

مؤلف: آندرو پرسلی
مترجمان: مریم ربیعی - زهرا خوانین شیرازی

هندسه دیفرانسیل مقدماتی



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

هندسہ دیفرانسیل مقدماتی

نوشتہ

آندرو پرسلی

برگردان

مریم ربیعی و زہرا خوانین شیرازی

مقدمه

هندسه دیفرانسیل مطالعه هندسی خم‌ها و سطوح در فضای سه‌بعدی با استفاده از روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال است. این مبحث شامل برخی از زیباترین نتایج در ریاضیات است و هنوز اغلب آنها بدون داشتن پیش‌نیاز علمی قوی قابل فهم هستند. بنابراین تقریباً در همه این کتاب، تنها پیش‌نیازهای لازم، داشتن اطلاعات علمی خوب در حساب دیفرانسیل و انتگرال (شامل مشتقات جزئی)، بردارها و جبر خطی (شامل ماتریس‌ها و دترمینان‌ها) است.

بسیاری از نتایجی که در مورد خم‌ها و سطوح مطرح خواهیم کرد، نمونه‌ای از نتایج کلی‌تری هستند که در بعدها بالاتر بکار می‌روند. به عنوان مثال، قضیه گوس-بونه که در فصل ۱۱ بررسی شده، نمونه‌ای از، بسیاری از نتایج است که خواص «موضعی» و «سراسری» اشیاء هندسی را بیان می‌کند. مطالعه چنین روابطی یکی از موضوعات مهم ریاضیات در قرن بیستم است. البته، روش‌های به کار رفته در این کتاب، لزوماً روش‌هایی نیستند که به بعدها بالاتر قابل تعمیم باشند. (به عنوان مثال، برای خوانندگان مطلع، در بقیه کتاب به «اتصالات» اشاره‌ای نشده است). ترجیحاً سعی کرده‌ایم در تمام موارد از ساده‌ترین اثبات‌هایی که نتایج مطلوب را دربر خواهند داشت استفاده کنیم. انجام این امر نه تنها پیش‌نیازهای لازم را به حداقل می‌رساند، بلکه ما را قادر می‌سازد که از بعضی از مفاهیم سخت که اغلب در مطالعه هندسه دیفرانسیل در بعدها بالاتر با آن مواجه هستیم اجتناب نماییم. امیدواریم که با این روش، این موضوعات زیبا را برای همه افراد قابل دسترس نماییم.

البته، این که ریاضیات را می‌توان فقط با تمرین یاد گرفت و نه فقط با خواندن، عبارتی کلیشه‌ای ولی درست است. از این رو کتاب شامل بیش از ۲۰۰ تمرین است. خوانندگان باید تا زمانی که توانشان اجازه می‌دهد به حل آنها اقدام نمایند. حل کامل همه تمرین‌ها در انتهای کتاب ارائه شده است ولی مراجعه به آن باید بعد از حل توسط خود خواننده و یا در صورت اضطرار و لاعلاجی صورت گیرد. سعی کرده‌ایم با ارائه راهنمایی در حل مسائلی که کمی دشوارتر هستند تعداد مثال‌ها را به حداقل برسانیم.

فهرست مطالب

۱	فصل ۱. خم‌ها در صفحه و در فضا
۱	۱.۱. خم چیست؟
۸	۲.۱. طول - قوس
۱۱	۳.۱. بازپیمایش
۱۹	۴.۱. خم‌های تراز در مقابل خم‌های پارامتری شده
۲۵	فصل ۲. چه اندازه یک خم، خمیده است؟
۲۵	۱.۲. انحنای
۳۰	۲.۲. خم‌های مسطح
۴۰	۳.۲. خم‌های فضایی
۵۱	فصل ۳. خواص سراسری خم‌ها
۵۱	۱.۳. خم‌های بسته ساده
۵۶	۲.۳. نامساوی هم پیرامونی
۶۰	۳.۳. قضیه چهار رأس
۶۳	فصل ۴. سطح در فضای سه بعدی
۶۳	۱.۴. سطح چیست؟
۷۱	۲.۴. سطوح هموار
۸۰	۳.۴. مماس‌ها، قائم‌ها و جهت‌پذیری
۸۵	۴.۴. مثال‌هایی از سطوح
۹۱	۵.۴. سطوح درجه دوم
۹۹	۶.۴. سیستم‌های متعامد سه‌گانه
۱۰۲	۷.۴. کاربردهای قضیه تابع معکوس
۱۰۷	فصل ۵. اولین فرم اساسی
۱۰۷	۱.۵. طول خم‌های واقع بر سطح
۱۱۱	۲.۵. ایزومتري‌های سطح
۱۱۷	۳.۵. نگاشت‌های هم‌دیس سطح
۱۲۳	۴.۵. مساحت سطح
۱۲۷	۵.۵. نگاشت‌های متساوی‌المساحت و قضیه ارشمیدس

۱۳۳	فصل ۶. انحناى سطوح
۱۳۳	۱.۶. دومین فرم اساسی
۱۳۷	۲.۶. انحناى خم‌های روی یک سطح
۱۴۱	۳.۶. انحناهای قائم و اصلی
۱۵۴	۴.۶. تفسیر هندسی انحناهای اصلی
۱۵۹	فصل ۷. انحناى گوس و نگاشت گوس
۱۵۹	۱.۷. انحناهای گوسی و میانگین
۱۶۴	۲.۷. کره نما
۱۶۸	۳.۷. سطوح تخت
۱۷۵	۴.۷. سطوح با انحناى میانگین ثابت
۱۷۹	۵.۷. انحناى گوسی سطوح فشرده
۱۸۱	۶.۷. نگاشت گوس
۱۸۵	فصل ۸. ژئودزیک‌ها
۱۸۵	۱.۸. تعریف و خواص اولیه
۱۸۹	۲.۸. معادلات ژئودزیکی
۱۹۶	۳.۸. ژئودزیک‌های سطوح دورانی
۲۰۶	۴.۸. ژئودزیک‌ها به‌عنوان کوتاهترین مسیر
۲۱۳	۵.۸. مختصات ژئودزیکی
۲۱۷	فصل ۹. سطوح مینیمال
۲۱۷	۱.۹. مسئله پلاتو
۲۲۴	۲.۹. مثال‌هایی از سطوح مینیمال
۲۳۴	۳.۹. نگاشت گوس یک سطح مینیمال
۲۳۷	۴.۹. سطوح مینیمال و توابع تحلیلی
۲۴۷	فصل ۱۰. قضیه ایگرگیوم گوس
۲۴۷	۱.۱۰. قضیه عالی گوس
۲۵۷	۲.۱۰. ایزومتري‌های سطوح
۲۵۹	۳.۱۰. معادلات کدازى-میناردی
۲۶۴	۴.۱۰. سطوح فشرده با انحناى گوسی ثابت
۲۶۷	فصل ۱۱. قضیه گوس-بونه
۲۶۷	۱.۱۱. گوس-بونه برای خم‌های بسته ساده
۲۷۲	۲.۱۱. گوس-بونه برای چند ضلعی‌های منحنی‌الخط
۲۷۹	۳.۱۱. گوس-بونه برای سطوح فشرده

۲۹۰
۲۹۷
۳۰۵
۳۰۵
۳۱۰
۳۱۶
۳۱۹
۳۲۹
۳۳۵
۳۴۲
۳۵۱
۳۶۱
۳۶۷
۳۷۲

۳۸۱
۳۸۹
۳۹۷
۴۰۱

۴.۱۱. نقاط تکین میدان‌های برداری

۵.۱۱. نقاط بحرانی

. جواب تمرین‌ها

. فصل ۱

. فصل ۲

. فصل ۳

. فصل ۴

. فصل ۵

. فصل ۶

. فصل ۷

. فصل ۸

. فصل ۹

. فصل ۱۰

. فصل ۱۱

فهرست لغات

برحسب الفبای انگلیسی

برحسب الفبای فارسی

نمایه

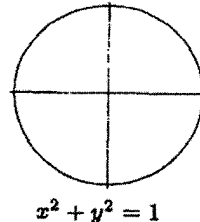
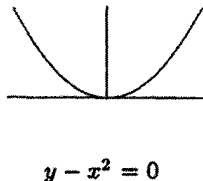
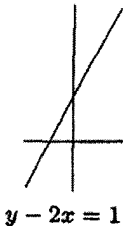
منابع

خم‌ها در صفحه و در فضا

در این فصل درباره دو فرمول ریاضی، از مفهوم شهودی خم، بحث می‌کنیم رابطه دقیق بین آنها تا اندازه‌ای ظریف است، بنابراین با ارائه مثالهایی از هر نوع خم و یافتن راههای کاربردی برای قانونمند کردن رابطه بین آنها شروع می‌کنیم.

۱.۱ خم چیست؟

اگر بخواهید مثالی از یک خم ارائه دهید احتمالاً یک خط مستقیم مثل $y - 2x = 1$ (اگر چه خمیده نیست)، یا دایره $x^2 + y^2 = 1$ یا شاید سهمی $y - x^2 = 0$ را ارائه می‌نمایید.



همه این خم‌ها با معادله دکارتی

$$f(x, y) = c$$

تعریف می‌شوند که در آن f تابعی از x و y ، c یک مقدار ثابت است.

با این دید، یک خم مجموعه نقاطی به صورت

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\} \quad (1)$$

است.

همهٔ این مثال‌ها خم‌هایی در صفحه \mathbf{R}^2 هستند، اما می‌توان خم‌هایی در \mathbf{R}^3 نیز ارائه داد. به‌طور مثال محور x ‌ها در \mathbf{R}^3 ، خط راستی است که با رابطه

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

داده می‌شود، و در حالت کلی یک خم در \mathbf{R}^3 با یک جفت معادله

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2$$

تعریف می‌شود.

خم‌هایی از این نوع خم‌های تراز خوانده می‌شوند. این ایده از آنجا ناشی می‌شود که خم در معادله (۱)، مجموعه نقاطی در صفحه مانند (x, y) است که با مقدار $f(x, y)$ به «سطح تراز» c می‌رسند.

اما تفکر دیگری نیز در مورد خم وجود دارد که در بسیاری از مواقع مفید است. به عنوان مثال، یک خم را می‌توان مسیر طی شده یک نقطه تصور کرد. بنابراین اگر $\gamma(t)$ موقعیت بردار در لحظه t باشد، خم بوسیله تابع γ بر حسب پارامتر t ، با مقادیر برداری در \mathbf{R}^2 برای خم مسطح و با مقادیر برداری در \mathbf{R}^3 برای خم فضایی تعریف می‌شود. با استفاده از این ایده اولین تعریف دقیق از خم‌های موجود در \mathbf{R}^n را ارائه می‌دهیم (فقط حالت‌های $n = 2$ یا $n = 3$ را بررسی می‌کنیم، اما به سادگی می‌توان به‌طور همزمان با هر دو کار کرد).

تعریف ۱.۱

یک خم پارامتری شده در \mathbf{R}^n ، تابع $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ است که در آن $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. نماد (α, β) بازه باز

$$(\alpha, \beta) = \{t \in \mathbf{R} \mid \alpha < t < \beta\}$$

است.

خم پارامتری شده‌ای که تصویر آن در خم تراز C واقع است پرمایش (بخشی از) خم C نامیده می‌شود. مثالهای زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان از خم‌های تراز، به خم‌های پارامتری شده رسید و بالعکس.

مثال ۱.۱

بیابید پرمایش $\gamma(t)$ از سهمی $y = x^2$ را بیابیم. اگر $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. آنگاه مؤلفه‌های γ_1 و γ_2 می‌بایستی در رابطه

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \quad (2)$$

به ازای هر t در بازه (α, β) که γ در آن تعریف شده باشد، صدق کند (این بازه هنوز معین نشده)، و هر نقطه روی سهمی نیز باید، به ازای $t \in (\alpha, \beta)$ ای با $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ برابر شود. البته یک جواب بدیهی برای معادله (۲)، $\gamma_1(t) = t$ و $\gamma_2(t) = t^2$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن تمام نقاط سهمی، t می‌بایستی تمام اعداد حقیقی را اتخاذ کند. (چون مؤلفه x - ام $\gamma(t)$ ، t است و مؤلفه x - ام نقاط سهمی می‌تواند هر عدد حقیقی باشد). لذا (α, β) برابر $(-\infty, \infty)$ و پرمایش مورد نظر به صورت

$$\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^2)$$

می‌باشد. اما این تنها پرمایش سهمی نیست. انتخاب‌های دیگر می‌توانند به شکل $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ با $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ و یا $(2t, 4t^2)$ باشند. البته تعداد (بیشمار) دیگری نیز وجود دارند. بنابراین پرمایش یک خم تراز منحصر به فرد نیست.

مثال ۲.۱

دایره $x^2 + y^2 = 1$ را در نظر می‌گیریم. مانند مثال قبل فرض کنید $x = t$ ، بنابراین $y = \sqrt{1 - t^2}$ (می‌توان $y = -\sqrt{1 - t^2}$ را نیز در نظر گرفت). لذا پرمایش

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$$

به‌دست خواهد آمد.

اما این فقط پرمایش نیمه بالایی دایره است، زیرا $\sqrt{1 - t^2}$ همیشه مثبت است. به‌طور مشابه، اگر $y = -\sqrt{1 - t^2}$ را در نظر بگیریم، پرمایش قسمت پایین دایره به‌دست می‌آید.

اگر پرمایش کل دایره را بخواهیم بررسی دیگری لازم است. به توابعی مانند $\gamma_1(t)$ و $\gamma_2(t)$ نیاز داریم به طوری که برای هر $t \in (\alpha, \beta)$

$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \quad (3)$$

و هر چنین نقطه‌ای روی دایره، به ازای t ای در بازه (α, β) ، باید برابر $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ باشد. یک جواب واضح برای معادله (۳)، $\gamma_1(t) = \cos t$ و $\gamma_2(t) = \sin t$ است (چون برای تمام مقادیر t ، $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$). می‌توانیم فرض کنیم $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ ، اگر چه این بازه بزرگ است: در واقع می‌توان هر بازه باز (α, β) که طولش بیش از 2π است را در نظر گرفت.

مثال بعدی نشان می‌دهد چگونه از خم‌های پارامتری شده به خم‌های تراز می‌رسیم.

مثال ۳.۱

خم پارامتری شده

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

را در نظر می‌گیریم. (به این خم، خم ستاره‌گون گفته می‌شود.)

چون برای هر t ، $\cos^3 t + \sin^3 t = 1$ ، مؤلفه‌های $x = \cos^3 t$ ، $y = \sin^3 t$ از $\gamma(t)$ در

معادله

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

صدق می‌کنند. این خم تراز، منطبق بر تصویر تابع γ است.

در این کتاب، با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، خم‌ها (و بعد رویه‌ها) را مطالعه می‌کنیم. مشتق یک تابع برداری مثل $\gamma(t)$ (تعریف ۱.۱) به صورت مؤلفه‌ای تعریف می‌شود. اگر

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

آنگاه

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \dots, \frac{d\gamma_n}{dt} \right)$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \left(\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}, \frac{d^2\gamma_2}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\gamma_n}{dt^2} \right)$$

والی آخر. برای خلاصه نویسی، اغلب $\frac{d\gamma}{dt}$ را با $\dot{\gamma}(t)$ و $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ را با $\ddot{\gamma}(t)$ نمایش می‌دهیم.

می‌گوییم γ هموار است اگر همه مؤلفه‌های γ یعنی $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ هموار باشند، یعنی تمام مشتقات $\frac{d\gamma_i}{dt}, \frac{d^2\gamma_i}{dt^2}, \frac{d^3\gamma_i}{dt^3}, \dots$ و برای $i = 1, 2, \dots, n$ موجود باشند. از حالا به بعد فرض می‌کنیم تمام خم‌های پارامتری شده‌ای که در این کتاب بررسی می‌کنیم هموار هستند.

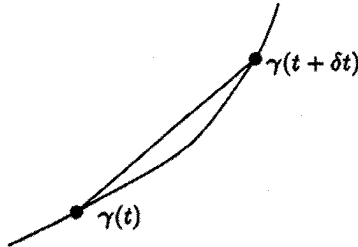
تعریف ۲.۱

اگر $\gamma(t)$ یک خم پارامتری شده باشد، مشتق اول آن، $\frac{d\gamma}{dt}$ بردار مماس γ در نقطه $\gamma(t)$ خوانده می‌شود.

دلیل این واژه این است که بردار

$$\frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$$

موازی وتر است که دو نقطه $\gamma(t)$ و $\gamma(t + \delta t)$ را در تصویر C از γ به هم وصل می‌کند.



می‌دانیم وقتی δt به سمت صفر میل کند، وتر با خط مماس بر خم C در $\gamma(t)$ موازی است. لذا مماس می‌بایستی موازی

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t} = \frac{d\gamma}{dt}$$

باشد.

نتایج زیر به راحتی به دست می‌آید.

گزاره ۱.۱

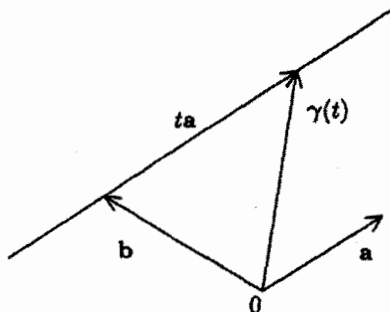
اگر بردار مماس خم پارامتری شده ثابت باشد، آنگاه تصویر خم (بخشی از) یک خط مستقیم است.

اثبات ۱.۱

فرض کنید برای هر t ، $\dot{\gamma}(t) = a$ باشد که در آن a یک بردار ثابت است. با انتگرال‌گیری مؤلفه‌ای، داریم

$$\gamma(t) = \int \frac{d\gamma}{dt} dt = \int a dt = ta + b$$

که b بردار ثابت دیگری است. اگر $a \neq 0$ ، معادله پارامتری، خط راست موازی a است که از نقطه‌ای که موقعیت بردار b را نشان می‌دهد می‌گذرد.



□ اگر $a = 0$ ، تصویر γ یک نقطه است (نقطه‌ای که موقعیت b را نشان می‌دهد).

تمرین‌ها

۱.۱ آیا $\gamma(t) = (t^2, t^2)$ پرمایش سهمی $y = x^2$ است؟

۲.۱ پرمایش خم‌های تراز زیر را به دست آورید.

$$y^2 - x^2 = 1 \quad (i)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (ii)$$

۳.۱ معادلات دکارتی خم‌های پارامتری شده زیر را بنویسید:

$$\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t) \quad (i)$$

$$\gamma(t) = (e^t, t^2) \quad (ii)$$

۴.۱ بردار مماس خم‌های تمرین ۳.۱ را به دست آورید.

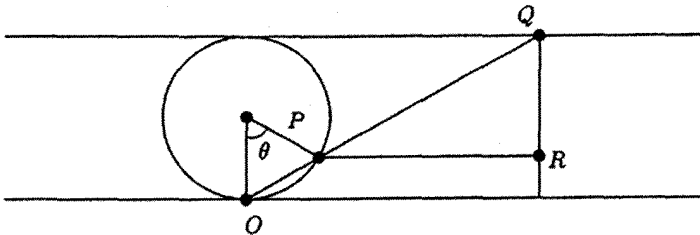
۵.۱ خم ستاره‌گون در مثال ۳.۱ را رسم کنید. بردار مماس را در هر نقطه به دست آورید. در کدام نقاط بردار مماس برابر صفر است.

۶.۱ فرض کنید P یک نقطه دلخواه واقع بر دایره C با شعاع $a > 0$ و مرکز $(0, a)$ در صفحه xy باشد و خط راستی که نقطه P را به مبدا مختصات وصل می‌کند خط $y = 2a$ را در نقطه Q قطع کند، و بعلاوه فرض کنید خطی که از P موازی محور x ها، و خطی که از Q موازی محور y ها رسم می‌شود در نقطه R متقاطع باشند وقتی P روی C حرکت می‌کند، R مکان هندسی خمی است که افسون آگنسی^۱ نام دارد.

(i) معادله پارامتری

(ii) معادله دکارتی

این خم را بیابید



۷.۱ سیکلوئید خم مسطحی است که از چرخیدن نقطه‌ای روی پیرامون دایره‌ای که بدون سر خوردن، روی خط راست می‌غلتد حاصل می‌شود. نشان دهید اگر محور x ها خط راست و شعاع دایره $a > 0$ باشد، سیکلوئید را می‌توان به صورت

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$$

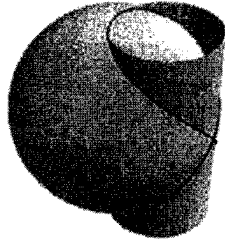
پرمایش نمود.

۸.۱ تمرین قبل را تعمیم دهید: با پیدا کردن پرمایش ایبی سیکلوئید (های پوسیکلوئید)، خمی که از حرکت نقطه‌ای واقع بر پیرامون دایره‌ای که بدون سر خوردن، در بیرون (در درون) یک دایره ثابت می‌غلتد، حاصل می‌شود.

۹.۱ نشان دهید $\gamma(t) = (\cos^2 t - \frac{1}{3}, \sin t \cos t, \sin t)$ پرمایش خمی است که از تقاطع

1) witch of Agnesi

استوانه دایره‌گون به شعاع $\frac{1}{4}$ و محوریت، محور z ‌ها با کره به شعاع ۱ و مرکز $(-\frac{1}{4}, 0, 0)$ حاصل می‌شود. این خم را خم ویویانی^۲ می‌گوییم.



۱۰.۱ مارپیچ لگاریتمی $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ را در نظر بگیرید، نشان دهید زاویه بین $\gamma(t)$ و بردار مماس در $\gamma(t)$ به t وابسته نیست. (تصویر خم مارپیچ لگاریتمی در مثال ۴.۱ نشان داده شده است).

۲.۱ طول - قوس

اگر $v = (v_1, \dots, v_n)$ یک بردار در \mathbb{R}^n باشد، طول آن برابر است با

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

اگر u بردار دیگری در \mathbb{R}^n باشد $\|u - v\|$ طول پاره خطی است که نقاطی با موقعیت برداری u و v در \mathbb{R}^n را به هم وصل می‌کند.

برای پیدا کردن فرمولی برای محاسبه طول خم پارامتری شده γ ، توجه کنید اگر δt کوچک باشد قسمتی از تصویر C که بین $\gamma(t)$ و $\gamma(t + \delta t)$ واقع است تقریباً یک خط راست است بنابراین طول آن تقریباً برابر است با

$$\|\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)\|$$

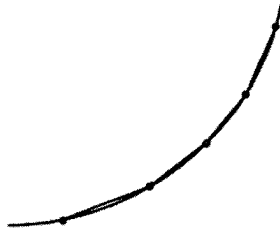
بعلاوه، چون δt کوچک است، $\frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$ تقریباً برابر با $\dot{\gamma}(t)$ است. بنابراین طول تقریباً برابر با

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \delta t \quad (۴)$$

است. اگر بخواهیم قسمتی از طول C را (نه لزوماً قسمت بسیار کوچک آن را) محاسبه کنیم می‌توانیم آن را به قسمت‌هایی تقسیم نماییم که هر کدام مربوط به رشد کوچک δt در t است طول

2) Viviani's curve

هر کدام از قسمت‌ها را با استفاده از (۴) محاسبه و سپس با هم جمع می‌کنیم. بعد δt را به سمت صفر میل می‌دهیم. در این صورت اندازه دقیق به دست می‌آید.



با این ایده، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۳.۱

طول - قوس خم γ که از $\gamma(t_0)$ شروع می‌شود تابع $s(t)$ با ضابطه

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du$$

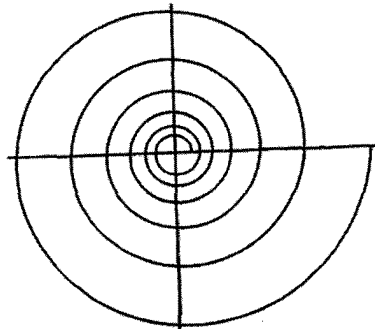
است.

بنابراین $s(t_0) = 0$ و $s(t)$ مثبت یا منفی است، بر حسب اینکه، t بزرگتر یا کوچکتر از t_0 باشد. اگر نقطه آغازی دیگری مانند $\gamma(\tilde{t}_0)$ اختیار کنیم، طول - قوس \tilde{s} با s به اندازه ثابت $\int_{\tilde{t}_0}^{t_0} \|\dot{\gamma}(u)\| du$ تفاوت دارد.

مثال ۴.۱

برای مارپیچ لگاریتمی

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$$



داریم

$$\dot{\gamma} = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$$

$$\therefore \|\dot{\gamma}\|^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 = 2e^{2t}$$

بنابراین طول-قوس γ با نقطهٔ آغازی (مثلاً) $\gamma(0) = (1, 0)$ برابر است با:

$$s = \int_0^t \sqrt{2e^{2u}} du = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

اگر s طول-قوس خم γ با نقطهٔ آغازی $\gamma(t_0)$ باشد، داریم:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du = \|\dot{\gamma}(t)\| \quad (5)$$

اگر $\gamma(t)$ موقعیت نقطهٔ متحرکی در لحظه t باشد، $\frac{ds}{dt}$ سرعت آن نقطه است. (میزان

تغییرات مسافت در طول خم) بنابراین داریم:

تعریف ۴.۱

اگر $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک خم پارامتری شده باشد، سرعت آن در نقطه $\gamma(t)$ برابر $\|\dot{\gamma}(t)\|$ است و γ سرعت - واحد نامیده می‌شود اگر $\dot{\gamma}(t)$ برای تمام $t \in (\alpha, \beta)$ بردار واحد باشد.

در بسیاری از مثالها خواهیم دید که خم سرعت - واحد، فرمولها و نتایج ساده‌تری دارد. علت این ساده‌سازی در عبارت بعدی بیان می‌شود. اگر چه در نگاه اول جالب به نظر نمی‌آید، ولی برای آنچه در پیش داریم بسیار مفید است.

گزاره ۲.۱

فرض کنید بردار واحد $\mathbf{n}(t)$ تابع همواری از پارامتر t باشد، دراین صورت حاصل ضرب نقطه‌ای

$$\dot{\mathbf{n}}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 0$$

برای هر t برقرار است. لذا $\dot{\mathbf{n}}(t)$ صفر و یا عمود بر $\mathbf{n}(t)$ است. خصوصاً، اگر γ یک بردار سرعت-واحد باشد، آنگاه یا $\dot{\gamma}$ صفر است و یا بر $\dot{\gamma}$ عمود است.

اثبات ۲.۱

از حاصل ضرب نقطه‌ای تابع‌های برداری $a(t)$ و $b(t)$ مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d}{dt}(a \cdot b) = \frac{da}{dt} \cdot b + a \cdot \frac{db}{dt}$$

با استفاده از این رابطه و مشتق‌گیری از دو طرف معادله $n \cdot n = 1$ نسبت به t داریم:

$$\dot{n} \cdot n + n \cdot \dot{n} = 0$$

بنابراین $2\dot{n} \cdot n = 0$ و آخرین قسمت با در نظر گرفتن $\dot{\gamma} = n$ به دست می‌آید. \square

تمرین‌ها

۱۱.۱ طول-قوس زنجیری $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ را که نقطه شروع آن $(1, 0)$ است محاسبه کنید.

۱۲.۱ نشان دهید خم‌های زیر سرعت-واحد هستند.

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{3}}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \text{ (i)}$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right) \text{ (ii)}$$

۱۳.۱ طول-قوس سیکلوئید در مثال ۷.۱ را وقتی که یک دور کامل دایره را می‌پیماید حساب کنید.

۳.۱ بازپرمایش

در مثال‌های ۱.۱ و ۲.۱ دیدیم که خم تراز می‌تواند دارای پرمایش‌های بی‌شماری باشد، لذا شناخت رابطه بین آنها دارای اهمیت است.

تعریف ۵.۱

خم پارامتری شده $\tilde{\gamma} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \rightarrow \mathbf{R}^n$ بازپرمایش خم پارامتری شده $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ است اگر نگاشت دو سویی هموار $\phi : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \rightarrow (\alpha, \beta)$ (نگاشت بازپرمایش) وجود داشته باشد به طوری که نگاشت معکوس $\phi^{-1} : (\alpha, \beta) \rightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ نیز هموار باشد و برای هر $\tilde{t} \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$

$$\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\phi(\tilde{t}))$$

توجه کنید، چون ϕ دارای معکوس هموار است، لذا γ نیز یک بازپرمایش $\tilde{\gamma}$ است و برای هر

$$t \in (\alpha, \beta)$$

$$\tilde{\gamma}(\phi^{-1}(t)) = \gamma(\phi(\phi^{-1}(t))) = \gamma(t)$$

دو خم که بازپرمایش یکدیگرند دارای یک تصویرند، بنابراین می‌بایستی دارای خواص هندسی یکسان باشند.

مثال ۵.۱

در مثال ۲.۱ پرمایش $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ را برای دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نظر گرفتیم. پرمایش دیگر به صورت:

$$\tilde{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t)$$

است (زیرا $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$) برای اثبات این‌که $\tilde{\gamma}$ بازپرمایش γ است، می‌بایستی نگاشت بازپرمایش ϕ چنان ارائه دهیم که

$$(\cos \phi(t), \sin \phi(t)) = (\sin t, \cos t)$$

یک جواب این رابطه تابع $\phi(t) = \frac{\pi}{4} - t$ است.

همان‌طور که در بخش قبل اشاره کردیم بررسی خم سرعت-واحد ساده‌تر است، لذا این‌که دقیقاً کدام یک از خم‌ها دارای بازپرمایش سرعت-واحد می‌باشند مهم است.

تعریف ۶.۱

نقطه $\gamma(t)$ در خم پارامتری شده γ را نقطهٔ عادی می‌نامیم هرگاه $\dot{\gamma}(t) \neq 0$. در غیر این صورت $\gamma(t)$ نقطهٔ تکین γ است. یک خم عادی است هرگاه همه نقاط آن عادی باشد.

قبل از اینکه رابطهٔ بین عادی بودن خم و بازپرمایش سرعت-واحد را نشان دهیم، به دو خاصیت ساده خم‌های عادی اشاره می‌کنیم. اگر چه این نتایج به‌طور خاص جذاب نیستند ولی برای آنچه که در پیش داریم ارزشمندند.

گزاره ۳.۱

هر بازپرمایش خم عادی، عادی است.

اثبات ۳.۱

فرض کنید که γ و $\tilde{\gamma}$ بر اساس تعریف ۵.۱ با هم ارتباط داشته باشند، قرار دهید $t = \phi(\tilde{t})$ ، و $\psi = \phi^{-1}$ بنابراین $\tilde{t} = \psi(t)$. از طرفین معادله $\phi(\psi(t)) = t$ بر حسب t ، مشتق می‌گیریم. با استفاده از قاعده زنجیری داریم:

$$\frac{d\phi}{d\tilde{t}} \frac{d\psi}{dt} = 1$$

این معادله نشان می‌دهد که $\frac{d\phi}{d\tilde{t}}$ همواره مخالف صفر است چون $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\phi(\tilde{t}))$. مجدداً از قاعده زنجیری داریم

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\phi}{d\tilde{t}}$$

که نشان می‌دهد اگر $\frac{d\gamma}{dt}$ صفر نباشد، $\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}}$ نیز هرگز صفر نیست. □

گزاره ۴.۱

اگر $\gamma(t)$ خم عادی باشد، طول قوس s (تعریف ۳.۱ را ببینید) با هر نقطه‌آغازی از γ ، یک تابع هموار از t است.

اثبات ۴.۱

دیدیم γ عادی باشد یا نباشد) s یک تابع مشتق‌پذیر از t است و

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

برای سهولت از این به بعد فرض کنید γ یک خم مسطح مثلاً به صورت

$$\gamma(t) = (u(t), v(t))$$

است.

که در آن v و u توابع همواری از t هستند. تابع $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ را به صورت

$$f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

تعریف کنید، بنابراین

$$\frac{ds}{dt} = f(\dot{u}, \dot{v}) \quad (۶)$$

نکته بسیار اساسی آن است که f روی $\mathbf{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ هموار است به این مفهوم که همه مشتقات جزئی، به جز در مبدأ، از تمامی مراتب موجود و پیوسته‌اند به عنوان مثال

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

به جز در $v = u = 0$ ، در بقیه نقاط تعریف شده و پیوسته هستند. مشتقات مراتب بالاتر نیز همین گونه هستند. چون γ عادی است، \dot{u} و \dot{v} ، هیچگاه همزمان صفر نیستند، پس بنابر قاعده زنجیری و معادله (۶)، هموار است. به عنوان مثال:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial u} \ddot{u} + \frac{\partial f}{\partial v} \ddot{v}$$

□

و رابطه مشابه برای مشتقات مراتب بالاتر s نیز برقرار است.

نتیجه اصلی که می‌خواهیم این است:

گزاره ۵.۱

یک خم پارامتری شده، دارای بازپیمایش سرعت-واحد است اگر و فقط اگر عادی باشد.

اثبات ۵.۱

ابتدا فرض کنید خم پارامتری شده $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ دارای بازپیمایش سرعت-واحد $\tilde{\gamma}$ ، با نگاشت بازپیمایش ϕ باشد قرار دهید $t = \phi(\tilde{t})$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\tilde{t}) &= \gamma(t) \\ \therefore \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} &= \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} \\ \therefore \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} \right\| &= \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{d\tilde{t}} \right| \end{aligned}$$

و چون $\tilde{\gamma}$ ، سرعت-واحد است، $\|\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}\| = 1$. بنابراین به وضوح $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0$.

بالعکس، فرض کنید بردار مماس $\frac{d\gamma}{dt}$ همواره مخالف صفر باشد، طبق معادله (۵) برای هر $t > 0$ که در آن s طول-قوس γ با نقطه آغازی دلخواه است، و طبق گزاره ۴.۱، s یک تابع هموار از t است. از قضیه تابع معکوس برای چند متغیره‌ها داریم که نگاشت $\mathbb{R} \rightarrow (\alpha, \beta) : s$ ، یک به یک و تصویرش یک بازه باز به صورت $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ است و معکوشش یعنی $(\alpha, \beta) \rightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) : s^{-1}$ هموار است. خوانندگانی که با قضیه تابع معکوس آشنا نیستند، آن را بپذیرند، در بخش ۴.۱ به‌طور صوری و در فصل ۴ به‌طور رسمی آن را توضیح خواهیم داد. قرار دهید $\phi = s^{-1}$ و فرض کنید $\tilde{\gamma}$ بازپیمایش متناظر γ باشد. لذا

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \frac{ds}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt} \\ \therefore \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| \frac{ds}{dt} &= \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \frac{ds}{dt} \quad (\text{طبق معادله (۵)}) \\ \therefore \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| &= 1 \end{aligned}$$

□

اثبات گزاره ۵.۱ نشان می‌دهد که تنها پارامتر سرعت-واحد روی خم عادی، طول-قوس است.

نتیجه ۱.۱

فرض کنید γ یک خم عادی و $\tilde{\gamma}$ بازپیمایش سرعت-واحد γ باشد، یعنی برای هر t

$$\tilde{\gamma}(u(t)) = \gamma(t)$$

که در آن u یک تابع هموار از t است. در این صورت اگر s طول-قوس γ ، با این نقطه آغازی دلخواه باشد داریم:

$$u = \pm s + c \tag{۷}$$

که در آن c ثابت است. بالعکس اگر u در معادله (۷) برای مقادیری از c ، با علامت دیگری داده شده باشد در این صورت $\tilde{\gamma}$ بازپیمایش سرعت-واحد است.

اثبات ۱.۱

اولین بخش از اثبات گزاره ۵.۱ نشان می‌دهد که u بازپیمایش سرعت - واحد γ است اگر و فقط اگر

$$\therefore \frac{du}{dt} = \pm \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \pm \frac{ds}{dt} \quad ((5) \text{ طبق معادله})$$

بنابراین $u = \pm s + c$ که در آن c مقدار ثابتی است. \square

اگر چه هر خم عادی یک بازپیمایش سرعت-واحد دارد ولی همان‌طور که مثال‌های بعدی نشان می‌دهند نوشتن دقیق آن ممکن است بسیار سخت و یا حتی غیر ممکن باشد.

مثال ۶.۱

برای ماریچ لگاریتمی

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$$

در مثال ۴.۱ دیدیم که

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = 2e^{2t}$$

همواره مخالف صفر است، لذا γ خم عادی است. طول-قوس γ با نقطه آغازی $(1, 0)$ ، به صورت $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$ است. بنابراین $t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$ لذا بازپیمایش سرعت-واحد $\tilde{\gamma}$ بوسیله فرمول نسبتاً مشکل:

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right) \right)$$

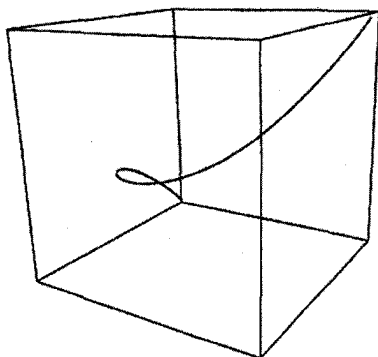
تعیین می‌شود.

مثال ۷.۱

مکعب تابیده یک خم فضایی با معادله

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3) \quad -\infty < t < \infty$$

است.



داریم:

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\therefore \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

که هیچگاه صفر نیست، لذا γ خم عادی است. طول-قوس با نقطه آغازی $\gamma(0) = 0$ به صورت

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} du$$

است. این انتگرال را نمی‌توان بوسیله توابع آشنایی چون توابع لگاریتمی، نمایی، مثلثاتی و غیره محاسبه کرد. (این انتگرال، انتگرال بیضوی نامیده می‌شود).

آخرین مثال نشان می‌دهد که یک خم تراز می‌تواند هم بازپرمایش عادی و هم بازپرمایش غیرعادی داشته باشد.

مثال ۸.۱

برای پرمایش

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$

از سهمی $y = x^2$ داریم $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$ که به‌وضوح هیچگاه صفر نیست. بنابراین γ خم عادی است.

اما

$$\tilde{\gamma}(t) = (t^3, t^6)$$

نیز یک پرمایش همان سهمی است. ولی این بار، $\tilde{\gamma} = (3t^2, 6t^3)$ که در $t = 0$ ، صفر است. بنابراین $\tilde{\gamma}$ یک خم عادی نیست.

تمرین‌ها

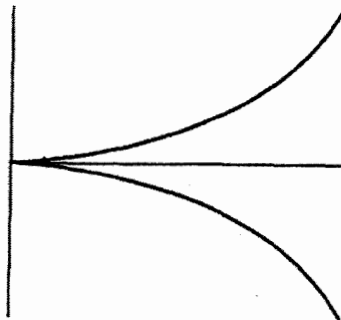
۱۴.۱ کدامیک از خم‌های زیر عادی است.

$$-\infty < t < \infty \quad \gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t) \quad (i)$$

$$0 < t < \frac{\pi}{4} \quad (ii) \text{ همان خم } (i) \text{ اما با } \frac{\pi}{4}$$

$$-\infty < t < \infty \quad \gamma(t) = (t, \cosh t) \quad (iii)$$

باز پرمایش سرعت-واحد خم(های) عادی را پیدا کنید.



۱۵.۱ پیچک‌وار دیوکلِس^۳ (شکل بالا) خمی است که معادله‌اش در مختصات قطبی (r, θ) به

صورت:

$$r = \sin \theta \tan \theta, ; -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$$

می‌باشد با استفاده از پارامتر θ ، یک پرمایش برای پیچک‌وار بنویسید و نشان دهید:

$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \right), \quad -1 < t < 1$$

یک باز پرمایش آن است.

۱۶.۱ فرض کنید γ یک خم در \mathbf{R}^n و $\tilde{\gamma}$ یک باز پرمایش آن با نگاشت باز پرمایش ϕ باشد (یعنی

$(\tilde{\gamma}(\tilde{t})) = \gamma(\phi(\tilde{t}))$). فرض کنید \tilde{t}_0 یک مقدار ثابت و $t_0 = \phi(\tilde{t}_0)$ ، هم چنین فرض

3) cissoid of Diocles

کنید s و \bar{s} طول-قوس‌های γ و $\bar{\gamma}$ با نقطه آغازی $\gamma(t_0) = \bar{\gamma}(\bar{t}_0)$ باشد. ثابت کنید اگر برای هر \bar{t} ، $\frac{d\phi}{d\bar{t}} > 0$ ، آنگاه $s = \bar{s}$ ، و اگر برای هر \bar{t} ، $\frac{d\phi}{d\bar{t}} < 0$ ، آنگاه $s = -\bar{s}$.

۴.۱ خم‌های تراز در مقابل خم‌های پارامتری شده

می‌خواهیم رابطه دقیق بین دو نوع خم را که در بخش‌های قبل مورد بررسی قرار داده‌ایم روشن کنیم.

به‌طور کلی خم‌های تراز که معرفی کرده‌ایم، همیشه به‌گونه‌ای نیستند که بخواهیم آن‌ها را خم بنامیم. برای مثال خم تراز $x^2 + y^2 = 0$ یک نقطه است. شرایط درستی که بتوانیم روی تابع $f(x, y)$ قرار دهیم به‌طوری‌که به ازای ثابت c ، $f(x, y) = c$ یک خم تراز قابل قبول در صفحه باشد در قضیه زیر که نشان می‌دهد این چنین خم‌های تراز را می‌توان پارامتری کرد ارائه شده است، برای سهولت فرض می‌کنیم $c = 0$ (زیرا می‌توانیم $f - c$ را جایگزین f نماییم).

قضیه ۱.۱

فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره هموار باشد (یعنی همه مشتقات جزئی f از هر مرتبه موجود و پیوسته باشند). فرض کنیم برای هر نقطه در خم تراز:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$$

همزمان صفر نشوند. اگر P یک نقطه در C با مختصات (x_0, y_0) باشد در این صورت خم پارامتری شده عادی $\gamma(t)$ که در بازه باز شامل صفر تعریف شده، موجود است به‌طوری‌که به‌ازای $t = 0$ ، از نقطه P گذشته و به ازای هر t ، $\gamma(t)$ در C واقع است.

اثبات قضیه بر اساس قضیه تابع معکوس انجام می‌پذیرد (که یک صورت آن در اثبات گزاره ۵.۱ به‌کار برده شد). فعلاً فقط سعی می‌کنیم خواننده را در مورد صحت قضیه متقاعد کنیم. اثبات در تمرین‌های بعدی (تمرین ۳۱.۴) بعد از معرفی قضیه تابع معکوس و کاربرد آن در مباحث سطح ارائه خواهد شد.

برای درک معانی شرایط اعمال شده روی f در قضیه ۱.۱، فرض کنید $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ یک نقطه در C نزدیک P باشد، لذا $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$. براساس قضیه تیلور برای دو متغیره‌ها، با حذف حاصل ضرب مقادیر کوچک Δx و Δy (مشتقات جزئی در (x_0, y_0))

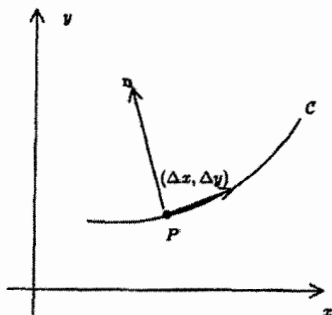
محاسبه شده‌اند) داریم:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}$$

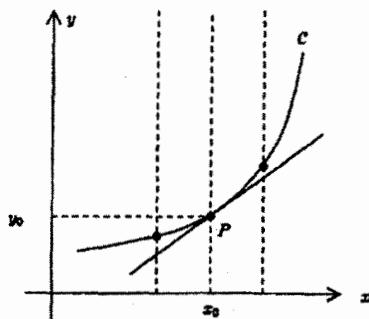
در نتیجه:

$$\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (۸)$$

چون Δx و Δy کوچک هستند بردار $(\Delta x, \Delta y)$ تقریباً مماس بر C در P است. بنابراین معادله (۸) می‌گوید که بردار $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ در نقطه P بر C عمود است.



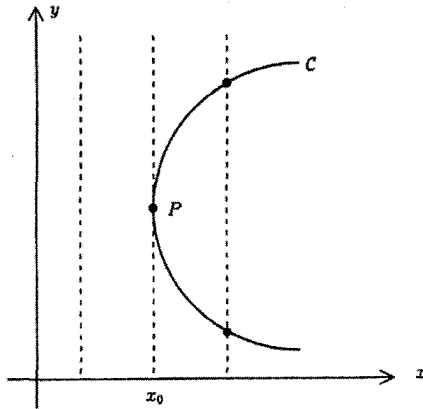
مفروضات قضیه ۱.۱ بیان می‌کند که بردار \mathbf{n} در هر نقطه از C ، مخالف صفر است. برای مثال فرض کنید در P ، $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. در این صورت \mathbf{n} در P موازی محور x ها نیست بنابراین مماس بر C در P موازی محور y ها نخواهد بود.



در نتیجه خطوط عمودی، ثابت $x = x_0$ ، واقع در نزدیکی خط عمودی $x = x_0$ ، هر یک C را در نقطه یگانه (x, y) نزدیک P ، قطع می‌کنند. به عبارت دیگر معادله

$$f(x, y) = 0 \quad (۹)$$

دارای جواب یگانه y ، نزدیک y_0 برای هر x نزدیک x_0 است. توجه کنید در حالتی که مماس بر C در P ، موازی محور y ها است این ممکن است برقرار نباشد.



در این مثال مثال خطوط، ثابت $x = x_0$ که در سمت چپ $x = x_0$ هستند، در نزدیکی P ، C را قطع نمی‌کنند، ولی آنهایی که سمت راست $x = x_0$ هستند C را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند. عبارت بالا در مورد f بدین معناست که تابع $g(x)$ موجود است به طوری که برای x های نزدیک x_0 تعریف شده و $y = g(x)$ یگانه جواب معادله (۹) در نزدیکی y_0 است. حالا می‌توانیم بخشی از C را که، در نزدیکی P قرار دارد به صورت:

$$\gamma(t) = (t, g(t))$$

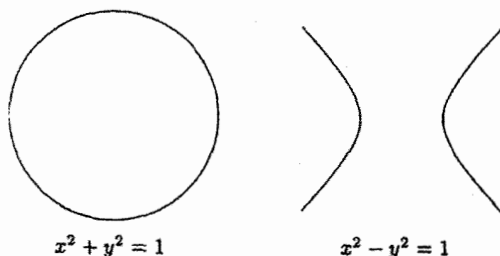
پرمایش کنیم.

اگر بپذیریم که g هموار است (این مطلب نتیجه قضیه تابع معکوس است) در این صورت γ مطمئناً عادی است زیرا:

$$\dot{\gamma} = (1, \dot{g})$$

که به وضوح هرگز صفر نمی‌شود. این «اثبات» قضیه ۱.۱ است.

در واقع می‌توان کمی بیشتر از آنچه در قضیه ۱.۱ بیان شده را ثابت کرد. فرض کنید $f(x, y)$ در شرایط قضیه صدق کند و به علاوه خم تراز C که به وسیله $f(x, y) = 0$ داده شده همبند باشد برای خوانندگانی که با توپولوژی آشنایی ندارند، همبندی تلویحاً به این معنا است که C «یکپارچه» است. برای مثال دایره $x^2 + y^2 = 1$ همبند است ولی هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ ناهمبند است.



با این مفروضات روی f ، خم پارامتری عادی γ وجود دارد که تصویرش تمام C است به علاوه اگر C بسته نباشد (مثل خط مستقیم یا سهمی) γ می‌تواند یک به یک باشد ولی اگر C بسته باشد مثال (دایره یا بیضی) در این صورت γ بازه بسته $[\alpha, \beta]$ را به صورت پوشا به C تصویر می‌کند، $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ و روی γ بازه باز (α, β) یک‌به‌یک است.
برای گذر از خم پارامتری شده به خم تراز، بحث مشابه‌ای موجود است:

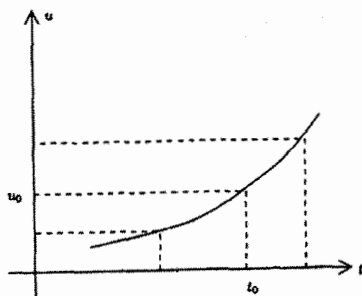
قضیه ۲.۱

فرض کنید γ یک خم پارامتری شده مسطح و $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ یک نقطه در تصویر آن باشد. در این صورت تابع هموار $f(x, y)$ با مقادیر حقیقی موجود است به طوری که برای x و y در بازه‌های بازی، به ترتیب، شامل x_0 و y_0 تعریف شده و در شرایط قضیه ۱.۱ صدق می‌کند و $\gamma(t)$ به ازای تمام مقادیر t در بازه بازی شامل t_0 ، در خم تراز $f(x, y) = 0$ واقع است.

اثبات قضیه ۲.۱ مشابه اثبات قضیه ۱.۱ است. فرض کنید:

$$\gamma(t) = (u(t), v(t))$$

که در آن u و v توابع هموار هستند. چون γ عادی است حداقل یکی از $\dot{u}(t_0)$ و $\dot{v}(t_0)$ مخالف صفر است. مثلاً $\dot{u}(t_0)$ را مخالف صفر فرض کنید، بدان معنا که نمودار u به عنوان یک تابع هموار از t موازی محور t در t_0 نیست:



مانند اثبات قضیه ۱.۱ هر خط موازی محور t ها نزدیک $u = x$ ، نمودار u را در نقطه یگانه $u(t)$ که در آن t نزدیک t است قطع می‌کند. در نتیجه تابع $h(x)$ تعریف شده بر بازه باز شامل x موجود است به طوری که $t = h(x)$ یگانه جواب معادله $u(t) = x$ به ازای x نزدیک x و t نزدیک t باشد. از قضیه تابع معکوس، h هموار است. تابع

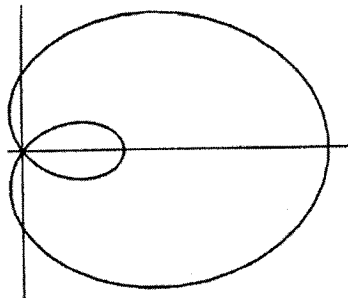
$$f(x, y) = y - v(h(x))$$

دارای خواصی است که ما نیاز داریم.

در حالت کلی ممکن است تابع تک مقداری $f(x, y)$ موجود نباشد به طوری که در شرایط قضیه ۱.۱ صدق کرده و تصویر γ در خم تراز $f(x, y) = 0$ واقع شود. برای اینکه γ ممکن است مثل حلزونی

$$\gamma(t) = ((1 + 2 \cos t) \cos t, (1 + 2 \cos t) \sin t)$$

خودش را قطع می‌کند.



از تابع معکوس نتیجه می‌شود که هیچ تابع تک مقداری f که در شرایط قضیه ۱.۱ صدق کرده و خمی را نزدیک نقطه خود متقاطع توصیف نماید موجود نیست.

تمرین‌ها

۱۷.۱ تعمیمی از قضیه ۱.۱ برای خم‌های تراز \mathbf{R}^3 که به وسیله $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$ داده می‌شوند بیان کنید (شرط مشابه f در قضیه ۱.۱ را حدس بزنید، نشان دهید $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ عمود بر سطح $f(x, y, z) = 0$ است و بعد در مورد شرطی که دو صفحه همدیگر را در یک خط قطع می‌کنند فکر کنید. عبارت درست را در تمرین ۱۶.۴ ببینید).

۱۸.۱ قضیه ۲.۱ را برای خم‌های \mathbb{R}^3 (یا حتی \mathbb{R}^n) تعمیم دهید.

۱۹.۱ خم تراز C را برای $f(x, y) = 0$ در حالت $f(x, y) = y - |x|$ رسم کنید. توجه کنید f در شرایط قضیه ۱.۱ صدق نمی‌کند، زیرا $\frac{\partial f}{\partial x}$ در نقطه $(0, 0)$ واقع بر خم، موجود نیست. با وجود این نشان دهید خم پارامتری شده هموار γ که تصویرش تمام C است موجود می‌باشد. (از تابع هموار $\theta(t)$ که بعد از اثبات قضیه ۲.۸ تعریف شده استفاده کنید) آیا خم پارامتری شده عادی با این خاصیت موجود است؟

در ادامه این کتاب، برای سهولت از «خم‌ها» صحبت خواهیم کرد مگر ابهامی مبنی بر اینکه کدام نوع خم (تراز یا پارامتری) مورد نظر است موجود باشد.

چه اندازه یک خم، خمیده است؟

در این بخش، به هر خم در \mathbb{R}^3 دو تابع اسکالر که آن‌ها را انحنا و تاب می‌نامیم نسبت می‌دهیم. انحنا مقدار خمیدگی یک خم را اندازه می‌گیرد (بنابراین انحناهای خطوط مستقیم صفر است) و تاب نشان می‌دهد که یک خم، تا چه اندازه در صفحه واقع نیست (بنابراین تاب خم‌های مسطح صفر است). لذا انحنا و تاب با همدیگر شکل یک خم را تعیین می‌کنند.

۱.۲ انحنا

می‌خواهیم مقدار خمیدگی یک خم را اندازه بگیریم. چون «انحنا» فقط به شکل خم بستگی دارد لذا:

(i) با بازپیمایش خم، انحنا نباید تغییر کند.

بعلاوه، اندازه انحنا باید با حالت‌های خاص ساده مطابقت کند، به‌عنوان مثال:

(ii) انحناهای یک خط مستقیم باید برابر صفر باشد، و دایره‌های بزرگتر باید دارای انحناهای کمتری نسبت به دایره کوچکتر باشند.

با توجه به (ii) سر نخ‌ی از تعریف انحنا در گزاره ۱.۱ بدست می‌آوریم: که می‌گوید اگر γ یک خم مسطح با $\ddot{\gamma} = 0$ باشد، خم γ بخشی از یک خط مستقیم است، و بنابراین دارای انحناهای صفر است. پس ممکن است وسوسه شویم که انحناهای γ را برابر با $\|\ddot{\gamma}\|$ تعریف کنیم. (ترم می‌گیریم زیرا می‌خواهیم انحنا، یک اسکالر باشد نه یک بردار). اما متأسفانه، این به پرمایش γ (به‌طور نسبتاً پیچیده) ارتباط دارد. برای رفع این وابستگی بازپیمایش سرعت-واحد را در نظر می‌گیریم، بنابراین در هر نقطه $1 = \|\dot{\gamma}\|$ (طبعاً این قانون برای هر بازپیمایش ممکن است برقرار نباشد، نتیجه ۱.۱ را ببینید). لذا تعریف می‌کنیم

تعریف ۱.۲

اگر γ خم سرعت-واحد با پارامتر s باشد، انحنای آن، $\kappa(s)$ ، در نقطه $\gamma(s)$ با $\|\ddot{\gamma}(s)\|$ تعریف می‌شود.

قسمت اول شرط (ii) مطمئناً تأمین می‌شود، برای قسمت دوم، دایره به مرکز (x_0, y_0) با شعاع R را در نظر بگیرید. این دایره دارای بازپیمایش سرعت-واحد

$$\gamma(s) = \left(x_0 + R \cos \frac{s}{R}, y_0 + R \sin \frac{s}{R} \right)$$

است. لذا داریم

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right) \\ \therefore \|\dot{\gamma}(s)\| &= \sqrt{\left(-\sin \frac{s}{R} \right)^2 + \left(\cos \frac{s}{R} \right)^2} = 1 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد γ در حقیقت سرعت-واحد است، و بنابراین

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(s) &= \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right) \\ \therefore \|\ddot{\gamma}(s)\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R} \right)^2 + \left(-\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right)^2} = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

لذا انحنای دایره برابر عکس شعاع آن می‌باشد.

برای شرط (i)، نتیجه ۱.۱ را بیاد آورید که بیان می‌کند، اگر $\gamma(s)$ یک خم سرعت-واحد باشد، تنها بازپیمایش‌های سرعت-واحد γ به صورت $\gamma(u)$ است که در آن

$$u = \pm s + c$$

و c یک مقدار ثابت است. بنابراین با قاعدهٔ زنجیری داریم،

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{d\gamma}{du} \frac{du}{ds} = \pm \frac{d\gamma}{du} \\ \therefore \frac{d^2\gamma}{ds^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{d\gamma}{ds} \right) \frac{du}{ds} = \pm \frac{d}{du} \left(\pm \frac{d\gamma}{du} \right) = \frac{d^2\gamma}{du^2} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد انحنای خم حاصل از پارامتر سرعت-واحد s با انحنای خم حاصل از پارامتر سرعت-واحد u برابر است.

اما اگر $\gamma(t)$ داده شده سرعت-واحد نباشد چه؟ اگر γ عادی باشد (تعریف ۶.۱ را ببینید)، آنگاه با توجه به گزاره ۵.۱، γ دارای بازپیمایش سرعت-واحد $\tilde{\gamma}$ است. انحنای γ را انحنای خم سرعت-واحد $\tilde{\gamma}$ تعریف می‌کنیم. اما چون همیشه بازپیمایش سرعت - واحد به صراحت مقدور نیست (مثال ۷.۱ را ببینید) برای تعریف انحنای به فرمولی که فقط بر حسب γ و t باشد نیاز داریم.

گزاره ۱.۲

فرض کنید $\gamma(t)$ یک خم عادی در \mathbf{R}^3 باشد. آنگاه انحنای آن برابر است با

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \quad (۱)$$

که در آن \times ضرب برداری و نقطه، $\frac{d}{dt}$ را نشان می‌دهد.

البته، چون خم \mathbf{R}^2 را می‌توان به‌عنوان خمی در \mathbf{R}^3 که مختص سوم آن برابر صفر است در نظر گرفت، معادله (۱) می‌تواند برای محاسبه انحنای خم‌های مسطح نیز به‌کار گرفته شود.

اثبات ۱.۲

فرض کنید $\tilde{\gamma}$ (با پارامتر s) بازپیمایش سرعت-واحد γ باشد $\frac{d}{ds}$ را با علامت (') مشخص کنید. آنگاه، با قاعده زنجیری داریم.

$$\tilde{\gamma}' \frac{ds}{dt} = \dot{\gamma}$$

$$\kappa = \|\tilde{\gamma}''\| = \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\gamma}}{ds/dt} \right) \right\| = \left\| \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}}{ds/dt} \right)}{ds/dt} \right\| = \left\| \frac{\ddot{\gamma} \frac{ds}{dt} - \dot{\gamma} \frac{d^2s}{dt^2}}{(ds/dt)^2} \right\| \quad (۲)$$

اکنون

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 = \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}$$

بر حسب t مشتق بگیرید

$$\frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma}$$

اگر از این رابطه و معادله (۲) استفاده کنیم، داریم

$$\kappa = \left\| \frac{\ddot{\gamma} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \dot{\gamma} \frac{d^2s}{dt^2} \frac{ds}{dt}}{\left(ds/dt\right)^3} \right\| = \frac{\|\ddot{\gamma}(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

با به‌کارگیری ضرب سه تایی بردارها

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

(که در آن $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$) بدست می‌آوریم.

$$\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}) = \ddot{\gamma}(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})$$

بعلاوه، $\dot{\gamma}$ و $\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}$ بردارهای متعامند، بنابراین:

$$\|\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma})\| = \|\dot{\gamma}\| \|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \frac{\|\ddot{\gamma}(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma})\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} &= \frac{\|\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma})\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \\ &= \frac{\|\dot{\gamma}\| \|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \\ &= \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^2} \end{aligned}$$

□

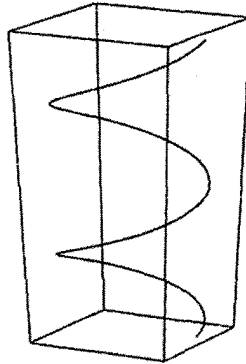
اگر γ یک خم غیر عادی باشد، انحناى آن، در حالت کلی، تعریف نمی‌شود. اما فرمول (۱) نشان می‌دهد که انحنا برای تمام نقاط عادی یک خم (جایی که $\dot{\gamma}$ غیر صفر است) تعریف می‌شود.

مثال ۱.۲

یک مارپیچ دایره‌گون که محورش محور x ها است خمی به صورت

$$\gamma(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta), \quad -\infty < \theta < \infty$$

می‌باشد که در آن a, b مقادیر ثابت هستند.



اگر (x, y, z) یک نقطه روی (تصویر) مارپیچ باشد، آنگاه به ازای θ ای

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = b\theta$$

در این صورت $x^2 + y^2 = a^2$ نشان می‌دهد که مارپیچ روی استوانه‌ای که محورش، محور z -ها و شعاع آن $|a|$ است قرار دارد عدد مثبت $|a|$ شعاع مارپیچ خوانده می‌شود. زمانی که θ به اندازه π زیاد می‌شود، نقطه $(a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta)$ یکبار بدور محور z -ها دوران یافته و به اندازه $2\pi b$ روی محور z -ها بالا می‌رود عدد مثبت $|b|$ گام 2π مارپیچ خوانده می‌شود (قدر مطلق می‌گیریم زیرا a و b را مثبت فرض نکرده‌ایم).

انحنای مارپیچ را با استفاده از فرمول گزاره ۱.۲ محاسبه می‌کنیم نماد $d/d\theta$ را با نقطه نشان دهید، در این صورت داریم.

$$\dot{\gamma}(\theta) = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b)$$

$$\therefore \|\dot{\gamma}(\theta)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

که نشان می‌دهد $\dot{\gamma}(\theta)$ هرگز صفر نمی‌شود، پس γ عادی است (مگر $a = b = 0$ که در این صورت تصویر مارپیچ یک نقطه است). بنابراین، با استفاده از فرمول گزاره ۱.۲ داریم

$$\ddot{\gamma} = (-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0)$$

$$\therefore \ddot{\gamma} \times \dot{\gamma} = (-ab \sin \theta, ab \cos \theta, -a^2)$$

$$\therefore \kappa = \frac{\|(-ab \sin \theta, ab \cos \theta, -a^2)\|}{\|(-a \sin \theta, a \cos \theta, b)\|^2} = \frac{(a^2 b^2 + a^4)^{1/2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{|a|}{a^2 + b^2} \quad (3)$$

لذا انحنای مارپیچ ثابت است.

بباید بعضی از حالت‌های حدی را امتحان کنیم تا ببینیم آیا این نتیجه با آنچه که قبلاً بدست آورده‌ایم یکسان است. ابتدا فرض کنید $b = 0$ (اما $a \neq 0$). در این صورت مارپیچ یک دایره

در صفحه xy با شعاع $|a|$ است، لذا با محاسباتی که بعد از تعریف ۱.۱ آمده، انحنای آن $|a|^{-1}$ است. از طرف دیگر، از فرمول (۳) انحنای به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{|a|}{a^2 + 0^2} = \frac{|a|}{a^2} = \frac{|a|}{|a|^2} = \frac{1}{|a|}$$

بعد فرض کنید که $a = 0$ (اما $b \neq 0$). در این صورت تصویر ماریچ دقیقاً محور yz ها یعنی یک خط مستقیم است، بنابراین انحنای آن برابر صفر است. و از معادله (۳) نیز وقتی $a = 0$ است، صفر نتیجه می‌شود.

تمرین‌ها

۱.۲ انحنای خم‌های زیر را بدست آورید:

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad (i)$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{\pi}{8} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{8} \cos t \right) \quad (ii)$$

$$\gamma(t) = (t, \cosh t) \quad (iii)$$

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad (iv)$$

در مورد ستاره‌گون (ii) نشان دهید وقتی به یکی از نقاط $(0, \pm 1)$ ، $(\pm 1, 0)$ نزدیک شویم، انحنای آن به ∞ میل می‌کند. با تصویر ارائه شده در تمرین ۵.۱ مقایسه کنید.

۲.۲ نشان دهید اگر برای خم $\gamma(t)$ ، انحنای $\kappa(t)$ همه جا مثبت باشد، آنگاه $\gamma(t)$ یک تابع هموار از t است. با ارائه مثالی نشان دهید بدون فرض $\kappa > 0$ حکم درست نیست.

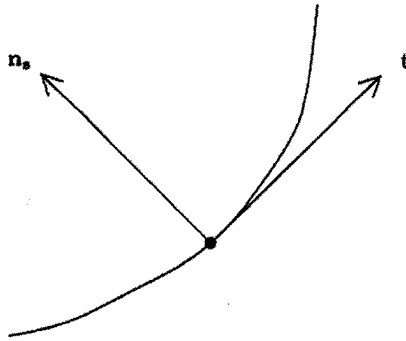
۲.۲ خم‌های مسطح

در تعریف انحنای برای خم‌های مسطح می‌توان ظرافت بیشتری بکار برد و یک تعبیر هندسی زیبایی از آن ارائه داد.

فرض کنید $\gamma(s)$ خم سرعت-واحد در \mathbf{R}^3 باشد. نماد $\frac{d}{ds}$ را با نقطه نشان دهید. فرض کنیم

$$t = \dot{\gamma}$$

بردار مماس γ باشد: توجه کنید که t بردار واحد است. دو بردار واحد عمود بر t موجود است، یکی از آن‌ها را که به وسیله دوران در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه $\frac{\pi}{2}$ حاصل می‌شود، برای تعریف n_s انتخاب می‌کنیم و آن را بردار قائم واحد علامت‌دار γ می‌نامیم.



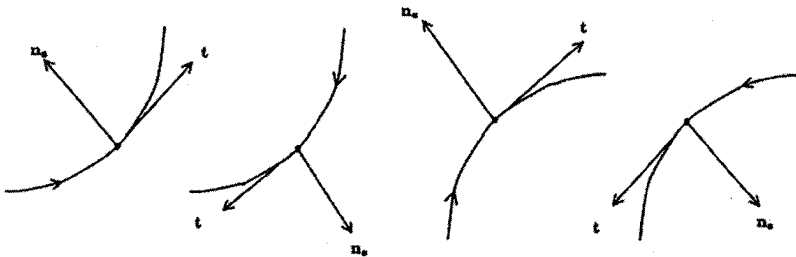
طبق گزاره ۲.۱، $\dot{t} = \ddot{\gamma}$ بر t عمود است و بنابراین موازی n_s است. لذا عدد κ_s موجود است به طوری که

$$\ddot{\gamma} = \kappa_s n_s$$

عدد κ_s را انحنای علامت دار می نامیم. (این عدد می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد) چون $\|n_s\| = 1$ ، لذا داریم.

$$\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \|\kappa_s n_s\| = |\kappa_s| \quad (۴)$$

بنابراین انحنای κ در قدرمطلق همان انحنای علامت دار است. شکل های زیر نشان می دهد که جهت و انحنای علامت دار چگونه بدست می آید. (در هر حالت، جهت روی خم، جهت افزایش را نشان می دهد.)



انحنای علامت دار، تعبیر هندسی ساده ای دارد:

گزاره ۲.۲

فرض کنیم $\gamma(s)$ خم مسطح سرعت - واحد و $\varphi(s)$ اندازه زوایای باشد که از دوران یک بردار واحد ثابت، در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت، برای انطباق با بردار مماس واحد t واقع

بر خم γ ، حاصل می‌شود. در این صورت

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}$$

توجه کنید که حتی اگر زاویه φ با اضافه کردن مضارب 2π بدست آید، مشتق $\frac{d\varphi}{ds}$ خوش تعریف است.

بنابراین، آنحنای علامت دار سرعت دوران بردار مماس بر خم است. همان طور که نمودارهای بالا نشان می‌دهد، انحنای علامت دار مثبت یا منفی است، بر حسب اینکه وقتی در جهت افزایش s روی خم حرکت می‌کنیم t در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت یا هم جهت با حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند.

اثبات ۲.۲

فرض کنیم a بردار واحد ثابت و b بردار واحد حاصل از دوران در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه $\frac{\pi}{4}$ باشد. در این صورت

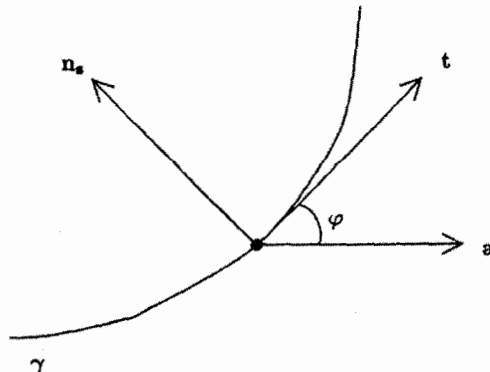
$$t = a \cos \varphi + b \sin \varphi$$

$$\therefore \dot{t} = (-a \sin \varphi + b \cos \varphi) \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\therefore \dot{t} \cdot a = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\therefore \kappa_s (n_s \cdot a) = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \quad (t = \kappa_s n_s \text{ زیرا}) \quad (5)$$

اما زاویه بین بردارهای a و n_s $\varphi + \frac{\pi}{4}$ است زیرا t باید در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه $\frac{\pi}{4}$ دوران کند تا بر n_s منطبق شود (شکل زیر را ببینید)



بنابراین

$$\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{a} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi$$

□ با قرار دادن آن در معادله (۵) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

نتیجه بعدی نشان می‌دهد که با دانستن انحنای علامت‌دار در هر نقطه، می‌توان خم مسطح سرعت-واحد را به‌طور «اساسی» تعیین نمود. معنی «اساسی» در اینجا «صرف‌نظر از حرکت صلب در \mathbf{R}^2 » است. یادآوری می‌کنیم که حرکت صلب در \mathbf{R}^2 نگاشت $M: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ از نوع

$$M = T_{\mathbf{a}} \circ R_{\theta}$$

است که در آن R_{θ} دوران در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه θ ، حول مبدأ است

$$R_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

و $T_{\mathbf{a}}$ ، انتقال به‌وسیله بردار \mathbf{a} است،

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{a}$$

برای هر (x, y) و هر \mathbf{v} در \mathbf{R}^2 .

قضیه ۱.۲

فرض کنید $k: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار باشد، در این صورت خم $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^2$ موجود است که انحنای علامت‌دار آن k است.

بعلاوه اگر $\tilde{\gamma}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^2$ خم سرعت-واحد دیگری با انحنای علامت‌دار k باشد، حرکت صلبی در \mathbf{R}^2 موجود است به‌طوری‌که برای هر $s \in (\alpha, \beta)$

$$\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s))$$

اثبات ۱.۲

ابتدا $s_0 \in (\alpha, \beta)$ را ثابت در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s k(u) du$$

(به گزاره ۲.۲ مراجعه کنید)

$$\gamma(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right)$$

در این صورت بردار مماس بر γ ، بردار

$$\dot{\gamma}(s) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$$

می‌باشد که برداری واحد است و با محور x زاویه $\varphi(s)$ می‌سازد، بنابراین γ ، خم سرعت - واحد است و طبق گزاره ۲.۲، انحنای علامت‌دار آن برابر است با

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \int_{s_0}^s k(u) du = k(s)$$

برای اثبات قسمت دوم فرض کنید $\tilde{\varphi}(s)$ زاویه بین محور x و بردار مماس واحد $\tilde{\gamma}$ واقع بر $\tilde{\gamma}$ باشد. در این صورت

$$\dot{\tilde{\gamma}} = (\cos \tilde{\varphi}(s), \sin \tilde{\varphi}(s))$$

$$\therefore \tilde{\gamma}(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \tilde{\varphi}(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \tilde{\varphi}(t) dt \right) + \tilde{\gamma}(s_0) \quad (۶)$$

طبق گزاره ۲.۲

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{ds} = k(s)$$

$$\therefore \tilde{\varphi}(s) = \int_{s_0}^s k(u) du + \tilde{\varphi}(s_0)$$

با فرض a برابر با بردار ثابت $\tilde{\gamma}(s_0)$ و θ برابر با عدد ثابت $\tilde{\varphi}(s_0)$ و جای‌گذاری عبارت اخیر در معادله (۶)، داریم.

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(s) &= T_a \left(\int_{s_0}^s \cos(\varphi(t) + \theta) dt, \int_{s_0}^s \sin(\varphi(t) + \theta) dt \right) \\ &= T_a \left(\cos \theta \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt - \sin \theta \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \sin \theta \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt + \cos \theta \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right) \\ &= T_a R_\theta \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right) \\ &= T_a R_\theta(\gamma(s)) \end{aligned}$$

□

مثال ۲.۲

هر خم مسطح عادی که انحناى علامت‌دار آن ثابت و مثبت باشد بخشی از دایره است. اگر فرض کنیم κ (ثابت) انحناى خم γ و κ_s ، انحناى علامت‌دار آن باشد در این صورت بر اساس معادله (۴)

$$\kappa_s = \pm \kappa$$

لذا ممکن است در بعضی نقاط خم $\kappa_s = \kappa$ و در بعضی دیگر $\kappa_s = -\kappa$ ، اما در حقیقت این اتفاق نمی‌افتد زیرا κ_s تابعی پیوسته از s است (به تمرین ۴.۲ رجوع شود) بنابراین طبق قضیه مقدار میانی اگر κ_s هر دو مقدار κ و $-\kappa$ را اتخاذ کند باید همه مقادیر بینی را نیز اتخاذ کند. لذا برای نقاط واقع بر خم $\kappa_s = \kappa$ یا $\kappa_s = -\kappa$. لذا κ_s ثابت است.

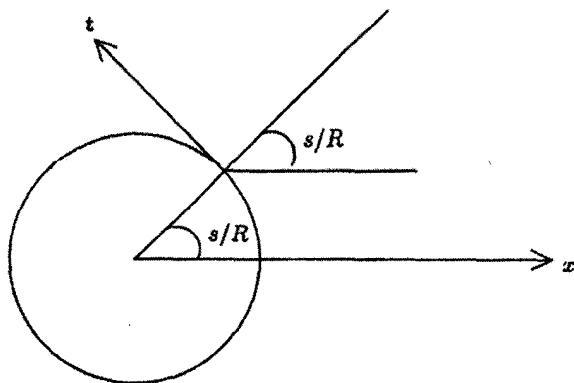
اکنون باید نشان دهیم، برای هر κ_s ، می‌توان دایره پارامتری شده‌ای که انحناى علامت‌دار آن κ_s است پیدا کرد. در این صورت قضیه می‌گوید هر خمی که انحناى علامت‌دار آن κ_s است. به‌وسیله یک حرکت صلب از این دایره به‌دست می‌آید. چون دوران و انتقال به‌وضوح دایره را به دایره تبدیل می‌کند، لذا هر خمی که انحناى علامت‌دار آن مقدار ثابتی است، بخشی از دایره است. پرمایش سرعت - واحد دایره به مرکز مبدأ و شعاع R به صورت:

$$\gamma(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right)$$

است. بردار مماس آن

$$\mathbf{t} = \dot{\gamma}(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right)$$

بردار واحدی است که با قسمت مثبت محور x زاویه $\frac{s}{R} + \frac{\pi}{4}$ می‌سازد.



بنابراین، انحنای علامت‌دار γ

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{s}{R} \right) = \frac{1}{R}$$

است. لذا اگر $\kappa_s > 0$ ، دایره‌ی به شعاع $\frac{1}{\kappa_s}$ ، دارای انحنای علامت‌دار κ_s است.
اگر $\kappa_s < 0$ ، به راحتی می‌توان دید که خم

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, -R \sin \frac{s}{R} \right)$$

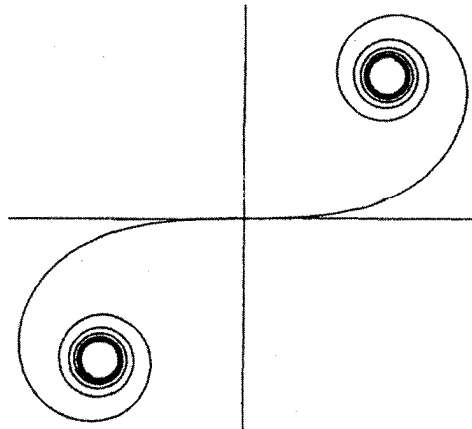
(که فقط پرمایش دیگری از دایره با مرکزیت مبدأ و شعاع R است) دارای انحنای علامت‌دار $-\frac{1}{R}$ است. لذا اگر $R = -\frac{1}{\kappa_s}$ ، مجدداً دایره‌ی ای با انحنای علامت‌دار κ_s خواهیم داشت.

مثال ۳.۲

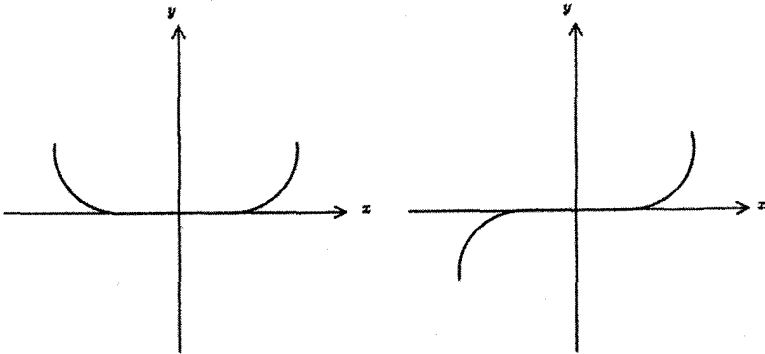
قضیه ۱.۲ نشان می‌دهد که می‌توانیم خم مسطحی را پیدا کنیم که هر تابع هموار داده شده، انحنای علامت‌دار آن است. اما انحنای ساده می‌توانند به خم‌های پیچیده‌ای منجر شوند. برای مثال انحنای علامت‌دار $\kappa_s(s) = s$ را در نظر بگیرید. بر اساس اثبات قضیه ۱.۲، به‌ازای $s_0 = 0$ داریم

$$\varphi(s) = \int_0^s u \, du = \frac{s^2}{2}$$

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos \left(\frac{t^2}{2} \right) dt, \int_0^s \sin \left(\frac{t^2}{2} \right) dt \right)$$



این انتگرال‌ها را نمی‌توان بر حسب توابع «مقدماتی» محاسبه کرد (این‌ها در قضیه انکسار نور مطرح هستند و انتگرالهای فرسnel^۱ نامیده می‌شوند. خم γ را ماریچ کرنو^۲ می‌نامند اگر چه این خم‌ها اولین بار به وسیله اویلر^۳ مطرح شد. شکل γ در بالا با محاسبه انتگرال‌ها به صورت عددی بدست آمده است.



طبیعی است که سؤال کنیم آیا قضیه ۱.۲ با جایگزینی «انحنا» با «انحنای علامت‌دار» برقرار است. اولین قسمت برقرار است اگر (و فقط اگر) فرض کنیم $k \geq 0$ ، زیرا در این صورت γ را می‌توان با انحنا علامت‌دار k اختیار کرد. لذا دارای انحنا k نیز خواهد بود. اما دومین قسمت قضیه ۱.۲، دیگر برقرار نیست. زیرا می‌توانیم خم (هموار) γ را طوری بگیریم که (به‌طور مثال) به ازای $1 \leq x \leq -1$ بر محور x ‌ها منطبق و در غیر این صورت بالای محور x ‌ها باشد. (برای خواننده‌ای که بخواهد چنین خمی را دقیقاً بنویسد پاسخ تمرین ۱۹.۱ مفید خواهد بود). حالا انعکاس قسمت $x \leq 0$ خم را نسبت به محور x ‌ها به‌دست می‌آوریم. خم جدید همان انحنای γ را دارد (تمرین ۱۲.۲ را ببینید) اما واضح است که با استفاده از حرکت صلب روی γ نمی‌تواند حاصل شود. (برای بیانی از قضیه ۱.۲ که با جایگزینی انحناء به‌جای انحناء علامت‌دار همچنان معتبر است تمرین ۱۳.۲ را ببینید.)

تمرین‌ها

۳.۲ نشان دهید اگر γ خم مسطح سرعت-واحد باشد، آنگاه

$$\dot{n}_s = -\kappa_s t$$

۴.۲ نشان دهید انحنای علامت‌دار خم مسطح عادی $\gamma(t)$ یک تابع هموار از t است. (با

تمرین ۲.۲ مقایسه کنید)

۵.۲ فرض کنید $\gamma(t) = (e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t)$ ، به ازای $-\infty < t < \infty$ و k یک عدد ثابت غیر صفر است (مارپیچ لگاریتمی - مثال ۴.۱ را ببینید). نشان دهید پارامتر سرعت واحد منحصر به فرد s روی γ وجود دارد به طوری که برای هر t ، $s > 0$ و اگر $s < 0$ ، آنگاه $s \rightarrow 0$ وقتی که $t \rightarrow \mp\infty$ را به صورت تابعی از t بیان کنید و نشان دهید انحناى علامت دار γ ، $1/k_s$ است. بر عکس نشان دهید هر خم که انحنا علامت دار آن تابعی از طول-قوس s باشد به ازای عدد ثابت غیر صفر k ، $1/k_s$ است.

۶.۲ خم مسطح سرعت-واحد γ دارای این خاصیت است که برای هر s ، بردار مماس آن $\mathbf{t}(s)$ با $\gamma(s)$ زاویه ثابت θ می‌سازد، نشان دهید:

(i) اگر $\theta = 0$ ، آنگاه γ قسمتی از یک خط مستقیم است (بنویسید $\gamma = \mathbf{r}t$ و نتیجه بگیرید $\kappa_s = 0$!)

(ii) اگر $\theta = \pi/2$ ، آنگاه γ یک دایره است (بنویسید $\gamma = \mathbf{r}n_s$)

(iii) اگر $0 < \theta < \pi/2$ ، آنگاه γ یک مارپیچ لگاریتمی است (نشان دهید $\kappa_s = -1/s \cot \theta$).

۷.۲ فرض کنید $\gamma(t)$ یک خم مسطح عادی و λ یک عدد ثابت است. خم موازی γ که با γ^λ نشان می‌دهیم به صورت

$$\gamma^\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{n}_s(t)$$

تعریف می‌شود. نشان دهید اگر برای هر t ، $|\lambda \kappa_s(t)| < 1$ ، آنگاه γ^λ یک خم عادی است و انحناى علامت دار آن $\frac{\kappa_s}{(1 - \lambda \kappa_s)}$ می‌باشد.

۸.۲ فرض کنید γ یک خم مسطح سرعت-واحد با انحناى غیر صفر باشد. مرکز انحناى γ در نقطه $\gamma(s)$ به صورت

$$\epsilon(t) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_s(s)} \mathbf{n}_s(s)$$

تعریف می‌شود. ثابت کنید دایره‌ی با مرکز $\epsilon(s)$ و شعاع $|\mathbf{n}_s(s)/\kappa_s(s)|$ در نقطه $\gamma(s)$ بر γ مماس بوده و انحناى آن در آن نقطه همان انحناى γ است. این دایره، دایره بوسان γ در نقطه $\gamma(s)$ خوانده می‌شود. (شکل آن را بکشید.)

۹.۲ با علامت تمرین ۸.۲، $\epsilon(s)$ را به عنوان پرمایش خم جدیدی که گسترده γ خوانده می‌شود در نظر بگیرید (اگر γ خم مسطح عادی باشد، گسترده آن به عنوان یک بازپرمایش

سرعت-واحد از γ تعریف می‌شود). فرض کنید که برای هر s ، $\kappa_s(s) \neq 0$ مثلاً برای هر s ، $\kappa_s > 0$ با نقطه نمایش داده شده است، در صورت لزوم، s را به $-s$ تبدیل کنید). نشان دهید که طول-قوس ϵ برابر است $\frac{1}{\kappa_s(s)} - u_0$ ، که در آن u_0 یک ثابت است. انحنای علامت‌دار ϵ را محاسبه کنید. نشان دهید گسترده سیکلوئید

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad 0 < t < 2\pi, \quad a > 0$$

به صورت

$$\epsilon(t) = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$$

بوده که بعد از بازپیمایش مناسب با یک انتقال از γ در صفحه بدست می‌آید (تمرین ۷.۱ را ببینید).

۱۰.۲ یک ریسمان با طول l در نقطه $s = 0$ به خم مسطح سرعت-واحد $\gamma(s)$ متصل شده است. نشان دهید وقتی که ریسمان دور خم می‌گردد، تا محکم شود، نقطه انتهایی آن روی خم

$$\iota(s) = \gamma(s) + (l - s)\dot{\gamma}(s)$$

می‌گردد که در آن $0 < s < l$ و $\frac{d}{ds}$ با نقطه مشخص شده است. این خم، گسترده γ خوانده می‌شود (اگر γ خم مسطح عادی باشد، گسترده آن را یک بازپیمایش سرعت-واحد از γ تعریف می‌کنیم). فرض کنید که انحنای علامت‌دار κ_s از γ مخالف صفر است. مثلاً فرض کنید برای هر s ، $\kappa_s(s) > 0$. نشان دهید انحنای علامت‌دار ι برابر $1/(l - s)$ است.

۱۱.۲ فرض کنید γ یک خم مسطح عادی باشد. نشان دهید

(i) گسترده گسترده γ خمی موازی γ است.

(ii) گسترده گسترده γ ، خود γ است.

(این عبارات با این حقیقت قابل مقایسه است که انتگرال مشتق تابع هموار f برابر f به اضافه یک مقدار ثابت است اگر چه مشتق انتگرال f ، f است.)

۱۲.۲ نشان دهید انعکاس یک خم مسطح نسبت به یک خط مستقیم، علامت انحنای علامت‌دار آن را تغییر می‌دهد.

۱۳.۲ نشان دهید اگر دو خم مسطح $\gamma(t)$ و $\tilde{\gamma}(t)$ برای هر t دارای انحنای غیر صفر همسان باشند، آنگاه $\tilde{\gamma}$ می‌تواند با یک حرکت صلب یا با انعکاس نسبت به خط مستقیمی که از یک حرکت صلب حاصل شده است، بدست آید.

۳.۲ خم‌های فضایی

انگیزه اصلی ما در این کتاب خم‌ها (و رویه‌ها) در \mathbf{R}^3 هستند، یعنی خم‌های فضایی. در حالی که یک خم مسطح اساساً با انحنایش تعیین می‌شود، (قضیه ۱.۲ را ببینید) ولی خم‌های فضایی اینگونه نیستند. به عنوان مثال یک دایره با شعاع ۱ در صفحه xy و یک مارپیچ دایره‌گون با $a = b = 1/2$ (مثال ۱.۲ را ببینید) هر دو در هر نقطه دارای انحنای ۱ می‌باشند، اما روشن است که تبدیل یک خم به دیگری با هر ترکیبی از دوران‌ها و انتقال‌ها غیرممکن است. می‌خواهیم در مورد خم‌های فضایی، نوع دیگری از انحنا که تاب نام دارد را تعریف کنیم و ثابت کنیم که انحنا و تاب یک خم با همدیگر، صرف‌نظر از یک حرکت صلب، خم را تعیین می‌کند (قضیه ۳.۲).

فرض می‌کنیم $\gamma(s)$ یک خم سرعت-واحد در \mathbf{R}^3 باشد و $\dot{\gamma} = t$ بردار مماس واحد آن باشد. اگر انحنای $\kappa(s)$ غیر صفر باشد، بردار قائم اصلی γ را در نقطه $\gamma(s)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

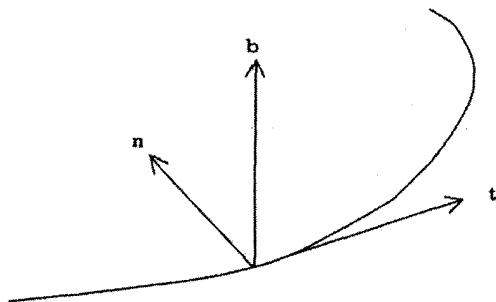
$$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \dot{t}(s) \quad (7)$$

چون $\kappa = \|\dot{t}\|$ ، لذا n یک بردار واحد است. به علاوه طبق گزاره ۲.۱، $t, \dot{t} = 0$ ، لذا t و n به طور طبیعی بردارهای واحد عمودند. از آنجا نتیجه می‌شود

$$b = t \times n \quad (8)$$

که یک بردار واحد و عمود، بر هر دو بردار t و n است. بردار $b(s)$ بردار قائم دوم γ در نقطه $\gamma(s)$ نامیده می‌شود. لذا $\{t, n, b\}$ یک پایه متعامد واحد در \mathbf{R}^3 در جهت مثبت است یعنی

$$b = t \times n, \quad n = b \times t, \quad t = n \times b$$



چون $\mathbf{b}(s)$ به‌ازای هر s بردار واحد است لذا $\dot{\mathbf{b}}$ عمود بر \mathbf{b} است. اکنون با استفاده از «قانون ضرب» برای مشتق ضرب برداری توابع برداری \mathbf{u} و \mathbf{v} با پارامتر s

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{ds}$$

و با به‌کاربردن این رابطه برای $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ داریم:

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} \quad (۹)$$

چون با تعریف (۷) از \mathbf{n}

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

معادله (۹) نشان می‌دهد $\dot{\mathbf{b}}$ بر بردار \mathbf{t} عمود است. چون \mathbf{b} بر \mathbf{t} و \mathbf{b} عمود است، پس باید موازی \mathbf{n} باشد، بنابراین

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n} \quad (۱۰)$$

به‌ازای اسکالر τ که تاب γ خوانده می‌شود (علامت منفی یک قرار داد عرفی است). توجه کنید که تاب فقط وقتی تعریف می‌شود که انحنا مخالف صفر باشد.

البته تاب خم عادی دلخواه γ را تاب یک بازپرمایش سرعت-واحد γ تعریف می‌کنیم. مشابه حالت انحنا، برای دیدن درستی این تعریف، می‌بایستی نشان دهیم اگر تغییری در پارامتر سرعت-واحد γ از

$$u = \pm s + c$$

بدهیم که در آن، c ثابت است آنگاه τ تغییر ناپذیر باقی می‌ماند. اما اثر این تغییر پارامتر، در بردارهایی که در بالا معرفی شده‌اند به صورت زیر است

$$\mathbf{t} \mapsto \pm \mathbf{t}, \quad \dot{\mathbf{t}} \mapsto \dot{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{n} \mapsto \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} \mapsto \pm \mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{b}} \mapsto \dot{\mathbf{b}}$$

از معادله (۸) نتیجه می‌شود که $\tau \mapsto \tau$ ، همان که می‌خواستیم. نظیر آن چه که در گزاره ۱.۲ برای انحنا انجام دادیم، این امکان وجود دارد که فرمولی برای تاب فضایی γ تنها بر حسب γ ارائه دهیم، بدون اینکه نیاز به بازپرمایش سرعت-واحد داشته باشیم:

گزاره ۳.۲

فرض کنید $\gamma(t)$ یک خم عادی در \mathbf{R}^3 با انحنا مخالف صفر در هر نقطه باشد. در این صورت با قرار دادن نقطه به جای $\frac{d}{dt}$ ، تاب آن از رابطه

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} \quad (۱۱)$$

بدست می‌آید.

دقت کنید این فرمول نشان می‌دهد که $\tau(t)$ در همه نقاط $\gamma(t)$ که در آن انحنا $\kappa(t)$ مخالف صفر است تعریف شده است، زیرا بنا بر گزاره ۱.۲، با این شرط، مخرج در سمت راست، مخالف صفر است.

اثبات ۳.۲

می‌توانیم معادله (۱۱) را با تقلید از روش اثبات گزاره ۱.۲ بدست آوریم. اما اگر به طریق زیر عمل کنیم ساده‌تر و روشن‌تر است گرچه اشکال این روش این است که فرمول τ در معادله (۱۱) بایستی از پیش دانسته شود. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که γ سرعت - واحد است. با به‌کارگیری معادلات (۷) و (۱۰)،

$$\tau = -\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{b}} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n})' = -\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}) = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}})$$

$$\text{حالا } \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{\kappa} \dot{\gamma} \text{ بنابراین}$$

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{1}{\kappa} \ddot{\gamma} \cdot \left(\dot{\gamma} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \dot{\gamma} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\kappa} \ddot{\gamma} \cdot \left(\dot{\gamma} \times \left(\frac{1}{\kappa} \ddot{\gamma} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} \dot{\gamma} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}), \end{aligned}$$

زیرا $\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) = 0$ و $\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) = -\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})$ ، این با معادله (۱۱) مطابقت دارد، زیرا γ سرعت - واحد است و $\dot{\gamma}$ و $\ddot{\gamma}$ عمود بر هم هستند، بنابراین

$$\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \|\dot{\gamma}\| \|\ddot{\gamma}\| = \|\ddot{\gamma}\| = \kappa.$$

در حالت کلی، فرض کنید s طول - قوس در امتداد γ باشد. $\frac{d}{ds}$ را با (') نشان دهید.

در این صورت

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{ds}{dt} \gamma' \\ \ddot{\gamma} &= \left(\frac{ds}{dt} \right)' \gamma'' + \frac{d^2 s}{dt^2} \gamma', \\ \ddot{\gamma} &= \left(\frac{ds}{dt} \right)'' \gamma''' + 3 \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} \gamma'' + \frac{d^3 s}{dt^3} \gamma'. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \gamma' \times \gamma'',$$

$$\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \gamma''' \cdot (\gamma' \times \gamma'')$$

و از آنجا

$$\frac{\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} = \frac{\gamma''' \cdot (\gamma' \times \gamma'')}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}.$$

□

مثال ۴.۲

تاب مارپیچ دایره‌گون

$$\gamma(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta)$$

را که در مثال ۱.۲ بررسی شده، محاسبه می‌کنیم.

داریم:

$$\dot{\gamma}(\theta) = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b)$$

$$\ddot{\gamma}(\theta) = (-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0)$$

$$\ddot{\gamma}(\theta) = (a \sin \theta, -a \cos \theta, 0)$$

بنابراین

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (ab \sin \theta, -ab \cos \theta, a^2)$$

$$\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2 = a^2(a^2 + b^2)$$

$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} = a^2 b$$

و تاب برابر است با

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

توجه کنید که تاب مارپیچ دایره‌گون در مثال ۴.۲ به‌ازای $b = 0$ ، صفر می‌شود، که در این حالت مارپیچ فقط یک دایره در صفحه xy است. این مطلب تعبیر هندسی نهفته در تاب را نمایان می‌سازد.

گزاره ۴.۲

فرض می‌کنیم γ یک خم عادی در \mathbb{R}^3 با انحنای همه جا مخالف صفر باشد (لذا تاب γ تعریف شده است). در این صورت تصویر γ در صفحه واقع است اگر و فقط اگر τ در هر نقطه از خم صفر باشد.

اثبات ۴.۲

فرض می‌کنیم γ سرعت - واحد است (زیرا با بازپرمایش γ می‌توان چنین خمی به دست آورد و بازپرمایش تاب و مسطح بودن یا نبودن خم را تغییر نمی‌دهد) γ را با پارامتر s ، و $\frac{d}{ds}$ را طبق معمول با نقطه نمایش می‌دهیم.

ابتدا فرض کنیم تصویر γ در صفحه $d = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$ که در آن \mathbf{a} بردار ثابت و d عددی ثابت است، واقع شده باشد (\mathbf{r} بردار موقعیت یک نقطه دلخواه در \mathbb{R}^3 است). فرض می‌کنیم بردار \mathbf{a} ، بردار واحد باشد. با مشتق‌گیری از $d = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$ نسبت به s

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (12)$$

$$\therefore \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (\dot{\mathbf{a}} = 0 \text{ زیرا})$$

$$\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} \text{ زیرا})$$

$$\therefore \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (\kappa \neq 0 \text{ زیرا}) \quad (13)$$

معادلات (۱۲) و (۱۳) نشان می‌دهند که \mathbf{t} و \mathbf{n} بر \mathbf{a} عمودند. لذا $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ موازی \mathbf{a} است. چون \mathbf{a} و \mathbf{b} هر دو بردارهای واحد هستند و $\mathbf{b}(s)$ تابعی هموار (و در نتیجه پیوسته) از s است. لذا باید برای هر s ، $\mathbf{b}(s) = \mathbf{a}$ و یا برای هر s ، $\mathbf{b}(s) = -\mathbf{a}$. در هر حالت، بردار ثابتی است. بنابراین $\dot{\mathbf{b}} = 0$ و در نتیجه $\tau = 0$.

بالعکس، فرض کنید همه جا $\tau = 0$ طبق معادله ۱۰، $\dot{\mathbf{b}} = 0$. لذا بردار ثابتی است. بخش اول اثبات نشان می‌دهد که γ باید در صفحه‌ی ثابت $\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = d$ واقع شده باشد.

بنابراین

$$\frac{d}{ds}(\gamma \cdot \mathbf{b}) = \dot{\gamma} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

لذا $\gamma \cdot \mathbf{b}$ (عددی) ثابت است آن را d بنامید. این بدان معناست که γ در صفحه‌ی $\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = d$ قرار دارد. \square

در محاسبات ما خلایی وجود دارد که می‌خواهیم آن را پرکنیم. مثلاً می‌دانیم که برای خم سرعت - واحد، داریم.

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} \quad \text{و} \quad \dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$$

(که به ترتیب تعاریف ما از \mathbf{n} و τ هستند) ولی $\dot{\mathbf{n}}$ را محاسبه نکردیم. این هم مشکل نیست. چون $\{t, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ پایه متعامد راست در \mathbf{R}^3 است،

$$t \times \mathbf{n} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{b} = t, \quad \mathbf{b} \times t = \mathbf{n}$$

لذا

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \times t + \mathbf{b} \times \dot{t} = -\tau \mathbf{n} \times t + \kappa \mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\kappa t + \tau \mathbf{b}.$$

با قرار دادن همه اینها در کنار هم داریم:

قضیه ۲.۲

فرض کنیم γ خم سرعت - واحد در \mathbf{R}^3 ، با انحنای غیر صفر در هر نقطه، باشد در این صورت

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \kappa \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa t + \tau \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned} \quad (14)$$

معادلات (۱۴) را معادله فرنه-سره^۴ (گاهی هم معادلات سره-فرنه) می نامند.

ماتریس

$$\begin{pmatrix} \circ & \kappa & \circ \\ -\kappa & \circ & \tau \\ \circ & -\tau & \circ \end{pmatrix}$$

که $t, \dot{t}, \dot{\mathbf{n}}$ و \mathbf{b} را بر حسب $t, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ بیان می کند یک ماتریس کج-مستقارن است به این مفهوم که با منفی ترانپوخته اش، برابر است. این ماتریس کمک می کند که بتوانیم معادلات را به خاطر بسپاریم. («دلیل» کج-مستقارن بودن را می توانید در تمرین ۲۲.۲ ببینید) گزاره زیر یک کاربرد ساده از معادلات فرنه-سره است.

گزاره ۵.۲

فرض کنید γ خم سرعت-واحد در \mathbf{R}^3 با انحنای ثابت و تاب صفر باشد. در این صورت γ (بخشی از) دایره است.

اثبات ۵.۲

این نتیجه مستقیم مثال ۲.۲ و گزاره ۴.۲ است، اما اثبات زیر یک اثبات ساختاری است و اطلاعات بیشتری به ما می‌دهد مانند اطلاع در مورد مرکز و شعاع دایره و صفحه‌ای که دایره در آن قرار دارد.

براساس اثبات گزاره ۴.۲، بردار قائم دوم \mathbf{b} یک بردار ثابت و γ در صفحه عمود بر بردار \mathbf{b} قرار دارد.

حال

$$\frac{d}{ds}(\gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}) = \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0},$$

زیرا انحنای κ ثابت و لذا براساس معادله فرنه‌سرت

$$\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} = -\kappa\mathbf{t} \quad (\tau = 0 \text{ زیرا})$$

بنابراین بردار $\gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$ یک بردار ثابت است آن را \mathbf{a} بنامید

$$\gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{b} = \mathbf{a}, \quad (15)$$

$$\therefore \|\gamma - \mathbf{a}\| = \left\| -\frac{1}{\kappa}\mathbf{n} \right\| = \frac{1}{\kappa}$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که γ روی کره به مرکز \mathbf{a} ، شعاع $\frac{1}{\kappa}$ واقع است، چون تقاطع صفحه و کره، دایره است، اثبات کامل می‌شود (توجه کنید که صفحه، کره را در دایره عظیمه قطع می‌کند، زیرا \mathbf{n} موازی صفحه است، بنابراین بر اساس معادله (۱۵) مرکز کره یعنی \mathbf{a} در صفحه است) \square

این بخش را با قضیه‌ای مشابه قضیه ۱.۲، برای خم‌های فضایی خاتمه می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که یک حرکت صلب در \mathbf{R}^3 ، از دوران حول مبدا و سپس یک انتقال بدست می‌آید.

قضیه ۳.۲

فرض کنید $\gamma(s)$ و $\tilde{\gamma}(s)$ دو خم سرعت-واحد در \mathbf{R}^3 ، با انحنای κ و تاب یکسان باشند به طوری که به ازای هر s ، $\kappa(s) > 0$. در این صورت حرکت صلب M در \mathbf{R}^3 موجود است به طوری که به ازای هر s

$$\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s))$$

بعلاوه اگر k و t توابعی هموار با $k > 0$ باشند، آنگاه خم سرعت - واحد γ در \mathbf{R}^3 وجود دارد به طوری که انحنای آن k و تاب آن t است.

اثبات ۳.۲

فرض کنید t, n و b به ترتیب بردار مماس، بردار قائم اصلی و بردار قائم دوم برای γ و \tilde{t}, \tilde{n} و \tilde{b} بردارهای مشابه برای $\tilde{\gamma}$ باشند. فرض کنید s مقدار ثابتی از پارامتر s باشد چون $\{t(s_0), n(s_0), b(s_0)\}$ و $\{\tilde{t}(s_0), \tilde{n}(s_0), \tilde{b}(s_0)\}$ هر دو پایه متعامد واحد راست برای \mathbf{R}^3 هستند، دورانی حول مبدأ در \mathbf{R}^3 موجود است به طوری که بردارهای $t(s_0), n(s_0)$ و $b(s_0)$ را به ترتیب به $\tilde{t}(s_0), \tilde{n}(s_0)$ و $\tilde{b}(s_0)$ و منطبق می‌کند. به علاوه انتقالی وجود دارد که $\gamma(s_0)$ را به $\tilde{\gamma}(s_0)$ منتقل می‌کند. (این انتقال تأثیری روی t, n و b ندارد) با استفاده از دوران و سپس انتقال می‌توانیم فرض کنیم

$$\gamma(s_0) = \tilde{\gamma}(s_0), t(s_0) = \tilde{t}(s_0), n(s_0) = \tilde{n}(s_0), b(s_0) = \tilde{b}(s_0) \quad (16)$$

نکته در این است که عبارت زیر را در نظر بگیریم

$$A(s) = \tilde{t} \cdot t + \tilde{n} \cdot n + \tilde{b} \cdot b.$$

با توجه به معادلات (۱۶) داریم $A(s_0) = 3$ از طرف دیگر، چون \tilde{t} و t بردارهای واحد هستند، $\tilde{t} \cdot t \leq 1$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\tilde{t} = t$ ؛ و مشابه این بحث برای $\tilde{n} \cdot n$ و $\tilde{b} \cdot b$ مطرح است لذا $A(s) \leq 3$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\tilde{t} = t$ و $\tilde{n} = n$ و $\tilde{b} = b$. بنابراین اگر بتوانیم ثابت کنیم A همواره ثابت است، آنگاه $\tilde{t} = t$ و در نتیجه $\tilde{\gamma} = \gamma$ و بنابراین $\tilde{\gamma}(s) - \gamma(s)$ مقدار ثابتی است و مجدداً با استفاده از معادلات (۱۶) این بردار ثابت می‌بایستی صفر باشد، لذا $\tilde{\gamma} = \gamma$.

بنابراین اثبات قسمت اول قضیه به اثبات این که A ثابت است تقلیل می‌یابد. اما با استفاده از معادلات سره-فرنه

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{\tilde{t}} \cdot t + \tilde{n} \cdot \dot{n} + \dot{\tilde{b}} \cdot b + \tilde{t} \cdot \dot{t} + \tilde{n} \cdot \dot{n} + \tilde{b} \cdot \dot{b} \\ &= \kappa \tilde{n} \cdot t + (-\kappa \tilde{t} + \tau \tilde{b}) \cdot n + (-\tau \tilde{n}) \cdot b + \tilde{t} \cdot \kappa n \\ &\quad + \tilde{n} \cdot (-\kappa t + \tau b) + b \cdot (-\tau n) \end{aligned}$$

که مساوی صفر است.

برای اثبات بخش دوم قضیه، از قضیه معادلات دیفرانسیل عادی، می‌دانیم که معادلات

$$\dot{\mathbf{T}} = \kappa \mathbf{N}, \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{N}} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -t\mathbf{N} \quad (19)$$

دارای جواب یگانه $\mathbf{T}(s)$ ، $\mathbf{N}(s)$ و $\mathbf{B}(s)$ است، که در آن $\mathbf{T}(s_0)$ ، $\mathbf{N}(s_0)$ و $\mathbf{B}(s_0)$ به ترتیب بردارهای متعامد واحد استاندارد $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ، $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ و $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ می‌باشند. چون ماتریس

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{\mathbf{T}}$ ، $\dot{\mathbf{N}}$ و $\dot{\mathbf{B}}$ را بر حسب \mathbf{T} ، \mathbf{N} و \mathbf{B} بیان می‌کند یک ماتریس کج-مستقارن است، لذا بردارهای \mathbf{T} ، \mathbf{N} و \mathbf{B} ، به ازای همه مقادیر s ، متعامد واحد هستند (تمرین ۲۲.۲ را ببینید). حال تعریف کنید

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{T}(u) du$$

در این صورت $\mathbf{T}' = \gamma$ و چون \mathbf{T} بردار واحد است، γ بردار سرعت - واحد می‌باشد. طبق معادله (۱۷)، $\dot{\mathbf{T}} = \kappa\mathbf{N}$ ، و چون \mathbf{N} بردار واحد است، κ انحنای γ و \mathbf{N} بردار قائم اصلی آن است. چون \mathbf{B} بردار واحد عمود بر \mathbf{T} و \mathbf{N} است، لذا $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{T} \times \mathbf{N}$ که در آن λ تابع همواری از s است که به ازای تمام مقادیر s ، باید ± 1 شود. از $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ نتیجه می‌شود که $\lambda(s_0) = 1$ بنابراین به ازای همه مقادیر s ، $\lambda(s) = 1$. بنابراین \mathbf{B} بردار قائم دوم γ و در نتیجه بنا به معادله (۱۹)، t تاب آن است. \square

تمرین‌ها

۱۴.۲ برای هر یک از خم‌های زیر κ ، τ ، t ، \mathbf{n} و \mathbf{b} را بدست آورد. درستی معادلات سره-فرنه را تحقیق کنید.

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad (i)$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right) \quad (ii)$$

۱۵.۲ نشان دهید خم

$$\gamma(t) = \left(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t} \right)$$

مسطح است.

۱۶.۲ نشان دهید خم تمرین ۱۴.۲(ii) یک دایره است، مرکز، شعاع و صفحه‌ای را که خم در آن قرار دارد پیدا کنید.

۱۷.۲ همه خم‌هایی در \mathbb{R}^3 را که دارای انحنای ثابت $\kappa > 0$ و تاب ثابت τ هستند تشریح کنید (کافی است یک خم با انحنای κ و تاب τ ارائه دهید).

۱۸.۲ نشان دهید تاب یک خم عادی، اگر تعریف شده باشد، یک تابع هموار از t است.

۱۹.۲ فرض کنید γ خم سرعت-واحد در \mathbb{R}^3 باشد و همچنین فرض کنید انحنای آن $\kappa(t)$ ، به ازای همه مقادیر t ، مخالف صفر باشد. خم جدید δ را با رابطه

$$\delta(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

تعریف کنید. نشان دهید δ عادی است و اگر s پارامتر طول-قوس آن باشد آنگاه

$$\frac{ds}{dt} = \kappa$$

ثابت کنید انحنای δ برابر است با

$$\left(1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و فرمولی برای تاب δ بر حسب κ ، τ و مشتقات آن‌ها نسبت به t ارائه دهید.

۲۰.۲ خم عادی γ در \mathbb{R}^3 با انحنای مثبت را ماریج عام می‌نامیم اگر بردار مماس آن با بردار واحد ثابت a ، زاویه ثابت θ بسازد. نشان دهید که رابطه تاب τ و انحنای κ برای γ به وسیله $\tau = \pm \kappa \cot \theta$ معین می‌شود. (فرض کنید γ خم سرعت-واحد است و نشان دهید $a = t \cos \theta + b \sin \theta$.)

بالعکس، نشان دهید اگر تاب و انحنای یک خم عادی با رابطه $\tau = \lambda \kappa$ که در آن λ ثابت است معین شود، در این صورت خم یک ماریج عام است (لذا مثال‌ها ۱.۲ و ۴.۲ نشان می‌دهد که ماریج دایره‌گون، یک ماریج عام است).

۲۱.۲ فرض کنید γ خم سرعت-واحد با $\kappa(t) > 0$ و $\tau(t) \neq 0$ به ازای هر t ، باشد. نشان دهید اگر γ روی کره واقع شود آنگاه

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau \kappa^2} \right) \quad (20)$$

اگر γ روی کره به مرکز a و شعاع r قرار گیرد، آنگاه $r^2 = (\gamma - a) \cdot (\gamma - a)$ حال مشتق بگیرید.

بالعکس، نشان دهید اگر معادله (۲۰) برقرار باشد، آنگاه

$$\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2 = r^2$$

به ازای مقدار ثابت (مثبت) r که در آن $\rho = 1/\kappa$ و $\sigma = 1/\tau$ و نتیجه بگیرید که γ روی کره شعاع r قرار دارد (به عبارت $\gamma + \rho n + \dot{\rho}\sigma b$ توجه کنید).

درستی معادله (۲۰) را برای خم ویوانی (تمرین ۹.۱) تحقیق کنید.

۲۲.۲ فرض کنید (a_{ij}) ماتریس کج - متقارن 3×3 باشد (یعنی برای هر i, j $a_{ij} = -a_{ji}$) فرض کنید v_1, v_2, v_3 توابع هموار از پارامتر s باشند که در معادلات دیفرانسیل

$$\dot{v}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j$$

به ازای $i = 1, 2, 3$ صدق می‌کنند. فرض کنید برای پارامتر s_0 ، بردارهای $v_1(s_0), v_2(s_0)$ و $v_3(s_0)$ متعامد واحد باشند. نشان دهید بردارهای $v_1(s), v_2(s)$ و $v_3(s)$ به ازای تمام مقادیر s ، متعامد واحد هستند (یک سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که در ضرب نقطه‌ای $v_i \cdot v_j = 0$ صدق می‌کند پیدا کنید و از این که یک چنین سیستمی دارای جواب یگانه با شرایط اولیه داده شده می‌باشد استفاده کنید)

در بقیه این کتاب همه خم‌های پارامتری شده عادی فرض شده اند.

خواص سراسری خم‌ها

تمام خواصی که تا کنون در مورد خم‌ها مطرح کرده‌ایم تقریباً همه «موضعی» هستند؛ فقط به رفتار خم در نزدیکی نقطه داده شده، بستگی دارند و به شکل کلی خم وابسته نیستند. در این بخش درباره بعضی از نتایج کلی در مورد خم‌ها بحث می‌کنیم. معروف‌ترین و شاید قدیمی‌ترین آنها «نامساوی هم پیرامونی» است، که طول خم‌های «بسته» معینی را به مساحتی که شامل آن هستند مربوط می‌کنند.

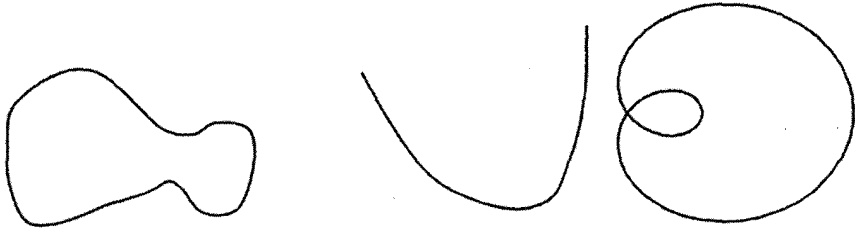
۱.۳ خم‌های بسته ساده

اولین وظیفه ما تعریف نوع خم‌هایی است که در این بخش در نظر می‌گیریم، مثلاً «خم‌های بسته ساده». روشن است که این‌ها خم‌های 'متصلی' هستند، که خود-مقاطع نیستند. تعریف دقیق آن در زیر ارائه می‌شود:

تعریف ۱.۳

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ یک ثابت مثبت باشد. یک خم بسته ساده در \mathbb{R}^2 با تناوب a خم (عادی) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ است به طوری که $\gamma(t) = \gamma(t')$ اگر فقط و فقط عدد صحیح k موجود باشد که $t' - t = ka$.

بنابراین، وقتی t به اندازه a افزایش می‌یابد نقطه $\gamma(t)$ به نقطه شروع خود برمی‌گردد، ولی قبل از آن این اتفاق نمی‌افتد.



خم بسته ساده

خم غیر بسته یا غیر ساده

یک نتیجه متعارف، اما نه خیلی واضح، از توپولوژی روی \mathbb{R}^2 که قضیه خم ژردان خوانده می‌شود این است که، هر خم بسته ساده در صفحه دارای یک «درون» و یک «بیرون» است، به طور دقیق‌تر، مجموعه نقاطی از \mathbb{R}^2 که در روی خم نیستند اجتماع دو زیر مجموعه جدا از هم در \mathbb{R}^2 هستند، که با علامت $\text{int}(\gamma)$ و $\text{ext}(\gamma)$ نشان داده می‌شوند و دارای خواص زیر می‌باشند:

(i) $\text{int}(\gamma)$ کراندار است، یعنی در داخل دایره‌ای به شعاع به اندازه کافی بزرگ قرار دارد.

(ii) $\text{ext}(\gamma)$ کراندار نیست.

