha)$. به علاوه ω_1 و ω_2 اطلاعات مربوط به چگونگی حرکت نقطه ما حول M را در بردارند. در مرحله بعد می‌خواهیم ملاحظه کنیم که چگونه خود کنج می‌چرخد، بنابراین برای $i, j = 1, 2, 3$ ، فرم های ω_{ij} را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$de_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} e_j$$

قابل توجه است که چون برای هر $i, j = 1, 2, 3$ ، $(e_i \cdot e_j)$ (مقدار ثابت) بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= d(e_i \cdot e_j) = de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = \left(\sum_{k=1}^3 \omega_{ik} e_k \right) \cdot e_j + \left(\sum_{k=1}^3 \omega_{jk} e_k \right) \cdot e_i \\ &= \omega_{ij} + \omega_{ji} \end{aligned}$$

بنابراین $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ برای همه $i, j = 1, 2, 3$ (به خصوص، چون همیشه یک بردار یکه است، برای هر i ، $\omega_{ii} = 0$). اگر $V \in T_P M$ ، $\omega_{ij}(V)$ به ما می‌گوید که در P هنگامی که با سرعت V حرکت می‌کنیم، e_i با چه تندی به طرف e_j می‌چرخد.

به خصوص لازم به ذکر است که معادله زیر متضمن عملگر شکل است.

$$de_3 = \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2 = -(\omega_{13} e_1 + \omega_{23} e_2)$$

بنابراین برای هر $V \in T_P M$ داریم: $\omega_{13}(V) = II(V, e_1)$ ، $\omega_{23}(V) = II(V, e_2)$ در واقع هنگامی که می‌نویسیم:

$$\omega_{13} = h_{11} \omega_1 + h_{12} \omega_2$$

$$\omega_{23} = h_{21} \omega_1 + h_{22} \omega_2$$

به خاطر توابع ضرایب مقتضی $h_{\alpha\beta}$ ، ملاحظه می‌شود که ماتریس عملگر شکل A_p نسبت به پایه $\{e_1, e_2\}$ برای TPM چیزی جز $[h_{\alpha\beta}]$ نیست. بسیاری از نتایج ما از قضیه بعدی حاصل می‌شوند.

قضیه ۳-۱ (معادلات ساختاری).

$$\text{و } d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \quad \text{و } d\omega_2 = \omega_{12} \wedge \omega_2$$

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^r \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

اثبات از خواص مشتق خارجی داریم:

$$\begin{aligned} \circ = d(dx) &= d\omega_1 e_1 + d\omega_2 e_2 - \omega_1 \wedge \left(\sum_{j=1}^r \omega_{1j} e_j \right) - \omega_2 \wedge \left(\sum_{j=1}^r \omega_{2j} e_j \right) \\ &= (d\omega_1 - \omega_2 \wedge \omega_{21}) e_1 + (d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_{12}) e_2 - (d\omega_1 \wedge \omega_{13} - \omega_2 \wedge \omega_{23}) e_3 \end{aligned}$$

پس از این حقیقت که $\{e_1, e_2, e_3\}$ یک پایه متعامد برای \mathbb{R}^3 است، نتیجه می‌گیریم که

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \quad \text{و} \quad d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21} = -\omega_2 \wedge \omega_{12} = \omega_{12} \wedge \omega_2$$

به طور مشابه به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \circ = d(de_i) &= d\left(\sum_{k=1}^r \omega_{ik} e_k \right) = \sum_{k=1}^r (d\omega_{ik} e_k - \omega_{ik} \wedge \sum_{j=1}^r \omega_{kj} e_j) \\ &= \sum_{j=1}^r d\omega_{ij} e_j - \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^r \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \right) e_j = \sum_{j=1}^r (d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^r \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}) e_j \\ \square. d\omega_{ij} &= \sum_{k=1}^r \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = 0, \quad i, j \text{ هر برای هر } \end{aligned}$$

همچنین نتیجه اضافی زیر از اثبات را داریم.

$$\text{گزاره ۳-۲ عملگر شکل متقارن است، یعنی } h_{12} = h_{21}$$

اثبات از مؤلفه e_3 در معادله $d(dx) = 0$ در اثبات قضیه ۳-۱ داریم:

$$\begin{aligned} \circ = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} &= \omega_1 \wedge (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) + \omega_2 \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) \\ &= (h_{12} - h_{21})\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

$$\square. h_{12} - h_{21} = 0 \quad \text{بنابراین}$$

یادآوری می‌شود که V یک جهت اصلی است اگر $der(V)$ یک مضرب عددی از V باشد. بنابراین e_1 و e_2 جهت‌های اصلی هستند، اگر و فقط اگر $h_{12} = 0$ و داریم $\omega_{12} = \kappa_1 \omega_1$ و $\omega_{23} = \kappa_2 \omega_2$ درحالی که κ_1 و κ_2 طبق معمول انحناهای اصلی هستند. □

فهمیدن این مطلب مهم است که گردآورده فرم‌ها با تغییر کنج متحرک ما، با چرخش e_1 و e_2 تحت یک زاویه θ (که حتی ممکن است یک تابع باشد)، چگونه تغییر می‌کند.

لم ۳-۳ اگر برای یک تابع θ ، $\bar{e}_1 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ و $\bar{e}_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ در این صورت داریم:

$$\bar{\omega}_1 = \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_2$$

$$\bar{\omega}_2 = -\sin \theta \omega_1 + \cos \theta \omega_2$$

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta$$

$$\bar{\omega}_{13} = \cos \theta \omega_{13} + \sin \theta \omega_{23}$$

$$\bar{\omega}_{23} = -\sin \theta \omega_{13} + \cos \theta \omega_{23}$$

به ویژه، توجه شود که $\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ و $\bar{\omega}_{13} \wedge \bar{\omega}_{23} = \omega_{13} \wedge \omega_{23}$

اثبات به عنوان تمرین ۱ به خواننده واگذار می‌شود. □

اغلب برای راحتی (همانند آنچه در بخش ۳ و ۴ از فصل ۲ انجام شد)، برای مطالعه خم‌ها روی رویه‌ها از کنج داربوکس استفاده می‌شود (تمرین ۳ را ببینید)، یعنی کنج متحرک تعیین شده به قسمی که e_1 مماس بر خم باشد. برای مثال α یک ژئودزی است اگر و فقط اگر بر حسب کنج داربوکس به عنوان ۱-فرم روی α ، داشته باشیم: $\omega_{12} = 0$. اکنون اجازه دهید که معادلات ساختاری را با دقت بیشتری بررسی کنیم.

$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}$	معادله گاوس:
$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}$	معادله‌های کدآزی:
$d\omega_{23} = -\omega_{12} \wedge \omega_{13}$	

مثال ۱ برای روشن ساختن قدرت روش کنج متحرک، گزاره ۳-۳ از فصل ۲ را مجدداً اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $K = 0$ و M بدون نقاط مسطح باشد. آنگاه ادعا می‌کنیم که M یک خط کشی شده است و صفحه مماس بر M در امتداد هادی‌ها ثابت است. با یک کنج متحرک اصلی با $\kappa_1 = 0$ کار می‌کنیم، بنابراین $\omega_{13} = 0$. از این رو، طبق اولین

معادله کد آزی $d\omega_{12} = 0 = \omega_{12} \wedge \omega_{22} = \omega_{12} \wedge \kappa_2 \omega_2$ چون $\kappa_2 \neq 0$ باید داشته باشیم $\omega_{12} \wedge \omega_2 = 0$ و در نتیجه برای یک تابع f ، $\omega_{12} = f\omega_2$. بنابراین $\omega_{12}(e_1) = 0$ و در نتیجه $de_1(e_1) = \omega_{12}(e_1)e_2 + \omega_{13}(e_1)e_3 = 0$. این مطلب نتیجه می‌دهد که e_1 به هنگام حرکت ما در جهت e_1 ، ثابت می‌ماند که حاصل آن این است که جهت e_1 به ما یک خط می‌دهد. بعلاوه (چون $\kappa_1 = 0$) $de_3(e_1) = 0$ و بنابراین صفحه مماس به M در طول این خط ثابت است. ∇

بخصوص معادله گاوس، جالب است. ابتدا توجه شود که،

$$\begin{aligned}\omega_{12} \wedge \omega_{23} &= (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{12}\omega_1 + h_{22}\omega_2) \\ &= (h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\omega_1 \wedge \omega_2 = KdA\end{aligned}$$

در اینجا $K = \det[h_{\alpha\beta}] = \det A_p$ انحنای گاوسی است. پس، معادله گاوس در واقع به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$(*) \quad d\omega_{12} = -KdA$$

(چه زیبا!) به علاوه، قابل توجه است که طبق لم ۳-۳ برای هر دو کنج متحرک e_1, e_2, e_3 و $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ داریم: $d\bar{\omega}_{12} = d\omega_{12}$ (که خوب است، زیرا طرف راست $(*)$ به میدان کنج بستگی ندارد). در مرحله بعد، ملاحظه می‌کنیم که بدلیل اولین معادلات در قضیه ۱-۳، فقط با دانستن ω_1 و ω_2 مقدار ω_{12} قابل محاسبه است. بنابراین فقط به اولین فرم اساسی رویه بستگی دارد (اگر بنویسیم $\omega_{12} = P\omega_1 + Q\omega_2$ ، آنگاه معادله اول، P و دومی Q را تعیین می‌کند). از این رو به اثبات جدیدی برای قضیه برجسته گاوس، قضیه ۱-۳، می‌رسیم.

مثال ۲ اجازه دهید به عقب یعنی به پارامتری معمول خود از کره واحد برگردیم:

$$x(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}dx &= x_u du + x_v dv \\ &= \underbrace{(\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)}_{e_1} du + \underbrace{(-\sin v, \cos v, 0)}_{e_2} (\sin u dv)\end{aligned}$$

توجه شود آنچنان که ممکن است انتظار داشتیم: $e_1 = x_u$ و $e_2 = x_v/\sqrt{G}$. پس این مطلب به ما نتیجه می‌دهد که،

$$\omega_1 = du \quad \text{و} \quad \omega_2 = \sin u dv$$

پس، $d\omega_1 = 0$ و $d\omega_2 = \cos u du \wedge dv = du \wedge (\cos u dv)$ و بنابراین از اولین معادله ساختاری ملاحظه می‌شود که $\omega_{12} = \cos u dv$. مشکل است که تشابه این دست

آوردها را با بحث در مورد ϕ_{12} و مثال ۱ در بخش ۱ از دست بدهیم. حال داریم:
 $K = 1$ بنابراین کره در واقع دارای انحنای گاوسی ۱ است. $d\omega_{12} = -\sin u \, du \wedge dv = -\omega_1 \wedge \omega_2$
 $\nabla \cdot$ است.

۱- فرم ω_{12} ، فرم التصاق^۱ نامیده می‌شود و چرخش مماسی e_1 را می‌سنجد. آنگاه همچنان که در بخش ۱ دیدیم، $\nabla \cdot e_1$ مؤلفه مماسی بردار زیر است.

$$D \nabla e_1 = de_1(V) = \omega_{12}(V)e_2 + \omega_{12}(V)e_3$$

که البته این بردار همان $\omega_{12}(V)e_2$ است. از معادله گاوس و قضیه استوکس^۲، رابطه گاوس-بونه برای یک رویه جهت دار M با مرز (تکه‌ای هموار) ∂M با شرط امکان تعریف یک کنج متحرک بطور سرتاسری، بدست می‌آید. یعنی می‌توانیم رابطه گاوس-بونه موضعی، قضیه ۱-۵، را بدون تلاش زیاد دوباره به طور کامل اثبات کنیم.

