هندسهٔ دیفرانسیل

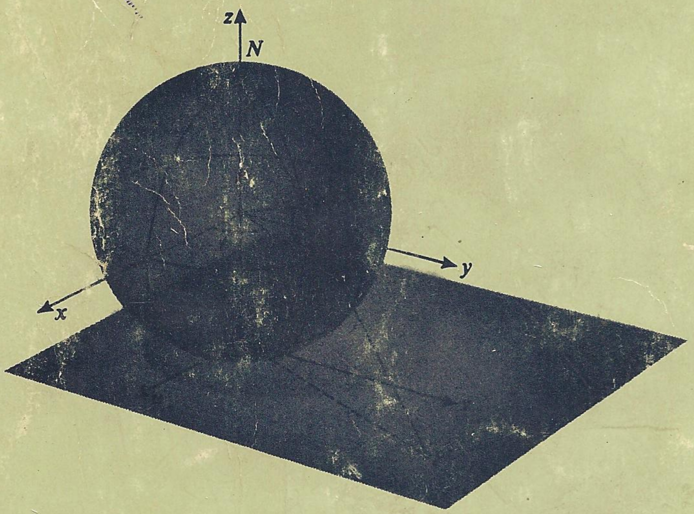
نوشتهٔ

آبراهام گوئِتس

ترجمهٔ

علی اکبر عالم زاده

علی استاد باشی زاده



آشنایی با هندسهٔ دیفرانسیل

نوشتهٔ

آبراهام گوئتس

ترجمهٔ

علی اکبر عالم زاده   علی استاد باشی زاده

سم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار مترجمان

هندسهٔ دیفرانسیل سرود فارغ‌التحصیلی است. زمانی نواخته می‌شود که دانشجو عزم رفتن از دانشگاه را دارد. ناگاه افق تازه‌ای برابرش باز و با رشتهٔ جالبی مواجه می‌شود. بزودی مفتون جاذبه‌های آن شده و با شور و شوق به جنبه‌های مختلفش دست می‌یازد. این آشنایی خاطره‌آمیز بوده و ارتباطش را با ریاضی مستحکمتر می‌سازد به‌این نحو که از دانشگاه می‌رود ولی از ریاضیات نخواهد رفت.

هندسهٔ دیفرانسیل سابقه‌ای طولانی دارد. لکن، بحث دقیقش در ریاضیات معاصر صورت می‌گیرد. استفاده از مشتق در هندسه ابزار توانای اوست آنچنان توانا که اعجاب همگان را برانگیخته است. حاصل تزویج رشته‌های هندسه و آنالیز است، دو رشتهٔ بظاهر نامربوط از دو تیرهٔ مختلف با ویژگیهای متفاوت، و لذا مولود باید این چنین استثنایی باشد.

در این مبحث کتاب به زبان بیگانه بسیار و به زبان فارسی اندک است. لذا، برآن شدیم که منبع ضعیف فارسی را با ترجمهٔ کتاب مناسبی دراین رشته قویتر سازیم. انتخاب کتاب کار مشکلی نبود، زیرا کتاب حاضر بر تارک کتب مشابه می‌درخشید. امیدواریم این ترجمه بیش از پیش هندسهٔ دیفرانسیل را به خوانندهٔ علاقه‌مند بشناساند.

علی‌اکبر عالم‌زاده   علی استادباشی زاده
گروه ریاضی
دانشگاه تربیت معلم

پیشگفتار مؤلف

کتاب حاضر حاصل درسهایی است که مولف در دانشگاه رکلاو[1]، در لهستان، و دانشگاه نوتردام داده است. کتاب ویرایش کامل متنی است که در ۱۹۶۵ در لهستان[2] به طبع رسیده است.

کتاب اساسا" درباب هندسهٔ دیفرانسیل موضعی منحنیها و سطوح در فضای اقلیدسی سه‌بعدی (گهگاه در حالات مجردتر و در ابعاد بالاتر) است. مسائل فراگیر فقط در رابطه با قضیهٔ گاوس ــ بونه مطرح شده‌اند. با آنکه روش و نمادگذاری ما در نظریهٔ سطوح از آن حساب تانسورهاست، می‌توان کتاب را بی‌هیچ اطلاعی از این مبحث، حتی ذکر تعریف تانسور، مطالعه کرد. برای خوانندهٔ علاقه‌مند، مطالبی از تانسورها در بخشهای ۱۹، ۲۴، و ۳۰ ذکر شده است، ولی بقیهٔ کتاب به‌این مطالب بستگی ندارد.

کتاب برای دوره‌های لیسانس پیشرفته یا شروع فوق‌لیسانس طرح، و زمینهٔ معمول در حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، به‌انضمام حساب دیفرانسیل و انتگرال دو و سه متغیره و مبانی معادلات دیفرانسیل، دانسته‌گرفته شده است. اگر برهانهای منجر شده به قضیهٔ گاوس ــ بونه حذف شوند، حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیرهٔ لازم به‌تنها حساب دیفرانسیل تقلیل می‌یابد. کتاب را می‌توان در اکثر دانشکده‌ها در سال آخر، و در بعضی دانشکده‌ها حتی در سال سوم، به‌آسانی تدریس نمود.

جبر برداری و کمی حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری به‌طور وسیع به‌کار گرفته‌شده است. برای راحتی خواننده، در فصل ۱ خلاصه‌ای از نتایج با چند برهان ذکر گردیده است.

بعضی از قسمتها که سرشت کلیتر و مجردتری دارند را می‌توان در اولین مطالعه یا

---

1. Wrocław

۲. توسط

Państwowe Wydąwnictwo Naukowe, Warsaw

در یک دورهٔ مقدماتی‌تر حذف کرد. این قسمتها مشتملند بر بخشهای ۱۹، ۲۴، ۳۰، و ۳۱ و مطالب خاصی در سایر بخشها. هر مطلب با ستاره‌ای شروع و به ستاره‌ای ختم می‌شود. حذف این مطالب در فهم بقیهٔ کتاب اثری نخواهد داشت.

اگر درس کوتاهتری در یک ترم مد نظر باشد، مباحث بیشتری را می‌توان کنار گذاشت، مثلاً، زیربخشهای ۱۰۷، ۲۰۷، ۲۰۸ تا ۹۰۸، ۱۰۹ تا ۵۰۹، ۴۰۲۰، ۵۰۲۰، ۷۰۲۱، ۱۰۲۲، و بعضی از مطالب زیربخشهای ۱۰۲۳ تا ۹۰۲۳. اما دراینجا مدرس به احتیاط بیشتری تا حذف مطالب ستاره‌دار نیاز دارد.

فصل ۸ نقش خاصی در کتاب ایفا می‌کند. هدفش انتقال دانشجوی مایل به مطالعهٔ بیشتر هندسهٔ دیفرانسیل از روشها و نمادهای حساب تانسورهای کلاسیک به‌کار رفته در کتاب به روشها و نمادهای جدید که در مقالات تحقیقی جاری مرتب تکرار می‌شوند می‌باشد. دراین فصل مطالب هندسی جدیدی عرضه نمی‌شود، لیکن با خواندن آن آمادهٔ رفتن به قسمتهای پیشرفته‌تر هندسهٔ دیفرانسیل، با هر نمادگذاری، خواهید شد.

فصل ۸ مجردتر است و نسبت به بقیهٔ کتاب پختگی ریاضی بیشتری از خواننده می‌خواهد. توجیهش این است که اصولاً این فصل را کسانی می‌خوانند که مایلند مطالعاتشان را در زمینه‌ای خاص ادامه دهند، و نیز بدین خاطر که درس زمانی تدریس می‌شود که فرهنگ ریاضی شاگرد درحال رشد بسیار سریع می‌باشد. مدرس همچنین می‌تواند فصل ۸ را در رابطه با نظریهٔ سطوح به‌کار برده و شاگرد را در استفاده از هر دو نوع نماد تعلیم دهد.

تمرینات بخش مهمی از متن را تشکیل می‌دهند. در بعضی جاها مطلب به نتایجی که شاگرد در تمرینات به‌دست می‌آورد بستگی دارد. کتاب شامل نکات تاریخی نیست، و اسامی طبق آنچه مرسوم شده، بدون ادعایی از تقدم در کشف، به قضایا منتسب شده‌اند.

مایلم از افراد زیر که در اصلاح کتاب سهم بسیار دارند تشکر نمایم: پروفسور استانیسلاو گولاب[1]، رومن سیکورسکی[2]، و ولادیسلاو اسلبودزینسکی[3] که نسخهٔ لهستانی را خوانده‌اند، دکتر ویتولد روتر[4] از دانشگاه راکلاو که محاسبات بسیاری را ساده کرده است.