(iii) دو ناحیه $\text{int}(\gamma)$ و $\text{ext}(\gamma)$ همبند هستند، یعنی دارای این ویژگی هستند که هر دو

نقطه از یک ناحیه با خمی که به طور کامل در آن ناحیه قرار دارد به هم متصل می‌شوند (اما هر خمی که یک نقطه از $\text{int}(\gamma)$ را به یک نقطه از $\text{ext}(\gamma)$ متصل می‌کند باید خم γ را قطع کند).

مثال ۱.۳

دایره پارامتری شده

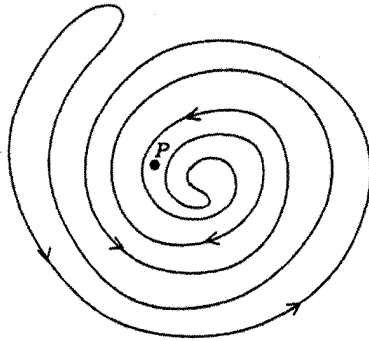
$$\gamma(t) = \left(\cos\left(\frac{\gamma\pi t}{a}\right), \sin\left(\frac{\gamma\pi t}{a}\right) \right)$$

یک خم بسته ساده با تناوب a است. درون و بیرون خم γ ، به ترتیب با روابط $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ و $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$

داده می‌شود.

ولی همه خم‌های بسته ساده دارای چنین درون و بیرون واضحی نیستند. نقطه P در خم

بسته ساده شکل زیر درونی است یا بیرونی؟



چون هر نقطه در تصویر خم بسته ساده γ با تناوب a که با پارامتر t رسم شده است در بازه‌ای به طول a مثلاً $0 \leq t \leq a$ تغییر می‌کند، بنابراین منطقی است که طول γ با رابطه زیر تعریف شود.

$$\ell(\gamma) = \int_0^a \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (1)$$

که در آن نقطه نمایانگر مشتق نسبت به پارامتر خم γ است. چون γ عادی است، دارای بازپیمایش سرعت - واحد $\tilde{\gamma}$ و با طول - قوس

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\| du$$

به عنوان پارامتر $\tilde{\gamma}$ می‌باشد (زیرا $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$). توجه کنید.

$$s(t+a) = \int_0^{t+a} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^a \|\dot{\gamma}(u)\| du + \int_a^{t+a} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \ell(\gamma) + s(t),$$

با قراردادن $v = u - a$ و بکارگیری $\gamma(u - a) = \gamma(u)$ داریم

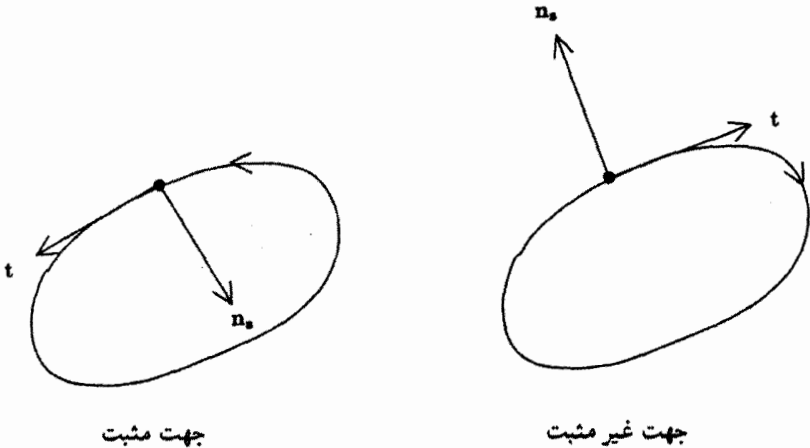
$$\int_a^{t+a} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^t \|\dot{\gamma}(v)\| dv = s(t)$$

بنابراین

$$\tilde{\gamma}(s(t)) = \tilde{\gamma}(s(t')) \Leftrightarrow \gamma(t) = \gamma(t') \Leftrightarrow t' - t = ka \Leftrightarrow s(t') - s(t) = k\ell(\gamma),$$

که در آن k یک عدد صحیح است. این نشان می‌دهد که $\tilde{\gamma}$ یک خم بسته ساده با تناوب $\ell(\gamma)$ است و چون $\tilde{\gamma}$ سرعت - واحد است این طول $\tilde{\gamma}$ نیز است. در یک کلام کوتاه، می‌توان همیشه فرض نمود که خم بسته ساده، سرعت - واحد و تناوب آن برابر طولش است.

معمولاً فرض می‌کنیم که خم بسته ساده، جهت مثبت دارد. به این معنا که جهت بردار قائم واحد علامت‌دار n_s از γ (بخش ۲.۲ را ببینید) در هر نقطه از γ به سمت $\text{int}(\gamma)$ است. در صورت نیاز می‌توان پارامتر t را جایگزین t نمود.



در نمودار بالا جهت پیکان جهت ازدیاد پارامتر را نشان می‌دهد. آیا خم بسته ساده صفحه قبل، دارای جهت مثبت است؟ در بخش بعدی، به مساحت سطح محدود شده توسط خم بسته ساده γ علاقمندیم.

یعنی

$$A(\text{int}(\gamma)) = \iint_{\text{int}(\gamma)} dx dy. \quad (2)$$

که به وسیله قضیه گرین محاسبه می‌شود، این قضیه بیان می‌کند برای کلیه توابع هموار $f(x, y)$ و $g(x, y)$ (مثلاً توابع با مشتقات جزئی پیوسته از تمام مراتب)،

$$\iint_{\text{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

که در آن γ خم بسته ساده با جهت مثبت است.

گزاره ۱.۳

اگر $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ یک خم بسته ساده در \mathbf{R}^2 با جهت مثبت و تناوب a باشد، آنگاه

$$A(\text{int}(\gamma)) = \frac{1}{2} \int_0^a (xy - yx) dt \quad (3)$$

اثبات ۱.۳

در قضیه گرین قرار دهید $g = \frac{1}{y}x$, $f = -\frac{1}{y}y$, در این صورت

$$A(\text{int}(\gamma)) = \frac{1}{y} \int_{\gamma} x dy - y dx$$

لذا معادله (۳) فوراً بدست می‌آید. \square

توجه کنید، اگر چه فرمول معادله (۳) بر حسب پارامتر t از γ بیان شده ولی از تعریف (۲) روشن است که اگر γ بازپیمایش شود $A(\text{int}(\gamma))$ تغییر نمی‌کند.

تمرین‌ها

۱.۳ نشان دهید طول $\ell(\gamma)$ و مساحت $A(\text{int}(\gamma))$ تحت حرکت صلب برای γ ، تغییرناپذیرند (بخش ۲.۲ را ببینید).

۲.۳ نشان دهید که بیضی

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

که در آن a, b دو ثابت مثبت هستند، یک خم بسته ساده است. مساحت درون آن را محاسبه کنید.

۳.۳ نشان دهید حلزونی به معادله

$$\gamma(t) = ((1 + 2 \cos t) \cos t, (1 + 2 \cos t) \sin t)$$

یک خم (عادی) است و برای هر t ، $\gamma(t + 2\pi) = \gamma(t)$ اما γ یک خم بسته ساده نیست.

۴.۳ نشان دهید اگر $\gamma(t)$ یک خم بسته ساده با تناوب a و t ، \mathbf{n}_s ، κ_s به ترتیب بردارهای مماس واحد، قائم واحد علامت‌دار و انحنای علامت‌دار باشند، آنگاه

$$t(t+a) = t(t), \quad \mathbf{n}_s(t+a) = \mathbf{n}_s(t), \quad \kappa_s(t+a) = \kappa_s(t)$$

(از معادله $\gamma(t+a) = \gamma(t)$ مشتق بگیرید).

۲.۳ نامساوی هم پیرامونی

مهم‌ترین نتیجه سراسری در مورد خم‌های مسطح عبارت است از

قضیه ۱.۳ (نامساوی هم پیرامونی)

فرض کنید γ یک خم بسته ساده، $\ell(\gamma)$ طول آن و $A(\text{int}(\gamma))$ مساحت درون آن باشد. در این صورت

$$A(\text{int}(\gamma)) \leq \frac{1}{4\pi} \ell(\gamma)^2$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر γ یک دایره باشد.

البته روشن است که تساوی وقتی برقرار است که γ یک دایره باشد، چون در این حالت $\ell(\gamma) = 2\pi R$ و $A(\text{int}(\gamma)) = \pi R^2$ ، که در آن R شعاع دایره است. برای اثبات قضیه، به نتیجه‌ای از آنالیز که نامعادله وایریتنگر^۱ نامیده می‌شود نیاز داریم

گزاره ۲.۳

فرض کنید $F: [0, \pi] \rightarrow R$ تابع همواری باشد که $F(0) = F(\pi) = 0$. در این صورت

$$\int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 dt \geq \int_0^\pi F(t)^2 dt$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر به ازای هر $t \in [0, \pi]$ $F(t) = A \sin t$ که در آن A مقدار ثابتی است.

موقتاً فرض کنید که قضیه برقرار است، نشان می‌دهیم که چگونه نامساوی هم پیرامونی از آن نتیجه می‌شود.

اثبات ۲.۳

با افزودن بعضی از فرضیات به γ که اثبات را ساده می‌سازد شروع می‌کنیم. ابتدا اگر بخواهیم، می‌توانیم فرض کنیم γ با طول - قوس s پارامتری شده است. هر چند، به خاطر π که در قضیه ۱.۳ ظاهر شده، مناسب‌تر است که فرض کنیم تناوب γ ، π است. اگر در γ ، پارامتر s را به پارامتر

$$t = \frac{\pi s}{\ell(\gamma)} \quad (۴)$$

1) Wirtinger's inequality

تغییر دهیم. خم منتج هنوز یک خم بسته ساده است و تناوب π دارد، زیرا وقتی s تا $\ell(\gamma)$ افزایش می‌یابد t تا π زیاد می‌شود. بنابراین از حالا به بعد فرض می‌کنیم که γ با پارامتر t در معادله (۴) پارامتری شده است.

در دومین مرحله ساده‌سازی، توجه می‌کنیم که در $\ell(\gamma)$ و $A(\gamma)$ تغییری ایجاد نمی‌شود، اگر γ با انتقال \mathbf{b} به $\gamma(t) + \mathbf{b}$ که در آن \mathbf{b} بردار ثابت دلخواهی است کنترل شود. (تمرین ۱.۳ را ببینید). با قرار دادن $\mathbf{b} = -\gamma(0)$ ، می‌توانیم فرض کنیم $\gamma(0) = 0$ یعنی شروع و اتمام در مبدأ است.

برای اثبات قضیه ۱.۳، $\ell(\gamma)$ و $A(\text{int}(\gamma))$ را با استفاده از مختصات قطبی

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

بدست می‌آوریم.

با استفاده از قاعده زنجیری، به آسانی نشان داده می‌شود.

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2, \quad xy - yx = r^2 \dot{\theta},$$

که در آن $\frac{d}{dt}$ را با نقطه نمایش داده‌ایم. در این صورت با استفاده از معادله (۴)

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2}, \quad (5)$$

زیرا $1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$. به علاوه بنا بر معادله (۳) داریم

$$A(\text{int}(\gamma)) = \frac{1}{4} \int_0^\pi (xy - yx) dt = \frac{1}{4} \int_0^\pi r^2 \dot{\theta} dt. \quad (6)$$

برای اثبات قضیه ۱.۳، باید نشان دهیم

$$\frac{\ell(\gamma)^2}{4\pi} - A(\text{int}(\gamma)) \geq 0,$$

و تساوی حاصل می‌شود اگر و فقط اگر γ دایره باشد. بنا بر معادله (۵)

$$\int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) dt = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi}$$

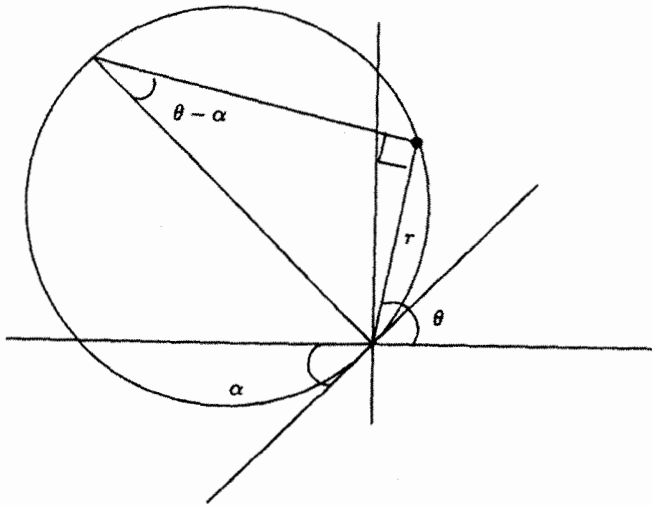
بنابراین، با استفاده از معادله (۶)

$$\frac{\ell(\gamma)^2}{4\pi} - \mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \frac{1}{4} \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \dot{\theta} dt = \frac{1}{4} \mathcal{I}$$

که در آن

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - 2r^2 \dot{\theta}) dt. \quad (7)$$

لذا برای اثبات قضیه ۱.۳، باید نشان دهیم $\mathcal{I} \geq 0$ و $\mathcal{I} = 0$ اگر و فقط اگر γ دایره باشد.



با محاسبات جبری ساده،

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi r^2 (\dot{\theta} - 1)^2 dt + \int_0^\pi (\dot{r}^2 - r^2) dt. \quad (8)$$

اولین انتگرال در سمت راست معادله (۸) به وضوح بزرگتر یا مساوی صفر است و دومین انتگرال، با توجه به نامعادله وایرتینگر، بزرگتر یا مساوی صفر است (فرض می‌کنیم $F = r$ ، توجه کنید که $r(0) = r(\pi) = 0$ زیرا $\gamma(0) = \gamma(\pi) = 0$). بنابراین $\mathcal{I} \geq 0$ ، علاوه چون هر دو انتگرال در سمت راست معادله (۸) بزرگتر یا مساوی صفر هستند، مجموع آن‌ها، \mathcal{I} صفر است اگر و فقط اگر هر دو انتگرال صفر باشند. اما اولین انتگرال صفر است اگر و فقط اگر $\dot{\theta} = 1$ برای هر t و دومین انتگرال صفر است تنها اگر (مجدداً به وسیله وایرتینگر) $r = A \sin t$ به ازای مقدار ثابت A . بنابراین $\theta = t + \alpha$ که در آن α ثابت است و از آنجا $r = A \sin(\theta - \alpha)$ به سهولت می‌توان دید که این، معادله قطبی دایره‌ای به قطر A است. بنابراین اثبات قضیه ۱.۳ کامل می‌شود. (نمودار بالا را ببینید)

□

حالا نامعادله وایرتینگر را ثابت می‌کنیم:

فرض کنید $G(t) = \frac{F(t)}{\sin t}$. طبق معمول $\frac{d}{dt}$ را با نقطه نمایش دهید در این صورت

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \dot{F}^\gamma dt &= \int_0^\pi (\dot{G} \sin t + G \cos t)^\gamma dt \\ &= \int_0^\pi \dot{G}^\gamma \sin^\gamma t dt + \gamma \int_0^\pi G \dot{G} \sin t \cos t dt + \int_0^\pi G^\gamma \cos^\gamma t dt. \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^\pi G \dot{G} \sin t \cos t dt &= G^\gamma \sin t \cos t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi G^\gamma (\cos^\gamma t - \sin^\gamma t) dt \\ &= \int_0^\pi G^\gamma (\sin^\gamma t - \cos^\gamma t) dt. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \dot{F}^\gamma dt &= \int_0^\pi \dot{G}^\gamma \sin^\gamma t dt + \int_0^\pi G^\gamma (\sin^\gamma t - \cos^\gamma t) dt + \int_0^\pi G^\gamma \cos^\gamma t dt \\ &= \int_0^\pi (G^\gamma + \dot{G}^\gamma) \sin^\gamma t dt = \int_0^\pi F^\gamma dt + \int_0^\pi \dot{G}^\gamma \sin^\gamma t dt, \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\int_0^\pi \dot{F}^\gamma dt - \int_0^\pi F^\gamma dt = \int_0^\pi \dot{G}^\gamma \sin^\gamma t dt.$$

انتگرال سمت راست به‌وضوح بزرگتر یا مساوی صفر است، و صفر است اگر و فقط اگر به ازای هر t ، $\dot{G} = 0$ یعنی اگر و فقط اگر $G(t)$ مقدار ثابتی باشد این مقدار ثابت را A بنامید، بنابراین $F(t) = A \sin t$ همان چیزی که مورد نیاز است.

تمرین‌ها

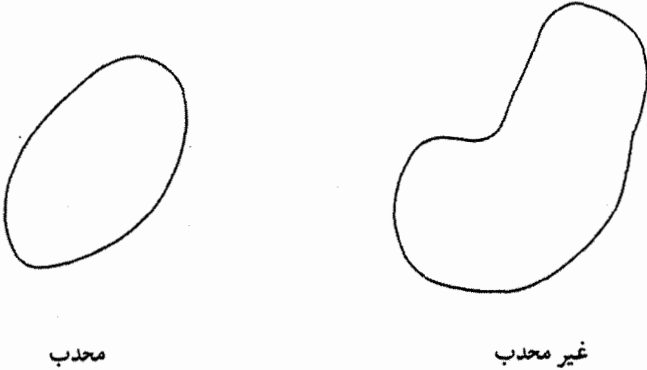
۵.۳ با استفاده از نامساوی هم‌پیرامونی در بیضی $\frac{x^\gamma}{a^\gamma} + \frac{y^\gamma}{b^\gamma} = 1$ (که در آن a و b ثابت مثبت‌اند)، ثابت کنید

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^\gamma \sin^\gamma t + b^\gamma \cos^\gamma t} dt \geq 2\pi \sqrt{ab}$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a = b$ (تمرین ۲.۳ را ببینید).

۳.۳ قضیه چهار رأس

این فصل را با نتیجه معروفی در مورد خم‌های محدب در صفحه به پایان می‌رسانیم. خم ساده بسته را محدب می‌نامیم، اگر درون γ محدب باشد. به این مفهوم که هر دو نقطه در درون γ را بتوان با یک پاره خط مستقیم که در درون γ واقع است به هم وصل کرد.



تعریف ۲.۳

رأس خم $\gamma(t)$ در \mathbf{R}^2 ، نقطه‌ای است که انحنای علامت‌دار آن، κ_s دارای یک نقطه سکون است، یعنی در آن $\frac{d\kappa_s}{dt} = 0$.

بهر راحتی می‌توان دید که این تعریف مستقل از پرمایش γ است (تمرین ۷.۳ را ببینید).

مثال ۲.۳

بیضی $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ که در آن a و b ثابت‌های مثبت هستند یک خم بسته ساده محدب با تناوب 2π است (تمرین‌های ۲.۳ و ۶.۳ را ببینید). انحنای علامت‌دار آن برابر است با

$$\kappa_s(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

بنابراین

$$\frac{d\kappa_s}{dt} = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}}$$

که دقیقاً در ۴ نقطه از بیضی صفر است. این نقاط عبارتند از $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ، که نقاط انتهایی دو محور بیضی می‌باشند.

قضیه بعدی نشان می‌دهد که این تعداد، کمترین تعداد رأس‌هایی است که یک خم بسته ساده محدب می‌تواند داشته باشد.

قضیه ۲.۳ (قضیه ۴ رأس)

هر خم بسته ساده محدب در \mathbb{R}^2 دارای حداقل ۴ رأس است.

درواقع قضیه بدون فرض محدب بودن نیز درست است. اما اثبات آن مشکل‌تر از حالتی است که ما ارائه داده‌ایم.

اثبات ۲.۳

فرض می‌کنیم خم $\gamma(t)$ ، خم سرعت-واحد است. لذا تناوب آن برابر با طول γ یعنی ℓ است. انتگرال

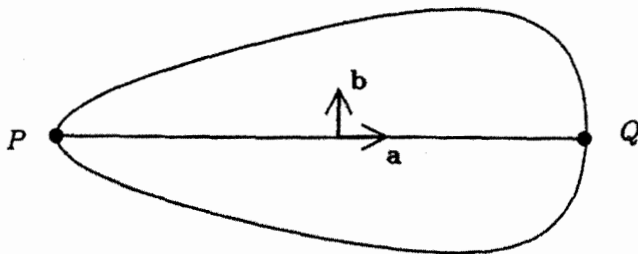
$$\int_0^\ell \dot{\kappa}_s(t) \gamma(t) dt,$$

راکه در آن نقطه، $\frac{d}{dt}$ را نشان می‌دهد در نظر بگیرید. (یادآوری می‌کنیم که بنا به تمرین ۴.۲، κ_s یک تابع هموار از t است). با انتگرال‌گیری جزء به جزء و استفاده از معادله $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa_s \mathbf{t}$ (تمرین ۳.۲) به دست می‌آوریم.

$$\int_0^\ell \dot{\kappa}_s \gamma dt = - \int_0^\ell \kappa_s \dot{\gamma} dt = - \int_0^\ell \kappa_s \mathbf{t} dt = \int_0^\ell \dot{\mathbf{n}}_s dt = \mathbf{n}_s(\ell) - \mathbf{n}_s(0) = \mathbf{0} \quad (9)$$

چون در فاصله بسته $[0, \ell]$ ، κ_s همه مقادیرش را اتخاذ می‌کند، لذا باید مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را نیز مثلاً در نقاط P و Q ، اتخاذ نماید. فرض کنید $P \neq Q$ ، چون در غیر این صورت κ_s ثابت و γ دایره خواهد شد (مثال ۲.۲) و بنابراین هر نقطه آن یک رأس است. فرض کنید \mathbf{a} بردار واحد موازی با بردار PQ باشد و فرض کنید \mathbf{b} ، از دوران \mathbf{a} به اندازه $\pi/2$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بدست آمده باشد. از ضرب نقطه‌ای انتگرال معادله (۹) با بردار ثابت \mathbf{b} داریم

$$\int_0^\ell \dot{\kappa}_s (\gamma \cdot \mathbf{b}) dt = 0 \quad (10)$$



فرض کنید P و Q تنها رأس‌های γ باشند. چون γ محدب است خط مستقیمی که P و Q را به هم متصل می‌کند γ را به دو بخش تقسیم می‌کند و چون رأس دیگری وجود ندارد، روی یکی از بخش‌ها $\kappa_s > 0^\circ$ و روی دیگری $\kappa_s < 0^\circ$. اما تابع زیر انتگرال در معادله (۱۰) همیشه مثبت یا همیشه منفی است (به جز در P ، Q که صفر است). بنابراین انتگرال همیشه مثبت یا همیشه منفی است که تناقض است.

لذا حداقل یک رأس دیگر نیز باید وجود داشته باشد، مثلاً R . اگر رأس دیگری موجود نباشد نقاط P و Q و R را به سه بخش تقسیم می‌کند که روی هر یک از آنها، κ_s همیشه مثبت یا همیشه منفی است، اما در این صورت κ_s باید در دو بخش مجاور هم علامت باشد. بنابراین خط مستقیمی موجود است که γ را به دو بخش تقسیم می‌کند که روی یکی κ_s همیشه مثبت و روی دیگری κ_s همیشه منفی است. بحث اخیر نشان می‌دهد که این غیر ممکن است بنابراین حداقل ۴ رأس وجود دارد. \square

تمرین‌ها

۶.۳ نشان دهید بیضی تمرین ۲.۳ محدب است (ممکن است به نامعادله $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$ نیاز داشته باشید).

۷.۴ نشان دهید تعریف رأس یک خم مسطح مستقل از پرمایش آن است.

۸.۴ نشان دهید حلقه‌ی تمرین ۳.۳، فقط دو رأس دارد.

سطح در فضای سه بعدی

در این فصل، روش‌های مختلفی که واژه سطح را با فرمول ریاضی بیان می‌کند معرفی می‌کنیم. اگر چه ساده‌ترین آنها، یعنی قطعه سطح، تمام آن چیزی که در بیشتر کتابها از آن استفاده می‌شود، به طور کامل نمی‌تواند ایزاری را که سطح می‌نامیم شرح دهد. مثلاً یک کره یک قطعه سطح نیست، اما می‌توان آن را به وسیله دو قطعه سطح مناسب بهم چسبیده تعریف نمود. ایده‌ای که در پشت این چسبندگی است بسیار ساده است، اما شفاف نمودن آن کمی دشوار است. برای کاهش این ضایعه سعی نموده‌ایم اغلب اثبات‌های مورد نیاز را در آخرین بخش فصل جمع‌آوری کنیم این بخش در جای دیگری از کتاب استفاده نمی‌شود و با اطمینان اگر بخواهیم می‌توان آن را حذف نمود. در حقیقت سطح‌ها (به دلیل درگیر بودن با قطعه سطح‌ها) در حالت جدی فقط در چند مورد در این کتاب استفاده می‌شوند.

۱.۴ سطح چیست؟

یک سطح زیر مجموعه از \mathbb{R}^3 است که در نزدیکی هر نقطه شبیه قسمتی از \mathbb{R}^2 است. درست مثل سطح زمین که اگر چه در واقع کمی کروی است، اما برای بیننده‌ای که روی آن قرار دارد و فقط افق را می‌بیند به نظر سطح صاف می‌آید. برای روشن کردن عبارت‌های «شبه» و «در همسایگی» ابتدا می‌بایست بعضی واژه‌های ابتدایی را معرفی کنیم. آن را در \mathbb{R}^n برای $n \geq 1$ تعریف می‌کنیم، ولی فقط برای $n = 1, 2, 3$ به آن نیاز داریم. ابتدا، زیر مجموعه U از \mathbb{R}^n باز خوانده می‌شود، اگر برای هر نقطه a در U ، عدد مثبت ϵ وجود داشته باشد به طوری که هر نقطه $u \in \mathbb{R}^n$ با فاصله ϵ از a در U باشد:

$$a \in U \quad \text{و} \quad \|u - a\| < \epsilon \Rightarrow u \in U$$

به طور مثال، \mathbf{R}^n یک مجموعه باز است، همچنین

$$D_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| < r\}$$

گوی باز به مرکز \mathbf{a} و شعاع $r > 0$ است. (اگر $n = 1$ ، گوی باز، بازه باز و اگر $n = 2$ یک قرص باز خوانده می‌شود.) البته

$$\bar{D}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

باز نیست، زیرا عدد مثبت ϵ هر قدر کوچک باشد، نقطه‌ای با فاصله ϵ از نقطه (مثلاً) $(a_1 + r, a_2, \dots, a_n) \in \bar{D}_r(\mathbf{a})$ وجود دارد که در $\bar{D}_r(\mathbf{a})$ نیست (مثلاً نقطه $(a_1 + r + \epsilon, a_2, \dots, a_n)$). اگر X و Y دو زیر مجموعه به ترتیب از \mathbf{R}^m و \mathbf{R}^n باشند، تابع $f : X \rightarrow Y$ در نقطه $\mathbf{a} \in X$ پیوسته خوانده می‌شود اگر نقاط نزدیک \mathbf{a} در X به نقاط نزدیک $f(\mathbf{a})$ در Y تصویر شوند. به طور دقیقتر، f در نقطه \mathbf{a} پیوسته است اگر، برای هر $\epsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\mathbf{u} \in X \text{ و } \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})\| < \epsilon$$

تابع f پیوسته خوانده می‌شود اگر در هر نقطه از X پیوسته باشد. ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است.

با توجه به تعریف مجموعه باز، تعریف پیوستگی با عبارت زیر معادل است:

تابع f پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه باز V از \mathbf{R}^n ، مجموعه باز U از \mathbf{R}^m وجود داشته باشد به طوری که $f, U \cap X$ را به $V \cap Y$ تصویر کند.

اگر $f : X \rightarrow Y$ پیوسته، یک به یک، پوشا و همچنین اگر تابع معکوس آن $f^{-1} : Y \rightarrow X$ پیوسته باشد، آنگاه f یک همسان‌ریختی و X و Y همسان‌ریخت خوانده می‌شوند.

اکنون زمانی است که اولین کوشش خود را برای تعریف واژه سطح در \mathbf{R}^3 به کار ببریم.

تعریف ۱.۴

زیر مجموعه S از \mathbf{R}^3 یک سطح است اگر، برای هر نقطه $P \in S$ ، مجموعه باز U در \mathbf{R}^2 و مجموعه باز W در \mathbf{R}^3 شامل P وجود داشته باشند، به طوری که $S \cap W$ با U همسان‌ریخت باشد.

بنابراین یک سطح مجهز به دسته‌ای از همسان‌ریختی‌های $S \cap W \rightarrow U : \sigma$ است، که آن را قطعه سطح یا پرمایش می‌نامند. مجموعه همه این قطعه سطح‌ها، اطلس S خوانده می‌شود. هر نقطه از S در تصویر حداقل یک قطعه سطح از اطلس S قرار می‌گیرد. دلیل این اصطلاح علمی در مثال زیر روشن خواهد شد.

مثال ۱.۴

هر صفحه در \mathbf{R}^3 سطحی است با اطلسی که شامل تنها یک قطعه سطح است. در حقیقت، فرض کنید a یک نقطه روی سطح، p و q دو بردار واحد موازی با سطح و عمود بر یکدیگر باشند. در این صورت، هر بردار موازی با سطح ترکیب خط از p و q ، به صورت $up + vq$ به ازای بعضی اسکالرهای u و v است. اگر موقعیت برداری هر نقطه از سطح باشد، $r - a$ موازی سطح بوده و بنابراین

$$r - a = up + vq$$

$$\therefore r = a + up + vq$$

به ازای اسکالرهای u و v . و از آنجا قطعه سطح مورد نظر عبارتست از

$$\sigma(u, v) = a + uP + vq$$

و تابع معکوس آن

$$\sigma^{-1}(r) = ((r - a) \cdot p, (r - a) \cdot q)$$

است. از این فرمول‌ها روشن است که σ و σ^{-1} پیوسته‌اند، لذا σ یک همسان‌ریختی است. (جزئیات را ثابت نمی‌کنیم).

مثال بعدی نشان می‌دهد که چرا باید سطح‌ها و نه فقط قطعه سطح‌ها را در نظر بگیریم.

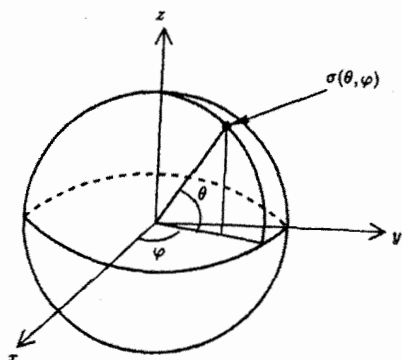
مثال ۲.۴

کره واحد

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

یک سطح است. بدیهی‌ترین پرمایش احتمالاً با عرض جغرافیایی θ و طول جغرافیایی φ داده می‌شود:

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$



اگر روی (θ, φ) محدودیتی اعمال نکنیم σ پوشا نخواهد شد (و بنابراین همسان‌ریختی نیست). برای پوشاندن همه کره، کاملاً واضح است که باید

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

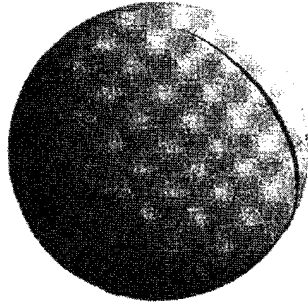
ولی، مجموعه نقاط (θ, φ) که در این نامساوی‌ها صدق کنند زیرمجموعه باز \mathbf{R}^2 نیستند و بنابراین نمی‌توانند به‌عنوان دامنه تعریف یک قطعه سطح به‌کار گرفته شوند. بزرگترین مجموعه بازی که شامل نامساوی‌های بالاست برابر است با

$$U = \left\{ (\theta, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi \right\}$$

اما در این حالت تصویر $\sigma : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ تمام کره نیست، ولی تقریباً برابر است با مکمل نیم‌دایره عظیمه C که مشتمل بر نقاطی از کره به شکل $(x, 0, z)$ با $x \geq 0$ می‌باشد. بنابراین، $\sigma : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ فقط یک «قطعه» از کره را می‌پوشاند. این جزئیات را که σ یک همسان‌ریختی از U به اشتراک کره با مجموعه باز

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x < 0 \text{ یا } y \neq 0\}$$

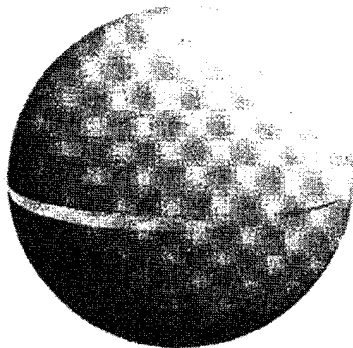
است، را ثابت نمی‌کنیم.



برای اینکه نشان دهیم کره یک سطح است، می‌بایستی حداقل یک قطعه سطح دیگر ارائه دهیم تا قسمت حذف شده توسط σ را بپوشاند. مثلاً، فرض کنید $\tilde{\sigma}$ قطعه بدست آمده از اولین چرخش σ حول محور z ‌ها به اندازه π و بعد به اندازه $\frac{\pi}{4}$ حول محور x ‌ها باشد. به طور دقیق، $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi)$$

(مجموعه باز U همان مجموعه ذکر شده برای σ است.) تصویر $\tilde{\sigma}$ برابر مکمل تیم دایره عظیمه \tilde{C} مشتمل بر نقاط $(x, y, 0)$ ، $x \leq 0$ از کره است. (شکل بعدی را ببینید.) روشن است C و \tilde{C} دارای نقطه مشترکی نیستند، بنابراین اجتماع تصاویر σ و $\tilde{\sigma}$ تمام کره است. توجه کنید که اغلب نقاط کره در تصویر هر دو قطعه سطح قرار دارند.



روشن است، اگر چه اثبات آن کاملاً بدیهی نیست، که کره نمی‌تواند فقط به وسیلهٔ یک قطعه سطح پوشانده شود (تمرین ۵.۴ را ببینید.)

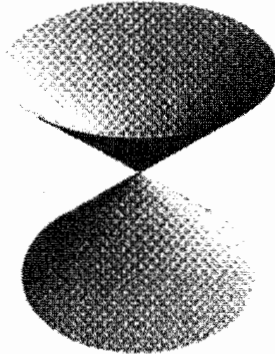
آخرین مثال (در حال حاضر) یک زیر مجموعه از \mathbf{R}^3 است که تقریباً، نه به طور کامل، یک سطح است.

مثال ۳.۴

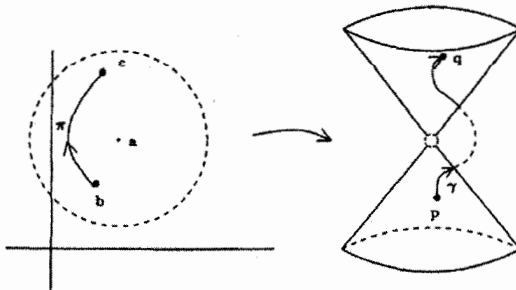
مخروط دوگانه

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

را در نظر بگیرید.



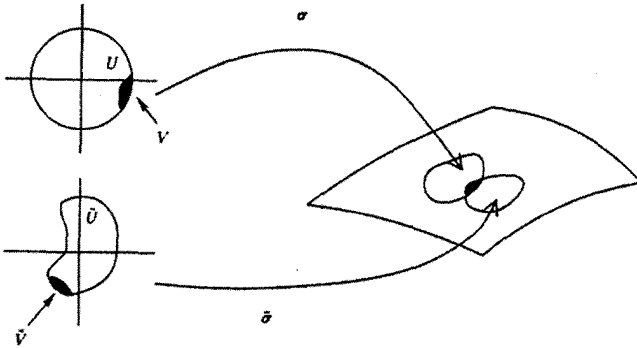
برای اینکه نشان دهیم مخروط دوگانه یک سطح نیست، فرض کنید $\sigma : U \rightarrow S \cap W$ یک قطعه سطح شامل رأس $(0, 0, 0)$ از مخروط و $a \in U$ متناظر با رأس باشد. U را می توان گوی باز به مرکز a فرض کرد، زیرا هر مجموعه باز U شامل a ، باید شامل یک گوی باز باشد. مجموعه W به وضوح شامل یک نقطه p در نیم صفحه پایینی S_- از S ، که در آن $z < 0$ ، و شامل یک نقطه q در نیم صفحه بالایی S_+ ، $z > 0$ است. فرض کنید نقاط b و c متناظر در U باشند. بدیهی است که خم π در U موجود است که از نقاط b و c گذشته ولی از نقطه a نمی گذرد، این خم به وسیله σ به خم $\gamma = \sigma \circ \pi$ که به تمامی در S واقع است و از نقاط p و q گذشته ولی از رأس نمی گذرد تصویر می شود که به وضوح غیرممکن است. (در حقیقت در حالت کلی خم γ فقط پیوسته است و هموار نیست اما این تأثیری در بحث ندارد خواننده آشنا به توپولوژی می تواند این بحث ابتکاری را با دقت و جزئیات بنویسد.)



اگر رأس را حذف کنیم، سطح $S_- \cup S_+$ به دست می‌آید، این سطح دارای اطلسی مشتعل بر دو قطعه سطح $\sigma_{\pm} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ است که در آن $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. این سطح معکوس تابع تصویر روی صفحه xy است.

$$\sigma_{\pm}(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2}).$$

همچنان که مثال روی کره نشان می‌دهد نقطه a در سطح S ، عمدتاً در تصویر بیش از یک قطعه سطح قرار دارد.



فرض کنید $\sigma : U \rightarrow S \cap W$ و $\bar{\sigma} : \bar{U} \rightarrow S \cap \bar{W}$ دو قطعه باشند به طوری که $\bar{\sigma}^{-1}(S \cap W \cap \bar{W})$ و $\sigma(S \cap W \cap \bar{W})$ همسان ریختی هستند، چون σ و $\bar{\sigma}$ همسان ریختی هستند، $a \in S \cap W \cap \bar{W}$ به ترتیب مجموعه‌های باز $V \subseteq U$ و $\bar{V} \subseteq \bar{U}$ خواهند بود، ترکیب همسان ریختی $\sigma^{-1} \circ \bar{\sigma} : \bar{V} \rightarrow V$ را نگاشت انتقال از σ به $\bar{\sigma}$ می‌نامیم. اگر این نگاشت را با Φ نمایش دهیم برا هر $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{V}$ داریم

$$\bar{\sigma}(\bar{u}, \bar{v}) = \sigma(\Phi(\bar{u}, \bar{v}))$$

تمرین‌ها

۱.۴ نشان دهید قرص باز در صفحه xy یک سطح است.

۲.۴ نشان دهید استوانه دایره‌گون

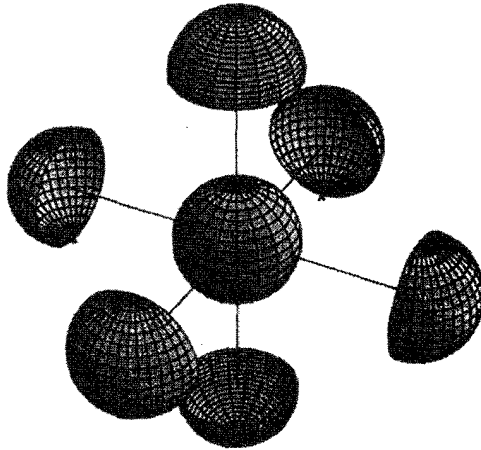
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

می‌تواند به وسیله یک قطعه سطح پوشیده شود و بنابراین یک سطح است (U را یک حلقه در نظر بگیرید).

۳.۴ برای کره واحد، قطعه سطح های $\sigma_{\pm}^x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ را با حل x از معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بر حسب y و z به صورت

$$\sigma_{\pm}^x(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

روی مجموعه باز $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ تعریف کنید. به طور مشابه σ_{\pm}^y و σ_{\pm}^z را (روی همان U) به ترتیب با حل y و z تعریف نمایید. نشان دهید این شش قطعه، به کره ساختار یک سطح می دهند.



۴.۴ هذلولی گون یک پارچه به صورت زیر است.

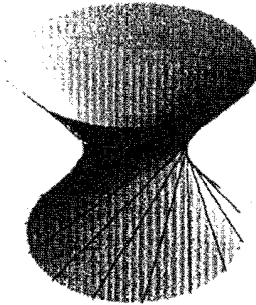
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

نشان دهید برای هر θ ، خط مستقیم

$$(x - z) \cos \theta = (1 - y) \sin \theta, \quad (x + z) \sin \theta = (1 + y) \cos \theta$$

در S قرار دارد و هر نقطه در هذلولی گون در یکی از این نوع خطها واقع است. نتیجه بگیرید S با یک قطعه سطح پوشیده می شود و بنابراین سطح است. (با استوانه در تمرین ۲.۴ مقایسه کنید)

خانواده دیگری از خطوط مستقیم روی S ارائه دهید و نشان دهید که هیچ دو خطی از یک خانواده همدیگر را قطع نمی کنند در حالی که هر خط در خانواده اول همه خطوط در خانواده دوم، بجز یکی را قطع می کند. سطح S را خطدار دوگانه می نامیم.



۵.۴ نشان دهید گوی واحد با یک قطعه سطح پوشیده نمی شود (به بعضی از مفاهیم توپولوژی نیاز دارید).

۲.۴ سطوح هموار

در هندسه دیفرانسیل، از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای بررسی سطوح (و دیگر اشیاء هندسی) استفاده می کنیم به عنوان مثال: ما باید بتوانیم به این عبارت که تابع روی سطح مشتق پذیر است مفهوم ببخشیم. برای این کار باید به سطوحی با ساختار اضافی توجه کنیم.

اولاً اگر U زیر مجموعه باز در \mathbb{R}^m باشد نگاشت $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ را هموار می نامیم اگر هر n مؤلفه f ، که تابعی از $U \rightarrow \mathbb{R}$ هستند دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه باشند. در این صورت مشتقات جزئی f به صورت مؤلفه ای بدست می آید، برای مثال، اگر $m = 2$ و $n = 3$ و

$$f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right)$$

و به طور مشابه مشتقات مراتب بالاتر محاسبه می شوند. اغلب از اختصارهای زیر استفاده می شود.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = f_v$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = f_{uu}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f_{uv}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = f_{vu}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = f_{vv}$$

والی آخر.

توجه کنید که $f_{uv} = f_{vu}$ زیرا همه مشتقات جزئی مؤلفه های f پیوسته هستند.

اکنون معنی دارد که بگوییم قطعه سطح‌های $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ در اطلس سطح S هموار هستند اما هنوز به شرایط دیگری نیاز داریم.

تعریف ۲.۴

قطعه سطح $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ را عادی می‌نامیم اگر هموار بوده و بردارهای σ_u و σ_v در تمام نقاط $(u, v) \in U$ مستقل خطی باشند، معادلاً، σ هموار و ضرب برداری $\sigma_u \times \sigma_v$ در هر نقطه از U ، غیر صفر باشد.

نهایتاً می‌توانیم دسته سطوحی را که در این کتاب بررسی شده است تعریف کنیم.

تعریف ۳.۴

سطح هموار، سطحی است که اطلس آن شامل قطعه سطح‌های عادی باشد.

مثال ۴.۴

صفحه در مثال ۱.۴ به‌وضوح یک سطح هموار است. به دلیل این‌که

$$\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$$

هموار و $\sigma_u = \mathbf{p}$ و $\sigma_v = \mathbf{q}$ مستقل خطی است زیرا \mathbf{p} و \mathbf{q} بردارهای واحد متعامد هستند.

مثال ۵.۴

برای کره واحد S^2 در مثال ۲.۴، σ و $\tilde{\sigma}$ به‌وضوح هموار هستند. برای اثبات عادی بودن، بردارهای

$$\sigma_\theta = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \sigma_\varphi = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \theta)$$

و در نتیجه $\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos \theta|$. اما چون $(\theta, \varphi) \in U$ لذا باید $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین $\cos \theta \neq 0$. به‌طور مشابه عادی بودن $\tilde{\sigma}$ بررسی می‌شود.

در تمرین ۳.۴ خانواده دیگری از قطعه سطح‌ها که کره واحد S^2 را می‌پوشاند ارائه دادیم، عادی بودن به آسانی ثابت می‌شود (تمرین ۷.۴ را ببینید). این اطلس، همراه با مثال ۵.۴، دو اطلس روی S^2 مشتمل بر قطعه سطح‌های عادی هستند و یک سؤال بدیهی این است که: از کدام یک از این اطلس‌ها، در مطالعه کره، باید استفاده کرد؟ جواب این است که می‌توانیم هر دو با هر کدام را انتخاب کنیم. زیرا ۸ قطعه در تمرین ۳.۴ و مثال ۵.۴ با هم، اطلس سومی را تشکیل می‌دهند. در اغلب موارد (ولی نه در تمام موارد - تعریف ۵.۴ را ببینید) برای سطح داده شده S ، ممکن است از اطلس ماکسیمال، مشتمل بر همه قطعه سطح‌های هموار $S \cap W \rightarrow U : \sigma$ که در آن U و W به ترتیب زیر مجموعه‌های باز \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 هستند استفاده کنیم. چنین قطعه سطح‌هایی را قطعه سطح‌های مجاز برای S می‌نامیم. اطلس ماکسیمال مستقل از هر انتخاب است.

دو نتیجه بعدی برای آنچه در پیش داریم مهم هستند، اگر چه در نظر اول خیلی جالب نیستند.

۱.۴ گزاره

نگاشت‌های انتقال یک سطح هموار، هموار است.

اثبات در بخش ۷.۴ ارائه می‌شود. نتیجه بعدی به نوعی معکوس (گزاره اخیر) است.

۲.۴ گزاره

فرض کنید U و \tilde{U} دو زیر مجموعه باز در \mathbb{R}^2 ، \mathbb{R}^2 ، $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه سطح عادی و $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ یک نگاشت هموار دو سوئی با نگاشت معکوس هموار $\tilde{U} \rightarrow U : \Phi^{-1}$ باشد. در این صورت $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه سطح عادی است.

اثبات ۲.۴

قطعه $\tilde{\sigma}$ هموار است زیرا هر ترکیبی از نگاشت‌های هموار، هموار است. برای عادی بودن، فرض کنید $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$. با استفاده از قاعده زنجیری،

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \sigma_v, \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \sigma_v$$

بنابراین

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) \sigma_u \times \sigma_v \quad (1)$$

اسکالر سمت راست در این معادله، دترمینان ماتریس ژاکوبین

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$$

است. از حساب دیفرانسیل و انتگرال یادآور می‌شویم که اگر Ψ و $\tilde{\Psi}$ دو نگاشت هموار بین مجموعه‌های \mathbf{R}^2 باشند و آنگاه

$$J(\tilde{\Psi} \circ \Psi) = J(\tilde{\Psi})J(\Psi)$$

(در حقیقت با استفاده از قاعده زنجیری، مشتقات جزئی $\tilde{\Psi} \circ \Psi$ را بر حسب $\tilde{\Psi}$ و Ψ بیان می‌کنیم.) با قراردادن $\Psi = \Phi$ و $\tilde{\Psi} = \Phi^{-1}$ می‌بینیم که $J(\Phi^{-1}) = J(\Phi)^{-1}$. خصوصاً $J(\Phi)$ معکوس‌پذیر است بنابراین دترمینان آن مخالف صفر است و معادله (۱) نشان می‌دهد که $\tilde{\sigma}$ عادی است. \square

اگر قطعه سطح‌های عادی σ و $\tilde{\sigma}$ بر اساس این گزاره به هم مرتبط باشند، می‌گوییم $\tilde{\sigma}$ بازپرمایش σ و نگاشت Φ نگاشت بازپرمایش است. توجه کنید که در این صورت σ هم بازپرمایش $\tilde{\sigma}$ است زیرا $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi^{-1}$.

همچنین توجه کنید اگر $\sigma : U \rightarrow S \cap W$ و $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow S \cap \tilde{W}$ دو قطعه سطح مجاز برای سطح هموار S باشند و اگر $V \subseteq U$ و $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ زیرمجموعه‌های باز چنان باشند که $\sigma(V) = \tilde{\sigma}(\tilde{V}) = S \cap W \cap \tilde{W}$ است و با استفاده از گزاره ۱.۴ دارای معکوس هموار است. بنابراین جایی که هر دو تعریف شده باشند $\tilde{\sigma}$ یک بازپرمایش σ است.

این بررسی‌ها به یک اصل بسیار مهم که در سراسر این کتاب از آن استفاده خواهیم کرد منجر می‌شود. اصل این است که می‌توانیم یک خاصیت را برای هر سطح هموار تعریف کنیم اگر بتوانیم آن را برای هر قطعه سطح عادی به طریقی که تحت بازپرمایش قطعه، تغییر نکند، تعریف نماییم. برای نشان دادن این اصل، بیایید منظورمان را از نگاشت هموار $S_1 \rightarrow S_2$: f که در آن S_1 و S_2 سطوح هموار هستند، تعریف کنیم. طبق اصل کلی، اگر ثابت کنیم تعریفی که ارائه می‌دهیم مستقل از بازپرمایش σ_1 و σ_2 است می‌توانیم فرض کنیم که S_1 و S_2 هر کدام به وسیله یک قطعه سطح $\mathbf{R}^3 \rightarrow U_1$: σ_1 و $\mathbf{R}^3 \rightarrow U_2$: σ_2 پوشیده شده‌اند. چون σ_1 و σ_2 دوسویی هستند، هر نگاشت $S_1 \rightarrow S_2$: f ، منجر به نگاشت $U_1 \rightarrow U_2$: $f \circ \sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}$ می‌شود، می‌گوییم f

هموار است اگر این نگاشت هموار باشد (زیرا از قبل می دانیم که منظور از همواری نگاشت بین زیر مجموعه های \mathbf{R}^2 چیست). حال فرض کنیم $\tilde{U}_1 \rightarrow \mathbf{R}^2 : \tilde{\sigma}_1$ و $\tilde{U}_2 \rightarrow \mathbf{R}^2 : \tilde{\sigma}_2$ به ترتیب بازپرمایش های σ_1 و σ_2 ، همراه با نگاشت های بازپرمایش $U_1 \rightarrow \tilde{U}_1 : \Phi_1$ و $U_2 \rightarrow \tilde{U}_2 : \Phi_2$ باشند. باید نشان دهیم که نگاشت متناظر $\tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_2 : \tilde{f} \circ \tilde{\sigma}_1^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_2^{-1}$ هموار است اگر $U_1 \rightarrow U_2 : \sigma_1^{-1} \circ f \circ \sigma_2^{-1}$ هموار باشد. اما این درست است زیرا

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 &= \tilde{\sigma}_2^{-1} \circ (\sigma_2 \circ \sigma_2^{-1}) \circ f \circ (\sigma_1 \circ \sigma_1^{-1}) \circ \tilde{\sigma}_1 \\ &= (\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2) \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1) \\ &= \Phi_2^{-1} \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ \Phi_1 \end{aligned}$$

و Φ_1 و Φ_2^{-1} (بین دو زیر مجموعه باز در \mathbf{R}^2) نگاشت های هموار هستند. خواننده باید نشان دهد که ترکیب نگاشت های هموار بین سطوح، هموار است.

خصوصاً نگاشتهای هموار $S_1 \rightarrow S_2 : f$ که دو سویی بوده و معکوس آن ها، $S_2 \rightarrow S_1 : f^{-1}$ هموار باشد برای ما جالب هستند. چنین نگاشتهایی دیفیئومرفیسم خوانده می شود. S_1 و S_2 را دیفیئومرفیک گویند اگر یک دیفیئومرفیسم بین آنها وجود داشته باشد. گزاره بعدی گزاره مفیدی است.

گزاره ۳.۴

فرض کنید $S_1 \rightarrow S_2 : f$ یک دیفیئومرفیسم باشد. اگر σ_1 قطعه سطح مجاز روی S_1 باشد، آنگاه $f \circ \sigma_1$ یک قطعه سطح مجاز روی S_2 است.

اثبات ۳.۴

می توان فرض نمود که S_1 و S_2 به ترتیب با قطعه های مجاز $U_1 \rightarrow \mathbf{R}^2 : \sigma_1$ و $U_2 \rightarrow \mathbf{R}^2 : \sigma_2$ پوشیده شده اند. چون f یک دیفیئومرفیسم است، $f(\sigma_1(u, v)) = \sigma_2(F(u, v))$ که در آن $F : U_1 \rightarrow U_2$ دو سوئی، هموار و F^{-1} هموار است. اکنون نتیجه از گزاره ۲.۴ بدست می آید. \square

مثال ۶.۴

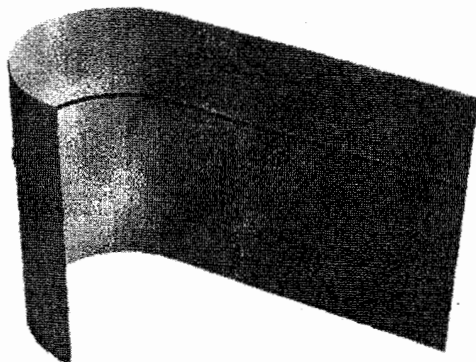
نگاشتی را در نظر بگیرید که صفحه را به طور پوشا دور استوانه دایره گونی که شعاع آن ۱ و محور آن محور z و پرمایش آن $U \rightarrow \mathbf{R}^3 : \sigma_2$

$$\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad U = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi\}$$

است، می‌پیماییم. اگر تمام صفحه را دور استوانه بپیماییم، نگاشتی دو سوئی بدست نمی‌آوریم، زیرا صفحه بی‌پایان دفعه دور تا دور استوانه خواهید پیمایید. لذا نوار بی‌پایان به پهنای 2π در صفحه yz ، که به وسیله $\sigma_1: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه

$$\sigma_1(u, v) = (0, u, v)$$

پارامتری شده است را در نظر می‌گیریم



نوار را دور استوانه می‌پیماییم به طوری که خط $z = v$ موازی محور y ها در ارتفاع v از صفحه xy دور «کمر» استوانه پیماییم. چون پهنای نوار برابر محیط استوانه است، یک نقطه روی نوار که مختص y ام آن u است به نقطه‌ای از استوانه با زاویه قطبی u می‌رود. با ترکیب این‌ها می‌بینیم که نگاشت پیمایش، نقطه $(0, u, v)$ از نوار را به نقطه $(\cos u, \sin u, v)$ از استوانه می‌نگارد. مثلاً با نماد بالا داریم،

$$f(0, u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

از نمایش f بر حسب پارامترها بدیهی است که

$$F(u, v) = (u, v)$$

چون

$$f(\sigma_1(u, v)) = \sigma_2(u, v)$$

این بخش را با ساختار کلی سطح‌های هموار خاتمه می‌دهیم و در حقیقت نشان می‌دهیم که هر سطح هموار از این طریق پدید می‌آید.

همان‌طور که در مثال بالا دیدیم، سطح اغلب به صورت سطوح تراز

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}$$

به ما داده می‌شوند، که در آن f یک تابع هموار و c یک مقدار ثابت است (البته، می‌توان همیشه با جایگزینی f به وسیله $f - c$ ، فرض نمود $c = 0$). به عنوان مثال، کره واحد S^2 سطح تراز $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است. در این مثال اطلس‌ها را با روش‌های ویژه می‌سازیم. نتیجه زیر شرایطی را بیان می‌کند که تحت آن سطح تراز، یک سطح هموار است. در حقیقت شرایط کلی‌تری که در آن نواحی مختلف سطح با توابع گوناگون تعریف می‌شود را در نظر می‌گیرد.

قضیه ۱.۴

فرض کنید S زیر مجموعه‌ای در \mathbf{R}^3 با شرایط زیر باشد: برای هر نقطه $P \in S$ ، زیر مجموعه باز W در \mathbf{R}^3 شامل P و تابع هموار $f: W \rightarrow \mathbf{R}$ وجود دارد به طوری که

$$S \cap W = \{(x, y, z) \in W \mid f(x, y, z) = 0\} \quad (i)$$

(ii) مشتقات جزئی f_x, f_y, f_z و همه با هم در نقطه P صفر نشوند.
در این صورت S یک سطح هموار است.

اثبات این قضیه را تا بخش ۷.۴ به تعویق می‌اندازیم.

مثال ۷.۴

برای کره واحد S^2 قرار می‌دهیم $W = \mathbf{R}^3$ ، $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. در این صورت $(f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, 2z)$ لذا در هر نقطه S^2 ، $\|(f_x, f_y, f_z)\| = 2$. خصوصاً، (f_x, f_y, f_z) همه جا روی S^2 مخالف صفر است. پس بنابر قضیه، S^2 یک سطح هموار است.

مثال ۸.۴

برای مخروط دوگانه مثال ۳.۴، تعریف کنید $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. در این صورت $(f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, -2z)$ فقط در رأس $(0, 0, 0)$ برابر صفر است. بنابراین با حذف رأس، یک سطح هموار بدست می‌آید که قبلاً مشاهده نمودیم.

در بقیه این کتاب، منظورمان از کلمه سطح، يك سطح هموار، و از قطعه سطح، يك قطعه سطح هموار عادی (یا معادلاً يك قطعه سطح مجاز) است.

به جز مواردی که ذکر می‌کنیم فرض می‌کنیم تمام سطوح مورد نظر همبندند، بدین معنا که هر دو نقطه از S با خمی که به‌طور کامل در S قرار می‌گیرد به هم متصل می‌شوند. این فرض محدودیتی ایجاد نمی‌کند، زیرا به راحتی می‌توانیم ثابت کنیم هر سطح اجتماع سطوح همبند جدا از هم است و بنابراین می‌توان هر یک از قسمت‌های همبند را جداگانه مطالعه نمود، همه سطوحی که با آن مواجه هستیم کم و بیش همبندند به‌جز مخروط دوگانه مثال ۳.۴ که اجتماع دو نیم مخروط جدا از هم $S \pm$ است، البته در صورتی که برای داشتن سطح، رأس آن را حذف کنیم.

تمرین‌ها

۶.۴ نشان دهید، اگر $f(x, y)$ یک تابع هموار باشد، نمودار آن

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

یک سطح هموار با اطلس مشتمل بر یک قطعه سطح عادی

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

است.

۷.۴ تحقیق کنید که شش قطعه سطح کره واحد در تمرین ۳.۴، عادی هستند. نگاشت‌های انتقالی بین آن‌ها را محاسبه کنید و نشان دهید که این نگاشت‌ها هموارند.

۸.۴ نشان دهید

$$\sigma(r, \theta) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta, r^2)$$

یک پرمایش بخش $z > 0$ از سهمی‌گون هذلولوی $z = x^2 - y^2$ است. (تصویر سهمی‌گون هذلولوی در گزاره ۶.۴ آمده است.) با استفاده از تمرین ۶.۴ پرمایش دیگری از همان قسمت با نام $\tilde{\sigma}$ ارائه دهید و تحقیق کنید که $\tilde{\sigma}$ یک بازپرمایش σ است. برای بخش $z < 0$ سهمی‌گون هذلولوی، پرمایش مشابه‌ای بیابید.

۹.۴ نشان دهید سطح تراز

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

که در آن a ، b و c اعداد ثابت غیر صفر می‌باشند، یک سطح هموار است (که بیضی‌گون خوانده می‌شود). (تصویر بیضی‌گون در گزاره ۶.۴ آمده است.)

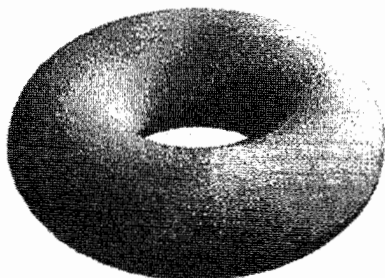
۱۰.۴ چنبره از دوران دایره C در صفحه Π حول خط مستقیم L واقع در Π که C را قطع نمی‌کند بوجود می‌آید. فرض کنید Π صفحه xz ، L محور z ها، $a > 0$ فاصله مرکز C از خط L و $b < a$ شعاع C باشد. نشان دهید چنبره یک سطح هموار است:
(i) با نشان دادن این‌که چنبره دارای اطلسی مشتعل بر قطعه سطح‌های

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta)$$

که در آن (θ, φ) در زیر مجموعه‌های باز و مناسبی از \mathbf{R}^2 قرار دارند می‌باشد.
(ii) با نشان دادن اینکه چنبره سطح تراز است که با رابطه

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

معین می‌شود.



۱۱.۴ اگر S یک سطح هموار باشد، وازه تابع هموار $S \rightarrow \mathbf{R}$ را تعریف کنید و نشان دهید اگر S یک سطح هموار باشد هر مؤلفه تابع شمول $S \rightarrow \mathbf{R}^2$ یک تابع هموار $S \rightarrow \mathbf{R}$ است.

۱۲.۴ نشان دهید انتقال‌ها و تبدیلات خطی معکوس‌پذیر در \mathbf{R}^3 ، سطوح هموار را به سطوح هموار می‌برند.

۳.۴ مماس‌ها، قائم‌ها و جهت‌پذیری

یک راه طبیعی مطالعه سطح S به وسیله خم‌های (هموار) γ است که در S قرار دارند. اگر $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ در تصویر قطعه سطح $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ در اطلس وابسته به S قرار بگیرد، نگاشت $(\alpha, \beta) \rightarrow U$ با $(u(t), v(t))$ وجود دارد، به طوری که

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \quad (2)$$

تابع u و v لزوماً هموارند (تمرین ۳۰.۴ را ببینید). برعکس، روشن است که اگر $t \mapsto (u(t), v(t))$ هموار باشد، آنگاه معادله (۲) خمی را که در S قرار دارد تعریف می‌کند. به طور کلی، اگر γ یک خم در S و $\gamma(t_0)$ نقطه‌ای از γ باشد که در قطعه سطح σ از S قرار می‌گیرد، آنگاه معادله (۲) برای تمام t ‌های موجود در بازه بازی شامل t_0 برقرار است. بنابراین می‌توانیم خودمان را به خم‌هایی نظیر (۲) محدود نماییم.

تعریف ۴.۴

فضای مماس در نقطه P از سطح S ، مجموعه بردارهای مماس در P بر تمام خم‌های موجود در S است که از نقطه P می‌گذرند.

گزاره ۴.۴

فرض کنید $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه از سطح S باشد که شامل نقطه P از S است و (u, v) مؤلفه‌های U باشند. فضای مماس S در نقطه P زیر فضای برداری از \mathbb{R}^3 است که به وسیلهٔ بردارهای σ_u و σ_v تولید می‌شوند. (مشتقات در نقطه $(u_0, v_0) \in U$ محاسبه شده‌اند که در آن $(\sigma(u_0, v_0) = P$)

اثبات ۴.۴

فرض کنید γ یک خم هموار در S باشد. مثلاً

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

را با یک نقطه نمایش دهید. از قاعده زنجیری داریم

$$\dot{\gamma} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}$$

بنابراین $\dot{\gamma}$ یک ترکیب خطی از σ_u و σ_v است.

برعکس، هر بردار در زیر فضای برداری \mathbb{R}^3 که به وسیله σ_u و σ_v تولید می‌شود، به صورت $\xi\sigma_u + \eta\sigma_v$ است که در آن ξ و η اسکالر هستند تعریف می‌کنیم

$$\gamma(t) = \sigma(u_0 + \xi t, v_0 + \eta t)$$

در این صورت، γ یک خم هموار در S است که در $t = 0$ مثلاً از نقطه P در S می‌گذرد. داریم

$$\dot{\gamma} = \xi\sigma_u + \eta\sigma_v$$

که نشان می‌دهد هر بردار که به وسیله σ_u و σ_v تولید می‌شود یک بردار مماس در نقطه P بر خمی در S است. \square

چون σ_u و σ_v بردارهای مستقل خطی‌اند، فضای مماس دو بعدی است، و از حالا به بعد صفحه مماس خوانده می‌شود. توجه کنید که تعریف ۴.۴ نشان می‌دهد که صفحه مماس مستقل از انتخاب قطعه شامل P است، اگر چه این مطلب بلافاصله از گزاره ۴.۴ مشاهده نمی‌شود (تمرین ۱۵.۴ را ببینید).

چون صفحه مماس در نقطه $P \in S$ از مبدا \mathbb{R}^3 می‌گذرد، لذا با ارائه یک بردار واحد عمود به آن، که قائم واحد بر S در نقطه P خوانده می‌شود به طور کامل معین می‌شود. البته دو بردار با چنین خاصیت وجود دارد، اما گزاره ۴.۴ نشان می‌دهد که انتخاب قطعه سطح $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ شامل P ما را به انتخاب معینی نزدیک می‌کند، که عبارت است از

$$N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \quad (۳)$$

و به وضوح یک بردار واحد عمود بر هر ترکیب خطی از σ_u و σ_v می‌باشد. (مشتقات در نقطه‌ای از U که متناظر به نقطه P ، است محاسبه شده‌اند). این بردار قائم واحد استاندارد بر قطعه سطح σ در نقطه P خوانده می‌شود. بر خلاف صفحه مماس، N_σ کاملاً مستقل از انتخاب قطعه σ شامل P نیست. در حقیقت، اگر $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ قطعه سطح دیگری شامل P در اطلس S باشد، در اثبات گزاره ۲.۴ نشان دادیم

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \det(J(\Phi))\sigma_u \times \sigma_v$$

که $J(\Phi)$ ژاکوبین نگاشت انتقالی Φ از σ به $\tilde{\sigma}$ است. لذا قائم واحد استاندارد $\tilde{\sigma}$ برابر

$$N_{\tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\|} = \pm \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \pm N_\sigma$$

است، که در آن علامت همان علامت دترمینال $J(\Phi)$ است. لذا به سمت تعریف زیر رهنمون می‌شویم.

تعریف ۵.۴

یک سطح جهت‌پذیر سطحی است که دارای اطلس با این خاصیت است، که اگر Φ نگاشت انتقال بین هر دو قطعه سطح در اطلس باشد، آنگاه $\det(J(\Phi)) > 0$ ، هر جایی که Φ تعریف شده است.

گزاره ۵.۴

سطح جهت‌پذیر S دارای یک انتخاب متعارف از بردار قائم واحد در هر نقطه است، که با گرفتن قائم واحد استاندارد هر قطعه سطح در اطلس S ، بدست می‌آید. \square

در حقیقت معکوس عبارت (بالا) نیز درست است: اگر سطح S دارای بردار قائم واحد N باشد که در هر نقطه $P \in S$ تعریف شده و به‌طور هموار به P وابسته است، در این صورت S جهت‌پذیر است. برای دیدن این مطلب با اطلس ماکسیمال S شروع می‌کنیم. اگر در هر نقطه از تصویر σ ، $\sigma_u \times \sigma_v$ ضرب مثبتی از N باشد، قطعه $\sigma(u, v)$ را نگه می‌داریم و در غیر این صورت آن را نادیده می‌گیریم. به این ترتیب قطعاتی که باقی می‌مانند تشکیل اطلسی می‌دهند که در شرط گزاره ۵.۴ صدق می‌کند. جزئیات بحث را (که، مشابه مثال بعدی است.) به خواننده واگذار می‌کنیم.

اغلب سطوحی که بررسی می‌کنیم جهت‌پذیر هستند (به تمرین ۱۶.۴ مراجعه کنید). در اینجا یک نمونه جهت‌ناپذیر ارائه می‌دهیم.

مثال ۹.۴

نوار موبیوس سطحی است که از دوران پاره خط L حول نقطه میانی آن یعنی P ، همزمان با وقتی که P روی دایره C حرکت می‌کند، به‌دست می‌آید به این طریق که وقتی P یکبار دایره C را طی می‌کند، L یک نیم‌دوران حول P دارد. اگر دایره C را در صفحه xy ، به صورت $x^2 + y^2 = 1$ و L را پاره‌خطی با طول ۱ که در نقطه شروع موازی محور z ‌ها بوده و نقطه میانی آن، P ، در $(1, 0, 0)$ واقع است فرض کنیم، در این صورت بعد از اینکه P حول محور z ‌ها به اندازه θ دوران می‌کند، L باید به‌اندازه $\frac{\theta}{2}$ حول P در صفحه‌ای که شامل P و محور z ‌ها است، دوران کند.

بنابراین نقطه بعدی در صورتی که نقطه آغازی روی \mathcal{L} ، $(1, 0, t)$ باشد نقطه

$$\sigma(t, \theta) = \left(\left(1 - t \sin \frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \cos \theta, \left(1 - t \sin \frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}} \right)$$

است.

دامنه تعریف σ را به صورت

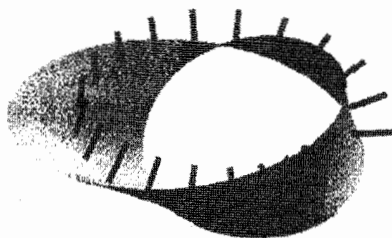
$$U = \{(t, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid -1/\sqrt{2} < t < 1/\sqrt{2}, 0 < \theta < 2\pi\}$$

در نظر می‌گیریم.

می‌توان دومین قطعه یعنی $\tilde{\sigma}$ را با همان فرمول σ اما با دامنه

$$U = \{(t, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid -1/\sqrt{2} < t < 1/\sqrt{2}, -\pi < \theta < \pi\}$$

تعریف کرد. می‌توان دید که این دو قطعه، متشکل از قطعه سطح‌های عادی، تشکیل یک اطلس برای نوار موبیوس می‌دهند که نوار موبیوس را یک سطح هموار می‌کند.



قائم واحد استاندارد N_σ را در نقاط میانی ($t = 0$) محاسبه می‌کنیم. در چنین نقاطی،

داریم:

$$\sigma_t = \left(-\sin \frac{\theta}{\sqrt{2}} \cos \theta, -\sin \frac{\theta}{\sqrt{2}} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}} \right), \quad \sigma_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

بنابراین

$$\sigma_t \times \sigma_\theta = \left(-\cos \theta \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}}, -\sin \theta \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{\theta}{\sqrt{2}} \right)$$

که بردار واحد است بنابراین با N_σ برابر است.

اگر نوار موبیوس جهت‌پذیر باشد، بردار قائم واحد خوش‌تعریف N که در هر نقطه از S تعریف می‌شود موجود است و به‌طور هموار روی S تغییر می‌کند. در نقطه میانی $\sigma(0, \theta)$ روی دایره میانی باید

$$N = \lambda(\theta)N_\sigma$$

که در آن $\lambda: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbf{R}$ هموار و برای هر θ ، $\lambda(\theta) = \pm 1$. لذا برای هر $\theta \in (0, 2\pi)$ باید $\lambda(\theta) = +1$ یا $\lambda(\theta) = -1$. با جایگزینی بردار $-N$ ، در صورت لزوم، به جای N می‌توان فرض کرد $\lambda = 1$. در نقطه $\sigma(0, 0) = \sigma(0, 2\pi)$ (چون N هموار است) باید داشته باشیم

$$N = \lim_{\theta \downarrow 0} N_\sigma = (-1, 0, 0)$$

و همچنین

$$N = \lim_{\theta \uparrow 2\pi} N_\sigma = (1, 0, 0)$$

این تناقض نشان می‌دهد که نوار موبیوس جهت‌پذیر نیست.

تمرین‌ها

۱۳.۴ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر قطعه سطح‌های زیر را در نقطه داده شده پیدا کنید:

(i) $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), (1, 1, 0)$

(ii) $\sigma(r, \theta) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta, r^2), (1, 0, 1)$

۱۴.۴ مارپیچ‌نما سطحی است که وقتی بالگرد و ملخ آن هر دو با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، به‌وسیلهٔ ملخ بالگرد طی یا اصطلاحاً جاروب می‌شود (تصویری از مارپیچ‌نما، در مثال ۳.۹ موجود است) نشان دهید اگر بالگرد در جهت محور z ‌ها بالا برود، مارپیچ‌نما می‌تواند به صورت

$$\sigma(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \lambda u)$$

که در آن λ ثابت است، پرمایش شود. نشان دهید کوتانژانت زاویه‌ای که بردار قائم واحد استاندارد σ در نقطه P با محور z ‌ها می‌سازد، مساوی نسبت فاصله P از محور است.

۱۵.۴ اگر $\sigma(u, v)$ یک قطعه سطح باشد نشان دهید وقتی که σ بازپرمایش شود مجموعه ترکیبات خطی σ_u و σ_v تغییری نمی‌کند.

۱۶.۴ سطح S که با $f(x, y, z) = 0$ تعریف شده را در نظر بگیرید نشان دهید وقتی f تابعی هموار چنان باشد که در هر نقطه از S ، f_x ، f_y و f_z با هم صفر نشوند، آنگاه

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

در هر نقطه، عمود بر صفحه مماس است و نتیجه بگیرید که S جهت پذیر است (با تمرین ۱۷.۱ مقایسه کنید)

۱۷.۴ فرض کنید S یک سطح و $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع هموار باشد. (به تمرین ۱۱.۴ مراجعه کنید) نشان دهید در هر نقطه $P \in S$ ، بردار یگانه $\nabla_S F$ در صفحه مماس در P موجود است به طوری که برای هر خم γ در S با $\gamma(0) = P$

$$(\nabla_S F) \cdot \dot{\gamma}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t))$$

نتیجه بگیرید که $\nabla_S F = 0$ اگر F دارای ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی در P باشد.

نشان دهید اگر S سطح تمرین ۱۶.۴ باشد آنگاه $\nabla_S F$ ، تصویر متعامد ∇F روی صفحه مماس بر S است و نتیجه بگیرید اگر F دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی در P باشد آنگاه به ازای λ ای $\nabla F = \lambda \nabla f$ (به این روش، روش مضارب نامعین لاگرانژ می‌گویند).

۴.۴ مثال‌هایی از سطوح

در اینجا برخی از ساده‌ترین سطوح را بررسی می‌کنیم. بقیه را بعداً معرفی می‌کنیم.

مثال ۱۰.۴

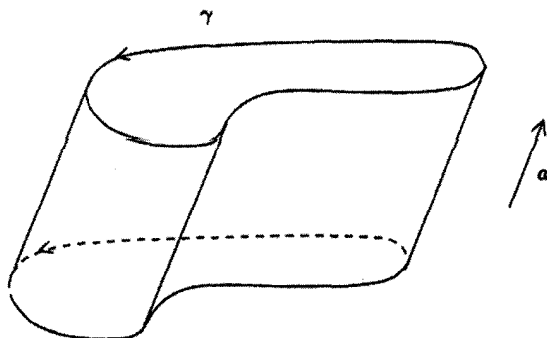
یک استوانه (تعمیم یافته) سطحی است که از انتقال یک خم حاصل می‌شود. اگر $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ خم و a بردار واحد در جهت انتقال باشد نقطه حاصل از انتقال $\gamma(u)$ به وسیله بردار va به صورت

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + va$$

است. در این صورت $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، که در آن $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < u < \beta\}$ ، به وضوح هموار است. چون

$$\sigma(u, v) = \sigma(u', v') \Leftrightarrow \gamma(u) - \gamma(u') = (v' - v)a$$

برای اینکه σ یک قطعه سطح (و در نتیجه یک به یک) باشد، هیچ خط مستقیم موازی با a نباید γ را در بیش از یک نقطه قطع کند. نهایتاً $\dot{\gamma} = \sigma_u$ و $\sigma_v = a$ با نقطه نمایش داده شده، بنابراین σ عادی است اگر و فقط اگر بردار مماس بر γ هرگز موازی a نباشد.



وقتی γ در صفحه عمود بر a واقع باشد، ساده‌ترین پرمایش را داریم. در حقیقت با تعویض γ و تصویرش بر صفحه، همواره می‌توان این کار را کرد. (تمرین ۲۲.۴ را ببینید.) در این صورت شرط عادی بودن به‌وضوح برقرار است اگر $\dot{\gamma}$ هرگز صفر نشود یعنی اگر γ عادی باشد. ممکن است صفحه، صفحه xy و $a = (0, 0, 1)$ موازی محور z ها باشد در این صورت $\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$ و پرمایش به‌صورت

$$\sigma(u, v) = (f(u), g(u), v)$$

است که در آن f و g توابعی هموار هستند.

به عنوان مثال اگر با دایره شروع کنیم، استوانه (دایره‌گون) معمولی به‌دست می‌آید. با فرض اینکه مرکز دایره مبدأ مختصات، شعاع آن ۱ و دایره در صفحه xy باشد، پرمایش

$$\gamma(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

را داریم که در آن $0 < u < 2\pi$ و یا $-\pi < u < \pi$ است. از این (بحث)، اطلسی برای استوانه، مشتمل بر دو قطعه که هر دو به وسیله

$$\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

و روی مجموعه‌های باز

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi\}, \quad \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi\}$$

تعریف می‌شوند، حاصل می‌شود.

مثال ۱۱.۴

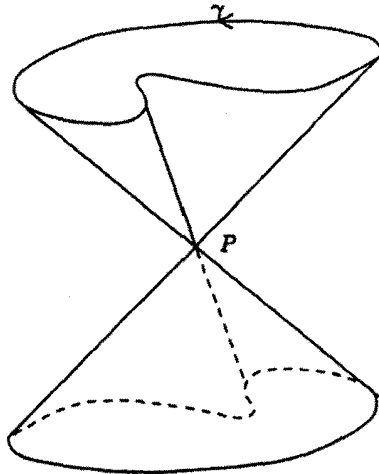
یک مخروط (تعمیم یافته) اجتماعی از خطوط راست است که از یک نقطه ثابت و نقاط واقع بر یک خم می‌گذرند. اگر p نقطه ثابت و $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ خم (موردنظر) باشد، معادله نقطه‌ای که روی خط گذرا از نقاط p و $\gamma(u)$ واقع است به صورت

$$\sigma(u, v) = (1 - v)p + v\gamma(u)$$

می‌باشد لذا σ به‌وضوح هموار است. حالا

$$\sigma(u, v) = \sigma(u', v') \Leftrightarrow v\gamma(u) - v'\gamma(u') + (v' - v)p = 0$$

که بیان می‌کند نقاط p ، $\gamma(u)$ و $\gamma(u')$ هم راستا هستند. بنابراین برای اینکه σ یک قطعه سطح باشد، هیچ خط مستقیم گذرا از نقطه p نباید بیش از یک بار از نقاط γ بگذرد. (خصوصاً γ نباید از p بگذرد) نهایتاً داریم $\sigma_u = v\dot{\gamma}$ و $\sigma_v = \gamma - p$ را با نقطه نمایش داده‌ایم) لذا σ عادی است اگر $v \neq 0$ یعنی رأس مخروط حذف شود (به تمرین ۳.۴ مراجعه کنید) و هیچ یک از خطوط مستقیمی که مخروط را می‌سازند، مماس بر γ نشوند.



ساده‌ترین پرمایش وقتی است که γ در صفحه باشد. اگر این صفحه شامل p باشد، مخروط بخشی از صفحه است. در غیر این صورت p را مبدأ مختصات و صفحه را $z = 1$ بپذیرید. در این صورت به‌ازای توابع همواری مانند f و g ، $\gamma(u) = (f(u), g(u), 1)$ و پرمایش از

$$\sigma(u, v) = v(f(u), g(u), 1)$$

بدست می‌آید.

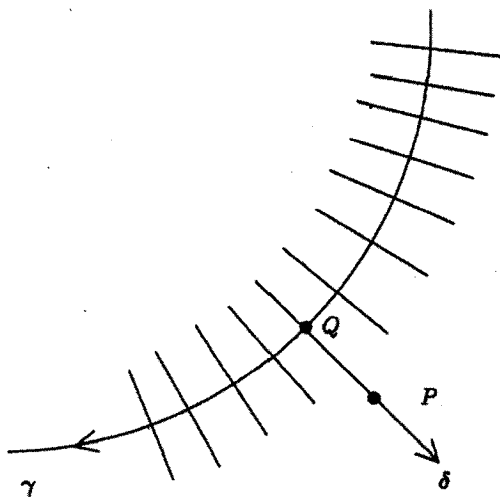
مثال‌های ۱۰.۴ و ۱۱.۴ هر دو حالت‌های خاص سطوح زیر هستند.

مثال ۱۲.۴

یک سطح خط‌دار، سطحی است که از اجتماع خطوط راست که مولدهای سطح نامیده می‌شوند تشکیل می‌شود. فرض کنید C یک خم در \mathbb{R}^3 باشد که چنین خط‌هایی را قطع می‌کند. هر نقطه P از سطح روی یکی از خطوط راستی که C را قطع می‌کند قرار دارد، آن را Q بنامید. اگر γ پرمایش C با $Q = \gamma(u)$ و اگر بردار غیرصفر در جهت خط گذرا از $\gamma(u)$ باشد، آنگاه موقعیت برداری P ، به‌ازای اسکالری مانند v به‌صورت

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

است.



با نمایش نقطه به‌جای $\frac{d}{du}$ ، داریم

$$\sigma_u = \dot{\gamma} + v\dot{\delta}, \quad \sigma_v = \delta$$

لذا σ عادی است اگر $\dot{\gamma} + v\dot{\delta}$ و δ مستقل خطی باشند. این (ادعا) درست است اگر مثلاً $\dot{\gamma}$ و δ مستقل و v به اندازه کافی کوچک باشد. لذا برای بدست آوردن سطح، خم C نباید مماس بر مولدها باشد.

مثال ۱۳.۴

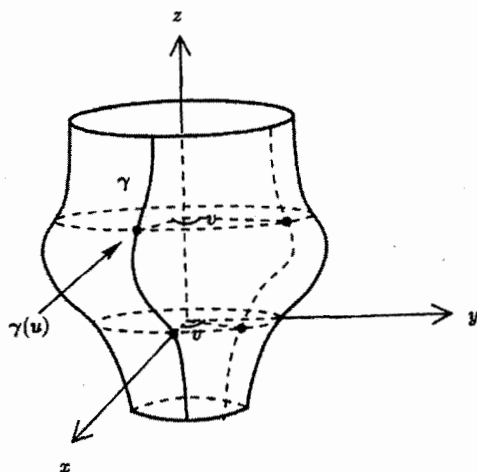
یک سطح دورانی، سطحی است که از دوران یک خم مسطح که خم برش قائم نام دارد، حول یک خط مستقیم در صفحه حاصل می‌شود. دایره به دست آمده از دوران یک نقطه ثابت روی خم برش قائم حول محور دوران، موازی‌های سطح و خم‌های روی سطح که از دوران خم برش قائم با یک زاویه ثابت، حاصل می‌شود، نصف‌النهارهای آن نامیده می‌شود (که با اصطلاحات جغرافی مطابقت دارد، اگر تصور ما از زمین، سطح حاصل از دوران دایره عظیمه گذرا از قطب‌ها حول محور قطبی بوده و u و v به ترتیب به عنوان عرض و طول جغرافیایی در نظر گرفته شوند). فرض کنید محور دوران محور z ها و صفحه، صفحه xz باشد. هر نقطه P روی سطح، از دوران نقطه‌ای مانند Q واقع بر خم برش قائم به اندازه زاویه v حول محور z ها به دست می‌آید. اگر

$$\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$$

یک پرمایش خم برش قائم شامل Q باشد در این صورت موقعیت برداری P به صورت

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

است.



برای بررسی عادی بودن، محاسبات زیر را انجام می‌دهیم (نقطه نشان‌دهنده $\frac{d}{du}$ است):

$$\sigma_u = (f' \cos v, f' \sin v, g'), \quad \sigma_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$$

$$\therefore \sigma_u \times \sigma_v = (f g' \cos v, -f g' \sin v, f f')$$

$$\therefore \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = f^2 (f'^2 + g'^2)$$

بنابراین $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ اگر $f(u) \neq 0$ باشد، مثلاً اگر γ محور z ها را قطع نکند، و اگر f و \tilde{v} تماماً صفر نشوند یعنی، اگر γ عادی باشد. در این حالت فرض می‌کنیم $f(u) > 0$. زیرا $f(u)$ فاصله $\sigma(u, v)$ از محور دوران است. بنابراین σ یک به یک است مشروط بر اینکه γ خودش را قطع نکند و زاویه دوران v به فاصله بازی به طول حداکثر 2π محدود شود. تحت این شرایط، قطعه سطح‌هایی از نوع σ به سطح دوران، ساختار سطح هموار می‌دهند.

تمرین‌ها

۱۸.۴ سطحی که از دوران خم $x = \cosh z$ در صفحه xz حول محور z ها بدست می‌آید زنجیروار نامیده می‌شود. یک اطلس برای این سطح ارائه دهید. (تصویر زنجیروار در بخش ۲.۹ آمده است.)

۱۹.۴ نشان دهید

$$\sigma(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$$

یک قطعه سطح عادی برای کره واحد است (که تصویر مرکاتور^۱ خوانده می‌شود). نشان دهید نصف‌النهارها و موازی‌ها روی کره تحت σ متناظر با خطوط مستقیم عمودی در صفحه هستند.

۲۰.۴ خم ثابت - زاویه خمی روی کره واحد است که نصف‌النهار را در یک زاویه ثابت قطع می‌کند، این زاویه ثابت را α بگیرید، نشان دهید در قطعه سطح مرکاتور σ (تمرین ۱۹.۴ را ببینید)، خم ثابت-زاویه‌ی سرعت-واحد در شرط

$$\dot{u} = \cos \alpha \cosh u, \quad \dot{v} = \pm \sin \alpha \cosh u$$

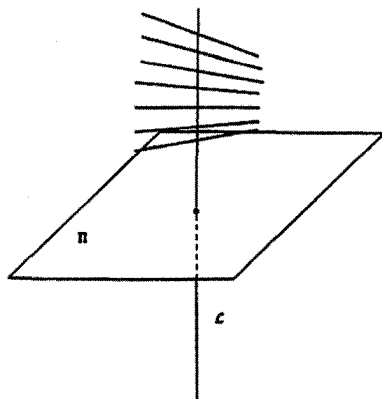
صدق می‌کند (نقطه نشان‌دهنده مشتق خم ثابت-زاویه نسبت به پارامتر آن است) ثابت کنید خم‌های ثابت-زاویه تحت σ متناظر به خطوط راست در صفحه uv هستند.

۲۱.۴ یک مخروط‌گون راست سطح خط داری است که مولدهای آن موازی صفحه داده شده Π هستند و از خط راست \mathcal{L} عمود بر Π می‌گذرند. اگر Π صفحه xy و \mathcal{L} محور z ها باشد، نشان دهید

$$\sigma(u, v) = (v \cos \theta(u), v \sin \theta(u), u)$$

1) Mercator's projection

یک قطعه سطح عادی برای مخروطگون است، که در آن $\theta(u)$ زاویه‌ای است که خطوط گذرا از (\circ, \circ, u) با محور z ها می‌سازند ($\theta(u)$ یک تابع هموار از u فرض شده است). با فرض $\theta(u) = u$ ماریچچ نما بدست می‌آید. (تمرین ۱۴.۴).



۲۲.۴ نشان دهید اگر $\sigma(u, v)$ استوانه (تعمیم یافته) مثال ۱۰.۴ باشد:

(i) $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(u) - (\gamma(u) \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$ خم در صفحه عمود بر \mathbf{a} قرار می‌گیرد

(ii) $\sigma(u, v) = \tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}\mathbf{a}$ که در آن $\tilde{v} = v + \gamma(u) \cdot \mathbf{a}$

(iii) $\tilde{\sigma}(u, \tilde{v}) = \tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}\mathbf{a}$ باز پرمایش $\sigma(u, v)$ است.

۵.۴ سطوح درجه دوم

ساده‌ترین سطوح، مثلاً صفحات دارای معادلات دکارتی خطی برحسب x و y و z هستند. با این دید، ساده‌ترین سطوح بعدی، آنهایی هستند که معادلات دکارتی آنها معادله درجه دوم از x ، y و z است. که منجر به تعاریف زیر می‌شود.

تعریف ۶.۴

یک درجه دوم زیر مجموعه‌ای از \mathbf{R}^3 است که با معادله‌ای به شکل

$$(\mathbf{r}A) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + c = 0$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathbf{r} = (x, y, z)$ و A یک ماتریس ثابت متقارن 3×3 ، $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ یک بردار ثابت و c یک اسکالر است.

برای ملاحظه دقیق‌تر، فرض می‌کنیم،

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}, \quad b = (b_1, b_2, b_3)$$

در این صورت معادله درجه دوم به صورت

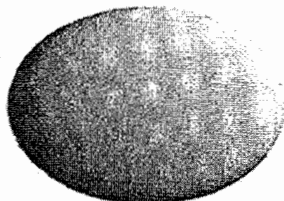
$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5yz + 2a_6xz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \quad (۴)$$

درمی‌آید. یک معادله درجه دوم لزوماً یک سطح نیست. مثلاً معادله درجه دوم $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ یک نقطه است، و معادله $x^2 + y^2 = 0$ یک خط راست است. مثال جالب‌تر معادله درجه دوم $xy = 0$ است، که اجتماع دو صفحه متقاطع است، که آن نیز یک سطح نیست. (به‌طور وضوح، دارای «گوشه» در طول خط متقاطع دو صفحه است.) قضیه زیر نشان می‌دهد که کافیست معادلات درجه دومی را که دارای شکل ساده‌ای هستند در نظر گرفت.

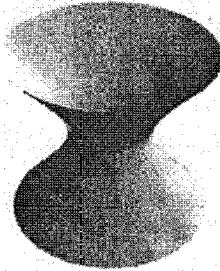
گزاره ۶.۴

با ایجاد حرکت صلب در R^3 هر معادله درجه دوم غیر تهی (۴) که در آن همه ضرایب با هم صفر نیستند می‌تواند به معادله دکارتی یکی از شکل‌های زیر تبدیل شود:

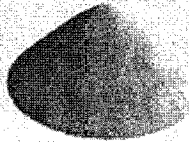
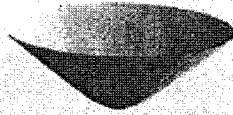
$$(i) \text{ بیضی گون: } \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$



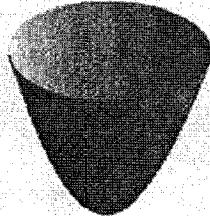
$$(ii) \text{ هذلولی گون یک پارچه: } \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1$$



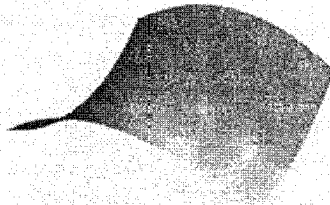
(iii) هذلولی گون دو پارچه: $\frac{z^2}{r^2} - \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$



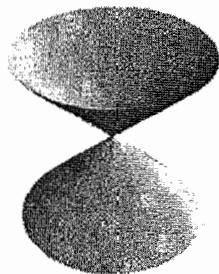
(iv) سهمی گون بیضوی: $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = z$



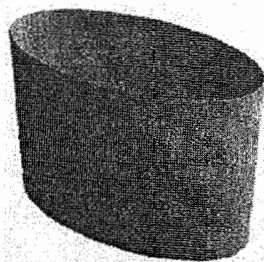
(v) سهمی گون هذلولوی: $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$



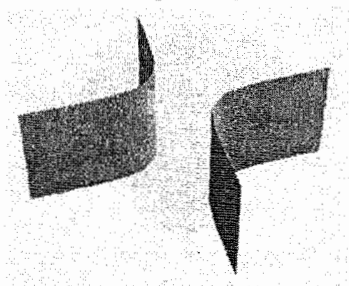
(vi) مخروط درجه دو: $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 0$



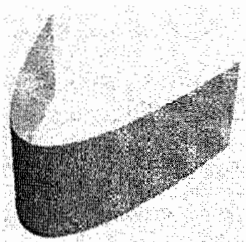
(vii) استوانه بیضوی: $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$



(viii) استوانه هذلولوی: $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$



(ix) استوانه سهموی: $\frac{x^2}{p^2} = y$



$$\begin{aligned}
 (xi) \quad & x^2 = p^2: \text{ دو صفحه موازی:} \\
 (xii) \quad & \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 0: \text{ دو صفحه متقاطع:} \\
 (xiii) \quad & \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 0: \text{ خط مستقیم:} \\
 (xiv) \quad & \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 0: \text{ نقطه:}
 \end{aligned}$$

در هر حالت p, q, r ثابت‌های غیر صفر می‌باشند.

اثبات ۶.۴

اثبات به حقیقت زیر وابسته است. اگر A یک ماتریس متقارن حقیقی باشد آنگاه، ماتریس P وجود دارد به طوری که $P^t P = I$ و $\det(P) = 1$ و $P^t A P$ یک ماتریس قطری مانند A' است (P^t ترانزاده P است). درآیه‌های قطر A' مقادیر ویژه A بوده و سطرهاى P بردارهای ویژه مربوطه می‌باشند.

اگر A مانند تعریف ۶.۴ باشد، تعریف می‌کنیم $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ ، $\mathbf{b}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ که در آن

$$(\mathbf{x}' \ \mathbf{y}' \ \mathbf{z}') = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})P, \quad (b'_1 \ b'_2 \ b'_3) = (b_1 \ b_2 \ b_3)P$$

معادله درجه دوم را به صورت

$$(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})A(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})^t + (b_1 \ b_2 \ b_3)(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})^t + c = 0$$

بنویسید و توجه کنید که

$$(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}) = (\mathbf{x}' \ \mathbf{y}' \ \mathbf{z}')P^t, \quad (b_1 \ b_2 \ b_3) = (b'_1 \ b'_2 \ b'_3)P^t$$

داریم

$$(\mathbf{x}' \ \mathbf{y}' \ \mathbf{z}')A'(\mathbf{x}' \ \mathbf{y}' \ \mathbf{z}')^t + (b'_1 \ b'_2 \ b'_3)(\mathbf{x}' \ \mathbf{y}' \ \mathbf{z}')^t + c = 0$$

$$\therefore (\mathbf{r}'A') \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{r}' + c = 0$$

$$\therefore a'_1 x'^2 + a'_2 y'^2 + a'_3 z'^2 + b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z' + c = 0$$

که در آن درآیه‌های قطری A' ، یعنی مقادیر ویژه A هستند. چون هر ماتریس 3×3 با $P^t P = I$ و $\det(P) = 1$ نمایانگر یک دوران در \mathbf{R}^3 است، معادله درجه دوم جدید از

حرکت صلب روی معادله داده شده به دست می آید. بنابراین می توانیم همان معادله درجه دوم (۴) را در نظر بگیریم، اما فرض کنیم که $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ ، یعنی

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1x = b_2y + b_3z + c = 0 \quad (5)$$

اکنون فرض می کنیم، در معادله (۵) $a_1 \neq 0$. اگر فرض کنیم $x' = x + \frac{b_1}{2a_1}$ ، که متناظر به انتقال در \mathbf{R}^3 است، معادله تبدیل می شود به

$$a_1x'^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_2y + b_3z + c' = 0$$

که در آن c' یک ثابت است. به زبان دیگر، اگر $a_1 \neq 0$ ، می توان فرض نمود $b_1 = 0$ و البته مشابه این بحث برای a_2, a_3 برقرار است.

اگر a_1, a_2, a_3 در معادله (۵) همگی مخالف صفر باشند، معادله به صورت زیر در می آید.

$$a_1x^2 + a_2y^2 + b_3z^2 + c = 0$$

اگر $c \neq 0$ ، بسته به علامت های a_1, a_2, a_3 و c حالت های (i)، (ii) و (iii) به دست می آید، و اگر $c = 0$ شرایط (vi) و (xiv) را بدست می آوریم.

اگر فقط یکی از a_1, a_2, a_3 صفر باشد، مثلاً $a_3 = 0$ ، معادله به شکل

$$a_1x^2 + a_2y^2 + b_3z + c = 0 \quad (6)$$

در می آید. اگر $b_3 \neq 0$ و تعریف کنیم $z' = z + \frac{c}{b_3}$. در این صورت با یک انتقال (و با تقسیم بر b_3)، به حالت زیر می رسمیم.

$$a_1x^2 + a_2y^2 + z = 0$$

که حالت های (iv) و (v) را می دهد.

اگر در معادله (۶) $b_3 = 0$ ، آنگاه

$$a_1x^2 + a_2y^2 + c = 0$$

اگر $c = 0$ حالت های (xii) و (xiii) را بدست می آوریم. اگر $c \neq 0$ ، طرفین را بر c تقسیم کنیم و حالت های (vii) و (viii) بدست می آید.

اکنون فرض کنید که $a_2 = a_3 = 0$ ، اما $a_1 \neq 0$ ، در این صورت داریم

$$a_1 x^2 + b_2 y + b_3 z + c = 0 \quad (۷)$$

اگر b_2 و b_3 با هم صفر نشوند، با چرخاندن صفحه yz ، به طوری که محور y موازی بردار (b_2, b_3) شود، به حالتی می‌رسیم که $b_2 \neq 0$ و $b_3 = 0$ ، و آنگاه با یک انتقال در طول محور y ‌ها می‌توانیم قرار دهیم $c = 0$. در این صورت به معادله

$$a_1 x^2 + y = 0$$

می‌رسیم، که حالت (ix) است. اگر در معادله (۷)، $b_3 = b_2 = 0$ ، آنگاه $c = 0$ حالت (x) و $c \neq 0$ حالت (xi) است.

بالاخره، اگر $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ، معادله (۵) یک صفحه است، که بعد از یک حرکت صلب مجدداً حالت (x) است. \square

مثال ۱۴.۴

معادله درجه دوم

$$x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 3z = 7$$

را در نظر بگیرید. با قرار دادن $x' = x + 3$ ، $y' = y - 1$ ، (یک انتقال)، داریم

$$x'^2 + 2y'^2 + 3z = 18$$

با قرار دادن $z' = z - 6$ ، (انتقال دوم)، داریم

$$x'^2 + 2y'^2 + 3z' = 0$$

بالاخره، با قرار دادن $x'' = x'$ ، $y'' = -y'$ ، $z'' = -z'$ (یک دوران به اندازه π حول محور x ‌ها) داریم

$$\frac{1}{3}x''^2 + \frac{2}{3}y''^2 = z''$$

که سهمی‌گون بیضوی است. و به وسیله $x'' = u$ ، $y'' = v$ ، $z'' = \frac{1}{3}u^2 + \frac{2}{3}v^2$ پارامتری می‌شود. در این صورت $x = u - 3$ ، $y = 1 - v$ ، $z = 6 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{2}{3}v^2$ که نشان می‌دهد

معادله درجه دوم داده شده یک سطح هموار با اطلس مشتمل بر قطعه سطح

$$\sigma(u, v) = \left(u - 3, 1 - v, 6 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{2}{3}v^2 \right)$$

می‌باشد.

تمرین‌ها

۲۳.۴ پرمایش معادلات درجه دوم بندهای (i)-(xi) از گزاره ۶.۴ را بنویسید (در حالت (vi) می‌بایستی مبدأ را حذف کنید).

۲۴.۴ کدام سطوح درجه دوم هستند؟

(a) استوانه‌های تعمیم‌یافته

(b) مخروط‌های تعمیم‌یافته

(c) سطوح خط دار

(d) سطوح دورانی

۲۵.۴ با قرار دادن

$$u = \frac{x}{p} - \frac{y}{q}, \quad v = \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

یک قطعه سطح بیابید که سهمی‌گون هذلولوی

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$$

را بپوشاند. نشان دهید که سهمی‌گون هذلولوی خط‌دار دوگانه است.

۲۶.۴ نشان دهید که اگر معادله درجه دوم شامل ۳ نقطه از یک خط راست باشد، آنگاه شامل تمام خط راست است. (معادله پارامتری خط را به صورت $\gamma(t) = a + bt$ بنویسید، و با جایگزینی در معادله (۴) یک معادله درجه دوم از t ارائه دهید.) نشان دهید، اگر L_1 ، L_2 و L_3 خطوط مستقیم غیر متقاطع در \mathbf{R}^3 باشند، آنگاه معادله درجه دومی که شامل آنهاست وجود دارد. (از هر کدام سه نقطه در نظر بگیرید و نشان دهید معادله درجه دومی که از هر نه نقطه می‌گذرد وجود دارد.)

۲۷.۴ با استفاده از تمرین ۲۶.۴ نشان دهید هر سطح خط دار دوگانه (قسمتی از) یک سطح درجه دوم است. (یک سطح خط دار دوگانه است اگر اجتماع دو دسته از خطوط مستقیمی باشد که هیچ دو خطی از یک دسته متقاطع نباشد، اما هر خط از اولین دسته تمام خطوط دسته دوم را به جز تعداد با پایان قطع کند.) کدامیک از سطوح درجه دوم خط دار دوگانه هستند؟

۶.۴ سیستم‌های متعامد سه‌گانه

این بخش را با نشان دادن اینکه چگونه سطوح درجه دوم، مثالهای زیبایی از سیستم‌های متعامد سه‌گانه ارائه می‌دهند خاتمه می‌دهیم. منظور ما از چنین سیستمی، سه دسته از سطوح هستند که هر کدام به یک پارامتر وابسته هستند، با این خاصیت که اگر P یک نقطه روی یک سطح از هر دسته باشد، صفحات مماس این سطوح در نقطه P دوه‌دو عمودند. البته ساده‌ترین مثال، مشتمل بر صفحات موازی با یکی از سه صفحه مختصات است. مثالهای تقریباً ساده دیگر، در تمرین ۲۸.۴ ارائه شده است. اما مثال جالب‌تر با سه دسته مشتمل بر بیضگون‌ها، هذلولی‌گون‌های یک‌پارچه و هذلولی‌گون‌های دو پارچه ساخته می‌شود.

برای دیدن آن، فرض کنید p, q, r ثابت و $q^2 < r^2 < p^2 < \infty$. برای $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ و $t \neq p^2, q^2, r^2$ قرار دهید

$$F_t(x, y, z) = \frac{x^2}{p^2 - t} + \frac{y^2}{q^2 - t} + \frac{z^2}{r^2 - t}$$

نقطه $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ را با a, b و c مخالف با صفر، ثابت نگه می‌داریم. خواص زیر روشن است:

(i) $F_t(a, b, c)$ یک تابع پیوسته از t در هر بازه باز $(-\infty, p^2), (p^2, q^2), (q^2, r^2)$ و (r^2, ∞) است.

(ii) $F_t(a, b, c) \rightarrow \infty$ وقتی که $t \rightarrow \pm\infty$.

(iii) $F_t(a, b, c) \rightarrow \infty$ وقتی که t به p^2, q^2 یا r^2 از سمت چپ نزدیک می‌شود، و $F_t(a, b, c) \rightarrow -\infty$ وقتی که t از سمت راست به p^2, q^2 یا r^2 نزدیک می‌شود.

از این خواص و قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود که حداقل یک t در هر بازه باز $(-\infty, p^2), (p^2, q^2)$ و (q^2, r^2) وجود دارد به طوری که $F_t(a, b, c) = 1$. از طرف دیگر

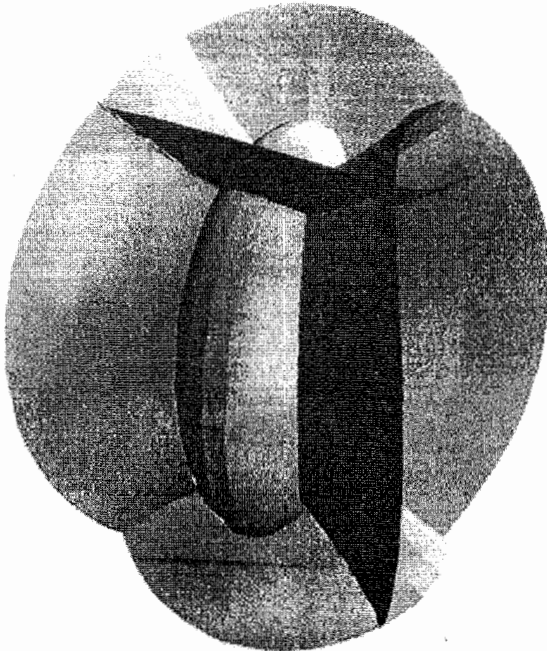
معادله $F_t(a, b, c) = 1$ معادل با معادله درجه سوم $G_t(a, b, c) = 0$ است که در آن

$$G_t(a, b, c) = a^2(q^2 - t)(r^2 - t) + b^2(p^2 - t)(r^2 - t) + c^2(p^2 - t)(q^2 - t) - (p^2 - t)(q^2 - t)(r^2 - t) \quad (8)$$

و بنابراین حداکثر دارای سه ریشه حقیقی است. به دنبال آن نتیجه می‌گیریم که اعداد منحصر بفرد $u \in (-\infty, p^2)$, $v \in (p^2, q^2)$ و $w \in (q^2, r^2)$ (البته به (a, b, c) وابسته هستند) وجود دارند که

$$F_u(a, b, c) = 1, F_v(a, b, c) = 1, F_w(a, b, c) = 1 \quad (9)$$

سه سطح درجه دوم $F_u(x, y, z) = 1$, $F_v(x, y, z) = 1$ و $F_w(x, y, z) = 1$ به ترتیب بیضی‌گون، هذلولی‌گون یک پارچه و هذلولی‌گون دو پارچه می‌باشند و نشان داده‌ایم که از هر کدام یکی وجود دارد که از هر نقطه $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ که در هیچ‌یک از صفحات مختصات قرار ندارد می‌گذرد. نشان می‌دهیم که آنها تشکیل یک سیستم متعامد سه‌گانه می‌دهند.



درواقع، بردار

$$\left(\frac{x}{p^2 - t}, \frac{y}{q^2 - t}, \frac{z}{r^2 - t} \right)$$

عمود بر صفحه مماس سطح $F_t(x, y, z) = 1$ در نقطه (x, y, z) است (تمرین ۱۶.۴ را ببینید)

لذا برای نشان دادن این که دو سطح اول در (۹) در نقطه (a, b, c) بر هم عمودند، به عنوان مثال، باید نشان دهیم

$$\frac{a^2}{(p^2 - u)(p^2 - v)} + \frac{b^2}{(q^2 - u)(q^2 - v)} + \frac{c^2}{(r^2 - u)(r^2 - v)} = 0$$

اما سمت چپ این معادله برابر است با

$$\frac{F_u(a, b, c) - F_v(a, b, c)}{u - v} = \frac{1 - 1}{u - v} = 0$$

همچنین می‌توانیم یک پرمایش همزمان از سه دسته بسازیم. توجه کنید که چندجمله‌ای درجه سه، $G_t(a, b, c)$ برابر $(t - u)(t - v)(t - w)$ است، زیرا بر این حاصل ضرب قابل تقسیم است و با ضرایب t^3 سازگار است. با قرار دادن $t = p^2, q^2, r^2$ حل معادلات منتج بر اساس a^2, b^2 و c^2 داریم

$$\begin{aligned} a &= \pm \sqrt{\frac{(p^2 - u)(p^2 - v)(p^2 - w)}{(r^2 - p^2)(q^2 - p^2)}} \\ b &= \pm \sqrt{\frac{(q^2 - u)(q^2 - v)(q^2 - w)}{(p^2 - q^2)(r^2 - q^2)}} \\ c &= \pm \sqrt{\frac{(r^2 - u)(r^2 - v)(r^2 - w)}{(p^2 - r^2)(q^2 - r^2)}} \end{aligned} \quad (10)$$

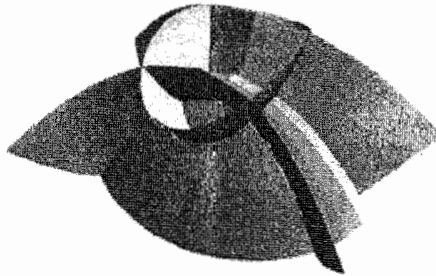
تعریف کنید $\sigma(u, v, w) = (x, y, z)$ که در آن x, y و z به ترتیب، با هر ترکیبی از علائم، سمت راست سه معادله در (۱۰) هستند. برای u ثابت (به ترتیب v ثابت و w ثابت)، هشت قطعه سطح برای بیضی‌گون $F_v(x, y, z) = 1$ (به ترتیب، هذلولی‌گون یک‌پارچه $F_v(x, y, z) = 1$ و هذلولی‌گون دو پارچه $F_w(x, y, z) = 1$) حاصل می‌شود.

تمرین‌ها

۲۸.۴ نشان دهید عبارات زیر سیستم‌های متعامد سه‌گانه هستند.

(i) کره‌های به مرکز مبدأ، صفحات شامل محور z ها و مخروط‌های دایره‌گون با محور z ها

(ii) صفحات موازی با صفحه xy ، صفحات شامل محور z ها و استوانه‌های دایره‌گون با محور z ها



۲۹.۴ با در نظر گرفتن سطح درجه دو، $F_t(x, y, z) = 0$ که در آن

$$F_t(x, y, z) = \frac{x^2}{p^2 - t} + \frac{y^2}{q^2 - t} - 2z + t$$

یک سیستم متعامد سه‌گانه مشتمل بر دو خانواده از سهمی‌گون بیضوی و یک خانواده از سهمی‌گون هذلولوی بسازید (شکل بالا). مشابه (۱۰)، یک پرمایش از چنین سطوحی ارائه دهید.

۷.۴ کاربردهای قضیه تابع معکوس

در این بخش اثبات گزاره ۱.۴ و قضیه ۱.۴ را ارائه می‌دهیم.

ابتدا فرض کنید $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ یک نگاشت هموار باشد که در آن U یک مجموعه باز در \mathbf{R}^m است. اگر قرار دهیم $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n) = f(u_1, \dots, u_m)$ ماتریس ژاکوبین f به صورت

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial u_1} & \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

است.

این ماتریس را قبلاً در حالت $m = n = 2$ در بخش ۲.۴ دیدیم، اما حالا به حالت‌های دیگر نیاز داریم.

ابزار اصلی که ما از آن استفاده می‌کنیم عبارت است از:

قضیه ۲.۴ (قضیه تابع معکوس)

فرض کنید $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع هموار باشد که بر مجموعه باز U از \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) تعریف شده است. فرض کنید در نقطه $x_0 \in U$ ماتریس ژاکوبین معکوس‌پذیر باشد.

در این صورت، مجموعه باز V در \mathbb{R}^n و نگاشت هموار $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ موجود است به طوری که

$$y_0 = f(x_0) \in V \quad (i)$$

$$g(y_0) = x_0 \quad (ii)$$

$$g(V) \subset U \quad (iii)$$

$$g(V) \text{ زیر مجموعه باز } \mathbb{R}^n \text{ است} \quad (iv)$$

$$f(g(y)) = y \quad (v) \text{ برای هر } y \in V$$

خصوصاً $g: V \rightarrow g(V)$ و $f: g(V) \rightarrow V$ معکوس‌های دو سویی هستند.

لذا، قضیه تابع معکوس بیان می‌کند اگر $J(f)$ در نقطه‌ای معکوس‌پذیر باشد، آنگاه f در نزدیکی این نقطه دو سویی است و نگاشت معکوس آن هموار است. اثبات این قضیه را در کتاب‌های حساب چند متغیره می‌توانید پیدا کنید.

ما می‌خواهیم از قضیه تابع معکوس برای اثبات گزاره ۱.۴، استفاده کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم اگر $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $\tilde{\sigma}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ دو قطعه عادی در اطلس S باشند، آنگاه نگاشت انتقال از σ به $\tilde{\sigma}$ در صورتی که تعریف شده باشد، هموار است.

فرض کنید نقطه P در هر دو قطعه واقع باشد، $\sigma(u_0, v_0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = P$ و فرض کنید.

$$\sigma(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$$

چون σ_u و σ_v مستقل خطی هستند، ماتریس ژاکوبین

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

دارای رتبه ۲ در هر نقطه است. بنابراین در هر نقطه حداقل یکی از سه زیر ماتریس 2×2 معکوس پذیر است. فرض کنید زیر ماتریس

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

در نقطه P معکوس پذیر باشد (برای حالت های دیگر اثبات مشابه است). با استفاده از قضیه تابع معکوس برای نگاشت $F: U \rightarrow \mathbf{R}^2$ با ضابطه

$$F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$$

مجموعه باز V در \mathbf{R}^2 شامل $F(u_0, v_0)$ و مجموعه باز W در U شامل (u_0, v_0) موجود است به طوری که $F: W \rightarrow V$ دو سوئی با معکوس هموار $F^{-1}: V \rightarrow W$ است. چون $\sigma: W \rightarrow \sigma(W)$ دو سوئی است، نگاشت تصویر $\pi: \sigma(W) \rightarrow V$ با ضابطه $\pi(x, y, z) = (x, y)$ نیز دو سوئی است، زیرا روی $\sigma(W)$ ، $\pi = F \circ \sigma^{-1}$. از این نتیجه می شود که $\bar{W} = \bar{\sigma}^{-1}(\sigma(W))$ یک مجموعه باز در \bar{U} است و روی \bar{W}

$$\sigma^{-1} \circ \bar{\sigma} = F^{-1} \circ \bar{F}$$

که در آن $\bar{F} = \pi \circ \bar{\sigma}$. چون F^{-1} و \bar{F} روی \bar{W} هموار هستند، نگاشت انتقالی $\sigma^{-1} \circ \bar{\sigma}$ نیز این چنین است. نگاشت $\sigma^{-1} \circ \bar{\sigma}$ هموار است زیرا روی مجموعه بازی که شامل هر نقطه (u_0, v_0) است، در صورتی که تعریف شده باشد، هموار است.

حال قضیه ۱.۴ را ثابت می کنیم. فرض کنید f, W, P همان هایی باشند که در قضیه آمده است و فرض کنید $P = (x_0, y_0, z_0)$ و در P ، $f_z \neq 0$. (برای دو حالت دیگر اثبات مشابه است). نگاشت $F: W \rightarrow \mathbf{R}^3$ با ضابطه

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$$

را در نظر بگیرید.

ماتریس ژاکوبین F به صورت

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

است که به وضوح، به دلیل $f_z \neq 0$ ، در نقطه P معکوس پذیر است. از قضیه تابع معکوس، مجموعه باز V در \mathbf{R}^3 شامل $F(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, 0)$ و نگاشت هموار $G: V \rightarrow W$ موجود است به طوری که $\tilde{W} = G(V)$ باز و $F: \tilde{W} \rightarrow V$ و $G: V \rightarrow \tilde{W}$ معکوس های دو سویه هستند.