اثبات با یک کنج متحرک دلخواه e_1, e_2, e_3 آغاز می‌کنیم و کنج داریوکس $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ را در امتداد ∂M می‌گیریم. می‌نویسیم: $\bar{e}_1 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ و $\bar{e}_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ (در حالیکه θ به طور هموار در امتداد قطعات هموار ∂M ، اختیار می‌شود و زاویه خارجی ϵ_j در P_j «پرش» θ را در هنگام عبور ما از P_j می‌دهد). آنگاه طبق قضیه استوکس و لم ۳-۳ داریم:

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= - \iint_S d\omega_{12} = - \int_{\partial S} \omega_{12} \\ &= - \int_{\partial S} (\bar{\omega}_{12} - d\theta) = \int_{\partial S} \kappa_g ds + (2\pi - \sum \epsilon_j) \end{aligned}$$

(تمرین ۲ را ببینید). □

تمرین ۳-۳

(۱) لم ۳-۲ را ثابت کنید.

(۲) فرض کنیم e_1, e_2, e_3 کنج داریوکس در امتداد یک خم α باشد. نشان دهید به عنوان یک ۱-فرم روی α ، $\omega_{12} = \kappa_g \omega_1$.

(۳) فرض کنید α یک خم واقع بر رویه M باشد. اگر e_1, e_2, e_3 یک کنج داربوکس در امتداد α (یعنی یک کنج متحرک برای رویه با e_1 مماس به α) باشد و $\bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_2 = e_2, \bar{e}_3 = e_3$ کنج فرنه باشد، آنگاه به طور مشابه با الم ۳-۳ از \bar{e}_3, e_2, e_3 با دوران تحت یک زاویه θ به دست می آیند. نشان دهید به عنوان یک ۱-فرم روی α داریم:

$$\omega_{\bar{1}2} = k\omega_1 = \cos \theta \omega_{12} + \sin \theta \omega_{13}$$

$$\omega_{\bar{1}3} = 0 = -\sin \theta \omega_{12} + \cos \theta \omega_{13}$$

$$\omega_{\bar{2}3} = \tau\omega_1 = \omega_{23} + d\theta$$

* (۴) از تمرین ۳ برای اثبات قضیه میونسیر (گزاره ۲-۵ از فصل ۲) استفاده کنید.

(۵) از تمرین ۳ برای اثبات این مطلب استفاده کنید که «اگر $C \subset M$ یک خط انحنای باشد و صفحه بوسان C زاویه ثابت با صفحه مماس بر M بسازد، آنگاه C مسطح است».

(۶) برای حل مجدد تمرین ۲-۲-۱۲، کنج متحرک را به کار برید (راهنمایی: معادلات کدآزی را به کار برید تا نشان دهید که $dk \wedge \omega_1 = dk \wedge \omega_2 = 0$).

(۷) برای حل مجدد تمرین ۲-۲-۱۳، کنج متحرک را به کار برید.

* (۸) از کنج متحرک برای محاسبه انحنای گاوسی چنبره با پارامتری مثال ۱ (c) در فصل ۲ استفاده کنید.

(۹) بردارهای $e_1 = v(1, 0)$ و $e_2 = v(0, 1)$ یک کنج متحرک در \mathbb{H} را بیان می کنند. قرار دهید $\omega_1 = du/v$ و $\omega_2 = dv/v$.

a. بررسی کنید برای $V \in T_{(u,v)}\mathbb{H}$ ، $\omega_1(V) = I(V, e_1)$ و $\omega_2(V) = I(V, e_2)$.

b. مقادیر ω_{12} و $d\omega_{12}$ را محاسبه کنید و ثابت کنید $K = -1$.

(۱۰) کنج متحرک را برای حل مجدد موارد زیر به کار برید.

a. تمرین ۳-۱-۹.

b. تمرین ۳-۱-۱۰.

- ۱۱) a. برای حل مجدد تمرین ۲-۳-۱۴، کنج متحرک را به کار ببرید.
 b. برای حل مجدد تمرین ۲-۴-۱۱، کنج متحرک را به کار ببرید. یعنی ثابت کنید اگر دو خانواده از ژئودزی‌ها در M وجود داشته باشند که همه جا متعامد هستند، آنگاه M تخت است.
 c. فرض کنید دو خانواده از ژئودزی‌ها در M وجود دارند که زاویه ثابت θ می‌سازند، در این صورت اثبات یا رد کنید که « M تخت است».

(۱۲) به یاد آورید که هر ۱-فرم موضعی ϕ با $d\phi = 0$ می‌تواند برای یک تابع f به صورت $d\phi = df$ نوشته شود.

a. ثابت کنید که اگر رویه M تخت باشد، آنگاه به طور موضعی می‌توان یک کنج متحرک e_1, e_2 روی M به قسمی یافت که $\omega_{12} = 0$. (راهنمایی: با یک کنج متحرک دلخواه شروع کنید.)

b. نتیجه بگیرید که اگر M تخت باشد به طور موضعی می‌توان یک پارامتری x از M با $E = G = 1$ و $F = 0$ یافت (یعنی M به طور موضعی با یک صفحه ایزومتر است).

(۱۳) (تبدیل باکلاند^۱) فرض کنید M و \bar{M} دو رویه در \mathbb{R}^3 و $f: M \rightarrow \bar{M}$ یک تابع دوسویی با این خاصیت‌ها باشد که:

(i) خط واصل P به $f(P)$ در P بر M مماس و در $f(P)$ بر \bar{M} مماس است.

(ii) فاصله P و $f(P)$ ، مستقل از P ، مقدار ثابت r است.

(iii) زاویه $n(P)$ و $\bar{n}(f(P))$ ، مستقل از P ، یک مقدار ثابت θ است.

ثابت کنید M و \bar{M} هر دو دارای انحنای ثابت $K = -(\sin^2 \theta)/r^2$ هستند. (راهنمایی:

بنویسید $\bar{P} = f(P)$ و e_1, e_2, e_3 (به ترتیب $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$) را کنج متحرک در P (به

ترتیب در \bar{P}) با $\bar{e}_1 = e_1$ در جهت $\bar{P}\bar{P}$ قرار دهید. فرض کنید x و $\bar{x} = fox$ پارامتری

های موضعی باشند، داریم: $\bar{x} = x + re_1$. با دیفرانسیل‌گیری از این معادله، نتیجه بگیرید

$$(\omega_{12} = \cot \theta \omega_{13} - \frac{1}{r} \omega_2)$$

۴-۳ محاسبه تغییرات و رویه‌ها با انحنای متوسط ثابت

هر دانشجوی حساب دیفرانسیل و انتگرال، با شرط لازم برای وجود نقطه اکسترم (ماکزیمم یا مینیمم) موضعی در P برای یک تابع دیفرانسیل پذیر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، آشنایی دارد: باید داشته باشیم: $\nabla f(p) = 0$. با یک عبارت کمی متفاوت، برای هر بردار v ، مشتق سویی با

بیان زیر بایستی صفر باشد.

$$D_{\mathbf{V}}f(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(p+\epsilon\mathbf{V})-f(p)}{\epsilon}$$

به علاوه اگر یک مجموعه از قیدها به صورت

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0\}$$

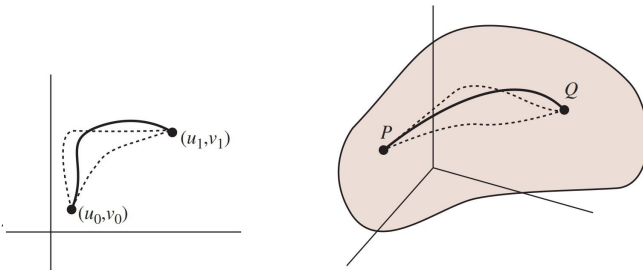
به ما داده شده باشد، روش ضرایب لاگرانژ به ما می‌گوید که برای یک نقطه اکسترمم مقید P ، برای اعدادی چون $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ باید داشته باشیم:

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(p)$$

(در اینجا یک شرط زوال ناپذیری نیز وجود دارد که $\nabla g_k(p), \dots, \nabla g_1(p)$ بایستی مستقل خطی باشند.)

فرض کنید یک رویه پارامتری منظم $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ داده شده و خواسته شده باشد که (بدون بهره از آنالیز بخش ۴ از فصل ۲) یک ژئودزی از $P = x(u_0, v_0)$ به $Q = x(u_1, v_1)$ بیابیم. در میان همه مسیرهای M از $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ با $\alpha(0) = P$ و $\alpha(1) = Q$ خواهان کوتاه‌ترین مسیر هستیم. یعنی می‌خواهیم مسیری مثل $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ مقید به شرط‌های $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ و $(u(1), v(1)) = (u_1, v_1)$ ، مانند شکل ۴-۱ را اختیار کنیم که انتگرال زیر مینیمم شود.

$$\int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2} dt$$



شکل ۴-۱

اکنون یک مسئله مینیمم سازی در فضای همه خم‌های (C^∞) ، $(u(t), v(t))$ را با فرض $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ و $(u(1), v(1)) = (u_1, v_1)$ انجام می‌دهیم. گرچه حالا با یک وضعیت با بعد نامتناهی کار می‌کنیم، ولی نباید نگران باشیم. در بیانی کلاسیک، ما یک تابع F^1 ، تعریف شده روی فضای χ از همه خم‌های C^1 ، $\mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1]$ داریم، یعنی،

$$(*) \quad F(\mathbf{u}) = \int_0^1 f(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t)) dt$$

برای مثال در حالت مسئله طول قوس داریم:

$$f(t, (u(t), v(t)), (u'(t), v'(t))) = \int_0^1 \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2} dt$$

گفتن اینکه یک خم u^* ، یک نقطه اکسترم موضعی (با نقاط انتهایی ثابت) از تابع F مفروض در (*) است، برابر است با گفتن اینکه برای هر تغییر $\xi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ با $\xi(0) = \xi(1) = 0$ ، مشتق سویی

$$D_\xi F(u^*) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(u^* + \epsilon\xi) - F(u^*)}{\epsilon} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} F(u^* + \epsilon\xi)$$

باید صفر باشد. این مطلب ما را به قضیه زیر راهنمایی می‌کند.

قضیه ۴-۱ (معادله‌های آلر-لاگرانژ) اگر u^* یک نقطه اکسترم موضعی از تابع F مفروض در فوق در (*) باشد، آنگاه در u^* داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right)$$

در هر دو طرف برای هر $0 \leq t \leq 1$ ، محاسبات در $(t, u^*(t), u'^*(t))$ انجام می‌شود.