---

1. Stanisław Gołąb
2. Roman Sikorski
3. Władysław Ślebodziński
4. Witold Roter

اصلاحات بـا ارزش پـروفسور توماس اف. بنکوف[1] ، از دانشگاه بـراون ، درنسخهٔ انگلیسی را ارج می‌نهم . همچنین ، مایلم از ناشران برای زحماتشان در چاپ این کتاب و خانم هووارد اوزبورن[2] به‌خاطر ماشین‌کردن تمام متن تشکر نمایم .

در پایان ، مـراتب امتنان خود را نسبت به اجازهٔ مشفقانه برای اخذ شکل ۱۱۰۱۰ از *کتاب منحنیهای* ای .اچ. لاکوود[3] ، و شکل ۴۰۱۷ از کتاب هندسه و *خیال* دی. هیلبرت وکوهن ــ وسن[4] ، که‌ترجمهٔ انگلیسی کتابی است که اول بار توسط اشپرینگر ــ فرلاگ چاپ شده ، ابراز می‌دارم .

آبراهام گوئتس

نوتردام ، ایندیانا

فوریه، ۱۹۷۰

---

1. Thomas F. Banchoff 2. Howard Osborne

3. E. H. Lockwood, *The Book of Curves*, Cambridge University Press

4. D. Hilbert and Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, Chelsea Publishing Co.

فهرست مطالب

۱
مقدمه. بردارها

۱ جبربرداری

۱۰۱ موضوع کتاب

هدف از کتاب حاضر بررسی خواص عمومی منحنیها و سطوح در فضای اقلیدسی سه‌بعدی است. ما، همانند در هندسهٔ تحلیلی، روش مختصات را به‌کارخواهیم‌برد. لیکن ابزارهای بررسی در هندسهٔ تحلیلی تقریباً" به‌طور کامل در انحصار جبر است، حال آنکه در اینجا به‌طور وسیع از حساب دیفرانسیل و گهگاه از حساب انتگرال استفاده خواهد شد.

استفاده از مختصات شامل عیبهایی نیز هست چون همراه با شئی هندسی عنصری اضافی، یعنی دستگاه مختصات، را در نظر می‌گیریم، نتایج حاصل اشاره بـه رابطهٔ آن شئی با دستگاه مختصات دارد تا با خودش. مثلاً"، در صفحه، یک مقطع مخروطی در دستگاههای مختصات مختلف با معادلات مختلفی بیان می‌شود.

بنابراین، برای رسیدن به نتایج هندسی با معنی، باید دید که آیا نتیجه مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است یا اینکه، طبق سیاق، تحت تبدیل مختصات *پایا* است.

برای مثال، فرمول مشهور

$$[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \qquad (۱۰۱)$$

را در نظر می‌گیریم، که معرف فاصلهٔ بین نقاط (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) درفضای اقلیدسی سه بعدی مجهز به یک دستگاه مختصات قائم است. هر تغییر دستگاه به دستگاه مختصات قائم دیگر، مختصات نقاط‌را به (x'_1, y'_1, z'_1) و (x'_2, y'_2, z'_2) تغییر می‌دهد. لیکن، با قرار دادن فرمولهای متناظر تغییر مختصات، پس‌از محاسبه درمی‌یابیم که مقدار عبارت

$$[(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2]^{1/2}$$

همان مقدار(۱۰۱) باقی مانده است. بنابراین، فرمول (۱۰۱) تحت تبدیل مختصات پایاست، و در باب نقاطی که از انتخاب دستگاههای مختصات مستقل هستنداطلاعاتی هندسی به ما می‌دهد.

امتحان پایابودن ممکن است به محاسباتی پیچیده، و یا دست کم وقت گیر، منجر شود، که می‌توان آنها را با استفاده از بردارها به نحو قابل ملاحظه‌ای ساده کرد.

فرض می‌کنیم خواننده با مبانی جبربرداری آشنایی داشته باشد. از اینرو، این فصل فقط فشرده‌ای است از مفاهیم و نتایجی اساسی، به‌صورت قاعده و بدون اثبات که بعداً در کتاب مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۱۰۲ بردارهای مقید و بردارهای آزاد

یک **بردار مقید** در A و در فضای اقلیدسی سه‌بعدی جفت مرتبی است از نقاط مانند A, B، یا پاره خط جهتداری است چون AB به مبداء A. ما این بردار را با $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم، ما بردار مقید $\overline{AA}$ را نیز درنظر می‌گیریم، و آن را **بردار صفر در** A می‌خوانیم.

با این کار تناظری یک به یک بین بردارهای مقید در یک نقطهٔ ثابت و همهٔ نقاط فضا برقرار می‌شود. درنتیجه، پس از انتخاب مبداء O در فضا، می‌توان نقطهٔ P را با بردار $\overline{OP}$ یکی گرفت.

پیش از معرفی اعمال بربردارها باید بردارهای آزاد را تعریف کنیم.

دو بردار مقید $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ را **همسنگ** گوییم اگر این دوبردار یک طول داشته، موازی یا منطبق بریک خط بوده، و دارای یک جهت باشند. به عبارت دیگر، اگر نقطهٔ وسط پاره خط AD برنقطهٔ وسط BC منطبق باشد. جز حالتی که نقاط A, B, C, D بر یک خط واقعند، این نیز بدان معناست که چهار ضلعی $ABDC$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد.

هرکلاس از تمام بردارهای مقید همسنگ، یک **بردار آزاد**، یا به‌طورخلاصه یک **بردار**، نامیده می‌شود. هر بردار مقید $\overline{AB}$ یک بردار آزاد را معین می‌کند که کلاس تمام بردارهای همسنگ $\overline{AB}$ است. بعکس، با معلوم بودن نقطهٔ A، هر بردار آزاد دقیقاً شامل یک بردار مقید در A است.

بردار آزاد معین‌شده به‌وسیلهٔ بردار مقید $\overline{AB}$ را با $\overrightarrow{AB}$ نشان‌می‌دهیم. بدین‌ترتیب همسنگی بردارهای مقید $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ همان اتحاد

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

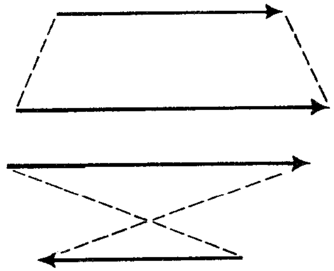
خواهد بود. بردارهای آزاد درحالت کلی، و درصورتی که بردارهای مقید نمایش آنها ذکر نشده باشند، با حروف سیاه الفبای لاتینی یا یونانی $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{r}$ یا $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots, \boldsymbol{\rho}$، و از این قبیل، نشان داده می‌شوند.

با معلوم بودن دو نقطهٔ O و P، بردار آزاد $\overrightarrow{OP}$ را **بردار موضع** P نسبت به‌مبداء

O می‌نامند . اگر مبداء O ثابت باشد ، تناظری یک به یک بین نقاط و بردارهای موضع آنها وجود خواهد داشت . بردارهای موضع بیشتر به‌جای مختصات یک نقطه به‌کار خواهند رفت.

همهٔ بردارهای مقید صفر همسنگ هستند و بردار صفر را نمایش می‌دهند که با 0 نشان داده می‌شود .

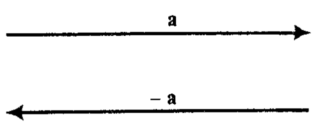
دو بردار آزاد **a** و **b** را ***همخط*** یا ***موازی*** گوییم اگر که بردارهای مقید نمایش آنها موازی یا واقع بر یک خط مستقیم باشند . دو بردار همخط **a** و **b** را ***همجهت*** گوییم هرگاه وقتی با بردارهای مقید $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ غیر واقع بر یک خط نشان داده می‌شوند ، پاره‌خطهای AC و BD نقطهٔ درونی مشترک نداشته‌باشند ؛ در غیر این‌صورت ، ***مختلف‌الجهت*** خوانده خواهند شد (شکل ۱۰۱) .



شکل ۱۰۱

طول بردار **a** ، که با $|\mathbf{a}|$ نموده می‌شود ، مساوی طول یک پاره‌خط نمایش **a** تعریف می‌شود . طول بردار صفر برابر است با 0 . بردارهای نا صفر همیشه طول مثبت دارند .

یک بردار همطول با بردار **a** ولی خلاف جهت آن (شکل ۲۰۱) را با $-\mathbf{a}$ نشان داده و ***بردار قرینهٔ*** **a** می‌نامیم . چنانچه $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ ، $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$.



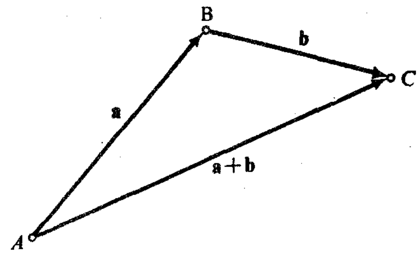
شکل ۲۰۱

توجه کنید که در تعریفهای فوق از بردارهای مقید به عنوان نمایشهای یک بردار آزاد استفاده شده‌است . برای توجیه این تعاریف باید ثابت شودکه آنها به انتخاب خاص نمایش بستگی ندارند .