چون V باز است، مجموعه های باز U_1 در \mathbf{R}^2 شامل (x_0, y_0) و U_2 در \mathbf{R} شامل صفر موجود است به طوری که V شامل مجموعه باز $U_1 \times U_2$ مشتمل بر همه نقاطی به صورت (x, y, w) می باشد که $(x, y) \in U_1$ و $w \in U_2$ ، بنابراین می توانیم فرض کنیم $V = U_1 \times U_2$. در حقیقت F و G معکوس های دو سویه هستند به این معنا که

$$G(x, y, w) = (x, y, g(x, y, w))$$

به ازای نگاشت همواری مانند $g: U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbf{R}$ و

$$f(x, y, g(x, y, w)) = w$$

برای هر $(x, y) \in U_1$ و $w \in U_2$.

نگاشت $\sigma: U_1 \rightarrow \mathbf{R}^3$ با ضابطه

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y, 0))$$

را در نظر بگیرید در این صورت σ یک همسان ریختی از U_1 به $S \cap \tilde{W}$ است (که معکوس آن تحدید نگاشت تصویر $\pi(x, y, z) = (x, y)$ به $S \cap \tilde{W}$ می باشد). بدیهی است که σ هموار و عادی است زیرا

$$\sigma_x \times \sigma_y = (-g_x, -g_y, 1)$$

هیچگاه صفر نیست. بنابراین σ یک قطعه سطح عادی روی S ، شامل نقطه داده شده P است. چون P نقطه‌ای دلخواه از S است، به این ترتیب اطلسی برای S ساخته‌ایم که آن را یک سطح (هموار) می‌کند. \square

تمرین‌ها

۳۰.۴ نشان دهید اگر $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ خمی باشد که تصویرش در قطعه سطح $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ قرار دارد، آنگاه $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ به ازای نگاشت هموار $(\alpha, \beta) \rightarrow U$ $(u(t), v(t)) \mapsto t$ مانند اثبات گزاره ۱.۴ عمل کنید.

۳۱.۴ قضیه ۱.۱ و تعمیم آن در مورد خم‌های تراز \mathbb{R}^3 ، را اثبات کنید (تمرین ۱۷.۱).

۵

اولین فرم اساسی

شاید، اولین چیز هندسی که یک موجود هوشمند که روی یک سطح زندگی می‌کند بخواهد انجام دهد، اندازه گرفتن فاصله بین دو نقطه از سطح باشد. البته، این فاصله وقتی به وسیله ساکنین فضای سه بعدی، اندازه‌گیری شود، متفاوت است، زیرا پاره خط مستقیمی که کوتاهترین مسیر بین نقاط \mathbb{R}^3 را فراهم می‌کند عمده‌تاً در سطح واقع نیست. وسیله‌ای که اجازه می‌دهد تا طول، و همچنین زاویه و مساحت روی سطح را محاسبه کنیم، اولین فرم اساسی سطح است.

۱.۵ طول خم‌های واقع بر سطح

اگر $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ یک خم در قطعه سطح σ باشد، طول - قوس آغازی از نقطه $\gamma(t_0)$ با

$$s = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du$$

داده می‌شود. طبق قاعده زنجیری، $\dot{\gamma} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}$ ، و لذا

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}\|^2 &= (\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}) \cdot (\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}) \\ &= (\sigma_u \cdot \sigma_u) \dot{u}^2 + (\sigma_u \cdot \sigma_v) \dot{u} \dot{v} + (\sigma_v \cdot \sigma_u) \dot{v} \dot{u} + (\sigma_v \cdot \sigma_v) \dot{v}^2 \\ &= (\sigma_u \cdot \sigma_u) \dot{u}^2 + 2(\sigma_u \cdot \sigma_v) \dot{u} \dot{v} + (\sigma_v \cdot \sigma_v) \dot{v}^2 \\ &= E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2 \end{aligned}$$

که در آن

$$E = \|\sigma_u\|^2, \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v, \quad G = \|\sigma_v\|^2$$

لذا

$$s = \int_{t_0}^t (E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2)^{1/2} dt \quad (1)$$

اگر dt را از زیر رادیکال بیرون بیاوریم و بنویسیم $du^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 (dt)^2$ ، الی آخر (!)، می بینیم که s انتگرال ریشه دوم عبارت

$$Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 \quad (2)$$

است که اولین فرم اساسی σ نامیده می شود. از آنجایی که

$$s = \int \sqrt{ds^2}, \quad (!)$$

معادله (۱) گاهی به صورت

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$

نوشته می شود.

نمی خواهیم عملیاتی را که به وضوح مورد تردید هستند توجیه کنیم. تنها عبارت (۲) را به عنوان روشی که حاوی اطلاعاتی درباره توابع F ، E و G است برای محاسبه طول هر خم در قطعه سطح با به کارگیری معادله (۱) دنبال می کنیم.

حال اگر γ یک خم روی سطح دلخواه S باشد برای محاسبه طول آن، γ را به قطعات کوچکی، که هر کدام در یک قطعه سطح قرار دارند، تقسیم می کنیم و معادله (۱) را برای محاسبه طول هر یک از این قطعات به کار می گیریم. با تغییر قطعه سطح، اولین فرم اساسی چنانچه در تمرین ۴.۵ تشریح شده است، تغییر می کند.

مثال ۱.۵

برای صفحه

$$\sigma_u(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$$

با بردارهای واحد متعامد \mathbf{p} و \mathbf{q} ، (مثال ۱.۴ را ببینید)، داریم $\sigma_u = \mathbf{p}$ ، $\sigma_v = \mathbf{q}$ بنابراین $E = \|\sigma_u\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 = 1$ ، $F = \sigma_u \cdot \sigma_v = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ ، $G = \|\sigma_v\|^2 = \|\mathbf{q}\|^2 = 1$ و اولین فرم اساسی به صورت $du^2 + dv^2$ است.

مثال ۲.۵

برای کره با مختصات طول و عرض جغرافیایی

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

(به مثال ۲.۴ مراجعه کنید) داریم

$$\sigma_\theta = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \sigma_\varphi = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0),$$

$$\therefore E = \|\sigma_\theta\|^2 = 1, F = \sigma_\theta \cdot \sigma_\varphi = 0, G = \|\sigma_\varphi\|^2 = \cos^2 \theta$$

و بنابراین اولین فرم اساسی به صورت $d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$ است.

مثال ۳.۵

استوانه (تعمیم یافته)

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{a}$$

در مثال ۱۰.۴ را در نظر بگیرید. در این مثال دیدیم که می‌توان فرض کرد γ سرعت - واحد، \mathbf{a} بردار واحد و γ در صفحه متعامد به بردار \mathbf{a} قرار دارد. در این صورت با نشان دادن $\frac{d}{du}$ به‌وسیله نقطه

$$\sigma_u = \dot{\gamma}, \quad \sigma_v = \mathbf{a}$$

بنابراین

$$E = \|\sigma_u\|^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 = 1, \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v = \dot{\gamma} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad G = \|\sigma_v\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 = 1$$

و اولین فرم اساسی σ عبارت است از

$$du^2 + dv^2$$

توجه کنید که این همان اولین فرم اساسی صفحه است (مثال ۱.۵ را ببینید). دلیل هندسی این تطبیق در بخش بعدی معلوم می‌شود.

مثال ۴.۵

مخروط (تعمیم یافته)

$$\sigma(u, v) = (1-v)\mathbf{p} + v\gamma(u)$$

را در نظر بگیرید (مثال ۱۱.۴ را ببینید) قبل از محاسبه اولین فرم اساسی، σ را ساده می‌کنیم. در ابتدا با انتقال سطح به‌وسیله \mathbf{p} (که طبق تمرین ۳.۵، اولین فرم اساسی σ را تغییر نمی‌دهد)، قطعه سطح $(\gamma - \mathbf{p})$ را $\sigma_1 = \sigma - \mathbf{p} = v(\gamma - \mathbf{p})$ بنابراین اگر $\gamma_1 = \gamma - \mathbf{p}$ را جایگزین γ کنیم $\sigma_1 = v\gamma_1$ حاصل می‌شود. این بدان معناست که از ابتدا می‌توانیم با فرض

$P = 0$ شروع کنیم سپس در مثال ۱۱.۴ دیدیم برای اینکه σ یک قطعه سطح عادی باشد، γ نباید از مبدأ بگذرد، بنابراین می‌توانیم خم جدید $\tilde{\gamma}$ را به صورت $\tilde{\gamma}(u) = \frac{\gamma(u)}{\|\gamma(u)\|}$ تعریف کنیم. با قرار دادن $\tilde{u} = u$ و $\tilde{v} = \frac{v}{\|\gamma(u)\|}$ بازپیمایش $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}\tilde{\gamma}(\tilde{u})$ با $\|\tilde{\gamma}\| = 1$ را داریم. بنابراین از ابتدا می‌توانیم فرض کنیم $\sigma(u, v) = v\gamma(u)$ که در آن برای همه مقادیر u ، $\|\gamma(u)\| = 1$ (از نظر هندسی این بدان معنا است که ما می‌توانیم محل تلاقی مخروط و کره واحد را جایگزین γ کنیم) نهایتاً با بازپیمایش مجدد، می‌توانیم فرض کنیم γ سرعت - واحد است، زیرا در مثال ۱۱.۴ دیدیم برای عادی بودن σ ، باید γ عادی باشد. با این فرضیات و با نمایش نقطه به جای $\frac{d}{du}$ داریم.

$$\sigma_u = v\dot{\gamma}, \quad \sigma_v = \gamma$$

بنابراین داریم

$$E = \|v\dot{\gamma}\|^2 = v^2 \|\dot{\gamma}\|^2 = v^2$$

$$F = v\dot{\gamma} \cdot \gamma = 0, \quad (\|\gamma\| = 1 \text{ چون})$$

$$G = \|\gamma\|^2 = 1$$

و اولین فرم اساسی به صورت

$$v^2 du^2 + dv^2$$

است توجه کنید، مانند استوانه تعمیم یافته در مثال ۳.۵، اثری از خم γ در اولین فرم اساسی موجود نیست.

تمرین‌ها

۱.۵ اولین فرم اساسی سطوح زیر را بدست آورید.

$$\sigma(u, v) = (\sinh u \sinh v, \sinh u \cosh v, \sinh u) \quad (\text{i})$$

$$\sigma(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2) \quad (\text{ii})$$

$$\sigma(u, v) = (\cosh u, \sinh u, v) \quad (\text{iii})$$

$$\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \quad (\text{iv})$$

این‌ها چه نوع سطوحی هستند؟

۲.۵ به ازای λ ثابت، خم $v = t, u = e^{\lambda t}$ را روی مخروط

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

رسم کنید. طول بخشی از خم به ازای $0 \leq t \leq \pi$ را به دست آورید.

۳.۵ نشان دهید حرکت صلب، اولین فرم اساسی را تغییر نمی‌دهد.

۴.۵ فرض کنید سطح $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ باز پرمایش سطح $\sigma(u, v)$ و

$$\tilde{E}d\tilde{u}^2 + 2\tilde{F}d\tilde{u}d\tilde{v} + \tilde{G}d\tilde{v}^2, \quad E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

اولین فرم اساسی آن‌ها باشد. فرض کنید.

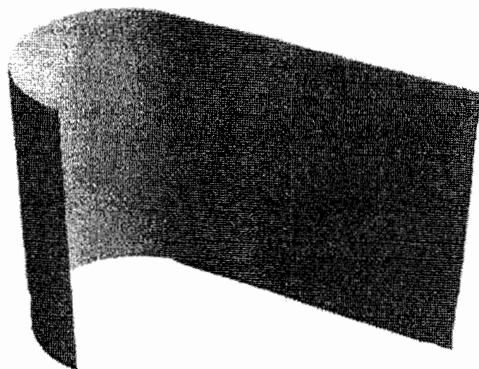
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین نگاشت باز پرمایش $(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$ و J^t ماتریس ترانزاده J باشد. ثابت کنید

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J$$

۲.۵ ایزومتري‌های سطوح

در مثال ۳.۵ دیدیم که صفحه و استوانه (تعمیم یافته) وقتی به‌طور مناسب پارامتری شده باشند، دارای اولین فرم اساسی یکسان هستند. دیدن دلیل هندسی این مطلب سخت نیست. به‌وضوح یک قطعه صفحه کاغذی می‌تواند روی استوانه بدون مجاله شدن پیچانده شود (برای سهولت، استوانه دایره‌گون را در نظر می‌گیریم)



اگر خمی را روی صفحه رسم کنیم بعد از پیچاندن، خمی روی استوانه خواهد شد. چون مجاله نمی‌شود، طول این دو خم یکسان خواهد بود. از طرفی طول از محاسبه انتگرال (ریشه دوم) اولین فرم اساسی به دست می‌آید، لذا منطقی است اولین فرم اساسی این دو سطح یکسان باشد. از طرف دیگر تجربه می‌گوید که نمی‌توان یک صفحه کاغذ را دور کره بدون مجاله شدن پیچاند. بنابراین انتظار داریم که اولین فرم اساسی صفحه و کره (با هر پرمایشی) یکسان نباشد. تعریف زیر مفهوم پیچاندن یک سطح دور دیگری را بدون مجاله شدن روشن می‌سازد.

تعریف ۱.۵

دو سطح S_1 و S_2 را در نظر بگیرید دیفئومورفیسم $S_1 \rightarrow S_2$ را یک ایزومتري می‌نامیم اگر خم روی S_1 به خمی روی S_2 با همان طول تصویر شود. اگر ایزومتري $S_1 \rightarrow S_2$: f موجود باشد، می‌گوییم S_1 و S_2 ایزومتريک هستند.

قضیه ۱.۵

دیفئومورفیسم $S_1 \rightarrow S_2$: f یک ایزومتري است اگر و فقط اگر برای هر قطعه سطح σ_1 از S_1 ، قطعات σ_1 و $f \circ \sigma_1$ به ترتیب از S_1 و S_2 دارای اولین فرم اساسی یکسان باشند.

اثبات ۱.۵

چون طول هر خم مجموع طول خم‌هایی است که در یک قطعه سطح قرار دارند، لذا می‌توان فرض نمود که S_1 و S_2 با قطعه سطح‌های یگانه‌ای پوشیده شده‌اند. به علاوه چون f دیفئومورفیسم است، گزاره ۳.۴ نشان می‌دهد که می‌توان فرض نمود که این قطعات به شکل $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (برای S_1) و $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$ (برای S_2) می‌باشند. باید نشان دهیم f یک ایزومتري است اگر و فقط اگر σ_1 و σ_2 دارای اولین فرم اساسی یکسان باشند ابتدا فرض کنید σ_1 و σ_2 دارای اولین فرم اساسی یکسان باشند اگر $(u(t), v(t)) \rightarrow t$ یک خم دلخواه در U باشد و $\gamma_1(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ و $\gamma_2(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ خم‌های متناظر آنها در S_1 و S_2 باشند، آنگاه f ، خم γ_1 را به خم γ_2 تصویر می‌کند، زیرا:

$$f(\gamma_1(t)) = f(\sigma_1(u(t), v(t))) = \sigma_2(u(t), v(t)) = \gamma_2(t)$$

روشن است که γ_1 و γ_2 دارای طول یکسانند، زیرا طول هر دو از انتگرال‌گیری عبارت

$$(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{1/2}$$

به دست می‌آید، که در آن $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ اولین فرم اساسی (مشترک) σ_1 و σ_2 است.

برعکس، فرض کنید f یک ایزومتري است. اگر برای $t \in (\alpha, \beta)$ $t \rightarrow (u(t), v(t))$ یک خم در U باشد، خم‌های $\gamma_1(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ و $\gamma_2(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ دارای طول یکسان هستند. بنابراین،

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_1 \dot{u}^2 + 2F_1 \dot{u}\dot{v} + G_1 \dot{v}^2)^{1/2} dt = \int_{t_0}^{t_1} (E_2 \dot{u}^2 + 2F_2 \dot{u}\dot{v} + G_2 \dot{v}^2)^{1/2} dt$$

برای هر $t_0, t_1 \in (\alpha, \beta)$ که در آن E_1 و F_1 و G_1 ضرایب اولین فرم اساسی σ_1 و E_2 و F_2 و G_2 ضرایب اولین فرم اساسی σ_2 هستند. از این نتیجه می‌شود که توابع زیر انتگرال یکسان بوده و بنابراین داریم:

$$E_1 \dot{u}^2 + 2F_1 \dot{u}\dot{v} + G_1 \dot{v}^2 = E_2 \dot{u}^2 + 2F_2 \dot{u}\dot{v} + G_2 \dot{v}^2 \quad (3)$$

$t_0 \in (\alpha, \beta)$ را ثابت نگه می‌داریم و قرار می‌دهیم $u_0 = u(t_0)$ و $v_0 = v(t_0)$. اکنون معادله (۳) را برای سه انتخاب زیر از خم $t \rightarrow (u(t), v(t))$ در U بکار ببرید:

$$E_1 = E_2 \text{ و } v = v_0 \text{ و } u = u_0 + t - t_0. \quad (i)$$

$$G_1 = G_2 \text{ و } u = u_0 \text{ و } v = v_0 + t - t_0. \quad (ii)$$

$$u = u_0 + t - t_0 \text{ و } v = v_0 + t - t_0 \text{ که نتیجه می‌دهد} \quad (iii)$$

$$E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2$$

و بنابراین (با توجه به (i) و (ii)) $F_1 = F_2$.

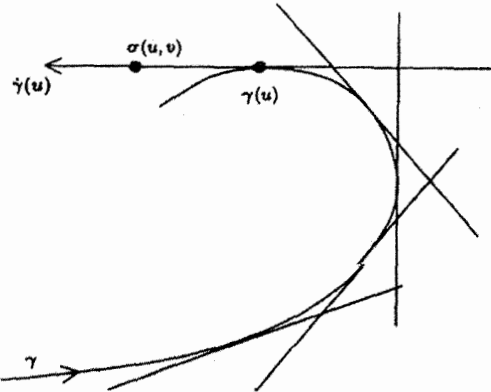
□

مثال ۵.۵

فرض کنید S_1 یک نوار بی پایان در صفحه xy با $0 < x < 2\pi$ و S_2 استوانه دایره‌گون $x^2 + y^2 = 1$ با حذف مولدهای $x = 1$ و $y = 0$ باشد. در این صورت S_1 با تنها قطعه S_2 با $\sigma_1(u, v) = (u, v, 0)$ و $\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ پوشیده می‌شود. تابع $f: S_1 \rightarrow S_2$ که f که $\sigma_1(u, v)$ را به $\sigma_2(u, v)$ تصویر می‌کند یک ایزومتري است زیرا، بنابه مثال ۳.۵، σ_1 و σ_2 دارای اولین فرم اساسی یکسان هستند.

بحث مشابه نشان می‌دهد که یک زیرمجموعه مناسب از مخروط دایره‌گون با قسمتی از صفحه ایزومتريک است (تمرین ۵.۵ را ببینید) و حتی می‌توان آن را به استوانه‌ها و مخروط‌های

تعمیم یافته نیز تعمیم داد (تمرین ۷.۵ را ببینید) لذا دسته دیگری از سطوح وجود دارند که با صفحه ایزومتریک هستند آنها را مماس گسترش پذیر می نامند. (در آثار قدیمی تر، «توسعه» از یک سطح روی دیگری واژه‌ی بود که برای ایزومتری استفاده می شد.) مماس گسترش پذیر اجتماع خطوط مماس به یک خم در \mathbb{R}^3 است. خط مماس در نقطه $\gamma(u)$ خط مستقیمی است که از $\gamma(u)$ گذشته و موازی بردار مماس $\dot{\gamma}(u)$ است.



بهتر است γ را سرعت واحد در نظر بگیریم. هر نقطه روی خط مماس در $\gamma(u)$ به ازای اسکالری مانند v به صورت

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u)$$

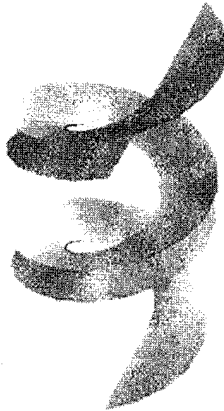
است. بنابراین

$$\sigma_u \times \sigma_v = (\dot{\gamma} + v\ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma} = v\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}$$

برای اینکه σ عادی باشد، می بایستی $\ddot{\gamma} \neq 0$ یا به عبارت دیگر، در هر نقطه از γ ، انحنای $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|$ مخالف صفر باشد. اکنون $\dot{\gamma} = \mathbf{t}$ بردار مماس واحد γ و $\ddot{\gamma} = \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$ می باشد که در آن \mathbf{n} قائم اصلی γ است، بنابراین

$$\sigma_u \times \sigma_v = \kappa v \mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\kappa v \mathbf{b}$$

که در آن \mathbf{b} قائم دوم γ است. پس، اگر همه جا $\kappa > 0$ و $v \neq 0$ آنگاه σ عادی است. شرط اخیر بدین معناست که برای عادی بودن، می بایستی خود خم γ را از سطح خارج کنیم. به عنوان نمونه، نواحی $v > 0$ و $v < 0$ از مماس گسترش پذیر دو صفحه تشکیل می دهند که در طول لبه تیزی که به وسیله خم γ در $v = 0$ تشکیل می شود متقاطع هستند، مانند شکل زیر که مماس گسترش پذیر مارپیچ دایره گون را نشان می دهد:



آنچه در مماس گسترش‌پذیر جالب است از نتیجه زیر بدست می‌آید.

گزاره ۱.۵

هر مماس گسترش‌پذیر با (قسمتی از) صفحه ایزومتریک است.

اثبات ۱.۵

از علائم بالا استفاده می‌کنیم، فرض کنید γ سرعت - واحد و $\kappa > 0$ است. اکنون

$$\begin{aligned} E &= \|\sigma_u\|^2 = (\dot{\gamma} + v\ddot{\gamma}) \cdot (\dot{\gamma} + v\ddot{\gamma}) \\ &= \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} + 2v\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} + v^2\ddot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = 1 + v^2\kappa^2 \\ F &= \sigma_u \cdot \sigma_v = (\dot{\gamma} + v\ddot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma} = \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} + v\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = 1 \\ G &= \|\sigma_v\|^2 = \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 1 \end{aligned}$$

چون $\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 1$ ، $\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = 0$ و $\ddot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = \kappa^2$ بنابراین اولین فرم اساسی مماس گسترش‌پذیر عبارت است از:

$$(1 + v^2\kappa^2)du^2 + 2dudv + dv^2 \quad (4)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که (قسمتی از) صفحه را می‌توان طوری پارامتری کرد که اولین فرم اساسی آن همین باشد.

بر اساس قضیه ۱.۲ خم سرعت-واحد مسطح $\tilde{\gamma}$ وجود دارد که انحناى آن κ است (می‌توان حتی فرض نمود که انحناى علامت‌دار آن κ است) به‌علاوه با محاسبات بالا اولین فرم اساسی مماس گسترش‌پذیر $\tilde{\gamma}$ از (۴) بدست می‌آید. اما چون $\tilde{\gamma}$ یک خم مسطح است، خطوط مماس آن قسمتی از صفحه را که $\tilde{\gamma}$ در آن قرار دارد پر می‌کنند. \square

عکس گزاره ۱.۵ می‌گوید: هر تکه بسیار کوچک از سطح ایزومتریک با (قسمتی از) یک صفحه، یک استوانه (تعمیم‌یافته)، یک مخروط (تعمیم‌یافته)، یا یک مماس گسترش‌پذیر است. اثبات این قسمت در بخش ۳.۷ می‌آید.

تمرین‌ها

۵.۵ مخروط دایره‌گون

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad u > 0, \quad 0 < v < 2\pi$$

می‌تواند «باز شود»، بنابراین با (قسمتی از) صفحه مثلاً صفحه xy ایزومتریک است. این ایزومتري را به‌طور دقیق بنویسید و دقیقاً توضیح دهید σ با کدام قسمت از صفحه ایزومتریک است. تحقیق کنید که نگاشت واقعا یک ایزومتري است.

۶.۵ آیا نگاشتی که از نیم-مخروط دایره‌گون $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$ به صفحه xy که با ضابطه $(x, y, 0) \mapsto (x, y, z)$ داده می‌شود ایزومتري است؟

۷.۵ نشان دهید استوانه (تعمیم‌یافته) و مخروط (تعمیم‌یافته) با (قسمتی از) صفحه ایزومتریک هستند (مثال‌های ۳.۵ و ۴.۵ و تمرین ۵.۵ را ببینید).

 $t = 0$  $t = 0.6$  $t = 0.2$  $t = 0.8$  $t = 0.4$  $t = 1$

۸.۵. قطعه سطح‌های

$$\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad 0 < v < 2\pi$$

$$\tilde{\sigma}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad 0 < v < 2\pi$$

به ترتیب، زنجیروار (تمرین ۱۸.۴) با یک نصف‌النهار حذف شده و قسمتی از ماریچ ناما (تمرین ۱۴.۴) واقع بین صفحات $z = 2\pi$ و $z = 0$ را نشان می‌دهند. ثابت کنید نگاشتی که زنجیروار $\sigma(u, v)$ را به ماریچ‌نمای $\tilde{\sigma}(\sinh u, v)$ می‌برد ایزومتري است. کدام خم‌ها روی ماریچ‌نما تحت این ایزومتري به موازی‌ها و نصف‌النهارهای زنجیروار متناظر می‌شوند.

در حقیقت یک تغییر شکل ایزومتريک از زنجیروار به ماریچ‌نما وجود دارد. برای $0 \leq t \leq \pi/2$ سطح

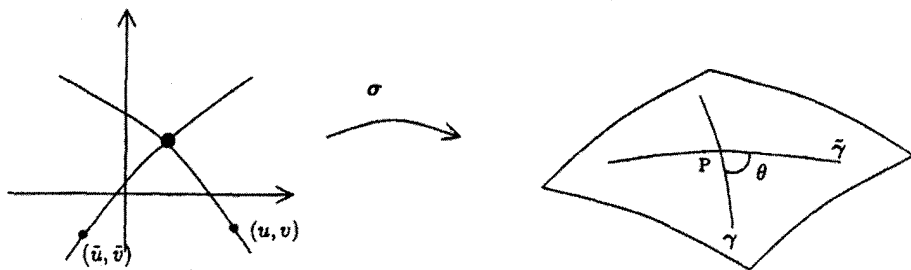
$$\sigma^t(u, v) = \cos t \sigma(u, v + t) + \sin t \tilde{\sigma}(\sinh u, v + t - \frac{\pi}{4})$$

را تعریف کنید در این صورت $\sigma^0(u, v) = \sigma(u, v)$ و $\sigma^{\pi/2}(u, v) = \tilde{\sigma}(\sinh u, v)$ نشان دهید برای هر t ، نگاشت $\sigma(u, v) \mapsto \sigma^t(u, v)$ یک ایزومتري است. سطوح σ^t برای بعضی t ها در بالا نشان داده شده است.

۳.۵. نگاشت‌های همدیس سطوح

اکنون می‌دانیم چگونه طول خم‌های واقع بر سطوح را اندازه بگیریم، سؤال بعدی در مورد اندازه‌گیری زوایا است. فرض کنید خم‌های γ و $\tilde{\gamma}$ روی سطح S در نقطه P که در قطعه سطح σ از S قرار دارد متقاطع باشند. در این صورت به ازای توابع هموار $\tilde{u}, \tilde{v}, u, v$ ، $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ و $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ ، \tilde{t}_0 و t_0 ،

$$\sigma(u(t_0), v(t_0)) = P = \sigma(\tilde{u}(\tilde{t}_0), \tilde{v}(\tilde{t}_0))$$



زاویه θ بین بردارهای مماس $\dot{\gamma}$ و $\dot{\tilde{\gamma}}$ به عنوان زاویه حاصل از تقاطع γ و $\tilde{\gamma}$ در نقطه P تعریف می‌شود (که به ترتیب در $t = t_0$ و $t = \tilde{t}_0$ محاسبه می‌شود).
با به کارگیری فرمول ضرب داخلی برای زاویه بین بردارها، می‌بینیم که θ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\cos \theta = \frac{\dot{\gamma} \cdot \dot{\tilde{\gamma}}}{\|\dot{\gamma}\| \|\dot{\tilde{\gamma}}\|}$$

با استفاده از قاعده زنجیری داریم:

$$\dot{\gamma} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}, \quad \dot{\tilde{\gamma}} = \sigma_u \dot{\tilde{u}} + \sigma_v \dot{\tilde{v}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} \cdot \dot{\tilde{\gamma}} &= (\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}) \cdot (\sigma_u \dot{\tilde{u}} + \sigma_v \dot{\tilde{v}}) \\ &= (\sigma_u \cdot \sigma_u) \dot{u} \dot{\tilde{u}} + (\sigma_u \cdot \sigma_v) (\dot{u} \dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}} \dot{v}) + (\sigma_v \cdot \sigma_v) \dot{v} \dot{\tilde{v}} \\ &= E \dot{u} \dot{\tilde{u}} + F (\dot{u} \dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}} \dot{v}) + G \dot{v} \dot{\tilde{v}} \end{aligned}$$

از جایگزینی $\tilde{\gamma}$ با γ (به ترتیب $\tilde{\gamma}$ با γ) عبارت‌های مشابه‌ای برای $\dot{\gamma} \cdot \dot{\tilde{\gamma}} = \|\dot{\gamma}\|^2$ (به ترتیب برای $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|^2$ حاصل می‌شود)، که نهایتاً به فرمول زیر منتج می‌شود:

$$\cos \theta = \frac{E \dot{u} \dot{\tilde{u}} + F (\dot{u} \dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}} \dot{v}) + G \dot{v} \dot{\tilde{v}}}{(E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2)^{1/2} (E \dot{\tilde{u}}^2 + 2F \dot{\tilde{u}} \dot{\tilde{v}} + G \dot{\tilde{v}}^2)^{1/2}} \quad (5)$$

مثال ۶.۵

خم‌های پارامتری روی قطعه سطح $\sigma(u, v)$ را که به ترتیب زیر پارامتری شده‌اند در نظر بگیرید:

$$\gamma(t) = \sigma(a, t), \quad \tilde{\gamma}(t) = \sigma(t, b)$$

که در آن a و b ثابت هستند. بنابراین،

$$u(t) = a, \quad v(t) = t, \quad \tilde{u}(t) = t, \quad \tilde{v}(t) = b,$$

$$\therefore \dot{u} = 0, \quad \dot{v} = 1, \quad \dot{\tilde{u}} = 1, \quad \dot{\tilde{v}} = 0$$

این خم‌های پارامتری در نقطه $\sigma(a, b)$ از سطح متقاطعند. بر اساس معادله (۵) زاویه تقاطع θ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

خصوصاً، خم‌های پارامتری بر هم عمودند اگر و فقط اگر $F = 0$.

با استفاده از تعریف ۱.۵ در مورد ایزومتري، داریم

تعریف ۲.۵

سطوح S_1 و S_2 را در نظر بگیرید. دیفیومرفیسم $f: S_1 \rightarrow S_2$ هم‌دیس است هرگاه دو خم متقاطع γ_1 و $\tilde{\gamma}_1$ روی S_1 به خم‌های متقاطع γ_2 و $\tilde{\gamma}_2$ روی S_2 تصویر شوند، به طوری که زاویه تقاطع γ_1 و $\tilde{\gamma}_1$ با زاویه تقاطع γ_2 و $\tilde{\gamma}_2$ برابر باشد.

به طور خلاصه، f هم‌دیس است اگر حافظ زاویه باشد.

در حالت خاص، اگر $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک سطح باشد، می‌توان σ را به عنوان یک نگاشت از بخشی از صفحه (مثلاً U)، به تصویر σ ، S ، در نظر گرفت که در آن U به وسیله (u, v) به روش معمول پارامتری شده است، σ را پرمایش هم‌دیس یا قطعه سطح هم‌دیس S می‌گوییم اگر به عنوان نگاشتی از یک سطح به سطح دیگر، هم‌دیس باشد.

قضیه ۲.۵

دیفیومرفیسم $f: S_1 \rightarrow S_2$ هم‌دیس است اگر و فقط اگر برای هر قطعه سطح σ_1 از S_1 اولین فرم‌های اساسی σ_1 و $f \circ \sigma_1$ متناسب باشند.

اثبات ۲.۵

مشابه اثبات ۱.۵، فرض می‌کنیم S_1 و S_2 فقط به وسیله یک قطعه سطح به ترتیب با قطعه سطح‌های $\sigma_1: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$ پوشیده شوند. فرض کنید اولین فرم اساسی آن‌ها

$$E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2$$

متناسب باشد یعنی تابع هموار $\lambda(u, v)$ که در آن (u, v) مختصات U است، موجود باشد که

$$E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2 = \lambda(E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2)$$

چون E_1 و E_2 (به عنوان مثال) هر دو مثبت هستند لذا λ نیز همه جا مثبت است. اگر $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ و $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_1(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ دو خم روی S_1 باشند در این صورت f ، خم‌های γ و $\tilde{\gamma}$ را به ترتیب به خم‌های $\sigma_2(u(t), v(t))$ و $\sigma_2(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ در S_2 می‌برد. با استفاده از معادله (۵)، زاویه θ ، زاویه تقاطع خم‌های اخیر روی S_2 ، با رابطه

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{E_2 \dot{u} \dot{\tilde{u}} + F_2 (\dot{u} \dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}} \dot{v}) + G_2 \dot{v} \dot{\tilde{v}}}{(E_2 \dot{u}^2 + 2F_2 \dot{u} \dot{v} + G_2 \dot{v}^2)^{1/2} (E_1 \dot{\tilde{u}}^2 + 2F_1 \dot{\tilde{u}} \dot{\tilde{v}} + G_1 \dot{\tilde{v}}^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda E_1 \dot{u} \dot{\tilde{u}} + \lambda F_1 (\dot{u} \dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}} \dot{v}) + \lambda G_1 \dot{v} \dot{\tilde{v}}}{(\lambda E_1 \dot{u}^2 + 2\lambda F_1 \dot{u} \dot{v} + \lambda G_1 \dot{v}^2)^{1/2} (\lambda E_1 \dot{\tilde{u}}^2 + 2\lambda F_1 \dot{\tilde{u}} \dot{\tilde{v}} + \lambda G_1 \dot{\tilde{v}}^2)^{1/2}} \\ &= \frac{E_1 \dot{u} \dot{\tilde{u}} + F_1 (\dot{u} \dot{\tilde{v}} + \dot{\tilde{u}} \dot{v}) + G_1 \dot{v} \dot{\tilde{v}}}{(E_1 \dot{u}^2 + 2F_1 \dot{u} \dot{v} + G_1 \dot{v}^2)^{1/2} (E_1 \dot{\tilde{u}}^2 + 2F_1 \dot{\tilde{u}} \dot{\tilde{v}} + G_1 \dot{\tilde{v}}^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

تعیین می‌شود، چون می‌توان λ را حذف کرد. اما با استفاده مجدد از معادله (۵)، می‌بینیم که طرف راست، کسینوس زاویه تلاقی خم‌های γ و $\tilde{\gamma}$ روی S_1 است. بنابراین f همدیس است. بالعکس باید نشان دهیم اگر

$$\frac{E_1 \dot{u}\dot{u} + F_1(\dot{u}\dot{v} + \dot{u}\dot{v}) + G_1 \dot{v}\dot{v}}{(E_1 \dot{u}^2 + 2F_1 \dot{u}\dot{v} + G_1 \dot{v}^2)^{1/2} (E_1 \tilde{u}^2 + 2F_1 \tilde{u}\tilde{v} + G_1 \tilde{v}^2)^{1/2}} = \frac{E_1 \dot{u}\dot{u} + F_1(\dot{u}\dot{v} + \dot{v} + \dot{u}\dot{v}) + G_1 \dot{v}\dot{v}}{(E_1 \dot{u}^2 + 2F_1 \dot{u}\dot{v} + G_1 \dot{v}^2)^{1/2} (E_1 \tilde{u}^2 + 2F_1 \tilde{u}\tilde{v} + G_1 \tilde{v}^2)^{1/2}} \quad (6)$$

برای هر دو جفت متقاطع در S_1 مانند

$$\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t)), \quad \tilde{\gamma}(t) = \sigma_1(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$$

آنگاه اولین فرم‌های اساسی σ_1 و σ_2 ، متناسب هستند. نقطه $(a, b) \in U$ را ثابت نگه‌داشته و خم‌های

$$\gamma(t) = \sigma_1(a + t, b), \quad \tilde{\gamma}(t) = \sigma_1(a + t \cos \phi, b + t \sin \phi)$$

را که در آن ϕ ثابت است در نظر بگیرید در این صورت

$$\dot{u} = 1, \quad \dot{v} = 0, \quad \dot{\tilde{u}} = \cos \phi, \quad \dot{\tilde{v}} = \sin \phi$$

با جایگزینی اینها در معادله (۶) بدست می‌آوریم

$$\frac{E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi}{\sqrt{E_1(E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi)}} = \frac{E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi}{\sqrt{E_1(E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi)}} \quad (7)$$

با مربع کردن دو طرف معادله (۷) و نوشتن عبارت

$$\begin{aligned} & (E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi)^2 \\ &= E_1(E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi) - (E_1 G_1 - F_1^2) \sin^2 \phi \end{aligned}$$

بدست می‌آوریم

$$(E_1 G_1 - F_1^2) E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi)$$

$$= (E_2 G_2 - F_2^2) E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \sin \phi \cos \phi + G_1 \sin^2 \phi) \quad (16)$$

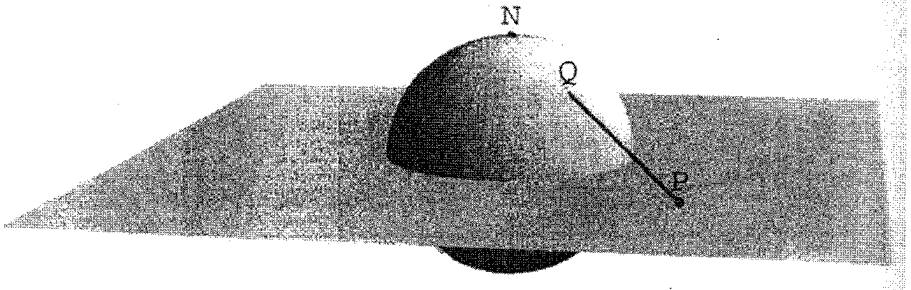
و با فرض $\lambda = \frac{(E_2 G_2 - F_2^2) E_1}{(E_1 G_1 - F_1^2) E_2}$ داریم

$$(E_2 - \lambda E_1) \cos^2 \phi + 2(F_2 - \lambda F_1) \sin \phi \cos \phi + (G_2 - \lambda G_1) \sin^2 \phi = 0$$

با گرفتن $\phi = 0$ و سپس $\phi = \frac{\pi}{4}$ خواهیم داشت $E_2 = \lambda E_1$ و $G_2 = \lambda G_1$ که با جایگزینی اینها در آخرین معادله، رابطه $F_2 = \lambda F_1$ حاصل می‌شود. \square

مثال ۷.۵

کره واحد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $P = (u, v, 0)$ نقطه دلخواه در صفحه xy باشد، خط مستقیمی را که از P و قطب شمال $N = (0, 0, 1)$ می‌گذرد رسم کنید، این خط کره را در نقطه ای مانند Q قطع می‌کند. هر نقطه از کره به استثنای قطب شمال از این چنین تقاطعی پدید می‌آید.



بردار NQ موازی بردار NP است، بنابراین اسکالری مانند ρ موجود است، به طوری که اگر بردارهای q, n, p به ترتیب موقعیت برداری نقاط Q, N, P را معین نمایند در این صورت

$$q - n = \rho(p - n)$$

و بنابراین

$$q = (0, 0, 1) + \rho((u, v, 0) - (0, 0, 1)) = (\rho u, \rho v, 1 - \rho)$$

چون Q روی کره قرار دارد،

$$\rho^2 u^2 + \rho^2 v^2 + (1 - \rho)^2 = 1$$

که نتیجه می‌دهد $\rho = \frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)}$ (ریشه $\rho = 0$ ، به نقطه تقاطع خط و N مربوط است). لذا،

$$q = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

اگر طرف راست را با $\sigma_1(u, v)$ نشان دهیم، آنگاه σ_1 پرمایش تمام کره منهای قطب شمال است. صفحه $z = 0$ را با $\sigma_2(u, v) = (u, v, 0)$ پرمایش کنید نگاشتی که Q را به P می‌برد، $\sigma_1(u, v)$ را به $\sigma_2(u, v)$ تصویر می‌کند. این نگاشت تصویر کنج‌نگاری خوانده می‌شود. نشان می‌دهیم این تصویر همدیس است.

برطبق قضیه ۲.۵ باید نشان دهیم اولین فرم اساسی σ_1 و σ_2 متناسب هستند. اولین فرم اساسی σ_2 ، $du^2 + dv^2$ است. برای σ_1 داریم.

$$(\sigma_1)_u = \left(\frac{2(v^2 - u^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4u}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right)$$

$$(\sigma_1)_v = \left(\frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{2(u^2 - v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4v}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right)$$

از آنجا

$$E_1 = (\sigma_1)_u \cdot (\sigma_1)_u = \frac{4(v^2 - u^2 + 1)^2 + 16u^2v^2 + 16u^2}{(u^2 + v^2 + 1)^4}$$

که پس از ساده کردن داریم $E_1 = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$ متشابهاً، $F_1 = 0$ و $G_1 = E_1$.

بنابراین اولین فرم اساسی σ_2 ، λ برابر σ_1 است که در آن، $\lambda = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 1)^2$.

تمرین‌ها

۹.۵ نشان دهید هر ایزومتري یک نگاشت همدیس است. مثالی از یک نگاشت همدیس ارائه دهید که ایزومتري نباشد.

۱۰.۵ نشان دهید خم ارائه شده در تمرین ۲.۵، تمام مولدهای مخروط را در زاویه یکسانی قطع می‌کند.

۱۱.۵ نشان دهید پرمایش مرکاتور از کره

$$\sigma(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$$

همدیس است.

۱۲.۵ فرض کنید $f(x)$ یک تابع هموار و

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$$

سطح بدست آمده از دوران خم $z = f(x)$ در صفحه xz به دور محور z ها باشد. تمام توابعی مانند f را بیابید که به ازای آن‌ها σ همدیس است.

۱۳.۵ فرض کنید σ سطح خط‌دار

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

باشد که در آن γ خم سرعت-واحد در \mathbb{R}^3 و $\delta(u)$ به ازای هر u بردار واحد است. ثابت کنید σ همدیس است اگر و فقط اگر $\delta(u)$ مستقل از u و γ در صفحه عمود بر δ قرار گیرد. در این حالت σ چه نوع سطحی است؟

۱۴.۵ نشان دهید قطعه سطح

$$\sigma(u, v) = (f(u, v), g(u, v), 0)$$

که در آن f و g توابع هموار در صفحه uv می‌باشند، همدیس است اگر و فقط اگر

$$f_u = g_v, \quad f_v = -g_u$$

یا

$$f_u = -g_v, \quad f_v = g_u$$

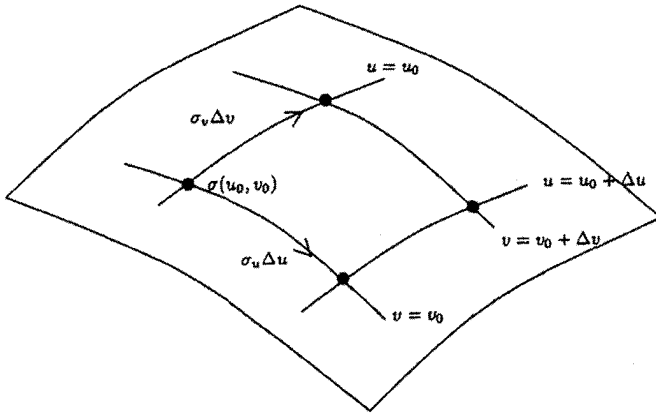
اولین جفت معادلات، معادلات کشی-ریمان^۱ نامیده می‌شوند، آنها شرایط نگاشتی از صفحه مختلط به خودش با ضابطه $u + iv \mapsto f(u, v) + ig(u, v)$ می‌باشد که تحلیلی است. دومین جفت معادلات نشان می‌دهد نگاشت، پادس تحلیلی است یعنی مزدوج مختلط آن تحلیلی است. در مورد توابع تحلیلی روی سطوح در بخش ۴.۹ بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۴.۵ مساحت سطح

فرض کنید $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه سطح روی سطح S باشد. تصویر σ با دو دسته از خم‌های پارامتری، به ترتیب ثابت $u =$ و ثابت $v =$ پوشیده می‌شود. $(u_0, v_0) \in U$ را ثابت

1) Cauchy-Riemann

نگه داشته Δu و Δv را بسیار کوچک در نظر می‌گیریم. چون تغییر در $\sigma(u, v)$ متناظر به تغییر کوچک Δu در u تقریباً $\sigma_u \Delta u$ و متناظر به تغییر کوچک Δv در v تقریباً $\sigma_v \Delta v$ است، لذا قسمتی از سطح که بین خم‌های پارامتری متناظر به $u = u_0 + \Delta u$ ، $u = u_0$ ، $v = v_0 + \Delta v$ و $v = v_0$ قرار دارد تقریباً یک متوازی‌الاضلاع در صفحه است، که یال‌های آن با بردارهای $\sigma_u \Delta u$ و $\sigma_v \Delta v$ معین می‌شوند (مشتق در (u_0, v_0) محاسبه شده است):



یادآور می‌شویم که مساحت یک متوازی‌الاضلاع با یال‌های a و b برابر است با $\|b \times a\|$. لذا مساحت متوازی‌الاضلاع روی سطح تقریباً برابر است با

$$\|\sigma_u \Delta u \times \sigma_v \Delta v\| = \|\sigma_u \times \sigma_v\| \Delta u \Delta v$$

بر این اساس تعریف زیر پیشنهاد می‌شود.

تعریف ۳.۵

مساحت $A_\sigma(R)$ از بخش $\sigma(R)$ از قطعه سطح $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ متناظر به ناحیه $R \subseteq U$ عبارت است از

$$A_\sigma(R) = \iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv$$

البته این انتگرال ممکن است بی‌پایان باشد - مثل مساحت کل صفحه. اما انتگرال با پایان است اگر R همراه با مرزش به‌طور کامل در مستطیلی که در U است، قرار گیرد.

مقدار $\|\sigma_u \times \sigma_v\|$ که در تعریف مساحت ظاهر می‌گردد، به‌سادگی بر حسب اولین فرم اساسی σ ، $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ ، محاسبه می‌شود:

گزاره ۲.۵

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = (EG - F^2)^{1/2}$$

اثبات ۲.۵

از جبر برداری استفاده می‌کنیم: اگر a, b, c, d بردارهایی در \mathbf{R}^3 باشند، آنگاه

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

با به‌کارگیری رابطهٔ اخیر برای $(\sigma_u \times \sigma_v) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)$ به‌دست آوریم

$$\square \quad \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = (\sigma_u \cdot \sigma_u)(\sigma_v \cdot \sigma_v) - (\sigma_u \cdot \sigma_v)^2 = EG - F^2$$

توجه کنید برای سطوح عادی، همه جا، $EG - F^2 > 0$ ، زیرا برای سطوح عادی $\sigma_u \times \sigma_v$ هرگز صفر نیست. بنابراین تعریف ما از مساحت برابر است با

$$A_\sigma(R) = \iint_R (EG - F^2)^{1/2} du dv \quad (A)$$

گاهی $(EG - F^2)^{1/2}$ را با dA_σ نشان می‌دهیم. اما این تعریف باید با معنا باشد، یعنی با بازپیمایش σ تغییر نکند. و این مطمئناً واضح نیست زیرا E, F و G تحت باز پیمایش تغییر می‌کنند (تمرین ۴.۵ را ببینید).

گزاره ۳.۵

مساحت یک قطعه سطح تحت باز پیمایش تغییر نمی‌کند.

اثبات ۳.۵

فرض کنید $\sigma: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ یک قطعه سطح و $\tilde{\sigma}: \tilde{U} \rightarrow \mathbf{R}^3$ باز پیمایش σ و $\Phi: \tilde{U} \rightarrow U$ تابع باز پیمایش باشد. در این صورت اگر $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$ ، آنگاه

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\sigma_u, \sigma_v)$$

فرض کنید $\tilde{R} \subseteq \tilde{U}$ یک ناحیه و $R = \Phi(\tilde{R}) \subseteq U$. باید ثابت کنیم

$$\iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv = \iint_{\tilde{R}} \|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u} d\tilde{v}$$

در اثبات گزاره ۲.۴ نشان دادیم که

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \det(J(\Phi)) \sigma_u \times \sigma_v$$

که در آن $J(\Phi)$ ماتریس ژاکوبین Φ است. بنابراین

$$\iint_{\tilde{R}} \|\tilde{\sigma}_u \times \tilde{\sigma}_v\| d\tilde{u}d\tilde{v} = \iint_{\tilde{R}} |\det(J(\Phi))| \|\sigma_u \times \sigma_v\| d\tilde{u}d\tilde{v}$$

طبق فرمول تغییر متغیر برای انتگرال های دوگانه، سمت راست این معادله دقیقاً برابر است با

$$\square \quad \iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv$$

از این گزاره نتیجه می شود که مساحت هر سطح ماندی، با تقسیم S به قطعات کوچکی که هر یک، به تنهایی در یک قطعه سطح واقع هستند و محاسبه مساحت هر یک از آن ها از معادله (۸) و سپس جمع نتایج، بدست می آید. (به بخش ۳.۱۱ که در آن روش مشابهی انجام شده مراجعه کنید).

تمرین ها

۱۵.۵ مساحت بخشی از سهمی گون $z = x^2 + y^2$ به ازای $z \leq ۱$ را به دست آورده و آن را با مساحت نیم کره $z^2 = ۱ - x^2 - y^2$ به ازای $z \leq ۰$ مقایسه کنید.

۱۶.۵ سطح حاصل از دوران خم سرعت واحد γ ، واقع در صفحه xz ، که محور z ها را قطع نکرده و حول آن دوران یافته است را در نظر بگیرید با استفاده از پرمایش استاندارد برای این سطح، اولین فرم اساسی آن را محاسبه کنید و نتیجه بگیرید که مساحت آن برابر است با

$$2\pi \int \rho(u) du$$

که در آن $\rho(u)$ فاصله $\gamma(u)$ از محور z ها است. از این نتیجه مساحت ناحیه های زیر را پیدا کنید

(i) کره واحد

(ii) چنبره در تمرین ۱۰.۴

۱۷.۵ فرض کنید $\gamma(s)$ خم سرعت واحد در \mathbf{R}^3 با بردار قائم اصلی \mathbf{n} و بردار قائم دوم \mathbf{b} باشد. لوله به شعاع $a > 0$ دور γ ، سطح پرمایش شده

$$\sigma(s, \theta) = \gamma(s) + a(\mathbf{n}(s) \cos \theta + \mathbf{b}(s) \sin \theta)$$

است. یک تعبیر هندسی از این سطح ارائه دهید. ثابت کنید σ عادی است اگر، همه جا، انحنای κ برای γ ، کمتر از a^{-1} باشد. با فرض اینکه این شرایط تأمین باشد،

ثابت کنید به ازای ثابت‌های s_0 و s_1 مساحت بخشی از سطح داده شده به وسیله
 $s_0 < s < s_1$ و $0 < \theta < 2\pi$ با $2\pi(s_1 - s_0)$ برابر است.



لوله دور یک مارپیچ دایره‌گون

۵.۵ نگاشت‌های متساوی‌المساحت و قضیه ارشمیدس

می‌خواهیم از فرمول (۸) که مربوط به مساحت سطح است در اثبات قضیه‌ای که منسوب به ارشمیدس است و به وسیله ژنرال مارسلوس^۲ روی سنگ قبر او ثبت شده، استفاده کنیم. وی رهبری محاصره سیراکیوس^۳ را که در آن ارشمیدس کشته شد، به عهده داشت. طبیعتاً چون حساب دیفرانسیل و انتگرال در دسترس نبود، اثبات ارشمیدس کاملاً متفاوت از اثبات ما است. از قضیه او، فرمول زیبایی برای محاسبه مساحت هر سه ضلعی روی کره که یال‌هایش کمان‌هایی از دایره عظیمه هستند را نتیجه خواهیم گرفت.

به زبان امروزی، قضیه ارشمیدس نشان می‌دهد یک نگاشت خاص بین سطوح، متساوی‌المساحت به مفهوم زیر است:

تعریف ۴.۵

فرض کنید S_1 و S_2 دو سطح باشند. دیفئومورفیسم $f: S_1 \rightarrow S_2$ را متساوی‌المساحت می‌گوییم اگر هر ناحیه در S_1 به ناحیه‌ای در S_2 با همان مساحت تصویر شود.

مشابه قضیه ۱.۵ داریم:

قضیه ۳.۵

دیفئومورفیسم $f: S_1 \rightarrow S_2$ متساوی‌المساحت است اگر و فقط اگر برای هر قطعه سطح $\sigma(u, v)$ روی S_1 ، اولین فرم‌های اساسی

$$E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2$$

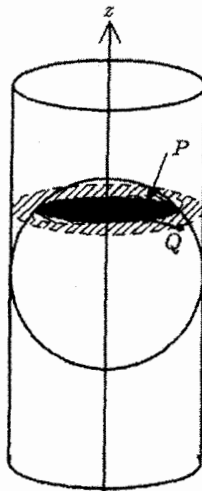
از قطعه σ روی S_1 و قطعه $f \circ \sigma$ روی S_2 در شرط

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2 \quad (9)$$

صدق کند.

اثبات بسیار شبیه اثبات قضیه ۱.۵ است و ما آن را به تمرین ۲۲.۵ محول می‌کنیم.

در خصوص قضیه ارشمیدس، کره واحد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و استوانه $x^2 + y^2 = 1$ را در نظر بگیرید. کره در داخل استوانه واقع است و دو سطح، روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy با هم تماس هستند. برای هر نقطه P روی کره، غیر از قطب‌های $(0, 0, \pm 1)$ ، خط مستقیم یگانه‌ای موازی صفحه xy که از نقطه P و محور z ها می‌گذرد موجود است. این خط استوانه را در دو نقطه قطع می‌کند. آن را که به P نزدیکتر است Q بنامید. فرض کنید f نگاشتی از کره (به جز دو قطب) به استوانه باشد که P را به Q تصویر می‌کند.



برای پیدا کردن فرمول f ، فرض کنید (x, y, z) مختصات دکارتی P و (X, Y, Z) مختصات Q باشد. چون PQ موازی صفحه xy است، لذا $Z = z$ و به ازای اسکالری مانند λ ، $(X, Y) = \lambda(x, y)$ چون (X, Y, Z) روی استوانه قرار دارد، لذا

$$1 = X^2 + Y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$$

$$\therefore \lambda = \pm(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

با این فرض که علامت +، نشان دهنده Q باشد، بدست می آوریم

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, z \right)$$

در اثبات قضیه بعد نشان می دهیم که f یک دیفیومرفیسم است.

قضیه ۴.۵ (قضیه ارشمیدس)

نگاشت f متساوی المساحت است.

اثبات ۴.۵

برای S_1 اطلسی مشتمل بر کره، منهای قطب های شمال و جنوب با دو قطعه که هر دو به وسیله فرمول

$$\sigma_1(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

روی مجموعه های باز

$$\left\{ -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi \right\} \text{ و } \left\{ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, -\pi < \varphi < \pi \right\}$$

تعریف شده اند را در نظر بگیرید. تصویر $\sigma_1(\theta, \varphi)$ تحت f نقطه

$$\sigma_2(\theta, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \sin \theta) \quad (10)$$

روی استوانه است. به آسانی می توان نشان داد که این اطلسی برای سطح S_2 ، مشتمل بر بخشی از استوانه واقع بین صفحات $z = 1$ و $z = -1$ ، با دو قطعه که هر دو با معادله (۱۰) روی همان دو مجموعه باز σ_1 تعریف می شود می باشد. باید نشان دهیم که معادله (۹) برقرار است.

ضرایب E_1, F_1, G_1 مربوط به اولین فرم اساسی σ_1 را در مثال ۳.۵ بدست آوردیم

$$E_1 = 1, F_1 = 0, G_1 = \cos^2 \theta$$

برای σ_2 داریم

$$(\sigma_2)_\theta = (0, 0, \cos \theta), \quad (\sigma_2)_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\therefore E_2 = \cos^2 \theta, \quad F_2 = 0, \quad G_2 = 1$$

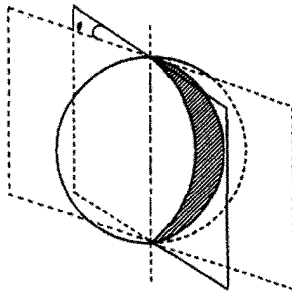
حال بدیهی است که معادله (۹) نتیجه می شود.

توجه کنید چون بر حسب پرمایش های σ_1 و σ_2 ، برای کره و استوانه، f به نگاشت همانی

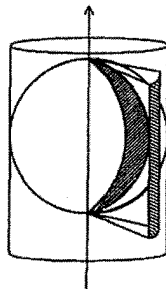
$(\theta, \varphi) \mapsto (\theta, \varphi)$ متناظر می شود، لذا f یک دیفیومرفیسم است. \square

مثال ۸.۵

از قضیه ارشمیدس برای محاسبه مساحت هلال، سطح محدود بین دو دایره عظیمه، استفاده می‌کنیم.



می‌توانیم فرض کنیم که دو دایره عظیمه همدیگر را در قطب‌ها قطع می‌کند چون این کار با یک دوران کره انجام پذیر است و مساحت‌ها تغییر نمی‌کند (تمرین ۳.۵ را ببینید). اگر θ زاویه بین آنها باشد تحت نگاشت f ، تصویر هلال یک مستطیل منحنی شکل روی استوانه به پهنای θ و ارتفاع ۲ می‌باشد.



حال اگر از ایزومتری که استوانه را روی صفحه پهن می‌کند استفاده کنیم، مستطیل منحنی شکل واقع بر استوانه به یک مستطیل واقعی روی صفحه با همان پهنای θ و ارتفاع ۲، تصویر می‌شود. بر اساس قضیه ارشمیدس، هلال، دارای همان مساحتی است که مستطیل منحنی شکل روی استوانه دارد و چون هر ایزومتری یک نگاشت متساوی‌المساحت است (به تمرین ۱۸.۵ مراجعه کنید)، این مساحت با مساحت مستطیل واقعی روی صفحه که مساوی 2θ است، یکی می‌باشد. توجه کنید بر این اساس مساحت همه کره 4π است.

قضیه ۵.۵

فرض کنید ABC یک مثلث روی کره شعاع واحد باشد که یال‌هایش کمان‌هایی از دایره عظیمه هستند در این صورت مساحت مثلث برابر است با

$$\angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

که $\angle A$ زاویه مثلث در A و الی آخر، است.

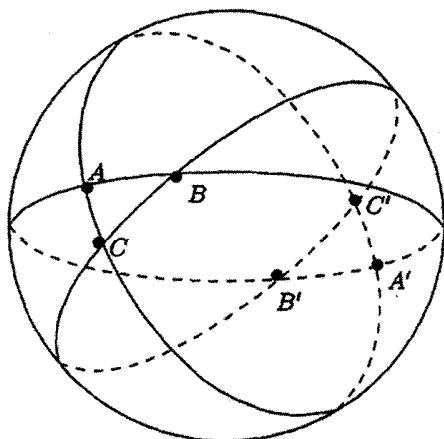
اثبات ۵.۵

سه دایره عظیمه‌ایی که کمان‌هایی از آن یال‌های مثلث هستند، همان‌طور که نمودار زیر نشان می‌دهد، کره را به ۸ مثلث تقسیم می‌کنند (که در آن A' نقطه متناظر A است و الی آخر). مساحت مثلث ABC را به $A(ABC)$ نشان دهید و الی آخر، در این صورت بر اساس مثال ۸.۵ داریم

$$A(ABC) + A(A'BC) = 2\angle A$$

$$A(ABC) + A(AB'C) = 2\angle B$$

$$A(ABC) + A(ABC') = 2\angle C$$



با جمع کردن این معادلات داریم

$$2A(ABC) + \{A(ABC) + A(A'BC) + A(AB'C) + A(ABC')\} = 2\angle A + 2\angle B + 2\angle C \quad (11)$$

مثلث‌های ABC ، $AB'C$ ، $AB'C'$ ، و $A'BC$ با هم یک نیم کره می‌سازند، لذا

$$A(ABC) + A(AB'C) + A(AB'C') + A(ABC') = 2\pi \quad (12)$$

نهایتاً، چون نگاشتی که هر نقطه از کره را به نقطه متناظرش تصویر می‌کند به‌وضوح یک ایزومتري و در نتیجه یک متساوی‌المساحت است (تمرین ۱۸.۵)، داریم

$$A(A'BC) = A(AB'C')$$

با قراردادن در معادله ۱۲، عبارت داخل { } در سمت راست معادله (۱۱)، برابر با 2π است. حال با مرتب کردن مجدد، نتیجه حاصل می‌شود.

□

در فصل ۱۱، تعمیم گسترده‌ای از این نتیجه که در آن به جای کره، هر سطح دلخواه و به جای دایره عظیمه هر خم دلخواه روی سطح جایگزین می‌شود، بدست می‌آوریم.

تمرین‌ها

۱۸.۵ نشان دهید هر ایزومتري یک نگاشت متساوی‌المساحت است. یک مثال از یک نگاشت متساوی‌المساحت ارائه دهید که یک ایزومتري نباشد.

۱۹.۵ نشان دهید هر نگاشتی بین سطوح که هم همدیس و هم متساوی‌المساحت باشد یک ایزومتري است.

۲۰.۵ یک دریانورد، استرالیا را با مسیری مثلثی شکل که یال‌هایش کمان‌هایی از دایره عظیمه هستند طی می‌کند. ثابت کنید حداقل یک زاویه داخلی مثلث، بزرگتر یا مساوی $\frac{\pi}{3} + \frac{1^\circ}{169}$ رادیان است. (زمین را کره شعاع 6500 کیلومتر بگیرید و فرض کنید مساحت استرالیا $7/5$ میلیون کیلومتر مربع است.)

۲۱.۵ کره واحد در \mathbb{R}^3 به وسیله مثلث‌هایی که یال‌هایش کمان‌هایی از دایره عظیمه هستند پوشانده می‌شود به طوری که اشتراک هر دو مثلث یا تهی است یا در یک یال یا یک رأس مشترک هستند. فرض کنید F مثلث، E یال (هر یال مشترک بین دو مثلث، فقط یکبار شمرده می‌شود) و V رأس (هر رأس مشترک بین چند مثلث فقط یکبار شمرده می‌شود) موجود باشد. نشان دهید $2F = 3E$. از قضیه ۵.۵ نتیجه بگیرید که $2V - F = 4$ و در نتیجه نشان دهید $2 = V - E + F$ (این نتیجه در فصل ۱۱، تعمیم می‌یابد).

۲۲.۵ قضیه ۳.۵ را ثابت کنید.

در این فصل چندین راه را برای اندازه گیری مقدار «خمیدگی» یک سطح معرفی می‌کنیم. همه این‌ها نهایتاً به دومین فرم اساسی یک قطعه سطح متکی است. نتیجه این که (قضیه ۴.۱۰ را ببینید) یک قطعه سطح، صرف‌نظر از حرکت صلب در \mathbb{R}^3 به وسیلهٔ اولین و دومین فرم اساسی آن معین می‌شود، درست مثل یک خم مسطح سرعت-واحد که صرف‌نظر از یک حرکت صلب با انحنای علامت‌دارش معین می‌شود.

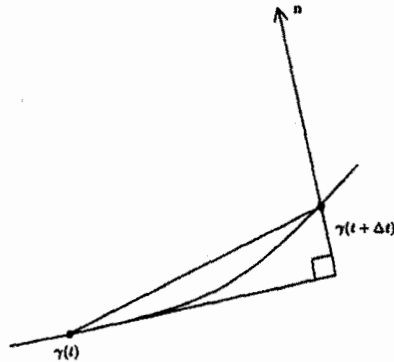
۱.۶ دومین فرم اساسی

برای دیدن این که چطور ممکن است انحنای یک سطح را تعریف کنیم با مفهوم جدیدی از انحنای یک خم مسطح شروع می‌کنیم. لذا فرض کنید γ یک خم سرعت-واحد در \mathbb{R}^3 باشد. وقتی پارامتر t در γ به $t + \Delta t$ تغییر می‌کند، خم از خط مماسش در $\gamma(t)$ به اندازه $(\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)) \cdot \mathbf{n}$ فاصله پیدا می‌کند که در آن \mathbf{n} قائم اصلی γ در $\gamma(t)$ است، طبق قضیه تیلور

$$\gamma(t + \Delta t) = \gamma(t) + \dot{\gamma}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(t)(\Delta t)^2 + \text{باقیمانده}$$

که در آن حد $\frac{\text{باقیمانده}}{(\Delta t)^2}$ وقتی Δt به صفر میل کند، صفر خواهد شد. چون \mathbf{n} بر بردار مماس واحد $\dot{\gamma} = \dot{t} = \kappa \mathbf{n}$ عمود می‌باشد و $\ddot{\gamma} = \dot{t} = \kappa \mathbf{n}$ که در آن κ انحنای خم γ است، در نتیجه، $\ddot{\gamma} \cdot \mathbf{n} = \kappa$ و انحراف γ از خط مماسش برابر است با

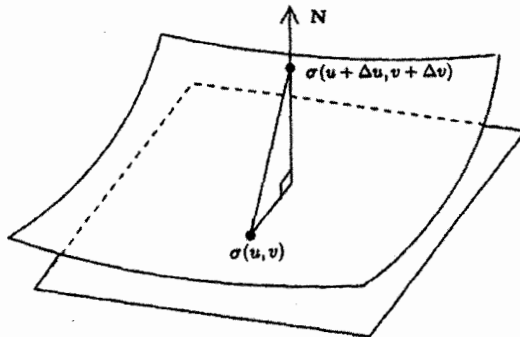
$$\left(\dot{\gamma}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(t)(\Delta t)^2 + \dots \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}\kappa(\Delta t)^2 + \text{باقیمانده} \quad (1)$$



اکنون فرض می‌کنیم σ یک قطعه سطح در \mathbf{R}^3 با قائم واحد استاندارد N باشد. وقتی پارامترهای (u, v) از σ به $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ تغییر یابند، سطح از صفحه مماس در $\sigma(u, v)$ به اندازه

$$(\sigma(u + \Delta u, v + \Delta v) - \sigma(u, v)) \cdot N$$

فاصله پیدا می‌کند.



بر اساس قضیه تیلور دو متغیره، $\sigma(u + \Delta u, v + \Delta v) - \sigma(u, v)$ معادل است با

$$\sigma_u \Delta u + \sigma_v \Delta v + \frac{1}{2}(\sigma_{uu}(\Delta u)^2 + 2\sigma_{uv}\Delta u\Delta v + \sigma_{vv}(\Delta v)^2) + \text{باقیمانده}$$

که در آن $\frac{\text{باقیمانده}}{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$ وقتی که $(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$ به سمت صفر میل کند به صفر نزدیک می‌شود. اما σ_u و σ_v بر سطح مماسند، پس بر N عمودند، بنابراین انحراف σ از صفحه مماسش برابر است با

$$\frac{1}{2}(L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u\Delta v + N(\Delta v)^2) + \text{باقیمانده} \quad (2)$$

که در آن

$$L = \sigma_{uu} \cdot N, \quad M = \sigma_{uv} \cdot N, \quad N = \sigma_{vv} \cdot N \quad (۳)$$

از مقایسه معادله (۲) و (۱)، می‌بینیم که عبارت

$$L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u\Delta v + N(\Delta v)^2$$

برای انحناى سطح، نظیر جمله $\kappa(\Delta t)^2$ برای خم است. عبارت

$$Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2 \quad (۴)$$

دومین فرم اساسی σ خوانده می‌شود. مانند اولین فرم اساسی به عبارت (۴) به عنوان یک روش مناسب که حاوی اطلاعات درباره سه تابع L ، M و N نگاه می‌کنیم. به زودی می‌بینیم که شناسایی این سه تابع (همراه با توابع مربوط به اولین فرم اساسی) ما را قادر می‌سازد که انحناى هر خمی را روی سطح σ محاسبه کنیم.

مثال ۱.۶

صفحه

$$\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$$

را در نظر می‌گیریم (مثال ۱.۴ را ببینید). چون $\sigma_u = \mathbf{p}$ و $\sigma_v = \mathbf{q}$ بردارهای ثابت هستند، داریم. $\sigma_{uu} = \sigma_{uv} = \sigma_{vv} = \mathbf{0}$. بنابراین دومین فرم اساسی صفحه برابر صفر است.

مثال ۲.۶

قطعه σ روی سطح دورانی

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

را در نظر می‌گیریم. از مثال ۱۲.۴ یادآور می‌شویم که می‌توان فرض نمود که برای هر u ، $f(u) > 0$ و خم برش قائم $(f(u), 0, g(u)) \mapsto u$ سرعت-واحد است، یعنی $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$.

(نقطه نشان دهنده $\frac{d}{du}$ است). در این صورت:

$$\sigma_u = (\dot{f} \cos v, \dot{f} \sin v, \dot{g}), \quad \sigma_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$$

$$\therefore E = \|\sigma_u\|^2 = \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1, \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v = 0, \quad G = \|\sigma_v\|^2 = f^2$$

$$\therefore \sigma_u \times \sigma_v = (-f\dot{g} \cos v, -f\dot{g} \sin v, f\dot{f})$$

$$\therefore \|\sigma_u \times \sigma_v\| = f \quad (\text{چون } \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1)$$

$$\therefore N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = (-\dot{g} \cos v, -\dot{g} \sin v, \dot{f})$$

$$\sigma_{uu} = (\ddot{f} \cos v, \ddot{f} \sin v, \ddot{g})$$

$$\sigma_{uv} = (-\dot{f} \sin v, \dot{f} \cos v, 0)$$

$$\sigma_{vv} = (-f \cos v, -f \sin v, 0)$$

$$\therefore L = \sigma_{uu} \cdot N = \dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g}, \quad M = \sigma_{uv} \cdot N = 0, \quad N = \sigma_{vv} \cdot N = f\dot{g}$$

پس دومین فرم اساسی برابر است با

$$(f\dot{g} - \ddot{f}\dot{g})du^2 + f\dot{g}dv^2$$

اگر سطح، کره واحد باشد، می توان فرض کرد $f(u) = \cos u$ و $g(u) = \sin u$ ، $-\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}$ و لذا

$$L = 1, \quad M = 0, \quad N = \cos^2 u$$

(توجه کنید که شرط $f > 0$ و $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ برقرار است.) u و v را با متغیرهای معمول تر θ و φ تعویض کنید تا دومین فرم اساسی کره واحد بدست آید:

$$d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$$

اگر سطح، استوانه دایره گون با شعاع واحد باشد، می توان فرض نمود $f(u) = 1$ و $g(u) = u$ (هم چنان شرایط $f > 0$ و $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ برقرارند). در این صورت داریم

$$L = M = 0, \quad N = 1$$

بنابراین دومین فرم اساسی استوانه dv^2 می باشد.

تمرین‌ها

۱.۶ دومین فرم اساسی سهمی‌گون بیضوی

$$\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

را محاسبه کنید.

۲.۶ دومین فرم اساسی قطعه سطح σ همه جا برابر صفر است. ثابت کنید σ قسمتی از یک صفحه است. (با محاسبه عبارت‌های نظیر $(\sigma_u \cdot N)_u$ ، ثابت کنید N_u و N_v به σ_u و σ_v عمودند و نشان دهید که قائم واحد N از σ یک بردار ثابت است.) این، نظیر این قضیه است که اگر یک خم در همه جا انحناى صفر داشته باشد، آنگاه قسمتی از یک خط مستقیم است.

۳.۶ فرض کنید قطعه سطح $\bar{\sigma}(\bar{u}, \bar{v})$ باز پرمایش قطعه سطح $\sigma(u, v)$ با تابع باز پرمایش $(u, v) = \Phi(\bar{u}, \bar{v})$ ثابت کنید.

$$\begin{pmatrix} \bar{L} & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{N} \end{pmatrix} = \pm J^t \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} J$$

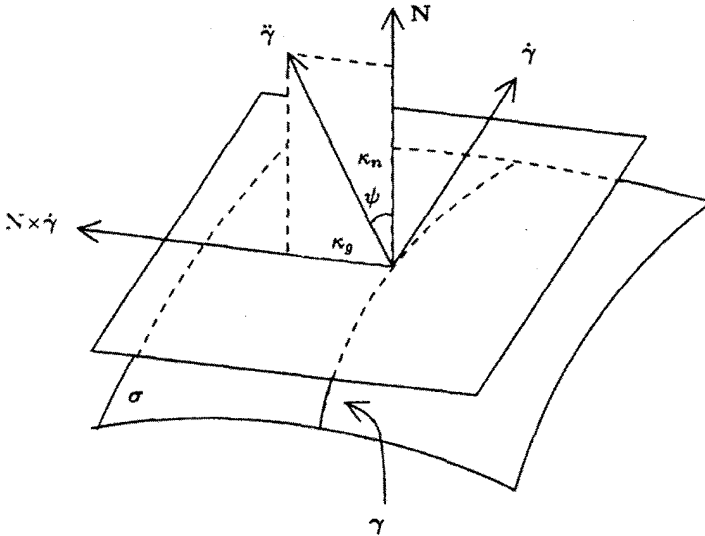
که در آن J ماتریس ژاکوبین Φ است و علامت وقتی مثبت است که $\det(J) > 0$ و علامت منفی است وقتی که $\det(J) < 0$.

۴.۶ نشان دهید دومین فرم اساسی یک قطعه سطح، تحت حرکت صلب غیر قابل تغییر است.

۲.۶ انحناى خم‌های روی یک سطح

راه طبیعی دیگر برای بررسی این که یک سطح تا چه اندازه خمیده است این است که به انحناى خم‌های مختلف روی سطح نگاه کنیم. اگر $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ یک خم سرعت-واحد در قطعه سطح σ باشد، آنگاه $\dot{\gamma}$ یک بردار واحد و بنابر تعریف یک بردار مماس بر σ است. بنابراین، $\dot{\gamma}$ بر قائم واحد استاندارد N از σ عمود است، لذا γ ، N و $\dot{\gamma}$ مشترکاً بردارهای واحد عمودند. دوباره چون γ سرعت-واحد است، $\ddot{\gamma}$ بر $\dot{\gamma}$ عمود است، و بنابراین یک ترکیب خطی از N و $\dot{\gamma} \times N$ است:

$$\ddot{\gamma} = \kappa_n N + \kappa_g N \times \dot{\gamma} \quad (5)$$



اسکالرهای κ_n و κ_g به ترتیب انحنای قائم و انحنای ژئودزیک γ خوانده می‌شوند چون N و $N \times \dot{\gamma}$ بردارهای واحد عمود می‌باشند، از معادله (۵) نتیجه می‌گیریم که:

$$\kappa_n = \ddot{\gamma} \cdot N, \quad \kappa_g = \ddot{\gamma} \cdot (N \times \dot{\gamma})$$

و

$$\|\ddot{\gamma}\|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

بنابراین، انحنای $\|\ddot{\gamma}\| = \kappa$ از γ از رابطه

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \tag{۶}$$

بدست می‌آید.

به علاوه، اگر n قائم اصلی $\dot{\gamma}$ باشد، آنگاه $\ddot{\gamma} = \kappa n$ ، و

$$\kappa_n = \kappa n \cdot N = \kappa \cos \psi \tag{۷}$$

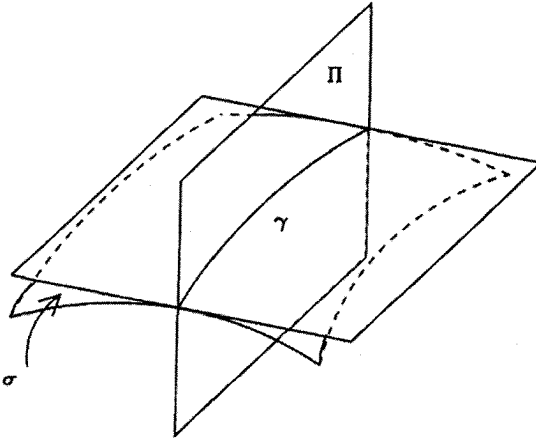
که در آن ψ زاویه بین N و n است. بنابراین، از معادله (۶)

$$\kappa_g = \pm \kappa \sin \psi \tag{۸}$$

از تعریف روشن است که اگر σ بازبرمایش شود، آنگاه κ_n و κ_g یا در همان وضع باقی می‌مانند و یا هر دو تغییر علامت می‌دهند (چون N این گونه است).

اگر γ عادی، اما نه ضرورتاً سرعت-واحد، باشد انحنای ژئودزیک و انحنای قائم γ را برای بازپرمایش سرعت-واحد آن، تعریف می‌کنیم. وقتی پارامتر سرعت-واحد t به پارامتر $\pm t + c$ که در آن c یک ثابت است، تغییر یابد، روشن است که $\kappa_n \mapsto \kappa_n$ و $\kappa_g \mapsto \pm \kappa_g$ ، بنابراین برای هر خم عادی خوش تعریف است، در حالی که κ_g صرف نظر از علامت خوش تعریف است. معادلات (۷) و (۸) تا بیان وضعیت عمومی‌تر ادامه دارد.

حالت خاص مهم زمانی است که γ بخش قائم یک سطح باشد، مثلاً γ اشتراک سطح با صفحه Π که بر صفحه مماس بر سطح در هر نقطه از γ عمود است باشد.



چون γ در Π قرار می‌گیرد، قائم اصلی n موازی Π است، و چون Π عمود بر صفحه مماس است، N نیز موازی Π می‌شود. چون n و N هر دو بر γ عمودند و همچنین $\dot{\gamma}$ موازی Π است، n و N می‌بایستی موازی یکدیگر باشند، مثلاً π یا $\psi = 0$ از معادلات (۷) و (۸)، نتیجه می‌گیریم که برای بخش قائم،

$$\kappa_n = \pm \kappa, \quad \kappa_g = 0$$

اکنون انحنای قائم κ_n را با جزئیات بیشتری مطالعه می‌کنیم. بررسی κ_g به فصل ۸ موکول می‌شود.

تمرین‌ها

۵.۶ انحنای قائم دایره $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ در سهمی‌گون بیضوی $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ را محاسبه کنید (تمرین ۱.۶ را ببینید).

۶.۶ نشان دهید اگر خم روی سطح همه جا دارای انحنای قائم و انحنای ژئودزیک صفر باشد، آنگاه قسمتی از یک خط مستقیم است.

۷.۶ نشان دهید که انحناى قائم هر خم روی کره به شعاع r ، برابر با $\pm \frac{1}{r}$ است.

۸.۶ انحناى ژئودزیک دایره (نه لزوماً دایره عظیمه) روی کره را محاسبه کنید.

۹.۶ سطح دوران

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

که در آن $(f(u), g(u)) \mapsto u$ خم سرعت-واحد در \mathbf{R}^2 است را در نظر بگیرید.
انحناى ژئودزیک

(i) نصف النهار v = ثابت

(ii) موازی u = ثابت

را محاسبه کنید.

۱۰.۶ خم سرعت-واحد γ با انحناى $\kappa > 0$ و قائم اصلی \mathbf{n} از تقاطع سطوح S_1 و S_2 با قائم‌های واحد $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ تشکیل شده است. نشان دهید اگر κ_1 و κ_2 به ترتیب انحناهای قائم γ به عنوان یک خم در S_1 و S_2 باشند، آنگاه

$$\kappa_1 \mathbf{N}_2 - \kappa_2 \mathbf{N}_1 = \kappa (\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) \times \mathbf{n}$$

نشان دهید اگر α زاویه بین دو سطح باشد آنگاه

$$\kappa^2 \sin^2 \alpha = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 \cos \alpha$$

۱۱.۶ فرض کنید γ خم سرعت-واحد روی قطعه سطح σ با انحناى $\kappa > 0$ و ψ زاویه بین $\dot{\gamma}$ و \mathbf{N} باشد و فرض کنید $\mathbf{B} = \mathbf{t} \times \mathbf{N}$ (در نماد معمولی). نشان دهید

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \cos \psi + \mathbf{b} \sin \psi, \quad \mathbf{B} = \mathbf{b} \cos \psi - \mathbf{n} \sin \psi$$

نتیجه بگیرید که

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa_n \mathbf{N} - \kappa_g \mathbf{B}, \quad \dot{\mathbf{N}} = -\kappa_n \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{B}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \kappa_g \mathbf{t} - \tau_g \mathbf{N}$$

که در آن $\tau_g = \tau + \dot{\psi}$ (تاب ژئودزیک γ خوانده می‌شود، تمرین ۲.۸ را ببینید).

۱۲.۶ خم γ روی S مجانبی است اگر انحناى قائم آن در همه جا صفر باشد. نشان دهید هر خط مستقیم روی سطح، یک خم مجانبی است. همچنین نشان دهید خم γ با انحناى مثبت، مجانبی است اگر و فقط اگر قائم دوم با قائم واحد S ، در هر نقطه از γ موازی باشد.

۱۳.۶ ثابت کنید که خم‌های مجانبی روی سطح

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln u)$$

از رابطه

$$\ln u = \pm(v + c)$$

که در آن c یک ثابت دلخواه است، بدست می‌آید.

۱۴.۶ نشان دهید تاب خم مجانبی با انحناى مثبت برابر با تاب ژئودزیکش می‌باشد (تمرین ۱۱.۶ را ببینید). (نشان دهید \mathbf{B} موازی \mathbf{n} است.)

۳.۶ انحناهای قائم و اصلی

مهم‌ترین حقیقت در رابطه با انحناى قائم κ_n از خم γ روی سطح σ در زیر بیان شده است.

گزاره ۱.۶

اگر $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ یک خم سرعت-واحد روی قطعه سطح σ باشد، انحناى قائم آن از رابطه

$$\kappa_n = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$$

بدست می‌آید که در آن $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ دومین فرم اساسی σ است.

این نتیجه به این معناست که دوخم سرعت-واحد گذرا از نقطه P روی یک سطح و با بردار مماس همسان در نقطه P ، دارای انحناى قائم یکسان در نقطه P هستند زیرا κ_n و بردار مماس $\dot{\gamma} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}$ هر دو فقط به u, v, \dot{u} و \dot{v} (و نه به مشتقات مراتب بالاتر u و v) وابسته هستند.

اثبات ۱.۶

فرض می‌کنیم \mathbf{N} قائم واحد استاندارد σ باشد، در این صورت با بکارگیری تعریف (۳) از L, M و N و این حقیقت که \mathbf{N} بر σ_u و σ_v عمود است. داریم

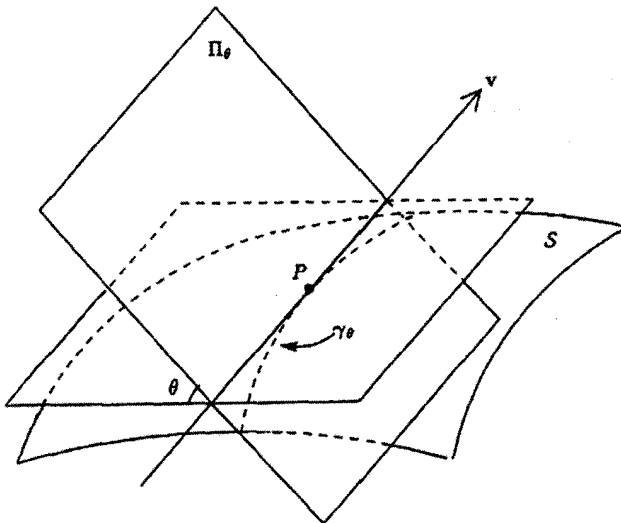
$$\begin{aligned} \kappa_n &= \mathbf{N} \cdot \ddot{\gamma} = \mathbf{N} \cdot \frac{d}{dt}(\dot{\gamma}) = \mathbf{N} \cdot \frac{d}{dt}(\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}) \\ &= \mathbf{N} \cdot (\sigma_{uu} \ddot{u} + \sigma_{vv} \ddot{v} + (\sigma_{uu} \dot{u} + \sigma_{uv} \dot{v}) \dot{u} + (\sigma_{uv} \dot{u} + \sigma_{vv} \dot{v}) \dot{v}) \\ &= L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 \end{aligned}$$

□

نتیجه کلاسیک زیر که بیان آن طولانی‌تر از اثبات آن است، از این گزاره نتیجه می‌شود.

گزاره ۲.۶ (قضیه میوزنیر)^۱

فرض کنید P نقطه‌ای روی سطح S ، ν بردار مماس واحد بر S در نقطه P و Π_θ صفحه‌ی شامل خط گذرا از P موازی ν باشد که با صفحه مماس بر S در نقطه P زاویه θ می‌سازد. فرض کنید S ، Π_θ را در یک خم با انحنای κ_θ قطع کند. در این صورت، $\kappa_\theta \sin \theta$ مستقل از θ است.



اثبات ۲.۶

فرض کنید γ_θ پرمایش سرعت واحد خم حاصل از تقاطع S و Π_θ باشد. در این صورت در نقطه P ، $\dot{\gamma}_\theta = \pm \nu$ ، بنابراین $\ddot{\gamma}_\theta$ بر ν عمود و موازی Π_θ است. لذا، با نماد بخش ۱.۶، $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ و بنابراین از معادله (۷) نتیجه می‌شود:

$$\kappa_\theta \sin \theta = \kappa_n$$

□

اما κ_n فقط به ν و P بستگی دارد و به θ وابسته نیست.

برای تجزیه و تحلیل بیشتر κ_n ، بهتر است از ماتریس استفاده کنیم. اگر

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad \text{و} \quad Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

1) Meusnier's Theorem

اولین و دومین فرم اساسی سطح σ باشد، ماتریس‌های 2×2 متقارن زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

فرض کنید

$$t_1 = \xi_1 \sigma_u + \eta_1 \sigma_v, \quad t_2 = \xi_2 \sigma_u + \eta_2 \sigma_v$$

دو بردار مماس در نقطه‌ای از σ باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} t_1 \cdot t_2 &= (\xi_1 \sigma_u + \eta_1 \sigma_v) \cdot (\xi_2 \sigma_u + \eta_2 \sigma_v) \\ &= E \xi_1 \xi_2 + F(\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + G \eta_1 \eta_2 \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین، با نوشتن

$$T_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

داریم

$$t_1 \cdot t_2 = T_1^t \mathcal{F}_I T_2 \quad (۹)$$

از طرف دیگر برای بردار مماس $\dot{\gamma} = \dot{u} \sigma_u + \dot{v} \sigma_v$ اگر $T = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$ آنگاه با استفاده از

گزاره ۱.۶ و محاسبه ماتریسی مشابه داریم:

$$\kappa_n = T^t \mathcal{F}_{II} T \quad (۱۰)$$

توجیه برای دو تعریف بعدی در گزاره ۳.۶ و نتیجه ۱.۶ ظاهر می‌شود.

تعریف ۱.۶

انحناهای اصلی یک قطعه سطح ریشه‌های معادله

$$\det(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) = 0 \quad (۱۱)$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

هستند. چون (۱۲) یک معادله درجه دوم از κ است، پس دارای دو جواب است. فرض اولیه این است که ریشه‌ها ممکن است اعداد مختلط باشند. اما در گزاره بعدی ثابت خواهیم کرد که انحناهای اصلی همیشه حقیقی‌اند. در مورد انگیزه این نتیجه، توجه کنید که اگر \mathcal{F}_I ماتریس همانی (برای مثال، پرمایش استاندارد صفحه) باشد، معادله (۱۱) به معادله مقادیر ویژه برای \mathcal{F}_{II} تبدیل می‌شود. اما یک نتیجه استاندارد از جبر خطی بیان می‌کند که مقادیر ویژه هر ماتریس متقارن حقیقی، مثل \mathcal{F}_{II} ، اعداد حقیقی‌اند. در حالت کلی، \mathcal{F}_I ماتریس همانی نیست، اما همیشه معکوس‌پذیر است (تذکر بعد از گزاره ۲.۵ را ببینید)، لذا معادله (۱۱) معادل است با

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{F}_I(\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} - \kappa)) &= 0 \\ \therefore \det(\mathcal{F}_I) \det(\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} - \kappa) &= 0 \\ \therefore \det(\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} - \kappa) &= 0 \end{aligned}$$

و بنابراین انحناهای اصلی، مقادیر ویژه $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$ می‌باشند. اما، $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$ معمولاً متقارن نیست، لذا در حالت کلی، نتیجه بالا از جبر خطی، بلافاصله، واقعیت انحناهای اصلی را بیان نمی‌کند.

اگر κ یکی از انحناهای اصلی باشد، معادله (۱۱) می‌گوید $\mathcal{F}_{II} - \kappa\mathcal{F}_I$ معکوس‌پذیر نیست پس، با فرض این‌که κ حقیقی است، ماتریس ستونی 1×2 غیر صفر T با اعداد حقیقی وجود دارد به طوری‌که

$$(\mathcal{F}_{II} - \kappa\mathcal{F}_I)T = 0 \quad (13)$$

تعریف ۲.۶

اگر $T = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ در معادله ۱۳ صدق کند، بردار مماس $t = \xi\sigma_u + \eta\sigma_v$ در سطح $\sigma(u, v)$ بردار اصلی متناظر به انحنا اصلی κ خوانده می‌شود.

گزاره ۳.۶

فرض کنید κ_1 و κ_2 انحناهای اصلی در نقطه P از قطعه سطح σ باشد. آنگاه

(i) κ_1 و κ_2 اعداد حقیقی هستند.

(ii) اگر $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ در این صورت $\mathcal{F}_{II} = \kappa \mathcal{F}_I$ و (بنابراین) هر بردار مماس بر σ

در نقطه P بردار اصلی است؛

(iii) اگر $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ، آنگاه بردارهای اصلی (غیر صفر) t_1 و t_2 ، به ترتیب متناظر به κ_1 و

κ_2 بر هم عمودند.

در حالت (ii)، P نافی خوانده می‌شود.

اثبات ۳.۶

برای اثبات (i)، فرض کنید t_1 و t_2 دو بردار مماس واحد عمود بر هم در نقطه P از سطح σ باشند به ازای $i = 1, 2$ ، ξ_i ، η_i و T_i را مانند بحث قبل در تعریف ۶.۱ تعریف کرده و فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

تحت ضرب ماتریس‌ها، به سهولت دیده می‌شود که:

$$\begin{aligned} A^t \mathcal{F}_I A &= \begin{pmatrix} T_1^t \mathcal{F}_I T_1 & T_1^t \mathcal{F}_I T_2 \\ T_2^t \mathcal{F}_I T_1 & T_2^t \mathcal{F}_I T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_1 \cdot t_1 & t_1 \cdot t_2 \\ t_2 \cdot t_1 & t_2 \cdot t_2 \end{pmatrix} && (\text{طبق معادله ۹}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

زیرا t_1 و t_2 بردارهای واحد متعامد هستند. فرض کنید

$$\mathcal{G}_{II} = A^t \mathcal{F}_{II} A$$

در این صورت \mathcal{G}_{II} هنوز (حقیقی و) متقارن است زیرا

$$\mathcal{G}_{II}^t = A^t \mathcal{F}_{II}^t (A^t)^t = A^t \mathcal{F}_{II} A = \mathcal{G}_{II}$$

طبق قضیه‌ای از جبر خطی که در بالا به آن اشاره شد، ماتریس متعامد یکه B (یعنی $B^t B = I$) و اعداد حقیقی λ_1 و λ_2 موجود است به طوری که

$$B^t \mathcal{G}_{II} B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

فرض کنید $C = AB$ ، در این صورت

$$C^t \mathcal{F}_I C = B^t (A^t \mathcal{F}_I A) B = B^t B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

زیرا B متعامد واحد است، و

$$C^t \mathcal{F}_{II} C = B^t (A^t \mathcal{F}_{II} A) B = B^t \mathcal{G}_{II} B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

حال C معکوس پذیر است (زیرا حاصل ضرب دو ماتریس معکوس پذیر است)، بنابراین

$$\det(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \det(C^t (\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) C) = 0$$

$$\det(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \det \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

در نتیجه انحنای اصلی ریشه‌های معادله

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \kappa & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \kappa \end{vmatrix} = 0$$

یعنی λ_1 و λ_2 هستند.

برای اثبات (ii) فرض کنید انحنای اصلی برابر و مثلاً κ است. در این صورت $\lambda_1 = \lambda_2 = \kappa$ و از معادلات (14) و (15) داریم

$$C^t \mathcal{F}_I C = I, \quad C^t \mathcal{F}_{II} C = \kappa I$$

$$\therefore C^t (\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) C = 0$$

$$\therefore \mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I = 0$$

زیرا C و C^t معکوس پذیرند. در این صورت اگر T هر ماتریس ستونی 1×2 باشد به وضوح داریم

$$(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) T = 0$$

بنابراین هر بردار مماس به σ در P ، یک بردار اصلی است.
 نهایتاً برای اثبات (iii)، فرض کنید به ازای $i = 1, 2$

$$t_i = \xi_i \sigma_u + \eta_i \sigma_v, \quad T_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$$

در این صورت طبق معادله (۹)

$$t_1 \cdot t_2 = T_1^t \mathcal{F}_I T_2$$

و طبق معادله (۱۳)

$$\mathcal{F}_{II} T_1 = \kappa_1 \mathcal{F}_I T_1, \quad \mathcal{F}_{II} T_2 = \kappa_2 \mathcal{F}_I T_2 \quad (۱۶)$$

بنابراین

$$T_1^t \mathcal{F}_{II} T_1 = \kappa_1 (t_1 \cdot t_2), \quad T_2^t \mathcal{F}_{II} T_2 = \kappa_2 (t_1 \cdot t_2) \quad (۱۷)$$

اما چون ماتریس $T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2$ یک ماتریس 1×1 است، لذا با ماتریس توانهاده‌اش برابر است.

$$T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2 = (T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2)^t = T_2^t \mathcal{F}_{II} T_1 = T_2^t \mathcal{F}_{II} T_1$$

آخرین تساوی نشان می‌دهد که \mathcal{F}_{II} متقارن است. بنابراین از معادله ۱۷ داریم

$$\kappa_1 (t_1 \cdot t_2) = \kappa_2 (t_1 \cdot t_2)$$

□

لذا اگر $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ، آنگاه $t_1 \cdot t_2 = 0$ یعنی t_1, t_2 متعامد هستند.

مثال ۳.۶

طبیعی است که اندازه خمیدگی یک کره در هر جهت و در هر نقطه از کره یکسان باشد. بنابراین، انتظار داریم انحنای اصلی در هر نقطه با یکدیگر مساوی و ثابت باشند. برای این‌که این ادعا را با محاسبه نیز ثابت کنیم، طبق معمول از پرمایش طول و عرض جغرافیایی استفاده می‌کنیم.

مثال ۲.۵ دیدیم که

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \cos^2 \theta$$

و در مثال ۲.۶

$$L = 1, \quad M = 0, \quad N = \cos^2 \theta$$

بنابراین انحناهای اصلی ریشه‌های معادله

$$\begin{vmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta - \kappa \cos^2 \theta \end{vmatrix} = 0$$

هستند، یعنی $\kappa = 1$ (ریشه تکراری)، همان‌طور که انتظار داشتیم. هر بردار مماس یک بردار اصلی است.

مثال ۴.۶

استوانه دایره‌گون به شعاع ۱ و محور z ، را در نظر بگیرید. پرمایش معمول آن به صورت

$$\sigma(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$$

است. در مثال ۳.۵ دیدیم که

$$E = 1, F = 0, G = 1$$

و در مثال ۲.۶

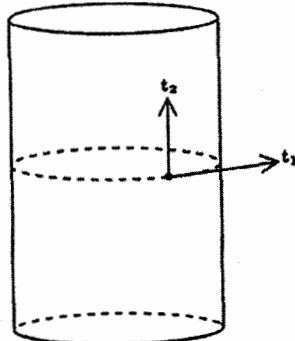
$$L = 0, M = 0, N = 1$$

بنابراین انحناهای اصلی ریشه‌های معادله زیر هستند.

$$\begin{vmatrix} 0 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \kappa(\kappa - 1) = 0$$

$$\therefore \kappa = 0 \text{ یا } 1$$



برای پیدا کردن بردارهای اصلی t_1 و t_2 ، یادآور می‌شویم که $t_i = \xi_i \sigma_u + \eta_i \sigma_v$ که در

$$\text{آن } T_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} \text{ در شرط}$$

$$(\mathcal{F}_{II} - \kappa \mathcal{F}_I) T_i = 0$$

و یا

$$\begin{pmatrix} L - \kappa_i E & M - \kappa_i F \\ M - \kappa_i F & N - \kappa_i G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = 0$$

صدق می‌کند. برای $\kappa_1 (= 1)$ داریم

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \xi_1 = 0$$

بنابراین T_1 مضربی از $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و در نتیجه t_1 مضربی از

$$0 \sigma_u + 1 \sigma_v = \sigma_v = (-\sin v, \cos v, 0)$$

است. به‌طور مشابه برای $\kappa_2 (= 0)$ می‌بینیم که T_2 مضربی از $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و در نتیجه t_2 مضربی از $\sigma_u = (0, 0, 1)$ است.

همان‌طور که در بالا متذکر شدیم دلیل معرفی انحناهای اصلی و بردارهای اصلی در نتیجه زیرگنجانده شده است که نشان می‌دهد اگر ما انحناهای اصلی و بردارهای اصلی یک سطح را بدانیم، به آسانی می‌توانیم انحناى قائم هر خم واقع بر سطح را بدست آوریم.

نتیجه ۱.۶ (قضیه اولر)

فرض کنید γ یک خم روی قطعه σ و κ_1 و κ_2 انحناهای اصلی σ و t_1 و t_2 بردارهای اصلی غیر صفر آن باشند در این صورت انحناى قائم γ برابر است با

$$\kappa_\gamma = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$$

که در آن θ زاویه بین γ و t_1 است.

اثبات ۱.۶

خم γ را خم سرعت واحد و t را بردار مماس γ فرض کنید و قرار دهید $t = \xi\sigma_u + \eta\sigma_v$ و $T = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ ابتدا فرض کنید $\kappa_1 = \kappa_2 = k$ طبق گزاره ۳.۶(ii) انحنای قائم γ برابر است با

$$\kappa_\gamma = T^t \mathcal{F}_{II} T = \kappa T^t \mathcal{F}_I T = \kappa t \cdot t = \kappa$$

که با فرمول مطرح شده در نتیجه مطابقت دارد، زیرا

$$\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \kappa$$

حال فرض کنید $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ، طبق گزاره ۳.۶(iii)، t_1 و t_2 متعامد هستند. همچنین فرض کنید t_1 و t_2 بردارهای واحد هستند و فرض کنید به ازای $i = 1, 2$

$$t_i = \xi_i \sigma_u + \eta_i \sigma_v, \quad T_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$$

حال

$$\dot{\gamma} = \cos \theta t_1 + \sin \theta t_2$$

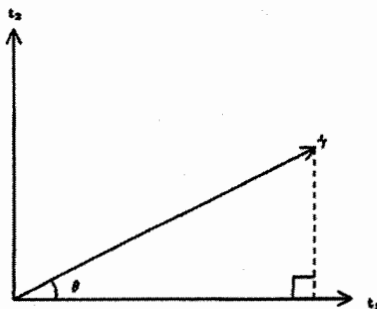
بنابراین

$$\cos \theta (\xi_1 \sigma_u + \eta_1 \sigma_v) + \sin \theta (\xi_2 \sigma_u + \eta_2 \sigma_v) = \xi \sigma_u + \eta \sigma_v$$

$$\therefore \xi_1 \cos \theta + \xi_2 \sin \theta = \xi, \quad \eta_1 \cos \theta + \eta_2 \sin \theta = \eta$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T = \cos \theta T_1 + \sin \theta T_2$$



در نتیجه طبق معادله (۱۰)، انحناى قائم γ برابر است با

$$\begin{aligned}\kappa_n &= T^t \mathcal{F}_{II} T \\ &= (\cos \theta T_1^t + \sin \theta T_2^t) \mathcal{F}_{II} (\cos \theta T_1 + \sin \theta T_2) \\ &= \cos^2 \theta T_1^t \mathcal{F}_{II} T_1 + \cos \theta \sin \theta (T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2 + T_2^t \mathcal{F}_{II} T_1) + \sin^2 \theta T_2^t \mathcal{F}_{II} T_2\end{aligned}\quad (18)$$

طبق تعريف ۲.۶ و معادله (۹) داریم

$$T_i^t \mathcal{F}_{II} T_j = \kappa_i T_i^t \mathcal{F}_{II} T_j = \begin{cases} \kappa_i & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{در غير اين صورت} \end{cases} \quad (19)$$

□ با قرار دادن در معادله (۱۸) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۶

انحنای اصلی در یک نقطه از سطح، مقادیر ماکزیمم و مینیمم انحناى قائم همه خم‌های روی سطح هستند که از نقطه مورد نظر می‌گذرند. بعلاوه بردارهای اصلی، بردارهای مماس خم‌هایی هستند که این مقادیر ماکزیمم و مینیمم را اتخاذ می‌کنند.

اثبات ۲.۶

اگر انحنای اصلی κ_1 و κ_2 متفاوت هستند، فرض کنید $\kappa_1 > \kappa_2$ و فرض کنید κ_n انحناى قائم خم γ واقع بر سطح باشد. در این صورت چون

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_2) \sin^2 \theta$$

به‌وضوح $\kappa_n \leq \kappa_1$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\theta = 0$ ، و یا اگر و فقط اگر، بردار مماس $\dot{\gamma}$ موازی بردار اصلی t_1 باشد. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $\kappa_n \geq \kappa_2$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\dot{\gamma}$ موازی t_2 باشد.

اگر $\kappa_1 = \kappa_2$ ، آنگاه طبق قضیه اولیرا، انحناى قائم هر خم برابر با κ_1 و طبق گزاره ۲.۶(ii)

□ بردار مماس به سطح، بردار اصلی است.

این بخش را با محاسبه زیر که بعداً در چند مورد از این کتاب مفید است به پایان می‌رسانیم.

گزاره ۴.۶

فرض کنید N بردار قائم واحد استاندارد قطعه سطح $\sigma(u, v)$ باشد. در این صورت

$$N_u = a\sigma_u + b\sigma_v, \quad N_v = c\sigma_u + d\sigma_v \quad (۲۰)$$

که در آن

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$$

ماتریس $\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$ را ماتریس وینگارتن^۲ قطعه سطح σ می‌نامند و به \mathcal{W} نمایش می‌دهند.

اثبات ۴.۶

چون N بردار واحد و N_u و N_v عمود بر N هستند، بنابراین در صفحه مماس بر σ قرار دارند و در نتیجه ترکیب خطی از σ_u و σ_v هستند. لذا اسکالره‌های a, b, c و d که در معادله (۲۰) صدق می‌کنند موجودند.

برای محاسبه آنها، توجه کنید که از $N \cdot \sigma_u = 0$ با مشتق‌گیری نسبت به u داریم.

$$N_u \cdot \sigma_u + N \cdot \sigma_{uu} = 0$$

$$\therefore N_u \cdot \sigma_u = -L$$

به‌طور مشابه

$$N_u \cdot \sigma_v = N_v \cdot \sigma_u = -M, \quad N_v \cdot \sigma_v = -N$$

از ضرب نقطه‌ای σ_u و σ_v در هر یک از معادلات (۲۰) داریم

$$-L = aE + bF, \quad -M = cE + dF$$

$$-M = aF + bG, \quad -N = cF + dG$$

این چهار معادله هم‌ارز با معادله ماتریسی زیر هستند.

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\therefore -\mathcal{F}_{II} = \mathcal{F}_I \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$$

□

تمرین‌ها

۱۵.۶ انحناهای اصلی ماریچچ‌نما و زنجیروار را که به ترتیب در تمرین‌های ۱۴.۴ و ۱۸.۴ تعریف شده‌اند، بدست آورید.

۱۶.۶ فرض کنید $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ یک خم عادی روی سطح σ باشد که لزوماً سرعت-واحد نیست. $\frac{d}{dt}$ را با نقطه نمایش دهید. ثابت کنید. انحناى قائم γ برابر است با

$$\kappa_n = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

۱۷.۶ با استفاده از نتایج تمرین‌های ۴.۵ و ۳.۶، نشان دهید وقتی سطح باز پرمایش می‌شود، انحناهای اصلی آن بر حسب این‌که قائم واحد ثابت باشد یا تغییر علامت دهد، یا ثابت می‌مانند و یا هر دو تغییر علامت می‌دهند. همچنین نشان دهید بردارهای اصلی تحت باز پرمایش تغییری نمی‌کند.

۱۸.۶ خم C روی سطح S را خط انحنا می‌نامیم اگر در همه نقاط C ، بردار مماس بر C بردار اصلی S باشد. فرض کنید γ پرمایش بخشی از خم C باشد که در قطعه سطح σ از S قرار دارد و فرض کنید N قائم واحد استاندارد σ باشد، نشان دهید C یک خط انحنا است اگر و فقط اگر به ازای اسکالری مانند λ

$$\dot{N} = -\lambda\dot{\gamma}$$

و این‌که در این حالت، λ انحناى اصلی متناظر است. (این فرمول رادری گس^۳ است.) نشان دهید نصف‌النهارها و موازی‌های یک سطح دورانی، خطوط انحنا هستند.

۱۹.۶ نشان دهید خم واقع بر سطح، یک خط انحنا است اگر و فقط اگر تاب ژئودزیک آن همه جا صفر باشد (به تمرین ۱۱.۶ مراجعه کنید).

۲۰.۶ دو سطح S_1 و S_2 در خم C که خط انحناى S_1 است متقاطع هستند. نشان دهید C خط انحناى S_2 است اگر و فقط اگر زاویه بین صفحات مماس S_1 و S_2 در طول C ثابت باشد.

۲۱.۶ فرض کنید $\sigma: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ تابع همواری باشد که روی زیر مجموعه باز W از \mathbb{R}^3 تعریف شده است به طوری‌که برای هر مقدار ثابت u (به ترتیب v, w)، (u, v, w) یک قطعه سطح (عادی) است. همچنین فرض کنید

$$\sigma_u \cdot \sigma_v = \sigma_v \cdot \sigma_w = \sigma_w \cdot \sigma_u = 0 \quad (21)$$

این بدان معنا است که سه خانواده از سطوح که با ثابت نگه داشتن مقادیر u, v یا w

تشکیل می‌شود، یک سیستم متعام سه‌گانه هستند. (بخش ۶.۴ را ببینید.)

(i) نشان دهید $\sigma_u \cdot \sigma_{vw} = \sigma_v \cdot \sigma_{uw} = \sigma_w \cdot \sigma_{uv} = 0$ (از معادلات ۲۱ مشتق بگیرید).

(ii) نشان دهید برای هر سطح در سیستم متعام سه‌گانه، ماتریس‌های \mathcal{F}_I و \mathcal{F}_{II} قطری هستند. (توجه کنید بردار قائم استاندارد سطحی که از ثابت نگه‌داشتن u حاصل می‌شود موازی σ_u است و الی آخر)

(iii) نشان دهید که تلاقی هر سطح از خانواده سیستم متعام سه‌گانه با سطح دیگر از این خانواده، خط انحنای هر دو سطح است. (این قضیه دوپین^۴ است.)

۲۲.۶ سومین فرم اساسی قطعه سطح $\sigma(u, v)$ به صورت

$$\|N_u\|^2 du^2 + 2N_u \cdot N_v dudv + \|N_v\|^2 dv^2$$

است که در آن $N(u, v)$ بردار قائم واحد استاندارد در $\sigma(u, v)$ است. فرض کنید با همان روشی که \mathcal{F}_I و \mathcal{F}_{II} به اولین و دومین فرم اساسی وابسته هستند، ماتریس \mathcal{F}_{III} متقارن 2×2 وابسته به سومین فرم اساسی باشد (بخش ۳.۶ را ببینید). نشان دهید $\mathcal{F}_{III} = \mathcal{F}_{II} \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$. (از گزاره ۴.۶ استفاده کنید.)

۴.۶ تفسیر هندسی انحنای اصلی

انحنای اصلی در نقطه P از یک قطعه سطح، تا حدود زیادی شکل سطح در نزدیکی P بیان می‌کند. برای دیدن این، ابتدا با استفاده از حرکت صلب در \mathbb{R}^3 و بازپیمایش σ (که شکل سطح را تغییر نمی‌دهد) فرض می‌کنیم

(i) P مبدأ و $\sigma(0, 0) = P$ است.

(ii) صفحه مماس بر σ در نقطه P صفحه xy است.

(iii) بردارهای موازی محورهای x و y ، بردارهای اصلی در P متناظر به انحنای اصلی

κ_1 و κ_2 هستند.

فرض کنید بردارهای اصلی واحد بر حسب σ_u و σ_v به صورت

$$(1, 0) = \xi_1 \sigma_u + \eta_1 \sigma_v, \quad (0, 1) = \xi_2 \sigma_u + \eta_2 \sigma_v$$

باشند. پس اگر

$$T_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

آنگاه نقطه $(x, y, 0)$ در صفحه مماس بر P برابر است با

$$x(\xi_1 \sigma_u + \eta_1 \sigma_v) + y(\xi_2 \sigma_u + \eta_2 \sigma_v) = (x\xi_1 + y\xi_2)\sigma_u + (x\eta_1 + y\eta_2)\sigma_v = s\sigma_u + t\sigma_v$$

لذا با حذف عبارات مرتبه‌های بالاتر،

$$\begin{aligned}\sigma(s, t) &= \sigma(0, 0) + s\sigma_u + t\sigma_v + \frac{1}{2}(s^2\sigma_{uu} + 2st\sigma_{uv} + t^2\sigma_{vv}) \\ &= (x, y, 0) + \frac{1}{2}(s^2\sigma_{uu} + 2st\sigma_{uv} + t^2\sigma_{vv})\end{aligned}$$

همه مشتقات در مبدأ محاسبه شده‌اند. لذا با حذف عبارات مراتب بالاتر، مختصات $\sigma(s, t)$ برابر است با (x, y, z) که در آن

$$\begin{aligned}z &= \sigma(s, t) \cdot \mathbf{N} \\ &= \frac{1}{2}(Ls^2 + 2Mst + Nt^2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

می‌باشد. حالا

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\xi_1 + y\xi_2 \\ x\eta_1 + y\eta_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = xT_1 + yT_2$$

بنابراین با استفاده از معادله ۱۹،

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{2}(xT_1 + yT_2)^t \mathcal{F}_{II}(xT_1 + yT_2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 T_1^t \mathcal{F}_{II} T_1 + xy(T_1^t \mathcal{F}_{II} T_2 + T_2^t \mathcal{F}_{II} T_1) + y^2 T_2^t \mathcal{F}_{II} T_2) \\ &= \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2)\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که اگر عبارات مراتب بالاتر از دو را حذف کنیم، در نزدیکی نقطه P ، سطحی که انحناهای اصلی آن κ_1 و κ_2 هستند، با سطح درجه دو

$$z = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) \quad (22)$$

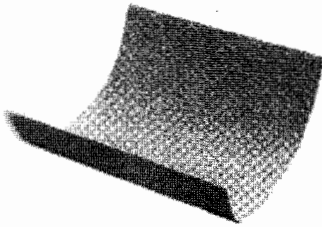
یکی است.

چهار حالت متمایز داریم.

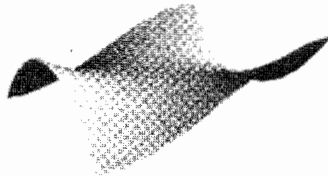
- (i) κ_1 و κ_2 هر دو بزرگتر از صفر یا هر دو کوچکتر از صفر هستند در این صورت (۲۲) معادله یک سهمی‌گون بیضوی (گزاره ۵.۴ را ببینید) و نقطه P نقطه بیضوی سطح نامیده می‌شود.
- (ii) κ_1 و κ_2 مختلف‌العلامه هستند (اما هر دو غیر صفر هستند) در این صورت (۲۲) معادله یک سهمی‌گون هذلولوی است و نقطه P نقطه هذلولوی سطح نامیده می‌شود.

(iii) یکی از κ_1 و κ_2 ها صفر و دیگری غیر صفر است. در این صورت (۲۲) معادله یک استوانه سهموی است و P نقطه سهموی سطح نامیده می‌شود.

(iv) هر دو انحنای اصلی در P صفر هستند. در این صورت (۲۲) معادله یک صفحه است و P نقطه مسطح سطح نامیده می‌شود. در این حالت شکل سطح در نزدیکی P بدون در نظر گرفتن مشتقات مراتب بالاتر از دو، قابل بررسی نیست (وقتی x, y کوچک هستند، این عبارات، در حالت غیر-مسطح، در مقایسه با $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2$ ، کوچک می‌باشند) برای مثال، سطوح زیر (سمت راستی زمین میمون نامیده می‌شود) هر دو در مبدأ نقطه مسطح دارند ولی شکل آنها کاملاً متفاوت است.



$$z = y^4$$



$$z = x^3 - 3xy^2$$

توجه کنید که این دسته‌بندی، مستقل از قطعه سطح σ است چون بازپرمایش یا تغییری در انحناهای اصلی ایجاد نمی‌کند یا علامت هر دوی آن‌ها را تغییر می‌دهد.