اثبات فرض کنیم $\xi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم C^1 با $\xi(0) = \xi(1) = 0$ باشد. آنگاه با استفاده از این حقیقت که می‌توانیم مشتق‌گیری را داخل علامت انتگرال ببریم (تمرین ۱ را ببینید) و آنگاه قاعده زنجیری، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} F(u^* + \epsilon\xi) &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \int_0^1 f(t, u^*(t) + \epsilon\xi(t), u'^*(t) + \epsilon\xi'(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(t, u^*(t) + \epsilon\xi(t), u'^*(t) + \epsilon\xi'(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial u}(t, u^*(t), u'^*(t)) \cdot \xi(t) + \frac{\partial f}{\partial u'}(t, u^*(t), u'^*(t)) \cdot \xi'(t) \right) dt \end{aligned}$$

و بنابراین با انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \xi(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) \xi(t) + \frac{\partial f}{\partial u'} \cdot \xi'(t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) \right) \cdot \xi(t) dt \end{aligned}$$

حال، با به کارگیری تمرین ۲، چون این مطلب برای هر ξ ، C^1 با $\xi(0) = \xi(1) = 0$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که،

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}'} \right) = 0$$

آنچنان که انتظار می‌رفت. □

البته معادله‌های آلر-لاگرانژ، در واقع دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را ارائه می‌دهند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}'} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}'} \right) \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

مثال ۱ به یاد آورید که برای کره واحد در پارامتری معمول داریم: $F = 0$ ، $E = 1$ و $G = \sin^2 u$. برای یافتن کوتاهترین مسیر از $(u_0, v_0) = (u_1, v_1)$ به نقطه (u_1, v_1) می‌خواهیم تابع زیر را مینیمم کنیم.

$$\mathbf{F}(u, v) = \int_0^1 \sqrt{(u'(t))^2 + \sin^2 u(t) (v'(t))^2} dt$$

با فرض اینکه مسیر بحرانی \mathbf{u}^* با سرعت یکه پارامتری شده است، معادلات (\clubsuit) ، جواب‌های (مقدار ثابت) $v'(t) = 0$ و $u''(t) = \sin u(t) \cos u(t) v'(t)^2$ را به ما می‌دهند (به مثال ۶ (v) در بخش ۴ از فصل ۲ رجوع کنید). ▽

اکنون به دو مسئله مورد علاقه در اینجا می‌پردازیم: چه رویه‌ای دارای حداقل مساحت با یک خم مرزی مفروض است؟ و چه رویه‌ای از حداقل مساحت، در بردارنده یک حجم مفروض است؟ به خاطر همین، بایستی رویه‌های پارامتری را در نظر بگیریم و بنابراین تابع‌ها روی توابع از دو متغیر تعریف می‌شوند. به خصوص، برای توابع $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ تعریف شده روی دامنه $D \subset \mathbb{R}^2$ ، در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \iint_D \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du dv$$

به دنبال تابعی چون \mathbf{x}^* هستیم که برای هر تغییر $D \rightarrow \mathbb{R}^3$: ξ با ξ روی ∂D ،

$$D_\xi \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \epsilon \xi) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)}{\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \epsilon \xi) = 0$$

حال محاسبه می‌کنیم: با یادآوری $\frac{d}{dt} \|\mathbf{f}(t)\| = \frac{\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}(t)\|}$ و قرار دادن $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \epsilon \xi$ داریم:

$$\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u^* \times \mathbf{x}_v^*\|} ((\xi_u \times \mathbf{x}_v^* + \mathbf{x}_u^* \times \xi_v) \cdot (\mathbf{x}_u^* \times \mathbf{x}_v^*))$$

$$= \xi_u \times \mathbf{x}_v^* + \mathbf{x}_u^* \times \xi_v) \cdot \mathbf{n}$$

اکنون ملاحظه می‌شود که،

$$(\xi_u \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n} = ((\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n})_u - (\xi \times \mathbf{x}_{uv}^*) \cdot \mathbf{n} - (\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n}_u$$

$$(\mathbf{x}_u^* \times \xi_v) \cdot \mathbf{n} = ((\mathbf{x}_u^* \times \xi) \cdot \mathbf{n})_u - (\mathbf{x}_{uv}^* \times \xi) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{x}_u^* \times \xi) \cdot \mathbf{n}_v$$

و بنابراین با جمع کردن این معادلات بدست می‌آوریم:

$$(\xi_u \times \mathbf{x}_v^* + \mathbf{x}_u^* \times \xi_v) \cdot \mathbf{n} = ((\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n})_u + ((\mathbf{x}_u^* \times \xi) \cdot \mathbf{n})_v$$

$$- ((\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n}_u + (\mathbf{x}_u^* \times \xi) \cdot \mathbf{n}_v)$$

$$= ((\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n})_u - ((\xi \times \mathbf{x}_u^*) \cdot \mathbf{n})_v$$

$$- ((\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n}_u + (\mathbf{x}_u^* \times \xi) \cdot \mathbf{n}_v)$$

$$= ((\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n})_u - ((\xi \times \mathbf{x}_u^*) \cdot \mathbf{n})_v$$

$$- \xi \cdot (\mathbf{x}_v^* \times \mathbf{n}_u + \mathbf{n}_v \times \mathbf{x}_u^*)$$

در آخرین مرحله، از اتحاد $(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} = (\mathbf{W} \times \mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{U}$ استفاده کردیم.

روش مخصوص انتگرال‌گیری جزء به جزء در وضعیت دو بعدی، به کارگیری قضیه گرین،

قضیه ۲-۶ در ضمیمه است، پس با قرار دادن $P = (\xi \times \mathbf{x}_u^*) \cdot \mathbf{n}$ و $Q = (\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n}$ ، به

دست می‌آید:

$$\int \int_D (\xi_u \times \mathbf{x}_v^* + (\mathbf{x}_u^* \times \xi_v)) \cdot \mathbf{n} \, dudv = \int \int_D \underbrace{((\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n})_u}_{Q_u} - \underbrace{((\xi \times \mathbf{x}_u^*) \cdot \mathbf{n})_v}_{P_v} \, dudv$$

$$- \int \int_D \xi \cdot (\mathbf{x}_v^* \times \mathbf{n}_u + \mathbf{n}_v \times \mathbf{x}_u^*) \, dudv$$

$$= \int_{\partial D} \underbrace{(\xi \times \mathbf{x}_u^*) \cdot \mathbf{n} \, du}_P - \underbrace{(\xi \times \mathbf{x}_v^*) \cdot \mathbf{n} \, dv}_Q$$

$$- \int \int_D \xi \cdot (\mathbf{x}_v^* \times \mathbf{n}_u + \mathbf{n}_v \times \mathbf{x}_u^*) \, dudv$$

چون روی ∂D ، $(u, v) \in \partial D$ ، $\xi = 0$ ، انتگرال خط صفر است. با استفاده از معادله (‡) در

صفحه ۷۳ درمی‌یابیم که $\mathbf{x}_v^* \times \mathbf{n}_u = a(\mathbf{x}_u^* \times \mathbf{x}_v^*)$ و $\mathbf{n}_v \times \mathbf{x}_u^* = d(\mathbf{x}_u^* \times \mathbf{x}_v^*)$ ، پس بالاخره

حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \int \int_D \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \int \int_D (\xi_u \times \mathbf{x}_v^* + \mathbf{x}_u^* \times \xi_v) \cdot \mathbf{n} \, dudv$$

$$= \int \int_D \xi \cdot (\mathbf{x}_v^* \times \mathbf{n}_u + \mathbf{n}_v \times \mathbf{x}_u^*) \, dudv$$

$$= - \int \int_D (a + d) \xi \cdot (\mathbf{x}_u^* \times \mathbf{x}_v^*)$$

$$= - \int \int_D \gamma H \xi \cdot \mathbf{n} \, dA$$

چون $H = \frac{1}{\gamma} \text{trace } A_p$

از اینجا با استفاده از مشابه دو بعدی تمرین ۲، قضیه زیر را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۴-۲ در بین تمام رویه‌های (پارامتری شده) با یک مرز مفروض، رویه‌های مینیمال، یعنی با شرط $H = 0$ ، دارای کمترین مساحت هستند. □

درواقع، این نتیجه وجه تسمیه این نوع رویه‌هاست.

در مرحله بعد، فرض کنید خواهان مشخص کردن رویه‌هایی بسته با کمترین مساحت هستیم که حجم مفروض V را شامل می‌شوند. برای بسته ساختن یک رویه پارامتری، نیاز داریم که برای هر $(u, v) \in \partial D$ ، $x(u, v) = x_0$. اما چگونه قید حجم را بر حسب x بیان کنیم؟ جواب از قضیه دیورژانس می‌آید و مشابه سه بعدی نتیجه تمرین ۵-۲-۱ است. حجم احاطه شده توسط یک رویه پارامتری x توسط رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\text{vol}(V) = \frac{1}{3} \int \int_D \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

بنابراین روش ضرایب لاگرانژ پیشنهاد می‌کند که برای یک رویه از حداقل مساحت باید یک عدد ثابت λ موجود باشد به قسمی که برای همه تغییرات ξ با $\xi = 0$ روی ∂D داشته باشیم: $\int \int_D (\lambda - 2H) \xi \cdot \mathbf{n} \, dA = 0$. بار دیگر با استفاده از مشابه دو بعدی تمرین ۲، مشاهده می‌کنیم که $\lambda - 2H = 0$ و بنابراین H باید ثابت باشد (تمرین ۶ را نیز ببینید). پس نتیجه می‌گیریم:

قضیه ۴-۳ در بین تمام رویه‌های (پارامتری شده) شامل یک حجم ثابت، رویه‌های با کمترین مساحت، دارای انحنا متوسط ثابت هستند.

یک حباب صابون دارای انحنا متوسط ثابت است. قضیه‌ای نابديهی از الکساندرو^۱ مشابه با قضیه ۳-۵ از فصل ۲، مبین این است که یک رویه فشرده هموار از انحنا متوسط ثابت بایستی یک کره باشد. بنابراین حباب صابون باید کره باشد. «حباب‌های دوقلو» چه توضیحی دارند؟

مثال ۲ اگر از ما سؤال شود که چه رویه دواری، دارای انحنا متوسط ثابت H_0 است، حکم تمرین ۱۹-۲-۲۱ ما را به معادله دیفرانسیل زیر راهنمایی می‌کند:

$$\frac{h''}{(1+h'^2)^{3/2}} - \frac{1}{h(1+h'^2)^{1/2}} = 2H_0.$$

(در اینجا رویه از دوران نمودار h حول محور مختصات به دست آمده است). معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

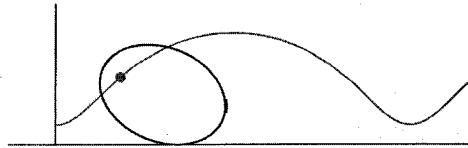
$$\frac{-hh'' + (1 + h'^2)}{(1 + h'^2)^{3/2}} + 2H_0 h = 0$$

و با ضرب در h' داریم:

$$h' \frac{-hh'' + (1 + h'^2)}{(1 + h'^2)^{3/2}} + 2H_0 h h' = 0$$

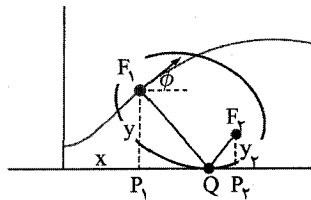
$$\left(\frac{h}{\sqrt{(1 + h'^2)}} \right)' + 2H_0 \left(\frac{1}{2} h^2 \right)' = 0$$

$$(\dagger) \quad \frac{h}{\sqrt{(1 + h'^2)}} + H_0 h^2 = \text{Const.}$$



شکل ۴ - ۲

اکنون نشان می‌دهیم که چنین توابعی همچنان که در شکل ۴ - ۲ نشان داده شده است، دارای یک مشخصه هندسی اعجاب آور هستند. با یک بیضی با نیم قطر بزرگ‌تر a و نیم قطر کوچک‌تر b و نیز کانون‌های F_1 و F_2 شروع می‌کنیم، مکان هندسی یکی از کانون‌ها را هنگام غلتیدن بیضی در طول محور x -ها در نظر می‌گیریم.