۳۰۱ تعریف هندسی اعمال روی بردارها

۰۱ جمع بردارها . **مجموع** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ دو بردار **a** و **b** برداری است که با بردار مقید $\overline{AC}$

ساخته شده به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود . فرض کنیم A یک نقطهٔ دلخواه بوده ، و B نقطه‌ای باشد که $\overline{AB}$ بردار آزاد $\mathbf{a}$ را نمایش داده ، و C نقطه‌ای باشد که BC بردار $\mathbf{b}$ را نمایش دهد . در این صورت ، اگر $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ ، مجموع آنها عبارت است از $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ (شکل ۱ . ۳) .



شکل ۱ . ۳

مثل قبل ، لازم است که این تعریف با اثبات مستقل بودنش از انتخاب نقطهٔ A توجیه شود .

عمل جمع بردارها از قوانین زیر پیروی می‌کند :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad \text{(شرکتپذیری) ,} \tag{۱ . ۲}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{(تعویضپذیری) ,} \tag{۱ . ۳}$$

$$\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}, \tag{۱ . ۴}$$

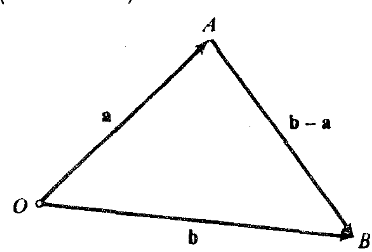
$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0. \tag{۱ . ۵}$$

بنابراین ، **مجموعهٔ بردارهای آزاد با عمل جمع یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد** ، بردار صفر عنصر بی‌اثر ، و $-\mathbf{a}$ معکوس $\mathbf{a}$ در این گروه است .

همچنین ، می‌توان **تفریق** بردارها را با قرار دادن

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \tag{۱ . ۶}$$

تعریف‌کرد . هرگاه $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ و $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ، که بردارهای مقید نمایش آنها $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ مبداء مشترک O را دارند ، آنگاه $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ (شکل ۱ . ۴) .



شکل ۱ . ۴

نامساوی زیر، به نام **نامساوی مثلثی**، برقرار است :

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|. \qquad (۷\cdot۱)$$

تساوی $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ برقرار است اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همجهت باشند.

۲. ضرب یک بردار در عدد حقیقی λ . *حاصلضرب* $\lambda\mathbf{a}$ بردار $\mathbf{a}$ در عدد λ برداری تعریف می‌شود به طول $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|$ و همجهت با $\mathbf{a}$ اگر $\lambda > 0$ و، خلاف جهت آن، اگر $\lambda < 0$.

این ضرب از خواص زیر برخوردار است :

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}, \qquad (۸\cdot۱)$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \qquad (۹\cdot۱)$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \qquad (۱۰\cdot۱)$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}, \qquad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}, \qquad (۱۱\cdot۱)$$

$$0\mathbf{a} = 0, \qquad \lambda 0 = 0. \qquad (۱۲\cdot۱)$$

با دو عملی که تعریف شدند، **بردارهای آزاد یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.**

۳. ضرب اسکالر بردارها. *حاصلضرب اسکالر* (یا *حاصل ضرب نقطه‌ای*) دو بردار ناصفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مساوی عدد $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ است، که درآن $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ عبارت است از زاویهٔ بین بردارهای مقید هم‌مبدائی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نمایش می‌دهند. اگر یکی از بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردار صفر باشد، $\mathbf{ab} = 0$.

حاصل ضرب‌اسکالر $\mathbf{ab} = 0$ اگر و فقط اگر یکی‌از بردارها بردار صفربوده‌یا نمایشهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمود باشند. اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همجهت باشند، $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ؛درنتیجه، $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$. درحالت خاص،

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2. \qquad (۱۳\cdot۱)$$

ضرب اسکالر تعویضپذیر و نسبت به جمع برداری پخشپذیر است :

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}, \qquad (۱۴\cdot۱)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \qquad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}. \qquad (۱۵\cdot۱)$$

بعلاوه، از خاصیت زیر نیز برخوردار است :

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab}), \qquad \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{ab}). \qquad (۱۶\cdot۱)$$

چون حاصلضرب اسکالر دو بردار، بردار نیست، رعایت شرکتپذیری برای آن معنی‌ندارد.

۴۰۱ استقلال خطی بردارها ؛ جهت فضای سه‌بعدی

بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ را **وابستهٔ خطی** گوییم اگر دستگاهی از اعداد مانند $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0 \qquad (۱۷۰۱)$$

و لااقل یکی از این اعداد مخالف 0 باشد. جز این، یعنی اگر (۱۷۰۱) ایجاب کند که $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ، بردارها **مستقل خطی** یا، مختصرا"، **مستقل** خوانده می‌شوند.

واضح است که اگر یکی از بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ بردار صفر باشد، بردارها وابستهٔ خطی می‌باشند.

دو بردار ناصفر وابستهٔ خطی‌اند اگر و فقط اگر نمایشهای هم مبداء آنها بر یک خط واقع باشند. این بردارها را **همخط** نیز می‌نامند.

سه بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ وابستهٔ خطی‌اند اگر و فقط اگر نمایشهای هم‌مبداء آنها دریک صفحه باشند. بنابراین، این بردارها را **همصفحه** خواهیم نامید.

در یک فضای سه‌بعدی همیشه سه‌بردار مستقل وجود دارد، لیکن هر مجموعهٔ متشکل از چهار بردار وابستهٔ خطی می‌باشد. بنابراین، اگر سه‌بردار مستقل $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ انتخاب شده‌باشند، هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به شکل

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$$

نمایش داد. ضرایب این تبدیل منحصرا "به‌وسیلهٔ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ و $\mathbf{a}$ معین می‌شوند. سه‌بردار $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ را **پایهٔ** فضا می‌نامند. سه‌بردار دیگر

$$\mathbf{v}_1 = a_1^1\mathbf{e}_1 + a_1^2\mathbf{e}_2 + a_1^3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{v}_2 = a_2^1\mathbf{e}_1 + a_2^2\mathbf{e}_2 + a_2^3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{v}_3 = a_3^1\mathbf{e}_1 + a_3^2\mathbf{e}_2 + a_3^3\mathbf{e}_3,$$

را در نظر می‌گیریم، که بالانویسها در a_i^j ها فقط اندیس هستند نه‌نما. دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

صفر است اگر و فقط اگر سه‌بردار $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ وابسته باشند.

اگر $\Delta > 0$ ، می‌گوییم دو سه‌تایی مرتب $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ و $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ از بردارها همجهت هستند. چنانچه $\Delta < 0$ ، می‌گوییم آنها **مختلف‌الجهت** می‌باشند. بالاخص، با تعویض دو بردار یک سه تایی جهت آن تغییر می‌کند؛ یعنی، $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$

سه‌تاییهایی مختلف‌الجهت ولی $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1$ سه‌تاییهایی همجهت می‌باشند.

به‌طور شهودی‌تر، دو سه تایی از بردارهای مستقل همجهت هستند اگر بتوان یکی از آنها را به‌طور پیوسته چنان به دیگری تبدیل کرد که در هیچ نقطه از فرایند استقلال از بین نرود. به‌طور دقیقتر، این یعنی سه تابع برداری پیوسته* تعریف شده به‌ازای هر $t \in [0, 1]$ مانند $\mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_2(t), \mathbf{w}_3(t)$ وجود دارند به‌طوری که

$$\mathbf{w}_i(0) = \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{w}_i(1) = \mathbf{v}_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

و $\mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_2(t), \mathbf{w}_3(t)$ به ازای هر t مستقل می‌باشند. فرض کنیم

$$\mathbf{w}_i(t) = \phi_i^1(t)\mathbf{e}_1 + \phi_i^2(t)\mathbf{e}_2 + \phi_i^3(t)\mathbf{e}_3,$$

که درآن $\phi_i^j(t)$ ها توابعی حقیقی و پیوسته در $[0, 1]$ اند. در این صورت، شرطهای بالا بدین معنی‌اند که

$$\phi_i^j(0) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}, \quad \phi_i^j(1) = a_i^j,$$

و دترمینان $\Delta(t) = \det \phi_i^j(t)$ مخالف صفر است.