مثال ۵.۶

روی کره واحد داریم: $\kappa_1 = \kappa_2 = \pm 1$ (علامت به بازپرمایش بستگی دارد) بنابراین همه نقاط بیضوی (و نافی) هستند روی یک استوانه دایره‌گون داریم: $\kappa_1 = \pm 1$ و $\kappa_2 = 0$ بنابراین هر نقطه سهموی است (و هیچ نقطه نافیه وجود ندارد). روی صفحه داریم: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ لذا همه نقاط مسطح (و نافیه) هستند (!)

مثال ۶.۶

برای چنبره

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta)$$

(تمرین ۱۰.۴ را ببینید)، اولین و دومین فرم اساسی به ترتیب به صورت

$$b^2 d\theta^2 + (a + b \cos \theta)^2 d\varphi^2 \quad \text{و} \quad bd\theta^2 + (a + b \cos \theta) \cos \theta d\varphi^2$$

می‌باشند، بنابراین انحناهای اصلی برابر

$$\kappa_1 = \frac{1}{b}, \quad \kappa_2 = \frac{\cos \theta}{a + b \cos \theta}$$

هستند. چون $\kappa_1 > 0$ (همه جا)، نقطه $\sigma(\theta, \varphi)$ بیضوی، سهموی یا هذلولوی است بر طبق این‌که به ترتیب، $\kappa_2 > 0$ یا $\kappa_2 = 0$ یا $\kappa_2 < 0$ باشد، از فرمول κ_2 ، این‌ها ناحیه‌هایی از چنبره هستند که در آن به ترتیب $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ و $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ می‌باشد. تصاویر نواحی بیضوی و نواحی هذلولوی از حل تمرین ۱۸.۷ بدست می‌آید (که آن‌ها را با S^+ و S^- به ترتیب علامت‌گذاری می‌کنند)؛ ناحیه سهموی مشتمل بر دو دایره با شعاع a است که مرکز آن روی محور z ها می‌باشد.

این فصل را نظیر مثال ۲.۲، که می‌گوید هر خم مسطح با انحنا ثابت قسمتی از یک دایره است، با بیانی در مورد سطوح، خاتمه می‌دهیم.

گزاره ۵.۶

فرض کنید S سطحی (همبند) است که هر نقطه آن نافی می‌باشد در این صورت S قسمتی از یک صفحه یا قسمتی از یک کره است.

اثبات ۵.۶

فرض می‌کنیم $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه سطح در اطلس S و U یک زیر مجموعه باز (همبند) از \mathbb{R}^2 باشد. مقدار مشترک انحناهای اصلی σ را به κ نشان دهید طبق گزاره ۳.۶ (ii)

$$\mathcal{F}_{II} = \kappa \mathcal{F}_I$$

بنابراین ماتریس وینگارتن

$$\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}$$

طبق گزاره ۶.۴

$$\mathbf{N}_u = -\kappa \sigma_u, \quad \mathbf{N}_v = -\kappa \sigma_v \quad (23)$$

بنابراین

$$(\kappa \sigma_u)_v = -(\mathbf{N}_u)_v = -(\mathbf{N}_v)_u = (\kappa \sigma_v)_u$$

لذا

$$\kappa_v \sigma_u = \kappa_u \sigma_v$$

چون σ عادی است σ_u و σ_v مستقل خطی هستند، بنابراین از آخرین معادله نتیجه می‌شود که $\kappa_u = \kappa_v = 0$. لذا κ ثابت است.

اکنون دو حالت وجود دارد. اگر $\kappa = 0$ ، معادله (۲۳) نشان می‌دهد که N ثابت و

$$(N \cdot \sigma)_u = N \cdot \sigma_u = 0, \quad (N \cdot \sigma)_v = N \cdot \sigma_v = 0$$

بنابراین $N \cdot \sigma$ ثابت است، فرض می‌کنیم برابر c باشد. در این حالت $\sigma(U)$ قسمتی از صفحه $\mathbb{R} \cdot N = c$ است.

اگر $\kappa \neq 0$ ، معادله (۲۳) نشان می‌دهد که

$$N = -\kappa\sigma + a$$

که در آن a برداری ثابت است. بنابراین،

$$\left\| \sigma - \frac{1}{\kappa} a \right\|^2 = \left\| -\frac{1}{\kappa} N \right\|^2 = \frac{1}{\kappa^2}$$

پس $\sigma(U)$ قسمتی از کره به مرکز $a^{-1}\kappa$ و شعاع κ^{-1} می‌باشد.

تا اینجا گزاره را در حالتی که K فقط با یک قطعه سطح پوشیده شده است. ثابت کرده‌ایم برای سطح دلخواه K ، بحث اخیر نشان می‌دهد که هر قطعه از اطلس K ، در یک صفحه یا در یک کره قرار گرفته است. اما دو قطعه روی هم، به‌وضوح، می‌بایستی قسمتی از همان صفحه و یا همان کره باشد. لذا تمام K در یک صفحه یا کره قرار می‌گیرد. \square

تمرین‌ها

۲۳.۶ نشان دهید هر نقطه روی سطح دوران

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

سهموی است اگر و فقط اگر σ قسمتی از یک استوانه دایره‌گون یا مخروط دایره‌گون باشد.

۲۴.۶ نشان دهید، اگر p, q, r و اعداد مثبت مجزا باشند، دقیقاً چهار نقطه نافه روی بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

وجود دارد. (گزاره ۳.۶ (ii) را به‌کارگیرید.)

۷

انحنای گوس و نگاهت گوس

در اینجا می‌خواهیم دو اندازه جدید از انحنای یک سطح، که انحنای گوس و انحنای میانگین خوانده می‌شود را معرفی کنیم. اگر چه این‌ها با هم شامل اطلاعات یکسان مثل انحنای اصلی هستند، ولی مفهوم هندسی بیشتری را ارائه می‌دهند. خصوصاً، انحنای گوس دارای خاصیت قابل ذکری است که در فصل ۱۰ بررسی می‌شود و آن این است که وقتی سطح بدون کشیده شدن خم شود این مقدار تغییر نمی‌کند، خاصیتی که با انحنای اصلی مشترک نیست. در این فصل، بعضی از خواص اولیه انحنای گوسی و میانگین و اطلاعاتی از آنها را که هندسه سطح از آن نتیجه می‌شود بررسی می‌کنیم.

۱.۷ انحنای گوسی و میانگین

با تعریف دو اندازه جدید از انحنای سطح شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۷

فرض کنیم κ_1 و κ_2 انحنای اصلی یک قطعه سطح باشند. در این صورت انحنای گوس قطعه سطح برابر است با

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

و انحنای میانگین آن برابر است با

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

توجه کنید بعضی از مؤلفین $\frac{1}{\sqrt{}}$ را از تعریف H حذف می‌کنند، که این با معنای «میانگین» مغایرت دارد.

توجه کنید با توجه به تمرین ۱۷.۶، وقتی که یک قطعه سطح باز پرمایش شود، انحناى گوسی ثابت می‌ماند درحالی‌که انحناى میانگین یا ثابت باقی می‌ماند و یا تغییر علامت می‌دهد. این نشان می‌دهد که انحناى گوس، برای هر سطح خوش تعریف است. به سادگی می‌توان برای H و K فرمول دقیقی بدست آورد.

گزاره ۱.۷

فرض کنید $\sigma(u, v)$ یک قطعه سطح به ترتیب با اولین و دومین فرم اساسی

$$Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 \quad \text{و} \quad Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2$$

باشد. در این صورت

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (i)$$

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \quad (ii)$$

(iii) انحناهای اصلی برابر با $H \pm \sqrt{H^2 - K}$ هستند.

اثبات ۱.۷

با تعریف ۱.۶، انحناهای اصلی ریشه‌های

$$\begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (L - \kappa E)(N - \kappa G) - (M - \kappa F)^2 = 0$$

$$\therefore (EG - F^2)\kappa^2 - (LG - 2MF + NE)\kappa + LN - M^2 = 0$$

می‌باشند. می‌دانیم که در معادله درجه دوم $a\kappa^2 + b\kappa + c = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ و حاصل ضرب آنها برابر $\frac{c}{a}$ است. بنابراین

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}(\text{مجموع ریشه‌ها}) = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

با استفاده از تعریف H و K ، κ_1 و κ_2 ریشه‌های

$$\kappa^2 - 2HK + K = 0$$

□

یعنی $H \pm \sqrt{H^2 - K}$ هستند.

مثال ۱.۷

برای کره واحد، در مثال ۳.۶ دیدیم که $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ، بنابراین $K = H = 1$. برای استوانه دایره‌گون با شعاع ۱، در مثال ۴.۶ دیدیم که $\kappa_1 = 1$ و $\kappa_2 = 0$ بنابراین $H = \frac{1}{2}$ ، $K = 0$.

مثال ۲.۷

در مثال ۲.۶، سطح دورانی

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

را در نظر گرفتیم، که در آن می‌توان فرض نمود، $f > 0$ و همه جا $f^2 + g^2 = 1$ (نقطه نشان‌دهنده $\frac{d}{du}$ است). دیدیم که

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = f^2$$

$$L = f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g}, \quad M = 0, \quad N = f\dot{g}$$

با استفاده از گزاره ۱.۷ (i)، انحنای گوسی برابر است با

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g})f\dot{g}}{f^2} \quad (1)$$

فرمول اخیر را با استفاده از $f^2 + g^2 = 1$ ساده می‌کنیم (با مشتق‌گیری بر حسب u)

$$f\dot{f} + g\dot{g} = 0$$

$$\therefore (f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g})\dot{g} = -f^2\dot{f} - \dot{f}\dot{g}^2 = -\dot{f}(f^2 + g^2) = -\dot{f}$$

$$\therefore K = -\frac{\dot{f}\dot{g}}{f^2} = -\frac{\dot{f}}{f}$$

مثال ۳.۷

برای سطح خط‌دار، قطعه

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

را در نظر می‌گیریم (مثال ۱۲.۴ را ببینید). اگر نماد $\frac{d}{du}$ را با نقطه نشان دهیم، داریم

$$\sigma_u = \dot{\gamma} + v\dot{\delta}, \quad \sigma_v = \delta$$

$$\therefore \sigma_{uv} = \dot{\delta}, \quad \sigma_{vv} = 0$$

بنابراین، اگر $N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ قائم واحد استاندارد σ باشد، آنگاه $N = \delta \cdot N$ و $N = 0$ بنابراین

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-(\delta \cdot N)^2}{EG - F^2} \leq 0$$

لذا انحنای گوسی سطح خط‌دار منفی و یا صفر است، در تمرین ۸.۷ این نتیجه با روش دیگری ثابت شده است. در بخش ۳.۷ مجدداً به این مثال بر می‌گردیم.

تمرین‌ها

۱.۷ انحنای گوسی و میانگین سطح

$$\sigma(u, v) = (u + v, u - v, uv)$$

را در نقطه $(2, 0, 1)$ محاسبه کنید.

۲.۷ انحنای گوسی ماریچ‌نما و زنجیروار را محاسبه کنید (تمرین‌های ۱۴.۴ و ۱۸.۴ را ببینید).

۳.۷ انحنای گوسی سطح $z = f(x, y)$ را که در آن f تابع هموار است محاسبه کنید.

۴.۷ با علائم مثال ۳.۷ نشان دهید.

(i) اگر δ قائم اصلی n یا قائم دوم b از γ باشد، آنگاه $K = 0$ اگر و فقط اگر γ مسطح باشد (گزاره ۴.۲ را بکار بگیرید)؛

(ii) اگر γ یک خم روی سطح S و δ قائم واحد S باشد، آنگاه $K = 0$ اگر و فقط اگر γ یک خط انحنای S باشد (تمرین ۱۸.۶ را بکار بگیرید).

۵.۷ فرض کنیم σ پرمایش چنبره در تمرین ۱۰.۴، و K انحناهای گوسی آن باشد. نشان دهید که

$$\iint K dA_\sigma = 0$$

(«تعبیر» این نتیجه در بخش ۳.۱۱ می‌آید.)

۶.۷ نشان دهید که انحناهای گوسی و میانگین تحت حرکت صلب غیرقابل تغییرند و تحت انبساط $(x, y, z) \mapsto a(x, y, z)$ که در آن a ثابت غیر صفر است به ترتیب، در a^{-2} و a^{-1} ضرب می‌شوند.

۷.۷ نشان دهید انحناهای گوسی و میانگین قطعه سطح $\mathbb{R}^3 \rightarrow U$ ، توابع هموار روی U هستند. نشان دهید انحناهای اصلی، توابع هموار روی هر زیر مجموعه باز U می‌باشند که در آن σ هیچ نقطه نافی ندارد (گزاره ۱.۷ را بکار بگیرید).

۸.۷ نشان دهید در هر نقطه از خم مجانب واقع بر سطح، $K \leq 0$ (نتیجه ۲.۶ را بکار بگیرید). بنابراین اثبات دیگری از این که انحناهای گوسی سطح خط‌دار در هر نقطه، کوچکتر یا مساوی صفر است ارائه دهید. (از تمرین ۱۲.۶ استفاده کنید.)

۹.۷ نشان دهید، اگر \mathcal{F}_{III} سومین فرم اساسی قطعه سطح σ باشد (تمرین ۲۲.۶ را ببینید)، آنگاه

$$\mathcal{F}_{III} - 2H\mathcal{F}_{II} + K\mathcal{F}_I = 0$$

که در آن K و H انحناهای گوسی و میانگین σ هستند. (این حقیقت را بکار بگیرید که هر

ماتریس 2×2 مانند $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ در معادله $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$ صدق می‌کند.)

۱۰.۷ از تمرین ۹.۷ استفاده کنید و نشان دهید، اگر $\gamma(t)$ یک خم در قطعه سطح σ باشد، آنگاه در امتداد γ

$$\dot{N} \cdot \dot{N} + 2H\dot{N} \cdot \dot{\gamma} + K\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$$

(توجه کنید، اگر $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ و $T = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$ آنگاه $\dot{N} \cdot \dot{N} = T^t \mathcal{F}_{III} T$)

و غیره) نتیجه بگیرید که رابطه تاب τ یک خم مجانب روی سطح و انحناهای گوسی K به صورت $\tau^2 = -K$ است (تمرین ۱۲.۶ را بکار بگیرید.)

۲.۷ کره نما

در مثالهای بخش ۱.۷ سطوحی با انحناى صفر و انحناى مثبت ثابت ارائه شد. اما برای ارائه سطحی با انحناى گوسی منفی ثابت می‌بایستی یک سطح جدید بسازیم. برای این منظور مجدداً، سطح دوران

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

را در نظر می‌گیریم. در مثال ۲.۷ دیدیم که انحناى گوسی آن برابر است با

$$K = -\frac{\ddot{f}}{f} \quad (2)$$

ابتدا فرض می‌کنیم همه جا $K = 0$. در این صورت از معادله (۲) داریم $\ddot{f} = 0$ بنابراین ثابت‌های a و b موجودند به طوری که $f(u) = au + b$. چون $f^2 + g^2 = 1$ لذا $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 0$ (بنابراین باید $|a| \leq 1$) و در نتیجه $g(u) = \pm\sqrt{1 - a^2}u + c$ که در آن c ثابت دیگری است. با یک انتقال در امتداد محور z ‌ها می‌توان فرض نمود $c = 0$ ، و با یک دوران حول محور x ‌ها می‌توان فرض نمود علامت $+$ است. از آنجا سطح خط‌دار

$$\sigma(u, v) = (b \cos v, b \sin v, 0) + u(a \cos v, a \sin v, \sqrt{1 - a^2})$$

به دست می‌آید. این سطح، اگر $a = 0$ استوانه دایره‌گون، اگر $|a| = 1$ صفحه xy و اگر $0 < |a| < 1$ قسمتی از یک مخروط است (برای دیدن این مطلب، قرار دهید $\vec{u} = au + b$). اکنون فرض می‌کنیم همه جا $K = 1$. (هر سطح با انحناى گوسی مثبت ثابت را می‌توان با به‌کارگیری یک انبساط در \mathbb{R}^3 به این حالت تقلیل داد. تمرین ۶.۷ را ببینید.) در این صورت معادله (۲) به صورت

$$\ddot{f} + f = 0$$

در می‌آید که دارای جواب عمومی

$$f(u) = a \cos(u + b)$$

است، که در آن a و b ثابت هستند. با انجام بازپیمایش $\vec{u} = u + b$ و $\vec{v} = v$ می‌توان فرض نمود $b = 0$. در این صورت صرف‌نظر از علامت و یک ثابت داریم،

$$g(u) = \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 u} \, du$$

این انتگرال بر حسب توابع «اولیه» محاسبه نمی‌شود مگر ± ۱ یا $a = ۰$. حالت $a = ۰$ یک سطح نیست، بنابراین حالت $a = ۱$ را در نظر می‌گیریم (حالت $a = -۱$ با دوران سطح به اندازه π حول محور z ها بدست می‌آید). بنابراین $f(u) = \cos u$ و $g(u) = \sin u$ ، که یک کره واحد است. بالاخره فرض کنید $K = -۱$. در این صورت جواب عمومی معادله (۲) به صورت

$$f(u) = ae^u + be^{-u},$$

است که در آن a و b ثابت‌های دلخواه هستند. برای بسیاری از مقادیر a و b نمی‌توان g را بر حسب توابع اولیه بیان نمود، بنابراین فقط حالت $a = ۱$ و $b = ۰$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $f(u) = e^u$ و می‌توانیم قرار دهیم

$$g(u) = \int \sqrt{1 - e^{2u}} du \quad (۳)$$

توجه کنید که باید $u \leq ۰$ تا انتگرال در معادله (۳) معنا داشته باشد، چون در غیر این صورت $1 - e^{2u}$ منفی خواهد شد.

انتگرال (۳) با قرار دادن $v = e^u$ قابل محاسبه است. در این صورت

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{2u}} du &= \int \frac{\sqrt{1 - v^2}}{v} dv \\ &= \int \left(\frac{1}{v} - v \right) \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &= \sqrt{1 - v^2} + \int \frac{dv}{v\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned}$$

در آخرین انتگرال قرار دهید، $w = v^{-1}$ بنابراین

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{2u}} du &= \sqrt{1 - v^2} - \int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 1}} \\ &= \sqrt{1 - v^2} - \cosh^{-1} w \\ &= \sqrt{1 - v^2} - \cosh^{-1} \left(\frac{1}{v} \right) \\ &= \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u}) \end{aligned}$$

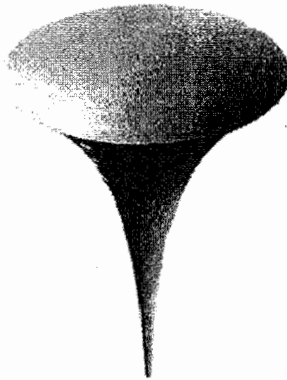
ثابت اختیاری را حذف کردیم، چون می‌توانیم با یک انتقال مناسب سطح در جهت محور z ها، آن را برابر صفر در نظر بگیریم، بنابراین

$$f(u) = e^u, \quad g(u) = \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})$$

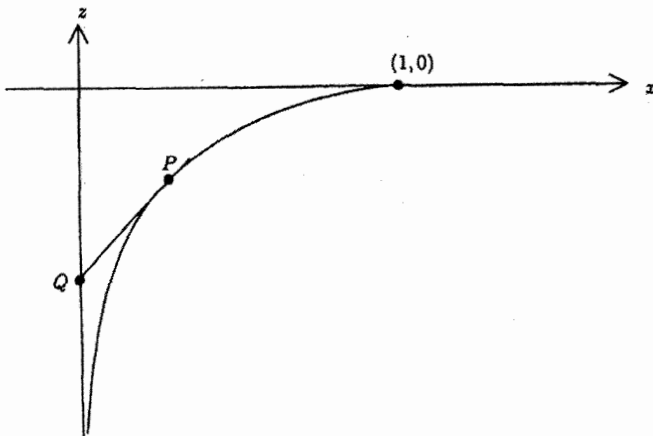
با قرار دادن $x = f(u)$ و $z = g(u)$ می‌بینیم که خم برش قائم در صفحه xz دارای معادله

$$z = \sqrt{1 - x^2} - \cosh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \quad (۴)$$

است. این خم را حول محور z ها دوران دهید سطح حاصل کره‌نما خوانده می‌شود، که در همه جا دارای انحنای گوسی -1 است. توجه کنید، چون $x = e^u$ ، $u \leq 0$ به دامنه $0 < x \leq 1$ محدود شده است.



خم تعریف شده به وسیله معادله (۴) تراکتریکس خوانده می‌شود، و دارای خاصیت هندسی جالبی است. فرض کنید خط مماس در نقطه P از این شکل محور z ها را در نقطه Q قطع کند. فاصله PQ را محاسبه می‌کنیم.



فرض کنید P نقطه (x_0, z_0) باشد. با محاسبه مستقیم یا با بررسی محاسبه انتگرال (۳)،

می بینیم که

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

بنابراین، خط مماس در P دارای معادله

$$z - z_0 = \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0}(x - x_0)$$

است. این خط محور z ها را در نقطه $(0, z_1)$ که در آن

$$z_1 - z_0 = \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0}(0 - x_0) = -\sqrt{1-x_0^2}$$

قطع می کند. بنابراین، فاصله PQ از رابطه

$$(PQ)^2 = x_0^2 + (z_1 - z_0)^2 = x_0^2 + 1 - x_0^2 = 1$$

محاسبه می شود که ثابت و برابر یک است.

بر این اساس، تراکتریکس، به صورت زیر تفسیر می شود. فرض کنید یک الاغ یک جعبه سنگی را به وسیله طنابی با طول یک می کشد. فرض کنید که الاغ در نقطه آغازی $(0, 0)$ و جعبه در نقطه آغازی $(1, 0)$ است و فرض کنید الاغ به آرامی در جهت منفی محور z ها حرکت می کند. در این صورت جعبه سنگی در امتداد تراکتریکس حرکت می کند.

مطالعه هندسی روی یک کره نما، فی نفسه موضوعی است که هندسه نئو اقلیدسی نامیده می شود. بسیاری از نتایج هندسه اقلیدسی صفحه با کره نما مشابه است اما چند اختلاف وجود دارد به عنوان مثال مجموع زوایای داخلی مثلث با اضلاع «مستقیم» روی کره نما همیشه کمتر از π است. (معنای «مستقیم» را در فصل ۸ توضیح می دهیم خصوصاً مثال ۸.۸ را ببینید). این با قضیه ۵.۵ که می گوید مجموع زوایای داخلی مثلث روی کره واحد که اضلاع آن خم هایی از دایره های عظیمه هستند، همیشه بیشتر از π است مقایسه کنید.

تمرین ها

۱۱.۷ برای کره نما

(i) طول موازی را به دست آورید.

(ii) مساحت کل آن را به دست آورید.

(iii) انحناهای اصلی آن را محاسبه کنید.

(iv) نشان دهید همه نقاط هذلولوی هستند.

۱۲.۷ نشان دهید

(i) با جایگزینی $w = e^{-u}$ بازپرمایش $\sigma_1(v, w)$ از کره نما حاصل می شود که اولین فرم اساسی آن به صورت

$$\frac{dv^2 + dw^2}{w^2}$$

است (این را مدل نیم-صفحه بالایی می نامیم).

(ii) با جایگزینی

$$U = \frac{v^2 + w^2 - 1}{v^2 + (w + 1)^2}, V = \frac{-2v}{v^2 + (w + 1)^2}$$

بازپرمایش $\sigma_2(U, V)$ از کره نما با اولین فرم اساسی

$$\frac{dU^2 + dV^2}{(1 - U^2 - V^2)^2}$$

حاصل می شود که مدل قرص نامیده می شود زیرا ناحیه $w > 0$ در صفحه vw متناظر به قرص $U^2 + V^2 < 1$ در صفحه UV است.

کدام نواحی در مدل نیم-صفحه و مدل قرص به ناحیه $u < 0, \pi < v < \pi$ که در آن پرمایش σ برای کره نمای ارائه شده در این بخش روی آن تعریف شده متناظر باشد.

۱۳.۷ فرض کنید S یک سطح دورانی نسبت به محور z ها و خم برش قائم آن خم سرعت-واحد $\gamma(u)$ در صفحه xz باشد و فرض کنید به ازای $u = \pm \frac{\pi}{4}$ محور z ها را با زاویه قائمه قطع کند. اما وقتی $\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{2}$ محور z ها را قطع نکند. ثابت کنید اگر برای S انحنای گوسی K ثابت باشد آنگاه این ثابت برابر با یک و S کره واحد است.

۳.۷ سطوح تخت

در بخش ۲.۷ سطوحی با انحنای گوسی ثابت K ارائه دادیم. این یقیناً انتظاری را که از دسته بندی کامل چنین سطوحی داریم میسر نمی سازد. اما ارائه یک توضیح تقریباً کامل از سطوح تخت یعنی سطوحی که در همه جا $K = 0$ می باشد، امکان پذیر است. برای این کار از پرمایش خاصی استفاده می کنیم که نافذ برای هر سطح می باشد و در گزاره زیر تشریح می شود.

گزاره ۲.۷

فرض کنید P نقطه‌ای از سطح S باشد که نافی نیست. در این صورت قطعه $\sigma(u, v)$ از S شامل P موجود است که به ازای توابع هموار E, G, L و N اولین و دومین فرم اساسی آن به ترتیب به صورت

$$Edu^2 + Gdv^2 \quad \text{و} \quad Ldu^2 + Ndv^2$$

است.

از بخش ۳.۶ به یاد داریم که نقطه P از S نافی است اگر دو انحنا اصلی S در P با هم برابر باشند. در بخش ۳.۶ دیدیم که برای قطعه σ با شرایط گزاره، σ_u و σ_v بردارهای اصلی متناظر به انحناهای اصلی $\frac{L}{E}$ و $\frac{N}{G}$ هستند. قطعه σ را قطعه اصلی می‌نامیم. فعلاً گزاره ۲.۷ را می‌پذیریم و از آن برای اثبات گزاره زیر استفاده می‌کنیم.

گزاره ۳.۷

فرض کنید P یک نقطه از سطح تخت S باشد که نافی نیست. در این صورت قطعه‌ای از S شامل P وجود دارد که یک سطح خط‌دار است.

اثبات ۳.۷

قطعه $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ مشتمل بر P با شرایط گزاره ۲.۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید $P = \sigma(u_0, v_0)$. طبق گزاره ۱.۷(ii)، انحناهای گوسی برابر است با $K = \frac{LN}{EG}$. چون انحناهای گوسی همه جا صفر است لذا $L = 0$ یا $N = 0$ و چون P نافی نیست L و N هر دو نمی‌توانند صفر باشند. فرض کنید $L(u_0, v_0) \neq 0$ در این صورت زیر مجموعه بازی از U شامل (u_0, v_0) موجود است که در هر نقطه از آن، $L(u, v) \neq 0$. بنابراین با کوچک کردن U در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم در هر نقطه از U ، $L \neq 0$. بنابراین همه جا $N = 0$ و دومین فرم اساسی σ ، برابر است با Ldu^2 .

ثابت می‌کنیم خم‌های پارامتری $u = \text{ثابت}$ ، خطوط راست هستند. چنین خمی می‌تواند به صورت $\sigma(u_0, v) \mapsto v$ که در آن u_0 ثابت است پرمایش شود. بردار مماس واحد برای چنین خمی $t = \frac{\sigma_v}{G^{1/2}}$ است. لذا طبق گزاره ۱.۱، باید ثابت کنیم $t_v = 0$. بر اساس گزاره ۴.۶، مشتق قائم واحد برابر است با

$$N_u = -E^{-1}L\sigma_u, \quad N_v = 0 \quad (5)$$

بنابراین $t_v \cdot \sigma_u = -EL^{-1} t_v \cdot N_u$ حال با استفاده از معادله (۵)، $t \cdot N_u = 0$ و $t_v \cdot t = 0$ به علاوه $t_v \cdot \sigma_u = 0$ لذا $t_v \cdot N_u = -t \cdot N_{uv} = 0$ بنابراین $N_{uv} = 0$ چون طبق ساختار، t بردار واحد است. بنابراین $t_v \cdot \sigma_v = 0$ نهایتاً، مجدداً بر اساس معادله (۵)، $t_v \cdot N = -t \cdot N_v = 0$ چون بردارهای σ_u ، σ_v و N تشکیل یک پایه برای \mathbb{R}^3 می‌دهند، لذا $t_v = 0$. \square

بنابراین وظیفه ما، شرح ساختار سطوح خط‌دار تخت است. مانند مثال ۳.۷، سطح خط‌دار را به صورت

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

پرمایش می‌کنیم.

اگر نقطه نمایانگر $\frac{d}{du}$ باشد، دیدیم که $\delta = \dot{\gamma} + v\delta$ و $\sigma_v = \delta$ ، و این که انحنای گوسی σ صفر است اگر و فقط اگر

$$\delta \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) = 0.$$

چون

$$\sigma_u \times \sigma_v = \dot{\gamma} \times \delta + v\delta \times \delta,$$

$$\text{و } \delta \cdot (\delta \times \delta) = 0 \text{، لذا}$$

$$K = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \delta \cdot (\dot{\gamma} \times \delta) = 0 \quad (۶)$$

بنابراین $K = 0$ اگر و فقط اگر $\dot{\gamma}$ ، δ و δ همه جا وابسته خطی باشند.

برای اقدامات بعدی، فرض می‌کنیم که $\delta(u)$ به ازای همه مقادیر u ، بردار واحد است چنین فرضی امکان‌پذیر است. بنابراین $\delta \cdot \delta = 0$. ابتدا فرض می‌کنیم به ازای همه مقادیر u ، $\delta(u) = 0$. در این صورت δ بردار ثابت و σ استوانه تعمیم یافته است.

حال فرض کنید δ هیچگاه صفر نیست. در این صورت δ و $\dot{\delta}$ مستقل خطی هستند چون متعامد و غیر صفراند، بنابراین اگر $\dot{\gamma}$ ، δ و δ وابسته خطی باشند در این صورت به ازای توابع هموار f و g داریم

$$\dot{\gamma}(u) = f(u)\delta(u) + g(u)\delta'(u)$$

ابتدا فرض کنیم که همه جا $f = \dot{g}$. در این صورت $\dot{\gamma} = (g\delta)$ و بنابراین $\gamma = g\delta + a$ که در آن a بردار ثابت است. لذا

$$\sigma(u, v) = a + (v + g(u))\delta(u)$$

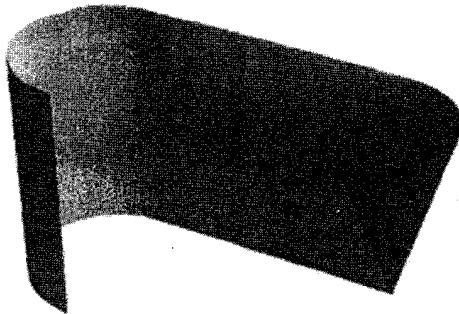
با قرار دادن $\tilde{u} = u$ ، $\tilde{v} = v + g(u)$ ، بازپرمایش مخروط تعمیم یافته به دست می آید. نهایتاً فرض کنید که δ و $\dot{g} - f$ ، هر دو، همه جا مخالف صفر هستند. اگر تعریف کنیم

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(u) - g(u)\delta(u), \quad \tilde{v} = \frac{v + g(u)}{f(u) - \dot{g}(u)},$$

با یک محاسبات کوتاه داریم

$$\sigma(u, v) = \tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}\dot{\tilde{\gamma}}(u),$$

بنابراین σ بازپرمایش بخشی از مماس گسترش پذیر $\tilde{\gamma}$ است.



البته ممکن است هیچکدام از شرایطی که روی δ ، f و g در بالا در نظر گرفتیم، تأمین نشود. در حقیقت ما فقط نشان داده ایم که بخش هایی از سطح که به زیر مجموعه های باز خاصی از U متناظر هستند، بخش هایی از استوانه تعمیم یافته، مخروط تعمیم یافته و مماس گسترش پذیر هستند. این درست نیست که تمام سطح باید یکی از این سه نوع باشد، چون انواع مختلف سطوح تخت می توانند برای ایجاد یک سطح هموار، همان طور که در نمودار بالا نشان داده شده است به همدیگر متصل شوند. در حالت کلی، یک سطح تخت، می تواند قطعاتی مشتمل بر بخش هایی از استوانه تعمیم یافته، مخروط تعمیم یافته و مماس گسترش پذیر باشد که در امتداد یک پاره خط مستقیم به هم متصل شده اند.

باقیمانده این بخش را به اثبات گزاره ۲.۷ اختصاص می دهیم، خوانندگانی که استفاده از قضیه تابع معکوس برای آنان ناخوشایند است می توانند آن را حذف کنند. در واقع می توانیم بدون هیچ تلاش بیشتری، نتیجه کلی تری را اثبات کنیم.

گزاره ۴.۷

فرض کنید $\vec{\sigma} : \vec{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$: $\vec{\sigma}$ یک قطعه سطح و به ازای هر $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{U}$

$$e_1(\vec{u}, \vec{v}) = a(\vec{u}, \vec{v})\vec{\sigma}_{\vec{u}} + b(\vec{u}, \vec{v})\vec{\sigma}_{\vec{v}}, \quad e_2(\vec{u}, \vec{v}) = c(\vec{u}, \vec{v})\vec{\sigma}_{\vec{u}} + d(\vec{u}, \vec{v})\vec{\sigma}_{\vec{v}},$$

که در آن مؤلفه‌های a, b, c, d توابع همواری از (\vec{u}, \vec{v}) هستند، فرض کنید که در نقطه $(\vec{u}_0, \vec{v}_0) \in \vec{U}$ بردارهای $e_1(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ و $e_2(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ مستقل خطی باشند در این صورت زیر مجموعه باز \vec{V} از \vec{U} مشتمل بر (\vec{u}_0, \vec{v}_0) و بازپیمایش $\sigma(u, v)$ از $\vec{\sigma}(\vec{u}, \vec{v})$ به ازای $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{V}$ موجود است به طوری که σ_u و σ_v به ترتیب موازی e_1 و e_2 هستند.

گزاره ۲.۷ حالت خاص گزاره ۴.۷ است. در حقیقت، فرض کنید $\vec{\sigma}$ یک قطعه سطح از S شامل P باشد و فرض کنید $P = \vec{\sigma}(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$. چون انحناهای اصلی κ_1 و κ_2 از $\vec{\sigma}$ در P مجزا و بر اساس تمرین ۷.۷ توابع پیوسته‌ای هستند، آنها به ازای هر (\vec{u}, \vec{v}) در مجموعه بازی مانند \vec{U} شامل (\vec{u}_0, \vec{v}_0) که $\vec{\sigma}$ روی آن تعریف شده باشد، مجزا باقی می‌مانند. با علائم بخش

۳.۶، فرض کنید بردارهای ویژه غیر صفر $\vec{F}_{II} - \kappa_i \vec{F}_I$ به ازای $i = 1, 2$ باشند که در

آن \vec{F}_I و \vec{F}_{II} ماتریس‌های وابسته به اولین و دومین فرم اساسی $\vec{\sigma}$ هستند. در این صورت

$$e_1 = \xi_1 \vec{\sigma}_{\vec{u}} + \eta_1 \vec{\sigma}_{\vec{v}}, \quad e_2 = \xi_2 \vec{\sigma}_{\vec{u}} + \eta_2 \vec{\sigma}_{\vec{v}}$$

بردارهای اصلی متناظر به κ_1 و κ_2 هستند و بر اساس گزاره ۳.۶ (iii) آنها متعامد هستند. (با استفاده از $\frac{e_1}{\|e_1\|}$ و $\frac{e_2}{\|e_2\|}$ به جای آنها) می‌توانیم فرض کنیم که e_1 و e_2 بردارهای واحد هستند. فرض کنید $\sigma(u, v)$ بازپیمایش $\vec{\sigma}$ مانند گزاره ۴.۷ باشد. در این صورت $\sigma_u \cdot \sigma_v = 0$ زیرا e_1 و e_2 متعامد هستند، بنابراین اولین فرم اساسی σ به صورت $Edu^2 + Gdv^2$ است. همچنین σ_u و σ_v بردارهای اصلی متناظر به κ_1 و κ_2 هستند، بنابراین داریم

$$(\mathcal{F}_{II} - \kappa_1 \mathcal{F}_I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathcal{F}_{II} - \kappa_2 \mathcal{F}_I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که در آن \mathcal{F}_I و \mathcal{F}_{II} ماتریس‌های وابسته به اولین و دومین فرم اساسی σ هستند. چون

$\mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ ، از این معادلات در می‌یابیم که $\mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} \kappa_1 E & 0 \\ 0 & \kappa_2 G \end{pmatrix}$ ، بنابراین دومین

فرم اساسی σ به صورت $Ldu^2 + Ndv^2$ است که در آن $L = \kappa_1 E$ و $N = \kappa_2 G$.

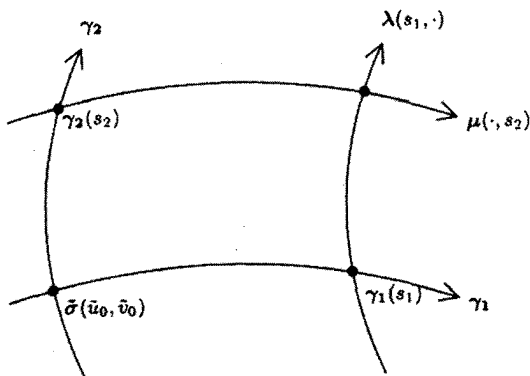
به اثبات گزاره ۴.۷، برمی‌گردیم. برای شروع می‌بینیم که اگر

$$e = A\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + B\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$$

که در آن A و B توابع هموار داده شده از \tilde{U} از (\tilde{u}, \tilde{v}) باشند، آنگاه می‌توانیم خم γ در $\tilde{\sigma}$ چنان ارائه دهیم که $\dot{\gamma} = e$ و هر نقطه داده شده $Q = \tilde{\sigma}(\alpha, \beta)$ به عنوان نقطه آغازی $\gamma(0)$ باشد. زیرا پیدا کردن چنین خمی $\gamma(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ معادل با حل یک جفت معادله دیفرانسیل معمولی

$$\dot{\tilde{u}} = A(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad \dot{\tilde{v}} = B(\tilde{u}, \tilde{v})$$

با شرط آغازی $\tilde{v}(0) = \beta$, $\tilde{u}(0) = \alpha$ است. در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی ثابت شده است که این مسئله دارای جواب یگانه $\tilde{u}(t)$, $\tilde{v}(t)$ است که در یک بازه باز شامل $t = 0$ تعریف شده است. به علاوه \tilde{u} و \tilde{v} توابع همواری از سه متغیر t , α و β هستند.



با استفاده از این مشاهدات به ازای $e = e_1$ می‌توانیم خم $\gamma_1(s_1)$ در $\tilde{\sigma}$ با $\gamma_1(0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ ارائه دهیم. حال با استفاده از مشاهدات مشابه برای $e = e_2$ می‌توانیم به ازای هر مقدار s_1 نزدیک صفر، خم $\lambda(s_1, s_2) \mapsto s_2$ در $\tilde{\sigma}$ با $e_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial s_2}$ و $\lambda(s_1, 0) = \gamma_1(s_1)$ ارائه دهیم. را به عنوان توابعی از (s_1, s_2) با ضابطه

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \lambda(s_1, s_2) \quad (7)$$

تعریف کنید با مشتق‌گیری نسبت به s_1 و s_2 بدست می‌آوریم.

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s_1} + \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s_1} = \lambda_{s_1}, \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s_2} + \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s_2} = \lambda_{s_2}$$

$$\lambda_{s_1}|_{s_2=0} = \frac{d}{ds_1} \lambda(s_1, 0) = \frac{d\gamma_1}{ds_1} = e_1, \quad \lambda_{s_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial s_2} = e_2 \quad (۸)$$

از مساوی قرار دادن ضرایب $\bar{\sigma}_v$ و $\bar{\sigma}_v$ ، از دو مجموعه معادلات آخر، می‌بینیم که در نقطه $\bar{\sigma}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ به ازای $s_1 = s_2 = 0$ ماتریس ژاکوبین به صورت

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial s_1} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (۹)$$

است. چون در (\bar{u}_0, \bar{v}_0) ، e_1 و e_2 مستقل خطی هستند، این ماتریس معکوس پذیر است. از قضیه تابع معکوس ۲.۴، معادله (۷) می‌تواند برای (s_1, s_2) به عنوان توابع همواری از (\bar{u}, \bar{v}) حل شود که در آن (\bar{u}, \bar{v}) در یک مجموعه باز \bar{W} از \bar{U} شامل (\bar{u}_0, \bar{v}_0) قرار دارد. بنابراین λ یک قطعه سطح مجاز است و طبق معادله (۸) دارای این خاصیت است که وقتی $s_2 = 0$ ، $\lambda_{s_1} = e_1$ و در همه جا $\lambda_{s_2} = e_2$.

حالا این روند را برای خم $\gamma_2(t_2) = \bar{\sigma}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ و $\frac{d\gamma_2}{dt_2} = e_2$ تکرار می‌کنیم و بعد خم $\mu(t_1, t_2) = \gamma_2(t_2)$ و $\frac{\partial \mu}{\partial t_1} = e_1$ با $t_1 \mapsto \mu(t_1, t_2)$ در این صورت قطعه مجاز $\mu(t_1, t_2)$ به دست می‌آید به طوری که به ازای (\bar{u}, \bar{v}) در یک مجموعه باز \bar{Z} از \bar{U} مشتمل بر (\bar{u}_0, \bar{v}_0) .

$$\mu(t_1, t_2) = \bar{\sigma}(\bar{u}, \bar{v})$$

این قطعه دارای این خاصیت است که در همه جا $\mu_{t_1} = e_1$ و وقتی $t_1 = 0$ ، $\mu_{t_2} = e_2$. پرمایشی که ما می‌خواهیم، $\sigma(u, v)$ است که از اشتراک خم $\lambda(u, s_2) \mapsto s_2$ با خم $\mu(t_1, v) \mapsto t_1$ حاصل می‌شود. پس معادلات

$$\bar{\sigma}(\bar{u}, \bar{v}) = \lambda(u, s_2) = \mu(t_1, v)$$

را در نظر می‌گیریم از معادله (۹)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = a, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = b$$

و بطور مشابه

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = c, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = d$$

در نتیجه، ماتریس ژاکوبین به صورت

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

می‌باشد. طبق معمول، این ماتریس معکوس پذیر است. بدان معنا که (u, v) می‌تواند به عنوان توابع همواری از (\tilde{u}, \tilde{v}) بیان شود، که در آن (\tilde{u}, \tilde{v}) در یک زیر مجموعه باز $\tilde{W} \cap \tilde{Z}$ از \tilde{V} شامل $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ قرار دارد، و ما به بازبرمایش $\sigma(u, v)$ از $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ می‌رسیم. نهایتاً از معادلهٔ $\sigma(u, v) = \mu(t_1, v)$ حاصل می‌شود که

$$\sigma_u = \frac{\partial t_1}{\partial u} \mu_{t_1} = \frac{\partial t_1}{\partial u} e_1$$

و بطور مشابه

$$\sigma_v = \frac{\partial s_2}{\partial v} e_2$$

بنابراین σ_u و σ_v همه جا موازی با e_1 و e_2 هستند.

تمرین‌ها

۱۴.۷ فرض کنید P یک نقطه هذلولوی از سطح S باشد (به بخش ۴.۶ مراجعه کنید). نشان دهید قطعه‌ای از S شامل P موجود است که خم‌های پارامتری آن خم‌های مجانبی هستند (تمرین ۱۲.۶ را ببینید).

۴.۷ سطوح با انحناى میانگین ثابت

حال به سطوحی که انحناى میانگین H در آنها ثابت است توجه کنید همانطور که در فصل ۹ خواهیم دید، چنین سطوحی، در زندگی واقعی، به عنوان شکل‌هایی که به وسیلهٔ لایه‌های کفی مطرح می‌شوند، ظاهر می‌شود.

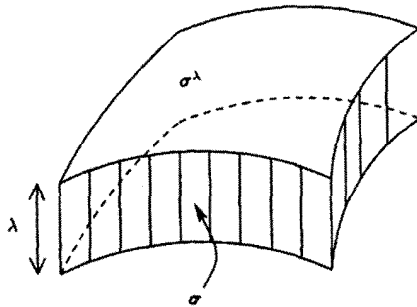
جزئیات سطوحی که در آن H همه جا صفر است، در فصل ۹ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این بخش قصد داریم ساختاری را شرح دهیم که بین سطوح با انحناى میانگین ثابت غیر صفر و سطوح با انحناى گوسی ثابت مثبت تناظر ایجاد می‌کند.

تعریف ۲.۷

فرض کنید σ یک قطعه سطح با بردار قائم استاندارد N و λ یک اسکالر ثابت باشد. سطح σ^λ با ضابطه

$$\sigma^\lambda = \sigma + \lambda N$$

سطح موازی با σ نامیده می‌شود.



تولیداً، σ^λ با انتقال σ به فاصله عمودی λ از خودش بدست می‌آید (اما این یک انتقال طبیعی نیست چون N در حالت کلی روی سطح تغییر می‌کند).

گزاره ۵.۷

فرض کنید κ_1 و κ_2 انحنای اصلی قطعه سطح $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ باشند و فرض کنید ثابت C چنان موجود باشد که $|\kappa_1|$ و $|\kappa_2|$ هر دو همه جا کمتر یا مساوی C باشند. فرض کنید λ ثابتی با $|\lambda| < 1/C$ و σ^λ سطح موازی σ باشد. در این صورت

(i) σ^λ یک قطعه سطح (عادی) است.

(ii) به ازای هر $(u, v) \in U$ ، قائم واحد استاندارد σ^λ در نقطه $\sigma^\lambda(u, v)$ همان بردار قائم استاندارد σ در نقطه $\sigma(u, v)$ است.

(iii) انحنای اصلی σ^λ ، $\frac{\kappa_1}{1 - \lambda\kappa_1}$ و $\frac{\kappa_2}{1 - \lambda\kappa_2}$ و بردارهای اصلی متناظر آن به ترتیب مساوی بردارهای اصلی متناظر به κ_1 و κ_2 برای σ هستند.

(iv) انحنای گوسی و میانگین برای σ^λ به ترتیب عبارتند از

$$\frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K} \quad \text{و} \quad \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$$

اثبات ۵.۷

طبق گزاره ۴.۶

$$\begin{aligned}\sigma_u^\lambda &= \sigma_u + \lambda N_u = (1 + \lambda a)\sigma_u + \lambda b\sigma_v \\ \sigma_v^\lambda &= \sigma_v + \lambda N_v = \lambda c\sigma_u + (1 + \lambda d)\sigma_v\end{aligned}\quad (10)$$

که در آن

$$W = - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

ماتریس وینگارتن است بنابراین

$$\sigma_u^\lambda \times \sigma_v^\lambda = \left(1 + \lambda(a + d) + \lambda^2(ad - bc)\right) \sigma_u \times \sigma_v$$

چون κ_1 و κ_2 مقادیر ویژه W هستند (بخش ۳.۶ را ببینید) و چون حاصل جمع و حاصل ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس به ترتیب برابر با مجموع عناصر قطر و دترمینان ماتریس است یعنی

$$\kappa_1 + \kappa_2 = -(a + d), \quad \kappa_1 \kappa_2 = ad - bc$$

بنابراین

$$\sigma_u^\lambda \times \sigma_v^\lambda = (1 - \lambda\kappa_1)(1 - \lambda\kappa_2)\sigma_u \times \sigma_v \quad (11)$$

از $|\lambda| < \frac{1}{C}$ و اینکه $|\kappa_1|, |\kappa_2| \leq C$ داریم $|\lambda\kappa_1|, |\lambda\kappa_2|$ کمتر از ۱ هستند، بنابراین $(1 - \lambda\kappa_1)(1 - \lambda\kappa_2) > 0$ ، و معادله (۱۱) نشان می‌دهد که σ^λ عادی است و قائم واحد استاندارد آن برابر است با

$$N^\lambda = \frac{\sigma_u^\lambda \times \sigma_v^\lambda}{\|\sigma_u^\lambda \times \sigma_v^\lambda\|} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = N$$

انحنای اصلی σ^λ مقادیر ویژه ماتریس وینگارتن W^λ از σ^λ هستند که طبق گزاره ۴.۶ قرینه ماتریسی است که N_u^λ و N_v^λ را بر حسب σ_u^λ و σ_v^λ بیان می‌کند. معادله (۱۰) می‌گوید ماتریسی که σ_u^λ و σ_v^λ را بر حسب σ_u و σ_v بیان می‌کند $I - \lambda W$ است. از این حقیقت که $N^\lambda = N$ نتیجه می‌گیریم $-W$ ماتریسی است که N_u^λ و N_v^λ را بر حسب σ_u و σ_v بیان می‌کند. با ترکیب این‌ها داریم

$$W^\lambda = (I - \lambda W)^{-1} W$$

اگر T بردار ویژه \mathcal{W} با مقدار ویژه κ باشد در این صورت T بردار ویژه \mathcal{W}^λ با مقدار ویژه $\frac{\kappa}{(1-\lambda\kappa)}$ نیز است. قسمت (iii) گزاره ناشی از این مطلب است. □
 قسمت (iv) با عملیات جبری ساده از (iii) نتیجه می‌شود.

نتیجه ۱.۷

اگر σ یک قطعه سطح با انحنای میانگین ثابت غیر صفر H باشد، در این صورت به ازای σ^λ دارای انحنای گوسی ثابت $\lambda = \frac{1}{2H}$ است. بالعکس اگر σ انحنای گوسی مثبت ثابت K داشته باشد، به ازای σ^λ دارای انحنای میانگین $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{K}}$ است. □

اثبات ۱.۷

این نتیجه با عملیات ساده جبری از قسمت (iv) گزاره قبل حاصل می‌شود. □

تمرین‌ها

۱۵.۷ اولین فرم اساسی قطعه سطح $\sigma(u, v)$ به صورت $E(du^2 + dv^2)$ است. ثابت کنید $\sigma_{uu} + \sigma_{vv}$ عمود بر σ_u و σ_v است. نشان دهید همه جا انحنای میانگین $H = 0$ اگر و فقط اگر لاپلاسیان

$$\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0$$

نشان دهید برای قطعه سطح

$$\sigma(u, v) = \left(u - \frac{u^2}{3} + uv^2, v - \frac{v^2}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right)$$

همه جا $H = 0$. (تصویر این سطح در بخش ۳.۹ ارائه شده است)

۱۶.۷ انحنای میانگین سطحی با معادله دکارتی

$$z = f(x, y)$$

که در آن f تابعی هموار از x و y است را محاسبه کنید. ثابت کنید برای سطح

$$z = \ln \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right)$$

 $H = 0$ (تصویر این سطح در بخش ۳.۹ آمده است).

۱۷.۷ فرض كنيم $\sigma(u, v)$ ، يك قطعه سطح به ترتيب با اولين و دومين فرم اساسى $Edu^2 + Gdv^2$ و $Ldu^2 + Ndv^2$ است. (گزاره ۲.۷) تعريف كنيد.

$$\sum(u, v, w) = \sigma(u, v) + wN(u, v)$$

که در آن N قائم واحد استاندارد σ است. نشان دهید سه خانواده از سطوحی که با ثابت فرض کردن مقادیر u, v و w در \sum به دست می‌آیند، تشکیل یک سیستم متعامد سه‌گانه می‌دهند (بخش ۴.۶ و تمرین ۲۱.۶ را ببینید). سطوح $w = \text{ثابت}$ موازی σ هستند. نشان دهید سطوح $u = \text{ثابت}$ و $v = \text{ثابت}$ سطوح خط‌دار تخت هستند.

۵.۷ انحناى گوسی سطوح فشرده

در بخش ۴.۶ دیدیم چگونه علامت‌های وابسته به انحناهای اصلی در نقطه P از سطح S ، شکل S را نزدیک P معین می‌کنند. در حقیقت، چون انحناى گوسی K از S برابر حاصلضرب انحناهای اصلی آن است این بحث نشان می‌دهد که

(i) اگر در نقطه P ، $K > 0$ آنگاه P یک نقطه بیضوی است.

(ii) اگر در نقطه P ، $K < 0$ آنگاه P یک نقطه هذلولوی است.

(iii) اگر در نقطه P ، $K = 0$ آنگاه P یک نقطه سهموی و یا یک نقطه مسطح است. (و)

در حالت اخیر نمی‌توان درباره شکل سطح در نزدیکی نقطه P زیاد صحبت نمود).

در این بخش، نتیجه‌ای ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد چگونه انحناى گوسی در شکل جامع یک سطح اثر گذار است. نتیجه دیگری از همان ویژگی را در بخش ۴.۱۰ ارائه خواهیم داد.

گزاره ۶.۷

اگر S یک سطح فشرده باشد، نقطه‌ای مانند P از S وجود دارد که در آن انحناى گوسی K مثبت است.

یادآور می‌شویم زیر مجموعه X از \mathbb{R}^3 فشرده خوانده می‌شود، اگر بسته (یعنی مجموعه نقاطی از \mathbb{R}^3 که در X نیستند، باز است) و کراندار (یعنی X در گوی بازی قرار گیرد) باشد. در اثبات، از خاصیت زیر برای مجموعه‌های فشرده استفاده می‌کنیم، اگر $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، آنگاه نقاطی مانند P و Q در X وجود دارند به طوری که برای تمام نقاط R در X ، $f(Q) \leq f(R) \leq f(P)$ ، بنابراین f مقدار ماکزیمم خود را روی X در P و مینیمم خود را در Q می‌گیرد.

اثبات ۶.۷

تابع $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ را با ضابطه $f(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2$ تعریف کنید. در این صورت، f پیوسته است، لذا از این حقیقت که S فشرده است نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای مانند P در S وجود دارد به طوری که f در آن مقدار ماکزیمم دارد. فرض کنید P انتهای بردار \mathbf{p} باشد؛ در این صورت S در داخل گوی بسته به شعاع $\|\mathbf{p}\|$ و به مرکز مبدأ قرار می‌گیرد و مرکز آن را در P قطع می‌کند. لذا حداقل به اندازه کره در P خمیده است، بنابراین انحنا ی گوسی آن حداقل برابر با انحنا ی گوسی کره در P است، یعنی حداقل برابر $\frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2}$.

برای روشن کردن این بحث، فرض کنید $\gamma(t)$ یک خم سرعت واحد دلخواه در S باشد که در $t = 0$ از P می‌گذرد. در این صورت، $f(\gamma(t))$ دارای یک ماکزیمم موضعی در $t = 0$ است، لذا در $t = 0$

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}f(\gamma(t)) \leq 0$$

یعنی

$$\gamma(0) \cdot \dot{\gamma}(0) = 0, \quad \gamma(0) \cdot \ddot{\gamma}(0) + 1 \leq 0 \quad (12)$$

معادله (۱۲) نشان می‌دهد که $\mathbf{p} = \gamma(0)$ بر هر بردار مماس واحد بر S در نقطه P عمود است، و بنابراین عمود بر صفحه مماس S در نقطه P است.

قطعه سطح σ را در اطلس S شامل P اختیار کنید، و فرض کنید \mathbf{N} قائم واحد استاندارد آن باشد. با توجه به مطلب اخیر،

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \quad (13)$$

از نامساوی (۱۲) نتیجه می‌گیریم که انحنا ی قائم $\kappa_n = \ddot{\gamma}(0) \cdot \mathbf{N}$ از γ در P (محاسبه شده در قطعه σ) کمتر یا مساوی $\frac{-1}{\|\mathbf{p}\|}$ و یا بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{\|\mathbf{p}\|}$ است، برحسب اینکه علامت در معادله (۱۳) به ترتیب $+$ یا $-$ باشد. طبق نتیجه ۲.۶، انحناهای اصلی σ در P یا هر دو کمتر یا مساوی $\frac{-1}{\|\mathbf{p}\|}$ و یا هر دو بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{\|\mathbf{p}\|}$ می‌باشند. در هر حالت، در نقطه P ،

$$K \geq \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} > 0$$

□

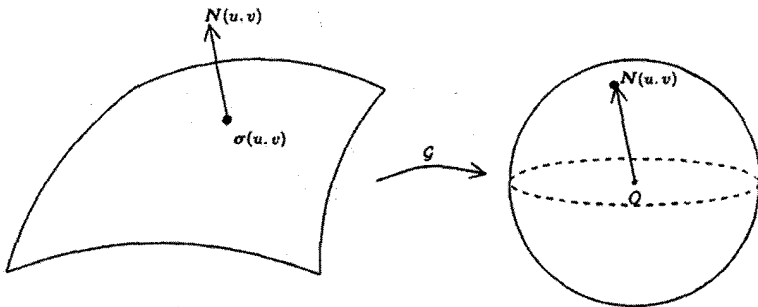
۶.۷ نگاشت گوس

گزاره ۲.۲ نشان می‌دهد که، اگر $\gamma(s)$ یک خم سرعت-واحد مسطح باشد، انحناى علامت‌دار آن $\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}$ می‌باشد، که در آن φ زاویه بین بردار مماس $\hat{\gamma}$ و یک جهت ثابت است. یعنی انحناى (علامت‌دار) میزان تغییر جهت بردار مماس بر γ در واحد طول است. ما به جستجوی بحث مشابه برای سطح می‌باشیم.

«جهت» صفحه مماس بر قطعه سطح $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ با قائم واحد استاندارد N اندازه‌گیری می‌شود، بنابراین انتظار می‌رود که انحناى σ با «میزان تغییر N در واحد سطح» اندازه‌گیری شود، برای مفهوم بخشیدن به این، توجه کنید N یک نقطه از کره واحد

$$S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$$

است. نگاشت گوس، نگاشت $S^2 \rightarrow S$ است، که در آن S تصویر σ است. این نگاشت نقطه $\sigma(u, v)$ از S را به نقطه $N(u, v)$ از S^2 می‌برد. نگاشت گوس را با \mathcal{G} نشان می‌دهیم. در حالت کلی‌تر، نگاشت گوس برای هر سطح جهت‌پذیر S تعریف می‌شود (بخش ۳.۴ را ببینید)، چون چنین سطحی دارای قائم واحد خوش تعریف N در هر نقطه است.



اگر $R \subseteq U$ یک ناحیه باشد، مقداری که به وسیله N روی بخش $\sigma(R)$ از S تغییر می‌کند با مساحت بخش $N(R)$ از کره اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین میزان تغییرات N در واحد سطح با توجه به بخش ۴.۵ تقریباً برابر است با

$$\frac{N(R) \text{ مساحت}}{\sigma(R) \text{ مساحت}} = \frac{A_N(R)}{A_\sigma(R)}$$

قضیه بعدی نشان می‌دهد وقتی ناحیه R به یک نقطه کاهش یابد این نسبت، قدر مطلق انحناى گوسی σ در آن نقطه می‌شود.

قضیه ۱.۷

فرض کنید $\sigma : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ یک سطح، $(u_0, v_0) \in U$ و $\delta > 0$ چنان باشد که گوی بسته

$$R_\delta = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leq \delta^2\}$$

با مرکز (u_0, v_0) و شعاع δ در U قرار گیرد (این چنین δ ای وجود دارد زیرا U باز است). در این صورت

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{A_N(R_\delta)}{A_\sigma(R_\delta)} = |K|$$

که در آن K انحنای گوسی σ در $\sigma(u_0, v_0)$ است.

اثبات ۱.۷

از تعریف ۳.۵ داریم

$$\frac{A_N(R_\delta)}{A_\sigma(R_\delta)} = \frac{\iint_{R_\delta} \|N_u \times N_v\| du dv}{\iint_{R_\delta} \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv} \quad (14)$$

بنابراین گزاره ۴.۶

$$\begin{aligned} N_u \times N_v &= (a\sigma_u \times b\sigma_v) \times (c\sigma_u \times d\sigma_v) \\ &= (ad - bc)\sigma_u \times \sigma_v \\ &= \det(-\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II})\sigma_u \times \sigma_v \\ &= \frac{\det(\mathcal{F}_{II})}{\det(\mathcal{F}_I)}\sigma_u \times \sigma_v \\ &= \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}\sigma_u \times \sigma_v \quad (\text{طبق تعریف } \mathcal{F}_I \text{ و } \mathcal{F}_{II}) \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\sigma_u \times \sigma_v \\ &= K\sigma_u \times \sigma_v \quad (\text{طبق گزاره ۱.۷ (i)}) \end{aligned} \quad (15)$$

با جایگزین کردن در معادله (۱۴)، داریم

$$\frac{A_N(R_\delta)}{A_\sigma(R_\delta)} = \frac{\iint_{R_\delta} |K| \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv}{\iint_{R_\delta} \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv}$$

فرض کنید ϵ عدد مثبت دلخواه باشد چون $K(u, v)$ یک تابع پیوسته از (u, v) (تمرین ۷.۷) را ببینید) است. می‌توانیم $\delta > 0$ آن قدر کوچک اختیار می‌کنیم که اگر $(u, v) \in R_\delta$ ، آنگاه

$$|K(u, v) - K(u_0, v_0)| < \epsilon$$

چون برای هر a و b حقیقی $|a - b| \geq ||a| - |b||$ لذا اگر $(u, v) \in R_\delta$ ، آنگاه

$$||K(u, v)| - |K(u_0, v_0)|| < \epsilon$$

یعنی اگر $(u, v) \in R_\delta$ آنگاه

$$|K(u_0, v_0)| - \epsilon < |K(u, v)| < |K(u_0, v_0)| + \epsilon$$

طرفین را در $\|\sigma_u \times \sigma_v\|$ ضرب می‌کنیم و روی R_δ انتگرال می‌گیریم، در این صورت داریم

$$\begin{aligned} (|K(u_0, v_0)| - \epsilon) \iint \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv &< \iint |K(u, v)| \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv \\ &< (|K(u_0, v_0)| + \epsilon) \iint \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv \end{aligned}$$

$$\therefore |K(u_0, v_0)| - \epsilon < \frac{A_N(R_\delta)}{A_\sigma(R_\delta)} < |K(u_0, v_0)| + \epsilon \quad (\text{با استفاده از معادله (۱۴)})$$

$$\therefore \left| \frac{A_N(R_\delta)}{A_\sigma(R_\delta)} - |K(u_0, v_0)| \right| < \epsilon$$

□ بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

اما این گزاره فقط قدر مطلق انحنای گوسی K را می‌دهد، اگر مساحت علامت‌دار $N(R)$ را با $\pm A_N(R)$ تعریف کنیم علامت نگاهت گوس به دست می‌آید، که در آن علامت $+$ یا $-$ است بر حسب اینکه $N_u \times N_v$ هم جهت با N و یا مخالف جهت آن باشد. بر اساس معادله (۱۵)، این همان علامت K است، بنابراین K حد نسبت

$$\frac{N(R) \text{ مساحت علامت‌دار}}{\sigma(R) \text{ مساحت}}$$

است، وقتی که R به یک نقطه کاهش می‌یابد.

همین‌طور که مثال‌های زیر نشان می‌دهند، قضیه ۱.۷ گاهی این امکان را می‌دهد که انحنای گوسی یک سطح را بدون محاسبه بدست آوریم.

مثال ۴.۷

در صفحه، قائم واحد ثابت است، بنابراین، برای هر R ، $N(R)$ یک نقطه است، لذا دارای مساحت صفر است. لذا بنا بر قضیه، صفحه در هر جا دارای انحنای گوسی صفر است.

برای استوانه (تعمیم یافته)، قائم واحد همیشه به مولدهای استوانه عمود است، بنابراین تصویر نگاشت گوس در دایره عظیمه کره واحد که از تقاطع کره با صفحه‌ای که از مرکز کره می‌گذرد و عمود بر خطوط استوانه است قرار می‌گیرد. به‌وضوح هر دایره عظیمه دارای مساحت صفر است، بنابراین استوانه نیز دارای انحنای گوسی صفر است.

بالاخره، برای کره واحد S^2 ، قائم واحد در نقطه P موازی بردار شعاعی از مرکز کره به نقطه P است. به زبان دیگر نگاشت گوس یک نگاشت همانی یا نگاشت متقاطع (بسته به انتخاب پرمایش) است. این دو نگاشت به وضوح متساوی‌المساحت هستند بنابراین (قدر مطلق) انحنای گوسی S^2 ، برابر ۱ است. در حقیقت، این بحث نشان می‌دهد که، برای هر پرمایش σ از S^2 ، داریم $N = \pm \sigma$. علامت وابسته به انتخاب پرمایش است، اما در هر حالت $N_u \times N_v = \sigma_u \times \sigma_v$. بنابراین انحنای گوسی برابر ۱+ است.

تمرین‌ها

۱۸.۷ فرض کنید $U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه روی سطح S باشد. نشان دهید تصویر $\sigma(S)$ روی سطح S مربوط به ناحیه $R \subseteq U$ ، تحت نگاشت گوس دارای مساحت

$$\iint_R |K| dA_\sigma$$

است که در آن K انحنای گوسی S است. (اثبات قضیه ۱.۷ را بررسی کنید.)

۱۹.۷ فرض کنید S چنبره تمرین ۱۰.۴ باشد. قسمت‌های S^+ و S^- از S را که در آن انحنای گوسی K از S به ترتیب مثبت و منفی است رسم کنید. بدون محاسبه نشان دهید،

$$\iint_{S^+} K dA = - \iint_{S^-} K dA = 4\pi$$

(معانی این انتگرال‌ها واضح است. مثلاً اگر S^+ ، در یک قطعه سطح σ از S قرار گیرد به‌طوری‌که $S^+ = \sigma(R^+)$ ، در این صورت انتگرال سمت چپ به معنی $\iint_{R^+} K dA_\sigma$ است؛ اگر S^+ در یک قطعه قرار نگیرد، ممکن است به قسمت‌هایی تقسیم شود که، هر کدام از آن در یک قطعه قرار گیرد که در این صورت انتگرال روی S^+ برابر مجموع انتگرال‌ها روی هر قسمت از S^+ است. توضیح بیشتر در بخش ۳.۱۱ می‌آید.)

البته، نتیجه $\iint_S K dA = 0$ به‌دست می‌آید، نتیجه‌ای که در بخش ۳.۱۱ تشریح می‌شود.

۸ ژئودزیک‌ها

ژئودزیک‌ها خم‌هایی روی سطح هستند که یک موجود زنده کوچک روی سطح آن را به صورت یک خط راست می‌بینید برای مثال ژئودزیک همیشه به عنوان کوتاهترین مسیر بین دو نقطه از سطح است. با یک تعریف کاملاً متفاوت از ژئودزیک شروع می‌کنیم، چون با این تعریف آسان تر می‌توان کار کرد. روش‌های مختلفی برای یافتن ژئودزیک، روی سطح ارائه می‌دهیم، نهایتاً تا انتهای فصل ایده کوتاهترین مسیر را بیان می‌کنیم.

۱.۸ تعریف و خواص اولیه

از گزاره ۱.۱ یادآور می‌شویم که خم γ یک خط مستقیم است اگر در همه جا شتاب $\ddot{\gamma}$ برابر صفر باشد، اما یک موجود کوچکی که روی سطح زندگی می‌کند و در طول خم γ در حال حرکت است، مؤلفه‌ای از $\ddot{\gamma}$ که موازی صفحه مماس است را می‌بیند، بنابراین می‌گوییم γ مستقیم است اگر این مؤلفه شتاب در همه جا صفر باشد، بر این اساس تعریف زیر پیشنهاد می‌شود.

تعریف ۱.۸

خم γ روی سطح S ژئودزیک خوانده می‌شود اگر $\ddot{\gamma}(t)$ برابر صفر یا عمود بر سطح در نقطه $\gamma(t)$ باشد، یعنی برای هر مقدار t موازی با قائم واحدش باشد.

توجه کنید که قائم واحد صرف‌نظر از علامت سطح خوش‌تعریف است، لذا این تعریف دارای معنی است.

یک تعبیر جالب مکانیکی از ژئودزیک وجود دارد: یک شیئی در حال حرکت روی سطح در طول یک ژئودزیک حرکت می‌کند، مشروط به اینکه هیچ نیرویی به جز نیروی عمود بر سطح

که شیبی را روی سطح نگه دارد عمل نکند، زیرا بنابر قانون دوم حرکت نیوتن نیروی وارد بر شیبی موازی شتاب $\ddot{\gamma}$ است، که عمود بر سطح است. مطالعه خود درباره ژئودزیک‌ها را با ملاحظه اینکه اساساً هیچ انتخابی در رابطه با پرمایش آن‌ها موجود نیست شروع می‌کنیم.

گزاره ۱.۸

هر ژئودزیک سرعت ثابت دارد.

اثبات ۱.۸

فرض کنید $\gamma(t)$ یک ژئودزیک روی سطح S باشد. در این صورت، با نمایش $\frac{d}{dt}$ با یک نقطه، داریم

$$\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|^2 = \frac{d}{dt} (\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) = 2\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}$$

چون γ یک ژئودزیک است، $\ddot{\gamma}$ عمود بر صفحه مماس و بنابراین عمود بر بردار مماس $\dot{\gamma}$ است. پس $\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$ و از آنجا $\|\dot{\gamma}\|$ ثابت است. \square

روشن است که بازپرمایش سرعت-واحد ژئودزیک γ خود نیز یک ژئودزیک است، زیرا بنابر گزاره ۱.۸، اثر بازپرمایش، ضرب $\ddot{\gamma}$ در یک عدد ثابت غیر صفر است. بنابراین در صورت دلخواه، می‌توانیم همیشه محدود به ژئودزیک سرعت-واحد باشیم. بعداً خواهیم دید که تعریف معادلی از ژئودزیک وجود دارد که بر حسب انحنای ژئودزیک κ_g (بخش ۲.۶ را ببینید) بیان می‌شود. البته، به همین علت است که κ_g انحنای ژئودزیک خوانده می‌شود.

گزاره ۲.۸

یک خم روی یک سطح ژئودزیک است اگر و فقط اگر انحنای ژئودزیک آن، همه جا صفر باشد.

اثبات ۲.۸

کافی است فرض کنیم خم سرعت-واحد γ در قطعه σ از سطح قرار دارد. فرض کنید N قائم واحد استاندارد σ باشد. بنابراین

$$\kappa_g = \ddot{\gamma} \cdot (N \times \dot{\gamma}) \quad (1)$$

اگر $\ddot{\gamma}$ با N موازی باشد، به وضوح عمود بر $N \times \dot{\gamma}$ و لذا بنا بر معادله (۱) $\kappa_g = 0$.

بالعکس، فرض کنید که $\kappa_g = 0$. آنگاه $\ddot{\gamma}$ عمود بر $\dot{\gamma} \times N$ است. اما چون $\dot{\gamma}$ ، N و $\dot{\gamma} \times N$ بردارهای واحد متعامد در \mathbb{R}^3 هستند و چون $\ddot{\gamma}$ عمود بر $\dot{\gamma}$ است، نتیجه می‌گیریم که $\ddot{\gamma}$ موازی N است. \square

از نتیجه بعدی ساده‌ترین مثال‌های ژئودزیک به دست می‌آید.

گزاره ۳.۸

هر (قسمتی از) خط مستقیم روی سطح، یک ژئودزیک است.

تا اینجا، منظور ما این است که هر خط مستقیم می‌تواند طوری پارامتری شود که یک ژئودزیک باشد. نظر مشابه‌ای برای بقیه ژئودزیک‌هایی که پرمایش آنها مشخص نیست به کار می‌رود.

اثبات ۳.۸

روشن است، یک خط مستقیم به صورت

$$\dot{\gamma}(t) = a + bt$$

پرمایش می‌شود، که در آن a و b بردارهای ثابتی هستند، و به وضوح $\ddot{\gamma} = 0$. \square

مثال ۱.۸

تمام خطوط مستقیم در صفحه ژئودزیک هستند، همچنین مولداهای هر سطح خط‌دار، مثل استوانه (تعمیم یافته)، مخروط (تعمیم یافته) یا خطوط مستقیم واقع بر هذلولی‌گون یک پارچه، ژئودزیک هستند.

نتیجه بعدی تقریباً ساده است:

گزاره ۴.۸

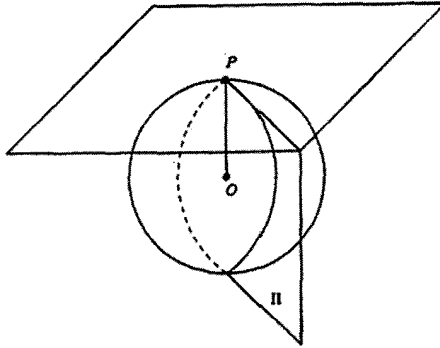
بخش قائم سطح، ژئودزیک است.

اثبات ۴.۸

از بخش ۲.۶ یادآور می‌شویم که بخش قائم سطح S ، تقاطع C از S با صفحه Π است به طوری که صفحه Π در هر نقطه از C بر سطح عمود است. در بخش ۲.۶ نشان دادیم که برای بخش قائم، $\kappa_g = 0$ ، بنابراین از گزاره ۲.۸ نتیجه حاصل می‌شود. \square

مثال ۲.۸

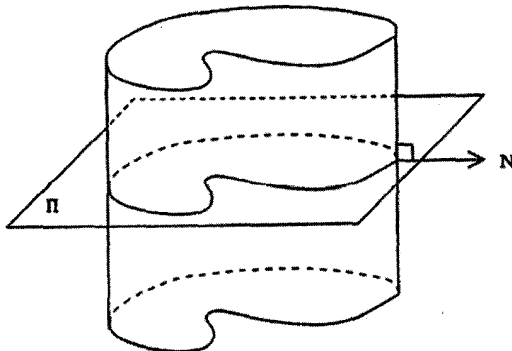
همه دوائر عظیمه کره ژئودزیک هستند.



دوائر عظیمه از تقاطع کره با صفحه Π که از مرکز O کره می‌گذرد به وجود می‌آیند، بنابراین اگر P یک نقطه از دایره عظیمه باشد، بردار OP در Π قرار گرفته و بر صفحه مماس کره واحد در نقطه P عمود است. بنابراین Π عمود بر صفحه مماس در نقطه P است.

مثال ۳.۸

تقاطع استوانه (تعمیم یافته) با صفحه Π که عمود بر مولدهای استوانه می‌باشد یک ژئودزیک است. زیرا روشن است که قائم واحد N عمود بر مولدها می‌باشد. لذا N موازی Π است، و بنابراین Π عمود بر صفحه مماس است.



تمرین‌ها

۱.۸ چهار ژئودزیک مختلف روی هذلولی‌گون یک پارچه

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

را که از نقطه $(1, 0, 0)$ می‌گذرد شرح دهید. (گزاره‌های ۳.۸ و ۴.۸ را بکار بگیرید)

۲.۸ لوله با شعاع $a > 0$ دور خم سرعت-واحد γ در \mathbb{R}^3 که در تمرین ۱۷.۵ تعریف شده است را در نظر می‌گیریم:

$$\sigma(s, \theta) = \gamma(s) + a(\cos \theta \mathbf{n}(s) + \sin \theta \mathbf{b}(s))$$

نشان دهید خم‌های پارامتری روی لوله که با ثابت کردن مقدار s حاصل شده، ژئودزیک‌های دایره‌گون روی S هستند.

۳.۸ فرض کنید $\gamma(t)$ یک ژئودزیک روی بیضی‌گون S (گزاره ۶.۴ را ببینید)، $2R(t)$

طول قطر بیضی‌گون موازی $\dot{\gamma}(t)$ و $S(t)$ فاصله مرکز بیضی‌گون تا صفحه مماس بر S در $\gamma(t)$ باشد. نشان دهید انحنای γ برابر $\frac{S(t)}{R(t)^2}$ ، و حاصل ضرب $R(t)S(t)$

مستقل از t است. (فرض کنید که بیضی‌گون به صورت $1 = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2}$ باشد توجه کنید که $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ یک ژئودزیک است اگر و فقط اگر $(\dot{f}, \dot{g}, \dot{h}) = \lambda \left(\frac{f}{p^2}, \frac{g}{q^2}, \frac{h}{r^2} \right)$ که در آن $\lambda(t)$ یک اسکالر است.)

۴.۸ نشان دهید تاب یک ژئودزیک که انحنایش همه جا غیر صفر است برابر تاب ژئودزیک آن است (تمرین ۱۱.۶ را ببینید). (این حقیقت را که قائم اصلی ژئودزیک موازی قائم واحد سطح است، بکار برید.)

۵.۸ ژئودزیک γ روی سطح S در صفحه قرار دارد و همه جا دارای انحنای غیر صفر است. نشان دهید γ خط انحنای S است. (اگر Π صفحه باشد، نشان دهید قائم واحد N از S موازی Π و در نتیجه \dot{N} موازی $\dot{\gamma}$ است، آنگاه تمرین ۱۸.۶ را بکار بگیرید.)

۲.۸ معادلات ژئودزیکی

متأسفانه، گزاره‌های ۳.۸ و ۴.۸ معمولاً برای تعیین تمام ژئودزیک‌های سطح داده شده کافی نیستند. لذا به نتیجه زیر نیاز داریم:

تضیه ۱.۸

خم γ روی سطح S ژئودزیک است اگر و فقط اگر، برای هر قسمت $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ از γ که در قطعه سطح σ از S قرار دارد، دو معادله زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) &= \frac{1}{\rho}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{\rho}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2) \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ اولین فرم اساسی σ است.

معادلات دیفرانسیل (۲) را معادلات ژئودزیکی می‌گویند.

اثبات ۱.۸

چون $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ پایه برای صفحه مماس σ است، لذا γ یک ژئودزیک است اگر و فقط اگر $\ddot{\gamma}$ عمود بر σ_u و σ_v باشد. چون $\dot{\gamma} = \dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v$ این معادل این است که

$$\left(\frac{d}{dt}(\dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v)\right) \cdot \sigma_u = 0 \quad \text{و} \quad \left(\frac{d}{dt}(\dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v)\right) \cdot \sigma_v = 0 \quad (3)$$

نشان می‌دهیم که این دو معادله، هم‌ارز با دو معادله ژئودزیکی هستند.

اولین معادله از سمت چپ در (۳) برابر است با

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}((\dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v) \cdot \sigma_u) - (\dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v) \cdot \frac{d\sigma_u}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) - (\dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v) \cdot (\dot{u}\sigma_{uu} + \dot{v}\sigma_{uv}) \\ &= \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) - (\dot{u}^2(\sigma_u \cdot \sigma_{uu}) + \dot{u}\dot{v}(\sigma_u \cdot \sigma_{uv} + \sigma_v \cdot \sigma_{uu}) + \dot{v}^2(\sigma_v \cdot \sigma_{uv})) \end{aligned} \quad (4)$$

حال

$$E_u = (\sigma_u \cdot \sigma_u)_u = \sigma_{uu} \cdot \sigma_u + \sigma_u \cdot \sigma_{uu} = 2\sigma_u \cdot \sigma_{uu}$$

$$\sigma_u \cdot \sigma_{uu} = \frac{1}{2}E_u \quad \text{به‌طور مشابه} \quad \sigma_v \cdot \sigma_{uv} = \frac{1}{2}G_u \quad \text{نهایتاً}$$

$$\sigma_u \cdot \sigma_{uv} + \sigma_v \cdot \sigma_{uu} = (\sigma_u \cdot \sigma_v)_u = F_u$$

از قرار دادن این مقادیر در (۴) داریم

$$\left(\frac{d}{dt}(\dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v)\right) \cdot \sigma_u = \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) - \frac{1}{\rho}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)$$

این نشان می‌دهد که اولین معادله در (۳) هم‌ارز با اولین معادله ژئودزیک در (۲) است. برای بقیه معادلات بحث مشابه است. □

معادلات ژئودزیکی معادلات دیفرانسیل غیرخطی هستند و حل دقیق آنها معمولاً مشکل و غیر ممکن است. مثال زیر حالتی است که می‌تواند حل شود. مثال دیگر در تمرین ۹.۸ ارائه شده است.

مثال ۴.۸

با حل معادلات ژئودزیکی، ژئودزیک‌های روی کره واحد S^2 را به دست می‌آوریم. با پرمایش معمول بوسیله عرض جغرافیایی θ و طول جغرافیایی φ

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

در مثال ۲.۵ دیدیم که اولین فرم اساسی به صورت

$$d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$$

است. همچنین می‌توانیم خودمان را به خم سرعت-واحد $\gamma(t) = \sigma(\theta(t), \varphi(t))$ محدود کنیم، بنابراین

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta = 1$$

و اگر γ یک ژئودزیک باشد از دومین معادله در (۲) داریم:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \cos^2 \theta) = 0$$

لذا

$$\dot{\theta} \cos^2 \theta = \Omega$$

که در آن Ω مقدار ثابتی است. اگر $\Omega = 0$ ، در این صورت $\dot{\varphi} = 0$ بنابراین φ ثابت است و γ بخشی از نصف‌النهار است. از حالا فرض کنید $\Omega \neq 0$. از شرط سرعت - واحد به دست می‌آید که

$$\dot{\theta}^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\cos^2 \theta}$$

لذا در امتداد ژئودزیک داریم

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta (\Omega^{-2} \cos^2 \theta - 1)}$$

و بنابراین

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = \int \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{\Omega^{-2} \cos^2 \theta - 1}}$$

که در آن φ مقدار ثابتی است. با تغییر متغیر $u = \tan \theta$. انتگرال قابل محاسبه است و داریم

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = \int \frac{du}{\sqrt{\Omega^{-2} - 1 - u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{\Omega^{-2} - 1}} \right)$$

و بنابراین

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\Omega^{-2} - 1} \sin(\varphi - \varphi_0)$$

از این نتیجه می‌گیریم که برای $\gamma(t)$ با مختصات $x = \cos \theta \cos \varphi$, $y = \cos \theta \sin \varphi$ و $z = \sin \theta$ شرط

$$z = ax + by$$

برقرار است. که در آن $a = \mp \sqrt{\Omega^{-2} - 1} \sin \varphi_0$ و $b = \pm \sqrt{\Omega^{-2} - 1} \cos \varphi_0$. این نشان می‌دهد که γ در محل تلاقی S^2 با صفحه گذرا از مرکز کره قرار دارد. لذا در همه حالت‌ها، γ بخشی از دایره عظیمه است.

با استفاده از نتیجه قضیه ۱.۸، ژئودزیک‌ها روی کره می‌توانند خیلی ساده تر محاسبه شوند.

نتیجه ۱.۸

فرض کنید P یک نقطه روی سطح S و t بردار مماس واحد S در P باشد. در این صورت ژئودزیک سرعت-واحد یگانه ای در S موجود است که از P گذشته و دارای بردار مماس t در آن نقطه است.

بطور خلاصه، در هر نقطه داده شده از سطح و در هر جهت داده شده، ژئودزیک یگانه‌ای موجود است.

اثبات ۱.۸

معادلات ژئودزیکی به صورت

$$\ddot{u} = f(u, v, \dot{u}, \dot{v}), \quad \ddot{v} = g(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \quad (5)$$

هستند که در آن f و g توابع همواری از چهار متغیر، u, v, \dot{u}, \dot{v} می‌باشند. در نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی ثابت شده است که برای ثابت‌های داده شده a, b, c, d و هر مقدار t_0 از t ، معادله (۵) دارای جوابی است که

$$u(t_0) = a, \quad v(t_0) = b, \quad \dot{u}(t_0) = c, \quad \dot{v}(t_0) = d \quad (6)$$

و $u(t)$ و $v(t)$ ، به‌ازای ϵ بزرگتر از صفر، برای هر t در بازه $|t - t_0| < \epsilon$ ، تعریف شده و هموار هستند. به‌علاوه هر دو جوابی از معادله (۵) که در شرط (۶) صدق کنند به‌ازای ϵ' ، کمتر یا مساوی ϵ ، برای همه مقادیر t که در آن $|t - t_0| < \epsilon'$ ، با هم برابرند.

حال این حقایق را برای معادلات ژئودزیکی بکار می‌گیریم. فرض کنید P در قطعه $\sigma(u, v)$ از S واقع باشد، مثلاً P مساوی $\sigma(a, b)$ باشد و فرض کنید $t = c\sigma_u + d\sigma_v$ که در آن a, b, c, d اسکالر بوده و مشتقات در $u = a$ و $v = b$ محاسبه شده‌اند. خم سرعت - واحد $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ در لحظه $t = t_0$ از نقطه P می‌گذرد اگر و فقط اگر $u(t_0) = a$ و $v(t_0) = b$ دارای بردار مماس t در نقطه P باشد اگر و فقط اگر،

$$c\sigma_u + d\sigma_v = t = \dot{\gamma}(t_0) = \dot{u}(t_0)\sigma_u + \dot{v}(t_0)\sigma_v$$

یعنی، $\dot{u}(t_0) = c$ و $\dot{v}(t_0) = d$. لذا پیدا کردن یک ژئودزیک (سرعت - واحد) که در لحظه $t = t_0$ از نقطه P بگذرد و دارای بردار مماس t در آن نقطه باشد، معادل حل معادلات ژئودزیکی با شرایط اولیه (۶) است. اما در بالا متذکر شدیم که این مسئله دارای جواب یگانه است. \square

مثال ۵.۸

می‌دانیم که همه خطوط مستقیم در صفحه ژئودزیک هستند. چون خط راست گذرا از هر نقطه داده شده در صفحه موازی با هر جهت داده شده، موجود است، طبق نتیجه ۱.۸، ژئودزیک دیگری موجود نیست.

مثال ۶.۸

بطور مشابه، روی کره، فقط دایره عظیمه ژئودزیک هستند زیرا به‌وضوح دایره عظیمه‌ایی که از هر نقطه داده شده از کره، در هر جهت مماس داده شده بر کره در آن نقطه، بگذرند، موجود اند. (اگر P وضعیت برداری نقطه و t جهت مماس و Π صفحه گذرا از مبدأ و موازی با بردارهای p و t (مثلاً دارای بردار قائم $p \times t$) باشد. در این صورت محل تلاقی کره و صفحه Π را انتخاب کنید.)

نتیجه زیر از قضیه ۱.۸، در بعضی از حالت‌ها برای پیدا کردن ژئودزیک‌ها، بدون حل معادلات ژئودزیکی، می‌تواند بکار برده شود.

نتیجه ۲.۸

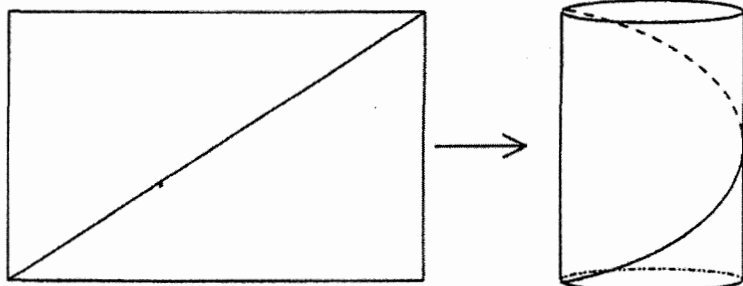
یک ایزومتری بین دو سطح، ژئودزیک روی یک سطح را به ژئودزیک روی سطح دیگر می‌برد.

اثبات ۲.۸

فرض کنید S_1 و S_2 دو سطح و $f: S_1 \rightarrow S_2$ یک ایزومتری و γ یک ژئودزیک در S_1 باشد. فرض کنید $\sigma(u, v)$ یک قطعه در S_1 بوده و بخشی از ژئودزیک که در این قطعه قرار می‌گیرد به صورت $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ باشد. در این صورت v و u با E, F و G که ضرایب اولین فرم اساسی σ هستند، در معادلات ژئودزیکی (۲) صدق می‌کنند. طبق قضیه ۱.۵، $f \circ \sigma$ یک قطعه از S_2 ، با همان اولین فرم اساسی است. بنابراین طبق قضیه ۱.۸، $t \mapsto f(\sigma(u(t), v(t)))$ یک ژئودزیک روی S_2 است، به عبارت دیگر $f \circ \gamma$ ژئودزیک است. \square

مثال ۲.۸

می‌دانیم که روی استوانه دایره‌گون $x^2 + y^2 = 1$ ، دایره حاصل از تلاقی استوانه با صفحات موازی با صفحه xy ، ژئودزیک هستند. (چون آنها بخش‌های قائم هستند). همچنین می‌دانیم که خطوط مستقیم روی استوانه که موازی محور z ها هستند ژئودزیک می‌باشند. اما مطمئناً، اینها تنها ژئودزیک‌های موجود نیستند، زیرا فقط یک ژئودزیک از هر دو نوع که از هر نقطه استوانه می‌گذرد، وجود دارد، (در حالی که می‌دانیم از هر نقطه، در هر جهت مماس داده شده، یک ژئودزیک می‌گذرد).



برای پیدا کردن بقیه ژئودزیک‌ها، یادآوری می‌کنیم که استوانه با صفحه ایزومتریک است (مثال ۵.۵ را ببینید). در حقیقت ایزومتری، نقطه $(u, v, 0)$ در صفحه xy را به نقطه $(\cos u, \sin u, v)$ روی استوانه تصویر می‌کند. طبق نتیجه ۲.۸، این نگاشت، ژئودزیک‌های روی صفحه (یعنی خطوط راست) را به ژئودزیک‌های روی استوانه منتقل می‌کند و بالعکس. بنابراین برای پیدا کردن

ژئودزیک‌های روی استوانه، باید فقط تصویر خطوط راست در صفحه را تحت ایزومتري پیدا کنیم. هر خط که موازی محور y ها نباشد به صورت $y = mx + c$ است که در آن m و c ثابت هستند. با پرمایش خط به صورت $x = u$ و $y = mu + c$ ، می‌بینیم که تصویر خط، خم

$$\gamma(u) = (\cos u, \sin u, mu + c)$$

روی استوانه است. با مقایسه مثال ۱.۲ می‌بینیم که این خم، ماریچ دایره‌گون به شعاع یک و گام $|m|2\pi$ است (اضافه کردن c به مولفه z ، فقط ماریچ را به صورت عمودی جا به جا می‌کند). توجه کنید اگر $m = 0$ ، ژئودزیک‌های دایره‌گون را که می‌شناسیم به دست می‌آوریم. نهایتاً، هر خط راست موازی محور y ها در صفحه xy ، تحت ایزومتري به خط مستقیمی روی استوانه که موازی محور z ها است تصویر می‌شود که خانواده دیگری از ژئودزیک‌ها هستند که قبلاً معرفی کرده‌ایم.

تمرین‌ها

۶.۸ نشان دهید اگر P و Q نقاط مجزا از استوانه دایره‌گون باشند، یا دو ژئودزیک و یا تعداد نامتناهی ژئودزیک وجود دارد که دو نقطه P و Q را بهم متصل می‌کند کدام یک از زوج‌های P و Q ، خاصیت اخیر را دارند؟

۷.۸ با استفاده از نتیجه ۲.۸، همه ژئودزیک‌های روی مخروط دایره‌گون را پیدا کنید (از تمرین ۵.۵ استفاده کنید).

۸.۸ با استفاده از نتیجه ۲.۸ نشان دهید که ژئودزیک‌های استوانه تعمیم‌یافته دقیقاً خم‌های سرعت-ثابت هستند که بردار مماس آنها با مولدهای استوانه، زاویه ثابت می‌سازد.

۹.۸ با حل کردن معادلات ژئودزیک، ژئودزیک‌های استوانه دایره‌گون را به دست آورید.

۱۰.۸ فرض کنید $\gamma(t)$ یک خم سرعت-واحد روی ماریچ‌نمای

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

باشد نشان دهید

$$\dot{u}^2 + (1 + u^2)\dot{v}^2 = 1$$

همچنین نشان دهید که اگر γ یک ژئودزیک روی σ را با نقطه نشان می‌دهیم. باشد، آنگاه

$$\dot{v} = \frac{a}{1 + u^2}$$

که در آن a ثابت است. ژئودزیک‌های متناظر به $a = 0$ و $a = 1$ را پیدا کنید.

۱۱.۸ نشان دهید اگر N قائم واحد استاندارد روی قطعه سطح $\sigma(u, v)$ با اولین فرم اساسی $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ باشد، آنگاه

$$N \times \sigma_u = \frac{E\sigma_v - F\sigma_u}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N \times \sigma_v = \frac{F\sigma_v - G\sigma_u}{\sqrt{EG - F^2}}$$

(از گزاره ۲.۵ استفاده کنید). نشان دهید اگر $\sigma(u(t), v(t))$ خم سرعت - واحد روی σ باشد، انحناي ژئودزیکي آن برابر با

$$\kappa_g = (\ddot{v}u - \dot{v}\ddot{u})\sqrt{EG - F^2} + A\dot{u}^3 + B\dot{u}^2\dot{v} + G\dot{u}\dot{v}^2 + D\dot{v}^3$$

است که در آن A, B, C, D بر حسب E, F, G و مشتقات آنها بیان می‌شوند. (روش اثبات قضیه ۱.۸ را برای محاسبه ضرب‌های نقطه‌ای به‌کار برید). این اثبات دیگری از نتیجه ۲.۸ است.

۱۲.۸ مستقیماً نشان دهید که پارامتر هر خمی که در معادلات ژئودزیکي (۲) صدق کند، متناسب با طول - قوس است.

۳.۸ ژئودزیک‌های سطوح دورانی

اگرچه معادلات ژئودزیکي برای سطوح دورانی، به‌طور دقیق حل نمی‌شوند، ولی می‌توانند برای رسیدن به یک درک کیفی خوب از ژئودزیک‌های چنین سطوحی مورد استفاده قرار بگیرند. سطح دورانی، معمولاً به صورت

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

پرمایش می‌شود که در آن $f > 0$ و $\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2 = 1$ (مثال‌های ۱۳.۴ و ۲.۶ را ببینید). توجه کنید که در این مثال‌ها نقطه، نمایانگر $\frac{d}{du}$ است. اما در اینجا نقطه نشان‌دهنده $\frac{d}{dt}$ که در آن t پارامتر درامتداد ژئودزیک است، می‌باشد. در مثال ۲.۶ دیدیم که اولین فرم اساسی σ ، $du^2 + f(u)^2 dv^2$ است. با مراجعه به معادله (۲) می‌بینیم که معادلات ژئودزیکي به صورت

$$\ddot{u} = f(u) \frac{df}{du} \dot{v}^2, \quad \frac{d}{dt}(f(u)^2 \dot{v}) = 0 \quad (7)$$

می‌باشد. به علاوه می‌توانیم ژئودزیک‌ها را سرعت واحد در نظر بگیریم بنابراین

$$\dot{u}^2 + f(u)^2 \dot{v}^2 = 1 \quad (۸)$$

لذا، نتیجه آسان زیر حاصل می‌شود:

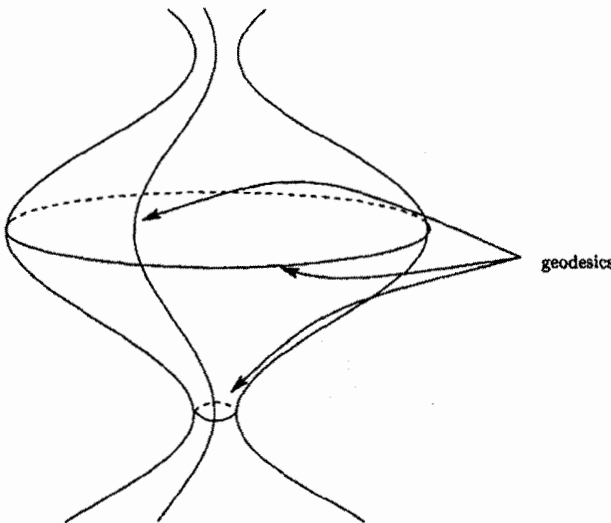
گزاره ۵.۸

روی سطح دورانی

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

(i) هر نصف النهار یک ژئودزیک است.

(ii) موازی $u = u_0$ ، یک ژئودزیک است اگر و فقط اگر در $u = u_0$ ، $\frac{df}{du} = 0$ باشد یعنی u_0 یک نقطه سکون باشد.



اثبات ۵.۸

روی نصف النهار داریم، $v = \text{ثابت}$ بنابراین دومین معادله در (۷) به وضوح برقرار است. معادله

(۸)، می‌گوید $\dot{u} = \pm 1$ ، بنابراین u ثابت است و اولین معادله در (۷) نیز حاصل می‌شود.

برای (ii) توجه کنید اگر $u = u_0$ ثابت باشد، در این صورت طبق معادله (۸)، $\dot{v} = \pm \frac{1}{f(u_0)}$

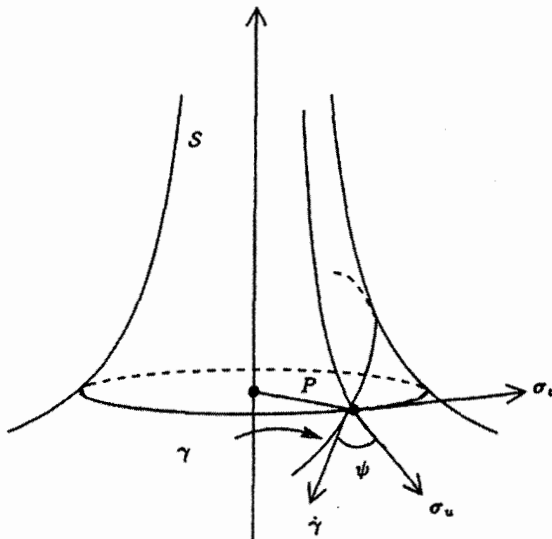
مخالف صفر است، بنابراین اولین معادله در (۷) تنها وقتی برقرار است که $\frac{df}{du} = 0$ بالعکس

اگر در $u = u_0$ ، $\frac{df}{du} = 0$ آنگاه اولین معادله در (۷) به وضوح برقرار است و دومی به دلیل اینکه $\dot{v} = \pm \frac{1}{f(u_0)}$ و $f(u) = f(u_0)$ ثابت هستند، برقرار است. □

البته این گزاره تنها بعضی از ژئودزیک‌های سطح دورانی را معین می‌کند. نتیجه بعدی در شناخت بقیه ژئودزیک‌ها بسیار مفید است.

گزاره ۶.۸ (قضیه کلو^۱)

فرض کنید γ یک ژئودزیک روی سطح دورانی S ، ρ فاصله نقاط S از محور دوران و ψ زاویه بین $\dot{\gamma}$ و نصف‌النهار S باشد. در این صورت $\rho \sin \psi$ در طول γ ثابت است. بالعکس، اگر $\rho \sin \psi$ در امتداد خمی روی سطح ثابت باشد و اگر هیچ بخشی از γ بخشی از موازی S نباشد، آنگاه γ یک ژئودزیک است.



در بند دوم گزاره، منظور از «بخشی» از γ ، $\gamma(J)$ است که در آن J یک بازه باز است. در اینجا نمی‌توان فرضیات را کم کرد زیرا برای موازی $\psi = \frac{\pi}{2}$ ، مطمئناً $\rho \sin \psi$ ثابت است. اما در حالت کلی، همان‌طور که گزاره ۵.۸ (ii) نشان می‌دهد، موازی‌ها، ژئودزیک نیستند.

اثبات ۶.۸

با پرمایش S همانند گزاره ۵.۸، داریم $\rho = f(u)$. توجه کنید که $\frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|} = \sigma_u$ و

1) Clairaut's theorem

به ترتیب بردارهای واحد مماس بر موازی‌ها و نصف‌النهارها هستند و آنها بر هم عمودند زیرا $F = 0$. با فرض سرعت-واحد بودن $\sigma(u(t), v(t)) = \gamma(t)$ داریم

$$\dot{\gamma} = \cos \psi \sigma_u + \rho^{-1} \sin \psi \sigma_v$$

(در واقع این معادله در تعیین علامت ψ که در قضیه کلرو مبهم باقی مانده مفید است). بنابراین

$$\sigma_u \times \dot{\gamma} = \rho^{-1} \sin \psi \sigma_u \times \sigma_v$$

چون $\dot{\gamma} = \dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v$ لذا

$$\dot{v}\sigma_u \times \sigma_v = \rho^{-1} \sin \psi \sigma_u \times \sigma_v$$

$$\therefore \rho \dot{v} = \sin \psi$$

بنابراین

$$\rho \sin \psi = \rho^2 \dot{v}$$

اما معادله دوم در (۷)، در امتداد ژئودزیک ثابت است مثلاً فرض کنید Ω باشد. بالعکس اگر $\rho \sin \psi$ دارای مقدار ثابت Ω در امتداد خم سرعت-واحد γ در S باشد، بحث بالا نشان می‌دهد که دومین معادله در (۷) برقرار است، و ما باید ثابت کنیم که اولین معادله در (۷) نیز برقرار است.

چون

$$\dot{v} = \frac{\sin \psi}{\rho} = \frac{\Omega}{\rho^2} \quad (۹)$$

از معادله (۸) داریم

$$\dot{u}^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2} \quad (۱۰)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه اخیر، نسبت به t

$$2\dot{u}\ddot{u} = \frac{2\Omega^2}{\rho^3}\dot{\rho} = \frac{2\Omega^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{du}\dot{u}$$

$$\therefore \dot{u} \left(\ddot{u} - \rho \frac{d\rho}{du} \dot{v}^2 \right) = 0$$

اگر عبارت داخل پرانتز در نقطه‌ای از خم مثلاً در $\sigma(u_0, v_0) = \gamma(t_0)$ صفر نشود، در این صورت $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که در بازه $|t - t_0| < \epsilon$ نیز صفر نمی‌شود. اما در این

صورت برای $|t - t_0| < \epsilon$ داریم $\dot{u} = 0$. لذا بر خلاف فرض به ازای $|t - t_0| < \epsilon$ خم γ بر موازی $u = u_0$ منطبق است، بنابراین عبارت داخل پرانتز باید همه جا روی γ صفر باشد یعنی

$$\ddot{u} = \rho \frac{d\rho}{du} \dot{v}^2$$

□ که نشان می‌دهد اولین معادله در (۷) نیز برقرار است.

قضیه کلوو تعبیر مکانیکی ساده‌ای دارد. یادآوری می‌کنیم که ژئودزیک‌های سطح S ، خم‌هایی روی S هستند که به وسیلهٔ یک ذره که تابع هیچ نیرویی به جز نیروی قائم S که آن را وادار به حرکت روی S می‌کند نیست. وقتی S یک سطح دورانی است، نیرو در نقطه P از S ، در صفحه‌ای مشتمل بر محور دوران و P قرار می‌گیرد و بنابراین حول محور گشتاور ندارد. این نتیجه می‌گیریم که گشتاور زاویه‌ای Ω از ذره حول محور ثابت است. اما اگر ذره در امتداد ژئودزیک سرعت-واحد حرکت کند، مؤلفه سرعت آن در امتداد موازی گذرا از P ، $\sin \psi$ است لذا گشتاور زاویه‌ای حول محور متناسب با $\rho \sin \psi$ است.

مثال ۸.۸

از قضیه کلوو برای تعیین ژئودزیک‌های کره‌نما استفاده می‌کنیم (بخش ۲.۷):

$$\sigma(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u}))$$

در آنجا دیدیم که اولین فرم اساسی برابر با

$$du^2 + e^{2u} dv^2$$

است. جایگزینی $w = e^{-u}$ برای بازپیمایش مناسب است، سطح بازپیمایش شده به صورت

$$\bar{\sigma}(v, w) = \left(\frac{1}{w} \cos v, \frac{1}{w} \sin v, \sqrt{1 - \frac{1}{w^2}} - \cosh^{-1} w \right)$$

است و اولین فرم اساسی آن برابر با

$$\frac{dv^2 + dw^2}{w^2}$$

می‌باشد. برای خوش تعریفی و هموار بودن $\bar{\sigma}$ باید $w > 1$.

اگر $\gamma(t) = \bar{\sigma}(w(t), v(t))$ ژئودزیک سرعت-واحد باشد، از شرط سرعت-واحد داریم

$$\dot{v}^2 + \dot{w}^2 = w^2 \quad (11)$$

و قضیه کلو می‌گوید

$$\frac{1}{w} \sin \psi = \frac{1}{w^2} \dot{v} = \Omega \quad (12)$$

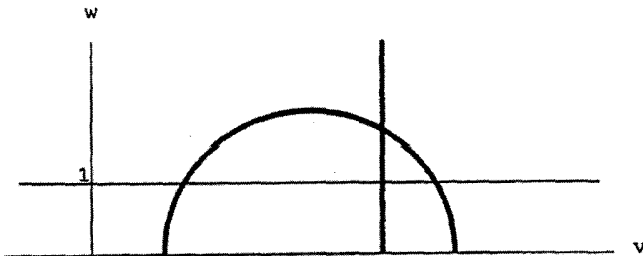
که در آن Ω ثابت است، زیرا $\rho = \frac{1}{w}$. بنابراین، $\dot{v} = \Omega w^2$. اگر $\Omega = 0$ ، نصف‌النهار $v = \text{ثابت}$ به دست می‌آید. حالا با فرض $\Omega \neq 0$ و جایگزینی در معادله (۱۱) نتیجه می‌گیریم

$$\dot{w} = \pm w \sqrt{1 - \Omega^2 w^2}$$

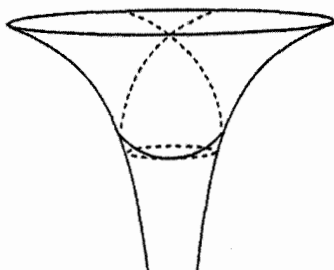
لذا، در امتداد ژئودزیک،

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dw} &= \frac{\dot{v}}{\dot{w}} = \pm \frac{\Omega w}{\sqrt{1 - \Omega^2 w^2}} \\ \therefore (v - v_0) &= \mp \frac{1}{\Omega} \sqrt{1 - \Omega^2 w^2} \\ \therefore (v - v_0)^2 + w^2 &= \frac{1}{\Omega^2} \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن v_0 ثابت است. بنابراین ژئودزیک‌ها تصاویر بخش‌هایی از دوایر موجود در صفحه wv تحت σ می‌باشند که با معادله (۱۳) داده شده و در ناحیه $w > 1$ قرار دارند. توجه کنید این دوایر همه دارای مراکز روی محور v ‌ها هستند و لذا محور v ‌ها را به‌طور عمودی قطع می‌کنند. نصف‌النهارها به خطوط مستقیم عمود بر محور v ‌ها متناظر هستند.



چون $w > 1$ ، هر ژئودزیک، به جز نصف‌النهار، دارای یک مقدار ماکزیمم از w است، که آن را اخذ می‌کند و دارای یک مقدار ماکزیمم و مینیمم از v است که به اندازه دلخواه به آن‌ها نزدیک می‌شود اما آن را اخذ نمی‌کند. (شکل زیر را ببینید) این نشان می‌دهد که کره نما «غیر کامل» است یعنی یک ژئودزیک روی کره نما (اگر نصف‌النهار باشد، در یک جهت و در غیر این صورت در هر دو جهت) نمی‌تواند بطور بی‌نهایت ادامه یابد.



اکنون به سطح دورانی دلخواه S بر می‌گردیم، تا ببینیم چگونه قضیه کلرو به ما این امکان را می‌دهد تا رفتار کیفی ژئودزیک روی S را توضیح دهیم.

ابتدا توجه کنید که، در حالت کلی، دو ژئودزیک وجود دارند که از هر نقطه داده شده P از S با گشتاور زاویه‌ی Ω می‌گذرند، زیرا Ω با معادله (۹) و \dot{u} صرف‌نظر از علامت با معادله (۱۰) معین می‌شوند. در حقیقت، یک ژئودزیک با انعکاس در صفحه گذرا از نقطه P و محور دوران (که Ω را به $-\Omega$ تغییر می‌دهد) از دیگری به دست می‌آید و به دنبال آن پارامتر t به $-t$ تغییر می‌کند (که گشتاور زاویه‌ی را دوباره به Ω برمی‌گرداند).

بحث اخیر نشان می‌دهد که همچنین می‌توان فرض نمود $\Omega > 0$ ، که از این به بعد چنین فرضی را داریم. در این صورت معادله (۱۰) نشان می‌دهد که ژئودزیک به قسمتی از S که در فاصله بزرگتر یا مساوی Ω از محور قرار دارد محدود می‌شود.

اگر همه S در فاصله بزرگتر از Ω از محور باشد، ژئودزیک، هر موازی S را قطع می‌کند. در غیر این صورت، u روی S از بالا یا پایین کراندار است، فرض کنیم u کران بالا داشته باشد. u را کوچکترین کران بالای u روی ژئودزیک در نظر بگیرید و فرض کنید $\Omega + 2\epsilon$ ، شعاع موازی $u = u_0$ باشد. اگر u به اندازه کافی به u_0 نزدیک شود، شعاع موازی متناظر، بزرگتر یا مساوی $\Omega + \epsilon$ می‌شود، و توسط معادله (۱۰) روی قسمتی از ژئودزیک که در این ناحیه قرار دارد داریم

$$|\dot{u}| \geq \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega + \epsilon}\right)^2} > 0$$

اما از این به روشنی نتیجه می‌شود که ژئودزیک، $u = u_0$ را قطع می‌کند، که متناقض فرض اولیه ماست.

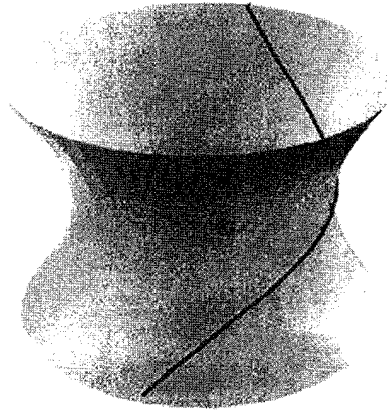
بنابراین، حالتی جالب است که قسمتی از S با فاصله Ω از محور باشد. این بحث روشن‌تر خواهد شد اگر در واقع مثال خاصی را در نظر بگیریم که ژئودزیک‌های آن تمام شکل‌های رفتاری ممکن را به نمایش می‌گذارند.

مثال ۹.۸

هذلولی‌گون یک پارچه‌ای را که از دوران هذلولی

$$x^2 - z^2 = 1, \quad x > 0$$

به دور محور z ‌ها به دست می‌آید در نظر می‌گیریم. در بالا دیدیم که، اگر $0 \leq \Omega < 1$ ، آنگاه یک ژئودزیک با گشتاور زاویه‌ی Ω تمام موازی‌های هذلولی‌گون را قطع می‌کند، چون همه سطح در فاصله بزرگتر یا مساوی ۱ از محور z ‌ها است. بنابراین از $z = -\infty$ تا $z = \infty$ گسترش می‌یابد.



$$0 < \Omega < 1$$

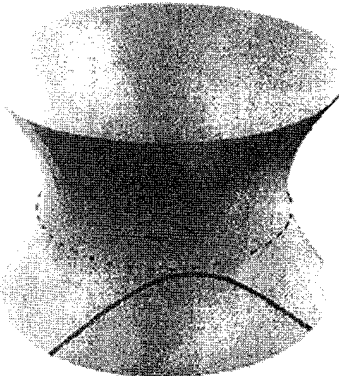
اکنون فرض کنید $\Omega > 1$ ، در این صورت ژئودزیک به یکی از دو ناحیه زیر محدود می‌شود

$$z \geq \sqrt{\Omega^2 - 1}, \quad z \leq -\sqrt{\Omega^2 - 1}$$

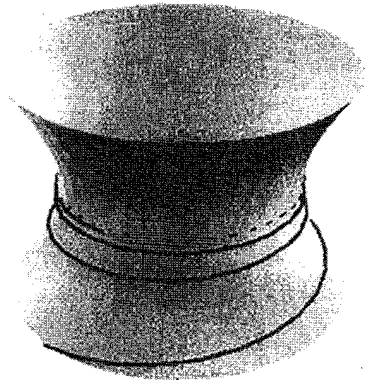
که به ترتیب به دایر Γ^+ و Γ^- با شعاع Ω محدود شده‌اند. فرض کنید P یک نقطه روی Γ^- باشد. ژئودزیک C گذرا از P و مماس بر Γ^- را در نظر بگیرید. آنگاه در نقطه P ، $\psi = \frac{\pi}{4}$ و $\rho = \Omega$ ، پس C دارای گشتاور زاویه‌ی Ω است. در این صورت Γ^- شامل C نیست زیرا (طبق گزاره (۵.۸)(ii))، Γ^- یک ژئودزیک نیست پس C وقتی نقطه P را ترک می‌کند می‌بایستی به سوی ناحیه زیرین Γ^- برود. به علاوه، C می‌بایستی نسبت به P متقارن باشد، زیرا انعکاس در صفحه گذرا از P و شامل محور z ‌ها، C را به ژئودزیک دیگری که از P می‌گذرد و به Γ^- مماس است می‌برد، و لذا بنابر بخش منحصر بفردی نتیجه ۱.۸ می‌بایستی منطبق بر C باشد. چون در ناحیه زیرین Γ^- ، بنابر معادله (۱۰)، $\dot{z} \neq 0$ ، لذا ژئودزیک، هر موازی زیر Γ^- را قطع می‌کند و $z \rightarrow -\infty$ وقتی $t \rightarrow \pm\infty$

حال فرض کنید \bar{C} ژئودزیک با گشتاور زاویه‌یی $\Omega > 1$ در ناحیه زیرین Γ^- باشد. در این صورت یک دوران مناسب حول محور z ها باعث می‌شود که \bar{C} ، C را مثلاً در نقطه Q قطع کند، و لذا (بعد از انعکاس در صفحه‌گذرا از Q و محور z ها و با تغییر t به $-t$) بر آن منطبق می‌شود. بنابراین رفتار هر ژئودزیک با گشتاور زاویه‌یی $\Omega > 1$ را که محدود به ناحیه زیرین Γ^- است، بررسی کرده‌ایم. البته، ژئودزیک‌های با گشتاور زاویه‌یی $\Omega > 1$ در ناحیه بالایی Γ^+ با انعکاس ژئودزیک‌های زیرین Γ^- در صفحه xy به دست می‌آیند.