شکل ۴ - ۳

طبق تعریف بیضی داریم: $\|\vec{F}_1\vec{q}\| + \|\vec{F}_2\vec{q}\| = 2a$ و طبق تمرین ۷، معادله $yy_2 = b^2$ به دست می‌آید (شکل ۴ - ۳ را ببینید). از طرف دیگر از تمرین ۸ نتیجه می‌گیریم که $\vec{F}_1\vec{q}$ بر خم عمود است و در نتیجه $y = \|\vec{F}_1\vec{q}\| \cos \phi$. چون خاصیت «انعکاسی» بیضی به ما می‌گوید که $\angle F_1qp_1 \cong \angle F_2qp_2 <$ ، در نتیجه $y_2 = \|\vec{F}_2\vec{q}\| \cos \phi$ ، به دلیل این که $\cos \phi = dx/ds$ و $ds/dx = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ داریم:

$$y + \frac{b^2}{y} = y + y_2 = 2a \cos \phi = 2a \frac{dx}{ds}$$

و از این رو

$$0 = y^2 - 2ay \frac{dx}{ds} + b^2 = y^2 - \frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}} + b^2 = 0$$

با قرار دادن $H_0 = -1/2a$ ، ملاحظه می‌کنیم که این مطلب با معادله (†) در فوق مطابقت می‌کند. ∇

تمرین ۳-۴

۱# فرض کنید $g: [0, 1] \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است و $G(\epsilon) = \int_0^1 g(t, \epsilon) dt$ ثابت کنید که اگر $\frac{\partial g}{\partial \epsilon}$ پیوسته باشد، آنگاه $G'(\epsilon) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \epsilon}(t, \epsilon) dt$ (راهنمایی: $h(\epsilon) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \epsilon}(t, u) dt du$ را در نظر بگیرید).

۲# a. فرض کنید f یک تابع پیوسته روی $[0, 1]$ باشد و برای همه توابع پیوسته ξ روی $[0, 1]$ ، $\int_0^1 f(t)\xi(t) dt = 0$ ثابت کنید $f = 0$ (راهنمایی: قرار دهید $\xi = f$).
 a. فرض کنید f یک تابع پیوسته روی $[0, 1]$ است و برای همه توابع پیوسته ξ روی $[0, 1]$ با $\xi(0) = \xi(1) = 0$ ، $\int_0^1 f(t)\xi(t) dt = 0$ ثابت کنید که $f = 0$ (راهنمایی: برای یک تابع پیوسته مناسب ψ ، قرار دهید $\xi = \psi f$).
 b. همین نتیجه را برای توابع C ، ξ به دست آورید.
 c. همین نتیجه را برای توابع برداری f و ξ به دست آورید.

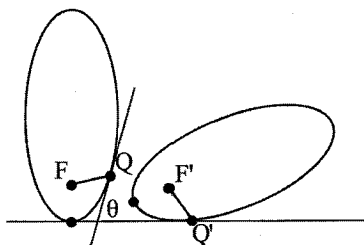
۳) با استفاده از معادلات اُپلر-لاگرانژ، نشان دهید که کوتاه‌ترین مسیر واصل دو نقطه در صفحه اقلیدسی، یک پاره خط است.

۴) تابع $F(u) = \int_a^b 2\pi u(t) \sqrt{1+(u'(t))^2} dt$ را برای تعیین رویه دواری به کار بگیرید که دارای کمترین مساحت و با دو دایره موازی (احتمالاً با شعاع‌های متفاوت) به عنوان مرز است (راهنمایی: شما باید به همان معادله دیفرانسیل در تمرین ۲-۲-۱۹ برسید).

۵) مشابه قضیه ۴-۳ را برای خم‌ها ثابت کنید. یعنی نشان دهید که در بین همه خم‌های مسطح بسته که یک سطح مفروض را احاطه کرده‌اند، دایره دارای کمترین محیط است. (به قضیه ۳-۱۰ از فصل ۱ رجوع کنید (راهنمایی: با تمرین ۵-۲-۱ شروع کنید. نشان دهید که قید معادلات اُپلر-لاگرانژ نتیجه می‌دهد که خم اکسترمم کننده، دارای انحنای ثابت است. تمرین ۱-۲-۴ و قاعده زنجیری نیز مفید هستند).

۶) انتگرال $\int_0^1 f(t)g(t)dt$ را به صورت یک ضرب داخلی $\langle f, g \rangle$ روی فضای توابع پیوسته روی $[0, 1]$ تعبیر کنید. اگر برای هر تابع پیوسته g با $\int_0^1 g(t)dt = 0$ داشته باشیم $\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$ ، آنگاه ثابت کنید f باید یک تابع ثابت باشد. (راهنمایی: بنویسید $\langle f, 1 \rangle = \int_0^1 f(t)dt = 0 + \int_0^1 f(t)dt = \langle f, 1 \rangle + \int_0^1 f(t)dt$ که در حالی که $\langle f, 1 \rangle = 0$.)

۷) خاصیت پدال^۱ را برای بیضی ثابت کنید، یعنی ثابت کنید حاصلضرب فاصله‌ها از کانون‌ها تا خط مماس به بیضی در هر نقطه یک مقدار ثابت است (در واقع، برابر مقدار مربع طول نیم محور کوتاه‌تر است).



شکل ۴ - ۴

۸) خم پارامتری شده با طول قوس $\alpha(s)$ با شروع از نقطه $\alpha(0) = 0$ ، در امتداد محور x می‌غلتد. یک نقطه F نسبت به خم ثابت است. فرض کنید $\beta(s)$ خمی باشد که رد F به جا می‌گذارد. همچنان که در شکل ۴ - ۴ مشخص شده است، $\theta(s)$ را زاویه تشکیل شده توسط $\alpha'(s)$ با محور مثبت x در نظر بگیرید. ماتریس دوران در صفحه تحت زاویه θ را با $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ نمایش دهید.

a. نشان دهید که $\beta(s) = (s, 0) + R_{-\theta(s)}(F - \alpha(s))$.

b. نشان دهید که $R_{-\theta(s)}(F - \alpha(s)) \cdot \beta'(s) = 0$ ، یعنی در حین حرکت F ، هر دم حول نقطه تماس روی محور x دوران می‌کند (به تمرین ۴ - ۱ - A رجوع کنید).

۹) مسیر طی شده توسط کانون سهمی $y = x^2/2$ را بیابید، هنگامی که سهمی در امتداد محور x می‌غلتد. اساساً کانون در $(0, 1/2)$ است (راهنمایی: مثال ۲ را ببینید).

پیوست A

۱- مروری بر جبر خطی

یادآوری می‌شود که مجموعه $\{v_1, \dots, v_k\}$ از بردارها در \mathbb{R}^n تشکیل یک پایه برای یک زیر فضای V از \mathbb{R}^n را می‌دهد اگر و فقط اگر هر بردار $v \in V$ را بتوان به صورت منحصر به فرد با یک ترکیب خطی $v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$ نمایش داد. به ویژه v_1, \dots, v_n تشکیل یک پایه برای \mathbb{R}^n می‌دهند اگر ماتریس $n \times n$ زیر وارون پذیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

همچنین این پایه را به طور مثبت جهت دار گویند، اگر دترمینان A مثبت باشد. به خصوص، برای دو بردار مستقل خطی $v, w \in \mathbb{R}^2$ ، مجموعه $\{v, w, v \times w\}$ همواره یک پایه به طور مثبت جهت دار شده برای \mathbb{R}^3 است.

گوییم $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ یک مجموعه متعامد یکه^۱ در \mathbb{R}^n است اگر برای هر $i \neq j$ ، $e_i \cdot e_j = 0$ و برای هر $i = 1, \dots, k$ ، $\|e_i\| = 1$. در این حالت گزاره^۲ زیر را داریم.

گزاره ۱-۱ اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه از بردارها در \mathbb{R}^n باشد، آنگاه این مجموعه تشکیل یک پایه برای \mathbb{R}^n می‌دهد و برای هر بردار $v \in \mathbb{R}^n$ ، داریم: $v = \sum_{i=1}^n (v \cdot e_i) e_i$.

یک ماتریس $n \times n$ مثل A را متعامد^۲ نامند، هرگاه $A^T A = I$. براحتی قابل بررسی است که بردارهای ستونی (و به طور مشابه بردارهای سطری) چنین ماتریسی تشکیل یک پایه

۱- orthonormal

۲- orthogonal

برای \mathbb{R}^n می‌دهند. به علاوه، از رابطه پایه‌ای $Ax \cdot y = x \cdot A^T y$ ، نتیجه می‌گیریم که اگر e_1, \dots, e_n تشکیل یک پایه متعامد یکه از بردارها برای \mathbb{R}^n بدهند و A یک ماتریس $n \times n$ متعامد باشد، آنگاه Ae_1, \dots, Ae_n نیز یک مجموعه متعامد یکه از بردارها است.

یک موضوع مهم در هندسه دیفرانسیل، شناسایی ایزومتري‌های \mathbb{R}^3 است (گرچه همین بحث در هر بعدی کارایی خواهد داشت). به یاد آورید که یک ایزومتري از \mathbb{R}^3 یک تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ به قسمی است که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

اکنون قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱-۲ یک ایزومتري f از \mathbb{R}^3 را برای یک ماتریس 3×3 مثل A و یک بردار $c \in \mathbb{R}^3$ می‌توان به صورت $f(x) = AX + c$ نوشت.

اثبات فرض کنید $f(0) = c$ و f را با تابع $f - c$ جایگزین کنید. تابع جدید نیز ایزومتري است (چرا؟) و مبدأ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$ ، از اینرول طول بردارها را حفظ می‌کند. با استفاده از این مطلب ثابت می‌کنیم که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 = (x - y)(x + y) = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$$

از طرف دیگر با یک روش مشابه خواهیم داشت:

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2f(x) \cdot f(y) + \|f(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2f(x) \cdot f(y) + \|y\|^2$$

آنچنان که انتظار می‌رفت، نتیجه می‌گیریم $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$.

در مرحله بعدی ثابت می‌کنیم که f باید یک تابع خطی باشد. فرض کنیم $\{e_1, e_2, e_3\}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای \mathbb{R}^3 باشد و برای $j = 1, 2, 3$ ، قرار می‌دهیم $f(e_j) = v_j$ از آنچه قبلاً ثابت کردیم، نتیجه می‌شود که $\{v_1, v_2, v_3\}$ نیز یک پایه متعامد یکه است. برای بردار مفروض $x \in \mathbb{R}^3$ بنویسید $x = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$ و $f(x) = \sum_{i=1}^3 y_i v_i$. آنگاه از گزاره ۱-۱ نتیجه می‌شود که،

$$y_i = f(x) \cdot v_i = x \cdot e_i = x_i$$

بنابراین f حقیقتاً خطی است. ماتریس A نمایش دهنده f نسبت به پایه استاندارد است که ستون j -ام آن بردار v_j است. بنابراین طبق یادآوری‌های قبلی، آنچنان که لازم بود، A یک ماتریس متعامد است. \square

در واقع به یاد آورید که اگر $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی و $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ یک پایه برای \mathbb{R}^n باشد، آنگاه ماتریس متناظر T نسبت به پایه β ، ماتریسی است که j -امین ستون آن شامل ضرایب $T(v_j)$ نسبت به پایه β است. یعنی، T قابل بیان به صورت ماتریس $A = [a_{ij}]$ است که در آن $T(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$.
 به خاطر آورید که اگر A یک ماتریس $n \times n$ (یا $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی) باشد، یک بردار غیر صفر x را یک بردار ویژه گویند اگر برای یک عدد λ ، $Ax = \lambda x$ (به ترتیب $T(x) = \lambda x$). عدد λ را مقدار ویژه متناظر نامند.