این تعریف با تعریف قبلی معادل است. در واقع، اگر این تعریف برقرار باشد، دترمینان $\Delta(t)$، که تابع پیوسته‌ای از t در $[0, 1]$ است، نمی‌تواند تغییر علامت دهد. اما $\Delta(0) = 1$ و $\Delta(1) = \Delta$. درنتیجه، Δ مثبت می‌باشد. از آن سو، اگر تعریف اول بر قرار باشد، فرمولهای

$$\mathbf{w}_1 = [1 + t(a_1^1 - 1)]\mathbf{e}_1 + ta_1^2\mathbf{e}_2 + ta_1^3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{w}_2 = ta_2^1\mathbf{e}_1 + [1 + t(a_3^2 - 1)]\mathbf{e}_2 + ta_2^3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{w}_3 = ta_3^1\mathbf{e}_1 + ta_3^2\mathbf{e}_2 + [1 + t(a_3^3 - 1)]\mathbf{e}_3,$$

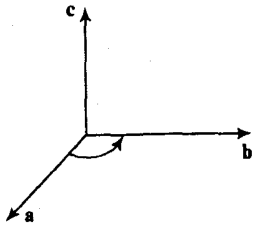
توابع پیوسته‌ای را تعریف می‌کنند که در شرایط تعریف دوم صادق هستند.

هر فضا بایک سه‌تایی مرتب $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ از بردارهای مستقل یک***فضای جهتدار*** نامیده می‌شود. در هر فضای جهتدار، جهت یک سه‌تایی را **مثبت** گوییم اگر که بر جهت سه تایی پایه* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ منطبق باشد. در غیر این صورت، جهت **منفی** نامیده می‌شود.

در یک فضای جهتدار، بردار قائم $\mathbf{n}$ به یک صفحه، جهت دوران مثبتی رادر صفحه معین می‌کند. مثلاً، اگر بردار $\mathbf{a}'$ حاصل دوران‌بردار $\mathbf{a}$ به‌اندازه*زاویه* ϕ، $0 < \phi < \pi$، درجهت مثبت باشد، سه‌تایی $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{n}$ باید جهت مثبت داشته باشد.

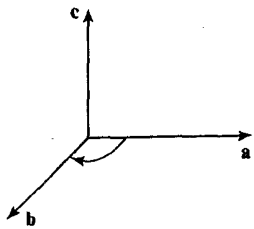
با استفاده از مفاهیم تشبیه به انسان (که‌هیچ معنی ذاتی ریاضی ندارند)، می‌توان از سه‌تاییهای راست دست و چپ دست از بردارها نیز سخن گفت. سه‌تایی $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ یک سه‌تایی ***راست دست*** است اگر همان جهت سه‌تایی مرکب از انگشت شست، سبابه، و میانی

دست راست را داشته باشد. سه‌تایی چپ دست است اگر این مطلب برای دست چپ صادق باشد.



شکل ۱.۵

شکل ۱.۵ یک سه‌تایی راست دست، و شکل ۱.۶ یک سه‌تایی چپ دست را نمایش می‌دهد.



شکل ۱.۶

۱.۵ ضرب برداری و ضرب مختلط بردارها

در یک فضای سه‌بعدی جهتدار، *حاصل ضرب برداری*، یا *حاصل ضرب خارجی*، دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برداری مانند $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ تعریف می‌شود به طول $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ عمود بر هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به‌طوری که سه‌تایی $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ دارای جهت مثبت می‌باشد. توجه کنید که، درحالتی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وابستهٔ خطی باشند، $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ مساوی 0 یا π بوده و حاصل ضرب خارجی مساوی بردار صفر است. بعکس، اگر حاصل ضرب خارجی دو بردار صفر باشد، بردارها وابسته خواهند بود.

ضرب برداری در شرطهای زیر صدق می‌کند:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \tag{۱.۱۸}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \tag{۱.۱۹}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \tag{۱.۲۰}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{cb})\mathbf{a}. \tag{۱.۲۱}$$

اتحاد آخر، که یک حاصل ضرب خارجی مکرر را برحسب حاصل ضربهای نقطه‌ای بیان می‌کند، بارها در آینده به کار خواهد آمد.

واضح است که این اتحاد وقتی یکی از بردارها صفر باشد برقرار است . بنابراین ، کافی است آن را با این فرض که تمام بردارها ناصفرند ثابت کنیم . برای اثبات آن سه بردار یکهٔ دوبدو متعامد $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ را به طریق زیر اختیار می‌کنیم : $\mathbf{e}_1 = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$ ، $\mathbf{e}_2$ را در صفحه‌ای موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ اختیار می‌کنیم ، و $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$. بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ مستقل خطی‌اند ، و هر بردار ترکیبی خطی از آنهاست . لذا ، داریم

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{b} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{c} = \gamma\mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{e}_2 + \varepsilon\mathbf{e}_3.$$

چون

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (\text{چرا؟})$$

خواهیم داشت

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_1 \times (\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) = |\mathbf{a}|\beta\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = |\mathbf{a}|\beta\mathbf{e}_3,$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = |\mathbf{a}|\beta\mathbf{e}_3 \times (\gamma\mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{e}_2 + \varepsilon\mathbf{e}_3) = |\mathbf{a}|\beta\gamma\mathbf{e}_2 - |\mathbf{a}|\beta\delta\mathbf{e}_1.$$

از آن طرف ،

$$(\mathbf{ac}) = |\mathbf{a}|\gamma, \qquad (\mathbf{bc}) = \alpha\gamma + \beta\delta$$

و

$$\begin{aligned}(\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a} &= |\mathbf{a}|\gamma(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)|\mathbf{a}|\mathbf{e}_1 \\ &= |\mathbf{a}|\gamma\alpha\mathbf{e}_1 + |\mathbf{a}|\gamma\beta\mathbf{e}_2 - |\mathbf{a}|\alpha\gamma\mathbf{e}_1 - |\mathbf{a}|\beta\delta\mathbf{e}_1 \\ &= |\mathbf{a}|\beta\gamma\mathbf{e}_2 - |\mathbf{a}|\beta\delta\mathbf{e}_1,\end{aligned}$$

و از اینجا

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}.$$

حاصل‌ضرب مختلط سه‌بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ به‌صورت اسکالر $\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ تعریف می‌شود. قدر مطلق این حاصل ضرب حجم متوازی‌السطوحی است که با بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ به عنوان یالهایی که از یک رأس مشترک خارج می‌شوند ساخته شده است . علامت حاصل‌ضرب مختلط با علامت جهت سه‌تایی $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ یکی خواهد بود .

ضرب مختلط در اتحادهای

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac} \qquad (۲۲\cdot۱)$$

صدق می‌کند . حاصل‌ضرب مختلط صفر است اگر و فقط اگر سه‌بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ وابستهٔ خطی باشند .

ما به یک اتحاد دیگر نیز نیاز خواهیم داشت :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{ad} \\ \mathbf{bc} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}. \qquad (۲۳\cdot۱)$$

حاصل ضرب خارجی و حاصل ضرب مختلط هر دو به جهت فضا بستگی دارند . وقتی جهت تغییر کند ، علامت حاصل ضرب نیز تغییر خواهد کرد .

۶۰۱ چند فرمول از هندسهٔ تحلیلی به شکل برداری

همانطور که دیده شد ، با انتخاب مبداء O ، تناظری یک به یک بین نقاط و بردارهای آزاد حاصل می‌شود ؛ یعنی ، هر نقطهٔ P نظیر است به‌بردار موضعش $\mathbf{r} = \overline{OP}$ نسبت به مبداء O . نقطهٔ P با بردار موضع $\mathbf{r}$ را گاهی با $[\mathbf{r}]$ نشان خواهیم داد .

حال چند فرمول معروف از هندسهٔ تحلیلی را ذکر می‌کنیم که ، به جای مختصات ، برحسب بردارهای موضع بیان شده‌اند .

۱ . **فاصلهٔ** d بین نقاط P و Q بابردارهای موضع $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ برابر است با

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \qquad (۲۴۰۱)$$

در واقع ، بردار $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ به‌وسیلهٔ $\overline{PQ}$ نمایش داده می‌شود ، زیرا $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ نمایش $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ می‌باشند .

۲ . **معادلهٔ صفحهٔ عمود بر بردار N و مار برنقطهٔ** P_0 بابردار موضع $\mathbf{r}_0$ عبارت است از

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{N} = 0, \qquad (۲۵۰۱)$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردار موضع نقطهٔ متغیر P از صفحه است .

در واقع ، معنی شرط (۲۵۰۱) این است که پاره‌خط P_0P بر $\mathbf{N}$ عمود است واین برای نقاط P در صفحهٔ مورد نظر و فقط همین نقاط برقرار است .

۳ . **معادلهٔ صفحهٔ مار برنقطهٔ** P_0 **و موازی دو بردار مستقل** $\mathbf{a}$ **و** $\mathbf{b}$ عبارت است از

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{ab} = 0. \qquad (۲۶۰۱)$$

درواقع ، بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ برصفحه عمود می‌باشد .