بالاخره فرض کنید که $\Omega = 1$. فرض کنید C یک ژئودزیک با گشتاور زاویه‌یی ۱ باشد که از نقطه P می‌گذرد، اگر P روی کمر هذلولی‌گون یک پارچه Γ باشد (یعنی روی دایره واحد در صفحه xy)، بنا بر گزاره ۵.۸(ii) یک ژئودزیک است، در این صورت در نقطه P ، $\rho = 1$ بنابراین $\psi = \frac{\pi}{4}$ و C بر Γ در نقطه P مماس است. پس باید منطبق بر Γ باشد.



$$\Omega > 1$$



$$\Omega = 1$$

اکنون فرض کنید P در ناحیه‌یی زیرین Γ است. در این صورت در نقطه P ، $0 < \psi < \frac{\pi}{4}$ ، بنابراین وقتی P را در یک جهت ترک می‌کند، C به Γ نزدیک می‌شود. در حقیقت به‌طور دلخواه به Γ نزدیک می‌شود. زیرا اگر همیشه زیر یک موازی $\bar{\Gamma}$ با شعاع $1 + \epsilon$ باقی بماند (با $\epsilon > 0$)، آنگاه بنا بر معادله (۱۰) همه جا در امتداد C باید داشتیم

$$|\dot{z}| \geq \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \epsilon}\right)^2}$$

که به روشنی نتیجه می‌دهد C می‌بایستی هر موازی را قطع کند، که با فرض ما متناقض است. پس اگر $\Omega = 1$ ، ماریچ‌های ژئودزیک دور هذلولی‌گون به آن میل می‌کند، و به‌طور دلخواه به Γ نزدیک می‌شوند، اما هرگز به آن نمی‌رسد.

تمرین‌ها

۱۳.۸ راه دیگری وجود دارد برای اینکه ببینید تمام نصف‌النهارها، و موازی‌های متناظر به نقاط سکون f ، ژئودزیک‌های سطح دورانی که در این بخش بررسی شده‌اند می‌باشند آن راه کدام است؟

۱۴.۸ یک سطح دورانی دارای این خاصیت است که هر موازی، یک ژئودزیک است. آن چه نوع سطحی است؟

۱۵.۸ نشان دهید یک ژئودزیک روی کره‌نما با گشتاور زاویه‌بندی مخالف صفر Ω خودش را قطع می‌کند اگر و فقط اگر $\Omega < (1 + \pi^2)^{-1/2}$. در این حالت چه تعداد خود - متقاطع وجود دارد؟ (شرط خود - متقاطع بودن آن است که، برای مقادیر $w > 1$ ، دو مقدار v که در معادله (۱۳) صدق می‌کنند. در مضرب صحیحی از 2π با هم اختلاف داشته باشند.)

۱۶.۸ فرض کنید $f : \tilde{\sigma}(v, w) \mapsto \tilde{\sigma}(\tilde{v}, \tilde{w})$ یک ایزومتري از کره‌نما باشد، که در آن $\tilde{\sigma}$ همان پرمایش مثال ۸.۸ است.

(i) نشان دهید f نصف‌النهارها را به نصف‌النهارها می‌برد، و نتیجه بگیرید که \tilde{w} به w بستگی ندارد. از این حقیقت که نصف‌النهارها تنها ژئودزیک‌های کره‌نما هستند و می‌توانند در یک جهت به‌طور نامعین گسترش یابند استفاده کنید)

(ii) ثابت کنید f موازی‌ها را به موازی‌ها می‌برد. (موازی‌ها خم‌هایی هستند که بر هر نصف‌النهار عمودند.)

(iii) از (ii) و تمرین ۱۱.۷ نتیجه بگیرید که $\tilde{w} = w$.

(iv) نشان دهید f یک دوران حول محور کره‌نما یا یک انعکاس در صفحه شامل محور دوران است.

۱۷.۸ چه ژئودزیک‌هایی روی کره‌نما متناظر به مدل گوی در (تمرین ۱۲.۷ (ii)) هستند؟ (حل تمرین ۱۲.۷ و این حقیقت را بکار بگیرید که تبدیل موبیوس $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ یک تبدیل همدیس از صفحه (مختلط) به خودش است که خطوط و دوائر را به خطوط و دوائر می‌برد.)

۱۸.۸ ژئودزیک‌های سطوح زیر را تشریح کنید.

(i) شبه کره، که از دوران بیضی به دور یکی از محورهایش به دست آمده است.

(ii) چنبره (تمرین ۱۰.۴)

۴.۸ ژئودزیکها بعنوان کوتاهترین مسیر

همه می دانند خط مستیمی که دو نقطه P و Q را در صفحه به هم وصل می کند کوتاهترین مسیر بین دو نقطه P و Q است. همچنین مشخص است که دایره عظیمه کوتاهترین مسیر روی کره اند. و دیدیم که خطوط مستقیم ژئودزیکهای صفحه، و دایره عظیمه ژئودزیکهای کره هستند.

برای درک ارتباط بین ژئودزیکها و کوتاهترین مسیر روی سطح دلخواه S ، خم سرعت-واحد γ روی سطح S را که از دو نقطه ثابت p به q می گذرد در نظر می گیریم. اگر γ کوتاهترین مسیر از p به q روی سطح باشد، آنگاه قسمتی از γ که در هر قطعه سطح σ از S قرار می گیرد، باید کوتاهترین مسیر بین هر دو نقطه از آن باشد. زیرا اگر p' و q' دو نقطه دلخواه از γ در σ باشند، و اگر مسیر کوتاهتری از p' به q' در σ نسبت به γ وجود داشته باشد می توان مسیر کوتاهتر را جایگزین قسمتی از γ ، بین p' و q' نمود، لذا مسیر کوتاهتری از p به q در S به دست می آید. بنابراین می توانیم مسیری مانند γ اختیار کنیم که کاملاً در قطعه سطح σ قرار گیرد. برای امتحان اینکه آیا γ دارای طول کوتاهتری نسبت به هر مسیر دیگری، بین دو نقطه ثابت p و q در σ است، γ را در خانواده‌یی از خمهای هموار در σ که از دو نقطه p و q می گذرند قرار می دهیم. براین اساس خانواده‌ای از خمها، مانند γ^τ در σ موردنظر است به طوری که به ازای هر τ در بازه $(-\delta, \delta)$

(i) $\epsilon > 0$ ای وجود دارد به طوری که $\gamma^\tau(t)$ برای هر $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ و هر $\tau \in (-\delta, \delta)$ تعریف شده است.

(ii) برای a و b ای که $-\epsilon < a < b < \epsilon$ و هر $\tau \in (-\delta, \delta)$ داریم

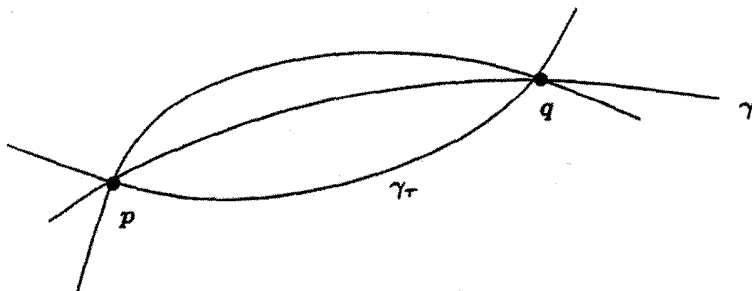
$$\gamma^\tau(a) = p, \quad \gamma^\tau(b) = q$$

(iii) نگاشت از مستطیل $(-\delta, \delta) \times (-\epsilon, \epsilon)$ به \mathbb{R}^3 که با ضابطه

$$(\tau, t) \mapsto \gamma^\tau(t)$$

هموار است.

$$\gamma^\circ = \gamma \quad (\text{iv})$$



طول قسمتی از γ^τ بین p و q برابر است با

$$\mathcal{L}(\tau) = \int_a^b \|\dot{\gamma}^\tau\| dt$$

که در آن نقطه معرف $\frac{d}{d\tau}$ است.

قضیه ۲.۸

با علامت بالا، خم سرعت-واحد γ یک ژئودزیک است اگر و فقط اگر در نقطه $\tau = 0$

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{L}(\tau) = 0$$

برای تمام خم‌های خانواده γ^τ با $\gamma^0 = \gamma$.

توجه کنید اگر چه فرض کردیم $\gamma = \gamma^0$ سرعت-واحد است، اما فرض نکرده‌ایم که γ^τ به ازای $\tau \neq 0$ سرعت-واحد است.

اثبات ۶.۸

اگر $f(\tau, t)$ هموار باشد، داریم:

$$\frac{d}{d\tau} \int f(\tau, t) dt = \int \frac{\partial f}{\partial \tau} dt$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mathcal{L}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \int_a^b \|\dot{\gamma}^\tau\| dt \\ &= \frac{d}{d\tau} \int_a^b (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \tau} (g(\tau, t)^{1/2}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b g(\tau, t)^{-1/2} \frac{\partial g}{\partial \tau} dt \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن

$$g(\tau, t) = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

و نقطه معرف $\frac{d}{dt}$ است. اکنون،

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \tau} &= \frac{\partial E}{\partial \tau} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial \tau} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial \tau} \dot{v}^2 + 2E\dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \tau} + 2F \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial \tau} \dot{v} + \dot{u} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \tau} \right) + 2G\dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \tau} \\ &= \left(E_u \frac{\partial u}{\partial \tau} + E_v \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \dot{u}^2 + 2 \left(F_u \frac{\partial u}{\partial \tau} + F_v \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \dot{u} \dot{v} + \left(G_u \frac{\partial u}{\partial \tau} + G_v \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \dot{v}^2 \\ &\quad + 2E\dot{u}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial t} + 2F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial t} \dot{v} + \dot{u} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial t} \right) + 2G\dot{v} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial t} \\ &= (E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u} \dot{v} + G_u \dot{v}^2) \frac{\partial u}{\partial \tau} + (E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u} \dot{v} + G_v \dot{v}^2) \frac{\partial v}{\partial \tau} \\ &\quad + 2(E\dot{u}^2 + F\dot{v}) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial t} + 2(F\dot{u} + G\dot{v}) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial t} \end{aligned}$$

با به کارگیری انتگرال جزء به جزء، سهم انتگرال در معادله (۱۴) برای جملاتی که مشتق جزئی مرتبه دوم دارند عبارت است از

$$\begin{aligned} &\int_a^b g^{-1/2} \left\{ (E\dot{u} + F\dot{v}) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial t} + (F\dot{u} + G\dot{v}) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial t} \right\} dt \\ &= g^{-1/2} \left\{ (E\dot{u} + F\dot{v}) \frac{\partial u}{\partial \tau} + (F\dot{u} + G\dot{v}) \frac{\partial v}{\partial \tau} \right\} \Bigg|_{t=a}^{t=b} \\ &\quad - \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \left\{ g^{-1/2} (E\dot{u} + F\dot{v}) \right\} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ g^{-1/2} (F\dot{u} + G\dot{v}) \right\} \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) dt \end{aligned} \tag{15}$$

اما چون $\gamma^\tau(a)$ و $\gamma^\tau(b)$ به τ وابسته نیستند (به ترتیب برابر \mathbf{p} و \mathbf{q} هستند)، لذا وقتی $t = a$ یا $t = b$ داریم

$$\frac{\partial \gamma^\tau}{d\tau} = 0$$

چون

$$\frac{\partial \gamma^\tau}{d\tau} = \frac{\partial u}{d\tau} \sigma_u + \frac{\partial v}{d\tau} \sigma_v$$

لذا به ازای $t = a$ یا $t = b$

$$\frac{\partial u}{d\tau} = \frac{\partial v}{d\tau} = 0$$

بنابراین، اولین جمله در سمت راست معادله (۱۵) برابر صفر است. بقیه جملات را در معادله (۱۵) جایگزین کرده و به معادله (۱۴) بر می گردیم، داریم

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{L}(\tau) = \int_a^b \left(U \frac{\partial u}{\partial \tau} + V \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) dt \tag{16}$$

که در آن

$$\begin{aligned} U(\tau, t) &= \frac{1}{\gamma} g^{-1/\gamma} (E_u \dot{u}^\tau + \gamma F_u \dot{u} \dot{v} + G_u \dot{v}^\tau) - \frac{d}{dt} \left\{ g^{-1/\gamma} (E \dot{u} + F \dot{v}) \right\} \\ V(\tau, t) &= \frac{1}{\gamma} g^{-1/\gamma} (E_v \dot{u}^\tau + \gamma F_v \dot{u} \dot{v} + G_v \dot{v}^\tau) - \frac{d}{dt} \left\{ g^{-1/\gamma} (F \dot{u} + G \dot{v}) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$\gamma^\circ = \gamma$ سرعت - واحد است، و چون، $\|\dot{\gamma}^\tau\|^\tau = g(\tau, t)$ لذا در $\tau = \circ$ برای هر t ، $g(\tau, t) = 1$ معادلات (۱۷) را با معادلات ژئودزیک در (۲) مقایسه می‌کنیم، می‌بینیم اگر γ یک ژئودزیک باشد، آنگاه در $\tau = \circ$ ، $U = V = \circ$ و بنابراین طبق معادله (۱۶)، در $\tau = \circ$ ،

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{L}(\tau) = \circ$$

برای اثبات عکس قضیه، باید نشان دهیم اگر برای همه خم‌های خانواده γ^τ ، در $\tau = \circ$ ،

$$\int_a^b \left(U \frac{\partial u}{\partial \tau} + V \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) dt = \circ \quad (18)$$

آنگاه $U = V = \circ$ وقتی $\tau = \circ$ (چون این نشان می‌دهد که γ در معادلات ژئودزیک صدق می‌کند). فرض کنید شرط (۱۸) برقرار است، به‌عنوان مثال فرض کنید $U \neq \circ$ وقتی $\tau = \circ$. نشان می‌دهیم که این به یک تناقض منجر می‌شود.

چون $U \neq \circ$ وقتی $\tau = \circ$ ، $t_0 \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که $U(\circ, t_0) \neq \circ$ ، مثلاً $U(\circ, t_0) > \circ$. چون U یک تابع پیوسته است، $\eta > \circ$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$

$$U(\circ, t) > \circ$$

فرض کنید ϕ یک تابع هموار باشد به طوری که

$$\phi(t) \begin{cases} = \circ & t \notin (t_0 - \eta, t_0 + \eta) \\ > \circ & t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta) \end{cases} \quad (19)$$

(ساختار چنین تابع ϕ در تمرین ۸.۲۰ آمده است). فرض کنید $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ خانواده خم‌های $\gamma^\tau(t) = \sigma(u(\tau, t), v(\tau, t))$ را در نظر بگیرید، که در آن

$$u(\tau, t) = u(t) + \tau \phi(t), \quad v(\tau, t) = v(t)$$

در این صورت برای هر t و τ ، $\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0$ و $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \phi$ ، لذا از معادله (۱۸) داریم

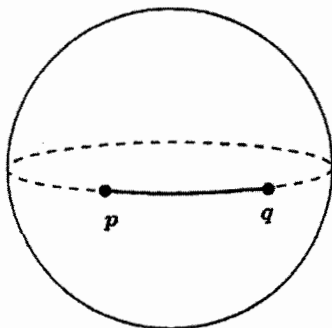
$$0 = \int_a^b \left(U \frac{\partial u}{\partial \tau} + V \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=0} dt = \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} U(0, t) \phi(t) dt \quad (20)$$

اما $U(0, t)$ و $\phi(t)$ برای هر $t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ مثبت هستند، پس انتگرال سمت راست معادله (۲۰) مثبت است. این تناقض ثابت می‌کند که می‌بایستی برای هر $t \in (a, b)$ ، $U(0, t) = 0$ به طریق مشابه می‌توان ثابت نمود برای هر $t \in (a, b)$ ، $V(0, t) = 0$. این دو نتیجه با هم ثابت می‌کند که γ در معادلات ژئودزیک صدق می‌کند. \square

خوب است چند توضیح در مورد قضیه ۲.۸ برای روشن شدن آنچه که قضیه می‌گوید و آنچه که نمی‌گوید بیان کنیم.

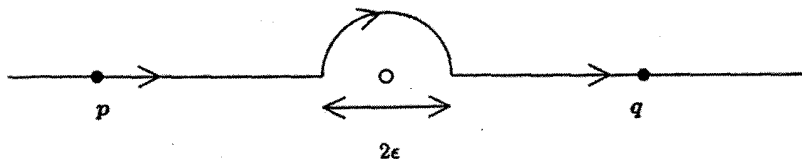
اولاً، اگر γ کوتاه‌ترین مسیر از p به q در σ باشد، آنگاه در $\tau = 0$ ، $\mathcal{L}(\tau)$ می‌بایستی یک مینیمم مطلق داشته باشد، که نتیجه می‌دهد در $\tau = 0$ ، باید $\frac{d}{d\tau} \mathcal{L}(\tau) = 0$ و لذا بنابر قضیه ۲.۸، γ یک ژئودزیک است.

ثانیاً، اگر γ یک ژئودزیک گذرا از p به q در σ باشد، آنگاه $\mathcal{L}(\tau)$ در $\tau = 0$ ، دارای یک نقطه سکون (اکستریم) است، اما نیازی نیست که مینیمم مطلق، یا حتی مینیمم نسبی باشد، بنابراین لزومی ندارد که γ کوتاه‌ترین مسیر از p به q باشد.



به طور مثال، اگر p و q دو نقطه نزدیک به هم روی کره باشند، کمان کوتاه‌تر دایره عظیمه‌ای که p و q را به هم وصل می‌کند کوتاه‌ترین مسیر بین p و q است (این کاملاً واضح نیست مطلب زیر را ببینید)، اما کمان بلندتر دایره عظیمه‌ای که p و q را به هم وصل می‌کند نیز یک ژئودزیک است. ثالثاً، به طور کلی کوتاه‌ترین مسیری که دو نقطه روی سطح را به هم وصل می‌کند ممکن است وجود نداشته باشد مثلاً فرض کنید سطح S ، مشتمل بر صفحه xy به جز مبدأ باشد. این سطح کاملاً خوبی است. اما کوتاه‌ترین مسیر از نقطه $p = (-1, 0)$ به نقطه $q = (1, 0)$ روی این

سطح وجود ندارد. البته کوتاه‌ترین مسیر پاره خط مستقیمی است که دو نقطه را به هم وصل می‌کند، اما این پاره خط به طور کامل روی سطح قرار نمی‌گیرد، زیرا از مرکز می‌گذرد که در سطح نیست. در «زندگی حقیقی» فرض کنید در حالی که از p به سمت q قدم می‌زنید یک سوراخ عمیق در زمین در مبدأ پیدا می‌کنید. برای حل مسئله ممکن است تا آنجایی که مقدور است در یک خط مستقیم راه بروید و بعد در آخرین لحظه گودال را دور بزنید، مثلاً مسیری مثل مسیر زیر را در نظر بگیرید.



این مسیر شامل دو پاره خط مستقیم به طول $1 - \epsilon$ و یک نیم دایره به شعاع ϵ است، پس طول مجموع برابر است با

$$2(1 - \epsilon) + \pi\epsilon = 2 + (\pi - 2)\epsilon$$

که البته از خط مستقیم به طول ۲ بیشتر است، اما می‌تواند به اندازه دلخواه به ۲ نزدیک شود، اگر ϵ به اندازه کافی کوچک شود. در زبان آنالیز حقیقی، بزرگترین کرانه پایین طول خم‌های روی سطح که p را به q وصل می‌کند عدد ۲ است، اما خمی به طول ۲ که p را به q در سطح وصل کند وجود ندارد.

بلاخره، می‌توان اثبات کرد که اگر سطح S یک زیر مجموعه بسته در \mathbf{R}^3 باشد (یعنی مجموعه نقاطی از \mathbf{R}^3 که در S نیستند یک زیر مجموعه باز از \mathbf{R}^3 باشد)، و اگر مسیری در S که هر دو نقطه دلخواه در S را به هم وصل می‌کند وجود داشته باشد در این صورت همیشه کوتاه‌ترین مسیری که هر دو نقطه در S را به هم وصل می‌کند وجود دارد. مثلاً یک صفحه یک زیر مجموعه بسته در \mathbf{R}^3 است، پس کوتاه‌ترین مسیر که هر دو نقطه را به هم وصل کند وجود دارد. این مسیر می‌بایستی یک خط مستقیم باشد. پس بنابر اولین توضیح بالا یک ژئودزیک است، و می‌دانیم که تنها ژئودزیک‌های موجود در صفحه خطوط مستقیم هستند. متشابهاً، کره یک زیر مجموعه بسته در \mathbf{R}^3 است، و متعاقباً کمان کوتاه‌تر دایره عظیمه که دو نقطه در کره را به هم وصل می‌کند کوتاه‌ترین مسیر است. اما سطح S که در بالا در نظر گرفتیم یک زیر مجموعه بسته \mathbf{R}^3 نیست، زیرا $(0, 0)$ در S نیست، و هر گوی باز شامل $(0, 0)$ به وضوح شامل نقاطی از S است لذا مجموعه نقاطی که در S نیستند، باز نیست.

خاصیت دیگر سطوحی که زیر مجموعه‌های بسته \mathbf{R}^3 هستند این است که ژئودزیک‌ها روی چنین سطوحی می‌توانند به صورت نامعین توسعه پیدا کنند، به این معنی که می‌توانند روی تمام \mathbf{R}^3

تعریف شوند (این مطلب را نیز اثبات نخواهیم کرد). به عنوان مثال، این مطلب در مورد خطوط راست در صفحه و دوائر عظیمه روی کره بدیهی است (اگر چه در حالت دوم، ژئودزیک‌های «نمای نزدیک» بعد از گسترش پارامتر سرعت-واحد برابر با محیط کره هستند. اما برای خط راست $\gamma(t) = (t - 1, 0)$ تعریف شده در بالا روی سطح S ، که در لحظه $t = 0$ ، از نقطه p می‌گذرد، بزرگترین بازه شامل $t = 0$ که خط به عنوان خمی در سطح روی آن تعریف می‌شود، بازه $(-\infty, 1)$ است. مثالی از سطوح «غیر کامل» را که کمتر ساختگی است در مثال ۸.۸ دیدیم: کره نمای در نظر گرفته شده در آنجا، زیر مجموعه بسته \mathbf{R}^3 نیست زیرا نقاط دایره مرزی آن در صفحه xy ، در سطح قرار نداشتند.

تمرین‌ها

۱۹.۸ ژئودزیک‌ها روی (نیم) مخروط دایره‌گون در تمرین ۷.۸ محاسبه شده است. با تفسیر 'خط' به عنوان ژئودزیک، کدامیک از عبارات (درست) زیر در هندسه اقلیدسی صفحه، برای مخروط درست است

- (i) خطی که از هر دو نقطه بگذرد موجود است.
- (ii) خط یگانه‌ای که از هر دو نقطه بگذرد موجود است.
- (iii) هر دو خط مجزا همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند.
- (iv) خطوطی وجود دارند که همدیگر را قطع نمی‌کنند.
- (v) هر خط به طور نامعین می‌تواند ادامه پیدا کند.
- (vi) یک خط کوتاهترین فاصله بین هر دو نقطه اش را تعیین می‌کند.
- (vii) یک خط نمی‌تواند خودش را به صورت مورب قطع کند (به این مفهوم که در محل تلاقی دو بردار مماس غیر موازی موجود باشد)

۲۰.۸ طی مراحل زیر یک تابع هموار با خاصیت (۱۹) بسازید:

- (i) نشان دهید برای هر n صحیح (مثبت و منفی)، عبارت $t^n e^{-1/t^2}$ وقتی t به صفر میل کند، به صفر میل می‌کند (از قاعده هویستال استفاده کنید).
- (ii) از (i) نتیجه بگیرید که تابع

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{اگر } t \geq 0 \\ 0 & \text{اگر } t \leq 0 \end{cases}$$

همه جا هموار است.

(iii) نشان دهید تابع

$$\psi(t) = \theta(1+t)\theta(1-t)$$

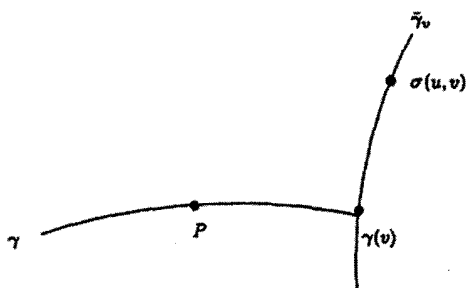
همه جا هموار است، اگر $-1 < t < 1$ ، آنگاه $\psi(t) > 0$ و در غیر این صورت $\psi(t) = 0$.

(iv) نشان دهید تابع

$$\phi(t) = \psi\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)$$

دارای خواص مورد نظر است.

۵.۸ مختصات ژئودزیکی

وجود ژئودزیک‌ها روی سطح S این اجازه را به ما می‌دهد که اطلس بسیار مفیدی برای S ارائه دهیم.

برای اینکار، فرض کنید P نقطه‌ای از S و γ با پارامتر v ، یک ژئودزیک سرعت-واحد روی S با $\gamma(0) = P$ باشد. برای هر مقدار v ، ژئودزیک سرعت-واحد یگانه $\tilde{\gamma}^v$ با پارامتر u موجود است به طوری که $\tilde{\gamma}^v(0) = \gamma(v)$ و در نقطه $\gamma(v)$ به γ عمود است. تعریف می‌کنیم $\sigma(u, v) = \tilde{\gamma}^v(u)$.

گزاره ۷.۸

با علائم بالا، زیر مجموعه باز U در \mathbb{R}^2 شامل $(0, 0)$ موجود است به طوری که $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک قطعه سطح مجاز برای S است. بعلاوه،

$$du^2 + G(u, v)dv^2,$$

اولین فرم اساسی σ است که در آن G تابعی هموار روی U چنان است برای هر $(0, v) \in U$

$$G(0, v) = 1, \quad G_u(0, v) = 0$$

اثبات ۷.۸

اثبات این که σ (روی مجموعه باز مناسب) U یک قطعه سطح مجاز است کاربرد از قضیه تابع معکوس و مشابه اثبات گزاره ۱.۴ است (به بخش ۶.۴ مراجعه کنید).
در ابتدا توجه کنید که برای هر مقدار v

$$\sigma_u(\circ, v) = \left. \frac{d}{du} \tilde{\gamma}^v(u) \right|_{u=\circ}, \quad \sigma_v(\circ, v) = \frac{d}{du} \tilde{\gamma}^v(\circ) = \frac{d}{dv} \gamma(v)$$

که طبق ساختارشان، بردارهای واحد عمود هستند. اگر $\sigma(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ ، ماتریس ژاکوبین،

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

در حالت $u = v = \circ$ دارای مرتبه ۲ است. لذا، حداقل یکی از سه زیر ماتریس 2×2 ، در نقطه (\circ, \circ) معکوس پذیر است مثلاً فرض کنید زیر ماتریس

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \quad (21)$$

معکوس پذیر باشد. از قضیه تابع معکوس ۲.۴، زیر مجموعه باز U در \mathbf{R}^2 موجود است به طوری که نگاشت

$$F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$$

یک نگاشت دو سوپی از U به زیر مجموعه باز $F(U)$ از \mathbf{R}^2 است و نگاشت معکوس $F(U) \rightarrow U$ نیز هموار است. در این صورت ماتریس (۲۱) برای هر $(u, v) \in U$ معکوس پذیر و در نتیجه σ_u و σ_v به ازای $(u, v) \in U$ ، مستقل خطی هستند. لذا $\sigma : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ یک قطعه سطح مجاز است.

در مورد اولین فرم اساسی σ ، ابتدا توجه کنید که:

$$E = \|\sigma_u\|^2 = \left\| \frac{d}{du} \tilde{\gamma}^v(u) \right\|^2 = 1$$

زیرا $\tilde{\gamma}^v$ یک خم سرعت-واحد است. سپس برای $\tilde{\gamma}^v$ از دومین معادله ژئودزیکی (۲) استفاده می‌کنیم. پارامتر سرعت-واحد u ، و v ثابت است. بنابراین $F_u = \circ$. اما دیدیم که وقتی

$u = 0$ ، آنگاه σ_u و σ_v متعامد هستند، بنابراین $F = 0$. از این نتیجه می‌شود که همه جا $F = 0$. بنابراین اولین فرم اساسی σ به صورت

$$du^2 + G(u, v)dv^2$$

است. داریم

$$G(0, v) = \|\sigma_v(0, v)\|^2 = \left\| \frac{d\gamma}{dv} \right\|^2 = 1$$

زیرا γ سرعت-واحد است. نهایتاً برای ژئودزیک γ از اولین معادله ژئودزیکی در (۲) به ازای $u = 0$ و پارامتر سرعت-واحد v ، داریم $G_u(0, v) = 0$. \square

قطعه سطح ساخته شده σ در بالا را قطعه ژئودزیکی u و v را مختصات ژئودزیکی می‌نامند.

مثال ۸.۱۰

اگر P یک نقطه روی خط استوای کره واحد S^2 باشد، γ را خط استوا با پارامتر طول جغرافیایی φ و $\tilde{\gamma}^\varphi$ را نصف‌النهار پارامتری شده به وسیلهٔ عرض جغرافیایی θ و گذرا از نقطه‌ای روی خط استوا با طول جغرافیایی φ فرض کنید. قطعه ژئودزیک متناظر قطعه طول عرض جغرافیایی معمولی با اولین فرم اساسی

$$d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$$

مطابق با گزاره ۷.۸ است.

یک کاربرد از مختصات ژئودزیکی را در اثبات قضیه ۴.۱۰ ارائه خواهیم داد.

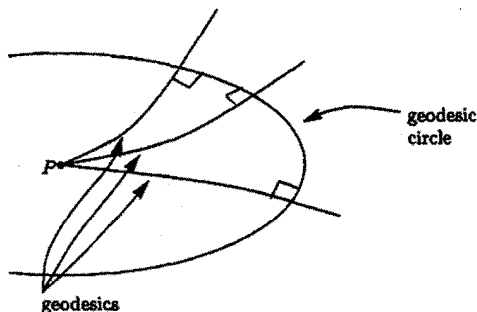
تمرین‌ها

۲۱.۸ فرض کنید P یک نقطه روی سطح S و ν بردار مماس واحد در P واقع بر S باشد. فرض کنید $\gamma^\theta(r)$ ژئودزیک سرعت-واحد روی S گذرا از نقطه P در لحظه $r = 0$ با بردار مماس ν باشد. فرض کنید $\gamma^\theta(r) = \sigma(r, \theta)$. می‌توان ثابت کرد $\epsilon > 0$ ای موجود است به طوری که به ازای هر θ و هر $-\epsilon < r < \epsilon$ ، σ هموار و برای $0 < r < \epsilon$ و θ ‌های واقع در بازه به طول کمتر یا مساوی 2π یک قطعه سطح هموار مجاز برای S است. که آن را قطعه قطبی ژئودزیک روی S می‌نامیم. نشان دهید

$$\int_0^R \left\| \frac{d\gamma^\theta}{dr} \right\|^2 dr = R$$

اگر $\epsilon < R < \infty$. با مشتق‌گیری از دو طرف نسبت به θ ، ثابت کنید

$$\sigma_r \cdot \sigma_\theta = 0$$



این به لم گوس^۲ معروف است، از نظر هندسی خم پارامتری $r = R$ که دایره ژئودزیکی با مرکز P و شعاع R نامیده می‌شود به هر یک از شعاع‌ها یعنی بر ژئودزیک‌های گذرا از P عمود است.

نشان دهید اولین فرم اساسی σ به صورت

$$dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2$$

است که در آن $G(r, \theta)$ تابعی هموار می‌باشد.

در بخش ۴.۸، به مشکلات یافتن کوتاهترین مسیر بین دو نقطهٔ واقع بر سطح اشاره کردیم. حال به مشکل مشابه، در بعد بالاتر می‌پردازیم و آن پیدا کردن سطحی با مساحت مینیمال با خم مرزی ثابت است که به مسئله پلاتو^۱ معروف است، جواب مسئله پلاتو سطوحی که همه جا دارای انحنای میانگین صفر هستند بر می‌گردد. این سطوح که سطوح مینیمال نیز نامیده می‌شوند در اواسط قرن ۱۸ به وسیله اویلر و لاگرانژ^۲ مورد مطالعه قرار گرفتند. اما مثال‌های جدیدی از سطوح مینیمال اخیراً کشف شده است.

۱.۹ مسئله پلاتو

در بخش ۴.۸، برای مینیم کردن فاصله بین دو نقطه از خم، با نشان دادن خم در یک خانواده از خم‌های گذرا از همان دو نقطه و مطالعه این که چگونه طول خم وقتی خم در سراسر این خانواده تغییر می‌کند، تغییر خواهد کرد شرطی روی خم واقع بر سطح ارائه دادیم. حال می‌خواهیم بر این اساس یک خانواده از قطعه سطح‌های $\mathbb{R}^3 \rightarrow U : \sigma^\tau$ که در آن U زیر مجموعه باز \mathbb{R}^2 مستقل از τ و τ در بازه‌ای مانند $(-\delta, \delta)$ ، $\delta > 0$ ، قرار دارد را مطالعه کنیم. فرض کنید $\sigma = \sigma^\circ$ ، لازم است خانواده هموار باشد به این مفهوم که نگاشت

$$(u, v, \tau) \mapsto \sigma^\tau(u, v)$$

از زیر مجموعه باز $\{(u, v, \tau) \mid (u, v) \in U, \tau \in (-\delta, \delta)\}$ واقع در \mathbb{R}^3 به \mathbb{R}^3 هموار باشد. تغییر سطح خانواده، تابعی به صورت $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه

$$\varphi = \sigma^\tau \Big|_{\tau=0}$$

1) Plateau's problem 2) Lagrange

است.

در اینجا و در همه جای این بخش $\frac{d}{d\tau}$ را با نقطه نمایش می‌دهیم.
فرض کنید π یک خم بسته ساده باشد که همراه با $\text{int}(\pi)$ در U واقع است، (به بخش ۱.۳ مراجعه کنید). در این صورت π به خم بسته ساده $\gamma^T = \sigma^T \circ \pi$ در قطعه سطح σ^T متناظر می‌شود. تابع مساحت $A(\tau)$ را بخشی از مساحت σ^T واقع در γ^T تعریف می‌کنیم:

$$A(\tau) = \iint_{\text{int}(\pi)} dA\sigma^T$$

توجه کنید که اگر خانواده‌ای از سطوح با خم مرزی ثابت γ مورد نظر باشند، در این صورت $\gamma^T = \gamma$ برای هر τ و در نتیجه $\varphi^T(u, v) = 0$ وقتی (u, v) نقطه‌ای روی خم π است.

قضیه ۱.۹

با علامت بالا، فرض کنید که تغییر سطح φ^T در طول خم مرزی π صفر باشد. در این صورت

$$\dot{A}(0) = -2 \iint_{\text{int}(\pi)} H(EG - F^2)^{1/2} \alpha \, du \, dv \quad (1)$$

که در آن H انحنا میانگین σ ، F ، E و G ضرایب اولین فرم اساسی، $\alpha = \varphi \cdot N$ و N بردار قائم واحد استاندارد σ است.

اثبات این قضیه را به انتهای این بخش موکول می‌کنیم.

اگر σ دارای کمترین مساحت در بین همه سطوح با خم مرزی داده شده γ باشد. در این صورت A باید در $\tau = 0$ دارای مینیمم مطلق باشد. بنابراین برای همه سطوح هموار در خانواده بالا، $\dot{A}(0) = 0$. این بدان معنا است که انتگرال (۱) به ازای همه توابع هموار $\alpha : U \rightarrow \mathbf{R}$ باید صفر شود. مانند اثبات قضیه ۲.۸، این فقط وقتی اتفاق می‌افتد که α در انتگرال بالا صفر شود به عبارت دیگر اگر فقط $H = 0$. بر این اساس تعریف زیر، ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۹

یک سطح مینیمال سطحی است که انحنا میانگین آن همه جا صفر باشد.

بنابراین از قضیه ۱.۹ و بحث اخیر داریم

نتیجه ۱.۹

اگر سطح S دارای مساحت مینیمم در بین همه سطوح با خم مرزی یکسان باشد، آنگاه S یک سطح مینیمال است.

سطوح مینیمال، وقتی شکل‌ها برگرفته از لایه‌های کفی باشند دارای تعبیر فیزیکی جالبی هستند یک لایه کفی به خاطر کشش سطحی دارای انرژی است و این انرژی با مساحت آن متناسب است. بنابراین یک لایه کفی که به یک سیم به شکل خم C محدود می‌شود، باید سطحی با مرز C و حداقل مساحت باشد. طبق نتیجه ۱.۹، این یک سطح مینیمال است.

به طور کلی اگر لایه کفی، دو ناحیه با فشار مختلف را از هم جدا کند، آنگاه سطحی با انحنای میانگین ثابت خواهد بود. برای مثال در حباب صابون که فشار هوای درون حباب بیشتر از فشار بیرونی آن است این حالت وجود دارد. برای دیدن این مطلب از اصل 'کار مجازی' استفاده می‌کنیم که می‌گوید اگر یک لایه کفی در حالت تعادل باشد و یک تغییر (مجازی) در سطح داشته باشیم، تغییر در انرژی لایه باید به اندازه کار انجام شده به وسیله لایه در برابر فشار هوا باشد. اگر p اختلاف فشار باشد، نیروی اعمال شده به وسیله هوا روی یک قطعه سطح کوچک با مساحت ΔA ، $p\Delta A$ است بنابراین کار انجام شده وقتی حرکت به اندازه فاصله کوچک α عمود بر خودش باشد برابر است با $\alpha p\Delta A$. از طرف دیگر فرمول قضیه ۱.۹ نشان می‌دهد که تغییر در مساحت سطح متناسب با $\alpha H\Delta A$ است (توجه کنید که α مؤلفه تغییرات عمودی φ بر سطح است). بنابراین p متناسب با H است. چون اختلاف فشار باید در سراسر سطح یکسان باشد پس انحنای میانگین H نیز باید این طور باشد. سطوح با انحنای میانگین ثابت و غیر صفر در بخش ۴.۷ بررسی شده‌اند.

اکنون مثالی از سطح مینیمال ارائه می‌دهیم، بقیه مثال‌ها در بخش بعدی ارائه می‌شود. این مثال نشان می‌دهد که عکس نتیجه ۱.۹ درست نیست.

مثال ۱.۹

یک زنجیروار سطحی است که از دوران خم $x = \frac{1}{a} \cosh az$ واقع در صفحه xz ، حول محور z ها حاصل می‌شود که در آن a ثابت و غیر صفر است (تصویر زنجیروار در مثال ۲.۹ ارائه شده است). برای سهولت، فرض کنیم $a = 1$. زنجیروار را می‌توان به صورت

$$\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

پرمایش کرد. در این صورت

$$\sigma_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1), \quad \sigma_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

$$\sigma_u \times \sigma_v = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u \cosh u)$$

$$\mathbf{N} = (-\operatorname{sech} u \cos v, -\operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$$

$$\sigma_{uu} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0)$$

$$\sigma_{uv} = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0)$$

$$\sigma_{vv} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)$$

لذا ضرایب اولین و دومین فرم اساسی σ به صورت

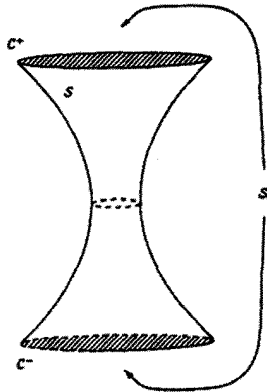
$$E = G = \cosh^2 u, \quad F = 0, \quad L = -1, \quad M = 0, \quad N = 1$$

است.

سه معادله اول نشان می‌دهد که پرمایش خم σ همدیس است و از گزاره ۱.۷(ii) داریم

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = 0$$

که نشان می‌دهد زنجیروار یک سطح مینیمال است.



$a > 0$ را ثابت نگه دارید. فرض کنید $b = \cosh a$. سطح S مشتمل بر بخشی از

زنجیروار با $|z| < a$ دارای مرزی متشکل از دو دایره C^\pm به شعاع b در صفحه‌های $z = \pm a$

با مرکزی روی محور z خواهد بود. البته سطح دیگری که به همین دو دایره محدود می‌شود،

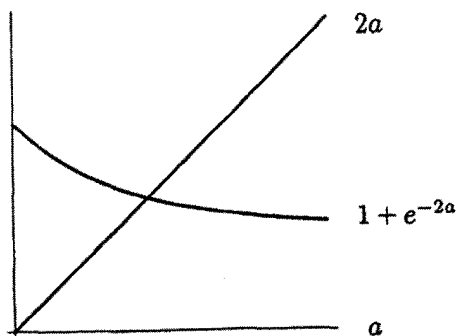
سطح S مشتمل بر دو قرص $x^2 + y^2 \leq b^2$ در صفحه‌های $z = \pm a$ است. بر اساس گزاره

۲.۵ مساحت S مساوی

$$\int_0^{2\pi} \int_{-a}^a (EG - F^2)^{1/2} du dv = \int_0^{2\pi} \int_{-a}^a \cosh^2 u du dv = 2\pi(a + \sinh a \cosh a)$$

خواهد بود. مساحت S نیز $2\pi b^2 = 2\pi \cosh^2 a$ است. بنابراین سطح مینیمال S ، در بین همه سطوح با مرز متشکل از دواير C^\pm مینیمال نخواهد بود اگر $\cosh^2 a < a + \sinh a \cosh a$ یعنی اگر

$$1 + e^{-2a} < 2a \quad (2)$$



نمودارهای $1 + e^{-2a}$ و $2a$ ، به عنوان تابعی از a ، همدیگر را دقیقاً در یک نقطه مثلاً $a = a_0$ قطع می‌کنند و نامعادله (۲)، اگر $a > a_0$ ، نتیجه می‌شود. اگر این شرط تأمین شود، زنجیروار مساحت مینیمم ندارد.

ثابت می‌شود اگر $a < a_0$ ، زنجیروار در بین همه سطوحی که به دایره‌های C^+ و C^- محدود می‌شوند حداقل مساحت را دارد.

اکنون زمان اثبات قضیه ۱.۹ است.

اثبات ۱.۹

فرض کنید $\varphi^\tau = \sigma^\tau$ چنان باشد که $\varphi = \varphi^\circ$. فرض کنید N^τ بردار قائم واحد استاندارد σ^τ باشد. توابع هموار α^τ ، β^τ و γ^τ از (u, v, τ) موجودند به طوری که

$$\varphi^\tau = \alpha^\tau N^\tau + \beta^\tau \sigma_u^\tau + \gamma^\tau \sigma_v^\tau$$

بنابراین $\alpha = \alpha^\circ$. برای ساده کردن علائم، بالانویس τ را در بقیه اثبات حذف می‌کنیم؛ در انتهای اثبات قرار می‌دهیم $\tau = \circ$.

داریم

$$A(\tau) = \iint_{\text{int}(\pi)} \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv = \iint_{\text{int}(\pi)} N \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) dudv$$

بنابراین

$$\dot{A} = \iint_{\text{int}(\pi)} \frac{\partial}{\partial \tau} (N \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)) dudv \quad (3)$$

حال

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (N \cdot \sigma_u \times \sigma_v) = N \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) + N \cdot (\dot{\sigma}_u \times \sigma_v) + N \cdot (\sigma_u \times \dot{\sigma}_v) \quad (۴)$$

چون N بردار واحد است، لذا

$$\dot{N} \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) = \dot{N} \cdot N \|\sigma_u \times \sigma_v\| = 0$$

از طرف دیگر با استفاده از گزاره ۲.۵

$$\begin{aligned} N \cdot (\dot{\sigma}_u \times \sigma_v) &= \frac{(\sigma_u \times \sigma_v) \cdot (\dot{\sigma}_u \times \sigma_v)}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \\ &= \frac{(\sigma_u \cdot \dot{\sigma}_u)(\sigma_v \cdot \sigma_v) - (\sigma_u \cdot \sigma_v)(\sigma_v \cdot \dot{\sigma}_u)}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \\ &= \frac{G(\sigma_u \cdot \dot{\sigma}_u) - F(\sigma_v \cdot \dot{\sigma}_u)}{(EG - F^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

به طور مشابه،

$$N \cdot (\sigma_u \times \dot{\sigma}_v) = \frac{E(\sigma_v \cdot \dot{\sigma}_v) - F(\sigma_u \cdot \dot{\sigma}_v)}{(EG - F^2)^{1/2}}$$

این نتایج را در معادله (۴) جایگزین می‌کنیم، داریم

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (N \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)) = \frac{E(\sigma_v \cdot \dot{\sigma}_v) - F(\dot{\sigma}_u \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \dot{\sigma}_v) + G(\sigma_u \cdot \dot{\sigma}_u)}{(EG - F^2)^{1/2}} \quad (۵)$$

حال

$$\dot{\sigma}_u = \varphi_u = \alpha_u N + \beta_u \sigma_u + \gamma_u \sigma_v + \alpha N_u + \beta \sigma_{uu} + \gamma \sigma_{uv}$$

$$\therefore \sigma_u \cdot \dot{\sigma}_u = E\beta_u + F\gamma_u + (\sigma_u \cdot N_u)\alpha + (\sigma_u \cdot \sigma_{uu})\beta + (\sigma_u \cdot \sigma_{uv})\gamma$$

$$\text{چون } \sigma_u \cdot \sigma_{uv} = \frac{1}{\gamma} E_v \text{ و } \sigma_u \cdot \sigma_{uu} = \frac{1}{\gamma} E_u, \sigma_u \cdot N = -\sigma_{uu} \cdot N = -L \text{ داریم}$$

$$\sigma_u \cdot \dot{\sigma}_u = E\beta_u + F\gamma_u - L\alpha + \frac{1}{\gamma} E_u \beta + \frac{1}{\gamma} E_v \gamma$$

مشابهاً

$$\sigma_v \cdot \dot{\sigma}_u = F\beta_u + G\gamma_u - M\alpha + (F_u - \frac{1}{\gamma} E_v)\beta + \frac{1}{\gamma} G_u \gamma$$

$$\sigma_u \cdot \dot{\sigma}_v = E\beta_v + F\gamma_v - M\alpha + \frac{1}{\gamma} E_v \beta + (F_v - \frac{1}{\gamma} G_u)\gamma$$

$$\sigma_v \cdot \dot{\sigma}_v = F\beta_v + G\gamma_v - N\alpha + \frac{1}{\gamma} G_u \beta + \frac{1}{\gamma} G_v \gamma$$

چهار معادله اخیر را در سمت راست معادله (۵) جایگزین می‌کنیم، با ساده کردن و به‌کاربردن فرمول H در گزاره ۱.۷(ii)، داریم

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{N} \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)) = \left(\beta (EG - F^2)^{1/2} \right)_u + \left(\gamma (EG - F^2)^{1/2} \right)_v \quad (6)$$

$$- 2\alpha H (EG - F^2)^{1/2}$$

با مقایسه معادله (۳)، و نوشتن بالانویس‌ها می‌بینیم که باید ثابت کنیم

$$\iint_{\text{int}(\pi)} \left\{ \left(\beta (EG - F^2)^{1/2} \right)_u + \left(\gamma (EG - F^2)^{1/2} \right)_v \right\} dudv = 0 \quad (7)$$

اما با استفاده از قضیه گرین (بخش ۱.۳ را ببینید)، این انتگرال برابر است با

$$\int_{\pi} (EG - F^2)^{1/2} (\beta^\circ dv - \gamma^\circ du)$$

که به وضوح برابر صفر است زیرا در طول خم مرزی π ، $\beta^\circ = \gamma^\circ = 0$ و این اثبات قضیه ۱.۹ را کامل می‌کند. \square

توجه کنید از مفروضات قضیه ۱.۹ به‌طور کامل استفاده نکرده‌ایم چون از آنها نتیجه می‌شود که $\alpha^\circ (= \alpha)$ در طول خم مرزی صفر است که در اثبات استفاده نشده است. لذا معادله (۸) برقرار است اگر تغییر سطح φ در طول خم مرزی، بر سطح عمود باشد.

به‌علاوه توجه کنید که قضیه ۱.۹ به‌طور شهودی برای تغییرات φ که با سطح موازیند، بدیهی است، مثلاً آنهایی که برایشان همه جا روی سطح $\alpha = 0$ ، چون چنین تغییر موازی باعث می‌شود که سطح در طول خودش لیز بخورد و شکل آن خصوصاً مساحت سطح عوض نشود. بنابراین نکته اصلی این است که قضیه ۱.۹ را برای تغییرات قائم ثابت کنیم مثلاً آنهایی که همه جا روی سطح $\beta = \gamma = 0$ ، برقراری این محدودیت، اثبات بالا را به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند.

تمرین‌ها

۱.۹ نشان دهید هر حرکت صلب در \mathbf{R}^3 ، یک سطح مینیمال را به سطح مینیمال دیگری می‌برد و هر انبساط $(x, y, z) \mapsto \alpha(x, y, z)$ که در آن α ثابت و مخالف صفر است نیز این چنین است.

۲.۹ نشان دهید $z = f(x, y)$ که در آن f یک تابع هموار دو متغیره است، یک سطح مینیمال است اگر و فقط اگر

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0$$

۳.۹ نشان دهید هر نقطه نافی روی یک سطح مینیمال یک نقطه مسطح است (گزاره ۳.۶ را ببینید).

۴.۹ نشان دهید انحنای گوسی یک سطح مینیمال در هر نقطه کوچکتر یا مساوی صفر است، و برابر صفر است اگر و فقط اگر سطح قسمتی از یک صفحه باشد. (گزاره ۵.۶ را به کار بگیرید.) نتیجه دقیقتری را در نتیجه ۲.۹ به دست خواهیم آورد.

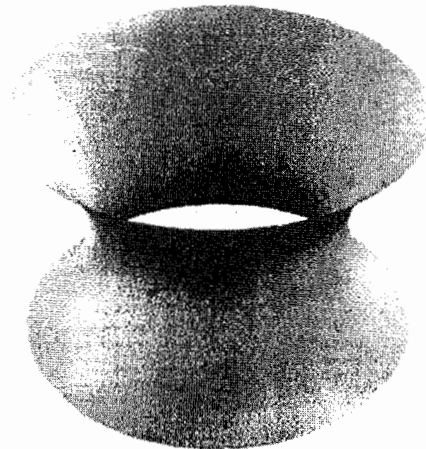
۵.۹ نشان دهید سطح مینیمال فشرده وجود ندارد. (گزاره ۶.۷ و تمرین ۴.۹ را به کار بگیرید.)

۲.۹ مثال‌هایی از سطوح مینیمال

ساده‌ترین سطح مینیمال، صفحه است، که در آن هر دو انحنای اصلی در هر نقطه برابر صفر است. به جز صفحه، اولین سطوح مینیمالی که شناخته شدند آنهایی هستند که در دو مثال زیر آورده شده است.

مثال ۲.۹

یک زنجیروار از دوران خم $x = \frac{1}{a} \cosh az$ در صفحه xz حول محور z ها به دست می‌آید، که در آن $a > 0$ و ثابت است. در مثال ۱.۹ نشان دادیم که این سطح مینیمال است (ما فقط با حالت $a = 1$ کار می‌کنیم، اما حالت کلی با استفاده از تمرین ۱.۹ نتیجه می‌شود).



زنجیروار یک سطح دورانی است. در حقیقت، به جز صفحه این تنها سطح مینیمال دورانی

است:

گزاره ۱.۹

هر سطح مینیمال دورانی یا قسمتی از صفحه است و یا از به‌کار بردن یک حرکت صلب برای قسمتی از یک زنجیروار، به‌دست می‌آید.

اثبات ۱.۹

با به‌کار بردن یک حرکت صلب، می‌توان تصور نمود که محور سطح S محور z ها و خم برش قائم در صفحه xz قرار دارد. S را به‌طریق معمول پرمایش می‌کنیم (مثال ۲.۶ را ببینید)

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

که در آن خم برش قائم $(f(u), 0, g(u)) \mapsto u$ سرعت‌واحد و $f > 0$ فرض شده است. از مثال ۲.۶، اولین و دومین فرم اساسی به‌ترتیب عبارتند از

$$du^2 + f(u)^2 dv^2 \quad \text{و} \quad (f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g})du^2 + f\dot{g}dv^2$$

نقطه نمایش $\frac{d}{du}$ است. بر اساس گزاره ۱.۷(ii)، انحنای میانگین عبارتست از

$$H = \frac{1}{2} \left(f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g} + \frac{\dot{g}}{f} \right)$$

اکنون فرض می‌کنیم برای $u = u_0$ داریم $\dot{g}(u_0) \neq 0$. در این صورت برای u در بازه بازی شامل u_0 خواهیم داشت $\dot{g}(u) \neq 0$. فرض کنید بزرگترین چنین بازه‌هایی (α, β) باشد، برای $u \in (\alpha, \beta)$ از شرط سرعت‌واحد $f^2 + \dot{g}^2 = 1$ نتیجه می‌شود (مانند مثال ۲.۷)

$$f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g} = -\frac{\dot{f}}{\dot{g}}$$

بنابراین

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{g}}{f} - \frac{\dot{f}}{\dot{g}} \right)$$

به دلیل $\dot{g}^2 = 1 - f^2$ اگر و فقط اگر

$$f\dot{f} = 1 - f^2 \quad (A)$$

برای حل معادله دیفرانسیل (A)، قرار دهید $h = \dot{f}$ و توجه کنید که

$$\dot{f} = \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{df} \frac{df}{dt} = h \frac{dh}{df}$$

در این صورت معادله (۸) به

$$fh \frac{dh}{df} = 1 - h^2$$

تبدیل می‌شود. توجه کنید که، چون $\dot{g} \neq 0$ ، داریم $h^2 \neq 1$ ، لذا می‌توان از طرفین این معادله انتگرال گرفت.

$$\begin{aligned} \int \frac{hdh}{1-h^2} &= \int \frac{df}{f} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} &= af \\ \therefore h &= \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af} \end{aligned}$$

که در آن a ثابت غیر صفر است. (\pm) را حذف کرده‌ایم، اما علامت با جایگزینی u با $-u$ اگر لازم باشد تغییر می‌کند). قرار دهید $h = \frac{df}{du}$ و مجدداً انتگرال بگیرید.

$$\begin{aligned} \int \frac{afdf}{\sqrt{a^2 f^2 - 1}} &= \int du \\ \therefore f &= \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2(u+b)^2} \end{aligned}$$

که در آن b یک ثابت است. با تغییر پارامتر $u \mapsto u + b$ ، می‌توان فرض نمود که $b = 0$ ، لذا

$$f = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 u^2}$$

برای محاسبه g ، داریم

$$\dot{g}^2 = 1 - f^2 = 1 - h^2 = \frac{1}{a^2 f^2}$$

$$\therefore \frac{dg}{du} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 u^2}}$$

$$\therefore g = \pm \frac{1}{a} \sinh^{-1}(au) + c \quad (\text{که در آن } c \text{ است})$$

$$\therefore au = \pm \sinh(a(g - c))$$

$$\therefore f = \frac{1}{a} \cosh(a(g - c))$$

بنابراین خم برش قائم S برابر است

$$x = \frac{1}{a} \cosh(a(z - c))$$

با یک انتقال در طول محور z ها، می‌توان فرض نمود $c = 0$ ، که در این صورت یک زنجیروار داریم.

اما هنوز کار به اتمام نرسیده است، تا به حال، فقط نشان داده‌ایم که قسمتی از S متناظر به $u \in (\alpha, \beta)$ قسمتی از زنجیروار است، زیرا در اثبات به طور اساسی از شرط $\dot{u} \neq 0$ استفاده کرده‌ایم. به همین علت در اثبات، این امکان که S یک صفحه باشد حذف شده است. برای تکمیل اثبات، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $\beta < \infty$. در این صورت اگر خم برش قائم برای مقادیر $\beta \geq u$ تعریف شده باشد، باید داشته باشیم $\dot{u}(\beta) = 0$ ، در غیر این صورت \dot{u} روی بازه باز شامل β غیر صفر است که با فرض اینکه (α, β) بزرگترین بازه شامل u است که در آن $\dot{u} \neq 0$ متناقض می‌باشد. اما فرمول‌های بالا نشان می‌دهد که

$$\dot{u}^2 = \frac{1}{1 + a^2 u^2}, \quad u \in (\alpha, \beta)$$

چون \dot{u} یک تابع پیوسته از u است، لذا $\dot{u}(\beta) = \pm(1 + a^2 \beta^2)^{-1/2} \neq 0$. این تناقض نشان می‌دهد که خم برش قائم برای مقادیر $\beta \geq u$ تعریف نشده است، همچنین است در حالت $\beta = \infty$. بحث مشابه برای α ، نشان می‌دهد که (α, β) تمام فاصله‌ای است که خم برش قائم روی آن تعریف می‌شود. بنابراین تمام S قسمتی از زنجیروار است.

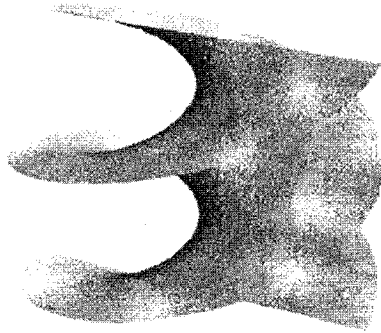
تنها حالتی که باقی می‌ماند آن است که $\dot{u}(u) = 0$ برای هر u که خم برش قائم در آن تعریف شده است. اما در این صورت نیز $g(u)$ برابر مقدار ثابت d است و S قسمتی از صفحه $z = d$ است. \square

مثال ۳.۹

ماریچ نما یک سطح خط‌دار است که از دوران خط مستقیمی که با سرعت ثابت حول محور عمود بر آن دوران می‌کند و همزمان با سرعت ثابتی در طول محور حرکت می‌نماید، حاصل می‌شود. فرض می‌کنیم محور، محور z ها، w سرعت زاویه‌ی خط دوران و α سرعت آن در امتداد z ها باشد. اگر در زمان شروع، خط در امتداد محور x ها باشد، در زمان v مرکز خط در $(\alpha v, 0, 0)$ بوده و با زاویه wv دوران می‌کند. بنابراین، نقطه $(u, 0, 0)$ روی خط شروع، اکنون در نقطه‌ای با وضعیت برداری

$$\sigma(u, v) = (u \cos wv, u \sin wv, \alpha v)$$

است. مینیمال بودن این سطح را در تمرین ۶.۹ بررسی می‌کنیم.



نظیر گزاره ۱.۹ را در زیر می‌آوریم.

گزاره ۲.۹

هر سطح منیمال خط دار قسمتی از یک صفحه یا قسمتی از یک مارپیچ نما است.

اثبات ۲.۹

پرمایش معمولی

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

را در نظر می‌گیریم. (مثال ۱۲.۴ را ببینید)، که در آن γ خمی است که هر مولد را قطع می‌کند و $\delta(u)$ برداری موازی مولد روی $\gamma(u)$ است. اثبات را با ایجاد تسهیلاتی روی پرمایش شروع می‌کنیم.

ابتدا، می‌توان فرض نمود که برای هر مقدار u ، $\|\delta(u)\| = 1$. به علاوه فرض می‌کنیم δ هرگز صفر نیست که در آن نقطه نشان دهنده $\frac{d}{du}$ است. (این که اگر به ازای بعضی از u ها، $\delta(u) = 0$ ، آنگاه چه اتفاقی می‌افتد را بعداً بررسی می‌کنیم.) همچنین می‌توان فرض نمود δ خم سرعت-واحد است. (فرض نمی‌کنیم γ سرعت-واحد باشد) این مفروضات نتیجه می‌دهد که $\delta \cdot \delta = \delta' \cdot \delta = 0$. اکنون خم

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(u) - (\dot{\gamma} \cdot \delta)\delta(u)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر $\tilde{v} = v + \dot{\gamma} \cdot \delta$ ، سطح را می‌توان با استفاده از $\tilde{\gamma}$ و پارامترهای u و \tilde{v} بازپرمایش کرد، مثلاً به صورت

$$\sigma(u, \tilde{v}) = \tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}\delta(u)$$

اکنون داریم

$$\dot{\gamma} \cdot \delta = \left(\dot{\gamma} - \frac{d}{du}(\dot{\gamma} \cdot \delta) \delta - (\dot{\gamma} \cdot \delta) \delta \right) \cdot \delta = 0$$

زیرا $\delta \cdot \delta = 1$ و $\delta \cdot \dot{\delta} = 0$ این بدان معنا است که می‌توان از ابتدا فرض نمود $\dot{\gamma} \cdot \delta = 0$ که ما از این به بعد این فرض را در نظر می‌گیریم.
داریم

$$\sigma_u = \dot{\gamma} + v\dot{\delta}, \quad \sigma_v = \delta$$

$$E = \|\dot{\gamma} + v\dot{\delta}\|^2, \quad F = (\dot{\gamma} + v\dot{\delta}) \cdot \delta = \dot{\gamma} \cdot \delta, \quad G = 1$$

قرار دهید $A = (EG - F^2)^{1/2}$. آنگاه

$$N = A^{-1}(\dot{\gamma} + v\dot{\delta}) \times \delta$$

سپس داریم

$$\sigma_{uu} = \ddot{\gamma} + v\ddot{\delta}, \quad \sigma_{uv} = \dot{\delta}, \quad \sigma_{vv} = 0$$

$$\therefore L = A^{-1}(\ddot{\gamma} + v\ddot{\delta}) \cdot ((\dot{\gamma} + v\dot{\delta}) \times \delta)$$

$$M = A^{-1}\dot{\delta} \cdot ((\dot{\gamma} + v\dot{\delta}) \times \delta) = A^{-1}\dot{\delta} \cdot (\dot{\gamma} \times \delta)$$

$$N = 0$$

بنابراین از شرط سطح مینیمال

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2A^3} = 0$$

داریم

$$(\ddot{\gamma} + v\ddot{\delta}) \cdot ((\dot{\gamma} + v\dot{\delta}) \times \delta) = 2(\delta \cdot \dot{\gamma})(\dot{\delta} \cdot (\dot{\gamma} \times \delta))$$

این معادله برای تمام مقادیر (u, v) برقرار است. با برابر قرار دادن ضرایب توان‌های v نتیجه می‌گیریم

$$\ddot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} \times \delta) = 2(\delta \cdot \dot{\gamma})(\dot{\delta} \cdot (\dot{\gamma} \times \delta)) \quad (9)$$

$$\ddot{\gamma} \cdot (\delta \times \delta) + \dot{\delta} \cdot (\dot{\gamma} \times \delta) = 0 \quad (10)$$

$$\dot{\delta} \cdot (\dot{\delta} \times \delta) = 0 \quad (11)$$

معادله (۱۱) نشان می‌دهد که δ ، $\dot{\delta}$ و $\ddot{\delta}$ وابسته خطی‌اند. چون δ و $\dot{\delta}$ بردارهای واحد متعامدند، توابع هموار $\alpha(u)$ و $\beta(u)$ وجود دارند که

$$\ddot{\delta} = \alpha\delta + \beta\dot{\delta}$$

اما، چون δ سرعت-واحد است، $\dot{\delta} \cdot \dot{\delta} = 0$. همچنین، با مشتق‌گیری از $\delta \cdot \dot{\delta} = 0$ نتیجه می‌شود. $\delta \cdot \ddot{\delta} = -\dot{\delta} \cdot \dot{\delta} = -1$ لذا $\alpha = -1$ و $\beta = 0$ ، بنابراین

$$\ddot{\delta} = -\delta \quad (12)$$

معادله (۱۲) نشان می‌دهد که انحنای خم δ برابر ۱ و قائم اصلی آن $-\delta$ است. در نتیجه قائم دوم آن $(-\delta) \times \dot{\delta}$ است، و چون

$$\frac{d}{du}(\dot{\delta} \times \delta) = \ddot{\delta} \times \delta + \dot{\delta} \times \dot{\delta} = -\delta \times \delta = 0$$

نتیجه می‌گیریم تاب δ صفر است. بنابراین δ پرمایش دایره شعاع ۱ است (گزاره ۵.۱ را ببینید). با به‌کارگیری یک حرکت صلب، فرض می‌کنیم δ دایره‌ای با شعاع ۱ و مرکز مبدا در صفحه xy است. بنابراین

$$\delta(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

از معادله (۱۲) به‌دست می‌آوریم $-\delta \cdot (\dot{\gamma} \times \delta) = \delta \cdot (\dot{\gamma} \times \delta) = 0$ ، لذا بنا بر معادله (۱۰)

$$\dot{\gamma} \cdot (\delta \times \delta) = 0$$

که نتیجه می‌دهد $\dot{\gamma}$ موازی صفحه xy است، بنابراین

$$\gamma(u) = (f(u), g(u), au + b)$$

که در آن f و g توابع هموار و a و b ثابت هستند. اگر $a = 0$ سطح قسمتی از صفحه $z = b$ است. در این صورت از معادله (۹) داریم

$$\ddot{g} \cos u - \ddot{f} \sin u = 2(f \cos u + \dot{g} \sin u) \quad (13)$$

و نهایتاً با استفاده از شرط $\dot{\gamma} \cdot \delta = 0$ داریم

$$f \sin u = \dot{g} \cos u \quad (14)$$

با مشتق گیری خواهیم داشت

$$\dot{f} \sin u + f \cos u = \dot{g} \cos u - \dot{g} \sin u \quad (15)$$

از معادلات (۱۳) و (۱۵) داریم

$$\dot{f} \cos u + \dot{g} \sin u = 0$$

و با به کارگیری معادله (۱۴) داریم $\dot{f} = \dot{g} = 0$. بنابراین f و g ثابت هستند. با یک انتقال، می توان فرض نمود ثابت های f, g و b برابر صفرند. بنابراین

$$\gamma(u) = (0, 0, au)$$

و

$$\sigma(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$$

که یک ماریچ نما است.

در ابتدا فرض نمودیم که δ هرگز صفر نمی شود. اگر δ همواره صفر باشد، آنگاه δ یک بردار ثابت و سطح یک استوانه تعمیم یافته است. اما استوانه تعمیم یافته یک سطح مینیمال است فقط اگر قسمتی از صفحه باشد (تمرین ۸.۹). با بحث نظیر انتهای اثبات گزاره ۱.۹، که نشان می دهد تمام سطح یا قسمتی از صفحه و یا قسمتی از ماریچ نما است، اثبات کامل می شود. \square

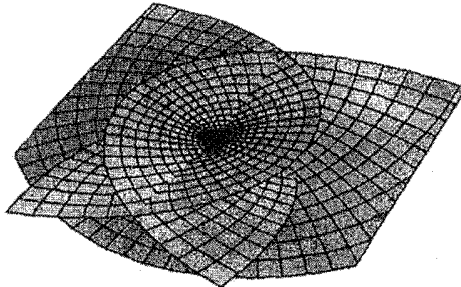
سطوح مینیمال بعدی که بعد از زنجیروار و ماریچ نما، کشف شد دو مورد زیر بودند.

مثال ۴.۹

سطح مینیمال انیپر^۳ به صورت

$$\sigma(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

است که در تمرین ۱۵.۷ مینیمال بودن آن نشان داده شد.



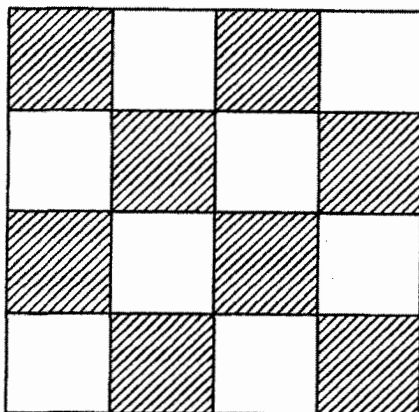
اگر دقیق بحث کنیم، این سطح یک قطعه سطح به مفهومی که در این کتاب به کار رفته است نیست چون یک به یک نیست. خود متقاطع بودن به وضوح در شکل بالا دیده می شود. البته، اگر (u, v) را روی مجموعه های باز به اندازه کافی کوچک محدود کنیم، σ بنابر قضیه تابع معکوس یک به یک است.

مثال ۵.۹

سطح مینیمال شرک^۴ سطحی با معادله دکارتی

$$z = \ln \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right)$$

است. در مثال ۱۶.۷ نشان داده شد که این سطح مینیمال است. توجه کنید سطح فقط وقتی وجود دارد که $\cos x$ و $\cos y$ هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند، به زبان دیگر در داخل مربع های سفید در صفحه شطرنجی زیر قرار بگیرند که در آن مربع ها دارای رئوسی در نقاط $(\pi/2 + m\pi, \pi/2 + n\pi)$ ، m و n اعداد صحیح، بوده و هیچکدام از دو مربع با یال مشترک، دارای رنگ یکسان نیستند و مربعی که شامل مبدا است سفید است.

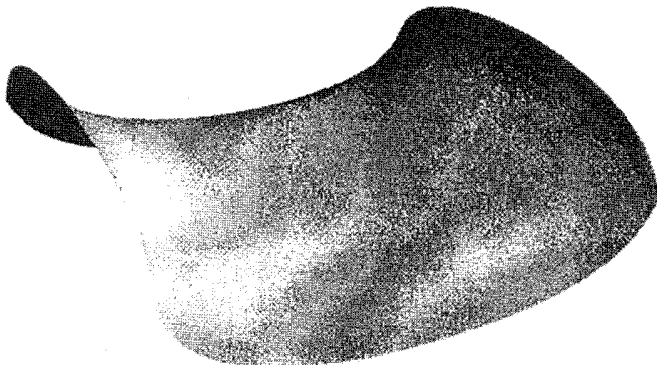


مراکز مربع های سفید به شکل $(m\pi, n\pi)$ است، که در آن m و n اعداد صحیح و $m + n$ زوج است. چون برای چنین m و n ای

$$\frac{\cos(y + n\pi)}{\cos(x + m\pi)} = \frac{\cos y}{\cos x}$$

4) Scherk's minimal surface

و از این نتیجه می‌شود که قسمتی از سطح که روی مربع با مرکز $(m\pi, n\pi)$ واقع است از قسمت واقع روی مربع با مرکز $(0, 0)$ به وسیله انتقال $(x, y, z) \mapsto (x + m\pi, y + n\pi, z)$ به دست می‌آید پس کافی است قسمتی از سطح که فقط روی یک مربع واقع است را توضیح دهیم:



تمرین‌ها

۶.۹ نشان دهید ماریچج نما یک سطح مینیمال است.

۷.۹ نشان دهید سطوح $z = c$ در تغییر شکل ایزومتریک ماریچج نما به زنجیروار که در تمرین ۸.۵ ارائه شده، سطوح مینیمال هستند.

۸.۹ نشان دهید استوانه تعمیم‌یافته یک سطح مینیمال است فقط اگر استوانه بخشی از صفحه باشد.

۹.۹ یک سطح انتقالی، سطحی به صورت

$$z = f(x) + g(y)$$

می‌باشد که در آن f و g توابعی هموار هستند. (این سطح از انتقال خم $(u, 0, f(u))$ به موازات خودش در امتداد خم $(0, v, g(v))$ حاصل می‌شود). با استفاده از تمرین ۲.۹ نشان دهید این سطح مینیمال است اگر و فقط اگر

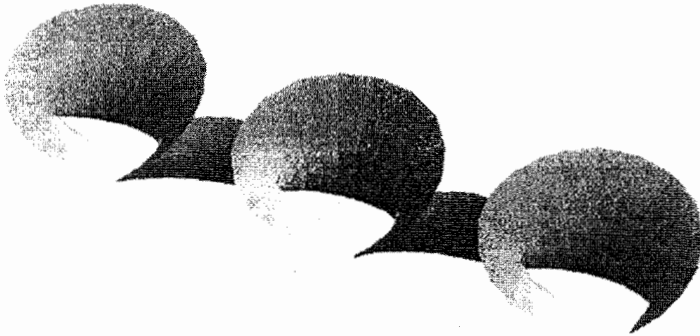
$$\frac{d^2 f/dx^2}{1 + (df/dx)^2} = \frac{d^2 g/dy^2}{1 + (dg/dy)^2}$$

نتیجه بگیرید که هر سطح انتقالی مینیمال یا بخشی از صفحه است یا می‌تواند به بخشی از صفحه شکر در مثال ۵.۹، توسط یک انتقال و یک انبساط $(x, y, z) \mapsto a(x, y, z)$ به ازای $a \neq 0$ منتقل شود.

۱۰.۹ ثابت کنید سطح کاتالان^۵

$$\sigma(u, v) = \left(u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, -2 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \right)$$

یک سطح مینیمال به طور همدیس پرمایش شده است (سطح کاتالان مانند سطح انیر، خود متقاطع است، بنابراین در صورتی می‌تواند سطح باشد که (u, v) به مجموعه‌های باز کوچک مناسب محدود شوند)



نشان دهید

(i) خم پارامتری با معادله $u = 0$ ، یک خط مستقیم است.

(ii) خم پارامتری $u = \pi$ ، سهمی است.

(iii) خم پارامتری $v = 0$ ، سیکلوئید است (به تمرین ۷.۱ مراجعه کنید).

همچنین نشان دهید، هر یک از این خم‌ها، تحت پرمایش مناسب، یک ژئودزیک روی سطح کاتالان هستند.

۳.۹ نگاشت گوس یک سطح مینیمال

از بخش ۳.۷ بیاد داریم که نگاشت گوس قطعه سطح $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، به هر نقطه $\sigma(u, v)$ از سطح، بردار قائم واحد استاندارد $N(u, v)$ را نسبت می‌دهد که به عنوان نقطه‌ای روی کره واحد S^2 است. طبق معادله (۱۵) در فصل ۷

$$N_u \times N_v = K \sigma_u \times \sigma_v$$

که در آن K انحنای گوسی است، لذا N عادی خواهد بود اگر K همه جا مخالف صفر باشد، و ما در بقیه این بخش بر این فرض خواهیم بود.

گزاره ۳.۹

فرض کنید $\sigma(u, v)$ یک قطعه سطح مینیمال باشد که انحنای گوسی آن همه‌جا، مخالف صفر است. در این صورت نگاشت گوس، یک نگاشت هم‌دیس از σ به بخشی از کره واحد خواهد بود.

در بیان این گزاره باید واقعاً کمی بیشتر دقت کنیم، چون از نظر ما نگاشت‌های هم‌دیس، همیشه دیفیومورفیسم هستند (به بخش ۳.۵ مراجعه کنید). حتی اگر $N_u \times N_v$ همیشه مخالف صفر باشد، نمی‌توان از آن نتیجه گرفت که نگاشت $\sigma(u, v) \rightarrow N(u, v)$ یک به یک است (به تمرین ۱۲.۹(ii) مراجعه کنید)، با وجود این، قضیه تابع معکوس می‌گوید، اگر $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ نقطه‌ای باشد که σ (و در نتیجه N) در آن تعریف شده باشد آنگاه، مجموعه باز U شامل (u_0, v_0) موجود است که σ روی آن تعریف شده و N روی آن یک به یک است. بنابراین $N : U \rightarrow S^2$ یک قطعه سطح مجاز روی کره واحد S^2 است و نگاشت گوس یک دیفیومورفیسم از $\sigma(U)$ به $N(U)$ می‌باشد.

اثبات ۳.۹

بر اساس قضیه ۲.۵، باید نشان دهیم، اولین فرم اساسی N یعنی

$$(N_u \cdot N_u)du^2 + 2(N_u \cdot N_v)dudv + (N_v \cdot N_v)dv^2$$

با اولین فرم اساسی σ متناسب است. ماتریس متقارن 2×2

$$F_{III} = \begin{pmatrix} N_u \cdot N_u & N_u \cdot N_v \\ N_u \cdot N_v & N_v \cdot N_v \end{pmatrix}$$

را تشکیل دهید به همین ترتیب ماتریس‌های متقارن F_I و F_{II} را به اولین و دومین فرم اساسی σ در بخش ۳.۶ نسبت دهید. در این صورت باید نشان دهیم به ازای اسکالر λ

$$F_{III} = \lambda F_I \quad (16)$$

طبق گزاره ۴.۶

$$N_u \cdot N_u = a^2 \sigma_u \cdot \sigma_u + 2ab \sigma_u \cdot \sigma_v + b^2 \sigma_v \cdot \sigma_v = a^2 E + 2abF + b^2 G$$

که در آن $\mathcal{W} = F_I^{-1} F_{II}$ و $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\mathcal{W}$ با محاسبه مقادیر

داریم $N_u \cdot N_v$ و $N_v \cdot N_v$ با همین روش، داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{III} &= \begin{pmatrix} a^2 E + 2abF + b^2 G & acE + (ad + bc)F + bdG \\ acE + (ad + bc)F + bdG & c^2 E + 2cdF + d^2 G \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= (-\mathcal{W})^t \mathcal{F}_I (-\mathcal{W}) \\ &= (-\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II})^t \mathcal{F}_I (-\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}) \\ &= \mathcal{F}_{II} \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_I \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \\ &= \mathcal{F}_{II} \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \end{aligned}$$

بنابراین معادله (۱۶) هم ارزش است با

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} &= \lambda I \\ \mathcal{W}^2 &= \lambda I \end{aligned}$$

اما

$$\mathcal{W}^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

از بخش ۳.۶ بیاد داریم که انحنای اصلی κ_1 و κ_2 ، مقادیر ویژه \mathcal{W} هستند. چون جمع مقادیر ویژه یک ماتریس با جمع درایه‌های روی قطر برابر است، لذا

$$\kappa_1 + \kappa_2 = -(a + d)$$

اگر σ مینیمال باشد، انحنای میانگین $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ صفر است، بنابراین $a + d = 0$ و در نتیجه

$$\mathcal{W}^2 = (a^2 + bc)I$$

□

همان چیزی که می‌خواستیم.

در تمرین ۱۴.۵ دیدیم که پرمایش همدیس یک صفحه لزوماً تحلیلی یا پاد-تحلیلی است بنابراین این گزاره، قویاً، به رابطه بین سطوح مینیمال و توابع تحلیلی اشاره دارد. این رابطه خیلی وسیع است و ما در بخش بعدی آن را معرفی خواهیم کرد.

تمرین‌ها

۱۱.۹ نشان دهید اسکالر λ در گزاره ۳.۹، $-K$ است که در آن K انحناى گوسی سطح است.

۱۲.۹ نشان دهید

(i) نگاشت گوس زنجیروار یک به یک است و تصویر آن تمام کره واحد بجز قطب‌های شمال و جنوب است.

(ii) تصویر نگاشت گوس ماریچچ‌نما و زنجیروار یکسان است با این تفاوت که تعداد نامتناهی نقطه روی ماریچچ‌نما، تحت نگاشت گوس، به نقطه داده شده ای روی تصویرش، فرستاده می‌شوند.

۴.۹ سطوح مینیمال و توابع تحلیلی

در این بخش از خواص ابتدایی ویژه توابع تحلیلی استفاده خواهیم کرد. خواننده‌ای که با آنالیز مختلط آشنا نیست می‌تواند این بخش را که نتایج آن در هیچ جای دیگر کتاب استفاده نمی‌شود حذف کند.

لازم است که قطعه سطح‌های خاصی روی سطح مینیمال بسازیم. از بخش ۳.۵ به یاد داریم که قطعه سطح $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ را همدیس می‌نامیم اگر اولین فرم اساسی آن برابر با $E(du^2 + dv^2)$ باشد که در آن E تابع هموار مثبت روی U است.

گزاره ۴.۹

هر سطح دارای اطلسی متشکل از قطعه سطح‌های همدیس است.

این نتیجه را بدون اثبات می‌پذیریم (اثبات بدیهی نیست).

فرض کنید $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه سطح همدیس باشد. در صفحه‌ای که U در آن قرار دارد مختصات مختلط را با قرار دادن

$$\zeta = u + iv$$

برای $(u, v) \in U$ اعمال کرده و تعریف می‌کنیم

$$\varphi(\zeta) = \sigma_u - i\sigma_v \quad (17)$$

بنابراین $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ سه مؤلفه دارد که هر یک تابعی با مقادیر مختلط (u, v) یعنی ζ هستند. نتیجه اساسی که به دست می‌آید رابطه بین سطوح مینیمال و توابع تحلیلی است.

گزاره ۵.۹

فرض کنید $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه سطح همدیس باشد. در این صورت σ مینیمال است اگر و فقط اگر تابع φ ، تعریف شده در معادله (۱۷) روی U تحلیلی باشد. تحلیلی بودن φ به معنی تحلیلی بودن هر یک از مؤلفه‌های φ_1 ، φ_2 و φ_3 است.

اثبات ۵.۹

فرض کنید $\varphi(u, v)$ تابع هموار با مقادیر مختلط و α و β قسمت‌های حقیقی و موهومی آن باشد، به عبارت دیگر $\varphi = \alpha + i\beta$. برقراری معادلات کشی ریمان

$$\alpha_u = \beta_v \quad \text{و} \quad \alpha_v = -\beta_u$$

شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن φ است. با به‌کارگیری این مطلب برای هر یک از مؤلفه‌های φ ، می‌بینیم که φ تحلیلی است اگر و فقط اگر

$$(\sigma_u)_u = (-\sigma_v)_v \quad \text{و} \quad (\sigma_u)_v = -(-\sigma_v)_u$$

دومین معادله هیچ شرطی روی σ ایجاد نمی‌کند ولی اولین معادله هم ارز با $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0$ است. بنابراین باید نشان دهیم σ مینیمال است اگر و فقط اگر معادله لاپلاس $\Delta\sigma = \sigma_{uu} + \sigma_{vv}$ صفر شود.

بر اساس گزاره ۲.۷(ii) و این حقیقت که σ همدیس است، انحنا میانی σ با رابطه

$$H = \frac{L + N}{2E}$$

تعیین می‌شود بنابراین σ مینیمال است اگر و فقط اگر $L + N = 0$ یعنی

$$(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \cdot N = 0 \quad (18)$$

بنابراین σ ، به‌وضوح، مینیمال است اگر $\Delta\sigma = 0$. برای عکس مطلب، باید نشان دهیم $\Delta\sigma = 0$ اگر معادله (۱۸) برقرار باشد. کافی است ثابت کنیم $\Delta\sigma \cdot \sigma_u = \Delta\sigma \cdot \sigma_v = 0$ چون $\{\sigma_u, \sigma_v, N\}$ یک پایه برای \mathbb{R}^3 است.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma \cdot \sigma_u &= \sigma_{uu} \cdot \sigma_u + \sigma_{vv} \cdot \sigma_u \\ &= \frac{1}{4}(\sigma_u \cdot \sigma_u)_u + (\sigma_v \cdot \sigma_u)_v - (\sigma_v \cdot \sigma_{uv}) \\ &= \frac{1}{4}(\sigma_u \cdot \sigma_u - \sigma_v \cdot \sigma_v)_u + (\sigma_v \cdot \sigma_u)_v \end{aligned}$$

اما چون σ همدیس است $\sigma_u \cdot \sigma_u = \sigma_v \cdot \sigma_v$ و $\sigma_u \cdot \sigma_v = 0$ بنابراین $\Delta\sigma \cdot \sigma_u = 0$ به طور مشابه $\Delta\sigma \cdot \sigma_v = 0$.

□

تابع تحلیلی φ ، وابسته به سطح مینیمال σ ، دلخواه نیست، اگر چه:

قضیه ۲.۹

اگر $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ سطح مینیمال پرمایش شده همدیس باشد، آنگاه تابع تحلیلی برداری $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ، تعریف شده در معادله (۱۷)، در شرایط زیر صدق می‌کند

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \quad (i)$$

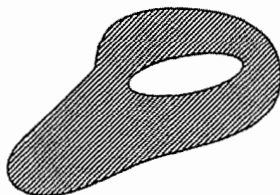
(ii) φ همواره مخالف صفر است.

بالعکس، اگر U همبند ساده و $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ توابع تحلیلی روی U باشند که در شرایط (i) و (ii) در بالا صدق کنند، آنگاه سطح مینیمال پرمایش شده همدیس $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ موجود است به طوری که $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ در معادله (۱۷) صدق می‌کند. به علاوه σ به وسیله φ_1, φ_2 و φ_3 صرف نظر از انتقال، به طور یگانه تعیین می‌شود.

مجموعه باز U در \mathbb{R}^2 را همبند ساده می‌گوییم اگر هر خم ساده بسته در U بتواند در درون U در یک نقطه منقبض شود. به طور شهودی، این بدان معنا است که U حفره‌ای نداشته باشد.



همبند ساده



غیرهمبند ساده

در طی اثبات زیر و در اثبات گزاره ۷.۹ در زیر، لازم است یادآوری کنیم که اگر F تابع تحلیلی از $\zeta = u + iv$ باشد در این صورت

$$F_u = F', \quad F_v = iF', \quad (\bar{F})_u = \bar{F}', \quad (\bar{F})_v = i\bar{F}'$$

که در آن $F' = \frac{dF}{d\zeta}$ ، مشتق مختلط F و علامت بار نشان دهنده مزدوج مختلط است.

اثبات ۲.۹

ابتدا فرض کنید $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ مینیمال است که در آن برای $k = 1, 2, 3$ $\sigma^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ باید نشان دهیم $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ در شرایط (i) و (ii) صدق می‌کند. چون برای $k = 1, 2, 3$

$$\varphi_k = \sigma_u^k - i\sigma_v^k$$

لذا به خاطر همدیس بودن σ .

$$\sum_{k=1}^2 \varphi_k^2 = \sum_{k=1}^2 ((\sigma_v^k)^2 - (\sigma_u^k)^2 - 2i\sigma_u^k \sigma_v^k) = \|\sigma_u\|^2 - \|\sigma_v\|^2 - 2i\sigma_u \cdot \sigma_v \quad (19)$$

صفر است. نهایتاً $\varphi = 0$ اگر و فقط اگر $\sigma_u = \sigma_v = 0$ و این غیر ممکن است چون σ عادی است.

بالعکس، φ را چنان اختیار کنید که در شرایط (i) و (ii) صدق کند. باید نشان دهیم φ از یک سطح مینیمال مانند بالا ناشی می‌شود و این که این سطح مینیمال صرف نظر از انتقال در \mathbb{R}^3 یگانه است. نقطه $(u_0, v_0) \in U$ را تثبیت کرده و σ را به عنوان بخش حقیقی انتگرال خطی مختلط

$$\sigma(u, v) = \Re \int_{\pi} \varphi(\xi) d\xi$$

که در آن π خمی در U از (u_0, v_0) به $(u, v) \in U$ است تعریف کنید در حقیقت از این که U همبند ساده است، بر اساس قضیه کشی، انتگرال $\int_{\pi} \varphi(\xi) d\xi$ مستقل از مسیر انتخاب شده است. و بنابراین $\sigma(u, v)$ نیز اینگونه است. حال $\Phi(\zeta) = \int_{\pi} \varphi(\xi) d\xi$ یک تابع تحلیلی از $\zeta = u + iv$ است و $\Phi'(\xi) = \varphi(\zeta)$ بنابراین طبق مطالب ذکر شده در ابتدای اثبات،

$$\sigma_u = \Re(\Phi_u) = \Re(\Phi') = \Re(\varphi) \quad (20)$$

$$\sigma_v = \Re(\Phi_v) = \Re(i\Phi') = -\Im(\varphi)$$

بنابراین $\varphi = \sigma_u - i\sigma_v$

برای تکمیل اثبات، باید نشان دهیم که σ یک قطعه سطح همدیس است. اما شرط (ii) و معادله (20) نشان می‌دهند که σ_u و σ_v هر دو صفر نیستند. بر اساس شرط (i) و معادله (19) $\|\sigma_u\| = \|\sigma_v\|$ و $\sigma_u \cdot \sigma_v = 0$ که نشان می‌دهد σ_u و σ_v هر دو غیر صفر و متعامد هستند لذا مستقل خطی اند، بنابراین σ یک قطعه سطح عادی است؛ این همچنین نشان می‌دهد که σ همدیس است.

اگر سطح مینیمال دیگری مانند $\tilde{\sigma}$ همانند σ متناظر به همین تابع تحلیلی φ باشد، آنگاه همه جا روی U ، $\tilde{\sigma}_u = \sigma_u$ و $\tilde{\sigma}_v = \sigma_v$ ، لذا $\tilde{\sigma} - \sigma$ ثابت، مثلاً a است، یعنی $\tilde{\sigma}$ با انتقال σ به اندازه a حاصل شده است. \square

قبل از ارائه مثال‌ها، توجه کنید اگر تابع تحلیلی φ در شرایط قضیه ۲.۹ صدق کند، تابع $i\varphi$ نیز اینگونه است. اگر φ تابع تحلیلی متناظر به سطح مینیمال K باشد، سطح مینیمالی که $i\varphi$

به آن متناظر می‌شود، مزدوج S نامیده می‌شود که به خاطر S ، صرف‌نظر از انتقال خوش تعریف است.

مثال ۶.۹

پرمایش

$$\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

از زنجیروار همدیس است (به مثال ۱.۹ مراجعه کنید) و تابع تحلیلی وابسته به آن

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sigma_u - i\sigma_v \\ &= (\sinh u \cos v + i \cosh u \sin v, \sinh u \sin v - i \cosh u \cos v, 1) \\ &= (\sinh(u + iv), -i \cosh(u + iv), 1) \\ &= (\sinh \zeta, -i \cos \zeta, 1) \end{aligned}$$

است. توجه کنید که شرایط (i) و (ii) در قضیه ۲.۹ برقرارند، زیرا φ هیچ جا، صفر نیست و مجموع مربعات مؤلفه‌های آن برابر است با

$$\sinh^2 \zeta - \cosh^2 \zeta + 1 = 0$$

بیاید سطح مینیمال مزدوج زنجیروار، $\tilde{\sigma}$ ، را به دست آوریم. از اثبات قضیه ۲.۹، صرف‌نظر از انتقال،

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(u, v) &= \Re \int_{\pi} (i \sinh \xi, \cosh \xi, i) d\xi \\ &= \Re (i \cosh \zeta, \sinh \zeta, i\zeta) \\ &= (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, -v) \end{aligned}$$

اگر با استفاده از $\bar{u} = \sinh u$ و $\bar{v} = v + \frac{\pi}{4}$ سطح را بازپرمایش نماییم، بعد از انتقال به اندازه $(0, 0, -\frac{\pi}{4})$ سطح

$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\bar{u} \cos \bar{v}, \bar{u} \sin \bar{v}, -\bar{v})$$

حاصل می‌شود که از انعکاس مارپیچ‌نا در تمرین ۱۴.۴ نسبت به محور z ها به دست آمده است.

توجه کنید پرمایش داده شده از ماریچج نما در تمرین ۱۴.۴، همدیس نیست بنابراین از ساختار این بخش نمی توان استفاده کرد.

در واقع «حل» شرط های روی φ در قضیه ۲.۹، امکان پذیر است.

گزاره ۶.۹

فرض کنید $f(\zeta)$ ، روی مجموعه باز U در صفحه مختلط تحلیلی بوده و معادل صفر نباشد و فرض کنید $g(\zeta)$ روی U یک تابع مرمورفیک باشد، به طوری که اگر $\zeta_0 \in U$ یک قطب g از مرتبه $m \geq 1$ باشد آنگاه ζ_0 یک صفر f از مرتبه حداقل $2m$ شود. در این صورت

$$\varphi = \left(\frac{1}{\zeta} f(1-g^2), \frac{i}{\zeta} f(1+g^2), fg \right) \quad (21)$$

در شرایط (i) و (ii) قضیه ۲.۹ صدق می کند و بالعکس هر تابع تحلیلی φ که در این شرایط صدق کند از همین طریق ناشی می شود.

تناظر داده شده توسط قضیه ۲.۹ و گزاره ۶.۹، بین جفت تابع های f و g و سطوح مینیمال، نمایش و ایراشتراس^۶ نامیده می شود.

اثبات ۶.۹

فرض کنید f و g دارای شرایط گزاره باشند. اگر g دارای قطب مرتبه $m \geq 1$ در $\zeta_0 \in U$ و f دارای صفر مرتبه $2m \geq n$ در ζ_0 باشد، آنگاه بسط لوران f و g حول ζ_0 به صورت زیر است

$$f(\zeta) = a(\zeta - \zeta_0)^n + \dots \quad \text{و} \quad g(\zeta) = \frac{b}{(\zeta - \zeta_0)^m} + \dots$$

که در آن a و b اعداد مختلط مخالف صفر هستند و علامت ... جملاتی را که شامل توان های بالاتری از $\zeta - \zeta_0$ است نشان می دهد. بنابراین

$$f(1 \pm g^2) = \pm ab^2(\zeta - \zeta_0)^{n-2m} + \dots \quad \text{و} \quad fg = ab(\zeta - \zeta_0)^{n-m} + \dots$$

فقط شامل توان های غیر منفی از $\zeta - \zeta_0$ هستند لذا φ در نزدیکی ζ_0 تحلیلی است. چون φ به وضوح، در جایی که g تحلیلی باشد، تحلیلی است، لذا تابع تعریف شده φ در معادله (۲۱) همه جا روی U تحلیلی است بدیهی است که φ معادل با صفر است تنها اگر f معادل با صفر باشد و محاسبات جبری ساده نشان می دهد که φ در شرط (i) قضیه ۲.۹ صدق می کند.

6) Weierstrass's representation

بالعکس، فرض کنید $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ تابعی تحلیلی باشد که در شرایط (i) و (ii) قضیه ۲.۹ صدق می‌کند. اگر $\varphi_1 - i\varphi_2$ معادل با صفر نباشد، تعریف کنید.

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} \quad (22)$$

چون φ تحلیلی است لذا f و g نیز تحلیلی هستند. تساوی $\varphi_3^2 = -(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2)$ از شرط (i) حاصل می‌شود و در نتیجه

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -fg^2 \quad (23)$$

محاسبات جبری ساده نشان می‌دهد که معادله (۲۱) از معادله‌های (۲۲) و (۲۳) نتیجه می‌شود. از معادله (۲۳)، تحلیلی بودن fg^2 حاصل می‌شود و بسط‌های لوران در قسمت اول اثبات، شرط روی صفرها و قطب‌های f و g را نشان می‌دهد. نهایتاً اگر $\varphi_1 - i\varphi_2 = 0$ بحث بالا را با جایگزینی $\varphi_1 \pm i\varphi_2$ توسط $\varphi_1 \mp i\varphi_2$ تکرار می‌کنیم (توجه کنید که $\varphi_1 - i\varphi_2$ و $\varphi_1 + i\varphi_2$ نمی‌توانند هر دو صفر باشند، به خاطر این که اگر این‌طور باشد، براساس شرط (i) خواهیم داشت $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ و بنابراین طبق شرط (i)، $\varphi_3 = 0$ و این شرط (ii) را نقض می‌کند). \square

فقط یک کاربرد از نمایش وایراشتراس ارائه می‌دهیم.

گزاره ۷.۹

انحنای گوسی سطح مینیمال متناظر به توابع f و g در نمایش وایراشتراس به صورت

$$K = \frac{-16|dg/d\zeta|^2}{|f|^2(1+|g|^2)^4}$$

است.

اثبات ۷.۹

محاسبات سرراست اما خسته‌کننده است و ما بسیاری از جزئیات را حذف می‌کنیم. با مزدوج‌گیری از هر مؤلفه φ ، $\bar{\varphi}$ را تعریف کنید. در این صورت $\sigma_u = \frac{1}{4}(\varphi + \bar{\varphi})$ و $\sigma_v = \frac{1}{4i}(\bar{\varphi} - \varphi)$. چون $\varphi \cdot \varphi = \bar{\varphi} \cdot \bar{\varphi} = 0$ ، اولین فرم اساسی به صورت $(du^2 + dv^2) \cdot \varphi \cdot \bar{\varphi}$ است. با

جایگزین کردن فرمول در معادله ۱۴ برای φ و ساده کردن اولین فرم اساسی به صورت

$$\frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)^2(du^2 + dv^2) \quad (24)$$

بدست می‌آید. سپس

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \frac{1}{4i}(\varphi + \bar{\varphi}) \times (\bar{\varphi} - \varphi) = \frac{1}{2i}\varphi \times \bar{\varphi} \\ \therefore \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 &= -\frac{1}{4}(\varphi \times \bar{\varphi}) \cdot (\varphi \times \bar{\varphi}) \\ &= -\frac{1}{4}((\varphi \cdot \varphi)(\bar{\varphi} \cdot \bar{\varphi}) - (\varphi \cdot \bar{\varphi})^2) \\ &= \frac{1}{4}(\varphi \cdot \bar{\varphi})^2 \\ \therefore N &= i \frac{\bar{\varphi} \times \varphi}{\varphi \cdot \bar{\varphi}} \end{aligned}$$

که بر حسب f و g

$$N = \frac{1}{1+|g|^2}(g + \bar{g}, -i(g - \bar{g}), |g|^2 - 1) \quad (25)$$

با به‌کارگیری تذکرات اخیر در اثبات قضیه ۲.۹ و فرمول‌های

$$L = -\sigma_u \cdot N, \quad M = -\sigma_u \cdot N_v, \quad N = -\sigma_v \cdot N_v$$

(که از مشتق‌گیری $\sigma_u \cdot N = \sigma_v \cdot N = 0$ بدست می‌آید)، در می‌یابیم که دومین فرم اساسی برابر است با

$$-\frac{1}{4}((fg' + \bar{f}\bar{g}'))(du^2 + dv^2) + 2i(fg' - \bar{f}\bar{g}')dudv \quad (26)$$

با درآمیختن معادلات (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) و با به‌کارگیری فرمول انحنای گوسی K در گزاره

۱.۷ (i)، نهایتاً فرمول مطرح شده در گزاره را بدست می‌آوریم. □

نتیجه ۲.۹

فرض کنید K سطحی مینیمالی است که بخشی از یک صفحه نیست. در این صورت ریشه‌های انحنای گوسی K تنها هستند.

یعنی، اگر انحنای گوسی K در نقطه P از S صفر شود، آنگاه K در هیچ نقطه دیگری نزدیک P از S صفر نمی‌شود. به‌طور دقیقتر، اگر P در یک قطعه سطح σ از S قرار گیرد، مثلاً $P = \sigma(u_0, v_0)$ ، عدد $\epsilon > 0$ وجود دارد، به‌طوری‌که اگر $\epsilon^2 < (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 < \epsilon^2$ ، آنگاه K در هیچ نقطه $\sigma(u, v)$ از S صفر نمی‌شود.

اثبات ۲.۹

از فرمول K در گزاره ۸.۹، K دقیقاً جایی صفر می‌شود که تابع مرمورفیک g' صفر می‌شود. اگر g' همه جا صفر باشد، K نیز همه جا صفر و S قسمتی از صفحه است (این در گزاره ۵.۶ نشان داده شده بود اما بلافاصله از معادله (۱۸) نتیجه می‌شود که N ثابت است اگر g ثابت باشد). اما این یک نتیجه استاندارد از آنالیز مختلط است که ریشه‌های یک تابع مرمورفیک غیر صفر تنها هستند، بنابراین اگر K معادل با صفر نباشد ریشه‌های آن لزوماً تنها هستند.

□

تمرین‌ها

۱۳.۹ تابع تحلیلی φ متناظر به صفحه گذرا از مبدأ با قائم واحد a را بیابید. صفحه مزدوج آن کدام است؟

۱۴.۹ اگر سطح مینیمال S متناظر با جفت توابع f و g در نمایش وایراشتراس باشد، کدام جفت توابع به سطح مینیمال مزدوج S متناظر می‌شود؟

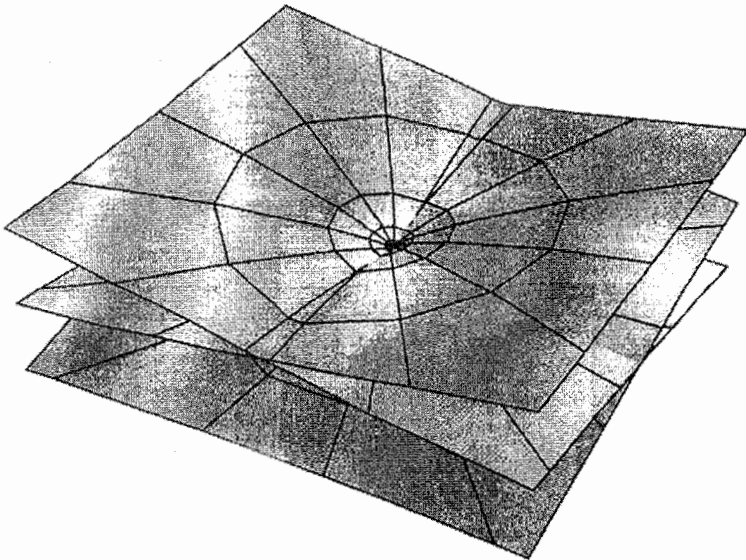
۱۵.۹ توابع f و g در نمایش وایراشتراس را برای ماریچ نما و زنجیروار محاسبه کنید.

۱۶.۹ تابع تحلیلی φ متناظر به سطح مینیمال اخیر در مثال ۴.۹ را بیابید. نشان دهید سطح مینیمال مزدوج آن با بازپیمایی از همان سطح که با زاویه $\frac{\pi}{4}$ بدور محور z ‌ها دوران یافته منطبق است.

۱۷.۹ پرمایش سطح همبرگ^۲، سطح مینیمال متناظر به توابع $f(\zeta) = 1 - \zeta^{-4}$ و $g(\zeta) = \zeta$ در نمایش وایراشتراس را بیابید. (با قراردادن $\zeta = e^t$ بازپیمایش کنید.) سطوح زیر منظر این سطح را در «اندازه بزرگ» و «نمای نزدیک» نشان می‌دهد.



هنبرگ: نمای نزدیک



هنبرگ: اندازه بزرگ

۱۸.۹ فرض کنید \mathcal{G} نگاشت گوس سطح مینیمال در نمایش وایراستراس و $\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشت تصویرکنج نگاری مثال ۷.۵ باشد نقطه $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ را طبق معمول با عدد مختلط $u + iv$ یکسان کنید. نشان دهید $\pi \circ \mathcal{G}$ تابع g است.

قضیه ایگرگیوم گوس

یکی از مهمترین کشفیات گوس در مورد سطوح این است که انحناى گوسی تغییر نمی‌کند اگر سطح بدون کشیدن خم شده باشد. گوس این نتیجه را «ایگرگیوم» نامید و کلمه لاتین «عالی» متعلق به قضیه او از آن زمان باقی مانده است.

۱.۱۰ قضیه عالی گوس

هدف این بخش اثبات قضیه مهم زیر و مطالعه نتایج آن است.

قضیه ۱.۱۰

انحنای گوسی سطح تحت ایزومتری حفظ می‌شود.

به‌طور دقیقتر این بدان معناست که اگر S_1 و S_2 دو سطح و $f: S_1 \rightarrow S_2$ یک ایزومتری باشد، آنگاه برای هر نقطه P از S_1 انحناى گوسی S_1 در P برابر انحناى گوسی S_2 در $f(P)$ است. گاهی قضیه به این صورت که انحناى گوسی خاصیت ذاتی سطح است بیان می‌شود، چون انحناى گوسی به‌وسیله موجود بسیار کوچکی که روی سطح زندگی می‌کند محاسبه شده است. در اثبات قضیه، کافیسٹ بنابر قضیه ۱.۵ حالتی که σ یک قطعه سطح روی S_1 است را در نظر بگیریم و ثابت کنیم اگر σ و $f \circ \sigma$ دارای اولین فرم اساسی یکسان باشند، آنگاه انحناى گوسی یکسان دارند. این مطلب ساده بی نیست، زیرا فرمول

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

که برای انحناى گوسی K در گزاره ۱.۷ (i) بدست آمده به ضرایب L ، N و M از دومین فرم اساسی همچنین به ضرایب E ، F و G از اولین فرم اساسی وابسته است. بنابراین قضیه به ما

می‌گویند که $LN - M^2$ می‌تواند بر حسب پارامترهای E, F و G بیان شود. (ولی منظور این نیست که L و M و N نیز به تنهایی می‌توانند بیان شوند).

برای اثبات قضیه، می‌توان از پایه متعامد یکه هموار $\{e', e''\}$ در صفحه مماس بر هر نقطه از قطعه سطح استفاده نمود، که در آن 'هموار'، بدین معنا است که e'' و e' توابع همواری از پارامترهای سطح (u, v) هستند، لذا، $\{e', e'', N\}$ یک پایه متعامد یکه برای \mathbb{R}^3 است (N قائم واحد استاندارد σ است). فرض می‌کنیم پایه راستگرد است. مثلاً $N = e' \times e''$. این فرض با جابجایی e' و e'' در صورت لزوم، همیشه امکان‌پذیر است. توجه کنید خطوط روی e' و e'' ارتباطی با مشتق ندارند.

می‌توانیم مشتقات جزئی e' و e'' را نسبت به u و v بر حسب پایه متعامد یکه $\{e', e'', N\}$ بیان نماییم. چون هر دو مشتقات جزئی e' بر e' عمودند، لذا مؤلفه‌های e' یعنی e'_{uu} و e'_{vv} برابر صفرند (به‌طور مشابه برای e''). بنابراین اعدادی مانند $\alpha', \beta', \lambda', \mu', \lambda'', \mu''$ (که به u و v وابسته هستند) موجودند به طوری که

$$\begin{aligned} e'_{uu} &= \alpha e'' + \lambda' N \\ e'_{vv} &= \beta e'' + \mu' N \\ e''_{uu} &= -\alpha' e' + \lambda'' N \\ e''_{vv} &= -\beta' e' + \mu'' N \end{aligned}$$

بعلاوه، با مشتق‌گیری از معادله $e' \cdot e'' = 0$ بر حسب u ، ملاحظه می‌کنیم که $e'_{uu} \cdot e'' = -e' \cdot e''_{uu}$ یعنی $\alpha' = \alpha$ (مشابه‌ها $\beta' = \beta$). لذا

$$\begin{aligned} e'_{uu} &= \alpha e'' + \lambda' N \\ e'_{vv} &= \beta e'' + \mu' N \\ e''_{uu} &= -\alpha e' + \lambda'' N \\ e''_{vv} &= -\beta e' + \mu'' N \end{aligned} \quad (1)$$

لم بعدی قدم حساسی در اثبات قضیه ۱.۱۰ است.

لم ۱.۱۰

با استفاده از علامت بالا، داریم

$$e'_u \cdot e''_v - e''_u \cdot e'_v = \lambda' \mu'' - \lambda'' \mu' \quad (۲)$$

$$= \alpha_v - \beta_u \quad (۳)$$

$$= \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} \quad (۴)$$

اثبات ۱.۱۰

معادله (۲) بلافاصله از معادله (۱) نتیجه می‌شود، چون e' ، e'' و N بردارهای واحد عمود هستند. سپس

$$\begin{aligned} \alpha_v - \beta_u &= \frac{\partial}{\partial u}(e' \cdot e''_v) - \frac{\partial}{\partial v}(e' \cdot e''_u) \quad (\text{از معادله ۱}) \\ &= e'_u \cdot e''_v + e' \cdot e''_{uv} - e'_v \cdot e''_u - e' \cdot e''_{vu} \\ &= e'_u \cdot e''_v - e'_v \cdot e''_u \end{aligned}$$

که معادله (۳) را ثابت می‌کند.
برای اثبات معادله (۴)، از فرمول

$$N_u \times N_v = K \sigma_u \times \sigma_v$$

استفاده می‌کنیم. (معادله (۱۵) در فصل ۷ را ببینید). از ترکیب آن با فرمول‌های

$$N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}, \quad \|\sigma_u \times \sigma_v\| = (EG - F^2)^{1/2}$$

گزاره ۲.۵ را ببینید، داریم

$$N_u \times N_v = \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} N$$

و بنابراین

$$(N_u \times N_v) \cdot N = \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} \quad (۵)$$

از $N = e' \times e''$ داریم

$$\begin{aligned} (N_u \times N_v) \cdot N &= (N_u \times N_v) \cdot (e' \times e'') \\ &= (N_u \cdot e')(N_v \cdot e'') - (N_u \cdot e'')(N_v \cdot e') \\ &= (N \cdot e'_u)(N \cdot e''_v) - (N \cdot e''_u)(N \cdot e'_v) \\ &= \lambda' \mu'' - \lambda'' \mu' \quad (\text{از معادله ۱}) \end{aligned} \quad (۶)$$

که در آن برای رسیدن از خط دوم به خط سوم، از معادلات

$$N_u \cdot e' = -N \cdot e'_u, \quad N_u \cdot e'' = -N \cdot e''_u$$

$$N_v \cdot e' = -N \cdot e'_v, \quad N_v \cdot e'' = -N \cdot e''_v$$

که از مشتق‌گیری $N \cdot e' = 0 = N \cdot e''$ نسبت به u و v به دست آمده استفاده کردیم. از معادلات (۵) و (۶) با هم نتیجه می‌گیریم که قسمت راست معادلات (۲) و (۴) برابرند. چون معادله (۲) قبلاً برقرار بوده است، پس معادله (۴) نیز برقرار است. \square

اکنون می‌توانیم قضیه ۱.۱۰ را اثبات نماییم.

اثبات ۱.۱۰

با ترکیب معادلات (۳) و (۴)، داریم

$$K = \frac{\alpha_v - \beta_u}{(EG - F^2)^{1/2}} \quad (۷)$$

پس برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم، برای هر انتخاب مناسب $\{e', e''\}$ ، اسکالرهای α و β فقط به E, F, G وابسته‌اند. با استفاده از فرایند گرام اشمیت^۱ برای پایه $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ در صفحه مماس، پایه $\{e', e''\}$ را می‌سازیم، و بعد نشان دهیم که دارای خواص مورد نظر می‌باشد. لذا ابتدا تعریف می‌کنیم

$$e' = \frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|} = \epsilon \sigma_u$$

که در آن $\epsilon = E^{-1/2}$. اکنون بدنبال یک بردار به صورت $e'' = \gamma \sigma_u + \delta \sigma_v$ با اسکالرهای γ و δ هستیم به طوری که e'' بردار واحد عمود بر e' باشد. این شرایط معادل با عبارات زیر است.

$$E^{-1/2}(\gamma E + \delta F) = 0, \quad \gamma^2 E + 2\gamma \delta F + \delta^2 G = 1$$

1) Gram-schmidt

از اولین معادله داریم $\gamma = \frac{-\delta F}{E}$ ، و با جایگزینی در معادله دوم داریم

$$\delta^2 \left(\frac{F^2}{E} - 2 \frac{F^2}{E} + G \right) = 1$$

$$\therefore \delta = \frac{E^{1/2}}{(EG - F^2)^{1/2}}, \quad \gamma = -\frac{FE^{-1/2}}{(EG - F^2)^{1/2}}, \quad \epsilon = E^{-1/2} \quad (8)$$

می‌توانیم علامت δ و در نتیجه γ را نیز تغییر دهیم، ولی هیچ تغییری در انتها حاصل نمی‌شود.

بنابراین

$$e' = \epsilon \sigma_u, \quad e'' = \gamma \sigma_u + \delta \sigma_v \quad (9)$$

که در آن γ, δ, ϵ فقط به E, F, G وابسته‌اند.

اکنون α و β را محاسبه می‌کنیم. ابتدا

$$\begin{aligned} \alpha &= e'_u \cdot e'' \quad (\text{از معادله ۱}) \\ &= (\epsilon_u \sigma_u + \epsilon \sigma_{uu}) \cdot (\gamma \sigma_u + \delta \sigma_v) \quad (\text{از معادله ۹}) \\ &= \frac{\epsilon_u}{\epsilon} (\epsilon \sigma_u) \cdot (\gamma \sigma_u + \delta \sigma_v) + \epsilon \gamma \sigma_{uu} \cdot \sigma_u + \epsilon \delta \sigma_{uu} \cdot \sigma_v \\ &= \frac{\epsilon_u}{\epsilon} e' \cdot e'' + \frac{1}{\gamma} \epsilon \gamma (\sigma_u \cdot \sigma_u)_u + \epsilon \delta ((\sigma_u \cdot \sigma_v)_u - \sigma_u \cdot \sigma_{uv}) \\ &= \frac{1}{\gamma} \epsilon \gamma E_u + \epsilon \delta \left(F_u - \frac{1}{\gamma} E_v \right) \quad (e' \cdot e'' = 0 \text{ زیرا}) \quad (10) \end{aligned}$$

که در حقیقت فقط به E, F, G وابسته است (زیرا γ, δ, ϵ و این‌گونه هستند) و بالاخره

$$\begin{aligned} \beta &= e'_v \cdot e'' \\ &= (\epsilon_v \sigma_u + \epsilon \sigma_{uv}) \cdot (\gamma \sigma_u + \delta \sigma_v) \\ &= \frac{\epsilon_v}{\epsilon} e' \cdot e'' + \epsilon \gamma \sigma_{uv} \cdot \sigma_u + \epsilon \delta \sigma_{uv} \cdot \sigma_v \\ &= \frac{1}{\gamma} \epsilon \gamma E_v + \frac{1}{\gamma} \epsilon \delta G_u \quad (11) \end{aligned}$$

که این نیز فقط به E, F, G وابسته است.

□

این اثبات قضیه گوس را کامل می‌کند.

با جایگزین کردن مقادیر واقعی γ, δ, ϵ به این فرمول‌ها برای α و β ، و سپس به‌کارگیری معادله (۷) فرمول دقیقی برای K بر حسب E, F, G به‌دست می‌آوریم. نتیجه این است:

نتیجه ۱.۱۰

انحنای گوس از رابطه

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{EG}} E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{\sqrt{EG}} G_{uu} & \frac{1}{\sqrt{EG}} E_u & F_u - \frac{1}{\sqrt{EG}} E_v \\ F_v - \frac{1}{\sqrt{EG}} G_u & E & F \\ \frac{1}{\sqrt{EG}} G_v & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{EG}} E_v & \frac{1}{\sqrt{EG}} G_u \\ \frac{1}{\sqrt{EG}} E_v & E & F \\ \frac{1}{\sqrt{EG}} G_u & F & G \end{vmatrix}$$

به دست می آید.