قضیه ۱-۳ یک ماتریس 2×2 متقارن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ (یا نگاشت خطی متقارن $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) دارای دو مقدار ویژه حقیقی λ_1 و λ_2 است و با شرط $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، بردارهای ویژه متناظر v_1 و v_2 بر هم عمودند.

اثبات تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = Ax \cdot x = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

طبق قضیه مقدار ماکزیمم، f دارای یک مینیمم و یک ماکزیمم تحت قید $x_1^2 + x_2^2 = 1$ است. فرض کنیم این مقادیر به ترتیب در v_1 و v_2 رخ می‌دهند. براساس روش ضرایب لاگرانژ، درمی‌یابیم که برای $i = 1, 2$ اعداد λ_i وجود دارند به قسمی که $\nabla f(v_i) = \lambda_i \nabla g(v_i)$. براساس تمرین ۵، این بدین معنی است که $Av_i = \lambda_i v_i$ و بنابراین ضرایب لاگرانژ در واقع همان مقادیر ویژه متناظر هستند. حال،

$$\lambda_1(v_1 \cdot v_2) = Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot Av_2 = \lambda_2(v_1 \cdot v_2)$$

این نتیجه می‌دهد که اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، آنچنان که انتظار می‌رفت بایستی داشته باشیم: $v_1 \cdot v_2 = 0$.

□. ۰

به یاد می‌آوریم که در عمل، مقادیر ویژه را با حل مسئله برای ریشه‌های معادله مشخصه $p(t) = \det(A - tI)$ به دست می‌آوریم. در حالت یک ماتریس 2×2 متقارن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ ، معادله درجه دوم $p(t) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2)$ با ریشه‌های زیر حاصل می‌شود.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}((a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}) \quad \text{و} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}((a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2})$$

تمرین ۱-۱

(۱*#) فرض کنید $\{v_1, v_2\}$ یک پایه برای \mathbb{R}^2 را تشکیل دهد. برای بردارهای مفروض $x, y \in \mathbb{R}^2$ ثابت کنید که $x = y$ اگر و فقط اگر برای $i = 1, 2$ $x \cdot v_i = y \cdot v_i$.

(۲*) نامساوی میانگین هندسی - حسابی برای اعداد مثبت a و b برابر $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ است و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a = b$. یک اثبات یک خطی با استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز با بیان زیر برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$ بدهید.

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

در نامساوی اخیر تساوی برقرار است، اگر و فقط اگر یک بردار مضربی عددی از دیگری باشد.

(۳) فرض کنید $w, x, y, z \in \mathbb{R}^2$. ثابت کنید:

$$(w \times x) \cdot (y \times z) = (w \cdot y)(x \cdot z) - (w \cdot z)(x \cdot y)$$

(راهنمایی: دو طرف بر حسب چهار متغیر خطی هستند، پس کافی است نتیجه روی بردارهای پایه ثابت شود).

(۴) فرض کنید $A(t)$ یک خانواده دیفرانسیل پذیر از ماتریس های 2×2 باشد. ثابت کنید $A(t)^{-1} A'(t)$ همواره پاد متقارن است.

(۵) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن 2×2 باشد، قرار دهید $f(x) = Ax \cdot x$ و بررسی کنید که $\nabla f(x) = 2Ax$.

۲- مروری بر حساب دیفرانسیل و انتگرال

به یاد آورید که یک تابع $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ که روی یک زیر مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ تعریف می شود (برای $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$) C^k است، اگر همه مشتقات جزئی آن از مرتبه کوچک تر یا مساوی k روی U موجود و پیوسته باشد. نمادهای

f_u و $\frac{\partial f}{\partial u}$ را به جای یکدیگر به کار می بریم و به طور مشابه این کار را در مورد مشتقات مرتبه بالاتر انجام می دهیم: یعنی $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)$ همانند f_{uv} است و به همین ترتیب ...

یکی از نتایج به شدت مهم برای هندسهٔ دیفرانسیل به شرح زیر است.

قضیه ۱-۲ اگر f یک تابع C^2 باشد، آنگاه $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ (یا $f_{uv} = f_{vu}$).

همین نتایج برای توابع برداری با به کارگیری توابع مؤلفه به طور جداگانه استفاده می‌شود. اگر $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، C^1 باشد، می‌توان گرادین آن را با گرفتن بردار $\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$ از مشتقات جزئی آن، تشکیل داد. یکی از اساسی‌ترین رابطه‌ها در حساب دیفرانسیل و انتگرال قاعدهٔ زنجیری است.

قضیه ۲-۲ فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ دیفرانسیل پذیر باشند. آنگاه $(f \circ \alpha)'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$.

به ویژه اگر $\alpha(\circ) = P$ و $\alpha'(\circ) = v \in \mathbb{R}^n$ آنگاه $(f \circ \alpha)'(\circ) = \nabla f(P) \cdot v$. این مطلب تا حدی تعجب آور است، چون میزان تغییرات f در امتداد α در P فقط به بردار مماس بستگی دارد و بطور دقیق به چیز بیشتری از خم وابسته نیست.

گزاره ۲-۳ ثابت کنید $D_V \nabla f(P) = \nabla f(P) \cdot v$. بنابراین مشتق سویی یک تابع خطی از V است.

اثبات اگر قرار دهیم $\alpha(t) = P + tv$ ، آنگاه طبق تعریف مشتق سویی، $D_V \nabla f(P) = (f \circ \alpha)'(\circ) = \nabla f(P) \cdot v$.

نتیجهٔ مهم دیگری از قاعدهٔ زنجیری که در هندسهٔ دیفرانسیل اساسی است به قرار زیر است.

گزاره ۲-۴ فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$ یک زیر مجموعه با این خاصیت باشد که هر زوج از نقاط S را بتوان توسط یک خم C^1 به هم وصل کرد. در این صورت یک تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ، با شرط همه جا $\nabla f = 0$ ، یک تابع ثابت است.

اثبات دو نقطهٔ دلخواه $P \in S$ و $Q \in S$ را ثابت فرض می‌کنیم. یک خم C^∞ مثل α را با $\alpha(\circ) = P$ و $\alpha(1) = Q$ اختیار کنید. در این صورت برای هر t ،

$$.(f \circ \alpha)'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$$

نتیجه‌ای از قضیه مقدار میانگین در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی گویای این است که یک تابع $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ که روی $[0, 1]$ پیوسته است و دارای مشتق صفر در این فاصله است، باید یک تابع ثابت باشد. بنابراین، $f(Q) = (f \circ \alpha)(1) = (f \circ \alpha)(0) = f(P)$ ، در نتیجه f باید روی S ثابت باشد.

همچنین موقعیت‌های فراوان برای استفاده از نوع برداری قاعده ضرب خواهیم داشت.

گزاره ۲-۵ فرض کنید $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ دیفرانسیل پذیر باشند. آنگاه داریم:

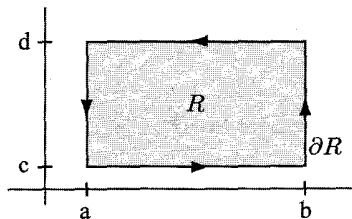
$$(f \cdot g)'(t) = f'(t)g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

$$(f \times g)'(t) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$$

بالاخره از حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری، مشابه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در \mathbb{R}^2 را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۲-۶ (قضیه گرین). فرض کنید $R \subset \mathbb{R}^2$ یک ناحیه باشد و ∂R نمایش خم مرزی آن باشد که در خلاف عقربه‌های ساعت جهت دار شده است (یعنی چنان است که ناحیه در سمت «چپ» آن است). در این صورت،

$$\int_{\partial R} P(u, v)du + Q(u, v)dv = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv$$



شکل ۲-۱

اثبات در اینجا اثبات را برای حالتی بیان می‌کنیم که R یک مستطیل باشد. فرض کنیم همچنان که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است، $R = [a, b] \times [c, d]$. اکنون با استفاده از قضیه اساسی حساب فقط به طور مقتضی، محاسبه را انجام می‌دهیم.

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial u} du \right) dv - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial v} dv \right) du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_c^d (Q(b, v) - Q(a, v)) dv - \int_a^b (P(u, d) - P(u, c)) du \\
&= \int_a^b P(u, c) du + \int_c^d Q(b, v) dv - \int_a^b P(u, d) du \\
&\quad - \int_c^d Q(a, v) dv \\
&= \int_{\partial R} P(u, v) du + Q(u, v) dv
\end{aligned}$$

آنچنان که لازم بود. □

تمرین ۲-A

۱# فرض کنید تابع $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، C^∞ باشد و در هیچ نقطه‌ای صفر نباشد. ثابت کنید $\|f\|/|f|$ ثابت است اگر و فقط اگر برای تابعی عددی پیوسته λ ، $f'(t) = \lambda(t)f(t)$ (راهنمایی: قرار دهید $g = f/|f|$ و دیفرانسیل بگیرید. چرا باید $g' \cdot g = 0$ ؟)

۲) فرض کنید $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ دو بار دیفرانسیل پذیر باشد و نیز λ را یک تابع عددی دو بار مشتق پذیری فرض کنید که هیچ جا صفر نیست. ثابت کنید α' و α'' همه جا مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $\lambda\alpha'$ و $(\lambda\alpha)''$ همه جا مستقل خطی باشند.

۳) اگر $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ توابع برداری C^∞ باشند، فرض کنید برای توابع پیوسته a, b, c و داشته باشیم:

$$f'(t) = a(t)f(t) + b(t)g(t)$$

$$g'(t) = c(t)f(t) - a(t)g(t)$$

ثابت کنید متوازی الاضلاع حاصل از $f(t)$ و $g(t)$ در یک صفحه ثابت واقع می‌شود و دارای مساحت ثابت است.

۴# ثابت کنید برای هر تابع برداری پیوسته $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ داریم:

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

۵# فرض کنید $R \subset \mathbb{R}^2$ یک ناحیه باشد. اگر مساحت R را با $\text{area}(R)$ نشان دهیم، روابط زیر را ثابت کنید.

$$\text{area}(R) = \int_{\partial R} u dv = - \int_{\partial R} v du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\partial R} -v du + u dv$$

۳- معادلات دیفرانسیل

قضیه ۳-۱ (قضیه اساسی معادلات دیفرانسیل عادی) فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد و $I \subset \mathbb{R}$ یک فاصله باز شامل \circ باشد. نقطه $x_0 \in U$ را در نظر بگیرید. اگر $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل زیر

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(\circ) = x_0.$$

دارای یک جواب منحصر به فرد $x = x(t, x_0)$ است که برای هر t در زیر فاصله‌ای مانند $I' \subset I$ تعریف شده است. به علاوه اگر f یک تابع C^k باشد، آنگاه x نیز به عنوان تابعی از هر دو متغیر t و شرط اولیه x_0 ، C^k است (که برای t در یک فاصله و x_0 در یک مجموعه باز تعریف شده است).

توجه خاص ما به معادلات دیفرانسیل خطی خواهد بود.