۴ . **فاصلهٔ نقطهٔ** P_1 **با بردار موضع** $\mathbf{r}_1$ **از صفحهٔ** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{N} = 0$ مساوی است با

$$\mathbf{d} = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|} \qquad (۲۷۰۱)$$

عبارت $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{N}$ دارای مقدار مثبت است اگر نقطهٔ P_1 در نیم فضایی که بردار $\mathbf{N}$ به آن اشاره دارد واقع باشد . در غیر این صورت ، عبارت مقدار منفی خواهد داشت .

در واقع، $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{N}$ مساوی $|\overrightarrow{P_0P_1}|\,|\mathbf{N}|\cos\phi$ است، که در آن ϕ زاویهٔ بین نمایش $\overline{P_0P_1}$ از $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ و بردار قائم $\mathbf{N}$ می‌باشد. اما $|\overrightarrow{P_0P_1}|\cos\phi$، یعنی تصویر $\overline{P_0P_1}$ روی قائم به صفحه، مساوی فاصلهٔ نقطهٔ P_1 از صفحه است؛ یعنی، فرمول (۲۷۰۱) برقرار است.

۵. ***معادلهٔ خط مستقیم مار برنقطهٔ*** P_0 ***با بردار موضع*** $\mathbf{r}_0$ ***و موازی بردار*** $\mathbf{a}$ به شکل زیر است:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a} = 0, \tag{۲۸۰۱}$$

یا به شکل پارامتری معادل آن، یعنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \tag{۲۹۰۱}$$

که در آن پارامتر t تمام مقادیر حقیقی را اختیار می‌کند؛ یعنی، $t \in (-\infty, \infty)$.

در واقع، این یک شرط لازم و کافی برای توازی $\overrightarrow{P_0P}$ و $\mathbf{a}$ می‌باشد.

۶. ***معادلهٔ کرهٔ به‌شعاع*** a ***و مرکز*** P_0 ***با بردار موضع*** $\mathbf{r}_0$ عبارت‌است از

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = a,$$

یا، معادلش،

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = a^2. \tag{۳۰۰۱}$$

تغییر مبداء از O به O' سبب تغییر بردارهای موضع تمام نقاط می‌شود. اگر بردار $\overline{O'O}$ را با $\mathbf{a}$ نشان دهیم، بردارهای موضع جدید و قدیم $\mathbf{r}'$ و $\mathbf{r}$ نقطهٔ P با فرمول

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{a} \quad \text{یا} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a} \tag{۳۱۰۱}$$

بهم مربوط می‌شوند.

۷۰۱ بردارها و مختصات

فرض کنیم دستگاه مختصات دکارتی‌قائم $Oxyz$ در فضا داده‌شده‌باشد. باانتخاب بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ برمحورها به‌عنوان یک پایه، می‌توان هر بردار $\mathbf{a}$ را به شکل

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \tag{۳۲۰۱}$$

نمایش‌داد. اعداد a_x, a_y, a_z ***مولفه‌های بردار*** $\mathbf{a}$ نسبت به‌دستگاه‌مختصات‌نامیده‌می‌شوند. گاهی یک بردار با مولفه‌های a_x, a_y, a_z را با $\{a_x, a_y, a_z\}$ نشان می‌دهیم، مشروط براینکه یک دستگاه مختصات ثابت مانند $Oxyz$ داشته باشیم. اتحادهای زیر برای بردارهای پایه

برقرارند :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0. \tag{۳۳۰۱}$$

از اینها نتیجه می‌شود که مولفه‌های بردار **a** عبارتنداز

$$a_x = \mathbf{ai}, \qquad a_y = \mathbf{aj}, \qquad a_z = \mathbf{ak}. \tag{۳۴۰۱}$$

انتخاب پایه به فضا جهت نیز می‌دهد. اگر این جهت را مثبت بگیریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \tag{۳۵۰۱}$$

با استفاده از (۳۲۰۱)، (۳۳۰۱)، و (۳۵۰۱)، به آسانی می‌توان مولفه‌های حاصل از اعمال روی بردارها را برحسب مولفه‌های بردارهای مربوطه نسبت به یک دستگاه مختصات بیان کرد. مثلاً،

$$\{a_x, a_y, a_z\} \pm \{b_x, b_y, b_z\} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}, \tag{۳۶۰۱}$$

$$\lambda\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}, \tag{۳۷۰۱}$$

$$\{a_x, a_y, a_z\}\{b_x, b_y, b_z\} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{۳۸۰۱}$$

$$\{a_x, a_y, a_z\} \times \{b_x, b_y, b_z\} = \left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}, \tag{۳۹۰۱}$$

$$\{a_x, a_y, a_z\}\{b_x, b_y, b_z\}\{c_x, c_y, c_z\} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{۴۰۰۱}$$

$$|\{a_x, a_y, a_z\}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{۴۱۰۱}$$

وقتی دستگاه مختصات تغییر می‌کند، مولفه‌های بردار مفروض نیز تغییر می‌کنند ولی روابط (۳۶۰۱) تا (۴۱۰۱) برای مولفه‌ها نسبت به دستگاه مختصات جدید برقرار می‌مانند. از اینرو، فرمولهای مربوط به اعمال برداری با قرار دادن مولفه‌های بردارها در آنها تحت تغییرات دستگاه مختصات پایا خواهند ماند. اگر بردارهای موضع نقاط را داشته باشیم، آنچه که باید برای پایایی فرمول تحقیق کنیم پایایی تحت تغییرات مبداء است که بر بردارهای موضع اثر می‌گذارد.

اگر مبداء بردارهای موضع برمبداء دستگاههای مختصات منطبق باشد، مختصات x, y, z نقطهٔ P برمولفه‌های بردار موضعش

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

منطبق خواهند بود.

با استفاده از فرمولهای (۳۶۰۱) تا (۴۱۰۱)، می‌توان هر فرمول برداری را با دستگاه معادلی از فرمولها برحسب مختصات و مولفه‌های نقاط و بردارها عوض کرد. مثلاً، اگر

مولفه‌های $\mathbf{N}$ را با A, B, C نشان دهیم ، فرمول (۲۵۰۱) شکل معروف

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

را به‌خود می‌گیرد .

به‌همین‌ترتیب ، فرمول (۲۷۰۱) به

$$d = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

تغییر می‌کند ، و معادلهٔ (۲۹۰۱) با دستگاه معادل و مرکب از سه معادلهٔ

$$x = x_0 + mt, \qquad y = y_0 + nt, \qquad z = z_0 + pt$$

تعویض می‌شود ، که در اینجا

$$\mathbf{a} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}.$$

تمرین

۱ . ثابت کنید هرگاه بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ مستقل خطی باشند ، هیچیک از آنها مساوی 0 نیست .

۲ . ثابت کنید هرگاه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهایی وابسته باشند ، یک جواب همزمان از معادلات

$$\mathbf{ax} = \alpha, \qquad \mathbf{bx} = \beta$$

وجود دارد اگر و فقط اگر

$$\frac{\alpha}{|\mathbf{a}|} = \frac{\beta}{|\mathbf{b}|}$$

هرگاه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامد باشند ، جواب عمومی عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} + \frac{\beta}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} + t\mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

که در آن t یک پارامتر دلخواه است .

۳ . ثابت کنید معادلهٔ

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردار موضع یک نقطهٔ متغیر است ، نمایش یک خط است اگر و فقط اگر $\mathbf{ab} = 0$. در غیر این صورت ، معادله جواب نخواهد داشت .

۴* . با این فرض که $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ بردارهایی مستقل‌اند ، و $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 = 0, \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 = 0$ ، ثابت کنید فاصلهٔ d بین خطوط

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 \quad \text{و} \quad \mathbf{r} \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2$$

مساوی است با

$$d = \frac{|\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2|}.$$

۵. ثابت کنید هرگاه سه‌بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ مستقل خطی باشند و

$\mathbf{ra} = 0$ ، $\mathbf{rb} = 0$ ، و $\mathbf{rc} = 0$ ،

آنگاه $\mathbf{r} = 0$.

۶. با این فرض که

$$\mathbf{a} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j},$$

$$\mathbf{b} = s\mathbf{i} + t\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k},$$

$$\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k},$$

فرمولهای زیر را محاسبه کنید :

(آ) $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}$ ،

(ب) $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2$ ،

(پ) $(\mathbf{ab})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|)^2$ ،

(ت) $\mathbf{rN} = -D$

تحقیق کنید (پ) یک اتحاد است که به‌ازای هر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برقرار می‌باشد .

۷. جمیع فرمولهای زیر بخش ۱.۶ را برحسب مختصات بیان کنید .