جزئیات این محاسبه را انجام نمی دهیم، بخشی بخاطر این که اثبات خیلی خسته کننده است و بخشی به خاطر اینکه حالت های خاص زیر اغلب همه آن چیزی است که مورد نیاز است.

نتیجه ۲.۱۰

(i) اگر $F = 0$ ، داریم

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right\}$$

اگر $E = 1$ و $F = 0$ ، داریم

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

اثبات ۲.۱۰

اگر $F = 0$ ، از معادله (۸) نتیجه می گیریم

$$\gamma = 0, \quad \delta = G^{-1/2}, \quad \epsilon = E^{-1/2}$$

با جایگزینی در معادلات (۱۰) و (۱۱) به دست می آوریم.

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{EG}} (EG)^{-1/2} E_v, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{EG}} (EG)^{-1/2} G_u$$

بنابراین

$$K = \frac{\alpha_v - \beta_u}{(EG)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right\} \quad (12)$$

که فرمول (i) را اثبات می‌کند.

بعلاوه، اگر $E = 1$ ، اولین جمله در سمت راست (۱۲) صفر می‌شود، لذا

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{G}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

□

که فرمول (ii) را ثابت می‌کند.

مثال ۱۰.۱

برای سطح دورانی

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

که در آن $f > 0$ و $f^2 + g^2 = 1$ (نقطه نشان دهنده $\frac{d}{du}$ است)، در مثال ۲.۶ دیدیم که $E = 1$ ، $F = 0$ و $G = f(u)^2$. لذا بنا بر نتیجه ۲.۱۰(ii) داریم

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{f''}{f}$$

که با معادله (۲) فصل ۷ مطابقت می‌کند.

اکنون در موقعیت ارائه کار برد مختصات ژئودزیک که در بخش ۵.۸ قول دادیم، قرار داریم.

قضیه ۲.۱۰

هر نقطه از سطحی با انحنای گوسی ثابت در قطعه ای قرار دارد که ایزومتریک با قسمتی از صفحه، کره یا کره‌نما است.

اثبات ۲.۱۰

فرض کنید P یک نقطه از سطح S با انحنای گوسی ثابت K باشد. با استفاده از یک انبساط در \mathbb{R}^3 (تمرین ۶.۷ را ببینید)، فقط کافی است حالت‌های $K = 0, 1, -1$ بررسی شود.

قطعه ژئودزیک $\sigma(u, v)$ با $\sigma(0, 0) = P$ را در نظر می‌گیریم، قرار می‌دهیم $g = \sqrt{G}$

پس اولین فرم اساسی به صورت

$$du^2 + g(u, v)^2 dv^2$$

است. بنا بر نتیجه ۲.۱۰(ii).

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + Kg = 0 \quad (13)$$

بنا بر گزاره ۷.۸،

$$g(0, v) = 1, \quad g_u(0, v) = 0 \quad (14)$$

اگر $K = 0$ ، جواب معادله (۱۳) $g(u, v) = \alpha u + \beta$ است، که در آن α و β توابع همواری از تنها متغیر v می‌باشند. از شرایط مرزی (۱۴) نتیجه می‌گیریم $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ پس $g = 1$ و اولین فرم اساسی σ برابر است با

$$du^2 + dv^2$$

این همان اولین فرم اساسی صفحه با پرمایش معمولی است (مثال ۱.۵ را ببینید) و اکنون قضیه ۱.۵ نشان می‌دهد σ ایزومتریک با قسمتی از صفحه می‌باشد.

اگر $K = 1$ ، جواب عمومی معادله (۱۳) برابر $g = \alpha \cos u + \beta \sin u$ است، که در آن α و β فقط به v وابسته‌اند. از شرایط مرزی (۱۴) نتیجه می‌گیریم $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ و اولین فرم اساسی σ برابر با

$$du^2 + \cos^2 u dv^2$$

است که اولین فرم اساسی کره واحد است؛ u و v به ترتیب عرض و طول جغرافیایی می‌باشند. (مثال ۲.۵ را ببینید) بنابراین، σ ایزومتریک با قسمتی از کره واحد است.

بالاخره اگر $K = -1$ ، با روش مشابه در می‌یابیم که اولین فرم اساسی σ به صورت

$$du^2 + \cosh^2 u dv^2$$

است، ما قبلاً با این اولین فرم اساسی روبرو نشده بودیم. البته، می‌توان σ را به وسیله

$$V = e^v \tanh u, \quad W = e^v \operatorname{sech} u$$

باز پرمایش نمود. سپس نهایتاً فرمول‌های تمرین ۴.۵ را به کار می‌گیریم، برای مثال، در می‌یابیم که اولین فرم اساسی به صورت

$$\frac{dV^2 + dW^2}{W^2}$$

می‌باشد. از مقایسه آن با مثال ۸.۸، ملاحظه می‌کنیم که این اولین فرم اساسی کره‌نما است. \square

تمرین‌ها

۱.۱۰ اگر یک قطعه سطح دارای اولین فرم اساسی $e^\lambda(du^2 + dv^2)$ ، که در آن λ یک تابع هموار از u و v است باشد، نشان دهید انحناى گوسی K در شرط

$$\Delta\lambda + 2Ke^\lambda = 0$$

صدق می‌کند که در آن Δ لاپلاسیان $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ را نشان می‌دهد.

۲.۱۰ با علائم تمرین ۲.۱.۸، قرار دهید $u = r \cos \theta$ و $v = r \sin \theta$ و فرض کنید $\bar{\sigma}(u, v)$ بازپرمایش متناظر σ باشد. می‌توان دید یک قطعه سطح مجاز برای S است که روی مجموعه باز $u^2 + v^2 < \epsilon^2$ تعریف شده است. (توجه کنید که این کاملاً روشن نیست زیرا به ازای $r = 0$ ، σ مجاز نیست). نشان دهید، $\bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2$ اولین فرم اساسی $\bar{\sigma}$ است که در آن

$$\bar{E} = \frac{u^2}{r^2} + \frac{Gv^2}{r^4}, \quad \bar{F} = \left(1 - \frac{G}{r^2}\right) \frac{uv}{r^2}, \quad \bar{G} = \frac{v^2}{r^2} + \frac{Gu^2}{r^4}$$

(تمرین ۴.۵ را به‌کار بگیرید). نشان دهید $u^2(\bar{E} - 1) = v^2(\bar{G} - 1)$ و با در نظر گرفتن بسط‌های تیلور \bar{E} و \bar{G} حول $u = v = 0$ نتیجه بگیرید

$$G(r, \theta) = r^2 + kr^4 + \text{باقیمانده}$$

به ازای ثابتی مانند k ، که در آن $\frac{\text{باقیمانده}}{r^4}$ به صفر می‌رود وقتی r به سمت صفر برود. نهایتاً نشان دهید که $k = \frac{-K(P)}{3}$ در آن $K(P)$ اندازه انحناى گوسی S در P است (نتیجه ۲.۱۰(ii) را به‌کار ببرید).

۳.۱۰ با علائم تمرین‌های ۲.۱.۸، و ۲.۱۰ نشان دهید که

(i) محیط دایره ژئودزیکى با مرکز P و شعاع R برابر است با

$$C_R = 2\pi R \left(1 - \frac{K(P)}{6}R^2 + \text{باقیمانده}\right)$$

که در آن $\frac{\text{باقیمانده}}{R^2}$ به سمت صفر می‌رود وقتی که R به سمت صفر میل کند.

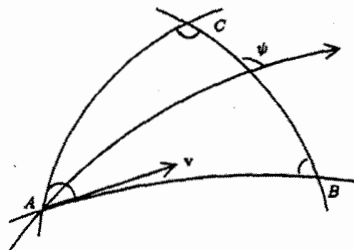
(ii) مساحت داخل دایره ژئودزیک در (i) برابر است با

$$A_R = \pi R^2 \left(1 - \frac{K(P)}{12}R^2 + \text{باقیمانده}\right)$$

که در آن باقیمانده در همان شرایط قسمت (i) صدق می‌کند.

مقادیر دقیق C_R و A_R را در حالتی که S کره واحد است به دست آورید، و تحقیق کنید که نتایج با (i) و (ii) مندرج در بالا یکی است.

۴.۱۰ مثلث ABC روی سطح σ را که اضلاعش کمان‌هایی ژئودزیک هستند در نظر بگیرید. مانند تمرین ۲۱.۸ فرض کنید ABC در قطعه ژئودزیک σ با $P = A$ قرار دارد. بنابراین با قراردادهای آن تمرین، اگر فرض کنیم v با AB در A موازی است، در این صورت AB و AC خم‌های پارامتری $\theta = 0$ و $\theta = \angle A$ هستند و BC به ازای تابع همواری مانند f با $\gamma(\theta) = \sigma(f(\theta), \theta)$ پرمایش می‌شود که در آن $0 \leq \theta \leq \angle A$.



(i) با استفاده از معادلات ژئودزیک (فصل ۸، معادلات (۲)) نشان دهید

$$f'' - \frac{f'\lambda'}{\lambda^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r}$$

که در آن (\prime) علامت $\frac{d}{d\theta}$ بوده و $\lambda = \|\gamma'\|$ است.

(ii) نشان دهید، اگر $\psi(\theta)$ زاویه بین σ_r و بردار مماس به BC در $\gamma(\theta)$ باشد، آنگاه

$$\psi'(\theta) = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(f(\theta), \theta)$$

(iii) اگر K انحنای گوسی S باشد نشان دهید،

$$\iint_{ABC} K dA_\sigma = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

این نتیجه در فصل ۱۱ تعمیم می‌یابد.

۲.۱۰ ایزومتري‌های سطوح

قضیه ایگرگیوم شرط لازم برای وجود ایزومتري بین سطوح را تأمین می‌کند: اگر چنین ایزومتري وجود داشته باشد، انحناي گوسی می‌بایستی در نقاط متناظر دو سطح یکی باشد. از این ایده دو مثال می‌آوریم. بقیه در تمرین‌ها ارائه می‌شود.

نتیجه اول نشان می‌دهد که رسم یک نقشه «کامل» از زمین غیر ممکن است (که دلیلی است بر اینکه چرا نقشه کشی موضوعی جالب است).

گزاره ۱.۱۰

هر نقشه از هر ناحیه از سطح زمین نظم فاصله‌ها را تغییر می‌دهد.

اثبات ۱.۱۰

یک نقشه از ناحیه‌ای از سطح زمین که نظم فواصل را تغییر ندهد یک دیفئومورفیزم از این ناحیه از کره به یک ناحیه از صفحه است (نگاشتی) که همه فواصل را در یک فاکتور ثابت مثلاً C ضرب می‌کند. همچنین می‌توان فرض نمود که صفحه از مبدأ می‌گذرد. در این صورت با ترکیب این نگاشت با نگاشتی از صفحه به خودش که یک نقطه با موقعیت برداری \mathbf{r} را به نقطه‌ای با موقعیت برداری $C^{-1}\mathbf{r}$ می‌برد، می‌توان یک ایزومتري بین این ناحیه از کره و ناحیه‌ای از صفحه به دست آورد. بنا به قضیه ایگرگیوم، این نواحی از کره و صفحه دارای انحناي گوسی یکسانند. اما می‌دانیم که صفحه در همه جا دارای انحناي گوسی صفر است و کره همه جا دارای انحناي گوسی ثابت و مثبت است (اگر کره دارای شعاع R باشد، انحناي گوسی آن $\frac{1}{R^2}$ است). بنابراین چنین ایزومتري وجود نخواهد داشت. \square

توجه کنید، از طرف دیگر، امکان رسم یک نقشه از زمین که به طور صحیح زوایا را نشان دهد وجود دارد، زیرا در مثال ۷.۵ و تمرین ۱۱.۵ دیدیم که تصویر کنج‌نگاری و تصویر مرکاتور هم‌دیس می‌باشند، و قضیه ارشمیدس (قضیه ۴.۵) نشان می‌دهد که نقشه‌یی وجود دارد که مساحت‌ها را به طور صحیح نشان می‌دهد.

مثال بعدی نشان می‌دهد که چطور می‌توان گاهی با قضیه ایگرگیوم تمام ایزومتري‌های یک سطح را تعیین کرد.

گزاره ۲.۱۰

تنها ایزومتري‌های ماریچ‌نمای

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

توابع $S_\lambda, R_x \circ S_\lambda, R_y \circ S_\lambda$ و $R_z \circ S_\lambda$ هستند که در آن λ یک اسکالر، S_λ حرکت ماریچچ می‌باشد.

اثبات ۲.۱۰

فرض کنید یک ایزومتري از ماریچچ نما، $\sigma(u, v)$ را به $\bar{\sigma}(\bar{u}, \bar{v})$ ببرد، که در آن \bar{u} و \bar{v} توابع همواری از u و v می‌باشند. چون انحنای گوسی در $\sigma(u, v)$ برابر با $1/(1+u^2)^2$ است (تمرین ۲.۷ را ببینید)، لذا بنا بر قضیه ایگرگوم داریم

$$\frac{-1}{(1+u^2)^2} = \frac{-1}{(1+\bar{u}^2)^2}$$

پس $\bar{u} = \pm u$. با به‌کار بردن دوران R_z به اندازه π بدور محور z ها، u به $-u$ تغییر می‌یابد (و v ثابت است)، لذا فرض می‌کنیم که $\bar{u} = u$. قرار می‌دهیم $\bar{v} = f(u, v)$. بنا بر قضیه ۱.۵، قطعه‌های $\sigma(u, v)$ و $\bar{\sigma}(u, v) = \sigma(u, f(u, v))$ دارای اولین فرم اساسی یکسانی می‌باشند. اولین فرم اساسی برای σ ، $du^2 + (1+u^2)dv^2$ و برای $\bar{\sigma}$

$$(1 + (1+u^2)f_u^2)du^2 + 2(1+u^2)f_u f_v dudv + (1+u^2)f_v^2 dv^2$$

است. با مساوی قرار دادن آنها داریم، $f_u = 0$ و $f_v = \pm 1$. بنابراین

$$\bar{v} = f(u, v) = \pm v + \lambda$$

که در آن λ ثابت است. دوران R_x به اندازه π حول محور x ها، v را به $-v$ تغییر می‌دهد (و u را ثابت نگه می‌دارد)، بنابراین علامت $+$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا ایزومتري

$$S_\lambda : \sigma(u, v) \mapsto \sigma(u, v + \lambda)$$

را به دست می‌آوریم که گزاره را ثابت می‌کند (ایزومتري $R_y \circ S_\lambda$ ایجاد می‌شود زیرا $R_y = R_x \circ R_z$).

□

تمرین‌ها

۵.۱۰ نشان دهید هیچ ایزومتري بین ناحیه‌ای از کره و ناحیه‌ای از استوانه (تعمیم‌یافته) یا مخروط (تعمیم‌یافته) وجود ندارد. (گزاره ۱.۱۰ و تمرین ۷.۵ را به‌کار برید.)

۶.۱۰ نشان دهید انحنای گوسی نوار موبیوس در مثال ۹.۴ همه جا در طول دایره میانی ثابت و برابر $\frac{1}{4}$ - است. نشان دهید نوار موبیوس نمی تواند به وسیله یک نوار کاغذی که دو انتهایش را با یک نیم-چرخش به هم وصل کرده باشیم ساخته شود. (توجه تحلیلی «بریدن و چسباندن» نوار موبیوس بسیار پیچیده تر از دیدگاه مثال ۹.۴ است.)

۷.۱۰ قطعه سطحهای

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln u), \quad \tilde{\sigma}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

را در نظر می گیریم. ثابت کنید انحنای گوسی σ در $\sigma(u, v)$ و $\tilde{\sigma}$ در $\tilde{\sigma}(u, v)$ برابرند، اما نگاهی از σ به $\tilde{\sigma}$ که $\sigma(u, v)$ را به $\tilde{\sigma}(u, v)$ می برد یک ایزومتري نیست. در حقیقت ثابت کنید ایزومتري از σ به $\tilde{\sigma}$ وجود ندارد.

۸.۱۰ نشان دهید تنها ایزومتري از زنجیروار به خودش از دوران های به دور محورش، انعکاس ها در صفحات شامل محورها و انعکاس در صفحه شامل کمر زنجیروار به وجود می آید.

۳.۱۰ معادلات کدازی-میناردی^۲

قضیه ایگرگیم گوس نشان می دهد که ضرایب اولین و دومین فرم اساسی یک سطح نمی توانند توابع هموار دلخواه باشند، زیرا عبارت $LN - M^2$ را می توان بر حسب E, F, G بیان نمود. طبیعی است که سؤال شود آیا روابط دیگری بین این ضرایب وجود دارد. در این فصل، در می یابیم که در حقیقت روابط بیشتری وجود دارد و نشان می دهیم به مفهومی که توضیح خواهیم داد روابط دیگری وجود ندارد.

با محاسباتی نظیر لم ۱.۱۰ شروع می کنیم.

گزاره ۳.۱۰ (معادلات گوس)

فرض کنید $\sigma(u, v)$ یک قطعه سطح باشد. در این صورت

$$\sigma_{uu} = \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + LN$$

$$\sigma_{uv} = \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + MN$$

$$\sigma_{vv} = \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + NN$$

که در آن

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}\end{aligned}$$

شش ضریب Γ در این فرمول نمادهای کریستوفل^۳ خوانده می‌شود.

اثبات ۳.۱۰

چون $\{\sigma_u, \sigma_v, N\}$ یک پایه برای R^3 است، مطمئناً توابع حقیقی $\alpha_1, \dots, \alpha_3$ که در معادلات

$$\begin{aligned}\sigma_{uu} &= \alpha_1 \sigma_u + \alpha_2 \sigma_v + \alpha_3 N \\ \sigma_{uv} &= \beta_1 \sigma_u + \beta_2 \sigma_v + \beta_3 N \\ \sigma_{vv} &= \gamma_1 \sigma_u + \gamma_2 \sigma_v + \gamma_3 N\end{aligned}\tag{۱۵}$$

صدق می‌کنند وجود دارند. از ضرب عددی هر معادله با N نتیجه می‌شود

$$\alpha_3 = L, \quad \beta_3 = M, \quad \gamma_3 = N$$

اکنون ضرب عددی هر معادله (۱۵) را در σ_u و σ_v در نظر می‌گیریم. از آن شش معادله اسکالری بدست می‌آید که شش ضریب باقیمانده را معین می‌کند. به عنوان مثال، از ضرب عددی اولین معادله (۱۵) در σ_u و σ_v دو معادله

$$E\alpha_1 + F\alpha_2 = \sigma_{uu} \cdot \sigma_u = \frac{1}{\gamma} E_u$$

$$F\alpha_1 + G\alpha_2 = \sigma_{uu} \cdot \sigma_v = (\sigma_u \cdot \sigma_v)_u - \sigma_u \cdot \sigma_{uv} = F_u - \frac{1}{\gamma} E_v$$

به دست می‌آید. با حل کردن این معادلات داریم $\alpha_1 = \Gamma_{11}^1, \alpha_2 = \Gamma_{11}^2$. به طور مشابه چهار ضریب دیگر موجود در (۱۵) محاسبه می‌شود. \square

روابط جدید بین ضرایب اولین و دومین فرم اساسی یک قطعه سطح در نتیجه زیر قرار دارد.

3) Christoffel symbols

گزاره ۴.۱۰ (معادلات کدازی-میناردی)

نمادهای کریستوفل قطعه سطح $\sigma(u, v)$ را مانند بالا تعریف کنید. در این صورت

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 \\ M_v - N_u &= L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

اثبات ۴.۱۰

معادله $(\sigma_{uu})_v = (\sigma_{uv})_u$ را نوشته و معادلات گوس را برای σ_{uv} و σ_{uu} به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1\sigma_u + \Gamma_{11}^2\sigma_v + LN)_v &= (\Gamma_{12}^1\sigma_u + \Gamma_{12}^2\sigma_v + MN)_u \\ \therefore \left(\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma_{12}^1}{\partial u} \right) \sigma_u + \left(\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial\Gamma_{12}^2}{\partial u} \right) \sigma_v + (L_v - M_u)N & \\ &= \Gamma_{12}^1\sigma_{uu} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\sigma_{uv} - \Gamma_{11}^2\sigma_{vv} - LN_v + MN_u \\ &= \Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1\sigma_u + \Gamma_{11}^2\sigma_v + LN) + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(\Gamma_{12}^1\sigma_u + \Gamma_{12}^2\sigma_v + MN) \\ &\quad - \Gamma_{11}^2(\Gamma_{12}^1\sigma_u + \Gamma_{12}^2\sigma_v + NN) - LN_v + MN_u \end{aligned} \quad (۱۶)$$

مجدداً معادلات گوس را به کار می‌بریم. بردارهای N_u و N_v بر N عمود بوده، و لذا ترکیب خطی از σ_u و σ_v هستند. بنابراین با مساوی قراردادن مؤلفه‌های N در دو طرف آخرین معادله داریم

$$L_v - M_u = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2$$

که اولین معادله کدازی-میناردی است. معادلات دیگر با همین روش از $(\sigma_{uv})_v = (\sigma_{vv})_u$ به دست می‌آید. \square

در نگاه اول، به نظر می‌آید که می‌توان چهار اتحاد دیگر را مانند آنچه در قضیه ۲.۱۰ آمده با مساوی قراردادن ضرایب σ_u و σ_v در معادله (۱۶) و مانند آن از $(\sigma_{vv})_u = (\sigma_{uv})_v$ به دست آورد. البته این بر می‌گردد به اینکه این اتحادها همگی معادل فرمول نتیجه ۱.۱۰ می‌باشند (و بنابراین اثبات دیگری از قضیه ایگرگیوم به دست می‌آید). در حقیقت همان‌طور که قضیه زیر نشان می‌دهد اتحادهای دیگری برای پیدا کردن وجود ندارد.

قضیه ۳.۱۰

فرض کنید $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $\bar{\sigma} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ قطعه سطح‌هایی با اولین و دومین فرم اساسی یکسان باشند. در این صورت حرکت صلب M در \mathbb{R}^3 وجود دارد به طوری که $\bar{\sigma} = M \circ \sigma$.
 به علاوه، فرض کنید V یک زیر مجموعه باز \mathbb{R}^3 و E, F, G, L, M, N توابع همواری روی V باشند و فرض کنید $G > 0, E > 0, EG - F^2 > 0$ ، معادلات نتیجه ۱.۱۰ و گزاره ۴.۱۰ برقرار بوده، $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ و نمادهای کریستوفل مانند گزاره ۳.۱۰ تعریف شده باشند در این صورت برای $(u_0, v_0) \in V$ ، مجموعه باز U شامل (u_0, v_0) در V و قطعه سطح $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ وجود دارد به طوری که $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 + Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ به ترتیب اولین و دومین فرم اساسی σ هستند.

این قضیه برای سطوح، نظیر قضیه ۳.۲ برای خم‌ها است که نشان می‌دهد خم‌های مسطح سرعت واحد صرف نظر از حرکت صلب با انحنای علامت‌دارشان معین می‌شوند. ما در اینجا قضیه ۳.۱۰ را اثبات نخواهیم کرد. قسمت اول مربوط به قضایای منحصر بفرد بودن جواب سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی است و لذا مشکل خاصی وجود ندارد. قسمت دوم پیچیده تر بوده و مربوط به قضایای وجود جواب خاص معادلات دیفرانسیل جزئی است. مثال زیر آنچه را که می‌خواهیم نشان می‌دهد.

مثال ۲.۱۰

به ترتیب اولین و دومین فرم اساسی $du^2 + dv^2$ و $-du^2$ را در نظر بگیرید. اجازه دهید در ابتدا ببینیم که آیا قطعه سطحی با این اولین و دومین فرم اساسی وجود دارد. چون تمام ضرایب این فرم‌ها ثابت هستند، نمادهای کریستوفل همه برابر صفر و معادلات کدازی-میناردی به وضوح برقرار است. از فرمول نتیجه ۱.۱۰ داریم $K = 0$ ، بنابراین تنها شرط دیگری که باید بررسی شود آن است که $LN - M^2 = 0$ و این صریحاً برقرار است زیرا $M = N = 0$. بنابراین قضیه ۳.۱۰ می‌گوید که قطعه سطحی با اولین و دومین فرم اساسی داده شده وجود دارد. برای به دست آوردن آن، از معادله گوس داریم

$$\sigma_{uu} = -N, \quad \sigma_{uv} = 0, \quad \sigma_{vv} = 0$$

از دو معادله آخر نتیجه می‌شود که σ_v یک بردار ثابت، مثلاً a است، بنابراین

$$\sigma(u, v) = b(u) + av \quad (17)$$

که در آن \mathbf{b} فقط تابعی از متغیر u است. بنابراین از اولین معادله داریم $\mathbf{N} = -\mathbf{b}''$ (خط نشان‌دهنده $\frac{d}{du}$ است). اکنون باید \mathbf{N}_u و \mathbf{N}_v را بر حسب σ_u و σ_v در گزاره ۴.۶ بیان کنیم. ماتریس وینگارتن عبارتست از

$$W = F_I^{-1} F_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پس از گزاره ۴.۶ داریم

$$\mathbf{N}_u = \sigma_u, \quad \mathbf{N}_v = 0$$

دومین معادله چیز جدیدی نمی‌گوید، چون قبلاً دیدیم $\mathbf{N} = -\mathbf{b}''$ فقط به u بستگی دارد. از اولین معادله نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{b}''' + \mathbf{b}' = 0$$

لذا، $\mathbf{b}'' + \mathbf{b}$ یک بردار ثابت است، که با یک انتقال σ ، صفر می‌شود (معادله (۱۷) را ببینید). در این صورت

$$\mathbf{b}(u) = c \cos u + d \sin u$$

که در آن c و d بردارهای ثابتی هستند، و $\mathbf{N} = -\mathbf{b}'' = \mathbf{b}$. که می‌بایستی برای تمام مقادیر u بردار واحد باشد. به سادگی دیده می‌شود که این امکان‌پذیر هست فقط اگر c و d بردارهای واحد متعامد باشند، که در این حالت می‌توان با به‌کار بردن یک حرکت صلب فرض کرد $c = (1, 0, 0)$ و $d = (0, 1, 0)$ در نتیجه $\mathbf{b}(u) = (\cos u, \sin u, 0)$. بالاخره $\lambda \neq 0$ موجود است که $\sigma_u \times \sigma_v = \lambda \mathbf{N}$ پس $\mathbf{b}' \times \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. که در این صورت $\mathbf{a} = (0, 0, \lambda)$ ، و قطعه با معادله

$$\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, \lambda v)$$

به دست می‌آید، که یک پرمایش استوانه دایره‌گون با شعاع ۱ است (که خواننده احتمالاً از قبل حدس زده بود).

تمرین‌ها

۹.۱۰ یک قطعه سطح به ترتیب دارای اولین و دومین فرم اساسی

$$\cos^2 v du^2 + dv^2 \quad \text{و} \quad -\cos^2 v du^2 - dv^2$$

است. نشان دهید سطح قسمتی از کره با شعاع ۱ است. (ماتریس وینگارتن را محاسبه کنید) یک پرمایش از کره واحد با این اولین و دومین فرم اساسی بنویسید.

۱۰.۱۰ نشان دهید که قطعه سطحی که به ترتیب اولین و دومین فرم اساسی آن

$$du^2 + \cos^2 u dv^2 \quad \text{و} \quad \cos^2 u du^2 + dv^2$$

باشد وجود ندارد.

۱۱.۱۰ فرض کنید اولین و دومین فرم اساسی یک قطعه سطح به ترتیب $Edu^2 + Gdv^2$ و $Ldu^2 + Ndv^2$ است (گزاره ۲.۷). نشان دهید معادلات کدازی-میناردی به صورت

$$L_v = \frac{1}{\sqrt{EG}} E_v \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right), \quad N_u = \frac{1}{\sqrt{EG}} G_u \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right)$$

ساده می‌شود.

نتیجه بگیرید که انحنای اصلی $\kappa_1 = \frac{L}{E}$ و $\kappa_2 = \frac{N}{G}$ در معادلات

$$(\kappa_1)_v = \frac{E_v}{\sqrt{EG}} (\kappa_2 - \kappa_1), \quad (\kappa_2)_u = \frac{G_u}{\sqrt{EG}} (\kappa_1 - \kappa_2)$$

صدق می‌کنند.

۴.۱۰ سطوح فشرده با انحنای گوسی ثابت

این فصل را با قضیه زیبایی برای سطوح، که نظیر ویژگی مثال ۲.۲ برای دایره به عنوان خم‌های مسطح با انحنای ثابت است، خاتمه می‌دهیم.

قضیه ۴.۱۰

هر سطح فشرده که انحنای گوسی آن ثابت باشد کره است.

توجه کنید، براساس گزاره ۶.۷، انحنای گوسی ثابت در این قضیه باید مثبت باشد. اثبات این قضیه به لم زیر بستگی دارد.

لم ۲.۱۰

فرض کنید $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه سطح و شامل نقطه $P = \sigma(u_0, v_0)$ که نقطه نافی نیست باشد. فرض کنید $\kappa_1 \geq \kappa_2$ انحنای اصلی σ و κ_1 دارای ماکزیمم موضعی در نقطه P و κ_2 دارای مینیمم موضعی در آن باشد. در این صورت انحنای گوسی σ در P کوچکتر یا مساوی صفر است.

اثبات ۲.۱۰

چون P نقطه نافی نیست، پس در P ، $\kappa_1 > \kappa_2$ ، لذا با کوچک کردن U اگر لازم باشد، می توان فرض نمود در هر نقطه $\kappa_1 > \kappa_2$.

با استفاده از گزاره ۲.۷ می توان فرض نمود که اولین و دومین شکل اساسی σ بترتیب

$$Edu^2 + Gdv^2 \quad \text{و} \quad Ldu^2 + Ndv^2$$

هستند. با استفاده تمرین ۱۱.۱۰ داریم

$$E_v = -\frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_1)v, \quad G_u = -\frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_2)u$$

با توجه به نتیجه ۲.۱۰(ii)، انحنای گوسی برابر

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right)$$

است، چون P نقطه سکون κ_1 و κ_2 است، داریم $(\kappa_1)v = (\kappa_2)u = 0$ و بنابراین در P ، $E_v = G_u = 0$ (با حذف مجدد جملات E_v و G_u و مشتقات اول κ_2 و κ_1 در P داریم.

$$K = -\frac{1}{2EG}(G_{uu} + E_{vv}) = -\frac{1}{2EG} \left(\frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_2)_{uu} - \frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_1)_{vv} \right)$$

چون κ_1 در P دارای ماکزیمم موضعی است لذا $(\kappa_1)_{vv} \leq 0$ و چون κ_2 در P دارای مینیمم موضعی است لذا $(\kappa_2)_{uu} \geq 0$. بنابراین آخرین معادله نشان می دهد که در P ، $K \leq 0$. \square

اثبات ۴.۱۰

اثبات قضیه ۴.۱۰ مقدارکسی به توپولوژی نیاز دارد. تابع پیوسته $J = (\kappa_1 - \kappa_2)^2$ روی S را که در آن κ_1 و κ_2 انحنای اصلی هستند در نظر بگیرید توجه کنید این تابع خوش تعریف است حتی اگر κ_1 و κ_2 خوش تعریف نباشند، هم بخاطر آن که نمی دانیم کدامیک از انحنایها را κ_1 و کدام را κ_2 بنامیم، هم از آن جهت که علامت انحنایها به انتخاب پرمایش S بستگی دارد. ثابت می کنیم که این تابع روی S برابر صفر است، بنابراین هر نقطه از S یک نقطه نافی است. چون انحنای گوسی $K > 0$ ، از گزاره ۵.۶ نتیجه می شود که S قسمتی از کره مثلاً S می باشد. در حقیقت S باید تمام S باشد. زیرا هر نقطه P از S در قطعه $\mathbb{R}^3: U \rightarrow \sigma$ از S واقع شده و $\sigma(U) = S \cap W$ که در آن W یک زیر مجموعه \mathbb{R}^3 باز است لذا S یک زیر مجموعه باز

S است. از طرف دیگر چون S فشرده است، لزوماً در \mathbb{R}^3 بسته خواهد بود و بنابراین یک زیر مجموعه بسته S است. اما چون S همبند است، تنها زیر مجموعه‌های غیر تهی S که هم باز و هم بسته باشند خود S است.

سپس برای به دست آوردن یک تناقض فرض کنید که J روی S هم‌ارز صفر نشود. چون S فشرده است، J باید مقدار ماکزیمم خود را در نقطه‌ای مانند P در S اتخاذ نماید و این مقدار ماکزیمم مثبت است. قطعه $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ از S شامل P را انتخاب کنید و فرض کنید κ_1 و κ_2 انحنای اصلی آن باشند. چون $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ ، با باز پرمایش در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که κ_1 و κ_2 هر دو مثبت هستند. (به تمرین ۱۷.۶ مراجعه نمایید). فرض کنید در نقطه P ، $\kappa_1 > \kappa_2$ ، بعد در صورت لزوم، با کوچک کردن U ، می‌توانیم فرض کنیم همه جا روی U ، $\kappa_1 > \kappa_2$ ، چون K ثابت و مثبت است لذا تابع $\left(x - \frac{K}{x}\right)^2$ صعودی است، اگر $x > \frac{K}{x} > 0$. چون $\kappa_1 > \frac{K}{\kappa_1} = \kappa_2 > 0$ ، این افزایش تا $x = \kappa_1$ ادامه می‌یابد. بنابراین κ_1 باید یک ماکزیمم موضعی در P داشته باشد و در این صورت $\kappa_2 = \frac{K}{\kappa_1}$ باید یک مینیمم موضعی در آنجا باشد. لذا طبق لم ۲.۱۰، در نقطه P ، $K \leq 0$. این با فرض $K > 0$ متناقض است. \square

تمرین‌ها

۱۲.۱۰ نشان دهید یک سطح فشرده که انحنای گوسی آن همه جا مثبت و انحنای میانگین آن همه جا ثابت باشد یک کره است (مشابه اثبات قضیه ۴.۱۰، اگر κ_1 در نقطه P دارای ماکزیمم موضعی باشد، آنگاه $\kappa_2 = 2H - \kappa_1$ در آن نقطه دارای مینیمم موضعی است).

قضیه گوس-بونه، زیباترین و عمیق‌ترین نتیجه از قضایای سطوح است. مهم‌ترین صورت این قضیه ارتباط بین میانگین انحنای گوسی سطح با خاصیتی از سطح است که «عدد اوپلر» آن نامیده می‌شود که یک واژه «توپولوژیکی» است به این مفهوم که تحت تغییرات پیوسته روی سطح، تغییر نمی‌کند. و چنین تغییراتی، در حالت کلی، مقدار انحنای گوسی را تغییر می‌دهند، اما قضیه می‌گوید میانگین آن روی سطح تغییر نمی‌کند. اهمیت واقعی قضیه گوس-بونه در این است که به عنوان اولین طرح از نتایج مشابه در بعدهای بالاتر به‌کار می‌رود و خواص هندسی را به خواص توپولوژیکی مرتبط می‌کند. مطالعه چنین ارتباطاتی یکی از مهمترین موضوعات ریاضیات قرن بیستم است.

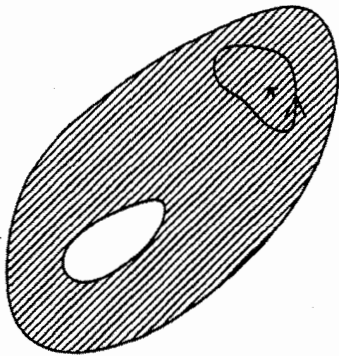
۱.۱۱ گوس-بونه^۱ برای خم‌های بسته ساده

ساده‌ترین شکل قضیه گوس-بونه در باره خم‌های بسته ساده روی سطح است. در حالت خاص که سطح یک صفحه است در مورد این خم‌ها در بخش ۱.۳ بحث کرده ایم. برای سطح در حالت کلی داریم.

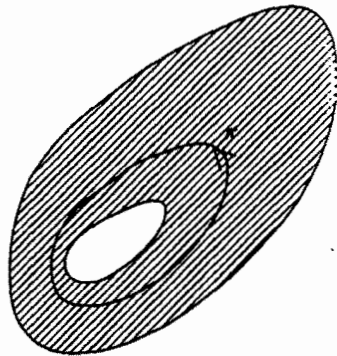
تعریف ۱.۱۱

خم $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ روی قطعه سطح $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ را خم بسته ساده با تناوب a می‌نامیم اگر $\pi(t) = (u(t), v(t))$ خم بسته ساده در \mathbb{R}^2 با تناوب a چنان باشد که ناحیه $\text{int}(\pi)$ در \mathbb{R}^2 که به وسیله π احاطه شده به‌طور کامل در U واقع شود (شکل زیر را ببینید). خم γ را با جهت مثبت می‌نامیم اگر π جهت مثبت داشته باشد. نهایتاً درون γ ، به عنوان تصویر $\text{int}(\pi)$ تحت نگاشت σ تعریف شده و به $\text{int}(\gamma)$ نشان داده می‌شود.

1) Gauss-Bonnet



مجاز



غیرمجاز

حال اولین شکل قضیه گوس-بونه را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱۱

فرض کنید $\gamma(s)$ خم بسته ساده سرعت-واحد روی سطح σ با طول $\ell(\gamma)$ باشد و فرض کنید γ با جهت مثبت باشد. در این صورت

$$\int_0^{\ell(\gamma)} \kappa_g ds = 2\pi - \iint_{int(\gamma)} K dA_\sigma$$

که در آن κ_g انحنای ژئودزیکی γ ، K انحنای گوسی σ و $dA_\sigma = (EG - F^2)^{1/2} du dv$ عنصر مساحت روی σ است (به بخش ۴.۵ مراجعه کنید).

از s برای نمایش پارامتر γ با این تاکید که γ سرعت-واحد است استفاده می‌کنیم.

اثبات ۱.۱۱

مشابه اثبات قضیه ۱.۱۰، در هر نقطه پایه متعامد واحد هموار $\{e', e''\}$ را در صفحه مماس σ چنان انتخاب کنید که $\{e', e'', N\}$ پایه متعامد واحد راست گرد در \mathbb{R}^3 باشد که در آن N بردار قائم واحد σ است. به انتگرال زیر توجه کنید

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\ell(\gamma)} e' \cdot \dot{e}'' ds \\ &= \int_0^{\ell(\gamma)} e' \cdot (e''_u \dot{u} + e''_v \dot{v}) ds \end{aligned}$$

$$= \int_{\pi} (\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}''_u) du + (\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}''_v) dv$$

که با استفاده از قضیه گرین (به بخش ۱.۳ مراجعه کنید) می‌تواند به صورت انتگرال دوگانه بازنویسی شود.

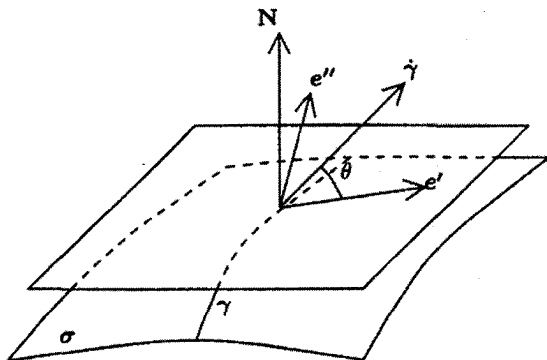
$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_{\text{int}(\pi)} \{(\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}''_v)_u - (\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}''_u)_v\} dudv \\ &= \iint_{\text{int}(\pi)} \{(\mathbf{e}'_u \cdot \mathbf{e}''_v) - (\mathbf{e}'_v \cdot \mathbf{e}''_u)\} dudv \\ &= \iint_{\text{int}(\pi)} \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} dudv \quad (\text{بنابه لم } 1.10) \\ &= \iint_{\text{int}(\pi)} \frac{LN - M^2}{EG - F^2} (EG - F^2)^{1/2} dudv \\ &= \iint_{\text{int}(\pi)} K dA_{\sigma} \end{aligned} \quad (1)$$

حال فرض کنید $\theta(s)$ زاویه بین بردار مماس واحد $\dot{\gamma}$ از γ در $\gamma(s)$ و بردار واحد \mathbf{e}' در همان نقطه باشد. θ صرف نظر از مضارب 2π ، به طور یگانه تعیین می‌شود به طوری که

$$\dot{\gamma} = \cos \theta \mathbf{e}' + \sin \theta \mathbf{e}'' \quad (2)$$

بنابراین

$$\mathbf{N} \times \dot{\gamma} = -\sin \theta \mathbf{e}' + \cos \theta \mathbf{e}'' \quad (3)$$



حالا با استفاده از معادله (۲)

$$\dot{\gamma} = \cos \theta \dot{\mathbf{e}}' + \sin \theta \dot{\mathbf{e}}'' + \dot{\theta}(-\sin \theta \mathbf{e}' + \cos \theta \mathbf{e}'') \quad (4)$$

بنابراین طبق معادلات (۳) و (۴) انحناى ژئودزىكى γ برابر است با

$$\begin{aligned} \kappa_g &= (\mathbf{N} \times \dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} \quad (\text{بخش ۲.۶ را ببینید}) \\ &= \dot{\theta}(-\sin \theta \mathbf{e}' + \cos \theta \mathbf{e}'') \cdot (-\sin \theta \dot{\mathbf{e}}' + \cos \theta \dot{\mathbf{e}}'') \\ &\quad + (-\sin \theta \dot{\mathbf{e}}' + \cos \theta \dot{\mathbf{e}}'') \cdot (\cos \theta \dot{\mathbf{e}}' + \sin \theta \dot{\mathbf{e}}'') \\ &= \dot{\theta} + \cos^2 \theta (\dot{\mathbf{e}}' \cdot \mathbf{e}'') - \sin^2 \theta (\dot{\mathbf{e}}'' \cdot \mathbf{e}') \\ &\quad + \sin \theta \cos \theta (\dot{\mathbf{e}}'' \cdot \mathbf{e}'' - \dot{\mathbf{e}}' \cdot \mathbf{e}') \quad (\text{۳) و (۲) براساس معادله‌های (۲) و (۳)}) \end{aligned}$$

چون \mathbf{e}' و \mathbf{e}'' بردارهای متعامد واحد هستند، لذا

$$\mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{e}}' = \mathbf{e}'' \cdot \dot{\mathbf{e}}'' = 0, \quad \dot{\mathbf{e}}' \cdot \mathbf{e}'' = -\mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{e}}''$$

در نتیجه،

$$\kappa_g = \dot{\theta} - \mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{e}}''$$

و با توجه به تعریف \mathcal{I}

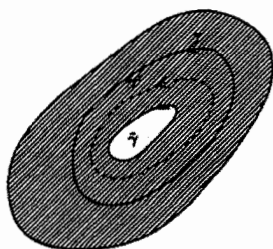
$$\mathcal{I} = \int_0^{\ell(\gamma)} (\dot{\theta} - \kappa_g) ds$$

برای تکمیل اثبات قضیه ۱.۱۱، باید نشان دهیم

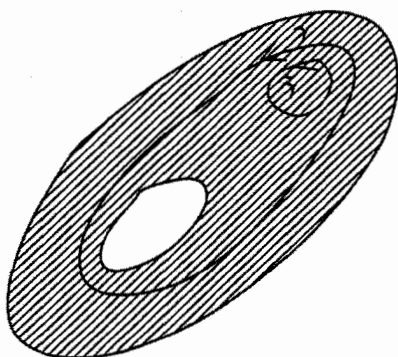
$$\int_0^{\ell(\gamma)} \dot{\theta} ds = 2\pi \quad (5)$$

معادله (۵)، «Hopf's Umlaufsatz» نامیده می‌شود که در زبان آلمانی به طور تحت لفظی به آن «قضیه دوران» گفته می‌شود. نمی‌توانیم اثبات خیلی خوبی از این قضیه را اینجا ارائه دهیم زیرا اثبات تا حدود زیادی ما را به قلمرو توپولوژی می‌برد. در عوض، معادله (۵) را با کمک بحث ابتکاری زیر ثابت می‌کنیم.

مشاهده اصلی این است که اگر $\tilde{\gamma}$ ، خم بسته ساده دیگری واقع در درون γ باشد، آنگاه خانواده هموار از خم‌های بسته ساده γ^t ، $0 \leq t \leq 1$ موجود است به طوری که $\gamma^0 = \tilde{\gamma}$ و $\gamma^1 = \gamma$ (در مورد خانواده خم‌های هموار، بخش ۴.۸ را ببینید). وجود چنین خانواده‌ای، «به طور شهودی معلوم» فرض شده است.



اما توجه کنید این که درون π بطور کامل در U واقع شده بسیار مهم است زیرا در غیر این صورت، در حالت کلی چنین خانواده‌ای وجود ندارد.



مشاهده بعدی این است که انتگرال $\int_{\gamma} \theta ds$ وابستگی پیوسته به τ دارد. بعلاوه چون γ^T و e' ، وقتی که γ^T یکبار طی می‌شود، به مقادیر اصلی شان بر می‌گردند، انتگرال همیشه مضرب صحیحی از 2π است. از این حقایق نتیجه می‌شود که انتگرال مستقل از τ است زیرا بر اساس قضیه مقدار میانی، یک متغیر پیوسته، بدون عبور از یک مقدار غیر صحیح نمی‌تواند از یک عدد صحیح به عدد صحیح دیگر تبدیل شود. بنابراین برای محاسبه $\int_{\gamma} \theta ds$ ، می‌توانیم γ را با، هر خم بسته ساده دیگری در درون γ مانند $\bar{\gamma}$ ، عوض کنیم، زیرا مقدار انتگرال تغییر نخواهد کرد. فرض می‌کنیم $\bar{\gamma}$ در درون π ، تصویر دایره کوچکی تحت σ باشد، به‌طور شهودی معلوم است که

$$\int_{\bar{\gamma}} \theta ds = 2\pi$$

زیرا

- (i) اساساً، e' در همه نقاط $\bar{\gamma}$ ، ثابت است (زیرا دایره خیلی کوچک است)
(ii) بردار مماس به $\bar{\gamma}$ وقتی که $\bar{\gamma}$ را یکبار طی می‌کند به اندازه 2π دوران می‌کند زیرا درون $\bar{\gamma}$ ، اساساً، به عنوان قسمتی از صفحه مطرح است و «به‌طور شهودی معلوم» است که بردار مماس یک خم بسته ساده در صفحه، وقتی که خم را یکبار طی می‌کند، به اندازه 2π دوران می‌کند.

□ بدین ترتیب اثبات «Hopf's Umlaufsatz» و در نتیجه اثبات قضیه ۱.۱۱ کامل می‌شود.

تمرین‌ها

۱.۱۱ قطعه سطح σ در هر نقطه دارای انحنای گوسی کمتر یا مساوی صفر است. ثابت کنید ژودزیک بسته ساده در σ موجود نیست. این را با این حقیقت که موازی‌های استوانه دایره‌گون، ژودزیک‌ها هستند چگونه تطبیق می‌دهید؟

۲.۱۱ فرض کنید $\gamma(s)$ خم بسته ساده در \mathbf{R}^2 با طول کل $\ell(\gamma)$ باشد که با طول-قوس پرمایش شده است. از قضیه «Hopf's Umlaufsatz» نتیجه بگیرید، اگر $\kappa_g(s)$ انحنای علامت‌دار γ باشد، آنگاه

$$\int_0^{\ell(\gamma)} \kappa_g(s) ds = 2\pi$$

(از گزاره ۲.۲ استفاده کنید)

۲.۱۱ گوس-بونه برای چند ضلعی‌های منحنی‌الخط

به‌خاطر صورت دیگر قضیه گوس-بونه، باید نماد خم را به خم‌هایی که مجاز به داشتن گوشه‌ها هستند تعمیم دهیم به‌طور دقیقتر، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲.۱۱

یک چند ضلعی منحنی‌الخط در \mathbf{R}^2 نگاشتی پیوسته مانند $\pi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ است به‌طوری‌که عدد حقیقی a و نقاط $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = a$ موجود باشند که

(i) $\pi(t) = \pi(t')$ اگر و فقط اگر $t - t'$ مضرب صحیحی از a باشد

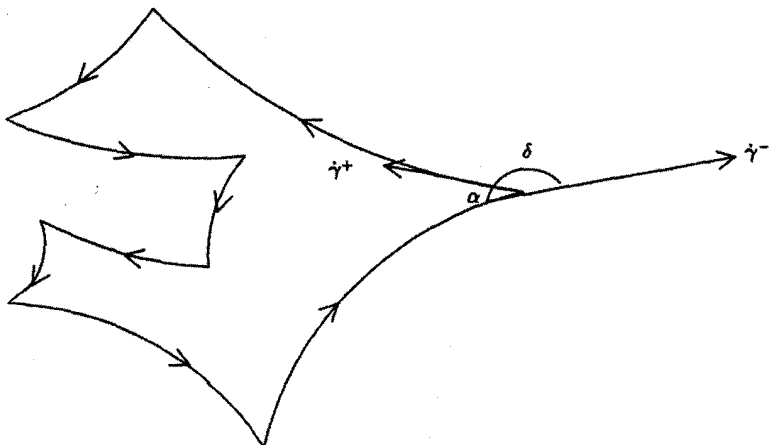
(ii) روی هر یک از زیر بازه‌های $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n)$ هموار باشد.

(iii) مشتقات یک طرفه

$$\dot{\pi}^-(t_i) = \lim_{t \uparrow t_i} \frac{\pi(t) - \pi(t_i)}{t - t_i}, \quad \dot{\pi}^+(t_i) = \lim_{t \downarrow t_i} \frac{\pi(t) - \pi(t_i)}{t - t_i} \quad (6)$$

به ازای $i = 1, \dots, n$ ، موجود، مخالف صفر و غیر موازی باشد.

نقاط $\gamma(t_i), i = 1, \dots, n$ را رئوس چند ضلعی منحنی الخط π می‌گوییم و قطعه‌هایی از آن را که متناظر به بازه‌های (t_{i-1}, t_i) هستند، یال‌های آن می‌نامیم. چند ضلعی منحنی الخط π را با جهت مثبت می‌گوییم اگر برای هر t که $\pi(t)$ رأس نیست، جهت بردار \mathbf{n}_π که از دوران π در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه $\frac{\pi}{4}$ ، حاصل می‌شود به سمت $\text{int}(\pi)$ باشد. ناحیه $\text{int}(\pi)$ محدود شده به وسیله π ، معنی و مفهوم دارد، زیرا قضیه خم زردان برای چند ضلعی‌های منحنی الخط در صفحه به کار می‌رود.



حال فرض کنید $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه سطح و $\pi: \mathbb{R} \rightarrow U$ یک چند ضلعی منحنی الخط در U ، مانند تعریف ۲.۱۱ باشند. در این صورت $\gamma = \sigma \circ \pi$ را یک چند ضلعی منحنی الخط روی قطعه سطح σ می‌نامیم، $\text{int}(\gamma)$ ، تصویر $\text{int}(\pi)$ تحت σ است رئوس γ نقاط $\gamma(t_i), i = 1, \dots, n$ و یال‌هایی σ قسمت‌های متناظر به بازه‌های باز (t_{i-1}, t_i) هستند، چون σ مجاز است، مشتقات یک طرفه

$$\dot{\gamma}^-(t_i) = \lim_{t \uparrow t_i} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_i)}{t - t_i}, \quad \dot{\gamma}^+(t_i) = \lim_{t \downarrow t_i} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_i)}{t - t_i}$$

موجود و غیر موازی هستند.

فرض کنید θ_i^\pm زوایای بین \mathbf{e}' و $\dot{\gamma}^\pm(t_i)$ باشند که براساس معادله (۲) تعریف شده است، و فرض کنید $\theta_i^+ - \theta_i^- = \delta_i$ زاویه خارجی و $\alpha_i = \pi - \delta_i$ زاویه داخلی در رأس $\gamma(t_i)$ باشد. از آنجایی که بردارهای مماس $\dot{\gamma}^+(t_i)$ و $\dot{\gamma}^-(t_i)$ موازی نیستند، زاویه δ_i مضربی از π نخواهد بود. توجه کنید که همه این زوایا صرف نظر از مضارب 2π خوش تعریف هستند. از حالا فرض می‌کنیم که به ازای $i = 1, \dots, n$ ، $0 < \alpha_i < 2\pi$.

چندضلعی منحنی الخط γ را سرعت-واحد می‌نامیم اگر در جایی که $\dot{\gamma}$ تعریف شده مثلاً

در t هایی که $\gamma(t)$ رأس γ نیست داشته باشیم $\|\dot{\gamma}\| = 1$. جایی که γ سرعت-واحد باشد از پارامتر s برای نمایش γ استفاده می‌کنیم. در این صورت تناوب γ با طول آن، $\ell(\gamma)$ ، که مجموع طول یال‌های آن است برابر است.

قضیه ۲.۱۱

فرض کنید γ چند ضلعی منحنی‌الخط سرعت-واحد باجهت مثبت و با n یال روی سطح σ باشد و فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ زوایای داخلی رئوس آن باشند. در این صورت

$$\int_0^{\ell(\gamma)} \kappa_g ds = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi - \iint_{\text{int}(\gamma)} K dA_\sigma$$

اثبات ۲.۱۱

بحث مشابه قضیه ۱.۱۱ نشان می‌دهد

$$\int_0^{\ell(\gamma)} \kappa_g ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \theta ds - \iint_{\text{int}(\gamma)} K dA_\sigma$$

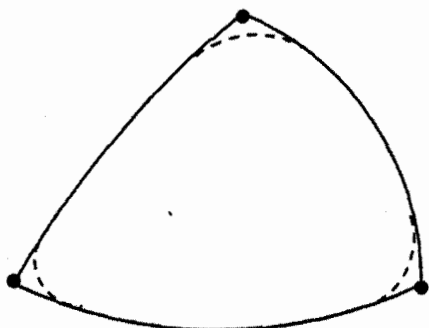
می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\int_0^{\ell(\gamma)} \theta ds = 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i \quad (۷)$$

با این فرض داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell(\gamma)} \kappa_g ds &= 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i - \iint_{\text{int}(\gamma)} K dA_\sigma \\ &= 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) - \iint_{\text{int}(\gamma)} K dA_\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi - \iint_{\text{int}(\gamma)} K dA_\sigma \end{aligned}$$

برای به‌دست آوردن معادله (۷)، مانند آنچه که در شکل زیر نمایش داده شده، فرض می‌کنیم هر رأس «هموار» است.



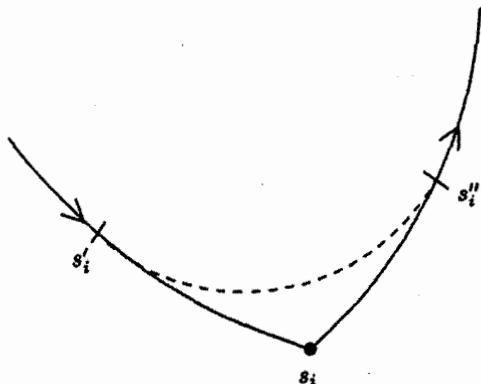
اگر خم «هموار شده» $\tilde{\gamma}$ هموار باشد (۱) در این صورت

$$\int_0^{\ell(\tilde{\gamma})} \dot{\theta} ds = 2\pi \quad (۸)$$

چون بجز در نزدیکی رأس‌ها، $\tilde{\gamma}$ و γ مانند هم هستند، لذا تفاضل

$$\int_0^{\ell(\tilde{\gamma})} \dot{\theta} ds - \int_0^{\ell(\gamma)} \dot{\theta} ds \quad (۹)$$

مجموع n سهم در نزدیکی هر رأس است.



نزدیک $\gamma(s_i)$ وقتی که s به بازه کوچک مثلاً (s'_i, s''_i) که به عنوان مثال شامل s_i است متعلق باشد، تصویر γ و $\tilde{\gamma}$ یکی است بنابراین سهم تمامین رأس برابر با

$$\int_{s'_i}^{s''_i} \dot{\theta} ds - \int_{s'_i}^{s_i} \dot{\theta} ds - \int_{s_i}^{s''_i} \dot{\theta} ds$$

است. اولین انتگرال زاویه بین $\dot{\gamma}(s'_i)$ و $\dot{\gamma}(s''_i)$ است که وقتی s'_i و s''_i به s_i میل کنند، زاویه بین $\dot{\gamma}^+(s_i)$ و $\dot{\gamma}^-(s_i)$ مثلاً δ_i می شود. از طرف دیگر $\gamma(s)$ در هر دو بازه (s', s_i) و (s_i, s''_i) هموار است، لذا دو انتگرال آخری، وقتی s'_i و s''_i به s_i میل کنند به صفر میل می کنند. بنابراین سهم عبارت (۹) از نسامین رأس وقتی s'_i و s''_i به s_i میل کنند به δ_i میل می کند. با جمع بندی روی همه رأس ها به دست می آوریم

$$\int_0^{\ell(\tilde{\gamma})} \dot{\theta} ds - \int_0^{\ell(\gamma)} \dot{\theta} ds = \sum_{i=1}^n \delta_i$$

□ اکنون معادله (۷)، از این تساوی و معادله (۸) حاصل می شود.

نتیجه ۱.۱۱

اگر γ یک چند ضلعی منحنی الخط با n یال که هر یک کمان هایی از ژئودزیک هستند باشد، در این صورت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ، زوایای داخلی چند ضلعی، در تساوی زیر صدق می کنند.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi + \iint_{int(\gamma)} K dA_\sigma$$

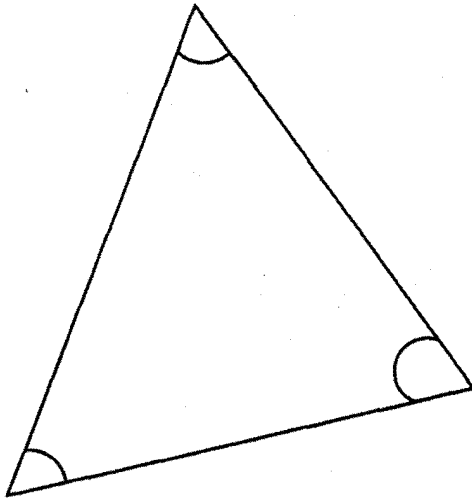
اثبات ۱.۱۱

□ این نتیجه فوری قضیه ۲.۱۱ است، چون در امتداد ژئودزیک $\kappa_g = 0$.

به عنوان حالت خاص نتیجه ۱.۱۱، به $-n$ ضلعی در صفحه با یال های مستقیم توجه کنید. چون برای صفحه مقدار K صفر است، از نتیجه ۱.۱۱، نتیجه معروف هندسه مقدماتی، یعنی رابطه

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$$

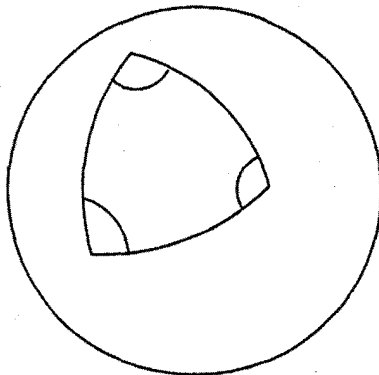
حاصل می شود.



برای n -ضلعی منحنی الخط روی کره واحد که یال‌هایش کمان‌هایی از دایر عظیمه هستند، داریم $K = 1$ ، بنابراین $\sum \alpha_i$ از مقدار صفحه، یعنی $(n - 2)\pi$ به اندازه مساحت چند ضلعی $\iint dA_\sigma$ بیشتر است. با فرض $n = 3$ ، مثلث کروی ABC را داریم که یال‌هایش کمان‌هایی از دایر عظیمه هستند و

$$A(ABC) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

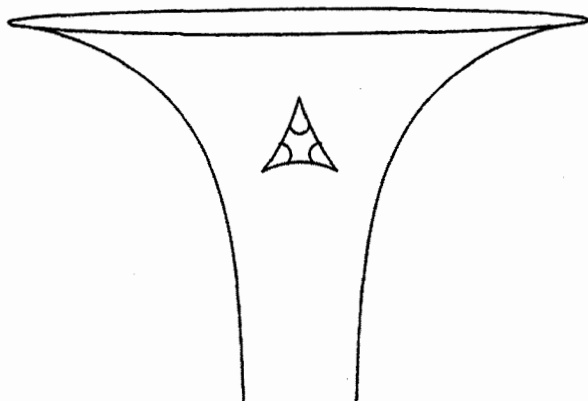
این دقیقاً قضیه ۵.۵ است که حالت خاص گوس-بونه است.



نهایتاً برای یک n ضلعی ژئودزیک روی کره‌نما (به بخش ۲.۷ مراجعه کنید) که برای آن $K = -1$ ، داریم که $\sum \alpha_i$ به اندازه مساحت چند ضلعی کمتر از $(n - 2)\pi$ است. در حالت

خاص، برای یک مثلث ژئودزیک ABC روی کره‌نما:

$$A(ABC) = \pi - \angle A - \angle B - \angle C$$



تمرین‌ها

۳.۱۱ فرض کنید برای قطعه سطح σ انحناي گوسی K ، همه جا، در شرط $K \leq -1$ صدق کند و γ یک n -ضلعی منحنی‌الخط روی σ باشد که یال‌هایش ژئودزیک هستند. نشان دهید $n \geq 3$ و اگر $n = 3$ ، مساحت محدود به γ نمی‌تواند بیشتر از π باشد.

۴.۱۱ سطح دورانی

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

را در نظر بگیرید که در آن $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ خم سرعت‌واحد در صفحه xz است. فرض کنید $u_1 < u_2$ ثابت باشند و γ_1 و γ_2 موازی $u = u_1$ و $u = u_2$ روی σ باشند. فرض کنید R ناحیه‌ای در صفحه uv باشد که با رابطه

$$u_1 \leq u \leq u_2, \quad 0 < v < 2\pi$$

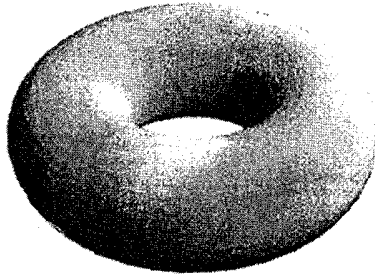
داده شده است. مقادیر

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \kappa_g ds, \quad \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \kappa_g ds, \quad \iint_R K dA_\sigma$$

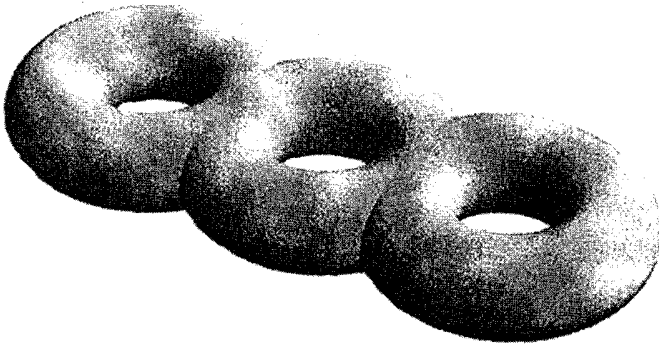
را به دست آورید و نتایج را بر اساس قضیه گوس-بونه شرح دهید.

۳.۱۱ گوس-بونه برای سطوح فشرده

مهمترین صورت قضیه گوس-بونه، در مورد سطح فشرده است. نتیجه خیلی عجیب این است که صرف نظر از دیفئومورفیسم‌ها، تعداد کمی سطح فشرده در \mathbb{R}^3 موجود است و ما می‌توانیم همه آنها را به طور دقیق تشریح نماییم. البته ساده‌ترین مثال، کره و مثال ساده بعدی، چنبره است که از دوران دایره‌ای در صفحه xy ، که محور z ها را قطع نمی‌کند و حول محور z ها دوران می‌یابد حاصل می‌شود.



هم‌چنین می‌توان چنبره‌هایی را به هم متصل کرد.



این سطح را به T_g نشان می‌دهیم که در آن g تعداد حفره‌ها است و گونای سطح نامیده می‌شود، (کره، حالت $g = 0$ است). قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم:

قضیه ۳.۱۱

برای هر عدد صحیح $g \geq 0$ ، می‌توان اطلسی برای T_g ارائه داد که آن را به یک سطح هموار تبدیل کند. به علاوه، هر سطح فشرده با یکی از T_g ها دیفئومرفیک است.

صورتی از قضیه گوس-بونه که قصد داریم به آن اشاره کنیم، از پوشاندن سطح فشرده S با چند

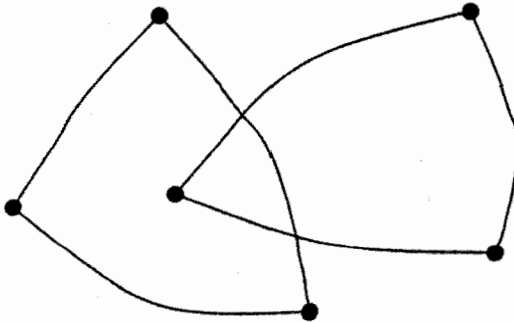
ضلعی‌های منحنی‌الخط که به طرز زیبایی به هم متصل می‌شوند به دست می‌آید، قضیه ۲.۱۱ را برای هر یک بکار می‌بریم و نتایج را نشان می‌دهیم. برای روشن شدن آن با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۳.۱۱

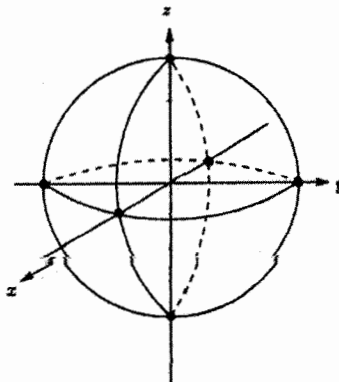
فرض کنید S یک سطح با اطلسی مشتمل بر قطعه‌های $U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$: σ_i باشد. یک مثلث‌بندی از S ، دسته‌ای از چند ضلعی‌های منحنی‌الخط است که (درون) هر یک در یکی از $\sigma_i(U_i)$ واقع شده است به طوری که

- (i) هر نقطه S حداقل در یکی از چند ضلعی‌های منحنی‌الخط است.
- (ii) دو چند ضلعی منحنی‌الخط مجزا یا در یک یال و یا در یک رأس مشترک هستند.
- (iii) هر یال، یال دقیقاً دو چند ضلعی است.

بنابراین وضعیت‌های مشابه



مجاز نیست. یک مثلث‌بندی از کره واحد با ۸ چند ضلعی از تقاطع کره با سه صفحه مختصات به دست می‌آید:



بدون اثبات بیان می‌کنیم:

قضیه ۴.۱۱

هر سطح فشرده دارای یک مثلث بندی با تعداد متناهی چند ضلعی است.

عدد زیر، وابسته به هر مثلث بندی را معرفی می‌کنیم

تعریف ۴.۱۱

عدد اویلر χ از مثلث بندی سطح فشرده S عبارت است از

$$\chi = V - E + F$$

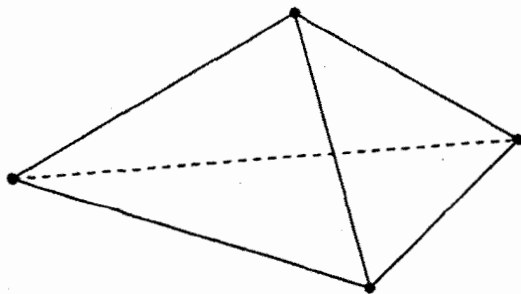
که در آن

V = تعداد کل رئوس در مثلث بندی

E = تعداد کل یال‌ها در مثلث بندی

F = تعداد کل چند ضلعی‌ها در مثلث بندی

در مثلث بندی بالا برای کره، $V = ۶$ ، $E = ۱۲$ و $F = ۸$ است. بنابراین $\chi = ۲ = ۶ - ۱۲ + ۸$. اهمیت عدد اویلر در این است که اگر چه در حالت کلی، مثلث بندی‌های مختلف یک سطح دارای تعداد رئوس، یال‌ها و چند ضلعی‌های متفاوت هستند، ولی χ مستقل از مثلث بندی است و فقط به سطح وابسته است. برای مثال می‌توانیم مثلث بندی دیگری از کره با «متورم کردن» چهار وجهی معمولی ارائه دهیم.



این بار $V = ۴$ ، $E = ۶$ و $F = ۴$ بنابراین $\chi = ۲ = ۴ - ۶ + ۴$ که همان عدد قبلی است. این خاصیت χ ، نتیجه قضیه زیر است که توسیع قضیه ۲.۱۱ برای سطوح فشرده است:

قضیه ۵.۱۱

فرض کنید S یک سطح فشرده باشد. در این صورت برای هر مثلث بندی از S

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi$$

که در آن χ عدد اویلر مثلث بندی است.

لازم است مفهوم سمت چپ معادله در قضیه ۵.۱۱ را توضیح دهیم. یک مثلث بندی از S با چند ضلعی‌های P_i را در نظر بگیرید. هر P_i در تصویر یک قطعه مانند $U_i: \sigma_i$ در اطلس S واقع است. فرض کنید $P_i = \sigma_i(R_i)$ در آن $R_i \subseteq U_i$. در این صورت طبق تعریف

$$\iint_S K dA = \sum_i \iint_{R_i} K dA_{\sigma_i}$$

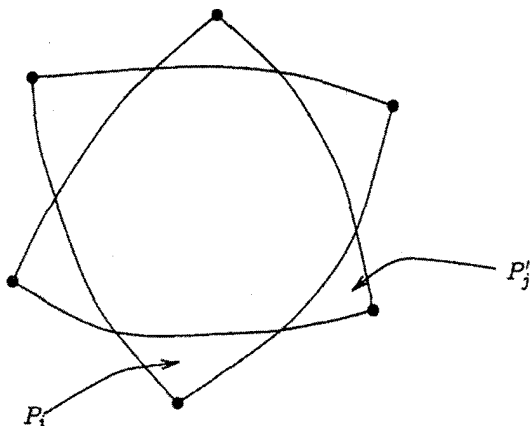
که در آن K انحنای گوسی σ_i است. ولی باید نشان دهیم که این تعریف، تعریف خوبی است یعنی به انتخاب ما از قطعه σ_i همچنین به خود مثلث بندی وابسته نیست (چون برای مثلث بندی داده شده ممکن است، P_i در بیش از یک قطعه واقع شود)

برای دیدن این مطلب، ابتدا توجه کنید که اگر $\tilde{U}_i: \tilde{\sigma}_i \rightarrow \mathbf{R}^3$ باز پیمایش σ_i باشد و اگر $P_i = \tilde{\sigma}_i(\tilde{R}_i)$ که در آن $\tilde{R}_i \subseteq \tilde{U}_i$ در این صورت طبق تعریف

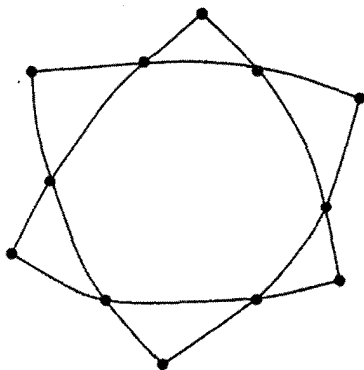
$$\iint_{R_i} K dA_{\sigma_i} = \iint_{\tilde{R}_i} K dA_{\tilde{\sigma}_i}$$

زیرا هم عنصر مساحت dA_{σ} و هم انحنای گوسی K ، تحت بازپیمایش تغییر نمی‌کنند (به گزاره ۳.۵ و تمرین ۱۷.۶ مراجعه کنید).

سپس توجه کنید، اگر $\{P_i\}$ و $\{P'_j\}$ دو مثلث بندی از S باشند، به طور شهودی بدیهی است که ما می‌توانیم مثلث بندی سومی مانند $\{P''_k\}$ از S پیدا کنیم به طوری که هر P_i و همین طور هر P'_j ، اجتماعی از بعضی از P''_k ها است به عنوان مثال اگر P_i ای روی P'_j مطابق شکل زیر قرار بگیرد:



در این صورت با افزودن رأس‌های اضافی می‌توانیم چند ضلعی‌های مناسب P_k'' را ایجاد می‌کنیم:



بنابراین (با مشاهده علائم) روشن است که

$$\sum_i \iint_{R_i} K dA_{\sigma_i} = \sum_j \iint_{R_j} K dA_{\sigma_j}$$

زیرا هر دو طرف با

$$\sum_k \int_{R_k''} K dA_{\sigma_k''}$$

برابرنند. این فقط به این دلیل است که انتگرال K روی اجتماع تعداد متناهی چند ضلعی که همگی در یک قطعه سطح واقع هستند، برابر با مجموع انتگرال‌های روی هر چند ضلعی است. زیرا هر دو چندضلعی مجزا، یا فقط در رأس و یا فقط در یال مشترک هستند. لذا همراه با این حقیقت که $\iint_{\sigma} K dA$ مستقل از مثلث‌بندی است قضیه ۵.۱۱ نتیجه می‌شود.

نتیجه ۲.۱۱

عدد اویلر مثلث بندی سطح فشرده S فقط به S وابسته است و به انتخاب مثلث بندی وابسته نیست.

حال اثبات قضیه ۵.۱۱ را ارائه می‌دهیم.

اثبات ۲.۱۱

مشابه بالا، یک مثلث بندی روی S با چند ضلعی‌های P_i که هر یک در تصویر قطعه $\mathbf{R}^3 : U_i \rightarrow$ مشابه بالا، واقع هستند در نظر بگیرید و فرض کنید $P_i = \sigma_i(R_i)$ که در آن $R_i \subseteq U_i$ ، طبق قضیه ۲.۱۱

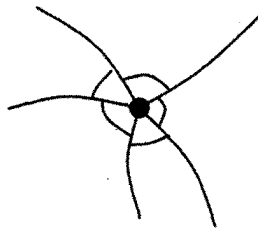
$$\iint_{R_i} K dA_{\sigma_i} = \angle_i - (n_i - 2)\pi + \int_0^{\ell(\gamma_i)} \kappa_g ds \quad (10)$$

که در آن n_i تعداد رئوس P_i و γ_i چند ضلعی منحنی الخطی است که مرز P_i را تشکیل می‌دهد، $\ell(\gamma_i)$ طول آن و \angle_i مجموع زوایای داخلی آن است. بنابراین باید سهم هر یک از سه عبارت سمت راست معادله (۱۰) را روی همه چند ضلعی‌های P_i در مثلث بندی، جمع بیندیم. اولاً $\sum_i \angle_i$ ، مجموع همه زوایای داخلی همه چند ضلعی‌ها است. در هر رأس چندین چند

ضلعی مشترک هستند، اما جمع زوایا در رأس بوضوح 2π است، بنابراین

$$\sum_i \angle_i = 2\pi V \quad (11)$$

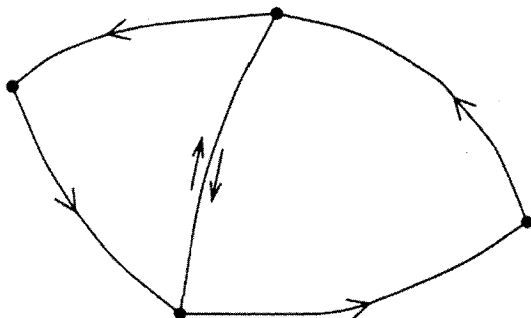
که در آن V تعداد کل رئوس است.



ثانیاً

$$\sum_i (n_i - 2)\pi = \left(\sum_i n_i \right) \pi - 2\pi F = 2\pi E - 2\pi F \quad (12)$$

که در آن F تعداد کل چند ضلعی‌ها و E تعداد کل یال‌ها است، زیرا در جمع $\sum_i n_i$ هر یال دو بار شمرده می‌شود (هر یال، یال دقیقاً دو چند ضلعی است).



نهایتاً ادعا می‌کنیم

$$\sum_i \int_{\sigma_i}^{\ell(\sigma_i)} \kappa_g ds = 0 \quad (13)$$

در واقع توجه کنید که در حاصل جمع معادله (۱۳)، در طول هر یال دوبار، یکی در جهت دیگری، انتگرال گرفته‌ایم. طبق معادله (۵) در فصل ۶، وقتی خم داده شده در جهت عکس، پیموده می‌شود، κ_g تغییر می‌کند، بنابراین این دو انتگرال همدیگر را خنثی می‌کنند. لذا تغییرات سهم در حاصل جمع معادله (۱۳) جفت به جفت خنثی شده و معادله (۱۳) ثابت می‌شود. با در نظر گرفتن معادلات (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) داریم

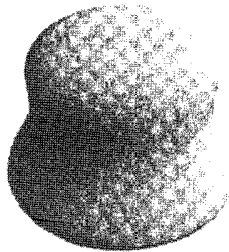
$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \sum_i \iint_{R_i} K dA_{\sigma_i} \\ &= \sum_i \angle_i - \sum_i (n_i - 2)\pi + \sum_i \int_{\sigma_i}^{\ell(\gamma_i)} \kappa_g ds \\ &= 2\pi V - (2\pi E - 2\pi F) + 0 \\ &= 2\pi\chi \end{aligned}$$

□ بدین ترتیب قضیه ۵.۱۱ ثابت می‌شود.

برای دیدن این که چرا قضیه ۵.۱۱، جالب است اجازه دهید آن را روی کره S^2 بکار ببریم. در این حالت $\chi = 2$ بنابراین

$$\iint_{S^2} K dA = 4\pi \quad (14)$$

البته، این نتیجه به هیچ وجه جالب نیست زیرا $K = 1$ ، بنابراین سمت چپ معادله (۱۴) دقیقاً مساحت کره است. اما حالا فرض کنید که کره را تغییر دهیم مثلاً کره را مثل یک لاستیک تصور می‌کنیم و آن را به هر طریقی که دوست داریم می‌کشیم و امتداد می‌دهیم، بدون اینکه پاره شود.



برای این کره تغییر یافته K ثابت نبوده و محاسبه مستقیم آن از انتگرال $\iint_S K dA$ مشکل خواهد بود. اما اگر با یک مثلث بندی از کره تغییر نیافته شروع کنیم، در این صورت بعد از تغییر، مثلثی بندی کره تغییر یافته، همان تعداد رأس، یال و چند ضلعی را خواهد داشت که مثلث بندی اولیه دارا بوده است. در نتیجه، عدد اویلر کره تغییر یافته همان عدد اویلر کره تغییر نیافته یعنی ۲ است بنابراین طبق قضیه ۵.۱۱، $\iint_S K dA = 4\pi$ (در حالت کلی، بحث اخیر نشان می‌دهد که عدد اویلر هر سطح فشرده، وقتی که سطح بدون پاره شدن تغییر کند، تغییر نخواهد کرد).

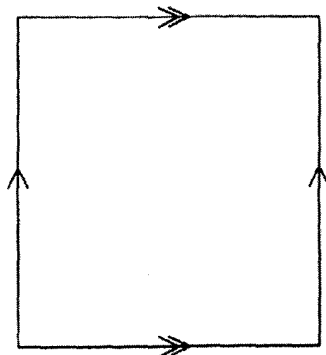
حالت کلی را با محاسبه عدد اویلر همه سطح فشرده کامل می‌کنیم.

قضیه ۶.۱۱

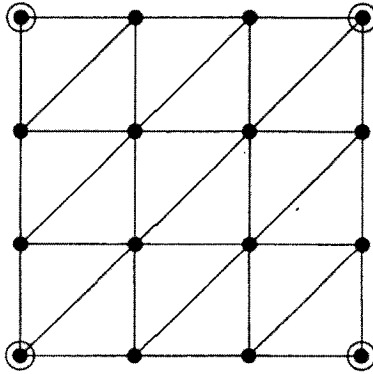
عدد اویلر سطح فشرده T_g ، از گونای g ، $2g - 2$ است.

اثبات ۶.۱۱

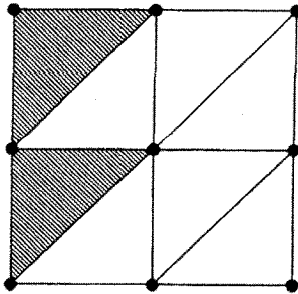
فرمول در حالت $g = 0$ ، درست است زیرا می‌دانیم که برای کره $\chi = 2$. حال آن را برای چنبره T_1 ثابت می‌کنیم. برای پیدا کردن یک مثلث بندی از چنبره، از این حقیقت که چنبره از اتصال یال‌های مقابل یک مربع در صفحه حاصل می‌شود، استفاده می‌کنیم.



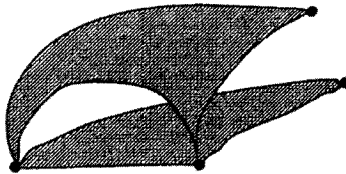
مربع را به مثلث‌هایی، مطابق شکل زیر، تقسیم می‌کنیم:



با این مثلث بندی برای T_1 داریم $E = 27$ ، $V = 9$ و $F = 18$. باید در شمارش دقت نمود به عنوان مثال، چهار رأس دایره‌ای شکل در مربع، متناظر به یک رأس چنبره است. بعلاوه توجه کنید هر مثلث بندی روی مربع قابل قبول نیست، مثلاً تقسیم بندی زیر



قابل قبول نیست، زیرا بعد از چسباندن، دو مثلث هاشورزده، در دو رأس مشترک هستند که مجاز نیست:

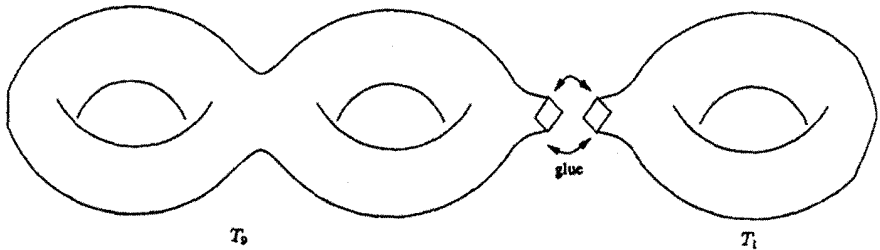


اما تقسیم بندی ظریفتر بالا کاراست، و نتیجه می‌دهد

$$\chi = 9 - 27 + 18 = 0 = 2 - 2 \times 1$$

که قضیه را در حالت $g = 1$ ، اثبات می‌کند.

اکنون اثبات را با استقرار روی g به پایان می‌رسانیم، از این حقیقت که T_{g+1} می‌تواند با چسباندن یک کپی از T_1 به T_g حاصل شود استفاده می‌کنیم



فرض کنید چسباندن را با حذف یک منحنی‌الخط n ضلعی از T_g و T_1 و چسباندن لبه‌های متناظر انجام دهیم (با داشتن مثلث‌بندی‌های مناسب ثابت از T_g و T_1). اگر V' ، E' و F' رئوس، یال‌ها و چند ضلعی‌ها در مثلث‌بندی T_g ، V'' ، E'' و F'' مربوط به مثلث‌بندی T_1 باشد در این صورت اعداد V ، E و F از مثلث‌بندی T_{g+1} از روابط زیر تعیین می‌شوند

$$V = V' - n + V'' - n + n = V' + V'' - n$$

$$E = E' - n + E'' - n + n = E' + E'' - n$$

$$F = F' - 1 + F'' - 1 = F' + F'' - 2$$

در واقع V ، تعداد V' رأس T_g با اضافه تعداد V'' رأس T_1 بجز آن n رأس از چند ضلعی است که T_g و T_1 در آن به هم چسبیده شده و دوبار محاسبه شده است، بنابراین $V = V' + V'' - n$ ، بحث مشابه در مورد یال‌ها بکار می‌رود و همان چیزی است که بیان شده زیرا n ضلعی که در طول آن T_g و T_1 به هم چسبیده شده‌اند قسمتی از مثلث‌بندی T_{g+1} نیست. بنابراین

$$\begin{aligned} \chi(T_{g+1}) &= V - E + F \\ &= (V' + V'' - n) - (E' + E'' - n) + (F' + F'' - 2) \\ &= V' - E' + F' + V'' - E'' + F'' - 2 \\ &= \chi(T_g) + \chi(T_1) - 2 \\ &= 2 - 2g + 0 - 2 \quad (\text{بنابر فرض استقرای}) \\ &= 2 - 2(g + 1) \end{aligned}$$

□

که نتیجه را برای گوناوی $g + 1$ ثابت می‌کند.

نتیجه ۳.۱۱

داریم

$$\iint_{T_g} K dA = 4\pi(1-g)$$

اثبات ۳.۱۱

□

کافیست قضایای ۵.۱۱ و ۶.۱۱ را باهم ترکیب کنیم.

تمرین‌ها

۵.۱۱ نشان دهید، اگر یک مثلث بندی با مثلث‌های منحنی الخط از یک سطح فشرده با عدد اویلر χ ، دارای V رأس، E یال و F مثلث باشد، آنگاه

$$2F = 2E, \quad E = 3(V - \chi), \quad V \geq \frac{1}{4}(7 + \sqrt{49 - 24\chi})$$

۶.۱۱ یک مثلث بندی از کره دارای n مثلث منحنی الخط است و r مثلث در هر رأس متصل هستند توضیح دهید چرا روی هم $\frac{3n}{r}$ رأس در مثلث بندی وجود دارد، تعداد یال‌های را بنویسید.

نشان دهید

$$\frac{6}{r} - \frac{4}{n} = 1$$

نتیجه بگیرید $r \leq 5$. مثلث بندی کره را در حالت $r = 3, 4, 5$ رسم کنید.

۷.۱۱ نشان دهید با ۵ نقطه روی کره، نمی‌توان هر جفت را به وسیله خم‌هایی روی کره که فقط در نقاط داده شده متقاطعند به هم مربوط ساخت. (چنین مجموعه‌ای از خم‌ها، یک مثلث بندی از کره می‌سازند که در آن $2E \geq 3F$ ، چون هر وجه حداقل دارای ۳ یال است.) نشان دهید که نتیجه مشابه برقرار است اگر «کره» با «صفحه» جایگزین شود. (تصویر کنج نگاری را بکار ببرید.)

۸.۱۱ فرض کنید $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ نقاطی روی کره باشند. نشان دهید ممکن نیست هر P را به Q با ۹ خم روی کره که فقط در نقاط داده شده متقاطع باشند به هم وصل کرد. (این مسئله بعضی اوقات «مسئله رفع حوائج» خوانده می‌شود، P_1, P_2 و P_3 را گاز، آب و برق تصور کنید که به خانه‌های Q_1, Q_2, Q_3 رسانده شوند.)

۹.۱۱ نشان دهید، اگر سطح فشرده S دیفئومرفیک با چنبره T_1 باشد، آنگاه

$$\iint_S K dA = 0$$

آیا برای چنین سطحی در هر نقطه، K مساوی صفر است.

۱۰.۱۱ نشان دهید، اگر S بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

که در آن a و b ثابت‌های مثبت‌اند باشد، آنگاه

$$\iint_S K dA = 4\pi$$

با محاسبه مستقیم انتگرال بالا، نشان دهید که

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ab^2 \cos \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta = 2$$

۱۱.۱۱ فرض کنید S یک سطح فشرده است که انحنا ی گوسی آن در هر نقطه بزرگتر از صفر است.

نشان دهید S دیفئومرفیک با کره است آیا عکس این عبارت صحیح است؟

۱۲.۱۱ یکی از سطوح زیر فشرده و دیگری فشرده نیست

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad (i)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (ii)$$

این سطح کدام است؟ چرا؟ سطح فشرده را رسم کنید و عدد اویلر آن را بنویسید.

۴.۱۱ نقاط تکین میدان‌های برداری

فرض کنید S یک سطح و V یک میدان برداری مماس هموار روی S باشد. بدین معنا که،

اگر $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک قطعه از S و (u, v) مختصات U باشد، آنگاه

$$V = \alpha(u, v)\sigma_u + \beta(u, v)\sigma_v$$

که در آن α و β توابع هموار روی U هستند. به سادگی دیده می‌شود که هموار بودن به انتخاب

قطعه σ وابسته نیست (تمرین ۱۴.۱۱ را ببینید).

تعریف ۵.۱۱

اگر V یک میدان برداری مماس هموار روی S باشد، نقطه P از S که در آن $\nabla = 0$ ، نقطه سکون V خوانده می‌شود.

دلیل این واژه این است که در اثبات گزاره ۴.۷ دیدیم به ازای هر نقطه P از S ، خم منحصر بفرد $\gamma(t)$ روی S وجود دارد به طوری که $\dot{\gamma} = V$ و $\gamma(0) = P$. خم انتگرال V خوانده می‌شود. γ را می‌توان به صورت مسیر طی شده به وسیله ذره سیالی که روی سطح در حرکت است فرض نمود. اگر در P ، $\nabla = 0$ ، آنگاه سرعت جریان، $\dot{\gamma}$ ، در P صفر است بنابراین مایع در آنجا در حال سکون است.

قضیه‌ی را ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهد تعداد نقاط سکون هر میدان برداری مماس هموار روی سطح فشرده S ، با احتساب تکرار مناسب، برابر عدد اوپلر S است. برای تعریف این تکرار، فرض کنید P یک نقطه سکون V واقع در قطعه سطح $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ از S باشد فرض کنید $P, \sigma(u_0, v_0) = P$ تنها نقطه سکون V در ناحیه $\sigma(U)$ و ξ میدان برداری مماس هموار روی $\sigma(U)$ باشد که مخالف صفر است (به عنوان مثال، می‌توان فرض نمود σ_u یا $\sigma_v = \xi$) و فرض کنید ψ زاویه بین V و ξ باشد.

تعریف ۶.۱۱

با فرض و قرارداد بالا، تکرار نقطه سکون P از میدان برداری مماس V برابر است:

$$\mu(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell(\gamma)} \frac{d\psi}{ds} ds$$

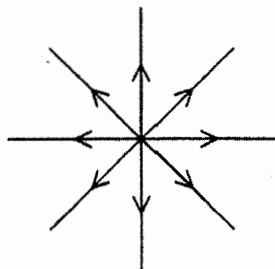
که در آن $\gamma(s)$ هر خم بسته ساده سرعت-واحد با جهت مثبت و با طول $\ell(\gamma)$ در $\sigma(U)$ است که P نقطه داخلی آن است.

روشن است که $\mu(P)$ یک عدد صحیح است و بحث مشابهی نظیر اثبات Hopf's Umlaufsatz در بخش ۱.۱۱ نشان می‌دهد که $\mu(P)$ به انتخاب خم بسته ساده γ بستگی ندارد. به علاوه به سادگی دیده می‌شود که به انتخاب میدان برداری «مرجع» ξ نیز بستگی ندارد. (تمرین ۱۵.۱۱ را ببینید).

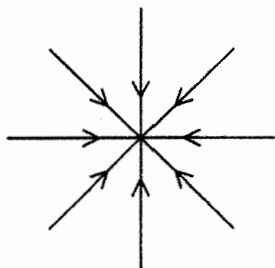
مثال ۱.۱۱

میدان‌های برداری مماس هموار زیر در صفحه دارای نقاط سکون با تکرار مشخص شده در مرکز هستند (خم‌های انتگرالی میدان‌های برداری را به خاطر واضح بودنشان نشان داده‌ایم):

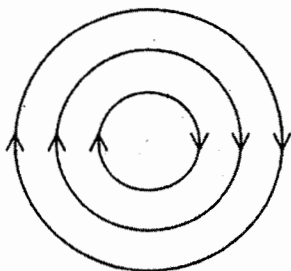
$$\mu = +1; \mathbf{V}(x, y) = (x, y) \quad (i)$$



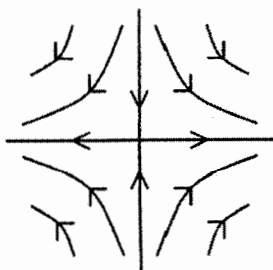
$$\mu = +1; \mathbf{V}(x, y) = (-x, -y) \text{ (ii)}$$



$$\mu = +1; \mathbf{V}(x, y) = (y, -x) \text{ (iii)}$$



$$\mu = -1; \mathbf{V}(x, y) = (x, -y) \text{ (iv)}$$



نقاط سکون در مثال‌های (i)، (ii)، (iii) و (iv) به ترتیب منبع، چاهک، گردابی و انشعاب خوانده می‌شوند.

به عنوان مثال تکرار در حالت (iv) را بررسی می‌کنیم. میدان بردار مماس «مرجع» را میدان برداری ثابت $(0, 1) = \xi$ در نظر می‌گیریم. در این صورت زاویه ψ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$(\cos \psi, \sin \psi) = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

دایره به شعاع واحد $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$ را در نظر می‌گیریم، در $\gamma(s)$ زاویه ψ در رابطه

$$(\cos \psi, \sin \psi) = (\cos s, -\sin s)$$

صدق می‌کند، بنابراین $\psi = 2\pi - s$ ، لذا

$$\mu(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{ds}(2\pi - s) ds = -1$$

است.

قضیه ۷.۱۱

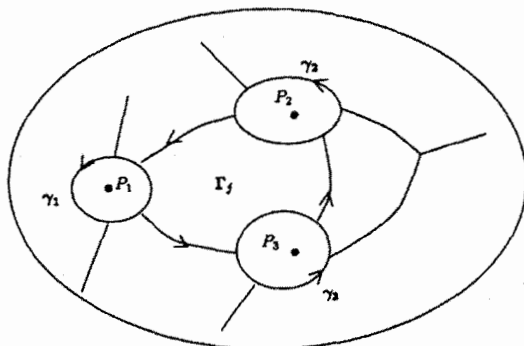
فرض کنید V یک میدان برداری مماس هموار روی سطح فشرده S باشد که تنها دارای تعداد با پایان نقاط سکون است، مثلاً P_1, P_2, \dots, P_n . در این صورت

$$\sum_{i=1}^n \mu(P_i) = \chi$$

که در آن χ عدد اوپلر S است.

اثبات ۷.۱۱

فرض کنید γ_i خم بسته ساده سرعت-واحد با جهت مثبت، واقع در قطعه σ_i از S و P_i نقطه داخلی γ_i باشد. فرض کنید γ_i ها به قدری کوچک اختیار شده باشند که نقاط داخلی آنها جدا از هم‌اند. یک مثلث‌بندی برای S' ، قسمتی از S ، واقع در بیرون $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ با چند ضلعی‌های منحنی‌الخط Γ اختیار کنید. توجه کنید یال‌های بعضی از این چندضلعی‌های منحنی‌الخط قسمتی از خم‌های γ_i است:



همچنين توجه كنيد كه وقتى اين چند ضلعى ها با جهت مثبت باشند، جهت ايجاد شده در γ_i عكس جهت مثبت آنهاست (شكل بالا را ببينيد، كه در آن پيكان ها جهت مثبت را نشان مى دهند) مى توان چند ضلعى هاى منحنى الخط در S' ، همراه با خم هاى بسته ساده γ_i و نقاط داخلى آن ها را به عنوان يك مثلث بندى از S در نظر گرفت، بنا بر اين از قضيه ۳.۱۱ داريم

$$\int_{S'} K dA + \sum_{i=1}^n \int_{\text{int}(\gamma_i)} K dA = 2\pi\chi \quad (15)$$

كه در آن χ عدد اويلر S است. روى هر نقطه از S' ، يك پايه متعامد يكه $\{e', e''\}$ از صفحه مماس S اختيار مى كنيم به طورى كه e' موازى ميدان بردارى مماس V باشد. با بحثى مشابه اثبات قضيه ۱.۱۱ داريم

$$\int_{S'} K dA = \sum_j \int_0^{\ell(\Gamma_j)} e' \cdot \dot{e}'' ds \quad (16)$$

كه در آن s طول-قوس روى Γ_j و $\ell(\Gamma_j)$ طول آن است. هر يال مشترك بين دو چند ضلعى منحنى الخط Γ_j دوبار در جهت هاى مخالف پيموده مى شود بنا بر اين سهم آنها در حاصل جمع معادله (۱۶) حذف مى شود. آنچه باقى مى ماند انتگرال در امتداد بخش هاى از خم هاى γ_i است كه قسمتى از چند ضلعى Γ_j مى باشد. در رابطه با جهت دهى بالا، داريم

$$\int_{S'} K dA = - \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell(\gamma_i)} e' \cdot \dot{e}'' ds \quad (17)$$

كه در آن s طول-قوس در امتداد γ_i و $\ell(\gamma_i)$ طول آن است. اکنون يك پايه متعامد يكه $\{f', f''\}$ از صفحه مماس S روى هر قطعه σ_i انتخاب كنيد.

بنابر اثبات قضیه ۱.۱۱

$$\int_{\text{int}(\gamma_i)} K dA = \int_0^{\ell(\gamma_i)} \mathbf{f}' \cdot \dot{\mathbf{f}}'' ds \quad (18)$$

از ترکیب معادلات (۱۵)، (۱۷) و (۱۸) داریم

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{\ell(\gamma_i)} (\mathbf{f}' \cdot \dot{\mathbf{f}}'' - \mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{e}}'') ds = 2\pi\chi \quad (19)$$

اما، بنابر اثبات قضیه ۲.۱۱

$$\mathbf{e}' \cdot \dot{\mathbf{e}}'' = \dot{\theta} - \kappa_g, \quad \mathbf{f}' \cdot \dot{\mathbf{f}}'' = \dot{\psi} - \kappa_g$$

که در آن κ_g انحنای ژئودزیک γ_i و θ و ψ به ترتیب زاویه بین \mathbf{e}' و \mathbf{f}' است. در این صورت $\psi = \varphi - \theta$ زاویه بین \mathbf{e}' و \mathbf{f}' یعنی بین \mathbf{V} و میدان برداری مماس «مرجع» \mathbf{f}' روی σ_i است. بنابراین طرف چپ معادله (۱۹) برابر است با

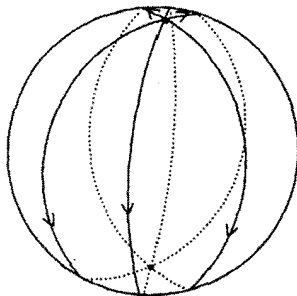
$$\sum_{i=1}^n \int_0^{\ell(\gamma_i)} \frac{d\psi}{ds} ds = 2\pi \sum_{i=1}^n \mu(P_i)$$

□

همان طور که انتظار داشتیم.

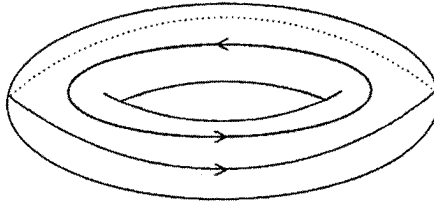
اکنون چند مثال ساده از میدان‌های برداری روی سطوح ارائه می‌دهیم (خم‌های انتگرالی آن‌ها را به خاطر واضح بودنشان، نشان می‌دهیم)

مثال ۲.۱۱

یک میدان برداری روی کره با ۱ منبع و ۱ چاهک: $\chi = 2$ 

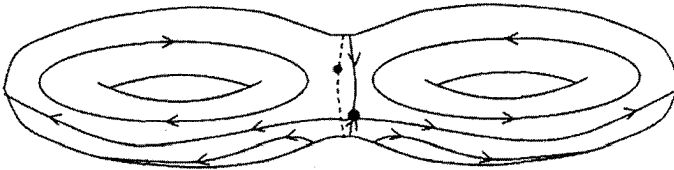
مثال ۳.۱۱

یک میدان برداری روی چنبره بدون نقاط سکون: $\chi = 0$



مثال ۴.۱۱

یک میدان برداری روی چنبره دوپل T_2 با ۲ انشعاب: $\chi = -2$



تمرین‌ها

۱۳.۱۱ فرض کنید k عدد صحیح غیر صفر و $\mathbf{V}(x, y) = (\alpha, \beta)$ یک میدان برداری روی صفحه داده شده با ضابطه

$$\alpha + i\beta = \begin{cases} (x + iy)^k & k > 0 \\ (x - iy)^{-k} & k < 0 \end{cases}$$

باشد نشان دهید که مبدأ نقطه سکون \mathbf{V} با تکرار k است (γ در تعریف ۶.۱۱ را دایره واحد در نظر بگیرید و از قضیه دو مؤاور^۲ استفاده کنید)

۱۴.۱۱ نشان دهید تعریف میدان برداری مماس هموار، مستقل از انتخاب قطعه سطح است. همچنین نشان دهید میدان برداری مماس \mathbf{V} روی S هموار است اگر و فقط اگر برای هر قطعه سطح σ از S ، سه مؤلفه \mathbf{V} در نقطه $\sigma(u, v)$ توابع همواری از (u, v) باشند.

۱۵.۱۱ نشان دهید تعریف ۶.۱۱ از تکرار نقطه سکون میدان برداری مماس \mathbf{V} ، مستقل از میدان برداری «مرجع» است. (اگر ξ میدان برداری مماس مرجع دیگری و θ زاویه بین ξ و ξ

2) de Moivre's theorem

باشد، آنگاه $\rho' = -(1 - \rho^2)^{-1/2}$ که در آن $\rho = \cos \theta$. حالا با استفاده از قضیه گرین نشان دهید $\int_0^{\ell(\gamma)} \left(\frac{d\theta}{ds} \right) ds = 0$.

۵.۱۱ نقاط بحرانی

اگر $f(u, v)$ تابع هموار تعریف شده روی مجموعه باز U در \mathbf{R}^2 باشد، نقطه (u_0, v_0) را نقطه بحرانی f می‌گوییم اگر $\frac{\partial f}{\partial u}$ و $\frac{\partial f}{\partial v}$ هر دو در (u_0, v_0) صفر شوند، این معادل است با این که گرادیان f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

در (u_0, v_0) صفر شود.

حال اگر $F : S \rightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی S (به تمرین ۱۱.۴ مراجعه کنید) و $\sigma : U \rightarrow \mathbf{R}^2$ یک قطعه سطح از S باشد، در این صورت $f = F \circ \sigma$ یک تابع هموار روی مجموعه باز U از \mathbf{R}^2 است. بر این اساس تعریف می‌کنیم:

تعریف ۷.۱۱

فرض کنید S یک سطح و $F : S \rightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار روی S باشد. نقطه P متعلق به S را نقطه بحرانی F می‌گوییم اگر قطعه سطح σ از S با $P = \sigma(u_0, v_0)$ موجود باشد به طوری که (u_0, v_0) نقطه بحرانی $f = F \circ \sigma$ باشد.

به آسانی و مستقیماً می‌توان دید که تعریف نقطه بحرانی مستقل از انتخاب قطعه σ است (به تمرین ۱۸.۱۱ مراجعه کنید) اما این بلافاصله از مشخصه دیگری از نقاط بحرانی که اکنون می‌خواهیم ارائه دهیم و این که مستقل از هر انتخابی است، نتیجه می‌شود. اگر $F : S \rightarrow \mathbf{R}$ یک تابع هموار باشد، می‌خواهیم مشابه گرادیان f ، میدان برداری مماس روی S را تعریف کنیم. این کار در گزاره زیر انجام می‌شود.

گزاره ۱.۱۱

اگر F یک تابع هموار روی S باشد، میدان برداری مماس هموار یگانه $\nabla_S F$ روی S موجود است به طوری که اگر P نقطه ای در S و $\gamma(t)$ خمی در S باشد که در لحظه $t = 0$ از P می‌گذرد، آنگاه

$$(\nabla_S F) \cdot \dot{\gamma}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) \quad (20)$$

بعلاوه P نقطه بحرانی است اگر و تنها اگر در P ، $\nabla_S F = 0$.

اثبات ۱.۱۱

میدان برداری مماس $\nabla_S F$ در صورت وجود، به‌وضوح یگانه است. در واقع هر بردار مماس بر S در P از نوع $\dot{\gamma}(0)$ است که در آن خمی روی S با $\gamma(0) = P$ می‌باشد، بنابراین تفاضل هردو بردار انتخابی از $\nabla_S F$ در P ، بر هر بردار مماس بر S در P عمود است، که بالاجبار باید صفرشود.

برای دیدن این که $\nabla_S F$ موجود است، قطعه سطح $\sigma(u, v)$ را برای S با مثلاً $P = \sigma(u_0, v_0)$ انتخاب کنید و قرار دهید $f = F \circ \sigma$. فرض کنید $\{e', e''\}$ پایه برای صفحه مماس بر S در P چنان باشد که

$$e' \cdot \sigma_u = e'' \cdot \sigma_v = 1, \quad e' \cdot \sigma_v = e'' \cdot \sigma_u = 0 \quad (21)$$

به‌طور دقیق‌تر

$$e' = \frac{G\sigma_u - F\sigma_v}{EG - F^2}, \quad e'' = \frac{E\sigma_v - F\sigma_u}{EG - F^2} \quad (22)$$

که در آن $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ اولین فرم اساسی σ است. قرار دهید

$$\nabla_S F = f_u e' + f_v e'' \quad (23)$$

که در آن مشتق‌ها در نقطه (u_0, v_0) محاسبه می‌شوند. اگر γ خمی باشد که در گزاره آمده با فرض $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$

$$\begin{aligned} (\nabla_S F) \cdot \dot{\gamma}(0) &= (f_u e' + f_v e'') \cdot (\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}) \\ &= f_u \dot{u} + f_v \dot{v} \quad ((21) \text{ بر اساس معادله}) \\ &= f \end{aligned}$$

مشتق‌ها نسبت به t ، در $t = 0$ محاسبه شده‌اند (نقطه نشان دهنده $\frac{d}{dt}$ است). از معادله‌های (۲۲) و (۲۳) بدیهی است که $\nabla_S F$ هموار و P نقطه بحرانی F است اگر و تنها اگر، در P ، $\nabla_S F = 0$. □

چون $\nabla_S F$ میدان برداری مماس هموار روی S است، می‌توانیم قضیه ۷.۱۱ را برای آن بکار بگیریم. برای انجام اینکار، باید تکرار نقاط سکون $\nabla_S F$ را به‌دست آوریم. به همین دلیل می‌خواهیم یک فرض اضافی در مورد F اعمال کنیم.

تعریف ۸.۱۱

نقطه بحرانی از تابع هموار F روی سطح S را غیر منحنی می‌نامیم اگر برای قطعه σ از S با $P = \sigma(u_0, v_0)$ ماتریس

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

معکوس‌پذیر باشد که در آن $f = F \circ \sigma$ و مشتق‌ها در (u_0, v_0) محاسبه شده‌اند. در این حالت، نقطه P را ماکزیم موضعی، زینی یا مینیم موضعی می‌نامیم اگر \mathcal{H} به ترتیب دارای ۲، ۱ یا ۰، مقدار ویژه غیر منفی باشد.

سخت نیست که نشان دهیم این تعریف منطقی است یعنی مستقل از انتخاب σ است (به تمرین ۱۶.۱۱ مراجعه کنید). توجه کنید که ماتریس \mathcal{H} حقیقی و متقارن است لذا همیشه دو مقدار ویژه حقیقی دارد (نه لزوماً متمایز)

گزاره ۲.۱۱

فرض کنید P نقطه بحرانی تابع هموار F روی سطح S باشد. در این صورت تکرار P به عنوان نقطه سکون $\nabla_S F$ برابر است با

$$\mu(P) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } P \text{ ماکزیم موضعی یا مینیم موضعی باشد} \\ -1 & \text{اگر } P \text{ یک نقطه زینی باشد.} \end{cases}$$

مثال ۵.۱۱

تابع $F(u, v) = -u^2 - v^2$ (به ترتیب $u^2 - v^2, u^2 + v^2$) روی صفحه یک ماکزیم موضعی (به ترتیب زینی، مینیم موضعی) در مبدأ دارد.

در اینجا اثبات کاملی از گزاره ۲.۱۱ ارائه نخواهیم داد اما بحث زیر، خواننده را نسبت به درستی آن متقاعد می‌کند. برای سهولت فرض می‌کنیم $(u_0, v_0) = (0, 0)$ و ماتریس ارائه شده در تعریف ۸.۱۱ را در نقطه $u = v = 0$ می‌نویسیم.

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$$

در این صورت قضیه تیلور می‌گوید.

$$f(u, v) = \frac{1}{r}(\lambda u^2 + 2\mu uv + \nu v^2) + r(u, v)$$

که در آن وقتی u و v به صفر میل کنند، عبارت $\frac{r(u, v)}{u^2 + v^2}$ به صفر میل می‌کند. بنابراین قابل قبول است که رفتار $\nabla_S F$ در نزدیکی P مشابه رفتار $\nabla_S \bar{F}$ باشد که در آن

$$\bar{F}(\sigma(u, v)) = \frac{1}{r}(\lambda u^2 + 2\mu uv + \nu v^2)$$

خصوصاً F و \bar{F} دارای یک نوع نقطه بحرانی در P هستند.

اما تکرار P به عنوان نقطه \bar{F} به آسانی محاسبه می‌شود برای انجام این کار ابتدا توجه کنید که ماتریس دورانی P موجود است به طوری که

$$P^t \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

یک ماتریس قطری است. این بدان معنی است که با استفاده از دوران در صفحه uv (یعنی بازپیمایش σ)، می‌توانیم فرض کنیم

$$\bar{F}(\sigma(u, v)) = \frac{1}{r}(\epsilon_1 u^2 + \epsilon_2 v^2)$$

همچنین می‌توانیم فرض کنیم که قطعه σ ، همدیس است. بنابراین زوایای اندازه گرفته شده در صفحه uv همان زوایای اندازه گرفته شده روی سطح هستند (به بخش ۴.۹ مراجعه کنید).

با گرفتن میدان برداری مماس «مرجع» σ_u ، زاویه ψ بین $\nabla_S \bar{F}$ و σ_u با رابطه

$$(\cos \psi, \sin \psi) = \frac{(\epsilon_1 u, \epsilon_2 v)}{\sqrt{\epsilon_1^2 u^2 + \epsilon_2^2 v^2}}$$

داده می‌شود. خم بسته ساده در صفحه uv ، که با بیضی

$$\epsilon_1^2 u^2 + \epsilon_2^2 v^2 = r^2$$

داده شده و می‌تواند به صورت

$$u = \frac{r}{|\epsilon_1|} \cos t, \quad v = \frac{r}{|\epsilon_2|} \sin t$$

بازبرمایش شود را در نظر بگیرید در نتیجه

$$\cos \psi = \frac{\epsilon_1}{|\epsilon_1|} \cos t, \quad \sin \psi = \frac{\epsilon_2}{|\epsilon_2|} \sin t$$

و بنابراین

$$\psi = \begin{cases} t & \epsilon_2 > 0, \epsilon_1 > 0 \text{ اگر} \\ 2\pi - t & \epsilon_2 < 0, \epsilon_1 > 0 \text{ اگر} \\ \pi - t & \epsilon_2 > 0, \epsilon_1 < 0 \text{ اگر} \\ \pi + t & \epsilon_2 < 0, \epsilon_1 < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

که این تکرار P را به عنوان نقطه سکون $\nabla_S \bar{F}$ نشان می‌دهد زیرا بر اساس گزاره ۲.۱۱

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{dt} dt = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \epsilon_2 \text{ و } \epsilon_1 \text{ هم علامت باشند} \\ -1 & \text{غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر این بحث ابتکاری را بپذیریم می‌توانیم قضیه ۷.۱۱ و گزاره ۲.۱۱ را ترکیب کرده و قضیه زیر را ارائه دهیم:

قضیه ۸.۱۱

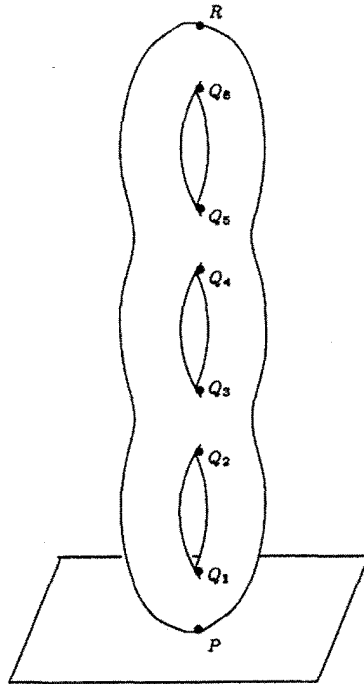
فرض کنید $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار روی سطح فشرده S با تعداد باپایان نقطه بحرانی که همگی غیر منحن هستند باشد. در این صورت

$$\chi = (\text{تعداد مینیم‌های موضعی } F) + (\text{تعداد نقاط زینی } F) - (\text{تعداد ماکزیم‌های موضعی } F)$$

که χ عدد اوپلر S است.

مثال ۶.۱۱

اگر سطح T_g از گونای g که در شروع بخش ۲.۱۱ شرح داده شد را در نظر بگیریم و آن را به صورت قائم روی صفحه xy قرار دهیم، فاصله از صفحه، تابع همواری روی T_g است. نقاط بحرانی این تابع در شکل زیر نشان داده شده است و همگی آن‌ها غیر منحن هستند (به تمرین ۱۸.۱۱ مراجعه کنید)



مینیم موضعی یگانه P ، $2g$ نقاط زینی Q_1, Q_2, \dots, Q_{2g} و ماکزیم موضعی یگانه R موجود است. لذا بر اساس قضیه ۸.۱۱ عدد اوپلر T_g برابر است با

$$1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

که با قضیه ۶.۱۱ مطابقت دارد.

تمرین‌ها

۱۶.۱۱ مستقیماً نشان دهید که تعریف نقطه بحرانی و این که آیا غیرمنحط است، مستقل از انتخاب قطعه سطح در تعریف ۷.۱۱ و ۸.۱۱ است. نشان دهید دسته بندی نقاط بحرانی غیر منحط به ماکزیم موضعی، مینیم موضعی و نقاط زمینی، نیز مستقل از انتخاب است (نشان دهید که نقطه بحرانی، ماکزیم موضعی (به ترتیب مینیم موضعی) است اگر و تنها اگر به ازای هر ماتریس غیر صفر 2×2 ، v داشته باشیم $v^t H v < 0$ (به ترتیب $v^t H v > 0$)).