قضیه ۳-۲ فرض کنید $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ پیوسته روی فاصله I باشد. آنگاه معادله دیفرانسیل زیر دارای یک جواب یگانه روی فاصله I است.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad x(\circ) = x_0.$$

برای اثبات این قضایا و مطالب مربوط به آنها، قضایایی در معادلات دیفرانسیل، خواننده را به هر کتاب معادلات دیفرانسیل استاندارد (برای مثال، ادواردز و پنی^۱، بویس و دپریمان^۲ یا بیرکف و روتا) ارجاع می‌دهیم.

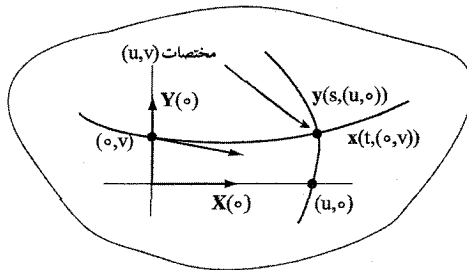
قضیه ۳-۳ برای هر دو میدان برداری مفروض C^k مثل X و Y که روی یک همسایگی U از \mathbb{R}^2 مستقل خطی باشند، می‌توان مختصات (u, v) روی $U' \subset U$ را چنان اختیار کنیم که X بر u -خم‌ها مماس باشد (یعنی، خم‌های $u = \text{مقدار ثابت}$) و Y بر v -خم‌ها مماس باشد (یعنی، خم‌های $v = \text{مقدار ثابت}$).

اثبات یک تغییر مختصات خطی چنان اعمال می‌کنیم که $X(\circ)$ و $Y(\circ)$ بردارهای پایه یک استاندارد باشند. فرض کنید $x(t, x_0)$ جواب معادله دیفرانسیل $dx/dt = X$ با شرط

$x(0) = x_0$ باشد که در قضیه ۳-۱ ارائه شده است. همچنان که در شکل ۳-۱ مشخص شده است، در یک همسایگی از صفر، هر نقطه (x, y) می تواند به صورت زیر برای مقادیر منحصر به فرد t و v نوشته شود.

$$(x, y) = \mathbf{x}(t, (0, v))$$

اگر تابع f را با ضابطه $f(t, v) = \mathbf{x}(t, (0, v)) = (x(t, v), y(t, v))$ تعریف کنیم، توجه می کنیم که $f_t = \mathbf{X}(f(t, v))$ و $f_v = (0, 1)$ ، بنابراین ماتریس مشتق $Df(0, 0)$ ، ماتریس همانی است. از قضیه تابع وارون نتیجه می شود که (به طور موضعی) مسئله را می توان برای (t, v) به عنوان یک تابع C^k از (x, y) حل کرد. توجه شود که خم های تراز v آنچنان که انتظار می رفت، دارای بردار مماس \mathbf{X} هستند.



شکل ۳-۱

مراحل را با میدان برداری \mathbf{Y} تکرار می کنیم. فرض کنیم $y(s, y_0)$ جواب معادله دیفرانسیل $dy/ds = \mathbf{Y}$ باشد و برای مقادیر منحصر به فرد s و u ، می نویسیم:

$$(x, y) = \mathbf{y}(s, (u, 0))$$

به طور مشابه (s, u) را موضعاً به عنوان یک تابع C^k از (x, y) به دست می آوریم. ادعا می کنیم که (u, v) ، مختصات مورد نظر را می دهد. کافی است بررسی کنیم که روی یک همسایگی مناسب از مبدأ آنها مستقل هستند، اما از بحث قبلی داریم در مبدأ $v_x = 0$ و $v_y = 1$ و همچنین به طور مشابه $u_x = 1$ و $u_y = 0$. از این رو، ماتریس مشتق از (u, v) در مبدأ همانی است و در نتیجه توابع یک پارامتری موضعی را ارائه می دهند. □

تمرین ۳-A

(۱) فرض کنید $M(s)$ یک تابع ماتریسی دیفرانسیل پذیر 3×3 از s و $K(s)$ یک تابع ماتریسی پاد متقارن از s باشد و

$$M'(s) = M(s)K(s), \quad M(0) = 0$$

با بررسی اینکه $(M^T M)'(s)$ همه جا صفر است، نشان دهید که برای هر s ، $M(s) = 0$.

(۲) اتحاد گرونوال^۱ و نتایج آن،

a. فرض کنید $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ غیرمنفی دیفرانسیل پذیر باشد و $f(a) = c > 0$. اگر $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مشتق پذیر و برای هر t $f'(t) \leq g(t)f(t)$ ، آنگاه برای هر t ثابت کنید:

$$f(t) \leq c \exp\left(\int_a^t g(u) du\right)$$

b. نتیجه بگیرید اگر $f(a) = 0$ آنگاه برای هر t ، $f(t) = 0$.

c. اکنون، فرض کنید $v : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع برداری دیفرانسیل پذیر و $M(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ پیوسته برای $t \in [a, b)$ باشد و $v'(t) = M(t)v(t)$. نتیجه قسمت b. را به کار برید و نتیجه بگیرید که اگر $v(a) = 0$ آنگاه برای هر t ، $v(t) = 0$. یگانگی جواب معادلات دیفرانسیل خطی برای توابع برداری را نتیجه بگیرید. (راهنمایی: قرار

$$f(t) = \|v(t)\|^2 \text{ و } g(t) = 2 \max\{|m_{ij}(t)|\}$$

d. با استفاده از قسمت c.، یگانگی جواب دستگاه معادله خطی مرتبه n را نتیجه بگیرید. (راهنمایی: متغیرهای جدیدی، متناظر با مشتقات مراتب بالاتر را معرفی کنید.)

پاسخ تمرین‌های برگزیده

$$\alpha(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \quad 1-1-1$$

۴-۱-۱ خم را برای $a \leq t \leq b$ توسط $\alpha(t) = (t, f(t))$ پارامتری می‌کنیم و بنابراین

$$\text{طول } \alpha = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

$$\beta(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s^2 + 4} + s, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s^2 + 4} - s \right), \sqrt{2} \ln \left(\frac{\sqrt{s^2 + 4} + s}{2} \right) \right) \quad 6-1-1$$

$$c. \kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-s^2}} \quad 1-2-1$$

$$a. \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+s}, -\sqrt{1-s}, \sqrt{2}), \quad \kappa = \tau = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-s^2}} \quad 3-2-1$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1-s}, \sqrt{1+s}, 0), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+s}, -\sqrt{1-s}, \sqrt{2});$$

$$c. \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}} (t, \sqrt{1+t^2}, 1), \quad \kappa = \tau = 1/\sqrt{2}(1+t^2),$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} (1, 0, -t), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}} (-t, \sqrt{1+t^2}, -1)$$

۵-۲-۱ $\kappa = 1/\sinh t$ (که یک بار دیگر ملاحظه می‌کنیم که برابر با قدرمطلق شیب است).

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{T} \times \mathbf{N})' = \mathbf{T}' \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N}' = (\kappa \mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B})) \quad 6-2-1$$

۹-۲-۱ b. اگر همه صفحه‌های بوسان از مبدأ بگذرند، آنگاه توابع عددی λ و μ وجود

دارند، چنان که برای هر s ، $0 = \alpha + \lambda \mathbf{T} + \mu \mathbf{N}$. با دیفرانسیل‌گیری و استفاده از روابط فرنه،

به دست می‌آوریم، $0 = \mathbf{T} + \kappa \lambda \mathbf{N} + \lambda' \mathbf{T} + \mu(-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) + \mu' \mathbf{N}$ ؛ با جمع آوری جملات

برای هر s داریم، $0 = (1 + \lambda' - \kappa \mu) \mathbf{T} + (\kappa \lambda + \mu') \mathbf{N} + \mu \tau \mathbf{B}$. چون $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ یک

پایه برای \mathbb{R}^3 است، به خصوص نتیجه می‌شود که $\mu \tau = 0$ (همچنین می‌توانیم کل عبارت

را در \mathbf{B} ضرب نقطه‌ای کنیم). اگر $\mu = 0$ به تناقض می‌رسیم، پس باید $\tau = 0$ و بنابراین

خم مسطح است.

$$11-2-1 \quad \text{داریم } \alpha' \times \alpha'' = \kappa \nu^3 \mathbf{B} \text{ پس}$$

$$\alpha' \times \alpha''' = (\alpha' \times \alpha'')' = (\kappa \nu^3 \mathbf{B})' = (\kappa \nu^3)' \mathbf{B} + (\kappa \nu^3)(-\tau \nu \mathbf{N})$$

پس $\alpha'' = -\kappa^2 \tau \nu^6$. بنابراین $(\alpha' \times \alpha''') / (\kappa^2 \nu^6) = \alpha'$. و از جایگذاری

رابطه گزاره ۲-۲، نتیجه حاصل می شود.

۲۳-۲-۱. a قائم یکه $A_{s,t}$ بر صفحه گذرا بر $P = 0$ ، $Q = \alpha(s)$ و $R = \alpha(t)$ را در نظر بگیرید. با بکارگیری گزاره ۲-۶، به دست می آوریم:

$$\alpha(s) \times \alpha(t) = \frac{st(s-t)}{1^3} (-\kappa_0^2 \tau_0 st + \dots, 2\kappa_0 \tau_0 (s+t) + \dots, -\kappa_0 + 2\kappa_0'(s+t) - \kappa_0^2 st + \dots)$$

بنابراین، $A = (0, 0, 1)$ ، $A_{s,t} = (\alpha(s) \times \alpha(t)) / \|\alpha(s) \times \alpha(t)\| \rightarrow A = (0, 0, 1)$ از این رو، صفحه گذرا بر P با قائم A ، صفحه بوسان است.

۲۳-۲-۱. a روش دیگر، $A_{s,t} \cdot x = 0$ را معادله صفحه گذرا بر P ، Q و R فرض کنید (در حالی که $A_{s,t}$ را با طول ۱ چنان اختیار می کنیم که به طور پیوسته تغییر کند). می

خواهیم $A = \lim_{s,t \rightarrow 0} A_{s,t}$ را تعیین کنیم. برای s و t ثابت، تابع، $F_{s,t}(u) = A_{s,t} \cdot \alpha(u)$ را در نظر بگیرید. آنگاه $F_{s,t}(0) = F_{s,t}(s) = F_{s,t}(t) = 0$ پس طبق قضیه مقدار

میانگین ξ_1 و ξ_2 وجود دارند به قسمی که $F'_{s,t}(\xi_1) = F'_{s,t}(\xi_2) = 0$ ، بنابراین η وجود دارد که $F''_{s,t}(\eta) = 0$. حال $F'_{s,t}(0) = A_{s,t} \cdot T(0)$ و $F'_{s,t}(0) = A_{s,t} \cdot N(0)$ چون

وقتی که $s, t \rightarrow 0$ ، $\xi_i \rightarrow 0$ و $\eta \rightarrow 0$ ، به دست می آوریم $A \cdot T(0) = A \cdot N(0) = 0$ پس آن چنان که انتظار می رفت $A = \pm B(0)$.

۴-۳-۱. فرض کنیم $L = \text{طول}(C)$. پس، $cL = \int_0^L c ds \leq \int_0^L \kappa(s) ds \leq 2\pi$ (طبق قضیه ۳-۵)، در نتیجه $L \geq 2\pi/c$.