۲. مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری

۱.۲ حد و پیوستگی یک تابع برداری از یک متغیر حقیقی

ما در هندسهٔ دیفرانسیل از توابع برداری یک یا دو متغیر حقیقی استفاده می‌کنیم . برای نمایش این توابع ، حروف سیاه مانند $\mathbf{f}(t)$ ، $\mathbf{r}(t)$ ، $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ ، $\mathbf{v}(t)$ ، و غیره را به کار می‌بریم .

با معلوم بودن دستگاه مختصات ، هر تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ معادل یک سه تایی مرتب از توابع حقیقی مانند $x(t), y(t), z(t)$ است که ، به ازای هر t ، مولفه‌های مقدار نظیر $\mathbf{r}(t)$ را نشان می‌دهند . رابطهٔ بین تابع برداری و مولفه‌هایش عبارت است از

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

یا ، معادلاً ،

$$x(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{i}, \qquad y(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{j}, \qquad z(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{k}.$$

یک تابع حقیقی دیگر نیز هست‌که به‌تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ مربوط می‌شود ، و آن **قدرمطلق** این تابع یعنی $|\mathbf{r}(t)|$ است . این تابع ، برخلاف مولفه‌ها ، به‌دستگاه مختصات بستگی ندارد ؛ و لذا ، دارای معنی ذاتی است .

حال می‌توانیم مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی را برای توابع برداری تعریف کنیم . در این راه از حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی آزادانه استفاده خواهیم کرد .

بردار $\mathbf{a}$ درصورتی حد تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ در t_0 نامیده می‌شود که

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0.$$

(توجه کنید که در فرمول بالا حد یک تابع حقیقی را داریم) . در این صورت ، می‌نویسیم

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \quad \text{یا} \quad \mathbf{r}(t) \to \mathbf{a}\,.$$

بالاخص ، فرمولهای

$$\lim \mathbf{r}(t) = 0 \quad \text{و} \quad \lim |\mathbf{r}(t)| = 0$$

معادل می‌باشند .

تابع‌برداری $\mathbf{r}(t)$ را **در مجموعهٔ** T ***کراندار*** گوییم هرگاه تابع اسکالر $|\mathbf{r}(t)|$ کراندار باشد ؛ یعنی ، عددی مانند M وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر $t \in T$ ، $|\mathbf{r}(t)| < M$.

مجموع دو تابع برداری تعریف شده برمجموعهٔ T ، حاصل ضرب یک تابع برداری در یک تابع اسکالر ، و حاصل‌ضرب خارجی دوتابع برداری توابعی برداری هستند که برهمان مجموعهٔ T تعریف می‌شوند . حاصل ضرب اسکالر دو تابع برداری و حاصل ضرب مختلط سه تابع برداری توابعی اسکالر خواهند بود .

در این مورد فرمولهای زیر برقرار می‌باشند :

$$\lim_{t \to t_0} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to t_0} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t), \tag{۱ . ۲}$$

$$\lim_{t \to t_0} [\lambda(t)\mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to t_0} \lambda(t) \lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t), \tag{۲ . ۲}$$

$$\lim_{t \to t_0} [\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to t_0} \mathbf{u}(t) \lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t), \tag{۳ . ۲}$$

$$\lim_{t \to t_0} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to t_0} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t), \tag{۴ . ۲}$$

$$\lim_{t \to t_0} (\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(t)\mathbf{w}(t)] = \lim_{t \to t_0} \mathbf{u}(t) \lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t) \lim_{t \to t_0} \mathbf{w}(t). \tag{۵ . ۲}$$

به بیان دقیق ، این فرمولها مبین احکام زیر هستند : هر وقت حدود سمت‌راست یکی از فرمولها موجود باشند ، حد سمت چپ آن فرمول نیز وجود دارد و معادله برقرار است .

بهرحال، وجود حد سمت چپ عموما "حدود سمت راست را ایجاب نمی‌کند.

تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ را در t_0 **پیوسته** گوییم هرگاه در t_0 تعریف شده بوده و $\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.
این تعریف را می‌توان به شکل معادل زیر نیز بیان کرد:

تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ در t_0 پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هرعدد $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر t که $\mathbf{r}(t)$ تعریف می‌شود نامساوی $|t - t_0| < \delta$ نامساوی $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| < \varepsilon$ را ایجاب نماید.

یک تابع پیوسته در هر نقطه از مجموعهٔ T **پیوسته در T** نامیده می‌شود.

رابطهٔ بین تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ و مولفه‌هایش $x(t), y(t), z(t)$ ایجاب می‌کند که ***یک‌تابع برداری در t_0 حد دارد اگر و فقط اگر مولفه‌هایش در t_0 حد داشته باشند. مولفه‌های حد مساوی حدود مولفه‌های نظیر می‌باشند.***

درنتیجه، ***یک تابع برداری در t_0 پیوسته است اگر و فقط اگر هر سه مولفهٔ آن در این نقطه پیوسته باشند.***

همچنین، لازم به تذکر است که اگر یکی از توابع $\mathbf{u}(t)$ یا $\mathbf{v}(t)$ در همسایگی t_0 کراندار بوده و دیگری در t_0 حد 0 داشته باشد،

$$\lim_{t\to t_0} (\mathbf{u}(t)\cdot \mathbf{v}(t)) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t\to t_0} (\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = 0.$$

به طریق مشابه، اگر یکی از توابع $\lambda(t), \mathbf{u}(t)$ کراندار و دیگری، وقتی $t \to t_0$ به 0 میل کند،

$$\lim_{t\to t_0} (\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = 0.$$

۲۰۲ مشتق یک تابع برداری

فرض کنیم $\mathbf{r}(t)$ یک تابع برداری باشد که در همسایگی t_0 تعریف شده‌است، عبارت

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0))$$

(به‌شرط‌وجود حد) را مشتق $\mathbf{r}(t)$ در t_0 نامیده و آن را با $\mathbf{r}'(t_0)$ یا $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ یا $dr(t_0)/dt$ نشان می‌دهیم.

هرگاه مشتق $\mathbf{r}(t)$ در t_0 موجود باشد، می‌گوییم تابع $\mathbf{r}(t)$ در t_0 **مشتقپذیر** است.
تابعی که در هر نقطه از مجموعهٔ A مشتقپذیر باشد **مشتقپذیر در A** نامیده می‌شود.
مولفه‌های عبارت

$$\frac{1}{h}(\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0))$$

منطبق برعبارات نظیر برای مولفه‌های $\mathbf{r}(t)$ اند. از اینرو، **یک تابع برداری در نقطهٔ** t_0 **مشتقپذیر است اگر و فقط اگر مولفه‌هایش در این نقطه مشتقپذیر باشند. مولفه‌های مشتق مساوی مشتقهای مولفه‌های نظیر خواهند بود؛ یعنی،**

$$\frac{d}{dt}\{x(t_0), y(t_0), z(t_0)\} = \left\{\frac{d}{dt}x(t_0), \frac{d}{dt}y(t_0), \frac{d}{dt}z(t_0)\right\}.$$

به شرط وجود مشتقهای سمت راست، فرمولهای زیر برای توابع برداری برقرارند:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\mathbf{u} + \frac{d}{dt}\mathbf{v}, \tag{۶.۲}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{v}) = \left(\frac{d}{dt}\lambda\right)\mathbf{v} + \lambda\frac{d}{dt}\mathbf{v}, \tag{۷.۲}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{uv}) = \mathbf{v}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}\right) + \mathbf{u}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}\right), \tag{۸.۲}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}\right) \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}\right), \tag{۹.۲}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{uvw}) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}\right)\mathbf{vw} + \mathbf{u}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}\right)\mathbf{w} + \mathbf{uv}\frac{d}{dt}\mathbf{w}. \tag{۱۰.۲}$$

در فرمولهای (۹.۲) و (۱۰.۲) ترتیب عوامل اهمیت دارد.

درست مثل حالت توابع اسکالر، **یک تابع برداری بربازهٔ** (a, b) **ثابت است اگر و فقط اگر مشتق آن در هر نقطه از بازه 0 باشد.**

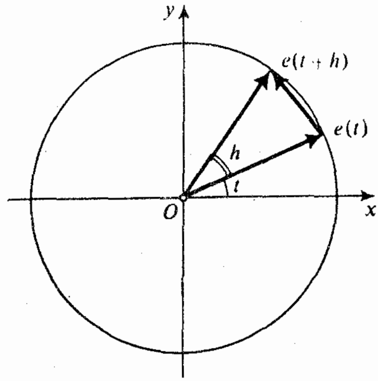
قانون زیر در مورد مشتقگیری از توابع مرکب برقرار است:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{v}(t(s_0)) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t_0)\right) \cdot \frac{d}{ds}t(s_0),$$

که در آن $t_0 = t(s_0)$.