۱۷.۱۱ برای کدامیک از توابع زیر مبدأ نقطه بحرانی غیر منحط است؟ در حالت یا حالت‌های غیر منحط، از نظر ماکزیم موضعی، مینیم موضعی یا نقطه زینی، آن را دسته بندی می‌کنید.

$$x^2 - 2xy + 4y^2 \quad (\text{i})$$

$$x^2 + 4xy \quad (\text{ii})$$

$$x^2 - 3xy^2 \quad (\text{iii})$$

۱۸.۱۱ فرض کنید S چنبره حاصل از دوران $1 = (x-2)^2 + z^2$ واقع در صفحه xz ، حول محور z ها باشد و فرض کنید $F: S \rightarrow \mathbf{R}$ فاصله از صفحه $x = -3$ باشد. نشان دهید F دارای ۴ نقطه بحرانی است که همگی غیر منحنی هستند. آنها را به صورت ماکزیمم موضعی، مینیمم موضعی یا نقطه زینی دسته‌بندی می‌کنید (برای پرمایش S به تمرین ۱۰.۴ مراجعه کنید).

جواب تمرین‌ها

فصل ۱

۱-۱ این پرمایش بخش $x \geq 0$ سهمی است.

$$\pi/2 < t < \frac{3\pi}{2}, -\pi/2 < t < \pi/2, \gamma(t) = (\sec t, \tan t) \quad \text{(i)} \quad 2-1$$

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t) \quad \text{(ii)}$$

$$x + y = 1 \quad \text{(i)} \quad 3-1$$

$$y = (\ln x)^2 \quad \text{(ii)}$$

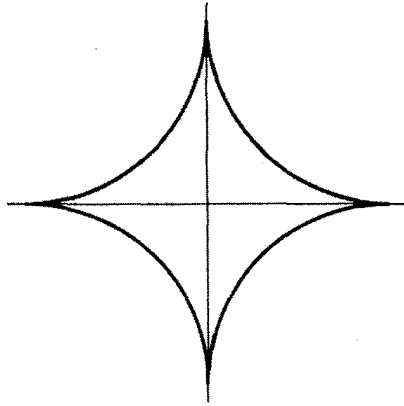
$$\dot{\gamma}(t) = \sin 2t(-1, 1) \quad \text{(i)} \quad 4-1$$

$$\dot{\gamma}(t) = (e^t, 2t) \quad \text{(ii)}$$

۵-۱ در $\sin t = 0$ یا $\cos t = 0$ معادلاً در $t = \frac{n\pi}{2}$ که در آن n عدد صحیح است،

$\dot{\gamma}(t) = 2 \sin t \cos t(-\cos t, \sin t)$ صفر می‌شود. این نقاط متناظر به چهار نوک تیز

ستاره‌گون هستند.



۶-۱ (i) فرض کنید OP با جهت مثبت محور x ها زاویه θ بسازد. در این صورت R دارای

مختصات $\gamma(\theta) = (2a \cot \theta, a(1 - \cos 2\theta))$ می باشد.

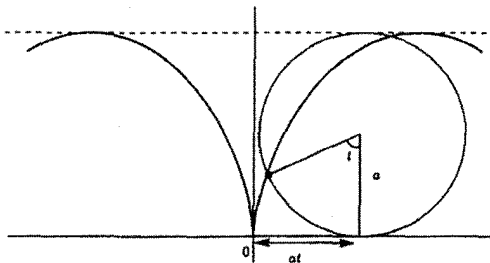
(ii) از $x = 2a \cot \theta$ و $y = a(1 - \cos 2\theta)$ داریم

$$\cos^2 \theta = \cot^2 \theta \sin^2 \theta \text{ و } \sin^2 \theta = \frac{y}{2a}$$

بنابراین معادله دکارتی به صورت $1 = \frac{y}{2a} + \frac{x^2 y}{8a^3}$ می باشد.

۷-۱ وقتی دایره به اندازه زاویه t می چرخد مرکز آن به نقطه (at, a) منتقل می شود. بنابراین نقطه

آغازی روی دایره اولیه اکنون در موقعیت $(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ قرار دارد.



۸-۱ فرض کنید دایره ثابت دارای شعاع a و دایره متحرک دارای شعاع b ($b < a$) در حالت

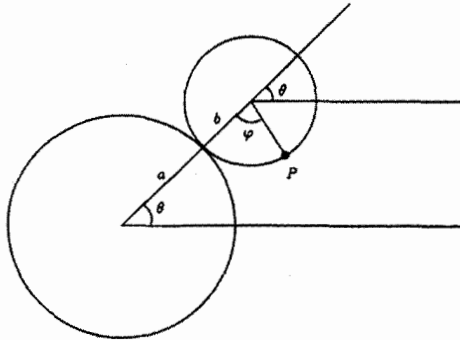
های پوسکلوئید) باشد. و فرض کنید در آغاز نقطه تماس دایره متحرک با دایره ثابت نقطه

$P = (a, 0)$ باشد. وقتی دایره متحرک به اندازه زاویه φ می چرخد خطی که مبدأ را به نقطه

تماس دایره ها متصل می کند با جهت مثبت محور x ها زاویه θ می سازد که در آن $a\theta = b\varphi$.

در این صورت در حالت اپی‌سیکلوئید نقطه P در موقعیت

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= ((a+b)\cos\theta - b\cos(\theta+\varphi), (a+b)\sin\theta - b\sin(\theta+\varphi)) \\ &= ((a+b)\cos\theta - b\cos((a+b)\theta/b), (a+b)\sin\theta - b\sin((a+b)\theta/b)) \end{aligned}$$



و در حالت های پوسیسیکلوئید در موقعیت

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= ((a-b)\cos\theta + b\cos(\varphi-\theta), (a-b)\sin\theta - b\sin(\varphi-\theta)) \\ &= ((a-b)\cos\theta + b\cos((a-b)\theta/b), (a-b)\sin\theta - b\sin((a-b)\theta/b)) \end{aligned}$$

قرار دارد.

۹-۱ نقطه (x, y, z) روی استوانه قرار دارد اگر $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ و روی کره قرار دارد اگر

$$(x + \frac{1}{4})^2 + y^2 + z^2 = 1$$

از معادله دوم $-1 \leq z \leq 1$ بنابراین فرض کنید $z = \sin t$

از تفاضل دو معادله داریم $x + \frac{1}{4} + \sin^2 t = \frac{3}{4} + \sin^2 t = \frac{3}{4}$ بنابراین $x = \frac{1}{4} - \sin^2 t = \cos^2 t - \frac{1}{4}$

در این صورت از معادله دوم داریم $y = \sin t \cos t$ (یا $y = -\sin t \cos t$) اما دو جواب تحت $t \mapsto \pi - t$ به هم تبدیل می‌شوند

$$\dot{\gamma}(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)) \quad ۱۰-۱$$

از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\cos\theta = \frac{\gamma \cdot \dot{\gamma}}{\|\gamma\| \|\dot{\gamma}\|} = \frac{e^{2t}(\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin t \cos t)}{e^{2t}((\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ و بنابراین}$$

۱۱-۱ $\dot{\gamma}(t) = (1, \sinh t)$ بنابراین $\|\dot{\gamma}\| = \cosh t$ و طول - قوس برابر است با

$$s = \int_0^t \cosh u \, du = \sinh t$$

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = \frac{1}{4}(1+t) + \frac{1}{4}(1-t) + \frac{1}{4} = 1 \quad (\text{i}) \quad 12-1$$

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = \frac{16}{25} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25} \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad (\text{ii})$$

۱۳-۱ سیکلوئید با $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$ که در آن t زاویه چرخش دایره است پارامتری می‌شود. بنابراین $\dot{\gamma} = a(1 - \cos t, \sin t)$ و

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = a^2(2 - 2 \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

و طول-قوس برابر است با

$$\int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} \, dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 8a$$

۱۴-۱ (i) وقتی t مضرب صحیحی از $\frac{\pi}{2}$ باشد $\dot{\gamma} = \sin 2t(-1, 1)$ و بنابراین $\dot{\gamma}$ صفر است و بنابراین γ عادی نیست.

(ii) اکنون γ عادی است چون به ازای $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ، $\dot{\gamma} \neq 0$.

(iii) $\dot{\gamma} = (1, \sinh t)$ به وضوح همواره مخالف صفر است لذا γ عادی است.

۱۵-۱ $x = r \cos \theta = \sin^2 \theta$ و $y = r \sin \theta = \sin^2 \theta \tan \theta$ ، بنابراین پرمایش بر حسب θ

به صورت $(\sin^2 \theta, \sin^2 \theta \tan \theta)$ می‌باشد. چون $\theta \mapsto \sin \theta$ یک نگاشت هموار

دوسویی از $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ به $(-1, 1)$ با نگاشت معکوس $t \mapsto \sin^{-1} t$ است، $t = \sin \theta$ یک

نگاشت بازپرمایش است. زیرا $\sin^2 \theta = t^2$ ، $\sin^2 \theta \tan \theta = \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$ ، بازپرمایش

ختم مورد نظر است.

۱۶-۱ داریم $s = \int_t^t \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{u}} \right\| d\tilde{u}$ ، $\tilde{s} = \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}} \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{u}} \right\| d\tilde{u}$. طبق قاعده زنجیری

بنابراین $s = \pm \int_t^t \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{u}} \right\| \frac{d\tilde{u}}{du} du = \pm \tilde{s}$ ، علامت از $\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{u}} = \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{u}} \right) \left(\frac{d\tilde{u}}{du} \right)$ تعیین می‌شود.

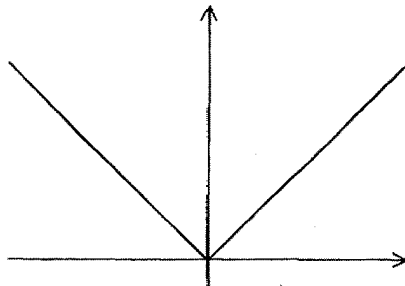
۱۷-۱ اگر $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ یک خم در سطح $f(x, y, z) = 0$ باشد با مشتق‌گیری از $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ نسبت به t داریم $\dot{x}f_x + \dot{y}f_y + \dot{z}f_z = 0$ بنابراین $\dot{\gamma}$ بر (f_x, f_y, f_z) عمود است. چون این رابطه برای هر خم واقع بر سطح برقرار است، لذا (f_x, f_y, f_z) بر سطح عمود است. اشتراک سطوح $f = 0$ و $g = 0$ ، یک خم است اگر بردارهای (f_x, f_y, f_z) و (g_x, g_y, g_z) موازی نباشند.

۱۸-۱ فرض کنید $\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t))$ یک خم عادی در \mathbf{R}^3 باشد. حداقل یکی از $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ به ازای همه مقادیر t مخالف صفر است. فرض کنید $\dot{u}(t_0) \neq 0$ و $x_0 = u(t_0)$. براساس اثبات قضیه ۲.۱، تابع هموار $h(x)$ که در یک همسایگی x_0 تعریف شده است موجود است، به طوری که $t = h(x)$ ، جواب یگانه $x = u(t)$ برای هر t نزدیک t_0 می‌باشد. بنابراین برای t های نزدیک t_0 ، $\gamma(t)$ در خم تراز $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$ قرار دارد. توابع f و g در شرایط تمرین قبلی صدق می‌کنند چون $(f_x, f_y, f_z) = (-\dot{v}h', 1, 0)$ و $(g_x, g_y, g_z) = (-\dot{w}h', 0, 1)$ علامت ' نشان‌دهنده $\frac{d}{dx}$ است.

۱۹-۱ تعریف کنید $\Theta(t) = \tan \frac{\pi\theta(t)}{4}$ که در آن θ تابع تعریف شده در تمرین ۲۰.۸ است. در این صورت Θ هموار است و به ازای $t \leq 0$ ، $\Theta(t) = 0$ و $\Theta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ یک به یک است. خم

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\Theta(t), \Theta(t)) & t \geq 0 \\ (-\Theta(-t), \Theta(-t)) & t \leq 0 \end{cases}$$

یک پرمایش هموار از $y = |x|$ است.



هیچ پرمایش عادی از $y = |x|$ موجود نیست. زیرا اگر موجود باشد پرمایش سرعت-واحد $\tilde{\gamma}(t)$ موجود خواهد بود و می‌توانیم فرض کنیم $\tilde{\gamma}(0) = (0, 0)$. بردار مماس واحد $\dot{\tilde{\gamma}}$ بالاجبار به‌ازای $x > 0$ باید $(1, 1)/\sqrt{2}$ و یا $(1, 1)/\sqrt{2}$ باشد. بنابراین به‌دلیل پیوستگی باید $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. با اعمال روش مشابه برای $x < 0$ داریم $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. این نتایج با هم متناقض هستند.

فصل ۲

۱-۲ (i) γ سرعت-واحد است (تمرین ۱۲.۱ (i)) بنابراین

$$\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \left\| \left(\frac{1}{4}(1+t)^{-1/2}, \frac{1}{4}(1-t)^{-1/2}, 0 \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{8(1-t^2)}}$$

(ii) γ سرعت واحد است (تمرین ۱۲.۱ (ii)) بنابراین

$$\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \left\| \left(-\frac{2}{\delta} \cos t, \sin t, \frac{2}{\delta} \cos t \right) \right\| = 1$$

(iii) با استفاده از گزاره ۱.۲

$$\kappa = \frac{\|(\mathbf{1}, \sinh t, 0) \times (0, \cosh t, 0)\|}{\|(\mathbf{1}, \sinh t, 0)\|^3} = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \operatorname{sech}^2 t$$

$$(-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t, 0) \quad (\text{iv})$$

$$\times (-3 \cos^3 t + 6 \cos t \sin^2 t, 6 \sin t \cos^2 t - 3 \sin^3 t, 0)$$

$$= (0, 0, -9 \sin^2 t \cos^2 t)$$

بنابراین

$$\kappa = \frac{\|(0, 0, -9 \sin^2 t \cos^2 t)\|}{\|(-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t, 0)\|^3} = \frac{1}{3 |\sin t \cos t|}$$

اگر t مضرب صحیحی از $\frac{\pi}{4}$ باشد یعنی در چهار نقطه نوک تیز $(\pm 1, 0)$ و $(0, \pm 1)$ از ستاره‌گون، عبارت بی‌نهایت است.

۲-۲ اثبات گزاره ۴.۱ نشان می‌دهد که اگر $v(t)$ یک تابع (برداری) هموار از t باشد در این صورت $\|v(t)\|$ یک تابع (اسکالر) هموار است مشروط بر این که $v(t)$ هیچ‌گاه صفر نشود. اکنون نتیجه از فرمول گزاره ۱.۲ حاصل می‌شود. انحنای خم عادی $\gamma(t) = (t, t^3)$ ، برابر است با $\kappa(t) = \frac{6|t|}{(1+9t^4)^{3/2}}$ که در $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

۳-۲ از $t \cdot n_s = 0$ مشتق بگیرید و رابطه $\dot{t} = \kappa_s n_s$ را بکار بگیرید.

۴-۲ اگر γ هموار باشد، $t = \dot{\gamma}$ هموار است و بنابراین n_s (به دلیل این که از دوران t حاصل شده) نیز اینگونه هستند. لذا $\kappa_s = \dot{t} \cdot n_s$ هموار است.

۵-۲ طول-قوس برابر است با

$$s = \int \|\dot{\gamma}\| dt = \int \|e^{kt}(k \cos t - \sin t, k \sin t + \cos t)\| dt = \int \sqrt{k^2 + 1} e^{kt} dt = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} e^{kt} + c$$

که در آن c مقدار ثابتی است. با فرض $c = 0$ ، اگر $\pm k > 0$ ، وقتی $s \rightarrow 0$ و $t \rightarrow \mp\infty$ چون

$$t = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}(k \cos t - \sin t, k \sin t + \cos t)$$

داریم

$$n_s = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}(-k \sin t - \cos t, k \cos t - \sin t)$$

بنابراین

$$\frac{dt}{ds} = \left(\frac{dt}{dt}\right) / \left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{e^{-kt}}{k^2 + 1}(-k \sin t - \cos t, k \cos t - \sin t) = \frac{e^{-kt}}{\sqrt{k^2 + 1}} n_s$$

لذا $\kappa_s = \frac{1}{k_s}$. براساس قضیه ۱.۲ هر خم دیگری با همین انحنای علامتدار، با استفاده از یک حرکت صلب از ماریچ لگاریتمی ناشی می‌شود.

۶-۲ (i) با مشتق‌گیری از $\gamma = r t + \kappa_s r n_s$ بدست می‌آوریم $t = \dot{r} t + \kappa_s r n_s$. چون t و n_s بردارهای واحد متعام هستند. بنابراین $\kappa_s = 0$ و γ بخشی از یک خط مستقیم است.

(ii) با مشتق‌گیری از $\gamma = r\mathbf{n}_s$ بدست می‌آوریم $\dot{\gamma} = \dot{r}\mathbf{n}_s + r\dot{\mathbf{n}}_s = \dot{r}\mathbf{n}_s - \kappa_s r \mathbf{t}$ (تمرین ۳.۲). بنابراین $\dot{r} = 0$ لذا r ثابت است و $\kappa_s = -\frac{1}{r}$ بنابراین κ_s ثابت است. در نتیجه γ بخشی از دایره است.

(iii) قرار دهید $\gamma = r(t \cos \theta + \mathbf{n}_s \sin \theta)$. با مشتق‌گیری و یکسان‌کردن ضرایب \mathbf{t} و \mathbf{n}_s داریم $1 = \dot{r} \cos \theta - \kappa_s r \sin \theta$ لذا $\dot{r} \sin \theta + \kappa_s r \cos \theta = 0$ (می‌توانیم با اضافه‌کردن ثابت مناسبی به s ، ثابت دلخواه را صفر فرض کنیم). بنابراین $\kappa_s = \frac{-1}{s \cot \theta}$. طبق تمرین ۵.۲، γ با استفاده از یک حرکت صلب برای ماریچ لگاریتمی با $\kappa = -\cot \theta$ حاصل می‌شود.

۷-۲ می‌توانیم γ را سرعت‌واحد فرض کنیم. در این صورت $\dot{\gamma}^\lambda = (1 - \lambda \kappa_s) \mathbf{t}$ که مخالف صفر است چون $1 - \lambda \kappa_s > 0$. بردار مماس واحد γ^λ ، \mathbf{t} است و طول-قوس γ^λ در تساوی $1 - \lambda \kappa_s = \frac{ds}{dt}$ صدق می‌کند. بنابراین انحنای γ^λ برابر است با

$$\left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = \frac{\|\dot{\mathbf{t}}\|}{(1 - \lambda \kappa_s)} = \frac{\kappa_s}{(1 - \lambda \kappa_s)}$$

۸-۲ دایره از $\gamma(s)$ می‌گذرد، زیرا $\|\epsilon - \gamma\| = \left\| \frac{1}{\kappa_s \mathbf{n}_s} \right\| = \frac{1}{|\kappa_s|}$ که شعاع دایره است و در این نقطه بر γ مماس است زیرا $\epsilon - \gamma = \frac{1}{\kappa_s} \mathbf{n}_s$ بر مماس \mathbf{t} از γ عمود است. انحنای دایره، معکوس شعاع یعنی $|\kappa_s|$ است که انحنای γ نیز است.

۹-۲ بردار مماس ϵ برابر است با $-\frac{\dot{\kappa}_s}{\kappa_s^2} \mathbf{n}_s = -\frac{\dot{\kappa}_s}{\kappa_s} \mathbf{n}_s + \frac{1}{\kappa_s} (-\kappa_s \mathbf{t})$ ، بنابراین طول قوس

آن $u = \int \|\dot{\epsilon}\| ds = \int \frac{\dot{\kappa}_s}{\kappa_s^2} ds = u_0 - \frac{1}{\kappa_s}$ است که در آن u_0 مقدار ثابتی است.

بنابراین بردار مماس واحد ϵ ، $-\mathbf{n}_s$ و قائم واحد علامتدار آن \mathbf{t} است انحنای علامتدار ϵ ، $\frac{\kappa_s^3}{\dot{\kappa}_s}$ است زیرا $\frac{-d\mathbf{n}_s}{du} = \frac{\kappa_s \mathbf{t}}{du/ds} = \frac{\kappa_s^3}{\dot{\kappa}_s} \mathbf{t}$. با فرض این‌که علامت ' نشان‌دهنده

$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds}$ باشد، $\gamma' = a(1 - \cos t, \sin t)$ و طول-قوس s از γ با $\frac{ds}{dt} = \frac{2a}{t} \sin(\frac{t}{2})$

داده می‌شود و بردار مماس واحد آن $\mathbf{t} = \dot{\gamma} = (\sin(\frac{t}{2}), \cos(\frac{t}{2}))$ است. بنابراین

$$\mathbf{n}_s = (-\cos(\frac{t}{2}), \sin(\frac{t}{2}))$$

$$\dot{\mathbf{t}} = \left(\frac{d\mathbf{t}}{dt} \right) / \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{1}{\frac{2a}{t} \sin(\frac{t}{2})} (\cos(\frac{t}{2}), -\sin(\frac{t}{2})) = \frac{-1}{2a \sin(\frac{t}{2})} \mathbf{n}_s$$

در نتیجه انحناى علامتدار γ ، برابر است با $\frac{-1}{4a \sin(\frac{t}{4})}$ لذا گسترده آن برابر است با

$$\epsilon = a(t - \sin t, 1 - \cos t) - 4a \sin\left(\frac{t}{4}\right) \left(-\cos\left(\frac{t}{4}\right), \sin\left(\frac{t}{4}\right)\right) = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$$

با استفاده از پرمایش $\vec{t} = \pi + t$ ، داریم $a(\vec{t} - \sin \vec{t}, 1 - \cos \vec{t}) + a(-\pi, -2)$ که از بازپرمایش γ تحت انتقال توسط بردار $a(-\pi, -2)$ بدست مى‌آید.

۱۰-۲ بخش آزاد نوار در $\gamma(s)$ بر γ مماس است و داراى طول $l - s$ مى‌باشد. بنابراین فرمول مذکور برای $\epsilon(s)$ است. بردار مماس ϵ برابر است با $\kappa_s(l - s)\mathbf{n}_s$ با $\dot{\gamma} - \dot{\gamma} + (l - s)\ddot{\gamma} = \kappa_s(l - s)\mathbf{n}_s$ (نقطه نشان‌دهنده $\frac{d}{ds}$ است). طول-قوس v از ϵ با رابطه $\frac{dv}{ds} = \kappa_s(l - s)$ معین مى‌شود بنابراین بردار مماس واحد آن \mathbf{n}_s و قائم واحد علامتدار آن $-\mathbf{t}$ است.

$$\text{حال داریم } \frac{1}{(l - s)} \epsilon, \text{ بنابراین انحناى علامتدار } \epsilon, \frac{d\mathbf{n}_s}{dv} = \frac{1}{\kappa_s(l - s)} \dot{\mathbf{n}}_s = \frac{-1}{l - s} \mathbf{t}$$

است.

۱۱-۲ (i) با علامت تمرین ۹.۲ گسترده ϵ برابر است با

$$\epsilon(u) = \epsilon + (l - u) \frac{d\epsilon}{du} = \gamma + \frac{1}{\kappa_s} \mathbf{n}_s - (l - u) \mathbf{n}_s = \gamma - (l - u_0) \mathbf{n}_s$$

زیرا $u = u_0 - \frac{1}{\kappa_s}$ بنابراین ϵ موازی خم $\gamma^{-(l-u_0)}$ است.

(ii) با استفاده از نتایج تمرین ۱۰.۲، گسترده ϵ برابر است با

$$\epsilon + (l - s)(-\mathbf{t}) = \gamma + (l - s)\mathbf{t} - (l - s)\mathbf{t} = \gamma$$

۱۲-۲ اگر بردار ثابت در گزاره ۲.۲ را موازی خط انعکاس بگیریم، اثر انعکاس تغییر φ به $-\varphi$ است و بنابراین κ_s به $-\kappa_s$ تغییر مى‌یابد.

۱۳-۲ اگر دو خم سرعت-واحد داراى انحناى یکسان و مخالف صفر باشند، انحناى علامت‌دار آن‌ها، از نظر علامت یا یکسان است یا متفاوت در حالت اول طبق قضیه ۱.۲ تحت یک حرکت صلب خم‌ها متفاوت مى‌شوند؛ در حالت دوم، با استفاده از انعکاس در مورد یک خم، طبق تمرین ۱۲.۲ دو خم با انحناى علامت‌دار برابر داریم و بنابراین تحت حرکت صلب این خم‌ها متفاوت هستند.

۱۴-۲ (i) بردار $\mathbf{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{4}}(1+t)^{1/2}, -\frac{1}{\sqrt{4}}(1-t)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ یک بردار واحد است بنابراین γ

سرعت واحد است: $\dot{\mathbf{t}} = \left(\frac{1}{\sqrt{4}}(1+t)^{-1/2}, \frac{1}{\sqrt{4}}(1-t)^{-1/2}, 0\right)$

$$\kappa = \|\dot{\mathbf{t}}\| = 1/\sqrt{4(1-t^2)}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{4}}(1-t)^{1/2}, (1+t)^{1/2}, 0$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{4}}(1+t)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{4}}(1-t)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{4}}\right)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \left(\frac{1}{\sqrt{4}}(1+t)^{-1/2}, -\frac{1}{\sqrt{4}}(1-t)^{-1/2}, 0\right)$$

بنابراین تاب برابر است با

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{4(1-t^2)}}$$

معادله $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$ به آسانی قابل بررسی است.

(ii) بردار $\mathbf{t} = \left(-\frac{4}{\delta}\sin t, -\cos t, \frac{3}{\delta}\sin t\right)$ بردار واحد است و بنابراین γ سرعت واحد

است:

$$\dot{\mathbf{t}} = \left(-\frac{4}{\delta}\cos t, \sin t, \frac{3}{\delta}\cos t\right)$$

بنابراین

$$\kappa = \|\dot{\mathbf{t}}\| = 1; \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{t}} = \left(-\frac{4}{\delta}\cos t, \sin t, \frac{3}{\delta}\cos t\right)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(-\frac{3}{\delta}, 0, -\frac{4}{\delta}\right)$$

بنابراین $\dot{\mathbf{b}} = 0$ و $\tau = 0$.

۱۵-۲ نشان دهید $\tau = 0$ و یا $x = \frac{1+t^2}{t}$ و $y = t+1$ و $z = \frac{1-t}{t}$ در شرط $x-y-z=0$

صدق می‌کند.

۱۶-۲ طبق گزاره ۵.۲، γ دایره به شعاع $\frac{1}{\kappa} = 1$ و به مرکزیت $(0, 1, 0)$ در صفحه

گذرا از $(0, 1, 0)$ و عمود بر $\mathbf{b} = \left(-\frac{4}{\delta}, 0, \frac{4}{\delta}\right)$ یعنی صفحه $3x + 4z = 0$ قرار دارد.

۱۷-۲ فرض کنید $b = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$ ، $a = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$ طبق مثال‌های ۱.۲ و ۴.۲ مارپیچ دایره‌گون با

پارامترهای a و b دارای انحنای $\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$ و تاب $\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$ است. طبق قضیه ۳.۲، هر خم با انحنای κ و تاب τ با یک حرکت صلب از این مارپیچ به دست می‌آید.

۱۸-۲ نتیجه از گزاره ۳.۲، به دست می‌آید زیرا صورت و منفرج عبارت (۱۱) توابع همواری از t هستند.

۱۹-۲ فرض کنید نقطه نشان‌دهنده $\frac{d}{dt}$ باشد. در این صورت $\delta = \ddot{\gamma} = \kappa \mathbf{n}$. بنابراین بردار

ماسا واحد δ برابر است با $\mathbf{T} = \mathbf{n}$ و طول-قوس آن، s ، در شرط $\frac{ds}{dt} = \kappa$ صدق می‌کند.
اکنون داریم

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{n}}}{ds/dt} = \kappa^{-1}(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) = -\mathbf{t} + \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{b}$$

بنابراین انحنای δ برابر است با

$$\|-\mathbf{t} + \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{b}\| = \left(1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right)^{1/2} = \mu$$

که آن را به μ نشان داده‌ایم. در این صورت قائم اصلی δ برابر است با

$$\mathbf{N} = \mu^{-1}(-\mathbf{t} + \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{b})$$

و قائم دوم آن $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mu^{-1}(\mathbf{b} + \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{t})$ است. تاب T از δ با رابطه $\frac{dB}{ds} = -TN$ یعنی $\mathbf{B} = -TN$ داده می‌شود.

با محاسبه مشتقات و یکسان قرار دادن ضرایب \mathbf{b} داریم

$$T = (\kappa \dot{\tau} - \tau \dot{\kappa}) / \kappa(\kappa^2 + \tau^2)$$

۲۰-۲ با مشتق‌گیری از $\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = 0$ (ثابت) داریم $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$ ، چون \mathbf{t} ، \mathbf{n} و \mathbf{b} پایه متعامد واحد در

\mathbf{R}^3 هستند، اسکالری مانند μ موجود است به طوری که $\mathbf{a} = \mathbf{t} \cos \theta + \mu \mathbf{b}$ ، چون \mathbf{a} بردار

واحد است لذا $\mu = \pm \sin \theta$ ؛ با مشتق‌گیری از $\mathbf{a} = \mathbf{t} \cos \theta \pm \mathbf{b} \sin \theta$ به دست می‌آوریم

$\tau = \kappa \cot \theta$ ، بالعکس، اگر $\tau = \lambda \kappa$ ، در این صورت θ ای با $\lambda = \cot \theta$ موجود است؛

مشتق‌گیری نشان می‌دهد $\mathbf{a} = \mathbf{t} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta$ بردار ثابتی است و $\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = \cos \theta$ نشان

می‌دهد که θ زاویه بین \mathbf{t} و \mathbf{a} است.

۲۱-۲ مشتقگیری مکرر از $(\gamma - a) \cdot (\gamma - a) = r^2$ نشان می‌دهد $t \cdot (\gamma - a) = 0$.

$n \cdot t + (-\kappa t + \tau b) \cdot (\gamma - a) = \dot{\kappa} / \kappa^2$, $n \cdot (\gamma - a) = 0$ بنابراین $t \cdot t + \kappa n \cdot (\gamma - a) = 0$

$b \cdot t - \tau n \cdot (\gamma - a) = (\dot{\kappa} / \tau \kappa^2)$ نهایتاً $b \cdot (\gamma - a) = \dot{\kappa} / \tau \kappa^2$ و بنابراین $-1 / \kappa$

و بنابراین $\tau / \kappa = (\dot{\kappa} / \tau \kappa^2)$.

بالکس، اگر معادله (۲۰) برقرار باشد در این صورت $\rho = -\sigma(\dot{\rho}\sigma)$ ، بنابراین

$$(\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2)' = 2\rho\dot{\rho} + 2(\dot{\rho}\sigma)(\dot{\rho}\sigma)' = 0$$

بنابراین $\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2$ مقدار ثابتی مثل r^2 ($r > 0$) است. فرض کنید $a = \gamma + \rho n + \dot{\rho}\sigma b$ در این صورت با استفاده از معادله (۲۰)

$$\dot{a} = t + \dot{\rho}n + \rho(-\kappa t + \tau b) + (\dot{\rho}\sigma)'b + (\dot{\rho}\sigma)(-\tau n) = 0$$

بنابراین a بردار ثابتی است و $\|\gamma - a\|^2 = \rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2 = r^2$ بنابراین γ در کره به مرکز a و شعاع r قرار دارد.

۲۲-۲ فرض کنید $\lambda_{ij} = v_i v_j$. بردارهای v_1, v_2, v_3 متعامد واحد هستند اگر و فقط اگر

$$\lambda_{ij} = \delta_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad i = j \\ 0 \quad i \neq j \end{array} \right.$$

بنابراین کافی است نشان دهیم اگر به ازای $s = s_0$ ، $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$

آنگاه برای همه مقادیر داده شده s نیز رابطه صحیح است با مشتقگیری از $v_i \cdot v_j$ داریم

$$\dot{\lambda}_{ij} = \sum_{k=1}^3 (a_{ik} \lambda_{kj} + a_{jk} \lambda_{ik})$$

اکنون $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$ جواب این سیستم معادلات دیفرانسیل است زیرا $a_{ij} + a_{ji} = 0$. اما قضیه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌گوید جواب یگانه با مقادیر داده شده موجود است هرگاه $s = s_0$.

فصل ۳

۱-۳ اگر $\tilde{\gamma}$ نتیجه انتقال γ باشد، در این صورت $\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\gamma}$ بنابراین بر اساس معادلات (۱) و (۳) طول و مساحت $\tilde{\gamma}$ و γ یکسان هستند. اگر $\tilde{\gamma}$ از دوران γ تحت زاویه θ حول مبدأ به دست آید، در این

صورت $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = x^2 + y^2$ لذا $\tilde{y} = x \sin \theta + y \cos \theta$ و $\tilde{x} = x \cos \theta - y \sin \theta$ و $\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x} = xy - yx$ و $\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x} = xy - yx$ بنا بر این معادلات (۱) ز (۳) مجدداً نشان می‌دهد که طول و مساحت تغییر نمی‌کند.

۲-۳ $\sin t' = \sin t$ و $\cos t' = \cos t \Leftrightarrow \gamma(t') = \gamma(t)$ اگر و فقط اگر $t - t'$ مضربی از 2π باشد. بنا بر این γ خم بسته ساده با تناوب 2π است. در معادله (۳) قرار دهید $x = a \cos t$ و $y = b \sin t$ در این صورت مساحت برابر است با $\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab$

۳-۳ $\dot{\gamma} = (-\sin t - 2 \sin 2t, \cos t + 2 \cos 2t)$ بنا بر این $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{5 + 4 \cos t}$ که همواره مخالف صفر است بنا بر این γ عادی است. به‌وضوح داریم $\gamma(t + 2\pi) = \gamma(t)$ اگر γ خم بسته ساده با تناوب a باشد در این صورت از $\gamma(0) = \gamma(a) = \gamma(2\pi/3) = \gamma(4\pi/3)$ بنا بر این $\cos a = 1$ و $a = 2\pi$ اما $(1 + 2 \cos a) \cos a = 3$ و $4\pi/3 - 2\pi/3 = 2\pi/3$ از 2π نیست.

۴-۳ با مشتق‌گیری از $\gamma(t+a) = \gamma(t)$ داریم $t(t+a) = t(a)$ و با دوران در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه $\pi/2$ داریم $n_s(t+a) = n_s(t)$ و با مشتق‌گیری مجدد رابطه $\kappa_s(t+a) = \kappa_s(t)$ حاصل می‌شود. بنا بر این $\kappa_s(t+a)n_s(t+a) = \kappa_s(t)n_s(t)$

۵-۳ طبق تمرین ۲.۳ و نامساوی هم پیرامونی، l ، طول بیضی در رابطه $l \geq \sqrt{4\pi \times \pi ab} = 2\pi\sqrt{ab}$ صدق می‌کند و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر بیضی، دایره باشد یعنی $a = b$ اما اگر بیضی را مانند تمرین ۲.۳ پرمایش کنیم، طول آن برابر است با

$$\int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

۶-۳ فرض کنید (x_1, y_1) و (x_2, y_2) نقاط داخلی بیضی باشند، به طوری که $\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} < 1$ برای $i = 1, 2$ نقاط پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کنند به صورت $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2)$ می‌باشد که در آن $0 \leq t \leq 1$. این چنین

نقاطی، داخل بیضی هستند. زیرا

$$\begin{aligned} & \frac{(tx_1 + (1-t)x_2)^2}{a^2} + \frac{(ty_1 + (1-t)y_2)^2}{b^2} \\ &= t^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right) + (1-t)^2 \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \right) + 2t(1-t) \left(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} \right) \\ &< t^2 + (1-t)^2 + t(1-t) \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \right) \\ &< t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1 \end{aligned}$$

۷-۳ اگر $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$ بازیرمایش $\gamma(t)$ باشد، رؤوس γ (به ترتیب $\tilde{\gamma}$) از رابطه $dk_s/dt = 0$ (به ترتیب $d\tilde{k}_s/d\tilde{t} = 0$) تعیین می‌شود. چون $dk_s/dt = (dk_s/d\tilde{t})(d\tilde{t}/dt)$ و چون $d\tilde{t}/dt$ همنواره مخالف است، لذا $\tilde{\gamma}$ و γ دارای رؤوس یکسان هستند.

۸-۳ $\dot{\gamma} = (-\sin t - 2\sin 2t, \cos t + 2\cos 2t)$ و $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{5 + 4\cos t}$ بنابراین زاویه φ ، زاویه بین $\dot{\gamma}$ و محور x ها از رابطه

$$\cos \varphi = \frac{-\sin t - 2\sin 2t}{\sqrt{5 + 4\cos t}}, \quad \sin \varphi = \frac{\cos t + 2\cos 2t}{\sqrt{5 + 4\cos t}}$$

بدست می‌آید.

با مشتق‌گیری از معادله دوم داریم

$$\dot{\varphi} \cos \varphi = -\sin t(24\cos^2 t + 42\cos t + 9)/(5 + 4\cos t)^{3/2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \sin t(24\cos^2 t + 42\cos t + 9)/(5 + 4\cos t)(\sin t + 2\sin 2t) \\ &= (9 + 6\cos t)/(5 + 4\cos t) \end{aligned}$$

لذا اگر s طول-قوس γ باشد، داریم

$$\kappa_s = d\varphi/ds = (d\varphi/dt)/(ds/dt) = (9 + 6\cos t)/(5 + 4\cos t)^{3/2}$$

بنابراین

$$\dot{\kappa}_s = 12 \sin t (2 + \cos t) / (5 + 4 \cos t)^{5/2}$$

که فقط در دو نقطه $t = 0$ و $t = \pi$ از خم، صفر می‌شود.

فصل ۴

۱-۴ فرض کنید U قرص باز در \mathbf{R}^2 و $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = 0\}$. اگر $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in U\}$ در این صورت W یک زیر مجموعه باز \mathbf{R}^3 است و $S \cap W$ با U تحت نگاشت $(x, y, 0) \mapsto (x, y)$ همسان ریخت است. بنابراین S یک سطح است.

۲-۴ فرض کنید $U = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < u^2 + v^2 < \pi^2\}$ و $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ تعریف کنید $\sigma : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ $\sigma(u, v) = \left(\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \tan\left(r - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

۳-۴ تصویر σ_{\pm}^x تلاقی کره با مجموعه باز $0 < \pm x$ در \mathbf{R}^3 است و معکوس آن نگاشت تصویر $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ می‌باشد. برای σ_{\pm}^y و σ_{\pm}^z نیز به‌طور مشابه عمل کنید. یک نقطه از کره که در تصویر هیچ شش قطع نباشد بالاجبار باید x, y و z آن همگی صفر باشند که این غیرممکن است.

۴-۴ با ضرب معادلات داریم

$$(x^2 - z^2) \sin \theta \cos \theta = (1 - y^2) \sin \theta \cos \theta$$

بنابراین $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ مگر $\cos \theta = 0$ یا $\sin \theta = 0$. اگر $\cos \theta = 0$ در این صورت $x = -z$ و $y = 1$ و اگر $\sin \theta = 0$ ، آنگاه $x = z$ و $y = -1$. این دو خط نیز در صفحه قرار دارند.

خط داده شده L_θ از $(\sin 2\theta, -\cos 2\theta, 0)$ می‌گذرد و موازی بردار $(\cos 2\theta, \sin 2\theta, 1)$ است. لذا همه خطوط با گرفتن $0 \leq \theta < \pi$ بدست می‌آید. فرض کنید (x, y, z) نقطه‌ای از سطح باشد اگر $z \neq x$ ، آنگاه θ را طوری اختیار کنید که $\cot \theta = (1 - y)/(x - z)$ در این

صورت (x, y, z) روى L_θ است. به طور مشابه اگر $z \neq x$. تنها حالت باقىمانده نقاط $(0, 0, \pm 1)$ هستند که روى خطوط $L_\pi/2$ و L_0 واقع هستند. با علائم تمرين ۲.۴، نگاشت $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ را با ضابطه $\sigma(u, v) = (\sin 2\theta, -\cos 2\theta, 0) + t(\cos 2\theta, \sin 2\theta, 1)$ تعريف کنيد که در آن $t = \tan(r - \frac{\pi}{4})$ و $\cos \theta = \frac{u}{r}$ و $\sin \theta = \frac{v}{r}$. با توجه به بند اخير، اين قطعه سطحى است که تمام سطح را مى پوشاند. خط

$$(x - z) \cos \varphi = (1 + y) \sin \varphi, \quad (x + z) \sin \varphi = (1 - y) \cos \varphi$$

را M_φ بناميد. بحث مشابه بالا نشان مى دهد M_φ در سطح قرار دارد و هر نقطه از سطح روى M_φ اى با $0 \leq \varphi < \pi$ واقع است. اگر $\theta + \varphi$ مضربى از π نباشد خطوط L_θ و M_φ به ازاي هر $0 \leq \theta < \pi$ همدیگر را در نقطه

$$\left(\frac{\cos(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)}, \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)}, \frac{\cos(\theta + \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)} \right)$$

قطع مى کنند. دقيقاً يك θ ، φ موجود است که $\theta + \varphi$ مضربى از π است و خطوط L_θ و M_φ همدیگر را قطع نمى کنند. اگر (x, y, z) روى هر دو خط L_θ و L_φ با $\theta \neq \varphi$ واقع باشد در اين صورت $(1 - y) \tan \theta = (1 - y) \tan \varphi$ و $(1 + y) \cot \theta = (1 + y) \cot \varphi$ که نتيجه مى شود $y = 1$ و $y = -1$ (حالتى که $\theta = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{4}$ يا بالعکس، بايد بالا جبار جداگانه بحث شود، اما نتيجه همين است) اين نشان مى دهد که L_θ و L_φ متقاطع نيستند به طور مشابه M_θ و M_φ نیز متقاطع نيستند.

۵-۴ اگر کره S بتواند با يك قطعه سطح $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ پوشانده شود در اين صورت S با يك زیرمجموعه باز U از \mathbb{R}^3 همسان ريخت خواهد شد. چون S در \mathbb{R}^3 بسته و کراندار و لذا فشرده است. بنا بر اين U فشرده است و در نتيجه بسته است. اما \mathbb{R}^3 همبند است لذا تنها زیرمجموعه غير تهى آن که هم باز و هم بسته باشد خود \mathbb{R}^3 است که فشرده و در نتيجه کراندار نيست.

۶-۴ به وضوح σ هموار است و $\sigma_u \times \sigma_v = (-f_u, -f_v, 1)$ هيچ گاه صفر نيست بنا بر اين σ عادى است.

۷-۴ σ_{\pm}^2 حالت خاص تمرين ۶.۴ با $f = \pm \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ است (اگر $(u, v) \in U$)، آنگاه $\sqrt{1 - u^2 - v^2} > 0$ هموار است زيرا $(1 - u^2 - v^2) > 0$. قطعات ديگر نیز مشابه هستند.

نگاشت انتقال از σ_+^x به σ_+^y ، به‌عنوان مثال، به‌صورت $\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$ است که در آن $\sigma_+^y(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sigma_+^x(u, v)$ ، بنابراین $u = \sqrt{1 - \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2}$ و این نیز هموار است زیرا $1 - \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 > 0$ ؛ اگر $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in U$.

۸-۴ روی مجموعه باز $R = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid r > 0\}$ ، نگاشت σ هموار است و تصویر آن در سطح $\sigma_r \times \sigma_\theta = (-2r^2 \cosh \theta, 2r^2 \sinh \theta, r)$ و $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ قرار دارد زیرا 1 که روی R هیچ‌گاه صفر نیست.

از تمرین ۶-۴، پرمایش $\tilde{\sigma}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ بدست می‌آید که روی مجموعه باز $U = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 - v^2 > 0\}$ تعریف شده است.

این بازپرمایش از σ با استفاده از نگاشت بازپرمایش $(u, v) \mapsto (r, \theta)$ است که در آن $r = \sqrt{u^2 - v^2}$ ، $\theta = \cosh^{-1}(u/\sqrt{u^2 - v^2})$ (همواری به دلیل $u^2 - v^2 > 0$ است). برای بخش $z < 0$ ، قرار دهید $\sigma(r, \theta) = (r \sinh \theta, r \cosh \theta, -r^2)$ که روی مجموعه باز R تعریف شده است و $\tilde{\sigma}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ که روی مجموعه باز $V = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 - v^2 < 0\}$ تعریف شده است.

۹-۴ مشابه مثال ۵-۴ عمل کنید اما از قطعه «طول و عرض»

$$\sigma(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, c \sin \theta)$$

استفاده کنید. پیشنهاد دوم استفاده از قضیه ۱-۴ است، توجه کنید اگر

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

آنگاه $(f_x, f_y, f_z) = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$ تنها در مبدأ صفر می‌شود و بنابراین در هیچ نقطه‌ای از بیضی‌گون صفر نمی‌شود.

۱۰-۴ یک نقطه روی دایره C ، دارای مختصات $(a + b \cos \theta, b \sin \theta)$ است؛ از دوران آن حول محور z ‌ها به اندازه زاویه φ نقطه $\sigma(\theta, \varphi)$ بدست می‌آید؛ همه چنبره با چهار قطعه که روی مجموعه‌های باز

$$0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < 2\pi \quad (i)$$

$$-\pi < \varphi < \pi, 0 < \theta < 2\pi \text{ (ii)}$$

$$0 < \varphi < 2\pi, -\pi < \theta < \pi \text{ (iii)}$$

$$-\pi < \varphi < \pi, -\pi < \theta < \pi \text{ (iv)}$$

تعریف می‌شوند، پوشیده می‌شود. همه قطعات عادی هستند، زیرا

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = -b(a + b \cos \theta)(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, 1)$$

همواره مخالف صفر است (زیرا $a + b \cos \theta \geq a - b > 0$).

فرض کنید $\sigma(\theta, \varphi) = (x, y, z)$ در این صورت

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 = 2a(a + b \cos \theta)$$

بنابراین

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(a + b \cos \theta)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

فرض کنید $f(x, y, z)$ تفاضل عبارت سمت چپ و راست تساوی اخیر باشد، در این صورت

$$f_x = 4x(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)$$

$$f_y = 4y(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)$$

$$f_z = 4z(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)$$

اگر $f_z = 0$ در این صورت $z = 0$ ، زیرا همه جا روی چنبره داریم $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 > 0$

حالت $f_x = f_y = 0$ نیز همین‌گونه است، در این صورت چون مبدأ روی چنبره

نیست، باید داشته باشیم $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ یا جایگزینی در معادله چنبره داریم

$(2a^2)^2 = 4a^2(a^2 + b^2)$ که تناقض است. بنابراین روی چنبره، (f_x, f_y, f_z) همواره

مخالف صفر است لذا طبق قضیه ۱.۴، سطح هموار است.

۱۱-۴ اگر S به وسیله یک قطعه سطح $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ پوشیده شود، در این صورت $f: S \rightarrow \mathbb{R}$

هموار است اگر و فقط اگر $f \circ \sigma: U \rightarrow \mathbb{R}$ هموار باشد. باید نشان دهیم اگر

$\vec{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$: $\vec{\sigma}$ قطعه دیگری باشد که S را می‌پوشاند، در این صورت $f \circ \vec{\sigma}$ هموار است اگر و فقط اگر $f \circ \sigma$ هموار باشد. این درست است زیرا $f \circ \vec{\sigma} = (f \circ \sigma) \circ \Phi$ که در آن Φ نگاشت انتقال از σ به $\vec{\sigma}$ است و Φ و Φ^{-1} هر دو هموار هستند.

۱۲-۴ اگر $\vec{\sigma} = \sigma + a$ که در آن a بردار ثابتی است، آنگاه $\vec{\sigma}$ هموار است اگر σ هموار باشد و $\vec{\sigma}_u = \sigma_u$ و $\vec{\sigma}_v = \sigma_v$ ، بنابراین $\vec{\sigma}$ عادی است اگر σ عادی باشد.

اگر $\vec{\sigma} = A \circ \sigma$ که در آن A تبدیل خطی روی \mathbb{R}^3 است، در این صورت $\vec{\sigma}$ هموار است اگر σ هموار باشد و $\vec{\sigma}_u = A(\sigma_u)$ و $\vec{\sigma}_v = A(\sigma_v)$. بنابراین اگر A معکوس‌پذیر باشد، $\vec{\sigma}_u$ و $\vec{\sigma}_v$ مستقل خطی هستند اگر σ_u و σ_v مستقل خطی باشند.

۱۳-۴ (i) در $(1, 1, 0)$ ، داریم $\sigma_u = (1, 0, 2)$ ، $\sigma_v = (0, 1, -2)$ بنابراین

$$\sigma_u \times \sigma_v = (-2, 2, -1)$$

و صفحه $-2x + 2y + z = 0$ ، صفحه مماس است

(ii) در $(1, 0, 1)$ داریم $r = 1, \theta = 0$ ، $\sigma_r = (1, 0, 2)$ و $\sigma_\theta = (0, 1, 2)$. بنابراین $\sigma_r \times \sigma_\theta = (-2, -2, 1)$ و معادله صفحه مماس به صورت $-2x - 2y + z = 0$ است.

۱۴-۴ فرض کنید مرکز ملخ در آغاز، مبدأ مختصات باشد. در لحظه t مرکز در $(0, 0, \alpha t)$ است که در آن α سرعت بالگرد است. اگر ملخ در آغاز در امتداد محور x ‌ها باشد، در این صورت نقطه $(v, 0, 0)$ در آغاز به نقطه $(v \cos wt, v \sin wt, \alpha t)$ در لحظه t تبدیل می‌شود که در آن w سرعت زاویه‌ای ملخ است قرار دهید $u = wt$ و $\lambda = \alpha/w$

بنابراین قائم واحد استاندارد $\sigma_u = (-v \sin u, v \cos u, \lambda)$ ، $\sigma_v = (\cos u, \sin u, 0)$ ، اگر θ زاویه بین N و محور z ‌ها باشد، $\cos \theta = -v/(\lambda^2 + v^2)^{1/2}$ و بنابراین $\cot \theta = \pm v/\lambda$ ، و فاصله از محور z ‌ها، v است.

۱۵-۴ فرض کنید $\vec{\sigma}(\vec{u}, \vec{v})$ بازپیمایش σ باشد. در این صورت

$$\sigma_u = \frac{\partial \vec{u}}{\partial u} \vec{\sigma}_u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \vec{\sigma}_v, \quad \sigma_v = \frac{\partial \vec{u}}{\partial v} \vec{\sigma}_u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \vec{\sigma}_v$$

لذا σ_u و σ_v ترکیب خطی از $\vec{\sigma}_u$ و $\vec{\sigma}_v$ هستند. بنابراین هر ترکیب خطی از σ_u و σ_v یک ترکیب خطی از $\vec{\sigma}_u$ و $\vec{\sigma}_v$ است. عکس این مطلب نیز درست است زیرا σ یک بازآمایش $\vec{\sigma}$ است.

۱۶-۴ اگر $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ یک خم در S باشد، با مشتق‌گیری از $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ داریم $f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_z \dot{z} = 0$ و یا $\nabla f \cdot \dot{\gamma} = 0$. که نشان می‌دهد ∇f عمود بر بردار مماس هر خم در S و در نتیجه عمود بر صفحه مماس بر S است. چون S دارای یک انتخاب (هموار) طبیعی از قائم واحد $\nabla f / \|\nabla f\|$ در هر نقطه می‌باشد، لذا جهت‌پذیر است.

۱۷-۴ برای بخش اول به اثبات گزاره ۱.۱۱ مراجعه کنید. با توجه به بحث تمرین ۱۶.۴،

$$\nabla F \cdot \dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt} F(\gamma(t))|_{t=0}$$

بنابراین $\nabla F - \nabla_S F$ به صفحه مماس بر S در P عمود است. این نشان می‌دهد که $\nabla_S F$ تصویر قائم ∇F روی صفحه مماس است. اگر F در P ماکزیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد در این صورت نگاشت $t \mapsto F(\gamma(t))$ به ازای همه خم‌های γ واقع بر S با $\gamma(0) = P$ در نقطه $t = 0$ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است. لذا در نقطه P ، $\nabla_S F = 0$. بنابراین ∇F به صفحه مماس بر S در P عمود است و بنابراین بر اساس تمرین ۱۶.۴ موازی ∇f است. لذا اسکالری مانند λ موجود است به طوری که $\nabla F = \lambda \nabla f$.

۱۸-۴ با توجه به مثال ۱۳.۴ سطح را می‌توان با $\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ و $u \in \mathbf{R}$ ، $-\pi < v < \pi$ یا $0 < v < 2\pi$ پارامتری کرد.

۱۹-۴

$$\|\sigma(u, v)\|^2 = \text{sech}^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \tanh^2 u = \text{sech}^2 u + \tanh^2 u = 1$$

بنابراین σ پرمایش بخشی از کره واحد است. σ به وضوح هموار است و

$$\sigma_u \times \sigma_v = -\text{sech}^2 u \sigma(u, v)$$

همواره مخالف صفر است لذا σ عادی است. نصف‌النهارها، به خم‌های پارامتری $v = \text{ثابت}$ و موازی‌های، به خم‌های $u = \text{ثابت}$ متناظر هستند.

۲۰-۴ بردار σ_u به نصف‌النهارها مماس است بنابراین خم سرعت-واحد γ یک خم ثابت-زاویه است اگر $\dot{\gamma} \cdot \sigma_u / \|\sigma_u\| = \cos \alpha$ ؛ که از آن نتیجه می‌گیریم $\dot{u} = \cosh u \cos \alpha$. چون γ سرعت واحد است، بردار

$$\dot{\gamma} = (-\dot{u} \operatorname{sech} u \tanh u \cos v - \dot{v} \operatorname{sech} u \sin v, \\ -\dot{u} \operatorname{sech} u \tanh u \sin v + \dot{v} \operatorname{sech} u \cos v, \dot{u} \operatorname{sech}^2 u)$$

یک بردار واحد است، و رابطه $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 = \cosh^2 u$ با رابطه $\dot{v} = \pm \cosh u \sin \alpha$ $dv/du = \dot{v}/\dot{u} = \pm \tan \alpha$ خم متناظر در صفحه uv با رابطه $v = \pm u \tan \alpha + c$ داده می‌شود که خط راست است. به ازای ثابتی مانند c ، است.

۲۱-۴ نقطه a در فاصله v از محور z ها روی مولد گذرا از (\circ, \circ, u) دارای وضعیت برداری

$$\sigma(u, v) = (\circ, \circ, u) + v(\cos \theta(u), \sin \theta(u), \circ) = (v \cos \theta(u), v \sin \theta(u), u)$$

است بنابراین

$$\sigma_u \times \sigma_v = (-\sin \theta, -\cos \theta, -v d\theta/du)$$

که به‌وضوح همواره مخالف صفر است بنابراین σ عادی است.

۲۲-۴ (i) $\tilde{\gamma} \cdot a = \circ$ بنابراین $\tilde{\gamma}$ در صفحه عمود بر a واقع است و از مبدأ می‌گذرد.

(ii) عملیات جبری ساده

(iii) \tilde{v} به‌وضوح تابع همواری از (u, v) است و ماتریس ژاکوبین نگاشت $(u, v) \rightarrow (u, \tilde{v})$

به‌صورت $\begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \dot{\gamma} \cdot a & 1 \end{pmatrix}$ است که در آن نقطه نشان‌دهنده d/du است. این ماتریس معکوس‌پذیر است، بنابراین $\tilde{\gamma}$ بازپرمایش γ است.

۲۳-۴ (i) $(a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$ ؛ (به تمرین ۹.۴ مراجعه کنید).

(ii) به تمرین ۴.۴ مراجعه کنید.

$$(u, v, \pm \sqrt{1 + \frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2}}) \quad \text{(iii)}$$

(v)، (iv) به تمرین ۶.۴ مراجعه کنید.

(vi) مثال ۳.۴ را ببینید.

(vii) $(p \cos u, q \cos u, v)$

(viii) $(\pm p \cosh u, q \sinh u, v)$

(ix) $(u, u^2/p^2, v)$

(x) (\circ, u, v)

(xi) $(\pm p, u, v)$

۲۴-۴ (a) انواع (vii)-(xi)

(b) نوع (vi)

(c) انواع (ii) (مراجعه به تمرین ۴.۴) و (v) (مراجعه به تمرین ۲۵.۴) و (vi)-(x)

(d) نوع (i) اگر p^2 و q^2 و r^2 مجزا نباشند و انواع (ii)، (iii)، (iv)، (vi) و (vii) اگر

$p^2 = q^2$ و نوع (x)

۲۵-۴

$$z = \left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q} \right) \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right) = uv$$

$$x = \frac{1}{p}p(u+v),$$

$$y = \frac{1}{q}q(v-u)$$

بنابراین

$$\sigma(u, v) = \left(\frac{1}{p}p(u+v), \frac{1}{q}q(v-u), uv \right)$$

یک پرمایش σ است و

$$\sigma_u \times \sigma_v = \left(-\frac{1}{q}q(u+v), \frac{1}{p}p(v-u), pq \right)$$

همواره مخالف صفر است بنابراین σ عادی است. به‌ازای مقدار ثابتی از u

$$\sigma(u, v) = \left(\frac{1}{p}pu, -\frac{1}{q}qu, \circ \right) + v \left(\frac{1}{p}p, \frac{1}{q}q, u \right)$$

یک خط راست است و مشابه آن برای وقتی که v مقدار ثابتی است برقرار است. بنابراین سهمی‌گون هذلولوی اجتماع دو خانواده از خطوط راست است.

۲۶-۴ با جایگزینی مؤلفه‌های (x, y, z) از $\gamma(t) = a + bt$ در معادله درجه دو، یک معادله درجه دو از t بدست می‌آید، اگر درجه دو شامل سه نقطه روی خط باشد، معادله درجه دو حاصل، دارای سه ریشه است بنابراین هم‌ارز صفر است لذا درجه دو شامل تمام خط است. سه نقطه روی هر یک از خطوط داده شده در نظر بگیرید. با جایگزینی مؤلفه‌های این سه نقطه در معادله درجه دو یک سیستم نه معادله خطی همگن بر حسب ده ضریب درجه دو، c, \dots, a_1 ، به‌دست می‌آید چنین سیستمی همواره دارای یک جواب غیربدیهی است. طبق قسمت اول، درجه دو منتج شامل هر سه خط است.

۲۷-۴ فرض کنید L_1, L_2, L_3 سه خط از خانواده اول باشند طبق تمرین ۲۶-۴ معادله درجه دو Q مشتمل بر هر سه خط موجود است، همه بجز تعداد متناهی از خطوط خانواده دوم هر سه خط را قطع می‌کنند؛ اگر L' چنین خطی باشد Q شامل سه نقطه از L' است و بنابراین بر اساس تمرین ۲۶-۴ شامل همه L' است. لذا Q شامل همه بجز تعداد متناهی از خطوط خانواده دوم است؛ چون هر درجه دومی یک زیرمجموعه بسته از \mathbf{R}^3 است لذا Q باید شامل همه خطوط خانواده دوم باشد بنابراین باید شامل S باشد.

۲۸-۴ هر دو قسمت از نظر هندسی واضح هستند.

۲۹-۴ فرض کنید (a, b, c) نقطه‌ای از \mathbf{R}^3 باشد که در آن a و b مخالف صفر هستند. در این صورت $F_t(a, b, c) \rightarrow \infty$ وقتی $t \rightarrow \infty$ و همچنین وقتی که t به p^2 و q^2 از سمت چپ نزدیک شود؛ و $F_t(a, b, c) \rightarrow -\infty$ وقتی $t \rightarrow -\infty$ و همچنین وقتی که t به p^2 و q^2 از سمت راست نزدیک شود. از این مطلب و اینکه $F_t(a, b, c) = 0$ هم‌ارز معادله درجه سه بر حسب t است، نتیجه می‌گیریم اعداد یگانه u, v, w با $u < p^2$ و $u < v < q^2$ و $p^2 < w$ موجودند به طوری که $F_t(a, b, c) = 0$ وقتی w یا v یا u است. سطوح $F_u(x, y, z) = 0$ و $F_w(x, y, z) = 0$ سهمی‌گون بیضوی هستند و سطح $F_v(x, y, z) = 0$ سهمی‌گون هذلولوی است و ما نشان داده‌ایم که سطحی از هر نوع که از هر نقطه (a, b, c) می‌گذرد وجود دارد.

برای پارامتری کردن این سطوح بنویسید $F_t(x, y, z) = 0$ مانند معادله درجه سه

$$x^2(q^2 - t) + y^2(p^2 - t) - 2z(p^2 - t)(q^2 - t) + t(p^2 - t)(q^2 - t) = 0$$

و توجه کنید سمت چپ باید برابر با $(t-u)(t-v)(t-w)$ باشد، با قرار دادن q^2 ، $t = p^2$ و سپس معادل کردن ضرایب t^2 ، بدست می‌آوریم

$$x = \pm \sqrt{\frac{(p^2 - u)(p^2 - v)(p^2 - w)}{q^2 - p^2}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(q^2 - u)(q^2 - v)(q^2 - w)}{p^2 - q^2}}$$

$$z = \frac{1}{2}(u + v + w - p^2 - q^2)$$

۳۰-۴ فرض کنید $F: W \rightarrow V$ نگاشت هموار دوسویی با نگاشت معکوس هموار $F^{-1}: V \rightarrow W$ است که در اثبات گزاره ۱.۴ ساخته شد. در این صورت $(u(t), v(t)) = F^{-1}(\gamma(t))$ هموار است.

۳۱-۴ به عنوان مثال فرض کنید در (x_0, y_0) ، $f_y \neq 0$. قرار دهید $F(x, y) = (x, f(x, y))$ در این صورت F هموار است و ماتریس ژاکوبین $\begin{pmatrix} 1 & f_x \\ 0 & f_y \end{pmatrix}$ در (x_0, y_0) معکوس پذیر است طبق قضیه تابع معکوس، F دارای معکوس هموار G است که روی زیرمجموعه باز \mathbb{R}^2 شامل $G(x, z) = (x, g(x, z))$ ، تعریف شده است و G باید، صورت $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ به ازای تابع همواری مانند g باشد. در این صورت $\gamma(t) = (t, g(t, 0))$ یک پرمایش خم تراز $f(x, y) = 0$ مشتمل بر (x_0, y_0) است.

ماتریس $\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}$ همه جا دارای مرتبه ۲ است، فرض کنید در نقطه‌ای مانند

(x_0, y_0, z_0) روی خم تراز، زیر ماتریس 2×2 ، $\begin{pmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{pmatrix}$ معکوس پذیر است. تعریف

کنید $F(x, y, z) = (x, f(x, y, z), g(x, y, z))$ در این صورت F هموار و ماتریس

زاکوبین

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}$$

در (x_0, y_0, z_0) معکوس پذیر است. فرض کنید

$$G(x, u, v) = (x, \varphi(x, u, v), \psi(x, u, v))$$

معکوس هموار F باشد که در همسایگی $(x_0, 0, 0)$ تعریف شده است. در این صورت

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) = \gamma(t) = (t, \varphi(t, 0, 0), \psi(t, 0, 0))$$

مشتمل بر (x_0, y_0, z_0) است.

فصل ۵

۱-۵ (i) مخروط درجه دو؛ داریم

$$\sigma_u = (\cosh u \sinh v, \cosh u \cosh v, \cosh u)$$

$$\sigma_v = (\sinh u \cosh v, \sinh u \sinh v, 0)$$

و بنابراین $\|\sigma_u\|^2 = 2 \cosh^2 u$ ، $\sigma_u \cdot \sigma_v = 2 \sinh u \cosh u \sinh v \cosh v$ و $\|\sigma_v\|^2 = \sinh^2 u$ اولین فرم اساسی به صورت

$$2 \cosh^2 u \, du^2 + 4 \sinh u \cosh u \sinh v \cosh v \, du \, dv + \sinh^2 u \, dv^2$$

است.

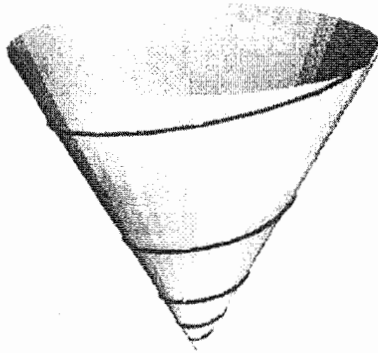
(ii) سهمی گون دورانی؛ $(2 + 4u^2)du^2 + 4uv \, du \, dv + (2 + 4v^2)dv^2$

(iii) استوانه هذلولوی؛ $(\cosh^2 u + \sinh^2 u)du^2 + dv^2$

(iv) سهمی گون دورانی؛ $(1 + 4u^2)du^2 + 4uv \, du \, dv + (1 + 4v^2)dv^2$

۲-۵ اولین فرم اساسی به صورت $2 \, du^2 + u^2 \, dv^2$ است بنابراین طول خم برابر است با

$$\int_0^\pi (2\dot{u}^2 + u^2 \dot{v}^2)^{1/2} dt = \int_0^\pi (2\lambda^2 e^{2\lambda t} + e^{2\lambda t})^{1/2} dt = \frac{(2\lambda^2 + 1)^{1/2}}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$$



۳-۵ با انتقال قطعه سطح، σ_u یا σ_v تغییر نمی‌کند. اگر A یک دوران حول مبدأ باشد، آنگاه $(A\sigma)_u = A(\sigma_u)$ و $(A\sigma)_v = A(\sigma_v)$ و A حافظ ضرب درونی است (به‌ازای همه بردارهای \mathbb{R}^2)

$$(A(p)) \cdot A(q) = p \cdot q, p, q \in \mathbb{R}^2$$

۴-۵ طبق قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} &= \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} &= \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\tilde{E} = \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \cdot \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = E \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + G \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right)^2$$

به‌طور مشابه در مورد \tilde{F} و \tilde{G} عمل کنید. با ضرب کردن ماتریس‌ها نشان دهید که این فرمول‌ها هم‌ارز با معادله ماتریسی مورد سؤال است.

۵-۵ نگاهت به‌صورت

$$\sigma(u, v) \mapsto \left(u\sqrt{2} \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, u\sqrt{2} \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \tilde{\sigma}(u, v)$$

است. تصویر این نگاهت بخشی از صفحه xy است که مختصات قطبی آن (r, θ) در شرط $0 < \theta < \pi\sqrt{2}$ صدق می‌کند. اولین فرم اساسی σ به صورت $2du^2 + u^2 dv^2$

(تمرین ۲.۵) است؛

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_u &= \left(\sqrt{2} \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \bar{\sigma}_v &= \left(-u \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, u \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, 0 \right)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\bar{\sigma}_u\|^2 = 2, \quad \bar{\sigma}_u \cdot \bar{\sigma}_v = 0, \quad \|\bar{\sigma}_v\|^2 = u^2$$

و اولین فرم اساسی $\bar{\sigma}$ نیز به صورت $2du^2 + u^2dv^2$ است.

۶-۵ نه: بخشی از مولد $(t, 0, t)$ با $1 \leq t \leq 2$ دارای طول $\sqrt{2}$ است و به پاره خط مستقیم $(t, 0, 0)$ با $1 \leq t \leq 2$ نگاشته می‌شود که دارای طول ۱ است.

۷-۵ در مورد استوانه تعمیم‌یافته، مثال ۳.۵ نشان می‌دهد که اولین فرم اساسی به صورت $du^2 + dv^2$ است. بنابراین $\sigma(u, v) \mapsto (u, v, 0)$ یک ایزومتري از استوانه به بخشی از صفحه xy است. در مورد مخروط تعمیم‌یافته مثال ۴.۵ نشان می‌دهد که اولین فرم اساسی به صورت $v^2 du^2 + dv^2$ است. این همان اولین فرم اساسی $\bar{\sigma} \left(\frac{v}{\sqrt{2}}, u\sqrt{2} \right)$ است که در آن $\bar{\sigma}$ مانند تمرین ۵.۵ تعریف شده است. چون $\bar{\sigma}$ پرمایش بخشی از صفحه است، لذا مخروط تعمیم‌یافته ایزومتريک با بخشی از صفحه است.

۸-۵ محاسبات مستقیم نشان می‌دهد که اولین فرم اساسی σ^t به صورت $\cosh^2 u (du^2 + dv^2)$ است که مستقل از t است. بنابراین $\sigma(u, v) \mapsto \sigma^t(u, v)$ به ازای همه مقادیر t یک ایزومتري است. قرار دهید $t = \frac{\pi}{4}$ و یک ایزومتري از زنجیروار به مارپیچ‌نما بدست آورید. تحت این نگاشت موازی‌های $u = \text{ثابت}$ روی زنجیروار به مارپیچ‌های دایره‌گون روی مارپیچ‌نما؛ و نصف‌النهارهای $v = \text{ثابت}$ به مولدهای مارپیچ‌نما تصویر می‌شود.

۹-۵ اگر اولین فرم‌های اساسی دو سطح با هم برابر باشند، آنها مطمئناً متناسب هستند، بنابراین هر ایزومتري یک نگاشت هم‌دیس است. تصویر کنج‌نگاری یک نگاشت هم‌دیس از کره واحد به صفحه است. اما یک ایزومتري نیست زیرا $\lambda \neq 1$ (به مثال ۷.۵ مراجعه کنید)

۱۰-۵ بردار σ_u مماس بر مولدهای مخروط است، بنابراین زاویه θ ، زاویه بین خم و مولدها از رابطه $\cos \theta = \frac{\dot{\gamma} \cdot \sigma_u}{\|\dot{\gamma}\| \|\sigma_u\|}$ بدست می‌آید. از $\gamma(t) = (e^{\lambda t} \cos t, e^{\lambda t} \sin t, e^{\lambda t})$ و $\sigma_u = (\cos t, \sin t, 1)$ داریم $\cos \theta = \sqrt{\frac{2\lambda^2}{2\lambda^2+1}}$ که مستقل از t است.

۱۱-۵ اولین فرم اساسی به صورت $\text{sech}^2 u (du^2 + dv^2)$ است.

۱۲-۵ اولین فرم اساسی به صورت $(1 + f^2) du^2 + u^2 dv^2$ است که در آن نقطه به معنای $\frac{d}{du}$ است. بنابراین σ همدیس است اگر و فقط اگر $f = \pm \sqrt{u^2 - 1}$ یعنی اگر و فقط اگر $f(u) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{u}} \cosh^{-1} u \right) + c$ مقدار ثابتی است.

۱۳-۵ اولین فرم اساسی به صورت $du^2 + 2\dot{\gamma} \cdot \delta dudv + dv^2$ است، بنابراین σ همدیس است اگر و فقط اگر به ازای هر u و v ، $\dot{\gamma} \cdot \delta = 0$ و $\delta \cdot \delta = 0$ بنابراین δ ثابت است و در این صورت دومین شرط می‌گوید $\gamma \cdot \delta$ ثابت است آن را d بنامید. بنابراین σ همدیس است اگر و فقط اگر δ ثابت باشد و γ در صفحه $d = \mathbf{r} \cdot \delta$ واقع باشد. در این حالت σ استوانه تعمیم یافته است.

۱۴-۵ σ همدیس است اگر و فقط اگر $f_u^2 + g_u^2 = f_v^2 + g_v^2$ و $f_u f_v + g_u g_v = 0$. قرار دهید $w = f_v + i g_v$ ، $z = f_u + i g_u$ در این صورت σ همدیس است اگر و فقط اگر $z \bar{z} = w \bar{w}$ و $z \bar{w} + \bar{z} w = 0$ که در آن علامت - نشان دهنده مزدوج مختلط است؛ اگر $z = 0$ در این صورت $w = 0$ و هر چهار معادله یقیناً تأمین شده‌اند، اگر $z \neq 0$ داریم $z^2 = -w^2$ بنابراین $z = \pm i w$ به آسانی ثابت می‌شود که اگر علامت + باشد این‌ها هم ارز معادلات کشی-ریمان و اگر علامت - باشد، هم ارز معادلات پادکشی-ریمان هستند.

۱۵-۵ سهمی‌گون را با $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ پارامتری کنید، اولین فرم اساسی آن به صورت $(1 + 4u^2) du^2 + 8uv dudv + (1 + 4v^2) dv^2$ است. بنابراین مساحت مورد نظر $\iint \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)} dudv$ روی قرص $u^2 + v^2 < 1$ گرفته می‌شود. قرار دهید $u = r \sin \theta$ و $v = r \cos \theta$ در این صورت مساحت برابر است با

$$2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1)$$

که از 2π یعنی مساحت نیم‌کره کمتر است.

۱۶-۵ سطح را با

$$\sigma(u, v) = (\rho(u) \cos v, \rho(u) \sin v, \sigma(u))$$

پرمایش کنید که در آن $\gamma(u) = (\rho(u), 0, \sigma(u))$. طبق مثال ۲.۶ $du^2 + \rho(u)^2 dv^2$ اولین فرم اساسی است بنابراین مساحت برابر است با

$$\iint \rho(u) du dv = 2\pi \int \rho(u) du$$

(i) قرار دهید $\sigma(u) = \cos u, \rho(u) = \sin u$ و $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ بنابراین مساحت برابر است با $2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 4\pi$.

(ii) در مورد چنبره، خم برش قائم به صورت $\gamma(\theta) = (a + b \cos \theta, 0, b \sin \theta)$ است که سرعت-واحد نیست، بازپرمایش سرعت - واحد آن به صورت $\tilde{\gamma}(u) = (a + b \cos \frac{u}{b}, 0, b \sin \frac{u}{b})$ $0 \leq u \leq 2\pi b$ است بنابراین مساحت برابر است با $2\pi \int_0^{2\pi b} (a + b \cos \frac{u}{b}) du = 4\pi^2 ab$.

۱۷-۵ σ لوله‌ای است که با دایره شعاع a در صفحه عمود بر γ وقتی که مرکز آن در امتداد γ حرکت کند پوشیده می‌شود. داریم

$$\sigma_s = (1 - \kappa a \cos \theta)t - \tau a \sin \theta n + \tau a \cos \theta b$$

$$\sigma_\theta = -a \sin \theta n + a \cos \theta b$$

لذا

$$\sigma_s \times \sigma_\theta = -a(1 - \kappa a \cos \theta)(\cos \theta n + \sin \theta b)$$

که همواره مخالف صفر است زیرا از $\kappa a < 1$ ، به‌ازای هر θ ، داریم $1 - \kappa a \cos \theta > 0$. اولین فرم اساسی به صورت

$$((1 - \kappa a \cos \theta)^2 + \tau^2 a^2) ds^2 + 2\tau a^2 ds d\theta + a^2 d\theta^2$$

است بنابراین مساحت برابر است با

$$\int_{s_0}^{s_1} \int_0^{2\pi} a(1 - \kappa a \cos \theta) ds d\theta = 2\pi a(s_1 - s_0)$$

۱۸-۵ اگر $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$ در این صورت $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$ بنابراین هر ایزومتري، متساوی المساحت است. نگاشت f در قضیه ارشمیدس F_1^2

متساوی المساحت است ولی ایزومتري نیست (به عنوان مثال وقتی $E_1 \neq E_2$)

۱۹-۵ اگر $E_1 = \lambda E_2$, $F_1 = \lambda F_2$ و $G_1 = \lambda G_2$ و اگر $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$ در این صورت $\lambda^2 = 1$ بنابراین $\lambda = 1$ (زیرا $\lambda > 0$)

۲۰-۵ بر اساس قضیه ۵.۵ مجموع زوایای یک مثلث $\pi + \frac{A}{R^2}$ است که در آن A مساحت آن و R شعاع زمین است بنابراین بزرگتر یا مساوی $\pi + \frac{7500000}{169}$ است. لذا، حداقل یکی از زوایای مثلث باید حداقل یک سوم آن، یعنی $\pi + \frac{10}{169}$ رادیان باشد.

۲۱-۵ $2E = 2F$ زیرا هر وجه دارای سه یال و هر یال، یال دقیقاً دو وجه است. مجموع زوایای حول هر رأس 2π است بنابراین مجموع زوایای همه مثلث‌ها $2\pi V$ است، از طرف دیگر، طبق قضیه ۵.۵، مجموع زوایای هر مثلث π به اضافه مساحت آن است. بنابراین از آنجایی که F مثلث وجود دارد و مجموع همه مساحت‌های آن‌ها 4π است (مساحت کره)، مجموع همه زوایای $\pi F + 4\pi$ است، لذا $2V = F + 4$. در این صورت

$$V - E + F = 2 + \frac{1}{4}F - E + F = 2 + \frac{1}{4}(2F - 2E) = 2$$

۲۲-۵ فرض کنید $U \rightarrow \mathbf{R}^2$, σ ، در این صورت f متساوی المساحت است اگر و فقط اگر به ازای هر ناحیه $R \subseteq U$

$$\iint_R (E_1 G_1 - F_1^2)^{1/2} du dv = \iint_R (E_2 G_2 - F_2^2)^{1/2} du dv$$

از این نتیجه می‌شود که اگر و فقط اگر در همه جا دو انتگرال برابر باشند یعنی اگر و فقط اگر

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$$

فصل ۶

۱-۶ $\sigma_u = (1, 0, 2u)$ و $\sigma_v = (0, 1, 2v)$ بنابراین $N = \lambda(-2u, -2v, 1)$ که در آن $\lambda = (1 + 4u^2 + 4v^2)^{-1/2}$ ؛ $\sigma_{vv} = (0, 0, 2)$ ، $\sigma_{uv} = 0$ ، $\sigma_{uu} = (0, 0, 2)$ ؛ $N = 2\lambda$ ، $M = 0$ ، $L = 2\lambda$ بنابراین $(du^2 + dv^2)$ به صورت اساسی فرم دومین فرم اساسی به صورت است.

۲-۶ $\sigma_u \cdot N_u = -\sigma_{uu} \cdot N$ (چون $\sigma_u \cdot N_u = 0$) بنابراین $N_u \cdot \sigma_u = 0$ ، بطور مشابه $N_u \cdot \sigma_v = N_v \cdot \sigma_u = N_v \cdot \sigma_v = 0$ ، بنابراین N_u و N_v هم بر σ_u و هم σ_v عمودند و بنابراین موازی N هستند. از طرف دیگر N_u و N_v عمود بر N هستند چون N بردار واحد است. لذا $N_u = N_v = 0$ و بنابراین N ثابت است. بنابراین $(\sigma \cdot N)_u = \sigma_u \cdot N = 0$ و به طور مشابه $(\sigma \cdot N)_v = 0$ لذا $\sigma \cdot N$ ثابت است آن را d فرض کنید در این صورت σ بخشی از صفحه $r \cdot N = d$ است.

۳-۶ از بخش ۲.۴، $\tilde{N} = \pm N$ ، علامت به $\det(J)$ وابسته است از $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}$ و $\tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$ داریم

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}\tilde{u}} = \sigma_u \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{u}^2} + \sigma_v \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{u}^2} + \sigma_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \right)^2 + 2\sigma_{uv} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + \sigma_{vv} \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right)^2$$

بنابراین

$$\tilde{L} = \pm \left(L \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \right)^2 + 2M \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + N \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right)^2 \right)$$

زیرا $\sigma_u \cdot N = \sigma_v \cdot N = 0$ ، این مطلب همراه با فرمول‌های مشابه برای \tilde{M} و \tilde{N} ، هم‌ارز با معادله ماتریسی در سؤال مذکور هستند.

۴-۶ با انتقال قطعه سطح، σ_u و σ_v تغییر نمی‌کنند و بنابراین N ، σ_{uu} و σ_{uv} و σ_{vv} در نتیجه دومین فرم اساسی تغییر نمی‌کند. دوران A حول مبدأ اثر زیر را دارد $\sigma_u \rightarrow A(\sigma_u)$ و $\sigma_v \rightarrow A(\sigma_v)$ ؛ بنابراین $N \rightarrow A(N)$ و $\sigma_{uu} \rightarrow A(\sigma_{uu})$ ، $\sigma_{uv} \rightarrow A(\sigma_{uv})$ و $\sigma_{vv} \rightarrow A(\sigma_{vv})$ و چون به‌ازای هر دو بردار p, q در \mathbb{R}^r ، $A(p) \cdot A(q) = p \cdot q$ ، لذا مجدداً دومین فرم اساسی بدون تغییر باقی می‌ماند.

۵-۶ طبق تمرین ۱.۶، $\sqrt{1+4u^2+4v^2}/\sqrt{1+4u^2+4v^2}$ دومین فرم اساسی سهمی گون است لذا

$$\kappa_n = 2((- \sin t)^2 + \cos^2 t) / \sqrt{1+4\cos^2 t+4\sin^2 t} = 2/\sqrt{5}$$

۶-۶ $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 = 0$ بنابراین $\kappa = 0$ و γ بخشی از خط مستقیم است.

۷-۶ فرض کنید γ خم-سرعت روی کره به مرکز a و شعاع r باشد. در این صورت

$$r^2 = (\gamma - a) \cdot (\gamma - a). \text{ از مشتق‌گیری داریم } \dot{\gamma} \cdot (\gamma - a) = 0 \text{ بنابراین}$$

$$N = \pm \frac{1}{r}(\gamma(t) - a). \text{ در نقطه } \gamma(t) \text{ قائم واحد کره، } \dot{\gamma} \cdot (\gamma - a) = -\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = -1$$

$$\text{است بنابراین } \kappa_n = \dot{\gamma} \cdot N = \pm \frac{1}{r} \dot{\gamma} \cdot (\gamma - a) = \mp \frac{1}{r}$$

۸-۶ اگر کره دارای شعاع R باشد، موازی با عرض جغرافیایی θ ، دارای شعاع $r = R \cos \theta$ است؛

اگر P یک نقطه از این دایره باشد، قائم اصلی آن در P موازی با خط‌گذرا از P ، عمود بر

محور z ها است. درحالی‌که قائم واحد کره موازی خط‌گذرا از P و مرکز کره است. بنابراین

$$\text{زاویه } \psi \text{ در معادله (۸) برابر } \theta \text{ یا } \pi - \theta \text{ است، لذا } \kappa_g = \pm \frac{1}{r} \sin \theta = \pm \frac{1}{R} \tan \theta$$

توجه کنید که این عبارت صفر است اگر و فقط اگر موازی، دایره عظیمه باشد.

۹-۶ بردار $N = (-\dot{g} \cos v, -\dot{g} \sin v, f)$ قائم واحد است که در آن نقطه نشان‌دهنده d/du

است. روی نصف‌النهار v = ثابت، می‌توانیم u را به عنوان پارامتر انتخاب کنیم، چون

$$\sigma_u = (f \cos v, f \sin v, \dot{g})$$

است و

$$\kappa_g = \sigma_{uu} \cdot (N \times \sigma_u) = \begin{vmatrix} f \cos v & f \sin v & \dot{g} \\ -\dot{g} \cos v & -\dot{g} \sin v & f \\ f \cos v & f \sin v & \dot{g} \end{vmatrix} = 0$$

روی موازی u = ثابت، می‌توانیم v را به عنوان پارامتر در نظر بگیریم اما در این

حالت $\sigma_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$ بردار واحد نیست، طول-قوس s از رابطه

$$ds/dv = \|\sigma_v\| = f(u)$$

$s = f(u)v$ بنابراین می‌آید، بنابراین $s = f(u)v$ (مقدار ثابت را صفر فرض

کرده‌ایم). در این صورت

$$\kappa_g = \frac{1}{f(u)^2} \sigma_{vv} \cdot \left(\mathbf{N} \times \frac{1}{f(u)} \sigma_v \right) = \frac{1}{f(u)^2} \begin{vmatrix} -f \cos v & -f \sin v & 0 \\ -\dot{g} \cos v & -\dot{g} \sin v & \dot{f} \\ -f \sin v & f \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{\dot{f}}{f}$$

۱۰-۶ $\kappa_2 = \kappa \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{n}$, $\kappa_1 = \kappa \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{n}$ بنابراین

$$\kappa_1 \mathbf{N}_2 - \kappa_2 \mathbf{N}_1 = \kappa ((\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{N}_2 - (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{N}_1) = \kappa (\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) \times \mathbf{n}$$

طول هر دو طرف را به توان دو می‌رسانیم در این صورت

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = \kappa^2 \|(\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) \times \mathbf{n}\|^2$$

اکنون $\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = \cos \alpha$ ؛ $\dot{\gamma}$ عمود بر \mathbf{N}_1 و \mathbf{N}_2 است، بنابراین $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ موازی $\dot{\gamma}$ و

در نتیجه عمود بر \mathbf{n} است لذا

$$\|(\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) \times \mathbf{n}\| = \|\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2\| \|\mathbf{n}\| = \sin \alpha$$

۱۱-۶ $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \cos \psi$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = \sin \psi$ ، بنابراین $\mathbf{N} = \mathbf{n} \cos \psi + \mathbf{b} \sin \psi$ و

$$\mathbf{B} = \mathbf{t} \times (\mathbf{n} \cos \psi + \mathbf{b} \sin \psi) = \mathbf{b} \cos \psi - \mathbf{n} \sin \psi$$

لذا

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= \dot{\mathbf{n}} \cos \psi + \dot{\mathbf{b}} \sin \psi + \dot{\psi}(-\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{b} \cos \psi) \\ &= (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \cos \psi - \mathbf{n} \tau \sin \psi + \dot{\psi}(-\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{b} \cos \psi) \\ &= -\kappa \cos \psi \mathbf{t} + (\tau + \dot{\psi})(\mathbf{b} \cos \psi - \mathbf{n} \sin \psi) \\ &= -\kappa_n \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{B} \end{aligned}$$

در مورد $\dot{\mathbf{B}}$ فرمول به‌طور مشابه ثابت می‌شود. چون $\{\mathbf{t}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ پایه متعامد راست برای \mathbb{R}^3 است، تمرین ۲۲.۲ نشان می‌دهد ماتریسی که $\dot{\mathbf{N}}, \dot{\mathbf{B}}$ و $\dot{\mathbf{t}}$ را بر حسب $\mathbf{N}, \mathbf{B}, \mathbf{t}$ بیان می‌کند، کج-مقارن است، لذا فرمول $\dot{\mathbf{t}}$ بدست می‌آید.

۱۲-۶ برمایش سرعت-واحد یک خط سیستم به صورت $\gamma(t) = p + qt$ بردار واحد) است، بنابراین $\dot{\gamma} = 0$ و در نتیجه $\kappa_n = \dot{\gamma} \cdot N = 0$. در حالت کلی $\kappa_n = 0$ اگر و فقط اگر $\dot{\gamma}$ عمود بر N باشد؛ اگر و فقط اگر N عمود بر n باشد اگر و فقط اگر N موازی b باشد (چون N عمود بر t است).

۱۳-۶ دومین فرم اساسی به صورت $(-du^2 + u^2 dv^2)/u\sqrt{1+u^2}$ است بنابراین خم

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

مجانبی است اگر و فقط اگر $-u^2 + u^2 v^2 = 0$ یعنی $dv/du = v/u = \pm 1/u$ که در آن $\ln u = \pm(v + c)$ مقدار ثابتی است.

۱۴-۶ طبق تمرین ۱۲.۶، b موازی N است لذا $b = \pm N$ ، در این صورت $B = t \times N = \mp n$ ، در نتیجه $\dot{B} = \mp \dot{n} = \mp(-\kappa t + \tau b) = \pm \kappa t - \tau N$ (و $\kappa_n = \pm \kappa$) داریم $\tau_g = \tau$

۱۵-۶ در مورد مارپیچ‌نما داریم $\sigma(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \lambda u)$ ، لذا اولین و دومین فرم اساسی آن به ترتیب به صورت $(\lambda^2 + v^2)du^2 + dv^2$ و $2\lambda dudv/\sqrt{\lambda^2 + v^2}$ هستند. بنابراین انحناهای اصلی ریشه‌های معادله

$$\begin{vmatrix} -\kappa(\lambda^2 + v^2) & \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} & -\kappa \end{vmatrix} = 0$$

یعنی $\pm \lambda/(\lambda^2 + v^2)$ هستند.

در مورد زنجیروار داریم $\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ ، لذا اولین و دومین فرم اساسی آن به ترتیب به صورت $(du^2 + dv^2)$ و $\cosh^2 u(-du^2 + dv^2)$ هستند، بنابراین انحناهای اصلی ریشه‌های

$$\begin{vmatrix} -1 - \kappa \cosh^2 u & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \cosh^2 u \end{vmatrix}$$

یعنی $\kappa = \pm \operatorname{sech} u$ هستند.

۱۶-۶ فرض کنید s طول-قوس در امتداد γ و علامت « $'$ » نشان‌دهنده d/ds باشد در این صورت بر اساس گزاره ۱.۶

$$\kappa_n = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{(ds/dt)^2} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

۱۷-۶ طبق تمرین‌های ۴.۵ و ۳.۶ داریم $\tilde{F}_I = J^t F_I J$ و $\tilde{F}_{II} = \pm J^t F_{II} J$ که در آن علامت بر اساس $\det(J)$ تعیین می‌شود. انحنای اصلی $\tilde{\sigma}$ ، ریشه‌های $\det(\tilde{F}_{II} - \tilde{\kappa}\tilde{F}_I) = 0$ یعنی $\det(\pm F_{II} - \tilde{\kappa}F_I) = 0$ هستند (زیرا J معکوس‌پذیر است). در نتیجه انحنای اصلی $\pm \tilde{\sigma}$ ، انحنای اصلی σ هستند.

فرض کنید $\tilde{\xi}\tilde{\sigma}_u + \tilde{\eta}\tilde{\sigma}_v$ بردار اصلی $\tilde{\sigma}$ متناظر به انحنای اصلی $\tilde{\kappa}$ باشد در این صورت

$$(\tilde{F}_{II} - \tilde{\kappa}\tilde{F}_I) \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (F_{II} - \kappa F_I) J \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین اگر $J \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ در این صورت $\xi\sigma_u + \eta\sigma_v$ بردار اصلی σ متناظر به انحنای اصلی κ است. اما چون

$$\eta = \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \tilde{\xi} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \tilde{\eta} \quad \text{و} \quad \xi = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \tilde{\xi} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \tilde{\eta}$$

لذا داریم

$$\xi\sigma_u + \eta\sigma_v = \tilde{\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \sigma_v \right) + \tilde{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \sigma_v \right) = \tilde{\xi}\tilde{\sigma}_u + \tilde{\eta}\tilde{\sigma}_v$$

که نشان می‌دهد که $\tilde{\xi}\tilde{\sigma}_u + \tilde{\eta}\tilde{\sigma}_v$ بردار اصلی σ متناظر به انحنای اصلی κ است. قسمت دوم نیز از نتیجه ۲.۶ به دست می‌آید.

۱۸-۶ $\dot{\gamma} = \dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v$ بردار اصلی متناظر به انحنای اصلی κ است اگر و فقط اگر

$$(F_{II} - \kappa F_I) \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow F_I^{-1} F_{II} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = -\kappa \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \Leftrightarrow a\dot{u} + c\dot{v} = -\kappa\dot{u}, \quad b\dot{u} + d\dot{v} = -\kappa\dot{v}$$

اما

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \dot{u}N_u + \dot{v}N_v = \dot{u}(a\sigma_u + b\sigma_v) + \dot{v}(c\sigma_u + d\sigma_v) \\ &= (a\dot{u} + c\dot{v})\sigma_u + (b\dot{u} + d\dot{v})\sigma_v\end{aligned}$$

بنابراین $\dot{\gamma}$ اصلی است $\Leftrightarrow \dot{N} = -\kappa(\dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v) = -\kappa\dot{\gamma}$

از مثال ۲.۶، اولین و دومین فرم اساسی سطح دورانی به ترتیب عبارتند از $du^2 + f(u)^2 dv^2$ و $(f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g})du^2 + f\dot{g}dv^2$. چون عبارت $du dv$ وجود ندارد بردارهای σ_u و σ_v اصلی هستند اما اینها به ترتیب مماس بر نصف‌النهارها و موازی‌ها هستند.

۱۹-۶ طبق تمرین ۱۱.۶، $\dot{N} = -\kappa_n t + \tau_g B$ ، لذا طبق تمرین ۱۸.۶ γ خط انحنای است اگر و فقط اگر $\tau_g = 0$ (که در این حالت $\lambda = \kappa_n$).

۲۰-۶ فرض کنید N_1 و N_2 قائم‌های واحد دو سطح باشند، اگر γ پرمایش سرعت-واحد C باشد، در این صورت طبق تمرین ۱۸.۶ $\dot{N}_1 = -\lambda_1 \dot{\gamma}$ به‌ازای اسکالری مانند λ_1 . اگر C خط انحنا S_2 باشد در این صورت به‌ازای اسکالری مانند λ_2 داریم $\dot{N}_2 = -\lambda_2 \dot{\gamma}$ و در این صورت $(N_1 \cdot N_2)' = -\lambda_1 \dot{\gamma} \cdot N_2 - \lambda_2 \dot{\gamma} \cdot N_1 = 0$ بنابراین $N_1 \cdot N_2$ در طول γ ثابت است که نشان می‌دهد زاویه بین S_1 و S_2 ثابت است. بالعکس، اگر $N_1 \cdot N_2$ ثابت باشد، آنگاه $N_1 \cdot N_2 = 0$ ، زیرا $N_1 \cdot N_2 = -\lambda_1 \dot{\gamma} \cdot N_2 = 0$ ؛ بنابراین \dot{N}_2 بر N_1 عمود است و همچنین بر N_2 ، وقتی N_2 بردار واحد باشد، عمود است. اما $\dot{\gamma}$ نیز بر N_1 و N_2 عمود است. بنابراین \dot{N}_2 باید موازی $\dot{\gamma}$ باشد. لذا اسکالری مانند λ_2 موجود است. به‌طوری که $\dot{N}_2 = -\lambda_2 \dot{\gamma}$.

۲۱-۶ (i) مشتق‌گیری از سه معادله در (۲۱) نسبت به w و u و v نشان می‌دهد

$$\sigma_{uw} \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \sigma_{vw} = 0$$

$$\sigma_{uv} \cdot \sigma_w + \sigma_v \cdot \sigma_{uw} = 0$$

$$\sigma_{vw} \cdot \sigma_u + \sigma_w \cdot \sigma_{uv} = 0$$

از تفاضل معادله دوم از مجموع دو معادله دیگر داریم $\sigma_u \cdot \sigma_{vw} = 0$ ، به‌طور مشابه ثابت می‌شود $\sigma_v \cdot \sigma_{uw} = \sigma_w \cdot \sigma_{uv} = 0$.

(ii) از $\sigma_v \cdot \sigma_w = 0$ نتیجه می‌گیریم که ماتریس \mathcal{F}_I به‌ازای سطح $u = u_0$ قطری است (به‌طور مشابه برای بقیه). فرض کنید N قائم واحد سطح $u = u_0$ باشد؛ طبق تعریف N موازی $\sigma_v \times \sigma_w$ و بنابراین موازی σ_u است چون σ_u, σ_v و σ_w متعامد هستند؛ طبق (i) $\sigma_{vw} \cdot \sigma_u = 0$. بنابراین $\sigma_{vw} \cdot N = 0$ که نشان می‌دهد ماتریس \mathcal{F}_{II} به‌ازای سطح $u = u_0$ قطری است.

(iii) طبق قسمت (ii)، خم‌های پارامتری هر سطح $u = u_0$ ، خطوط انحنای هستند. اما خم پارامتری $v = v_0$ روی این سطح تقاطع سطح $u = u_0$ با سطح $v = v_0$ است.

۲۲-۶ داریم $N_u = a\sigma_u + b\sigma_v, N_v = c\sigma_u + d\sigma_v$ بنابراین

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{III} &= \begin{pmatrix} N_u \cdot N_u & N_u \cdot N_v \\ N_u \cdot N_v & N_v \cdot N_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Ea^2 + 2Fab + Gb^2 & Eac + F(ad + bc) + Gbd \\ Eac + F(ad + bc) + Gbd & Ec^2 + 2Fcd + Gd^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (-\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II})^t \mathcal{F}_I (-\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}) \\ &= \mathcal{F}_{II} \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_I \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} = \mathcal{F}_{II} \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \end{aligned}$$

۲۳-۶ بر اساس مثال ۲.۶ انحناهای اصلی عبارتند از $f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g}$ و \dot{g}/f اگر $\dot{g} = 0$ ، آنگاه سطح بخشی از صفحه $z = \text{ثابت}$ است و هیچ نقطه سهمی نیست. پس $\dot{g} \neq 0$ ، هر نقطه سهمی است اگر و فقط اگر $f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g} = 0$. با ضرب کردن در \dot{g} و استفاده از $f^2 + g^2 = 1$ (که نتیجه می‌دهد $f\dot{f} + g\dot{g} = 0$) بدست می‌آوریم $\dot{f} = 0$. بنابراین $f(u) = au + b$ که در آن a و b ثابت هستند. اگر $a = 0$ ، استوانه دایره‌گون را داریم و اگر $a \neq 0$ ، مخروط دایره‌گون را داریم.

۲۴-۶ می‌توانیم از پرمایش $\sigma(x, y) = (x, y, z)$ روی بخش $z \neq 0$ بیضی‌گون استفاده کنیم که

در آن $z = \pm r \sqrt{1 - \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}}$. اولین و دومین فرم اساسی به ترتیب عبارتند از

$$(1 + z_x^2)dx^2 + 2z_x z_y dx dy + (1 + z_y^2)dy^2$$

و

$$(z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2) / \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

طبق گزاره ۳.۵(ii) برای نافی بودن باید به ازای اسکالری مانند κ ، تساوی $\mathcal{F}_{II} = \kappa \mathcal{F}_I$ برقرار باشد. این تساوی منجر به معادلات

$$z_{xx} = \lambda(1 + z_x^2), \quad z_{xy} = \lambda z_x z_y, \quad z_{yy} = \lambda(1 + z_y^2)$$

به ازای $\lambda = \kappa \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ می شود. اگر x و y هر دو مخالف صفر باشند از معادله وسط داریم $\lambda = 1/z$ و با جایگزینی در معادله اول بدست می آوریم $p^2 = r^2$ که یک تناقض است. بنابراین یا $x = 0$ یا $y = 0$. اگر $x = 0$ معادلات دارای چهار جواب

$$x = 0, \quad y = \pm q \sqrt{\frac{q^2 - p^2}{q^2 - r^2}}, \quad z = \pm r \sqrt{\frac{r^2 - p^2}{r^2 - q^2}}$$

هستند. به طور مشابه هشت گزینه دیگر زیر برای نافی بودن پیدا می شود.

$$x = \pm p \sqrt{\frac{p^2 - q^2}{p^2 - r^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm r \sqrt{\frac{r^2 - q^2}{r^2 - p^2}}$$

$$x = \pm p \sqrt{\frac{p^2 - r^2}{p^2 - q^2}}, \quad y = \pm q \sqrt{\frac{q^2 - r^2}{q^2 - p^2}}, \quad z = 0$$

از این ۱۲ نقطه دقیقاً ۴ تاى آن حقیقی و به رابطه بین r^2, q^2, p^2 وابسته هستند.

فصل ۷

$$1-7. \quad \sigma_{uv} = (0, 0, 1), \quad \sigma_{uu} = \sigma_{vv} = 0, \quad \sigma_v = (1, -1, u), \quad \sigma_u = (1, 1, v)$$

اگر $u = v = 1$ در می یابیم که $E = 3, F = 1, G = 3, L = N = 0$

$$\text{و } M = -1/\sqrt{2} \text{ بنابراین } K = (LN - M^2)/(EG - F^2) = -1/16$$

$$.H = (LG - 2MF + NG)/2(EG - F^2) = 1/8\sqrt{2}$$

۲-۷ در مورد ماریچ نمای

$$\sigma(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \lambda u)$$

داریم

$$\sigma_u = (-v \sin u, v \cos u, \lambda)$$

$$\sigma_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$N = (\lambda^2 + v^2)^{-1/2} (-\lambda \sin u, \lambda \cos u, -v)$$

$$\sigma_{uu} = (-v \cos u, -v \sin u, 0)$$

$$\sigma_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\sigma_{vv} = 0$$

از این روابط داریم

$$M = \lambda / \sqrt{\lambda^2 + v^2}, L = N = 0, G = 1, F = 0, E = \lambda^2 + v^2$$

$$.K = (LN - M^2) / (EG - F^2) = -\lambda^2 / (\lambda^2 + v^2)^2 \text{ بنابراین}$$

در مورد زنجیروار $\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ داریم

$$\sigma_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)$$

$$\sigma_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

$$N = \operatorname{sech} u (-\cos v, -\sin v, \sinh u)$$

$$\sigma_{uu} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0)$$

$$\sigma_{uv} = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0)$$

$$\sigma_{vv} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)$$

از این روابط بدست می‌آوریم $E = G = \cosh^2 u$ ، $M = 0$ ، $L = -1$ ، $F = 0$ ، $N = 1$

$$.K = (LN - M^2) / (EG - F^2) = -\operatorname{sech}^2 u \text{ بنابراین}$$

متناوباً، از نتایج تمرین ۱۵.۶ استفاده کنید.

۳-۷ سطح را با $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$ پرمایش کنید. در این صورت $\sigma_u = (1, 0, f_u)$

$$\sigma_{uu} = (0, 0, f_{uu}), N = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{-1/2} (-f_u, -f_v, 1), \sigma_v = (0, 1, f_v)$$

$$F = 0, E = 1 + f_u^2 \text{ داریم روابط } \sigma_{vv} = (0, 0, f_{vv}) \text{ و } \sigma_{uv} = (0, 0, f_{uv})$$

$$M = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{-1/2} f_{uv}, L = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{-1/2} f_{uu}, G = 1 + f_v^2, f_u f_v$$

و بنابراین $N = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{-1/2} f_{vv}$

$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

۴-۷ (i) با توجه به مثال ۳-۷

$$K = 0 \Leftrightarrow \delta \cdot N = 0 \Leftrightarrow \delta \cdot ((t + v\delta) \times \delta) = 0 \Leftrightarrow \delta \cdot (t \times \delta) = 0$$

اگر $\gamma \Leftrightarrow \tau = 0 \Leftrightarrow K = 0$ بنا بر این $t \times \delta = b, \delta = -\kappa t + \tau b, \delta = n$ اگر مسطح باشد (براساس گزاره ۴-۲). اگر $\delta = b$ و $\delta = -\tau n$ و $t \times \delta = -n$ مجدداً

$$K = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$$

(ii) فرض کنید N_1 قائم واحد بر S باشد. در این صورت $K = 0 \Leftrightarrow \dot{N}_1 \cdot (t \times N_1) = 0$ چون \dot{N}_1 بر N_1 و N_1 بر t عمود است؛ لذا این شرط برقرار است $\Leftrightarrow \dot{N}_1$ موازی t باشد $\Leftrightarrow \dot{N}_1 = -\lambda \gamma$ به ازای اسکالری مانند λ .

اکنون از تمرین ۱۸.۶ استفاده کنید.

۵-۷ با استفاده از پرمایش تمرین ۱۰.۴ برای σ ، درمی یابیم که

$$E = b^2, F = 0, G = (a + b \cos \theta)^2$$

$$L = b, M = 0, N = (a + b \cos \theta) \cos \theta$$

که از آن نتیجه می شود

$$K = \cos \theta / b(a + b \cos \theta)$$

$$dA_\sigma = (EG - F^2)^{1/2} d\theta d\varphi = b(a + b \cos \theta) d\theta d\varphi$$

بنابراین

$$\iint K dA_\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta d\varphi = 0$$

۶-۷ بخش اول از تمرین‌های ۳.۵ و ۴.۶ نتیجه می‌شود. انبساط، مقادیر E و F و G را در a^2 و مقادیر L ، M و N را در a و در نتیجه H را در a^{-1} و K را در a^{-2} ضرب می‌کند. (از گزاره ۷.۱ استفاده کنید)

۷-۷ چون σ هموار و $\sigma_u \times \sigma_v$ همواره مخالف صفر است، $N = \sigma_u \times \sigma_v / \|\sigma_u \times \sigma_v\|$ نیز هموار است. بنابراین E, F, G, L, M و N هموار هستند. چون $EG - F^2 > 0$ (تحت تذکر منتج از گزاره ۲.۵)، فرمول‌های گزاره ۱.۷ (i) و (ii) نشان می‌دهد که H و K هموار هستند. براساس گزاره ۱.۷ (iii) انحناهای اصلی هموار هستند اگر $H^2 > K$ یعنی اگر نقاط نافی موجود نباشند.

۸-۷ در نقطه P از خم مجانبی، انحنا قائم صفر است. طبق نتیجه ۲.۶ یکی از انحناهای اصلی $\kappa_1 \geq 0$ و دیگری $\kappa_2 \leq 0$. بنابراین $K = \kappa_1 \kappa_2 \leq 0$. روی سطح خط‌دار، خم مجانبی موجود است. مثلاً خط مستقیم گذرا از هر نقطه را در نظر بگیرید (تمرین ۱۲.۶ را ببینید).

۹-۷ طبق تمرین ۲۲.۶، $\mathcal{F}_{III} = \mathcal{F}_{II} \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$. با ضرب سمت چپ در \mathcal{F}_I^{-1} معادله داده شده هم‌ارز با

$$A^2 + 2HA + KI = 0$$

است که در آن $A = -\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ تحت تذکرانی که در ادامه تعریف ۱.۶ آمده است، انحناهای اصلی مقادیر ویژه $-A$ هستند. بنابراین $2H$ برابر مجموع مقادیر ویژه $-A = -(a+d)$ و K برابر حاصل ضرب مقادیر ویژه $-A = ad - bc$ است. اکنون از آنچه در سؤال آمده است، استفاده کنید.

۱۰-۷ طبق معادله (۹) در فصل ۶، $\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = T^t \mathcal{F}_I T$ ؛ طبق معادله ۱۰ فصل ۶

$$\dot{N} \cdot \dot{\gamma} = -N \cdot \ddot{\gamma} \quad (N \cdot \dot{\gamma} = 0 \text{ زیرا})$$

$$= -\kappa_n = -T^t \mathcal{F}_{II} T$$

اکنون

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{N}} &= (\dot{u}\mathbf{N}_u + \dot{v}\mathbf{N}_v) \cdot (\dot{u}\mathbf{N}_u + \dot{v}\mathbf{N}_v) \\ &= (\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N}_u)\dot{u}^2 + 2(\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N}_v)\dot{u}\dot{v} + (\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{N}_v)\dot{v}^2 = T^t \mathcal{F}_{III} T\end{aligned}$$

بنابراین با ضرب سمت چپ معادله تمرین ۹.۷ در T^t و سمت راست در T به دست می‌آوریم $\dot{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{N}} + 2H\dot{\mathbf{N}} \cdot \dot{\gamma} + K\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$ اگر γ یک خم مجانبی باشد، $\kappa_n = 0$ بنابراین $\dot{\mathbf{N}} \cdot \dot{\gamma} = 0$ لذا با فرض اینکه γ سرعت-واحد است. داریم $\dot{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{N}} = -K$ اما از تمرین ۱۲.۶، $\dot{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{N}} = \tau^2$ و $\dot{\mathbf{N}} = \mp \tau \mathbf{n}$ لذا $\mathbf{N} = \pm \mathbf{b}$.

۱۱-۷ پرمایش به صورت $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ است که در آن، $-\infty < u < \infty$ ، $g(u) = \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})$ ، $f(u) = e^u$

(i) موازی $u = \text{ثابت}$ ، دایره‌ای به شعاع $f(u) = e^u$ است. بنابراین دارای طول $2\pi e^u$ است.

(ii) از مثال ۲.۷، $E = 1$ ، $F = 0$ ، $G = f(u)^2$. بنابراین $dA_\sigma = f(u) du dv$ و مساحت برابر است با $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^u du = 2\pi$.

(iii) از مثال ۲.۷، انحناهای اصلی عبارتند از

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g} = -\ddot{f}/\dot{g} = -(e^{-2u} - 1)^{-1/2} \\ \kappa_2 &= f\dot{g}/f^2 = \dot{g}/f = (e^{-2u} - 1)^{1/2}\end{aligned}$$

(iv) $\kappa_2 > 0$ و $\kappa_1 < 0$.

۱۲-۷ (i) با فرض $\bar{u} = v$ ، $\bar{v} = w = e^{-u}$ ، داریم $u = -\ln \bar{v}$ ، بنابراین با علامت

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\bar{v}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ تمرین ۴.۵}$$

چون J معکوس‌پذیر است لذا $(u, v) \mapsto (v, w)$ یک نگاشت پرمایش است. اولین فرم

اساسی بر حسب w, v از روابط زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tilde{v}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{v} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{w^2} \end{pmatrix}$$

بنابراین اولین فرم اساسی به صورت $(dv^2 + dw^2)/w^2$ است.

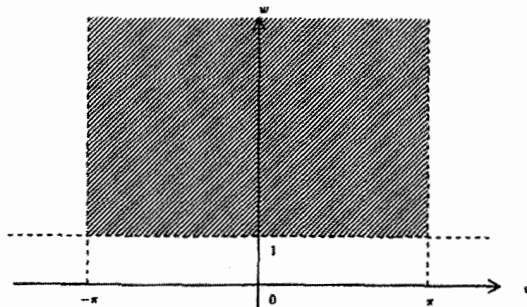
(ii) داریم

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial U} & \frac{\partial v}{\partial V} \\ \frac{\partial w}{\partial U} & \frac{\partial w}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(w+1) & \frac{1}{v}(v^2 - (w+1)^2) \\ -\frac{1}{v}(v^2 - (w+1)^2) & v(w+1) \end{pmatrix}$$

بنابراین بعد از یک‌سری عملیات جبری، اولین فرم اساسی بر حسب U و V از روابط زیر تعیین می‌شود.

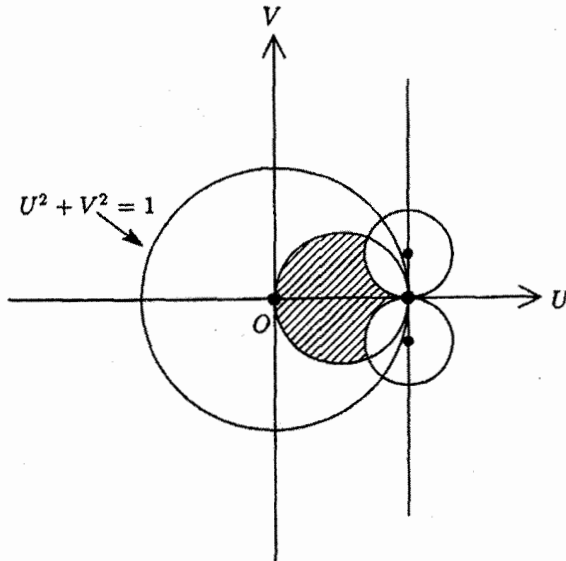
$$\tilde{J}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{w^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{w^2} \end{pmatrix} \tilde{J} = \frac{(v^2 + (w+1)^2)^2}{4w^2} I = \frac{1}{(1 - U^2 - V^2)^2} I$$

در (i)، $u < 0$ و $-\pi < v < \pi$ متناظر به $-\pi < v < \pi$ و $w > 1$ است که یک مستطیل نیمه‌نامتناهی در نیم صفحه بالایی vw است.



برای پیدا کردن ناحیه متناظر به (ii)، اعداد مختلط $z = v + iw$ را $Z = U + iV$ در نظر بگیرید، در این صورت معادلات (ii) هم‌ارز به $Z = \frac{z-1}{z+i}$ و $Z = \frac{Z+1}{i(Z-1)}$ است.

هستند. خط $v = \pi$ در صفحه w متناظر به $z + \bar{z} = 2\pi$ است (علامت بار نشان دهنده مزدوج مختلط است) یعنی $\frac{Z+1}{i(Z-1)} - \frac{\bar{Z}+1}{i(\bar{Z}-1)} = 2\pi$ که پس از ساده کردن داریم $|Z - (1 - \frac{i}{\pi})|^2 = \frac{1}{\pi^2}$ بنابراین $v = \pi$ متناظر به دایره به مرکز $1 - \frac{i}{\pi}$ و شعاع $\frac{1}{\pi}$ در صفحه UV است. به طور مشابه $v = -\pi$ متناظر به دایره به مرکز $1 + \frac{i}{\pi}$ و شعاع $\frac{1}{\pi}$ است. نهایتاً $w = 1$ متناظر به $z - \bar{z} = 2i$ یعنی $\frac{Z+1}{i(Z-1)} + \frac{\bar{Z}+1}{i(\bar{Z}-1)} = 2i$ می باشد که به $|Z - \frac{1}{i}|^2 = \frac{1}{4}$ ساده می شود. بنابراین $w = 1$ متناظر به دایره به مرکز $\frac{1}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$ در صفحه UV است. ناحیه مورد نظر در صفحه UV ناحیه محدود شده به وسیله این سه دایره است:



۱۳-۷ فرض کنید $\gamma(u) = (f(u), g(u))$ نقطه را با d/du نشان دهید؛ طبق معادله (۲) $f + Kf = 0$. اگر $K < 0$ ، جواب عمومی برابر است با $f = ae^{-\sqrt{-K}u} + be^{\sqrt{-K}u}$ که در آن a, b ثابت هستند؛ شرط $f(\pi/2) = f(-\pi/2) = 0$ تساوی $a = b = 0$ را ایجاد می کند، بنابراین γ بر محور z ها منطبق می شود که با مفروضات متناقض است. اگر $K = 0$ و آنگاه $f = a + bu$ مجدداً $a = b = 0$ بنابراین می بایستی $K > 0$ و $f = a \cos \sqrt{K}u + b \sin \sqrt{K}u$ در اینجا $f(\pi/2) = f(-\pi/2) = 0$ اما a و

b هر دو با هم صفر نمی‌شوند و عبارت زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{vmatrix} \cos \sqrt{K}\pi/2 & \sin \sqrt{K}\pi/2 \\ \cos \sqrt{K}\pi/2 & -\sin \sqrt{K}\pi/2 \end{vmatrix} = 0$$

لذا $\sin \sqrt{K}\pi = 0$ ، و در نتیجه به‌ازای عدد صحیح $n \neq 0$ ، $K = n^2$. اگر $n = 2k$ ،
 $f = b \sin 2ku$ ، لذا $f(0) = 0$ که متناقض مفروضات است. اگر $n = 2k + 1$ ،
 $f = a \cos(2k + 1)u$ ، لذا $f(\pi/2(2k + 1)) = 0$ که متناقض مفروضات است مگر
 $k = 0$ یا -1 . که در این صورت $K = (2k + 1)^2 = 1$. بنابراین

$$f = a \cos u, \quad \dot{g} = \sqrt{1 - f^2} = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 u}$$

اکنون، $\dot{\gamma} = (\dot{f}, 0, \dot{g})$ عمود بر محور z ها است $\Leftrightarrow \dot{g} = 0$. بنابراین از مفروضات داریم
 $\sqrt{1 - a^2} = 0$. و یا $a = \pm 1$. در این صورت، $\gamma(u) = (\pm \cos u, 0, \pm \sin u)$ ،
 (صرف نظر از انتقال در امتداد محور z ها) و S یک کره واحد است.