۲-۱-۲. a . $E = a^2$ ، $F = 0$ ، $G = a^2 \sin^2 u$ ؛ $F = 0$ ، $E = G = a^2 \cosh^2 u$ ؛ $G = a^2 \sin^2 u$ ، $F = 0$ ، $E = a^2$. فرض کنیم همه خطوط قائم از مبدأ بگذرند. آنگاه یک تابع λ وجود دارد به

قسمی که $x = \lambda n$ با دیفرانسیل گیری داریم $x_u = \lambda_u n + \lambda n_u$ و $x_v = \lambda_v n + \lambda n_v$ پس با ضرب داخلی در n ، به دست می آوریم $\lambda_u = \lambda_v = 0$. بنابراین، λ یک

ثابت است و از این رو $\|x\|$ ثابت است. به طور جایگزین از عبارت $x = \lambda n$ به ترتیب زیر عمل می کنیم. چون $n \cdot x_u = n \cdot x_v = 0$ ، داریم $x \cdot x_u = x \cdot x_v = 0$ بنابراین

$$0 = (x \cdot x)_u = (x \cdot x)_v = 0 \text{ پس } \|x\|^2 \text{ ثابت است.}$$

۲-۱-۲. برای اینکه x همدیس باشد، باید داشته باشیم $E = G$ و $F = 0$. برای این که حافظ مساحت باشد، باید داشته باشیم $1 = \sqrt{EG - F^2}$ ، پس $E = G = 1$ و $F = 0$ ، که یک ایزومتري موضعی با صفحه را مشخص می کند. عکس آن فوری به دست می آید.

۲-۱-۲. بررسی می کنیم که $E = G = 4/(1 + u^2 + v^2)^2$ و $F = 0$ ، پس نتیجه از تمرین ۵ حاصل می شود.

۲-۱-۲. b . یکی از آنها برابر است با $(\cos u + v \sin u, \sin u - v \cos u, v)$ اگر $a \cosh(1/a) = R$ ، $2\pi(a + R\sqrt{R^2 - a^2})$ مساحت برابر است با a .

۲-۲-۱. اگر u و v خمها خطوط انحنای باشند، آنگاه $F = 0$ (چون جهتهای اصلی عمود هستند) و $m = S(x_u) \cdot x_v = \kappa_1 x_u \cdot x_v = 0$ و با فرض $S_P(x_u) = ax_u + bx_v$

$$d\omega_{12} = -\cos u \, du \wedge dv = -\left(\frac{\cos u}{b(a + b \cos u)}\right) \omega_1 \wedge \omega_2$$

$$.K = \frac{\cos u}{b(a + b \cos u)} \text{ بنابراین}$$

۲-۴-۳. فرض $\xi = f$ به ما می‌دهد $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$ چون برای هر t ، $f(t)^2 \geq 0$ ، اگر $f(t_0) \neq 0$ ، یک فاصله $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ خواهیم داشت که روی آن $\int_0^1 f(t)^2 dt \geq f(t_0)^2 \delta > 0$ و بنابراین $f(t)^2 \geq f(t_0)^2/2$

$$.y = \frac{1}{4} \cosh(2x) \quad ۹-۴-۳$$

۱-۱-A در نظر بگیرید $z = x - y$. آنگاه می‌دانیم که برای $i = 1, 2$ ، $z \cdot v_i = 0$

چون $\{v_1, v_2\}$ یک پایه برای \mathbb{R}^2 است، اعداد a و b وجود دارند که $z = av_1 + bv_2$. آنگاه $z \cdot z = z(av_1 + bv_2) = a(z \cdot v_1) + b(z \cdot v_2) = 0$

$$.z = 0$$

۲-۱-A راهنمایی: فرض کنید $u = (\sqrt{a}, \sqrt{b})$ و $v = (\sqrt{b}, \sqrt{a})$

۴-۲-A فرض کنید $v = \int_a^b f(t) dt$. اگر $v \neq 0$ ، داریم:

$$\|v\|^2 = v \cdot \int_a^b f(t) dt = \int_a^b v \cdot f(t) dt \leq \int_a^b \|v\| \cdot \|f(t)\| dt = \|v\| \int_a^b \|f(t)\| dt$$

(با استفاده از نامساوی کشی - شوارتز $(u \cdot v) \leq \|u\| \|v\|$) پس $\|v\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

angle excess	فرونی زاویه (کاستی)
arclenght	طول قوس
asymptotic curve	خم مجانبی
asymptotic direction	جهت مجانبی
Bertrand mates	زوج برتراند
binormal vector	بردار قائم دوم
Bäcklund	باکلند
C^k	دیفرانسیل پذیری از مرتبه k
catenary	زنجیروار
catenoid	کاتنوئید (زنجیره)
Cauchy-Schwarz inequality	نامساوی کشی - شوارتز
chain rule	قاعده زنجیری
characteristic polynomial	چند جمله‌ای مشخصه
Christoffel symbols	نمادهای کریستوفل
Codazzi equations	معادلات کدآزی
compact	فشرده
conformal	همدیس
connection form	فرم التصاق
convex	محدب
covariant constant	ثابت همورد
covariant derivative	مشتق هموردا
Crofton's formula	رابطه کروفتون
cross ratio	نسبت همساز
cubic cuspidal	مکعبی گوشه‌دار

cubic nodal	مکعبی گره‌ای
cubic twisted	مکعبی پیچیده شد
curvature	انحنای
cycloid	سیکلوئید
Darboux frame	کنج داربوکس
directrix	هادی
Dupin indicatrix	نمایه دوپین
eigenvalue	مقدار ویژه
eigenvector	بردار ویژه
elliptic point	نقطه بیضوی
Euler characteristic	مشخصه آلر
exterior angle	زاویه خارجی
first fundamental form	اولین فرم اساسی
flat	تخت (مسطح)
Frenet formulas	روابط فرنه
Frenet frame	کنج فرنه
functional	تابع
Gauss equation	معادله گاوس
Gauss map	نگاشت گاوس
Gauss-Bonnet formula	رابطه گاوس-بونه
Gauss-Bonnet theorem	قضیه اوس-بونه
global Gauss-Bonnet theorem	قضیه سراسری گاوس-بونه
local Gauss-Bonnet theorem	قضیه موضعی گاوس-بونه
Gaussian curvature	انحنای گاوس
constant Gaussian curvature	انحنای ثابت گاوس
generalized helix	ماریچ تعمیم یافته
geodesic	ژئودزی
geodesic curvature	انحنای ژئودزی
globally isometric	ایزومتری سراسری
gradient	گرادیان
Gronwall inequality	نامساوی گرانوال
helicoid	حلزونی

helix	مارپیچ
holonomy	هولونومی
horocycle	دایره ساعتی
hyperbolic plane	صفحه هذلولوی
hyperbolic point	نقطه هذلولوی
inversion	تجانس (وارون سازی)
involute	گسترنده
isometry	ایزومتري
Klein-Beltrami model	الگوی کلاین - بلترامی
k-point contact	k-نقطه تماس
knot	گره
Laplacian	لاپلاسیان
line of curvature	خط انحنای
linear fractional transformation	تبدیل کسری خطی
locally isometric	ایزومتر موضعی
mean curvature	انحنای متوسط
meridian	نصف النهار
Meusnier's formula	رابطه میوسنیر
minimal surfaces	رویة مینیمال
moving frame	کنج متحرک
normal curvature	انحنای قائم
normal field	میدان قائم
normal plane	صفحه قائم
oriented	جهت دار
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد یکه
osculating circle	دایره بوسان
osculating plane	صفحه بوسان
osculating sphere	کره بوسان
parabolic point	نقطه سهموی
parallel	موازی
parallel translate	انتقال موازی
parametrization	پارامتری

parametrized by arclength	پارامتری با طول قوس
parametrized curve	خم پارامتری
pedal property	خاصیت پدال
planar point	نقطهٔ مسطح
Poincare disk	دیسک پوانکاره
Poincare model	الگوی پوانکاره
positively oriented	بطور مثبت جهت دار
principal curvatures	انحنای اصلی
principal directions	جهت های اصلی
principal normal vector	بردار قائم اصلی
profile curve	خم مقطع عرض
pseudosphere	شبه کره
rectifying plane	صفحهٔ راست گرد
reflection	انعکاس
regular	منظم
regular parametrization	پارامتری منظم
rotation index	نمایهٔ چرخش
ruled surface	رویهٔ خط کشی شده
developable	توسعه پذیر
ruling	خط کشی (مولد)
second fundamental form	دومین فرم اساسی
shape operator	عملگر شکل
smooth	هموار
spherical coordinate	مختصات کروی
stereographic projection	تصویر کنجنگاری
support line	خط محمل
surface	رویه
surface area	مساحت رویه
surface of revolution	رویهٔ دوار
symmetric	متقارن
tangent indicatrix	نمایهٔ مماس
tangent plane	صفحهٔ مماس
Teorema Egregium	قضیهٔ برجسته

torsion	تاب
torus	چنبره
total curvature	انحنای کلی
total twist	چرخش کلی
tractrix	تراکتریکس
triply orthogonal system	دستگاه متعامد سه‌تایی
Tschebyschev net	شبکهٔ چبی شف
twist	چرخش
v -, u -curves	u - و v -خم‌ها
ultraparallels	فراموازی‌ها
umbilic	نافی
unit normal	قائم یکه
unit tangent vector	بردار مماس یکه
variation	تغییر
vector field	میدان برداری
velocity	تندی
vertex	رأس

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Poincare model	الگوی پوانکاره
Klein-Beltrami model	الگوی کلاین-بلترامی
parallel translate	انتقال موازی
curvature	انحنای
principal curvatures	انحنای اصلی
geodesic curvature	انحنای ژئودزی
normal curvature	انحنای قائم
total curvature	انحنای کلی
Gaussian curvature	انحنای گاوس
mean curvature	انحنای متوسط
reflection	انعکاس
first fundamental form	اولین فرم اساسی
locally isometric	ایزومتري موضعی
globally isometric	ایزومتري سراسری
Bäcklund	باکلند
principal normal vector	بردار قائم اصلی
binormal vector	بردار قائم دوم
unit tangent vector	بردار مماس یکه
eigenvector	بردار ویژه
positively oriented	بطور مثبت جهت‌دار
parametrization	پارامتری
parametrized by arclength	پارامتری با طول قوس
regular parametrization	پارامتری منظم
torsion	تاب

functional	تابعک
linear fractional transformation	تبدیل کسری خطی
inversion	تجانس (وارون سازی)
flat	تخت (مسطح)
tractrix	تراکتریکس
stereographic projection	تصویر کنجنگاری
variation	تغییر
velocity	تندی
covariant constant	ثابت همورد
asymptotic direction	جهت مجانبی
oriented	جهت دار
principal directions	جهت های اصلی
total twist	چرخش کلی
torus	چنبره
characteristic polynomial	چند جمله ای مشخصه
helicoid	حلزونی
pedal property	خاصیت پدال
line of curvature	خط انحنا
ruling	خط کشی (مولد)
support line	خط محمل
parametrized curve	خم پارامتری
asymptotic curve	خم مجانبی
profile curve	خم مقطع عرضی
v -, u -curves	u - و v -خم ها
osculating circle	دایره بوسان
horocycle	دایره ساعتی
triply orthogonal system	دستگاه متعامد سه تایی
second fundamental form	دومین فرم اساسی
Poincare disk	دیسک پوانکاره
C^k	دیفرانسیل پذیری از مرتبه k
Crofton's formula	رابطه کروفتون
Gauss-Bonnet formula	رابطه گاوس-بونه
Meusnier's formula	رابطه میوسنیر