امثله و تمرین

۱. **تابع** $\mathbf{e}(t)$. فرض کنید $\mathbf{e}(t)$ برداریکه در صفحهٔ مفروض Π باشد که جهتش با دورانی به اندازهٔ زاویهٔ t در جهت ثابتی به دست می‌آید (شکل ۱.۲). این یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب 2π است؛ یعنی، به ازای هر t، $\mathbf{e}(t + 2\pi) = \mathbf{e}(t)$. هرگاه دستگاه مختصات طوری مفروض باشد که جهت ثابت همان جهت محور x بوده، محور y در صفحهٔ Π قرار



شکل ۲۰۱

داشته، و محور z قائم به Π باشد، آنگاه مولفه‌های $\mathbf{e}(t)$ عبارت خواهند بود از

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = 0.$$

درنتیجه، تابع $\mathbf{e}(t)$ مشتقپذیر است. این مشتق دارای مولفه‌های

$$\dot{x} = -\sin t = \cos(t + \tfrac{1}{2}\pi), \qquad \dot{y} = \cos t = \sin(t + \tfrac{1}{2}\pi), \qquad \dot{z} = 0$$

است. بنابراین،

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{e}(t + \tfrac{1}{2}\pi).$$

۲. هرگاه تمام مقادیر یک تابع برداری موازی یک صفحه باشند، مشتق آن، درصورت‌وجود، نیز موازی همان صفحه است.

در واقع، بردار ثابت و قائم به صفحه را با $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم. دراین صورت، داریم $\mathbf{N}\mathbf{r}(t) = 0$ که، چون $\dot{\mathbf{N}} = 0$، $\mathbf{N}\dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ را ایجاب می‌کند. این یعنی بردار $\dot{\mathbf{r}}$ بر $\mathbf{N}$ عمود است و، در نتیجه، موازی صفحهٔ مفروض می‌باشد.

۳. هرگاه مقادیر توابع برداری $\mathbf{r}(t)$ و $\dot{\mathbf{r}}(t)$ به‌ازای هر t موازی باشند و $\mathbf{r}(t) \neq 0$، آنگاه تمام مقادیر $\mathbf{r}(t)$ یک جهت خواهند داشت. در واقع، برداریکهٔ

$$\mathbf{r}_0(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} = \frac{\mathbf{r}(t)}{\sqrt{[\mathbf{r}(t)]^2}}$$

را در نظر می‌گیریم. مشتق این تابع برداری مساوی است با

$$\dot{\mathbf{r}}_0(t) = \frac{\sqrt{[\mathbf{r}(t)]^2}\,\dot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{r}(t)\left(\mathbf{r}(t)\dot{\mathbf{r}}(t)/\sqrt{[\mathbf{r}(t)]^2}\right)}{[\mathbf{r}(t)]^2} = \frac{(\mathbf{r}^2)\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

اما بردارهای $\mathbf{r}(t)$ و $\dot{\mathbf{r}}(t)$ همیشه موازی‌اند؛ درنتیجه، $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$. بنابراین، به‌ازای هر t، $\dot{\mathbf{r}}_0(t) = 0$، ثابت $= \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{a}$، و $\mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|\mathbf{a}$ موازی $\mathbf{a}$ می‌باشد.

۴. ثابت کنید هرگاه تابع اسکالر $\lambda(t)$ حد ناصفر داشته باشد، یعنی $\lim \lambda(t) \neq 0$، آنگاه

$$\lim \frac{\mathbf{v}(t)}{\lambda(t)} = \frac{\lim \mathbf{v}(t)}{\lim \lambda(t)},$$

که درآن

$$\frac{\mathbf{v}(t)}{\lambda(t)} = \frac{1}{\lambda(t)}\mathbf{v}(t).$$

۵. ثابت کنید

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\lambda}\right) = \frac{\lambda\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}\dfrac{d\lambda}{dt}}{\lambda^2}.$$

۶. مشتقات توابع برداری

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r}, \qquad (\mathbf{p} \times \mathbf{q})(\mathbf{r} \times \mathbf{s}), \qquad (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times (\mathbf{r} \times \mathbf{s})$$

را برحسب مشتقات $\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{s}}$ بیان کنید. فرض کنید توابع $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ در یک قلمرو تعریف شده و مشتقپذیر باشند.

۳.۲ مشتقات مراتب بالاتر؛ فرمول تیلور[1]

مثل حالت توابع اسکالر، مشتقات مراتب بالاتر یک تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ را متوالیاً "به‌صورت مشتق مشتقهای مرتبهٔ قبلی آنها تعریف می‌کنیم. مشتقات متوالی $\mathbf{r}$ به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}, \ldots, \frac{d^k\mathbf{r}}{dt^k}, \ldots$$

یا

$$\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \mathbf{r}''', \mathbf{r}^{(4)}, \ldots, \mathbf{r}^{(k)}, \ldots \qquad \text{یا} \qquad \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}, \overset{(4)}{\mathbf{r}}, \ldots, \overset{(k)}{\mathbf{r}}, \ldots$$

تابعی که بربازهٔ $[a,b]$ دارای مشتق مرتبهٔ k ام پیوسته باشد یک تابع ***از کلاس*** C_k بر $[a,b]$ نام دارد. این اصطلاح هم برای توابع برداری و هم اسکالر به‌کار می‌رود.

از تعریف مشتقات مراتب بالاتر نتیجه می‌شود که ***تابع برداری*** $\mathbf{r}(t)$ در t_0 ***دارای مشتق*** n ***م است اگر و فقط اگر مولفه‌هایش*** $x(t), y(t), z(t)$ در t_0 مشتق n ***م داشته باشند. مولفه‌های مشتق*** n ***م*** $\mathbf{r}(t)$ ***برمشتقات*** n ***م مولفه‌های نظیر منطبق است؛ یعنی،***

$$\overset{(n)}{\mathbf{r}}(t) = \{\overset{(n)}{x}(t), \overset{(n)}{y}(t), \overset{(n)}{z}(t)\}.$$

---

1. Taylor

این خاصیت این امکان را به‌وجود می‌آورد که هرمسئله از حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری را با مسائلی نظیر از حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع اسکالر عوض کنیم. بالاخص، می‌توان قضیهٔ تیلور را به صورت زیر ثابت کرد.

هرگاه تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ دارای $n+1$ مشتق متوالی پیوسته باشد، آنگاه

$$\mathbf{r}(t_0+h) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{h}{1!}\dot{\mathbf{r}}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\mathbf{r}}(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\overset{(n)}{\mathbf{r}}(t_0) + \mathbf{R}_{n+1}, \quad (۱۱\cdot۲)$$

که درآن باقیماندهٔ $\mathbf{R}_{n+1}$ به شکل $\mathbf{R}_{n+1} = h^{n+1}\mathbf{U}_{n+1}(h)$ بوده و تابع $\mathbf{U}_{n+1}(h)$ در همسایگی $h=0$ کراندار می‌باشد.

اثبات مبتنی بر کاربرد فرمول تیلور برای هر مولفهٔ جداگانه است. با اینحال، توجه کنید که، در مورد تابع اسکالر، باقیمانده را می‌توان در یک نقطهٔ میانی برحسب مشتق مرتبهٔ $n+1$ م تابع نمایش داد، حال آنکه در اینجا این کار میسر نیست. در واقع، تابع

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{e}(t) + t\mathbf{k}$$

را در نظر می‌گیریم. به‌ازای $n=0$ داریم

$$\mathbf{r}(t_0+h) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{R}_1 \quad \text{یا} \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{r}(t_0+h) - \mathbf{r}(t_0).$$

بخصوص، به‌ازای $t_0 = 0, h = 2\pi$ داریم

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0) = 2\pi\mathbf{k}.$$

لذا، باقیمانده را نمی‌توان مثلاً" به شکل لاگرانژ[1]

$$2\pi\dot{\mathbf{r}}(\tau) = 2\pi[\mathbf{e}(\tau+\pi/2) + \mathbf{k}]$$

با $0 < \tau < 2\pi$ ، نمایش داد، زیرا این بردار هرگز حتی موازی $\mathbf{k}$ هم نیست.

چون از یک شکل خاص باقیمانده همیشه نمی‌توان استفاده کرد، تنظیم دیگری از قضیهٔ تیلور، با مفروضات ضعیفتر و نتیجهٔ ضعیفتر، ممکن است سودمند باشد:

هرگاه $\mathbf{r}(t)$ در (t_0, t_0+h) از کلاس C_n باشد، آنگاه فرمول (۱۱۰۲) برقرار است. که در آن باقیمانده مساوی است با

$$\mathbf{R}_{n+1} = h^n\mathbf{V}_{n+1}(h) \quad \text{به‌طوری که} \quad \lim_{h\to 0}\mathbf{V}_{n+1}(h) = 0. \quad (۱۱\cdot۲)'$$

با فرض قویتر قبلی می‌داشتیم $\mathbf{V}_{n+1}(h) = h\mathbf{U}_{n+1}(h)$ با $\mathbf{U}_{n+1}(h)$ کراندار، که $\mathbf{V}_{n+1}(h) \to 0$ را ایجاب می‌کند ولی خاصیت قویتری می‌باشد.