۱۴-۷ فرض کنید $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ یک قطعه از S شامل $P = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ باشد. انحنای گوسی K از
 S در نقطه P کوچکتر از صفر است؛ چون K یک تابع هموار از (\tilde{u}, \tilde{v}) است. (تمرین
 ۷.۷). برای (\tilde{u}, \tilde{v}) در مجموعه \tilde{U} شامل (\tilde{u}, \tilde{v}) ، $K(\tilde{u}, \tilde{v}) < 0$ ، لذا هر نقطه از $\tilde{\sigma}(\tilde{U})$
 یک هذلولی است. فرض کنید κ_1, κ_2 انحنای اصلی $\tilde{\sigma}$ و $0 < \theta < \pi/2$ ، به‌گونه‌ای
 باشد که $\tan \theta = \sqrt{-\kappa_1/\kappa_2}$ ، و فرض کنید e_1 و e_2 بردارهای مماس واحد $\tilde{\sigma}$ باشند
 که بردار اصلی مربوط به κ_1 به ترتیب زوایای θ و $-\theta$ را می‌سازند (نتیجه ۱.۶ را ببینید).
 بابه‌کارگیری گزاره ۴.۷ نتیجه حاصل می‌شود.

۱۵-۷ برای قسمت اول اثبات گزاره ۵.۹ را ببینید.

اولین فرم اساسی قطعه سطح داده شده به صورت $(du^2 + dv^2)^2(1 + u^2 + v^2)$ است؛
 بنابراین همدیس است، و $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = (-2u, 2v, 2) + (2u, -2v, -2) = 0$.

۱۶-۷ سطح را به صورت $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$ پارامتری می‌کنیم بنابراین تمرین ۳.۷

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2$$

$$L = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{-1/2} f_{uu}$$

$$M = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{-1/2} f_{uv}$$

$$N = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{-1/2} f_{vv}$$

بنابراین

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1 + f_u^2)}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}$$

با قرار دادن $f(u, v) = \ln\left(\frac{\cos v}{\cos u}\right)$ داریم

$$H = \frac{\sec^2 u (1 + \tan^2 v) - \sec^2 v (1 + \tan^2 u)}{2(1 + \tan^2 u + \tan^2 v)^{3/2}} = 0$$

زیرا $\Sigma_u \cdot \Sigma_w = 0$ ، $\Sigma_w = N$ ، $\Sigma_v = \sigma_v + wN_v$ ، $\Sigma_u = \sigma_u + wN_u$ ۱۷-۷
 $\sigma_u \cdot N = N_u \cdot N = 0$ ، و متشابهاً $\Sigma_v \cdot \Sigma_w = 0$ ، بالاخره،

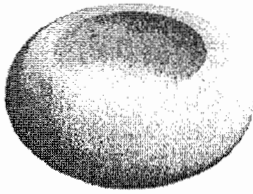
$$\begin{aligned} \Sigma_u \cdot \Sigma_v &= \sigma_u \cdot \sigma_v + w(\sigma_u \cdot N_v + \sigma_v \cdot N_u) + w^2 N_u \cdot N_v \\ &= F - 2wM + w^2 N_u \cdot N_v = w^2 N_u \cdot N_v \end{aligned}$$

بنابر گزاره ۴.۶، $N_u = -\frac{L}{E}\sigma_u$ ، $N_v = -\frac{N}{G}\sigma_v$ و بنابراین $N_u \cdot N_v = \frac{LN}{EG}F = 0$.
 هر سطح (ثابت) $u = u_0$ ، خط‌دار است زیرا اجتماع خطوط مستقیم ثابت $v = v_0$ می‌باشد.
 بنابر تمرین ۴.۷(ii)، این سطح تخت است در صورتی که خم $\gamma(v) = \sigma(u_0, v)$ خط
 انحنا S باشد، مثلاً اگر σ_v یک بردار اصلی باشد و این برقرار است چون ماتریس‌های F_I
 و F_{II} قطری می‌باشند. برای سطح ثابت $v = v_0$ ، به‌طور مشابه عمل کنید.

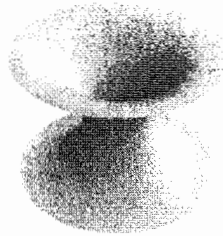
۱۸-۷ بنابر معادله (۱۵)، مساحت $\sigma(R)$ برابر است با

$$\iint_R \|N_u \times N_v\| du dv = \iint_R |K| \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv = \iint_R |K| dA_\sigma$$

۱۹-۷ از فرمول K در حل تمرین ۵.۷ نتیجه می‌شود که S^+ و S^- به ترتیب نواحی حلقوی روی
 چنبره با، $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ و $\pi/2 \leq u \leq 3\pi/2$ می‌باشند.



S^+



S^-

به روشنی دیده می‌شود وقتی نقطه P روی S^+ (یا S^-) حرکت کند، قائم واحد در P تمام کره واحد را می‌پوشاند. بنابراین بنابر تمرین ۱۸.۷ داریم $\iint_{S^+} |K| dA = \iint_{S^-} |K| dA = 4\pi$ چون روی S^\pm ، $|K| = \pm K$ لذا نتیجه حاصل می‌شود.

فصل ۸

۱-۸ با توجه به تمرین ۴.۴، دو خط مستقیم روی هذلولی‌گون وجود دارد که از $(1, 0, 0)$ می‌گذرد. و بنا بر گزاره ۳.۸ آنها ژئودزیک می‌باشند. دایره به معادله $z = 0$ و $x^2 + y^2 = 1$ و هذلولی به معادله $y = 0$ و $x^2 - z^2 = 1$ هر دو بخش قائم هستند. لذا بنابر گزاره ۴.۸ ژئودزیکند (همچنین گزاره ۵.۸ را ببینید).

۲-۸ فرض کنید Π_s صفحه گذرا از $\gamma(s)$ و عمود بر $t(s)$ باشد؛ خم پارامتری ثابت s اشتراک سطح با Π_s است. بنابر حل تمرین ۱۷.۵ قائم واحد استاندارد σ بردار $\mathbf{N} = -(\cos \theta \mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{b})$ است و چون بر t عمود است، دوایر ذکر شده در سؤال بخش‌های قائم می‌باشند.

۳-۸ بیضی‌گون $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$ را در نظر می‌گیریم، بردار $(\frac{x}{p}, \frac{y}{q}, \frac{z}{r})$ بنابر تمرین ۱۶.۴ بر بیضی‌گون عمود است. اگر $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ خمی روی بیضی‌گون باشد آنگاه،

$$R = \left(\frac{f^2}{p^2} + \frac{g^2}{q^2} + \frac{h^2}{r^2} \right)^{-1/2}, \quad S = \left(\frac{f^2}{p^2} + \frac{g^2}{q^2} + \frac{h^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

اکنون، γ یک ژئودزیک است $\Leftrightarrow \ddot{\gamma}$ موازی قائم باشد $\Leftrightarrow (\ddot{f}, \ddot{g}, \ddot{h}) = \lambda \left(\frac{f}{p^2}, \frac{g}{q^2}, \frac{h}{r^2} \right)$

بمازای اسکالری مانند $\lambda(t)$. از رابطه $\frac{f^r}{p^r} + \frac{g^r}{q^r} + \frac{h^r}{r^r} = 1$ داریم $\frac{f\dot{f}}{p^r} + \frac{g\dot{g}}{q^r} + \frac{h\dot{h}}{r^r} = 0$ بنابراین

$$\frac{f^r}{p^r} + \frac{\dot{g}^r}{q^r} + \frac{\dot{h}^r}{r^r} + \frac{f\dot{f}}{p^r} + \frac{g\dot{g}}{q^r} + \frac{h\dot{h}}{r^r} = 0$$

یعنی

$$\frac{f^r}{p^r} + \frac{\dot{g}^r}{q^r} + \frac{\dot{h}^r}{r^r} + \lambda \left(\frac{f^r}{p^r} + \frac{g^r}{q^r} + \frac{h^r}{r^r} \right) = 0$$

که نتیجه می دهد $\lambda = -S^r/R^r$ انحنای γ برابر است با

$$\|\ddot{\gamma}\| = (\ddot{f}^r + \ddot{g}^r + \ddot{h}^r)^{1/2} = |\lambda| \left(\frac{f^r}{p^r} + \frac{g^r}{q^r} + \frac{h^r}{r^r} \right)^{1/2} = \frac{|\lambda|}{S} = \frac{S}{R^r}$$

و نهایتاً

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R^r S^r} \right) &= \left(\frac{f\dot{f}}{p^r} + \frac{g\dot{g}}{q^r} + \frac{h\dot{h}}{r^r} \right) \left(\frac{f^r}{p^r} + \frac{\dot{g}^r}{q^r} + \frac{\dot{h}^r}{r^r} \right) \\ &\quad + \left(\frac{f^r}{p^r} + \frac{g^r}{q^r} + \frac{h^r}{r^r} \right) \left(\frac{\dot{f}\dot{f}}{p^r} + \frac{\dot{g}\dot{g}}{q^r} + \frac{\dot{h}\dot{h}}{r^r} \right) \\ &= \frac{1}{R^r} \left(\frac{f\dot{f}}{p^r} + \frac{g\dot{g}}{q^r} + \frac{h\dot{h}}{r^r} \right) + \frac{\lambda}{S^r} \left(\frac{f\dot{f}}{p^r} + \frac{g\dot{g}}{q^r} + \frac{h\dot{h}}{r^r} \right) = 0 \end{aligned}$$

زیرا $\lambda = -S^r/R^r$ بنابراین RS ثابت است.

۴-۸ اگر γ یک ژئودزیک باشد، $\ddot{\gamma} = \kappa n$ با N موازی بوده (با علائم معمولی) بنابراین $n = \pm N$ با استفاده از علائم تمرین ۱۱.۶ $B = t \times N = \pm b$ ، لذا

$$\dot{B} = \kappa_g t - \tau_g N = \pm \dot{b} = \mp \tau n = -\tau N$$

بنابراین $\tau_g = \tau$ (و $\kappa_g = 0$) که اخیراً به دست آوردیم.

۵-۸ چون γ در Π قرار دارد، لذا $\ddot{\gamma}$ با Π موازی است، و چون γ یک ژئودزیک است $\ddot{\gamma}$ با N موازی است؛ و بالاخره N با Π موازی است. در نتیجه \dot{N} نیز با Π موازی است. چون \dot{N} بر N عمود است و همچنین $\dot{\gamma}$ بر N عمود و موازی Π می باشد لذا \dot{N} موازی $\dot{\gamma}$ است و بنابر تمرین ۱۱.۶، γ خط انحنای S می باشد.

۶-۸ اگر P و Q هر دو روی یکی از موازی‌های استوانه باشند، دقیقاً دو ژئودزیک یعنی دو خم دایره‌گون از موازی که P و Q نقاط انتهایی آن می‌باشد، وجود دارد که آنها را به هم متصل می‌کند. اگر P و Q روی یک موازی نباشند، بی‌پایان ماریچج دایره‌گون وجود دارند که P و Q را به هم وصل می‌کنند (مثال ۷.۸ را ببینید).

۷-۸ مخروط $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ را در نظر بگیرید. بنا بر تمرین ۵.۵، σ تحت تابع $\sigma(u, v) \mapsto (u\sqrt{2} \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, u\sqrt{2} \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, 0)$ با قسمتی از صفحه xy ایزومتریک است. بنا بر نتیجه ۲.۸، ژئودزیک‌های روی مخروط با خطوط مستقیم در صفحه xy متناظر می‌باشند. چنین خطی، به غیر از محورهای $x = 0$ و $y = 0$ ، دارای معادله $ax + by = 1$ است که در آن a و b ثابت می‌باشند، این خط متناظر به خم

$$v \mapsto \left(\frac{\cos v}{\sqrt{2}(a \cos \frac{v}{\sqrt{2}} + b \sin \frac{v}{\sqrt{2}})}, \frac{\sin v}{\sqrt{2}(a \cos \frac{v}{\sqrt{2}} + b \sin \frac{v}{\sqrt{2}})}, \frac{1}{\sqrt{2}(a \cos \frac{v}{\sqrt{2}} + b \sin \frac{v}{\sqrt{2}})} \right)$$

بوده و محورهای x و y متناظر به خطوط مستقیم روی مخروط می‌باشند.

۸-۸ بنا بر مثال ۳.۵، $\sigma(u, v) = \gamma(u) + va$ ، که در آن γ سرعت‌واحد، $\|a\| = 1$ و γ در صفحه عمود بر a قرار دارد. نگاشت $\sigma(u, v) \mapsto (u, v, 0)$ یک ایزومتری از استوانه به صفحه xy است. خم $t \mapsto \sigma(u(t), v(t))$ یک ژئودزیک روی استوانه است $\Leftrightarrow t \mapsto (u(t), v(t), 0) \Leftrightarrow$ یک پرمایش سرعت‌ثابت از یک خط مستقیم در صفحه است $\Leftrightarrow \dot{u}$ و \dot{v} ثابت باشند $\Leftrightarrow \dot{v}$ ثابت (چون $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$ ثابت است). چون $\dot{v} = a \cdot \frac{d}{dt} \sigma(u(t), v(t)) = \dot{v}$ بردار مماس $\frac{d}{dt} \sigma(u, v)$ با بردار واحد a موازی با محور استوانه زاویه ثابتی بسازد.

۹-۸ استوانه $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ را در نظر بگیرید، آنگاه، $E = G = 1$ و $F = 0$. بنابراین معادلات ژئودزیک عبارتند از $\ddot{u} = \ddot{v} = 0$ ، لذا، $u = a + bt$ و $v = c + dt$ که در آن a, b, c, d ثابت‌اند؛ که یک خط مستقیم روی استوانه است، اگر $b = 0$ و در غیراین صورت یک ماریچج دایره‌گون است.

۱۰-۸ $E = 1$ ، $F = 0$ و $G = 1 + u^2$. بنابراین γ سرعت‌واحد است. $\Leftrightarrow 1 = \dot{v}^2 + (1 + u^2)\dot{u}^2$ از معادله دوم در (۲) داریم $\frac{d}{dt}((1 + u^2)\dot{v}) = 0$

یعنی $\dot{v} = \frac{a}{1+u^2}$ که در آن a ثابت است. لذا $\dot{u}^2 = 1 - \frac{a^2}{(1+u^2)}$ و در طول ژئودزیک

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dot{v}}{\dot{u}} = \pm \frac{a}{\sqrt{(1-a^2+u^2)(1+u^2)}}$$

اگر $a = 0$ ، در این صورت ثابت v و یک مولد داریم. اگر $a = 1$ ، آنگاه

$$dv/du = \pm 1/u \sqrt{1+u^2}$$

که نتیجه می‌دهد $v = v_0 \mp \sinh^{-1} \frac{1}{u}$ که در آن v_0 ثابت است.

۱۱-۸ داریم

$$\mathbf{N} \times \boldsymbol{\sigma} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v) \times \boldsymbol{\sigma}_u}{\|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v\|} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_u) \boldsymbol{\sigma}_v - (\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_v) \boldsymbol{\sigma}_u}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{E\boldsymbol{\sigma}_v - F\boldsymbol{\sigma}_u}{\sqrt{EG - F^2}}$$

و متشابهاً برای $\mathbf{N} \times \boldsymbol{\sigma}_v$ اکنون، $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{u}\boldsymbol{\sigma}_u + \dot{v}\boldsymbol{\sigma}_v$ ، بنابراین

$$\mathbf{N} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\dot{u}(E\boldsymbol{\sigma}_v - F\boldsymbol{\sigma}_u) + \dot{v}(F\boldsymbol{\sigma}_v - G\boldsymbol{\sigma}_u)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = \ddot{u}\boldsymbol{\sigma}_u + \ddot{v}\boldsymbol{\sigma}_v + \dot{u}^2\boldsymbol{\sigma}_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}\boldsymbol{\sigma}_{uv} + \dot{v}^2\boldsymbol{\sigma}_{vv}$$

و در این صورت،

$$\kappa_g = \ddot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot (\mathbf{N} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}) = (\dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u})\sqrt{EG - F^2} + A\dot{u}^3 + B\dot{u}^2\dot{v} + C\dot{u}\dot{v}^2 + D\dot{v}^3$$

که در آن

$$\begin{aligned} A &= \boldsymbol{\sigma}_{uu} \cdot (E\boldsymbol{\sigma}_v - F\boldsymbol{\sigma}_u) = E((\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_v)_u - \boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_{uv}) - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} F(\boldsymbol{\sigma}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_u)_u \\ &= E(F_u - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} E_v) - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} F E_u \end{aligned}$$

با عبارات مشابه برای C و D .

$$\begin{aligned}
 & (E\dot{u}^\top + {}^2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^\top) \\
 &= (E_u\dot{u} + E_v\dot{v})\dot{u}^\top + {}^2(F_u\dot{u} + F_v\dot{v})\dot{u}\dot{v} + (G_u\dot{u} + G_v\dot{v})\dot{v}^\top \\
 &+ {}^2E\dot{u}\ddot{u} + {}^2F(\dot{u}\ddot{v} + \ddot{u}\dot{v}) + {}^2G\dot{v}\ddot{v} \\
 &= \dot{u}(E_u\dot{u}^\top + {}^2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^\top) + \dot{v}(E_v\dot{u}^\top + {}^2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^\top) \\
 &+ {}^2E\dot{u}\ddot{u} + {}^2F(\dot{u}\ddot{v} + \ddot{u}\dot{v}) + {}^2G\dot{v}\ddot{v} \\
 &= {}^2(E_u\dot{u} + F\dot{v})\dot{u} + {}^2(F\dot{u} + G\dot{v})\dot{v} \\
 &+ {}^2(E\dot{u} + F\dot{v})\ddot{u} + {}^2(F\dot{u} + G\dot{v})\ddot{v} \quad (\text{بنابر معادلات ژئودزیک}) \\
 &= {}^2[(E\dot{u} + F\dot{v})\dot{u}] + {}^2[(F\dot{u} + G\dot{v})\dot{v}] \\
 &= {}^2(E\dot{u}^\top + {}^2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^\top)
 \end{aligned}$$

بنابراین، $(E\dot{u}^\top + {}^2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^\top) = 0$ و در نتیجه $\|\dot{\gamma}\|^2 = E\dot{u}^\top + {}^2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^\top$ ثابت است.

۱۳-۸ آنها بخش‌های قائم هستند.

۱۴-۸ هر موازی ژئودزیک است \Leftrightarrow هر مقدار u یک نقطه سکون $f(u)$ است. (با علائم گزاره ۵.۸) \Leftrightarrow ثابت $f = \text{ثابت} \Leftrightarrow$ سطح یک استوانه دایره‌گون است.

۱۵-۸ دو جواب معادله (۱۳) عبارتند از $v = v_0 \pm \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - w^2}$ ، بنابراین شرط خودمقاطع

بودن این است که $w > 1$ و $k > 0$ موجود باشند به طوری که $2k\pi = \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - w^2}$.

این برقرار است $\Leftrightarrow 2\pi < \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - 1} \Leftrightarrow \Omega < (1 + \pi^2)^{-1/2}$. در این حالت، k

خودمقاطع وجود دارد، که در آن k بزرگترین عدد طبیعی است که $2k\pi < \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - 1}$.

۱۶-۸ (i) اگر $\gamma(t)$ یک ژئودزیک باشد، $f(\gamma(t))$ نیز ژئودزیک است، و اگر γ برای تمام $-\infty < t < \infty$ تعریف شده باشد، $f(\gamma(t))$ نیز تعریف شده است. بنابراین f نصف‌النهارها را به نصف‌النهارها می‌برد، مثلاً اگر v ثابت باشد، \bar{v} نیز ثابت است. بنابراین

\bar{v} به w بستگی ندارد.

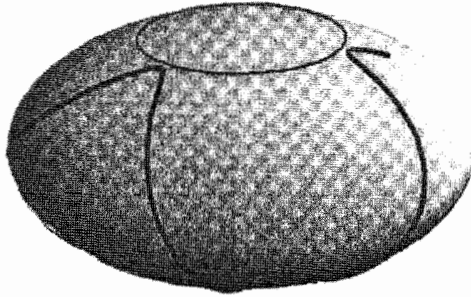
(ii) f زوایا را ثابت نگه می‌داد و نصف‌النهارها را به نصف‌النهارها تصویر می‌کند، بنابراین باید موازی‌ها را به موازی‌ها تصویر کند. بنابراین \bar{w} به v بستگی ندارد.

(iii) موازی ثابت $w = w$ بنابر تمرین ۱۱.۷ (i) دارای طول $2\pi/w$ می‌باشد ($w = e^{-u}$). چون f طول را ثابت نگه می‌دارد، از قسمت (ii) نتیجه می‌شود که $2\pi/\bar{w} = 2\pi/w$ ، لذا $w = \bar{w}$.

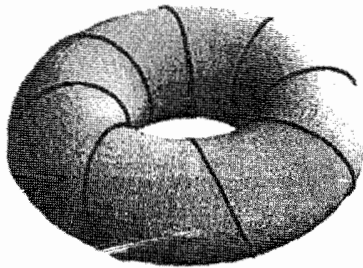
(iv) می‌دانیم تابع هموار $F(v)$ موجود است به طوری که $f(\sigma(u, v)) = \sigma(F(v), w)$ اولین فرم اساسی $\sigma(F(v), w)$ ، $\left(\frac{dF}{dv}\right)^2 dv^2 + dw^2$ می‌باشد، و چون f یک ایزومتري است این رابطه با $w^{-2}(dv^2 + dw^2)$ برابر است، بنابراین $dF/dv = \pm 1$ ، و از آنجا $f(v) = \pm v + \alpha$ که α یک ثابت است، اگر علامت + باشد f یک دوران به دور محور z با اندازه زاویه α است، اگر علامت - باشد f یک انعکاس نسبت به صفحه‌ای است که شامل محور z ها بوده و با صفحه xz زاویه $\alpha/2$ می‌سازد.

۱۷-۸ با استفاده از حل تمرین ۱۲.۷ داریم $Z = U + iV = \frac{z-i}{z+i}$ ، که در آن $z = v + iw$ چون ژئودزیک‌ها روی کره‌نما به خطوط مستقیم و دایری در صفحه vw که بر محور v ها عمودند متناظر می‌باشند، در صفحه UV به خطوط مستقیم و دایری عمود بر تصویر محور v ها تحت نگاشت $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ متناظر می‌شوند. یعنی دایره واحد $U^2 + V^2 = 1$.

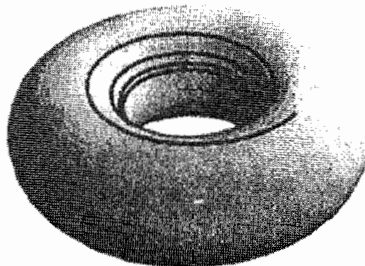
۱۸-۸ (i) فرض کنید شبه‌کره با دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ حول محور z ها که در آن $a, b > 0$ به دست آمده است. در این صورت، a بیشترین فاصله نقاط شبه‌کره از محور z ها است، بنابراین گشتاور زاویه‌ی Ω از ژئودزیک می‌بایستی کم‌تر یا مساوی a باشد (می‌توان فرض نمود $\Omega \geq 0$). اگر $\Omega = 0$ ، ژئودزیک یک نصف‌النهار است. اگر $0 < \Omega < a$ ، ژئودزیک یک ناحیه حلقوی روی شبه‌کره واقع بین دایره $\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{a^2}}$ است. و بحث مثال ۹.۸ نشان می‌دهد ژئودزیک بین دو دایره «جست و خیز» می‌کند.



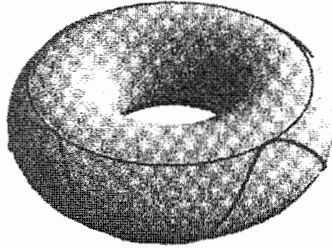
اگر $\Omega = a$ ، از معادله (10) داریم که ژئودزیک می‌بایستی با $z = 0$ موازی باشد.
 (ii) چنبره تمرین ۱۰.۴ را در نظر می‌گیریم. اگر $\Omega = 0$ ، ژئودزیک یک نصف‌النهار است
 (یک دایره). اگر $0 < \Omega < a - b$ ، ژئودزیک به‌طور ماریچی دور چنبره می‌پیچد.



اگر $\Omega = a - b$ ، ژئودزیک، یک موازی با شعاع $a - b$ یا یک ماریچ به دور چنبره است
 که به‌طور مجانبی به موازی نزدیک می‌شود (اما هرگز آن را قطع نمی‌کند).

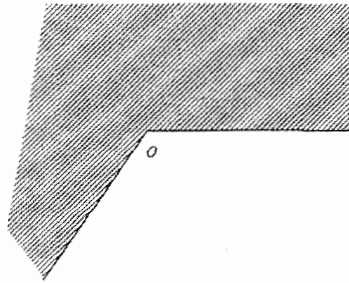


اگر $a - b < \Omega < a + b$ ، ژئودزیک ناحیه‌ای حلقوی مشتمل بر قسمتی از چنبره به فاصله بزرگتر
 یا مساوی Ω از محور است و بین دو موازی که به این ناحیه محدود می‌شوند جست و خیز می‌کند.

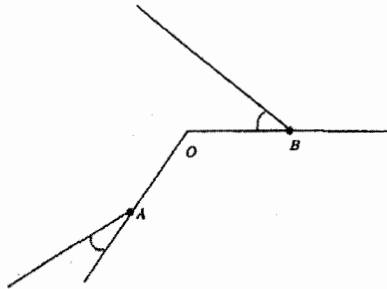


اگر $\Omega = a + b$ ، ژئودزیک می‌بایستی یک موازی با شعاع $a + b$ باشد.

۱۹-۸ از تمرین ۵.۵، مخروط، با قطاع S از صفحه که رأس آن در مرکز و زاویه آن $\pi\sqrt{2}$ است، ایزومتریک است.

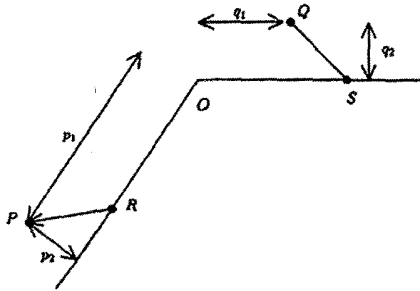


ژئودزیک‌های روی مخروط به پاره‌خطهای شکسته احتمالی در S متناظر هستند: اگر یک پاره‌خط مرز S را در نقطه‌ای مانند A قطع کند، ممکنست از نقطه B واقع بر خط مرزی دیگر که به همان فاصله A از مرکز و با زوایای مشخص شده مساوی قرار دارد ادامه پیدا کند:



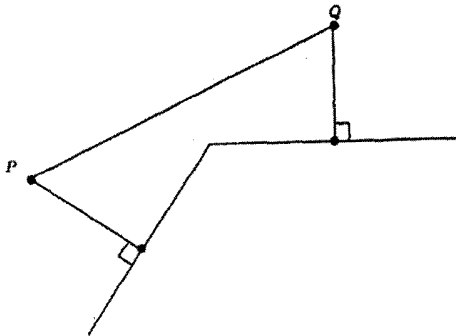
(i) درست: اگر دو نقطه P و Q با یک پاره‌خط در S به هم متصل شوند مشکلی نیست. در

غیر این صورت P و Q با پاره خط شکسته‌ای که در شرایط بالا صادق است به هم متصل می‌شوند.



برای اینکه بینیم این همیشه امکان‌پذیر است، فرض کنید p_1, p_2, q_1, q_2 فواصل معینی و نقاط S و R روی مرز قطاع در فاصله $(p_2 q_1 + p_1 q_2) / (p_2 + q_2)$ از مرکز واقع هستند. در این صورت، پاره خط شکسته PR که به دنبال SQ می‌باشد ژئودزیک مورد نظر است.

(ii) نادرست:

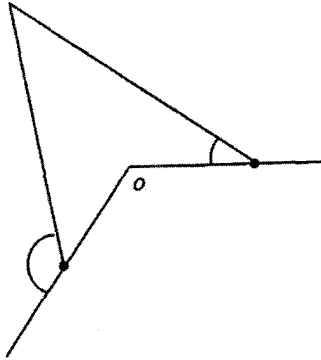


(iii) نادرست: بسیاری از آن‌ها، مثل دو ژئودزیکی که P و Q را در نمودار (ii) به هم وصل نموده همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

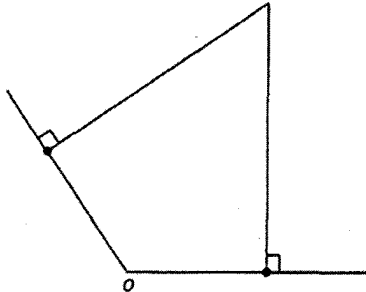
(iv) درست: نصف‌النهارها متقاطع نیستند (به خاطر بیابورید که رأس مخروط حذف شده است)، و خطوط مستقیم موازی که کاملاً در S قرار دارند متقاطع نیستند.

(v) درست: چون پاره خط‌های (شکسته) در S می‌توانند از دو طرف تا بینهایت ادامه یابند.

(vi) درست: حالتی که در آن زوایای تعیین شده مساوی هستند، به وضوح غیرممکن است.



اما جواب این قسمت از سؤال به زاویه مخروط بستگی دارد: اگر زاویه α باشد به جای $\pi/4$ ، خطوط خود-مقاطعند اگر $\alpha < \pi/6$ ، در این صورت قطاع متناظر در صفحه دارای زاویه کوچکتر از π است:



۲۰-۸ (i) این واضح است اگر $n \geq 0$ چون وقتی $t \rightarrow 0$ ، $e^{-1/t^t} \rightarrow 0$ به وسیلهٔ استقرار روی $n \geq 0$ ثابت می‌کنیم وقتی $t \rightarrow 0$ آنگاه $t^{-n} e^{-1/t^t} \rightarrow 0$ در حالت $n = 0$ نتیجه برقرار است و اگر $n > 0$ می‌توان قانون هوییتال را بکار برد:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{-n}}{e^{-1/t^t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{nt^{-n-1}}{\frac{1}{t^t} e^{-1/t^t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{nt^{-(n-2)}}{2 e^{-1/t^t}}$$

که بنا به فرض استقرار صفر می‌شود.

(ii) با استقرار روی n ثابت می‌کنیم که θ ، n بار مشتق‌پذیر بوده و

$$\frac{d^n \theta}{dt^n} = \begin{cases} \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{-1/t^t} & \text{اگر } t \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } t = 0 \end{cases}$$

که در آن P_n یک چند جمله‌ای از t است. برای $n = 0$ عبارت با $P_0 = 1$ برقرار است. فرض کنید برای $n \geq 0$ نتیجه درست باشد، و اگر $t \neq 0$

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} = \left(\frac{-2n P_n}{t^{2n+1}} + \frac{P'_n}{t^{2n}} + \frac{2P_n}{t^{2n+2}} \right) e^{-1/t^2}$$

بنابراین قرار دهید $P_{n+1} = (2 - 2nt^2)P_n + t^2 P'_n$. اگر $t = 0$ بنا بر قسمت (i) داریم:

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_n(t)}{t^{2n+1}} e^{-1/t^2} = P_n(0) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-1/t^2}}{t^{2n+1}} = 0$$

قسمت‌های (iii) و (iv) واضح است.

۲۱-۸ چون γ_θ سرعت واحد است، $\sigma_r \cdot \sigma_r = 1$ بنابراین $\int_0^R \sigma_r \cdot \sigma_r dr = R$. با مشتق‌گیری بر حسب θ داریم $\int_0^R \sigma_r \cdot \sigma_{r\theta} dr = 0$ و با انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\sigma_\theta \cdot \sigma_r \Big|_{r=0}^{r=R} - \int_0^R \sigma_\theta \cdot \sigma_{rr} dr = 0$$

اکنون برای هر θ قرار می‌دهیم، $\sigma(0, \theta) = P$ ، بنابراین وقتی $r = 0$ ، $\sigma_\theta = 0$. لذا می‌بایستی نشان دهیم که انتگرال در معادله اخیر صفر می‌شود. اما $\sigma_{rr} = \ddot{\gamma}_\theta$ ، نقطه نمایانگر مشتق بر حسب پارامتر r از ژئودزیک γ_θ است. پس σ_{rr} با قائم واحد بر σ یعنی N ، موازی است؛ پس $\sigma_\theta \cdot N = 0$ ، و از آنجا $\sigma_\theta \cdot \sigma_{rr} = 0$.

اولین فرم اساسی همانست که نشان داده شد. لذا $\sigma_r \cdot \sigma_r = 1$ و $\sigma_r \cdot \sigma_\theta = 0$.

فصل ۹

۹-۱ از تمرین ۶.۷ نتیجه می‌شود.

۹-۲ از تمرین ۳.۷ نتیجه می‌شود.

$$9-3 \quad \kappa_1 = \kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2 \text{ و } \kappa_1 + \kappa_2 = 0$$

$$9-4 \quad \kappa_1 + \kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_2 = -\kappa_1 \Rightarrow K = \kappa_1 \kappa_2 = -\kappa_1^2 \leq 0$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0 \Leftrightarrow \kappa_1^2 = 0 \Leftrightarrow K = 0 \Leftrightarrow \text{سطح قسمتی از صفحه باشد (براساس)}$$

گزاره (۵.۶)

۵-۹ بنابر گزاره ۶.۷ سطح مینیمال فشرده در بعضی از نقاط دارای $K > 0$ است که متناقض ترین ۴.۹ می باشد.

۶-۹ بنابر جواب تمرین ۲.۷، ماریچ نمای $\sigma(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \lambda u)$ دارای $E = \lambda^2 + v^2$ ، $F = 0$ ، $G = 1$ ، $L = 0$ ، $M = \lambda/(\lambda^2 + v^2)^{1/2}$ و $N = 0$ است بنابراین

$$H = \frac{LG - 2MF + NG}{2(EG - F^2)} = 0$$

۷-۹ یک محاسبه مستقیم نشان می دهد که اولین و دومین فرم اساسی از σ^t به ترتیب به صورت $\cosh^2 u (du^2 + dv^2)$ و $\cos t du^2 - 2 \sin t dudv + \cos t dv^2$ می باشند، لذا

$$H = \frac{-\cos t \cosh^2 u + \cos t \cosh^2 u}{2 \cosh^4 u} = 0$$

۸-۹ بنابر مثال ۱۰.۴، استوانه را می توان با معادله $\sigma(u, v) = \gamma(u) + va$ پارامتری کرد که در آن γ سرعت واحد است، $\|a\| = 1$ و γ در صفحه Π عمود بر a قرار دارد. داریم $\sigma_u = \dot{\gamma} = t$ (نقطه نمایانگر مستقیم $\frac{d}{du}$ است) پس $E = 1$ ، $F = 0$ ، $G = 1$ و بنابراین $\sigma_{uu} = \dot{t} = \kappa n$ ، $\sigma_{uv} = \sigma_{vu} = 0$ ، $N = t \times a$ و $M = N = 0$ اما $t \times a$ یک بردار واحد موازی با Π و عمود بر t است، بنابراین عمود بر n می باشد، لذا $L = \pm \kappa/2$ و $H = \pm \kappa/2$. بنابراین $H = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \Leftrightarrow \gamma \Leftrightarrow$ قسمتی از خط مستقیم باشد \Leftrightarrow استوانه قسمتی از صفحه باشد.

۹-۹ با به کارگیری تمرین ۲.۹ سطح مینیمال است \Leftrightarrow

$$(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g'' = 0$$

که در آن نقطه نمایانگر d/dx و خط نمایانگر d/dy است. چون طرف چپ این معادله تنها به x و طرف راست تنها به y وابسته است، لذا ثابت a موجود است به طوری که

$$\frac{f''}{1 + f'^2} = a, \quad \frac{g''}{1 + g'^2} = -a$$

فرض کنید $a \neq 0$. قرار دهید $r = f'$. در این صورت $f'' = r dr/df$ و اولین معادله به صورت $r dr/df = a(1 + r^2)$ درمی آید که با انتگرال گیری صرف نظر از اضافه

کردن یک ثابت اختیاری (که متناظر به انتقال سطح به موازات محور z ها است). داریم $a.f = \frac{1}{\gamma} \ln(1 + r^2)$. بنابراین $df/dx = \pm \sqrt{e^{2af} - 1}$ ، که بعد از انتگرال‌گیری داریم $f = -\frac{1}{a} \ln \cos a(x+b)$ که در آن b ثابت است. با انتقال سطح به موازات محور x ها می‌توان فرض نمود $b = 0$.

مشابهاً، بعد از انتقال سطح به موازات محور y ها داریم $g = \frac{1}{a} \ln \cos ay$. بنابراین صرف‌نظر از انتقال، داریم.

$$z = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\cos ay}{\cos ax} \right)$$

که از سطح شرک به وسیله $(x, y, z) \mapsto a(x, y, z)$ به دست می‌آید. اگر $a = 0$ ، آنگاه $f'' = g'' = 0$ بنابراین $f = b + cx$ و $g = d + ey$ با بازی ثابت‌های مانند b, c, d, e و صفحه $z = b + d + cx + ey$ را بدست می‌آوریم.

۱۰-۹ اولین فرم اساسی به صورت $(du^2 + dv^2)(\cosh v - \cos u)(\cosh v + 1)$ است، بنابراین σ همدیس است. بنابر تمرین ۱۵.۷، برای نشان دادن اینکه σ مینیمال است می‌بایستی نشان دهیم $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0$ که برقرار می‌باشد زیرا

$$\sigma_{uu} = \left(\sin u \cosh v, \cos u \cosh v, \sin \frac{u}{\gamma} \sin h \frac{v}{\gamma} \right)$$

$$\sigma_{vv} = \left(-\sin u \cosh v, -\cos u \cosh v, -\sin \frac{u}{\gamma} \sin h \frac{v}{\gamma} \right)$$

(i) $\sigma(0, v) = (0, 1 - \cosh v, 0)$ که محور y هاست. هر خط مستقیم یک ژئودزیک است.

(ii) $\sigma(\pi, v) = (\pi, 1 + \cosh v, -2 \sinh \frac{v}{\gamma})$ که خمی در صفحه $x = \pi$ است به طوری که

$$z^2 = 16 \sin^2 h^2 \frac{v}{\gamma} = 16(\cosh v - 1) = 16(y - 2)$$

یعنی یک سهمی است. معادلات ژئودزیکی عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u}) = \frac{1}{\gamma} E_u(\dot{u}^2 + \dot{v}^2), \quad \frac{d}{dt}(E\dot{v}) = \frac{1}{\gamma} E_v(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)$$

که در آن نقطه نمایانگر مشتق نسبت به پارمتر t ژئودزیک است و

$$E = (\cosh v + 1)(\cosh v - \cos u)$$

وقتی که $u = \pi$ ، شرط سرعت-واحد، معادله $E\dot{v}^2 = 1$ است. لذا $\dot{v} = 1/(\cosh v + 1)$ بنا براین اولین معادله ژئودزیک $\frac{1}{4}E_u\dot{v}^2 = 0$ است که برقرار است زیرا وقتی $u = \pi$ ، $E_u = \sin u(\cosh v + 1) = 0$ و دومین معادله ژئودزیک برابر است با

$$\frac{d}{dt}(\cosh v + 1) = (\cosh v + 1) \sinh v \dot{v} = \sinh v \dot{v}$$

که به روشنی برقرار است.

(iii) $\sigma(u, 0) = (u - \sin u, 1 - \cos u, 0)$ که سیکلوئید تمرین ۷.۱ است (در صفحه xy ، با $a = 1$ که t با u جایگزین شده است). دومین معادله ژئودزیک برقرار است، زیرا وقتی $v = 0$ ، $E_v = \sinh v(2 \cosh v + 1 - \cos u) = 0$ رابطه $\dot{u} = 1/2 \sin \frac{u}{2}$ بنا براین $2(1 - \cos u)\dot{u}^2 = 1$ شرط سرعت-واحد است، اولین معادله ژئودزیک $\frac{d}{dt}(2 \sin \frac{u}{2}) = \cos \frac{u}{2} \dot{u}$ یعنی $\frac{d}{dt}(2 \sin^2 \frac{u}{4} \dot{u}) = \sin u \dot{u}^2$ است که به روشنی برقرار است.

$$\lambda = a^2 + bc = -(ad - bc) \quad (d = -a \text{ چون}) = -\det W = -K \quad ۱۱-۹$$

۱۲-۹ (i) از مثال ۱.۹ داریم، $N = (-\operatorname{sech} u \cos v, -\operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$ بنا براین، اگر $N(u, v) = N(u', v')$ ، آنگاه $u = u'$ چون $u \mapsto \tanh u$ تابعی یک به یک است، و از آنجا $\cos v = \cos v'$ و $\sin v = \sin v'$ لذا $v = v'$ بنا براین N یک به یک است. اگر $N = (x, y, z)$ آنگاه $x^2 + y^2 = \operatorname{sech}^2 u \neq 0$ بنا براین تصویر N شامل قطب‌ها نیست. برای نقطه داده شده (x, y, z) روی کره واحد با شرط $x^2 + y^2 \neq 0$ قرار دهید $u = \pm \operatorname{sech}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$ علامت آن علامت z است. و اگر فرض کنیم v چنان است که $\cos v = -x/\sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\sin v = -y/\sqrt{x^2 + y^2}$ ، در این صورت $N(u, v) = (x, y, z)$

(ii) بنابر حل تمرین ۲.۷، $N = (\lambda^2 + v^2)^{-1/2}(-\lambda \sin u, \lambda \cos u, -v)$ چون برای هر عدد طبیعی k ، $N(u, v) = N(u + 2k\pi, v)$ ، لذا تعداد بی‌پایان نقطه از ماریچج‌نما که

در آنها $\sigma(u + 2k\pi, v) = \sigma(u, v) + (0, 0, 2k\pi)$ تحت نگاشت گوس دارای تصویر یکسانند. اگر $N = (x, y, z)$ ، آنگاه $x^2 + y^2 = \lambda^2 / (\lambda^2 + v^2) \neq 0$ ، لذا تصویر N شامل قطب‌ها نیست. اگر (x, y, z) روی کره واحد باشد و $x^2 + y^2 \neq 0$ ، قرار دهید $v = -\lambda z / \sqrt{x^2 + y^2}$ و فرض کنید u چنان باشد که $\sin u = -x / \sqrt{x^2 + y^2}$ و $N(u, v) = (x, y, z)$ بنابراین $\cos u = -y / \sqrt{x^2 + y^2}$

۱۳-۹ صفحه می‌تواند با معادله $\sigma(u, v) = ub + vc$ پارامتری شود که در آن $\{a, b, c\}$ پایه متعامد واحد راست در \mathbb{R}^3 است. بنابراین $\varphi = \sigma_u - i\sigma_v = b - ic$. سطح مزدوج به صورت $i\varphi = c + ib$ است چون $\{a, c, -b\}$ نیز پایه متعامد واحد راست \mathbb{R}^3 است، صفحه (صرف نظر از انتقال) خود-مزدوج است.

۱۴-۹

$$\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} f(1-g^2), \frac{i}{\sqrt{2}} f(1+g^2), fg \right) \Rightarrow i\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} if(1-g^2), \frac{i}{\sqrt{2}} if(1+g^2), ifg \right)$$

که متناظر جفت f و g می‌باشد.

۱۵-۹ بنابر مثال ۶-۹، $\varphi(\zeta) = (\sinh \zeta, -i \cosh \zeta, 1)$. بنابر اثبات گزاره ۷-۹،

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2 = \sinh \zeta - \cosh \zeta = -e^{-\zeta}$$

$$g = \varphi_3 / f = -e^{\zeta}$$

۱۶-۹

$$\begin{aligned} \varphi = \sigma_u - i\sigma_v &= (1 - u^2 + v^2 - 2iuv, 2uv - i(1 - v^2 + u^2), 2u + 2iv) \\ &= (1 - \zeta^2, -i(1 + \zeta^2), 2\zeta) \end{aligned}$$

بنابراین سطح مزدوج عبارتست از

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(u, v) &= \Re e \int (i(1 - \zeta^2), 1 + \zeta^2, 2i\zeta) d\zeta \\ &= \Re e \left(i \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right), \zeta + \frac{\zeta^3}{3}, i\zeta^2 \right) \quad (\text{صرف نظر از انتقال}) \\ &= \left(-v + u^2 v - \frac{v^3}{3}, u + \frac{u^3}{3} - uv^2, -2uv \right) \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $U = (u - v)/\sqrt{2}$ و $V = (u + v)/\sqrt{2}$ و $\tilde{\sigma}(U, V) = \sigma(u, v)$ در این صورت

$$\tilde{\sigma}(U, V) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(U - V + UV^2 - U^2V + \frac{1}{3}V^3 - \frac{1}{3}U^3 \right), \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(U + V + UV^2 + U^2V - \frac{1}{3}V^3 - \frac{1}{3}U^3 \right), U^2 - V^2 \right) \right)$$

با بکارگیری دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$ ، $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x), z \right)$ روی $\tilde{\sigma}(U, V)$ داریم $(U - \frac{1}{3}U^3 + UV^2, V - \frac{1}{3}V^3 + U^2V, U^2 - V^2)$ که دوباره سطح انبر است.

۱۷-۹

$$\varphi = \left(\frac{1}{2}(1 - \zeta^{-2})(1 - \zeta^2), \frac{1}{2}(1 - \zeta^{-2})(1 + \zeta^2), \zeta(1 - \zeta^{-2}) \right)$$

بنابراین صرف نظر از انتقال، داریم

$$\sigma = \Re e \left(\frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3} - \zeta^{-1} + \frac{\zeta^{-3}}{3} \right), \frac{i}{2} \left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3} + \zeta^{-1} + \frac{\zeta^{-3}}{3} \right), \right. \\ \left. \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^{-2}}{2} \right) \\ = \Re e \left(-\frac{1}{6}(\zeta - \zeta^{-1})^3, \frac{i}{6}(\zeta + \zeta^{-1})^3, \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})^2 \right)$$

قرار دهید $\zeta = e^{\tilde{\zeta}}$ و $\tilde{\zeta} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ ، در این صورت $\sigma(u, v) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ که در آن

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Re e \left(-\frac{1}{6} \sinh^3 \tilde{\zeta}, \frac{i}{6} \cosh^3 \tilde{\zeta}, 2 \cosh^2 \tilde{\zeta} \right) \\ = \left(2 \sinh \tilde{u} \cos \tilde{v} (\cosh^2 \tilde{u} \sin^2 \tilde{v} - \frac{1}{3} \sinh^2 \tilde{u} \cos^2 \tilde{v}), \right. \\ \left. 2 \sinh \tilde{u} \sin \tilde{v} \left(\frac{1}{3} \sinh^2 \tilde{u} \sin^2 \tilde{v} - \cosh^2 \tilde{u} \cos^2 \tilde{v} \right), \right. \\ \left. 2 (\cosh^2 \tilde{u} \cos^2 \tilde{v} - \sinh^2 \tilde{u} \sin^2 \tilde{v}) \right)$$

۱۸-۹ بنابر مثال ۷.۵ $\pi(x, y, z) = (u, v, 0)$ که در آن $x = 2u/(u^2 + v^2 + 1)$

و $y = 2v/(u^2 + v^2 + 1)$ ، $z = (u^2 + v^2 - 1)/(u^2 + v^2 + 1)$ اگر $\zeta = u + iv$ است.

آنگاه $x + iy = 2\zeta / (|\zeta|^2 + 1)$ ، $z = (|\zeta|^2 - 1) / (|\zeta|^2 + 1)$. از اینجا داریم

$\zeta = (x + iy) / (1 - z)$. در نتیجه با یکسان فرض کردن $(u, v, 0)$ با $u + iv$ داریم

$\mathcal{G}(\zeta) = \frac{1}{|g|^2 + 1} (g + i)$ داریم (۲۵) از معادله $\pi(x, y, z) = (x + iy) / (1 - z)$

$(1 - z) = (|g|^2 - 1) / (|g|^2 + 1)$ بنابراین

$$\pi(\mathcal{G}(\zeta)) = \frac{g + \bar{g} + g - \bar{g}}{|g|^2 + 1 - (|g|^2 - 1)} = g(\zeta)$$

فصل ۱۰

۱-۱۰ بنابر نتیجه ۲.۱۰ (i)

$$K = -\frac{1}{2e^\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(e^\lambda)_u}{e^\lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{(e^\lambda)_v}{e^\lambda} \right) \right) = -\frac{1}{2e^\lambda} (\lambda_{uu} + \lambda_{vv})$$

۲-۱۰ بنابر تمرین ۴.۵، $J = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J$ که در آن

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{r} & \frac{v}{r} \\ -\frac{v}{r^2} & \frac{u}{r^2} \end{pmatrix}$$

بر اساس تمرین ۲.۱.۸، $E = 1$ ، $F = 0$ و فرمول‌های \tilde{E} ، \tilde{F} و \tilde{G} را بدست می‌آوریم. از

$$u^2(\tilde{E} - 1) = v^2(\tilde{G} - 1) \text{ و رابطه } \tilde{G} - 1 = \frac{u^2}{r^2} \left(\frac{G}{r^2} - 1 \right) \text{ و } \tilde{E} - 1 = \frac{v^2}{r^2} \left(\frac{G}{r^2} - 1 \right)$$

را بدست می‌آوریم. چون \tilde{E} و \tilde{G} توابع هموار از (u, v) می‌باشند، بسط‌های تیلور آن‌ها

$$\tilde{E} = \sum_{i+j \leq 2} e_{ij} u^i v^j + o(r^2), \quad \tilde{G} = \sum_{i+j \leq 2} g_{ij} u^i v^j + o(r^2)$$

نمایانگر عبارتهایی است که $o(r^k)/r^k \rightarrow 0$ وقتی که $r \rightarrow 0$. تساوی ضرایب

$$u^2(\tilde{E} - 1) = v^2(\tilde{G} - 1) \text{ نشان می‌دهد که تمام } e \text{ ها و } g \text{ ها برابر صفرند}$$

مگر $e_{02} = g_{20}$. که آن را به k نمایش می‌دهیم. بنابراین، $\tilde{E} = 1 + kv^2 + o(r^2)$ ، که

$$\text{نتیجه می‌دهد } G = r^2 + kr^4 + o(r^4)$$

بنابر نتیجه ۲.۱۰ (ii) $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$. از قسمت اول داریم،

$$\sqrt{G} = r + \frac{1}{4}kr^2 + o(r^2)$$

بنابراین $K = -2k + o(1)$. اگر قرار دهیم $r = 0$ داریم $K(P) = -2k$.

(i) ۳-۱۰

$$\begin{aligned} C_R &= \int_0^{2\pi} \|\sigma_\theta\| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(R - \frac{1}{\rho} K(P) R^2 + o(R^2) \right) d\theta \\ &= 2\pi \left(R - \frac{1}{\rho} K(P) R^2 + o(R^2) \right) \end{aligned}$$

(ii) چون $dA_\sigma = \sqrt{G} dr d\theta$ ، مساحت $A_R = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{G} dr d\theta$ برابر است با

$$2\pi \int_0^R \left(r - \frac{1}{\rho} K(P) r^2 + o(r^2) \right) dr = \pi R^2 \left(1 - \frac{K(P)}{12} R^2 + o(R^2) \right)$$

فرض کنیم S کره واحد و P قطب شمال، و (θ, φ) پرمایش معمولی طول و عرض جغرافیایی است. در این صورت دایره ژئودزیک با مرکز P و شعاع R موازی $\theta = \frac{\pi}{2} - R$ است؛ که یک دایره معمولی با شعاع $\sin R$ است، بنابراین $C_R = 2\pi \sin R$. چون $2\pi \sin R = 2\pi \left(R - \frac{1}{\rho} R^3 + o(R^3) \right)$ و $K = 1$ است، که با فرمول (i) مطابقت دارد. مشابهاً

$$A_R = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2-R}^{\pi/2} \cos \theta d\theta d\varphi = 2\pi(1 - \cos R) = 2\pi \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{24} + o(R^4) \right)$$

با فرمول (ii) مطابقت دارد.

۴-۱۰ (i) طول - قوس γ را با s و d/ds را با نقطه نشان دهید. بنابراین $ds/d\theta = \lambda$. اولین

معادلات ژئودزیک ((۲) در فصل ۸) را روی γ پیاده می‌کنیم داریم $\ddot{r} = \frac{1}{\rho} G_r \dot{\theta}^2$. چون

لذا $r = f(\theta)$

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} f' \right)' = \frac{1}{2\lambda^2} G_r$$

که با ساده کردن معادله موردنظر به دست می‌آید.

(ii) چون σ_r و $\dot{\gamma}$ بردارهای واحد می‌باشند بنابراین

$$\cos \psi = \sigma_r \cdot \dot{\gamma} = \frac{1}{\lambda} \sigma_r \cdot (f' \sigma_r + \sigma_\theta) = f' / \lambda$$

همچنین $\sigma_r \times \dot{\gamma} = \frac{1}{\lambda}(\sigma_r \times \sigma_\theta) = \frac{\sqrt{G}}{\lambda} N$ لذا $\sin \psi = \sqrt{G}/\lambda$ در نتیجه

$$\left(\frac{f'}{\lambda}\right)' = -\psi' \sin \psi = -\frac{\sqrt{G}}{\lambda} \psi'$$

$$\therefore \psi' = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(f'' - \frac{f' \lambda'}{\lambda}\right) = -\frac{1}{r\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}$$

(iii) با به‌کارگیری فرمول K در نتیجه ۲.۱۰(ii) و اولین فرم اساسی σ در تمرین ۲.۱.۸، داریم

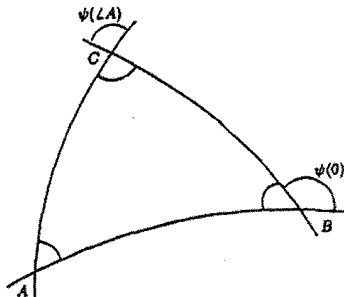
$$\iint_{ABC} K dA_\sigma = \int_0^{\angle A} \int_{r=0}^{f(\theta)} -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} \sqrt{G} dr d\theta$$

$$= -\int_0^{\angle A} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \Big|_{r=0}^{r=f(\theta)} d\theta = \int_0^{\angle A} \left(\psi' + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \Big|_{r=0} \right) d\theta$$

بنابر تمرین ۲.۱۰، $\sqrt{G} = r + o(r)$ بنابراین در $r=0$ ، $\partial \sqrt{G} / \partial r = 1$ در نتیجه،

$$\iint_{ABC} K dA_\sigma = \psi(\angle A) - \psi(0) + \angle A = \angle C - (\pi - \angle B) + \angle A$$

$$= \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$



۱۰-۵ بنابر تمرین ۷.۵، استوانه‌ها و مخروط‌های تعمیم یافته با صفحه ایزومتریک هستند بنابراین، اگر کره با استوانه یا مخروط تعمیم یافته‌ای ایزومتریک باشد، کره با یک صفحه ایزومتریک است، چون ترکیب ایزومتری‌ها، ایزومتری می‌باشد. این با گزاره ۱.۱۰ متناقض است.

۶-۱۰ با علائم مثال ۹.۴، روی دایره میانی $t = 0$ داریم $\sigma_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ و $G = 1, F = 0, E = 1$ بنابراین $\sigma_t = (-\sin \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}} \cos \theta, -\sin \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}})$ و $\sigma_{tt} = 0, N = (-\cos \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}} \cos \theta, -\sin \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}} \sin \theta, -\sin \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}})$

$$\sigma_{t\theta} = (-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}} \sin \theta, -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}} \sin \theta - \sin \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}} \cos \theta, -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{1-u^2}})$$

که از آنجا $L = 0$ و $M = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. در این صورت، $K = (LN - M^2)/(EG - F^2) = -1/4$. چون $K \neq 0$ ، قضیه ایگرگیوم نتیجه می‌دهد که نوار موبیوس با صفحه ایزومتربیک نیست.

۷-۱۰ اولین فرم اساسی σ و $\tilde{\sigma}$ به ترتیب به صورت $du^2 + (u^2 + 1)dv^2$ و $(1 + \frac{1}{u^2})du^2 + u^2 dv^2$ است و چون متفاوتند، نگاشت $\sigma(u, v) \mapsto \tilde{\sigma}(u, v)$ ایزومتربیک نیست. با وجود این، طبق نتیجه ۲.۱۰(ii)، انحناهای گوس برابرند:

$$K = \tilde{K} = -\frac{1}{2\sqrt{u^2+1}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} \right) \right) = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

اگر $\sigma(u, v) \mapsto \tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ یک ایزومتربیک باشد، از قضیه ایگرگیوم داریم $-1/(1+u^2)^2 = -1/(1+\tilde{u}^2)^2$ لذا $\tilde{u} = \pm u$ ، قرار دهید $\tilde{v} = f(u, v)$ اولین فرم اساسی $\tilde{\sigma}(\pm u, f(u, v))$ برابر با

$$(1 + (1 + u^2)f_u^2)du^2 + 2(1 + u^2)f_u f_v dudv + (1 + u^2)f_v^2 dv^2$$

است، که با اولین فرم اساسی $\sigma(u, v)$ برابر است اگر و فقط اگر $f_v^2 = u^2$ یا $f_u f_v = 0$ و $f_u^2 = 1 + \frac{1}{u^2}$. از معادله وسط نتیجه می‌گیریم $f_u = 0$ یا $f_v = 0$. اما با توجه به دو معادله دیگر هر دو برقرار نیست. بنابراین ایزومتربیک وجود ندارد.

۸-۱۰ برای زنجیروار $(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ ، اولین فرم اساسی برابر با (2.7) $\cosh^2 u (du^2 + dv^2)$ (تمرین ۸.۵) و انحنا گوسی برابر با $K = -\operatorname{sech}^2 u$ (تمرین ۲.۷) است. اگر $\sigma(u, v) \mapsto \tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ یک ایزومتربیک باشد آنگاه $\operatorname{sech}^2 u = \operatorname{sech}^2 \tilde{u}$ ، بنابراین $\tilde{u} = \pm u$ انعکاس نسبت به صفحه $z = 0$ را به u تغییر می‌دهد، بنابراین فرض می‌کنیم که علامت $+$ است. فرض می‌کنیم $\tilde{v} = f(u, v)$ اولین فرم اساسی $\tilde{\sigma}(\pm u, f(u, v))$

به صورت $(\cosh^2 u + f_u^2) du^2 + 2f_u f_v \cosh^2 u du dv + f_v^2 \cosh^2 u dv^2$ است. پس $\cosh^2 u = \cosh^2 u + f_u^2, f_u f_v = 0, f_v^2 \cosh^2 u = \cosh^2 u$ و از آنجا $f_u = 0$ و $f_v = \pm 1$. بنابراین، $f = \pm v + \alpha$ ، که در آن α یک ثابت است اگر علامت + باشد، دوران به اندازه α حول محور z ها را داریم، اگر علامت - باشد انعکاس در صفحه شامل محور z ها را داریم که با صفحه xz زاویه $\alpha/2$ می‌سازد.

$$W = -F_I^{-1} F_{II} = - \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\cos^2 v & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I \quad 9-10$$

بنابراین $N_v = \sigma_v$ و $N_u = \sigma_u$. لذا، $N = \sigma - a$ که در آن a یک بردار ثابت است. بنابراین، $\|\sigma - a\| = 1$ که نشان می‌دهد سطح قسمتی از کره با شعاع ۱ و مرکز a است. اولین و دومین فرم اساسی کره واحد با پرمایش استاندارد طول و عرض جغرافیائی، مسواری $du^2 + \cos^2 u dv^2$ است لذا پرمایش $\sigma(v, u)$ دارای اولین و دومین فرم اساسی داده شده است (دومین فرم اساسی علامت را تغییر می‌دهد زیرا $-\sigma_u \times \sigma_v = \sigma_v \times \sigma_u$).

$\Gamma_{22}^1 = \sin u \cos u$ ۱۰-۱۰ و بقیه نمادهای کریستوفل برابر صفر هستند، دومین معادله میثاردی - کدازی صادق نیست.

۱۱-۱۰ نمادهای کریستوفل عبارتند از $\Gamma_{11}^1 = E_u/2E, \Gamma_{11}^2 = -E_v/2G, \Gamma_{22}^1 = G_u/2E, \Gamma_{22}^2 = -G_v/2G, \Gamma_{12}^1 = E_v/2E, \Gamma_{12}^2 = G_u/2G$ اولین معادله میثاردی - کدازی برابر است با

$$L_v = \frac{LE_v}{2E} - N \left(\frac{-E_v}{2G} \right) = \frac{1}{2} E_v \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right)$$

و مشابهاً برای معادلات دیگر. بالاخره،

$$(\kappa_1)_v = \frac{E_v}{2E} \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right) - \frac{LE_v}{E^2} = \frac{E_v}{2E} \left(\frac{N}{G} - \frac{L}{E} \right) = \frac{E_v}{2E} (\kappa_2 - \kappa_1)$$

و مشابهاً برای $(\kappa_2)_u$.

۱۲-۱۰ با بحث مشابه اثبات قضیه ۴-۱۰ فرض می‌کنیم که J در نقطه‌ای مانند P از S که در قطعه σ از S قرار دارد دارای ماکزیمم بزرگتر از صفر است. می‌توان فرض نمود که انحناهای

اصلی κ_1 و κ_2 از σ در همه جا در $0 < \kappa_1 < \kappa_2$ صادقند. چون $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ ، $\kappa_1 > H$ و $J = 2(\kappa_1 - H)^2$. بنابراین، وقتی که $\kappa_1 > H$ ، نسبت به κ_1 افزایش می‌یابد، لذا κ_1 می‌بایستی در P ماکزیمم باشد، و در این صورت $\kappa_2 = 2H - \kappa_1$ در آنجا دارای مینیمم است. بنابراین P ، در $0 \leq K$ ، که متناقض با فرض $0 < K$ در هر نقطه می‌باشد.

فصل ۱۱

۱-۱۱ اگر γ یک ژئودزیک بسته ساده باشد، قضیه ۱.۱۱ نتیجه می‌دهد $\iint_{\text{int}(\gamma)} K dA = 2\pi$. این غیرممکن است، چون $K \leq 0$. تصاویر خم بسته ساده π در صفحه، که در آن $\text{int}(\pi)$ در U واقع است، تحت قطعه سطح $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ موازی‌های استوانه نیستند. توجه کنید که در واقع تمام استوانه می‌تواند با یک قطعه که (تمرین ۲.۴ را ببینید) در آن U یک حلقه است پوشانده شود، اما موازی‌ها به دوایری که «به دور سوراخ» در حلقه می‌روند، متناظر می‌شوند.

۲-۱۱ بنابر گزاره ۲.۲، $\kappa_s = d\varphi/ds$ ، که در آن φ زاویه‌ای است که یک بردار واحد ثابت باید در جهت عکس حرکت ساعت دوران نماید تا با بردار مماس واحد، بر γ منطبق شود. بنابراین

براساس Umlaufsatz

$$\int_0^{\ell(\gamma)} \kappa_s ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \frac{d\varphi}{ds} ds = 2\pi$$

۳-۱۱ بنابر نتیجه ۱.۱۱ زوایای داخلی چندضلعی، $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ در رابطه

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi + \iint_{\text{int}(\gamma)} K dA_\sigma$$

صدق می‌کنند. چون برای هر i ، $0 < \alpha_i < 2\pi$ ، طرف چپ بزرگتر از صفر است. چون

$K < 0$ ، داریم $0 < (n-2)\pi < \sum_{i=1}^n \alpha_i < n\pi$ ، و اگر $n \geq 3$ ، آنگاه $\sum_{i=1}^n \alpha_i < n\pi$ ، بنابراین

$$\iint_{\text{int}(\gamma)} dA_\sigma \leq \iint_{\text{int}(\gamma)} (-K) dA_\sigma < \pi$$

۴-۱۱ موازی $u = u_1$ خم $\gamma_1(v) = (f(u_1) \cos v, f(u_1) \sin v, g(u_1))$ است، اگر s طول

قوس γ_1 باشد آنگاه $ds/dv = f(u_1)$. نقطه نمایانگر d/ds و خط نمایانگر d/du

است. در این صورت $\dot{\gamma} = (-\sin v, \cos v, 0)$ ، $\ddot{\gamma} = -\frac{1}{f(u_1)}(\cos v, \sin v, 0)$ و

$\mathbf{N} = (-g' \cos v, -g' \sin v, f')$ قائم واحد بر سطح است. از آنجا انحنای ژئودزیک γ

برابر $\kappa_g = \ddot{\gamma} \cdot (\mathbf{N} \times \dot{\gamma}) = \frac{f'(u_1)}{f(u_1)}$ است. بنابراین $\int_0^{\ell(\gamma_1)} \kappa_g ds = 2\pi f'(u_1)$ زیرا

$\ell(\gamma_1) = 2\pi f(u_1)$. مشابه آن برای γ_2 برقرار است. بنابر مثال ۲.۷، $K = -f''/f$.

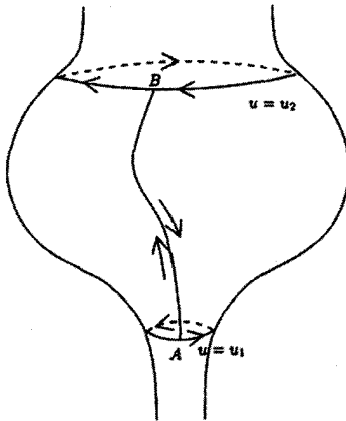
لذا

$$\iint_R K dA\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{u_1}^{u_2} -\frac{f''}{f} f du dv = 2\pi(f'(u_1) - f'(u_2))$$

بنابراین

$$\int_0^{\ell(\gamma_1)} \kappa_g ds - \int_0^{\ell(\gamma_2)} \kappa_g ds = \iint_R K dA\sigma$$

این معادله نتیجه بکارگیری قضیه ۲.۱۱ در چندضلعی منحنی الخط زیر می‌باشد.



که در آن AB قسمتی از نصف‌النهار $v = 0$ (یا $v = 2\pi$) است، انتگرال‌های κ_g در امتداد

AB و BA حذف می‌شوند. (به تاکید می‌توان گفت که این خم یک چندضلعی منحنی الخط

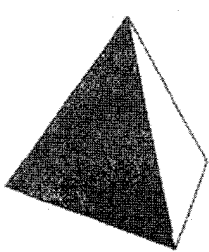
به معنای تعریف ۲.۱۱ نیست - در شرط (i) تخطی شده است. اما این مشکل را می‌توان

با جایگزین کردن دو مسیر AB و BA با دو نصف‌النهار $v = \varepsilon$ و $v = 2\pi - \varepsilon$ و سپس

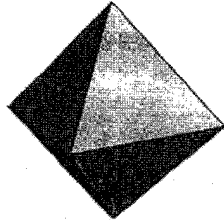
با $\varepsilon \rightarrow 0$ برطرف نمود.)

۵-۱۱ $3F = 2E$ زیرا هر وجه دارای ۳ یال بوده و هر یال، یال دو وجه است. از $\chi = V - E + F$ داریم $\chi = V - E + \frac{2}{3}E$ بنابراین $E = 3(V - \chi)$. چون هر یال دارای دو رأس است و هر دو یال در بیش از یک رأس متقاطع نیستند، بنابراین $E \leq \frac{1}{2}V(V - 1)$ است. ریشه‌های معادله درجه دوم برابر $\frac{1}{2}(V \pm \sqrt{49 - 7\chi})$ بوده و بنابراین $V \leq \frac{1}{2}(V - \sqrt{49 - 7\chi})$ یا $V \geq \frac{1}{2}(V + \sqrt{49 - 7\chi})$. چون $\chi = 2, 0, -2, \dots$ از اولین شرط داریم $V \leq 3$ که تنها یک مثلث نتیجه می‌شود، لذا شرط دوم می‌بایستی برقرار باشد.

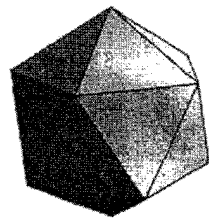
۶-۱۱ n مثلث دارای $3n$ رأس می‌باشند اما هر رأس r دفعه شمرده می‌شود زیرا رأس r مثلث است، لذا $V = 3n/r$ ؛ مشابهاً، $E = 3n/2$. بنابراین از $V - E + F = 2$ داریم $r = 3, 4, 5$ در نتیجه $6/r > 1$ پس $r < 6$. مثلث‌بندی‌ها برای $r = 3, 4, 5$ به ترتیب با «بادکردن» چهاروجهی، هشت‌وجهی و بیست‌وجهی عادی بدست می‌آید.



۴-وجهی



۸-وجهی



۲۰-وجهی

۷-۱۱ اگر چنین خم‌هایی وجود داشته باشند آنها یک مثلث‌بندی کره با ۵ رأس و $5 \times 4/2 = 10$ یال و در نتیجه $7 = 5 - 10 + 2$ چندضلعی هستند. چون هر یال، یال دو چندضلعی و هر چندضلعی دارای حداقل سه یال است، پس $3F \leq 2E$ ، اما $3 \times 7 > 2 \times 10$. اگر خم‌هایی که در همان شرایط صادق هستند در صفحه موجود باشند، با بکار بردن معکوس نگاشت تصویرکنج‌نگاری در مثال ۷.۵ خم‌هایی که در شرایط کره صادق خواهند بود بدست می‌آید که نشان داده‌ایم این غیرممکن است.

۸-۱۱ چنین دسته‌ای از خم‌ها، یک مثلث‌بندی کره با $V = 6$ ، $E = 9$ و $F = 5$ است. تعداد

کل یال‌های همه چندضلعی‌ها در مثلث‌بندی برابر $18 = 2E$ است. چون دقیقاً ۳ یال در هر رأس متقاطعند، کافی است در هر چندضلعی هر یال ۳ بار شمرده شود، لذا $18/3 = 6$ چندضلعی موجود است نه ۵ چندضلعی.

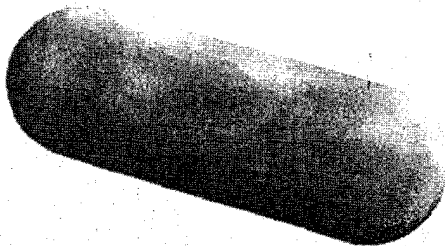
۹-۱۱ بنابر نتیجه ۳.۱۱ $\iint_S K dA = 4\pi(1-g)$ و بنابر قضیه ۱.۶.۱۱، چون S با T_1 دیفئومرفیک است. بنابر گزاره ۶.۷ و در بعضی از نقاط S ، $K > 0$ است.

۱۰-۱۱ بیضی‌گون تحت نگاهت $(x, y, z) \rightarrow (x/a, y/a, z/b)$ با کره واحد دیفئومرفیک است، لذا گونای بیضی‌گون برابر صفر است بنابراین از نتیجه ۳.۱۱ داریم $\iint_S K dA = 4\pi(1-0) = 4\pi$ با پارامتری کردن بیضی‌گون از رابطه $(a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, b \sin \theta) = \sigma(\theta, \varphi)$ ، (به پرمایش طول و عرض جغرافیایی کره مراجعه کنید)، اولین و دومین فرم اساسی σ به ترتیب به شکل $(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + a^2 \cos^2 \theta d\varphi^2$ و $dA_\sigma = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2)$ است. از این نتیجه می‌گیریم $K = b^2 / (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2$

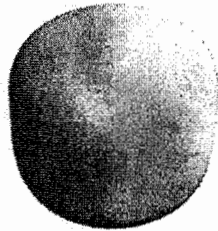
لذا

$$\iint_S K dA_\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ab^2 \cos \theta d\theta d\varphi}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}$$

۱۱-۱۱ از $K > 0$ نتیجه می‌گیریم $\iint_S K dA > 0$. بنابر نتیجه ۳.۱۱، $g < 1$ ؛ چون g عدد طبیعی غیرمنفی است لذا $g = 0$ بنابراین S براساس قضیه ۱.۶.۱۱ با کره دیفئومرفیک است. عکس آن برقرار نیست، مثلاً یک «لوله سیگار» با کره دیفئومرفیک است، اما در قسمت استوانه‌ای شکل $K = 0$ است.



۱۲-۱۱ هر دو سطح زیرمجموعه‌های بسته \mathbb{R}^3 می‌باشند، چون آنها به شکل $f^{-1}(0)$ هستند که در آن $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته (برابر $1 - x^2 - y^2 + z^2$ و $1 - x^2 + y^2 + z^2$) در دو حالت) است. سطح (i) کراندار نیست، و لذا فشرده نیست، چون برای هر عدد حقیقی a ، شامل نقطه $(1, a^2, a)$ است. (ii) کراندار است، و بنابراین فشرده است، چون $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow -1 \leq x, y, z \leq 1$.
 سطح (ii) با دوران خم $x^2 + z^2 = 1$ واقع در صفحه xz بدور محور z ها بدست می‌آید.



روشن است که با کره دیگتومرفیک است لذا $\chi = 2$.

۱۳-۱۱ میدان برداری مماس مرجع $\xi = (1, 0)$ ، و خم بسته ساده $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$ را در نظر می‌گیریم. در $\gamma(s)$ ، داریم $V = (\alpha, \beta)$ که در آن

$$\alpha + i\beta = \begin{cases} (\cos s + i \sin s)^k & \text{اگر } k > 0 \\ (\cos s - i \sin s)^{-k} & \text{اگر } k < 0 \end{cases}$$

که بنابر قضیه دموآور در هر دو حالت $\alpha = \cos ks$ و $\beta = \sin ks$. بنابراین زاویه ψ بین V و ξ برابر ks است، و تعریف ۶.۱۱ نشان می‌دهد که تکرار برابر k است.

۱۴-۱۱ اگر $\sigma(u, v) = \bar{\sigma}(\bar{u}, \bar{v})$ در آن $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$ نگاشت بازبرمایش است، آنگاه

$$V = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v = \bar{\alpha} \bar{\sigma}_{\bar{u}} + \bar{\beta} \bar{\sigma}_{\bar{v}} \Rightarrow \bar{\alpha} = \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \beta \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}, \quad \bar{\beta} = \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \beta \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}$$

بنابراین، $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ هموار هستند اگر α و β هموار باشد.

چون مؤلفه‌های بردار σ_u و σ_v هموار هستند، اگر V هموار باشد، مؤلفه‌های آن نیز هموارند. اگر مؤلفه‌های $V = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v$ هموار باشند، آنگاه $V \cdot \sigma_u$ و $V \cdot \sigma_v$ توابع هموارند.

بنابراین

$$\alpha = \frac{G(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}_u) - F(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}_v)}{EG - F^2}, \quad \beta = \frac{E(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}_v) - F(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}_u)}{EG - F^2}$$

توابع هموارند، بنابراین \mathbf{V} هموار است.

۱۵-۱۱ اگر $\tilde{\psi}$ زاویه بین \mathbf{V} و $\tilde{\xi}$ باشد، داریم $\theta = \tilde{\psi} - \psi$ (صرف نظر از مضارب 2π)؛ بنابراین باید نشان

دهیم که $\int_{\gamma} \hat{\theta} ds = 0$ (نقطه نمایانگر d/ds است). این روشن نیست زیرا θ یک تابع هموار خوش‌تعریف از s نیست. (اگرچه $d\theta/ds$ خوش‌تعریف است). البته، $\rho = \cos \theta$ ،

خوش‌تعریف و هموار است، چون $\rho = \xi \cdot \tilde{\xi} / \|\xi\| \|\tilde{\xi}\|$. حال داریم $\dot{\rho} = -\dot{\theta} \sin \theta$ ،

بنابراین می‌بایستی ثابت کنیم $\int_{\gamma} \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{1-\rho^2}} ds = 0$. با استفاده از قضیه گرین، این

انتگرال برابر است با

$$\int_{\pi} \frac{\rho_u du + \rho_v dv}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_{\text{int}(\pi)} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\rho_v}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho_u}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)$$

که در آن π خمی در U است بطوریکه $\gamma(s) = \sigma(\pi(s))$ ؛ و این انتگرال خطی صفر

می‌شود زیرا

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\rho_v}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho_u}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \left(= \frac{\rho_{uv}(1-\rho^2) + \rho\rho_u\rho_v}{(1-\rho^2)^{3/2}} \right)$$

۱۶-۱۱ فرض کنید $F: S \rightarrow \mathbf{R}^3$ یک تابع هموار روی S و P یک نقطه از S باشد، قطعه‌های σ و $\tilde{\sigma}$ شامل

نقطه P از S را در نظر می‌گیریم، فرض کنیم $\sigma(u_0, v_0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = P$

و $\tilde{f} = F \circ \tilde{\sigma}$. در این صورت $\tilde{f}_{\tilde{u}} = f_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + f_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}$ و $\tilde{f}_{\tilde{v}} = f_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + f_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$

بنابراین اگر در (u_0, v_0) ، $f_u = f_v = 0$ ، آنگاه در $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ ، $\tilde{f}_{\tilde{u}} = \tilde{f}_{\tilde{v}} = 0$. چون در

P ، $f_u = f_v = 0$ ، داریم

$$\tilde{f}_{\tilde{u}\tilde{u}} = f_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \right)^2 + 2f_{uv} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + f_{vv} \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right)^2$$

با عبارت‌های مشابه برای $\tilde{f}_{\tilde{v}\tilde{v}}$ و $\tilde{f}_{\tilde{u}\tilde{v}}$. در این صورت $\tilde{\mathcal{H}} = J^t \mathcal{H} J$ که در آن

$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$ ماتریس ژاکوبین نگاشت باز پرمایش $(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$ است. چون J معکوس پذیر است، $\tilde{\mathcal{H}}$ معکوس پذیر است اگر \mathcal{H} معکوس پذیر باشد.

چون ماتریس \mathcal{H} حقیقی و متقارن است، دارای بردارهای مشخصه v_1 و v_2 با مقادیر مشخصه λ_1 و λ_2 است به طوری که $v_i^t v_j = \delta_{ij}$ و اگر $j = i$ و برابر صفر است اگر $j \neq i$. لذا، اگر $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ بردار دلخواهی باشد که در آن α_1 و α_2 مقادیر عددی هستند، آنگاه $v^t \mathcal{H} v = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2$ ؛ بنابراین $v^t \mathcal{H} v > 0$ (به ترتیب کوچکتر از صفر) برای هر $v \neq 0 \iff \lambda_1$ و λ_2 هر دو بزرگتر صفر (به ترتیب هر دو کوچکتر از صفر) باشند. $P \iff$ یک مینیم موضعی باشد (به ترتیب ماکزیم موضعی) باشد. بنابراین P نقطه زینی است $\iff v^t \mathcal{H} v$ بتواند هم مثبت و هم منفی بسته به انتخاب v باشد. چون J معکوس پذیر است، بردار $\tilde{v} \neq 0 \iff v = J\tilde{v} \neq 0$ و $v^t \mathcal{H} v = \tilde{v}^t J^t \mathcal{H} J \tilde{v} = \tilde{v}^t \tilde{\mathcal{H}} \tilde{v}$. درستی آخرین جمله تمرین از اینجا نتیجه می شود.

۱۷-۱۱ $f_{xy} = 8$ ، $f_x = f_y = 0$ در مبدا، بنابراین $f_x = 2x - 2y$ و $f_y = -2x + 8y$ (i) و $f_{xx} = 2$ و $f_{xy} = -2$ بنابراین $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ معکوس پذیر است بنابراین مبدا غیرمنحط است، و مقدار ویژه \mathcal{H} برابر $5 \pm \sqrt{13}$ است که هر دو بزرگتر از صفر می باشند، لذا این یک مینیم موضعی است.

(ii) در مبدا، $f_x = f_y = 0$ و $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ؛ $\det \mathcal{H} = -16 < 0$ ، بنابراین مقدار ویژه \mathcal{H} مختلف علامه بوده و مبدا نقطه زینی است.

(iii) در مبدا، $f_x = f_y = 0$ و $\mathcal{H} = 0$ ، که در این صورت نقطه بحرانی منحط است.

۱۸-۱۱ با به کارگیری پرمایش σ در تمرین ۱۰-۴ (با $a = 2$ و $b = 1$) داریم

$$f(\theta, \varphi) = F(\sigma(\theta, \varphi)) = (2 + \cos \theta) \cos \varphi + 3$$

بنابراین $f_\theta = -\sin \theta \cos \varphi$ و $f_\varphi = -(2 + \cos \theta) \sin \varphi$ چون $2 + \cos \theta > 0$ و

$f_\varphi = 0$ داریم $\varphi = 0$ یا π در نتیجه از $f_\theta = 0$ بدست می آوریم $\theta = 0$ یا π . لذا

چهار نقطه بحرانی وجود دارد $S = (-۳, ۰, ۰)$ و $R = (-۱, ۰, ۰)$ و $Q = (۱, ۰, ۰)$ و $P = (۳, ۰, ۰)$ در این صورت \mathcal{H} در نقطه P برابر

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & -(۲ + \cos \theta) \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{pmatrix}$$

و در نقطه Q برابر $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ و در نقطه R برابر $\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و در نقطه S برابر $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ است، بنابراین نقطه P ماکزیمم موضعی و Q و R نقاط زینی و نقطه S مینیمم موضعی است (همه اینها بطور هندسی روشن است).

فهرست لغات (برحسب الفبای لاتین)

angle	زاویه
angular momentum	گشتاور زاویه‌ای
anti - holomorphic	پاد تحلیلی
archimedes's Theorem	قضیه ارشمیدس
arc - length	طول - قدس
area	مساحت
-of a geodesic triangle,	- مثلث ژودریک
-signed,	- علامت‌دار
astroid,	ستاره‌گون
asymptotic curve,	خم مجانبی
atlas,	اطلس
-maximal	- ماکسیمال
bifurcation,	انشعاب
binormal,	قائم دوم
Catalan's surface,	سطح کاتالان
catenary,	زنجیری
catenoid,	زنجیروار
Cauchy-Riemann equations,	معادلات کشی - ریمان
centre of curvature,	مرکز انحنای
Christoffel symbols,	نمادهای کریستوفل
circular cone,	مخروط دایره‌گون
circular cylinder	استوانه دایره‌گون
circular helix,	مارپیچ دایره‌گون
cissoid,	پیچیک وار
Clairaut's theorem,	قضیه کلرو
closed set,	مجموعه بسته

Codazzi-Mainardi equations,	معادلات کدازی - میناردی
compact,	فشرده
conformal,	همدیس
connected,	همبند
continuous,	پیوسته
convex,	محدب
Cornu's spiral,	مارپیچ کرنو
critical point,	نقطه بحرانی
-non- degenerate	- غیر منحنی
curvature	انحناء
-constant,	- ثابت
-of a curve,	- خم
-gaussian,	- گوسی
-geodesic,	- ژئودزیک
-mean	- میانگین
-normal,	- قائم
-principal	- اصلی
-signed,	- علامت دار
curve	خم
-asymptotic,	- مجانبی
-level	- تراز
-parallel	- موازی
-parameter	- پارامتری
-parametrised,	- پارامتری شده
-plane,	- مسطح
-smooth	- هموار
-spherical	- کروی
curvilinear polygon,	چند ضلعی منحنی الخط
-positively - oriented,	- با جهت مثبت
cycloid,	سیکلوئید
diffeomorphic,	دیفئومورفیک
diffeomorphism,	دیفئومورفیزم
-conformal,	- همدیس
-equiareal,	- متساوی المساحت
dilation,	انبساط

disc model,	مدل - قرص
double torus,	چنبره دوپل
doubly ruled,	خط دار دو گانه
Dupin's Theorem,	قضیه دوپین
edge,	یال
ellipsoid,	بیضی گون
elliptic cylinder,	استوانه بیضوی
elliptic paraboloid,	سه می گون بیضوی
elliptic point,	نقطه بیضوی
Enneper's surface	سطح انیر
epicycloid,	ای سیکلویید
equiareal,	متساوی المساحت
Euler number,	عدد اویلر
Euler's Theorem,	قضیه اویلر
evolute,	گسترده
first fundamental form,	اولین فرم اساسی
Four Vertex Theorem,	قضیه چهار رأس
Frenet - Serret equations,	معادلات سره - فرنه
Fresnel's integrals,	انتگرال های فرسنل
Gauss- Bonnet Theorem,	قضیه گوس- بونه
Gauss equations,	معادلات گوس
Gauss map,	نگاشت گوس
gaussian curvature	انحنای گوس
-constant,	- ثابت
Gauss's Lemma,	لم گوس
general helix,	مارپیچ عام
generalised cone,	مخروط تعمیم یافته
generalised cylinder,	استوانه تعمیم یافته
genus,	گونا
geodesic,	ژئودزیک
-incomplete	- غیر کامل
-simple closed	- بسته ساده
geodesic circle	دایره ژئودزیکی
geodesic coordinates,	مختصات ژئودزیکی
geodesic curvature	انحنای ژئودزیکی

geodesic equations	معادلات ژئودزیکی
geodesic patch,	قطعه ژئودزیکی
geodesic polar patch,	قطعه قطبی ژئودزیکی
geodesic torsion,	تاب ژئودزیکی
gradient,	گرادیان
graph,	نمودار
great circle,	دایره عظیمه
Green's Theorem,	قضیه گرین
helicoid	مارپیچ نما
Henneberg's surface,	سطح هنببرگ
holomorphic,	تحلیلی
homeomorphism,	همسان ریختی
hyperbolic cylinder,	استوانه هذلولوی
hyperbolic paraboloid,	سهمی گون هذلولوی
hyperbolic point,	نقطه هذلولوی
hyperboloid	هذلولوی گون
-of one sheet,	- هذلولوی گون یک پارچه
-of two sheets,	- هذلولوی گون دو پارچه
hypocycloid,	های پوسیکلوئید
integral curve,	خم انتگرالی
Inverse Function Theorem,	قضیه تابع معکوس
involute,	گسترنده
isometric,	ایزومتريک
-deformation,	- تغییر شکل
isometry,	ایزومتري
isoperimetric inequality,	نامساوی هم پیرامونی
Jacobian matrix,	ماتریس ژاکوبین
Jordan Curve Theorem,	قضیه خم زردان
Lagrange's Method of Undetermined Multipliers	روش مضارب نامعین لاگرانژ
latitude,	عرض جغرافیایی
level curve,	خم تراز
level surface,	سطح تراز
limaçon,	حلزونی
line of curvature,	خط انحنا
local maximum,	ماکزیم موضعی

local minimum,	مینیم موضعی
logarithmic spiral,	مارپیچ لگاریتمی
longitude,	طول جغرافیایی
loxodrome,	ثابت - زاویه
lune,	هلال (قسمتی از سطح کره واقع بین دو دایره عظیمه)
mean curvature,	انحنای میانگین
-constant,	- ثابت
Mercator's projection,	تصویر مرکاتور
meridian,	نصف النهار
Meusnier's Theorem,	قضیه میوزنیر
Möbius band,	نوار موبیوس
Möbius transformation,	تبدیل موبیوس
monkey saddle,	زین میمون
multiplicity,	تکرار
non-euclidean geometry,	هندسه نائقلیدسی
normal	قائم
-to a curve,	- بر خم
-to a surface,	- بر سطح
normal curvature,	انحنای قائم
normal section,	بخش قائم
open ball,	گوی باز
open disc,	قرص باز
open interval,	بازه باز
open set,	مجموعه باز
osculating circle,	دایره بوسان
parabolic cylinder,	استوانه سهموی
parabolic point,	نقطه سهموی
parallel,	موازی
parallel curve,	خم موازی
parallel surface,	سطح موازی
parameter curve,	خم پارامتری
parametrisation	پرمایش
-of a curve,	- یک خم
-of a surface,	- یک سطح
parametrised curve,	خم پارامتری شده

period,	تناوب
planar point,	نقطه مسطح
Plateau's problem,	مسئله پلاتو
principal curvature,	انحنای اصلی
principal normal,	قائم اصلی
principal patch,	قطعه اصلی
principal vector,	بردار اصلی
profile curve,	خم برش قائم
pseudosphere,	کره نما
quadric,	درجه دو
quadric cone,	مخروط درجه دو
regular,	عادی
regular point,	نقطه عادی
reparametrisation,	بازپرمایش
-unit - speed,	- سرعت - واحد
reparametrisation map,	نگاشت بازپرمایش
right conoid,	مخروط گون راست
rigid motion,	حرکت صلب
Rodrigues' formula,	فرمول رادری گس
ruling,	مولد
saddle point,	نقطه زینی
Scherk's surface,	سطح شرک
second fundamental form,	دومین فرم اساسی
signed unit normal,	قائم واحد علامت دار
simple closed curve,	خم بسته ساده
-area of,	- مساحت
-exterior of,	- بیرون
-interior of,	- درون
-length of,	- طول
-period of	- تناوب
-positively-oriented,	- با جهت مثبت
simply-connected,	همبند ساده
sink,	چاهک
smooth	هموار
-curve,	- خم

-function,	-تابع
-map,	-نگاشت
-surface,	-سطح
soap films,	لایه‌های کفی
source,	منبع
speed,	سرعت
spheroid,	شبه‌کره
standard unit normal,	قائم واحد استاندارد
stationary point,	نقطه سکون
stereographic projection,	تصویر کنج نگاری
surface,	سطح
-area of,	- مساحت
-compact,	- فشرده
-conjugate,	- مزدوج
-flat,	- تخت
-level,	- تراز
-minimal,	- مینیمال
-of revolution,	- دورانی
-orientable,	- جهت‌پذیر
-parallel,	- موازی
-ruled,	- خط‌دار
-smooth	- هموار
-translation,	- انتقالی
surface patch,	قطعه سطح
-allowable	-مجاز
-regular	- عادی
surface variation,	تغییر سطح
tangent developable,	مماس گسترش‌پذیر
tangent plane,	صفحه مماس
tangent space,	فضای مماس
tangent vector,	بردار مماس
tangent vector field,	میدان برداری مماس
Theorema Egregium,	قضیه ایگرگیوم
third fundamental form,	سومین فرم اساسی
torsion,	تاب

torus,	چنبره
tractrix,	تراکتریکس
transition map,	نگاشت انتقال
triangulation,	مثلث بندی
triply orthogonal system,	سیستم متعامد سه گانه
tube,	لوله
twisted cubic,	مکعب تابیده
umbilic,	نافی
unit - speed,	سرعت - واحد
unit sphere,	کره واحد
upper half- plane model,	مدل نیم صفحه بالایی
Utilities problem,	مسئله رفع حوائج
vertex	رأس
-of a curve,	- خم
-of a curvilinear polygon,	- چندضلعی منحنی الخط
Viviani's curve,	خم ویویانی
vortex,	گردابی
Weierstrass's representation,	نمایش وایر اشتراس
Weingarten matrix,	ماتریس وینگارتن
Wirtinger's inequality,	نامعادله وایرتینگر
witch of Agnesi,	افسون آگنسی

فهرست لغات
(برحسب الفبای فارسی)

atlas,	اطلس
-maximal	- ماکسیمال
bifurcation,	انشعاب
circular cylinder	استوانه دایره‌گون
parabolic cylinder,	استوانه سهموی
dilation,	انبساط
elliptic cylinder,	استوانه بیضوی
epicycloid,	ایپی سیکلوئید
first fundamental form,	اولین فرم اساسی
Fresnel's integrals,	انتگرال‌های فرسnel
gaussian curvature	انحنای گوس
-constant,	- ثابت
generalised cylinder,	استوانه تعمیم‌یافته
geodesic curvature	انحنای ژئودزیکی
hyperbolic cylinder,	استوانه هذلولوی
isometric,	ایزومتریک
-deformation,	- تغییر شکل
isometry,	ایزومتری
mean curvature,	انحنای میانگین
-constant,	- ثابت
normal curvature,	انحنای قائم
principal curvature,	انحنای اصلی
witch of Agnesi,	افسون اگنسی
curvature	انحنا
-constant,	- ثابت
-of a curve,	- خم

-gaussian,	-گوسی
-geodesic,	- ژئودزیک
-mean	- میانگین
-normal,	- قائم
-principal	- اصلی
-signed,	- علامت‌دار
reparametrisation,	بازپرمایش
-unit - speed,	- سرعت - واحد
open interval,	بازه باز
normal section,	بخش قائم
principal vector,	بردار اصلی
tangent vector,	بردار مماس
ellipsoid,	بیضی‌گون
anti - holomorphic	پاد تحلیلی
parametrisation	پرمایش
-of a curve,	- یک خم
-of a surface,	- یک سطح
cissoid,	پیچیک وار
continuous,	پیوسته
torsion,	تاب
geodesic torsion,	تاب ژئودزیک
Möbius transformation,	تبدیل موبیوس
holomorphic,	تحلیلی
tractrix,	تراکتریکس
stereographic projection,	تصویر کنج نگاری
Mercator's projection,	تصویر مرکاتور
surface variation,	تغییر سطح
multiplicity,	تکرار
period,	تناوب
loxodrome,	ثابت - زاویه
sink,	چاهک
torus,	چنبره
double torus,	چنبره دوبل
curvilinear polygon,	چند ضلعی منحنی الخط
-positively - oriented,	- با جهت مثبت

rigid motion,	حرکت صلب
limaçon,	حلزونی
curve	خم
-parameter	- پارامتری
-parametrised,	- پارامتری شده
-level	- تراز
-spherical	کروی
-asymptotic,	- مجانبی
-plane,	- مسطح
-parallel	- موازی
-smooth	- هموار
line of curvature,	خط انحناء
doubly ruled,	خط‌دار دو گانه
integral curve,	خم انتگرالی
simple closed curve,	خم بسته ساده
-positively-oriented,	- با جهت مثبت
-exterior of,	- بیرون
-period of	-تناوب
-interior of,	-درون
-length of,	- طول
-area of,	- مساحت
profile curve,	خم برش قائم
parameter curve,	خم پارامتری
parametrised curve,	خم پارامتری شده
level curve,	خم تراز
asymptotic curve,	خم مجانبی
parallel curve,	خم موازی
Viviani's curve,	خم ویویانی
osculating circle,	دایره بوسان
quadric,	درجه دو
geodesic circle	دایره ژئودزیکی
great circle,	دایره عظیمه
second fundamental form,	دومین فرم اساسی
diffeomorphic,	دیفئومورفیک
diffeomorphism,	دیفئومورفیزم

vertex	رأس
-of a curvilinear polygon,	- چندضلعی منحنی الخط
-of a curve,	- خم
Lagrange's Method of Undetermined Multipliers	روش مضارب نامعین لاگرانژ
angle	زاویه
catenary,	زنجیری
catenoid,	زنجیروار
monkey saddle,	زین میمون
geodesic,	ژئودزیک
-simple closed	- بسته ساده
-incomplete	- غیر کامل
astroid,	ستاره‌گون
speed,	سرعت
unit - speed,	سرعت - واحد
surface,	سطح
-translation,	- انتقالی
-flat,	- تخت
-level,	- تراز
-orientable,	- جهت‌پذیر
-ruled,	- خط‌دار
-of revolution,	- دورانی
-compact,	- فشرده
-conjugate,	- مزدوج
-area of,	- مساحت
-minimal,	- مینیمال
-parallel,	- موازی
-smooth	- هموار
Enneper's surface	سطح انپر
level surface,	سطح تراز
Scherk's surface,	سطح شرک
Catalan's surface,	سطح کاتالان
parallel surface,	سطح موازی
Henneberg's surface,	سطح هنبرگ
third fundamental form,	سومین فرم اساسی
elliptic paraboloid,	سه‌می‌گون بیضوی

hyperbolic paraboloid,	سهمی گون هذلولوی
cycloid,	سیکلوئید
triply orthogonal system,	سیستم متعامد سه گانه
spheroid,	شبه کره
tangent plane,	صفحه مماس
longitude,	طول جغرافیایی
arc - length	طول - قدس
regular,	عادی
Euler number,	عدد اویلر
latitude,	عرض جغرافیایی
Rodrigues' formula,	فرمول رادری گس
compact,	فشرده
tangent space,	فضای مماس
normal	قائم
-to a curve,	- بر خم
-to a surface,	- بر سطح
principal normal,	قائم اصلی
binormal,	قائم دوم
standard unit normal,	قائم واحد استاندارد
signed unit normal,	قائم واحد علامت دار
open disc,	قرص باز
geodesic patch,	قطعه ژئودزیکی
surface patch,	قطعه سطح
-regular	- عادی
-allowable	-مجاز
principal patch,	قطعه اصلی
geodesic polar patch,	قطعه قطبی ژئودزیکی
Theorema Egregium,	قضیه ایگرگوم
Inverse Function Theorem,	قضیه تابع معکوس
Jordan Curve Theorem,	قضیه خم زردان
Green's Theorem,	قضیه گرین
Meusnier's Theorem,	قضیه میوزنیر
Gauss- Bonnet Theorem,	قضیه گوس-بونه
Four Vertex Theorem,	قضیه چهار رأس
Euler's Theorem,	قضیه اویلر

Dupin's Theorem,	قضیه دوپین
archimedes's Theorem	قضیه ارشمیدس
Clairaut's theorem,	قضیه کلرو
pseudosphere,	کره نما
unit sphere,	کره واحد
gradient,	گرادیان
vortex,	گردابی
evolute,	گسترده
involute,	گسترنده
genus,	گونا
open ball,	گوی باز
angular momentum	گشتاور زاویه‌ای
Gauss's Lemma,	لم گوس
tube,	لوله
soap films,	لایه‌های کفی
circular helix,	مارپیچ دایره‌گون
Cornu's spiral,	مارپیچ کورنو
general helix,	مارپیچ عام
helicoids	مارپیچ نما
logarithmic spiral,	مارپیچ لگاریتمی
Jacobian matrix,	ماتریس ژاکوبین
Weingarten matrix,	ماتریس وینگارتن
local maximum,	ماکزیم موضعی
equiareal,	متساوی‌المساحت
triangulation,	مثلث بندی
area	مساحت
-signed,	- علامت دار
-of a geodesic triangle,	- مثلث ژئودزیک
closed set,	مجموعه بسته
convex,	محدب
circular cone,	مخروط دایره‌گون
generalised cone,	مخروط تعمیم یافته
geodesic coordinates,	مختصات ژئودزیک
disc model,	مدل - قرص
upper half- plane model,	مدل نیم صفحه بالایی

centre of curvature,	مرکز انحنای
Utilities problem,	مسئله رفع حوائج
Cauchy-Riemann equations,	معادلات کشی - ریمان
Codazzi-Mainardi equations,	معادلات کدازی - میناردی
Frenet - Serret equations,	معادلات سره - فرنه
Gauss equations,	معادلات گوس
geodesic equations	معادلات ژئودزیکی
twisted cubic,	مکعب تابیده
local minimum,	مینیمم موضعی
source,	منبع
ruling,	مولد
right conoid,	مخروط گون راست
quadric cone,	مخروط درجه دو
Plateau's problem,	مسئله پلاتو
parallel,	موازی
open set,	مجموعه باز
tangent developable,	مماس گسترش پذیر
tangent vector field,	میدان برداری مماس
isoperimetric inequality,	نامساوی هم پیرامونی
critical point,	نقطه بحرانی
-non- degenerate	- غیر منحنی
elliptic point,	نقطه بیضوی
hyperbolic point,	نقطه هذلولوی
Gauss map,	نگاشت گوس
graph,	نمودار
Christoffel symbols,	نمادهای کریستوفل
meridian,	نصف النهار
Möbius band,	نوار موبیوس
parabolic point,	نقطه سهموی
planar point,	نقطه مسطح
regular point,	نقطه عادی
reparametrisation map,	نگاشت باز پرمایش
saddle point,	نقطه زینی
stationary point,	نقطه سکون
transition map,	نگاشت انتقال

umbilic,	نافی
Wirtinger' s inequality,	نامعادله وایرتینگر
Weierstrass's representation,	نمایش وایراشتراس
hypocycloid,	های پوسیسیکلوئید
conformal,	همدیس
connected,	همبند
-conformal,	- همدیس
-equiareal,	- متساوی المساحت
homeomorphism,	همسان ریختی
hyperboloid	هذلولی گون
-of one sheet,	- هذلولی گون یک پارچه
-of two sheets,	- هذلولی گون دو پارچه
lune,	هلال (قسمتی از سطح کره واقع بین دو دایره عظیمه)
non-euclidean geometry,	هندسه نا-اقلیدسی
simply-connected,	همبند ساده
smooth	هموار
-curve,	- خم
-function,	-تابع
-map,	-نگاشت
-surface,	- سطح
edge,	یال

نمایه

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| ایزو متریک، ۱۱۲ | ایبی سیکلوئید، ۷ |
| با جهت مثبت، ۲۶۷ | استوانه (تعمیم یافته)، ۸۵ |
| باز، ۶۳ | استوانه بیضوی، ۹۴ |
| باز پرمایش، ۷۴ | استوانه سهموی، ۹۴ |
| باز پرمایش، ۱۱، ۷۴ | استوانه هذلولوی، ۹۴ |
| بحرانی، ۲۹۷ | اطلس، ۶۵ |
| بردار اصلی، ۱۴۴ | اطلس ماکسیمال، ۷۳ |
| بردار مماس، ۵ | افسون آگنسی، ۷ |
| برش قائم، ۸۹ | انتگرال بیضوی، ۱۷ |
| بیضی گون، ۷۹، ۹۲ | انحنای اصلی، ۱۴۳ |
| پادتحلیلی، ۱۲۳ | انحنای، ۲۶ |
| پرمایش، ۲، ۶۵ | انحنای ژئودزیک، ۱۳۸ |
| پرمایش همدیس، ۱۱۹ | انحنای قائم، ۱۳۸ |
| پیچک وار دیوکلس، ۱۸ | انحنای گوس، ۱۵۹ |
| پیوسته، ۶۴ | انحنای میانگین، ۱۵۹ |
| تاب، ۴۱ | اولین فرم اساسی، ۱۰۸ |
| تاب ژئودزیک، ۱۴۰ | ایزومتري، ۱۱۲، ۲۵۷ |

دیفئومرفیک، ۷۵	تابع هموار، ۷۹
رأس خم، ۶۰	تحلیلی، ۱۲۳
روش مضارب نامعین لاگرانژ، ۸۵	تراکتریکس، ۱۶۶
رئوس، ۲۷۳	تصویر کنج نگاری، ۱۲۲
زاویه، ۱۱۸	تصویر مرکاتور، ۹۰
زنجیروار، ۹۰	تغییر سطح، ۲۱۷
زین میمون، ۱۵۶	تکرار، ۲۹۱
زینی، ۲۹۹	جهت پذیر، ۸۲
ژئودزیک، ۱۸۵	چنبره، ۷۹
ستاره‌گون، ۴	چند ضلعی منحنی‌الخط، ۲۷۲
سرعت، ۱۰	خاصیت ذاتی، ۲۴۷
سطح، ۶۴	خط انحنای، ۱۵۳
سطح انتقالی، ۲۳۳	خط مستقیم، ۹۵
سطح خط‌دار، ۸۸	خط‌دار دوگانه، ۷۰
سطح دورانی، ۸۹	خم انتگرال، ۲۹۱
سطح کاتالان، ۲۳۴	خم بسته ساده، ۵۱
سطح موازی، ۱۷۶	خم بسته ساده با تناوب، ۲۶۷
سطح مینیمال، ۲۱۸	خم پارامتری شده، ۲
سطح مینیمال انبر، ۲۳۱	خم ثابت - زاویه، ۹۰
سطح مینیمال شرک، ۲۳۲	خم عادی، ۱۲
سطح هموار، ۷۲	خم ویویانی، ۸
سطح هنبیگ، ۲۴۵	خم‌های پارامتری، ۱۱۸
سطوح تخت، ۱۶۸	خم‌های تراز، ۲
سطوح تراز، ۷۷	دایره بوسان، ۳۸
سومین فرم اساسی، ۱۵۴	دایره ژئودزیک، ۲۱۶
سه‌می‌گون بیضوی، ۹۳	درجه دوم، ۹۱
سه‌می‌گون هذلولوی، ۹۳	درون، ۲۶۷
سیستم‌های متعامد سه‌گانه، ۹۹	دو صفحه متقاطع، ۹۵
سیکلوتید، ۷	دو صفحه موازی، ۹۵
شعاع مارییج، ۲۹	دومین فرم اساسی، ۱۳۵
صفحه، ۹۴	دیفئومرفیسم، ۷۵

- ماریچ دایره‌گون، ۲۸
 ماریچ عام، ۴۹
 ماریچ لگاریتمی، ۸
 ماکزیم موضعی، ۲۹۹
 متساوی‌المساحت، ۱۲۷
 متعامد یکه، ۲۴۸
 مثلث بندی، ۲۸۰
 مجانبی، ۱۴۰
 محدب، ۶۰
 مختصات ژئودزیکی، ۲۱۵
 مخروط (تعمیم یافته)، ۸۷
 مخروط درجه دو، ۹۳
 مخروط دوگانه، ۶۸
 مخروط‌گون راست، ۹۰
 مدل قرص، ۱۶۸
 مدل نیم‌صفحه بالایی، ۱۶۸
 مزدوج، ۲۴۱
 مساحت علامت دار، ۱۸۳
 مسئله پلاتو، ۲۱۷
 معادلات ژئودزیکی، ۱۹۰
 مکعب تاییده، ۱۶
 مماس گسترش پذیر، ۱۱۴
 منبع، چاهک، گردابی و انشعاب، ۲۹۲
 موازی‌های سطح، ۸۹
 مولد، ۸۸
 میدان برداری مماس هموار، ۲۹۰
 مینیم موضعی، ۲۹۹
 نافی، ۱۴۵
 نامعادله وایرینگر، ۵۶
 نصف النهار، ۸۹
 نقطه، ۹۵
 صفحه مماس، ۸۱
 طول، ۸
 طول - قوس، ۹
 عادی، ۷۲
 عدد اویلر، ۲۸۱
 غیر منحنی، ۲۹۹
 فرمول رادری گس، ۱۵۳
 فشرده، ۱۷۹
 فضای مماس، ۸۰
 قائم واحد، ۸۱
 قضیه خم زردان، ۵۲
 قضیه دوپین، ۱۵۴
 قضیه گرین، ۵۴
 قطعه اصلی، ۱۶۹
 قطعه ژئودزیکی، ۲۱۵
 قطعه سطح، ۶۵
 قطعه سطح همدیس، ۱۱۹
 قطعه سطح‌های مجاز، ۷۳
 قطعه قطبی ژئودزیک، ۲۱۵
 کج-مقارن، ۴۵
 کره‌نما، ۱۶۶
 کشی-ریمان، ۱۲۳
 گام ماریچ، ۲۹
 گسترده، ۳۸
 گسترنده، ۳۹
 گونای سطح، ۲۷۹
 گوی باز، ۶۴
 لم گوس، ۲۱۶
 لوله، ۱۲۶
 ماتریس زاکوبین، ۷۴
 ماتریس وینگارتن، ۱۵۲

نمودار، ۷۸	نقطه بحرانی، ۲۹۷
نوار مویوس، ۸۲	نقطه بیضوی، ۱۵۵
واحد استاندارد، ۸۱	نقطه تکین، ۱۲
های پوسیکلوئید، ۷	نقطه سکون، ۲۹۱
هذلولی گون دو پارچه، ۹۳	نقطه سهموی، ۱۵۶
هذلولی گون یک پارچه، ۹۲، ۷۰	نقطه عادی، ۱۲
همپند ساده، ۲۳۹	نقطه مسطح، ۱۵۶
همدیس، ۱۱۹، ۲۳۷	نقطه هذلولوی، ۱۵۵
همسان ریخت، ۶۴	نگاشت انتقال، ۶۹
همسان ریختی، ۶۴	نگاشت بازبرمایش، ۱۱، ۷۴
هموار، ۲۱۷	نگاشت گوس، ۱۸۱
یال، ۲۷۳	نگاشت هموار، ۷۴
	نمادهای کریستوفل، ۲۶۰
	نمایش وایراستراس، ۲۴۲

منابع*

- [۱] Aubin, T., *A course in differential geometry*, American Mathematical Society, 2001.
- [۲] Aleksandrov, A. D. & Kutateladze, S. S. & Vakhrameev, S. A., *Intrinsic geometry of convex surfaces*, Chapman & Hall, CRC Press, 2006.
- [۳] Berger, M. & Gostiaux, B. & Levy, S. V. F., *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*, Springer-Verlag. 1988.
- [۴] Bishop, R. L. & Crittenden, R. J., *Geometry of manifolds*, American Mathematical Society, 2001.
- [۵] Burago, I. D. & Zalgaller, V. A., *Geometry III: theory of surfaces*, Springer-Verlag, 1992.
- [۶] Burke, W. L., *Applied differential geometry*, Cambridge University Press, 1985.
- [۷] Carmo, M. P. do. *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [۸] Chern, S. & Chen, W. & Lam, K. S., *Lectures on differential geometry*, World Scientific, 1999.
- [۹] Gray, A., *Modern differential geometry of curves and surfaces*, CRC Press, 1993.
- [۱۰] Gray, A. Abbena, E. & Salamon, S., *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, Chapman & Hall, CRC, 2006.
- [۱۱] Goetz, A., *Introduction to differential geometry*, Addison Wesley pub. Co, 1970.
- برگردان: عالم‌زاده، علی‌اکبر و استادباشی، علی؛ آشنایی با هندسه دیفرانسیل؛ علوی؛ ۱۳۶۶.
- [۱۲] Huybrechts, D., *Complex geometry: an introduction*, Springer-Verlag, 2005.
- [۱۳] Isham, C. J. *Modern differential geometry for Physicists*, world Scientific, 1989.
- برگردان: اسرافیلیان، ابراهیم؛ هندسه دیفرانسیل جدید برای فیزیکدانان؛ دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۷۴.
- [۱۴] Jost, J., *Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects*, Birkhauser, 1997.
-
- (* نویسنده منابعی در اصل کتاب معرفی نکرده است ولی منابع فوق توسط مترجمان پیشنهاد می‌شود.

- [۱۵] Kreyszig, E., *Differential geometry*, Dover Publications, 1991.
- [۱۶] Kuhnel, W., *Differential geometry: Curves - surfaces - manifolds*, American Mathematical Society, 2005.
- [۱۷] Novikov, S. P. & Fomenko, A. T., *Basic elements of differential geometry and topology*, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [۱۸] O'Neill, B., *Elementary differential geometry*, 2nd Ed. Academic press, New York, 1997.

برگردان: شمس، بیژن، و سلطان پور، محمدرضا؛ هندسه دیفرانسیل مقدماتی؛ مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم، ۱۳۸۴.

- [۱۹] Rahula, M., *New problems in differential geometry*, World Scientific, 1993.
- [۲۰] Stoker, J. J., *Differential geometry*, Wiley, 1989.
- [۲۱] Millman, R. & Parker, G. D., *Elements of differentiable manifolds*, Prentice-Hall, 1997.
- [۲۲] Montiel, S. & Ros, A., *Curves and surfaces*, American Mathematical Society, Real Sociedad Matematica Espanola, 2005.
- [۲۳] Schoen, R. M. & Yau, S., *Lectures on differential geometry*, International Press, 1994.
- [۲۴] Struik, D. J., *Lectures on classical differential geometry*, Dover Publications, 1988.
- [۲۵] Sternberg, S., *Lectures on differential geometry*, Chelsea, 1983.
- [۲۶] Thorpe, J. A., *Elementary topic in differential geometry*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1985.

برگردان: زعفرانی، جعفر؛ مباحثی از هندسه دیفرانسیل؛ دانشگاه اصفهان، ۱۳۷۶.

- [۲۷] Toponogov, V. A. & Rovenski, V. Y., *Differential geometry of curves and surfaces: a concise guide*, Birkhauser, 2006.
- [۲۸] Vaisman, I. *A first course in differential geometry*, M. Dekker. 1984.
- [۲۹] Vinberg, E. B., *Geometry II: Spaces of constant curvature*, Springer-Verlag, 1993.
- [۳۰] Zheng, F., *Complex differential geometry*, American Mathematical Society, International Press, 2000.

[۳۱] طالبشیان، ابوالفضل؛ هندسه دیفرانسیل موضعی؛ معارف، ۱۳۷۵.

[۳۲] میلر، جان دیوید، مقدماتی بر مینفدهای دیفرانسیل پذیر، برگردان: نواب پور، حمیدرضا؛ خانیان؛ ۱۳۸۳.