vertex	رأس
Frenet formulas	روابط فرنه
ruled surface	رویۀ خط کشی شده
surface of revolution	رویۀ دوار
minimal surfaces	رویۀ مینیمال
exterior angle	زاویۀ خارجی
catenary	زنجیروار
Bertrand mates	زوج برتراند
geodesic	ژئودزی
cycloid	سیکلوئید
Tschebyschev net	شبکہ چبی شف
pseudosphere	شبه کره
osculating plane	صفحه بوسان
rectifying plane	صفحه راست‌گرد
normal plane	صفحه قائم
hyperbolic plane	صفحه هذلولوی
tangent plane	صفحه مماس
arclenght	طول قوس
shape operator	عملگر شکل
ultraparallels	فراموازی‌ها
connection form	فرم التصاق
angle excess	فزونیی زاویه (کاستی)
compact	فشرده
chain rule	قاعده زنجیری
unit normal	قائم پکه
Teorema Egregium	قضیه برجسته
Gauss-Bonnet theorem	قضیه سراسری گاوس-بونه
local Gauss-Bonnet theorem	قضیه موضعی گاوس-بونه
catenoid	کاتنوئید (زنجیره)
osculating sphere	کره بوسان
Darboux frame	کنج داربوکس
Frenet frame	کنج فرنه

moving frame	کنج متحرک
gradient	گرادیان
knot	گره
involute	گسترنده
Laplacian	لاپلاسیان
helix	ماریچ
generalized helix	ماریچ تعمیم یافته
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد یکه
symmetric	متقارن
convex	محدب
spherical coordinate	مختصات کروی
surface area	مساحت رویه
covariant derivative	مشتق هموردا
Euler characteristic	مشخصه آلر
cubic twisted	مکعبی پیچیده شده
cubic nodal	مکعبی گره‌ای
cubic cuspidal	مکعبی گوشه‌دار
Codazzi equations	معادلات کدآزی
Gauss equation	معادله گاوس
eigenvalue	مقدار ویژه
regular	منظم
vector field	میدان برداری
normal field	میدان قائم
umbilic	نافی
Cauchy-Schwarz inequality	نامساوی کشی - شوارتز
Gronwall inequality	نامساوی گرانوال
cross ratio	نسبت همساز
meridian	نصف النهار
elliptic point	نقطه بیضوی
k-point contact	k-نقطه تماس
parabolic point	نقطه سهموی

planar point	نقطهٔ مسطح
hyperbolic point	نقطهٔ هذلولوی
Gauss map	نگاشت گاوس
Christoffel symbols	نمادهای کریستوفل
rotation index	نمایهٔ چرخش
Dupin indicatrix	نمایهٔ دوپین
tangent indicatrix	نمایهٔ مماس
directrix	هادی
conformal	همدیس
smooth	هموار
holonomy	هولونومی

مراجع

- [1] do Carmo, M., "*Differential Geometry of Curves and Surfaces*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.
- [2] Klingenberg, W., "*A Course in Differential Geometry*", Springer, New York, 1978.
- [3] Kühnel, W., "*Differential Geometry: curves-surfaces-manifolds* ", AMS, 2002.
- [4] Laugwitz, D., "*Differential and Riemannian Geometry*", Academic Press, New York, 1965.
- [5] Milman, R. , Parker, G., "*Elements of Differential Geometry*", Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall, 1977.
- [6] O'Neill, B. "*Elementary Differential Geometry*" New York, Academic Press., 1966.
- [7] Struik, D. J., "*Lectures on Classical Differential Geometry*", Addison-Wesley, New York, 1988.
- [8] Spivak, M., "*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*", Volume I-V, Wilmington, Del., 1979.
- [9] Thorpe, J.A., "*Elementary Topics in Differential Geometry*", Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [10] Vaisman, I., "*A First Course in Differential Geometry*", Marcel Dekker, New York-BASEL, 1984.
- [11] Willmore, T.J., "*An Introduction to Differential Geometry*" Oxford University Press, London, 1959.
- [12] Zwikker, C., "*The Advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*", Dover Publications, New York, 1963.

واژه‌یاب

- آونگ فوکالت، ۸۷
 ابزار فرنه، ۱۵
 اتحاد گرونوال، ۱۵۶
 استوانه‌ای لامبرت، ۵۲
 استوکس، ۱۱۰
 الگوی کلاین - بلترامی، ۱۲۹
 انتقال موازی، ۸۶
 انحنا، ۱۲
 انحناهای اصلی یا اساسی، ۵۹
 انحنای ژئودزی، ۱۰۴
 انحنای قائم، ۶۴
 انحنای کلی، ۱۱۳، ۲۸
 انحنای گاوسی، ۶۱
 انحنای متوسط، ۶۱
 انعکاس، ۱۲۶، ۷۹
 اولین فرم اساسی، ۴۸
 اولین فرم اساسی، ۷۵
 ایزومتري، ۱۴۸
 ایندیکاتوریکس، ۱۱۷
 بردار قائم اصلی، ۱۲
 بردار قائم دوم، ۱۲
 بردار مماس یکه، ۱۲
 بردار ویژه، ۱۴۹
 برش قائم، ۵۷
 بسته، ۱۰۱
 بطور سرتاسری ایزومتر، ۴۹
 به طور موضعی ایزومتر، ۴۹
 بیضوی، ۶۳
 پاد موازی، ۳۵
 پارامتری چندگانه، ۴۲
 پارامتری شده با طول قوس، ۸
 پارامتری منظم، ۴۳
 پایای توپولوژی، ۱۱۲
 پایه راستگرد، ۱۲
 پوش، ۲۳، ۹۷
 پهنای ثابت، ۲۳
 پیچش، ۴۰
 تاب، ۱۲
 تابعک، ۱۳۸
 تام، ۹۴
 تبدیل باکلاند، ۱۳۷
 تبدیلات کسری خطی، ۱۲۱
 تجانس (وارون سازی)، ۱۲۷
 تخت، ۷۵
 تراکتوریکس، ۵
 تصویر کنجنگاری، ۴۵
 تکه‌ای هموار، ۳۹
 تندی، ۱۴
 توازی، ۸۳
 جزء مساحت رویه، ۳۰
 جفت های برتراند، ۲۴
 جهت مجانبی، ۵۹
 جهت دار، ۱۰۸

- جهت های اصلی، ۵۹
 چرخش، ۱۰۲
 چرخش کلی، ۴۰
 چنبره، ۴۵
 حافظ جهت، ۱۲۸
 حفره (گون)، ۱۱۳
 حلزونی، ۴۴
 خاصیت پدال، ۱۴۵
 خط انحنا، ۵۹
 خط قائم، ۵۱
 خطوط محمل، ۴۰
 خم بسته، ۲۸
 خم پارامتری، ۱
 خم مجانبی، ۵۹
 خم منظم، ۲۳
 خم های مقطع عرضی، ۴۶
 دایره بوسان، ۲۶
 دایره زمانی، ۱۲۰
 دستگاه متعامد سه گانه، ۶۹
 دورنما، ۱۴
 رابطه آلر، ۵۹
 رابطه کروفتون، ۲۹
 رابطه کلیراوت، ۹۱
 رابطه میونسیر، ۶۴
 راس، ۳۵
 روبرو، ۲۳
 رویه، ۴۴
 رویه خط کشی شده، ۴۶
 رویه دواری، ۴۶
 رویه زینی، ۵۹
 رویه مطلق، ۱۱۷
 زنجیروار، ۵
 ژئودزی، ۸۸
 ژئودزی های عمودی، ۱۲۰
 سهموی، ۶۳
 سیکلوئید، ۳، ۲۴
 شبکه چبی شف، ۵۳
 شبه-کره، ۶۴
 شتاب، ۱۶
 شتاب جانب مرکز، ۱۶
 شرر، ۴۰
 صفحه بوسان، ۲۰
 صفحه راستگرد، ۲۰
 صفحه قائم، ۲۰
 صفحه مماس، ۴۷
 صفحه هذلولوی، ۱۱۸
 طول جغرافیایی، ۴۵
 طول خم، ۶
 طول قوس، ۶
 عرض جغرافیایی، ۴۵
 عملگر شکل، ۱۳۲
 فراموازی، ۱۲۲
 فرم التصاق، ۱۳۵
 فرم کانونی موضعی، ۱۹
 فری - میلنر، ۳۱
 فنچل، ۳۰
 قابل توسعه، ۷۶
 قابلیت انطباق، ۲۷، ۱۲۵
 قائم یکه، ۴۸
 قضیه گاوس-بونه، ۱۰۱
 قضیه اساسی نظریه رویه ها، ۷۸

- قضیه اسپکترال، ۵۸
 قضیه استوکس، ۱۳۵
 قضیه برجسته گاوس، ۷۵
 قضیه رول، ۳۱
 قضیه گرین، ۱۵۲
 قضیه موضعی گاوس - بونه، ۱۰۶
 کاتیناری، ۵
 کاتنوئید، ۵۴
 کره بوسان، ۲۶
 کنج بیشاپ، ۴۱
 کنج داربوکس، ۸۹
 کنج فرنه، ۱۲
 کنج متحرک، ۱۱، ۱۳۰
 گرادیان، ۱۵۱
 گرام - اشمیت، ۱۳۱
 گردن، ۱۱۵
 گره دار، ۳۱
 گسترنده، ۲۳
 لیب مان، ۷۷
 مارییج، ۴
 مارییج تعمیم یافته، ۱۸
 مارییج چپ گرد، ۱۴
 مارییج راست گرد، ۱۴
 متر، ۹۴
 متر هندلولوی، ۱۲۹
 متعامد یکه، ۱۴۷
 مثلث ژودزی، ۱۰۷
 مجازی، ۱۱۹
 مدارها، ۶۵
 مزدوج، ۹۷
 مسطح، ۶۳
 مشتق همورد، ۸۴
 مشخصه آلر، ۱۰۹
 معادلات کدآزی، ۷۴
 معادلات گاوس، ۷۴
 معادله مشخصه، ۱۴۹
 معادله‌های آلر - لاگرانژ، ۱۳۹
 مقاطع، ۵۵
 مکعبی پیچیده شده، ۳
 مکعبی گره‌ای، ۲
 مکعبی گوشه دار، ۲
 منظم، ۱
 موازی‌ها یا مدارها، ۴۶
 مولدها یا خط کشی‌ها، ۴۶
 مؤلفه مماسی شتاب، ۱۶
 میدان برداری، ۸۴
 میدان برداری قائم، ۴۰
 مینیمال، ۶۱
 نافی، ۶۳
 نامساوی هندسی - حسابی، ۱۵۰
 نامساوی کشی - شوارتز، ۳۷
 نامساوی متساوی المحيط، ۳۶
 نسبت ناهمسان، ۱۲۰، ۱۲۶
 نصف النهارها، ۴۶
 نصف النهارها، ۶۵
 نقشه کشی مرکاتور، ۵۲
 نقطه بازتابی، ۶۰
 نگاشت خطی متقارن، ۵۸
 نگاشت گاوسی، ۲۹، ۵۴
 نمادهای کریستوفل، ۷۱
 نمایه، ۲۹
 نمایه چرخش، ۳۲
 نمایه دوپین، ۷۰
 هاپف، ۷۸
 هاپف - رینو، ۹۴

- هادی، ۴۶
هندلولوی، ۶۳
همدیس، ۵۰
همریخت، ۱۱۲
هموار، ۱، ۴۳
همورد ثابت، ۸۵
هویف - او ملاوفستز، ۳۲
هولونومی، ۱۰۱
هیلبرت، ۷۷