1. Lagrange

امثله و تمرین

۱. اگر تمام مقادیر تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ ، $a \leq t \leq b$ ، از کلاس C_2 موازی یک صفحه‌باشند، بردارهای $\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t)$ نیز به‌ازای هر t موازی این صفحه هستند. بعکس، اگر بردارهای $\mathbf{r}(t)$ ، $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ، و $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ به‌ازای هر t همصفحه (وابستهٔ خطی) بوده و بردارهای $\mathbf{r}(t)$ و $\dot{\mathbf{r}}(t)$ به ازای هر t مستقل خطی باشند، تمام مقادیر $\mathbf{r}(t)$ موازی یک صفحه خواهند بود. در واقع، اگر $\mathbf{N}(t)$ برداریکهٔ عمود برصفحهٔ معین شده به‌وسیلهٔ $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t)$ باشد، به‌خاطر استقلال $\mathbf{r}(t)$ و $\dot{\mathbf{r}}(t)$ داریم $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$ ؛ درنتیجه،

$$\mathbf{N}(t) = \pm\frac{\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|}.$$

این یک تابع مشتقپذیر است که در اتحادهای

$$\mathbf{N}(t)\mathbf{r}(t) = 0, \qquad \mathbf{N}(t)\dot{\mathbf{r}}(t) = 0, \qquad \mathbf{N}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t) = 0 \tag{۱۲۰۲}$$

صدق می‌کند. با مشتقگیری از اتحاد اول و دوم داریم

$$\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{r}} = 0, \qquad \dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{N}\ddot{\mathbf{r}} = 0,$$

که، در پرتو (۱۲۰۲) ، نتیجه می‌شود

$$\dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{r}} = 0, \qquad \dot{\mathbf{N}}\mathbf{r} = 0.$$

بعلاوه، چون طول بردار $\mathbf{N}$ ثابت است، داریم

$$\dot{\mathbf{N}}\mathbf{N} = 0.$$

بردارهای $\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, \mathbf{N}$ مستقل خطی‌اند، و بردار $\dot{\mathbf{N}}$ به هر سه بردار متعامد است. درنتیجه، $\dot{\mathbf{N}} = 0$، و $\mathbf{N}$ بردار ثابتی می‌باشد.

۲. هرگاه در $[a, b]$ تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ در معادلهٔ دیفرانسیل $\overset{(n)}{\mathbf{r}}(t) = 0$ صدق کند، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + \cdots + t^{n-1}\mathbf{a}_n,$$

که در آن $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ بردارهای ثابتی می‌باشند.

۳. دو تابع برداری با فرمولهای

$$\mathbf{E}(t) = \cos t\mathbf{a} + \sin t\mathbf{b}, \qquad \mathbf{E}_1(t) = -\sin t\mathbf{a} + \cos t\mathbf{b},$$

که درآنها $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابتی هستند، تعریف شده‌اند. ثابت کنید که $\dot{\mathbf{E}}_1(t) = -\mathbf{E}(t)$، و $\dot{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{E}_1(t)$.

۴. مشتق k ام‌تابع $\mathbf{E}(t)$ را پیدا کنید (حالتهای k فرد و k زوج را جدا درنظر بگیرید).

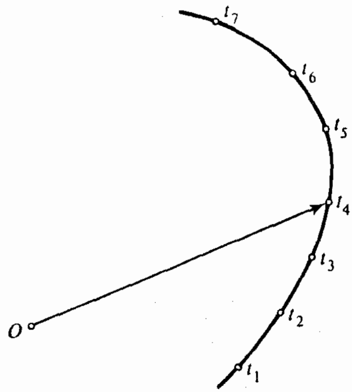
۴.۲ تعبیر سینماتیک و هندسی یک تابع برداری و مشتق آن

حال شناسهٔ t را زمان ومقدار $\mathbf{r}(t)$ تابع در t را بردار موضع یک‌نقطهٔ متحرک درلحظهٔ

t می‌گیریم . در این صورت ، تابع $\mathbf{r}(t)$ حرکت نقطه را توصیف خواهد کرد .

در این تعبیر سینماتیک ، مجموعهٔ نقاط انتهایی بردارهای $\mathbf{r}(t)$ مقید در مبداء O به‌ازای هر t از قلمروتابع $\mathbf{r}(t)$ ، مدار نقطهٔ متحرک طبق‌قانون $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ است ,این مجموعه ، تحت شرایطی برای تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ یک منحنی تشکیل می‌دهد . بهرحال ، درحالت‌کلی، ممکن است مجموعه‌ای باشد خیلی دور از تصور ما از یک منحنی ؛ مثلا" ، یک مکعب توپر باشد .

این مجموعه به تنهایی تابعی را معین نمی‌کند . همین مجموعه از نقاط می‌تواند از توابع کاملا" متفاوتی به دست آید . برای مشخص کردن یک تابع به مقیاسی روی مدار نیز نیاز داریم که مقادیر شناسهٔ t متناظر با نقاط مدار را نشان دهد (شکل ۲۰۲).



شکل ۲۰۲

بردار $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ نمایش تغییر مکان نقطهٔ متحرک در فاصله زمانی t تا $t+h$ است . درنتیجه، $(1/h)(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))$ نمایش سرعت متوسط در این فاصله است که‌هم مقدار سرعت و هم‌جهت تغییر مکان را نشان می‌دهد . مشتق $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ، که حد سرعت متوسط است وقتی $h \to 0$ ، نمایش ***سرعت لحظه‌ای*** نقطه در لحظهٔ t می‌باشد . طول این بردار سرعت اسکالر است ، و جهتش جهت حرکت را نشان می‌دهد . مشتق $\dot{\mathbf{r}}(t)$ برداری است که برمدار در نقطهٔ نظیر به مقدار t از شناسه مماس است .

۵۰۲ توابع برداری چند متغیره

همهٔ مفاهیم اساسی تعریف‌شده برای توابع برداری یک‌متغیره را می‌توان ، با تغییراتی آشکار، به توابع برداری دو یا چند متغیر حقیقی تعمیم داد . با یک دستگاه مختصات معلوم ، یک تابع برداری چند متغیره معادل دستگاهی از سه تابع اسکالر با همان متغیرها می‌شود ؛

و لذا ، امکان اعمال حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی چند متغیره را ، وقتی لازم باشد ، فراهم می‌آورد .

به‌عنوان مثال ،بردار $\mathbf{a}$ حد تابع $\mathbf{r}(u, v)$ در (u_0, v_0) نامیده می‌شود اگر تابع اسکالر دو متغیرهٔ $|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{a}|$ وقتی $(u, v) \to (u_0, v_0)$ به‌صفر میل کند . تابع برداری $\mathbf{r}(u, v)$ در (u_0, v_0) پیوسته نامیده می‌شود اگر و فقط اگر $\mathbf{r}(u_0, v_0) = \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \mathbf{r}(u, v)$ و از این قبیل .

با ثابت گرفتن تمام متغیرهای تابع برداری چند متغیرهٔ $\mathbf{r}(u, v, \ldots)$ جزیکی ، تابع به تابعی یک متغیره ، یعنی متغیر باقیمانده ، بدل می‌شود . مشتق این تابع **مشتق جزئی** $\mathbf{r}$ نسبت به این متغیر نامیده می‌شود . مشتق جزئی تابع $\mathbf{r}(u, v, \ldots)$ را نسبت به متغیر u با

$$\mathbf{r}_u(u, v, w, \ldots) \quad \text{یا} \quad \frac{\partial \mathbf{r}(u, v, w, \ldots)}{\partial u} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{r}(u, v, w, \ldots)$$

نشان می‌دهیم . ما اغلب شناسه‌های $u, v, \ldots$ را حذف کرده فقط می‌نویسیم

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \text{یا} \quad \mathbf{r}_u.$$

برای مشتقات جزئی مراتب بالاتر ، نمادهای زیر به کار می‌روند :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u\, \partial v}, \qquad \ldots,$$

یا ، خلاصه‌تر ،

$$\mathbf{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \qquad \mathbf{r}_{vu} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u\, \partial v}, \qquad \ldots.$$

گوییم یک تابع از کلاس C_n است اگر همهٔ مشتقات جزئی آن تا مرتبهٔ n پیوسته باشند .

مشتقات جزئی یک تابع برداری چند متغیره در یک نقطه وجود دارند اگر و فقط اگر همهٔ مولفه‌های آن دارای مشتقات جزئی نظیر در این نقطه باشند . مولفه‌های مشتق جزئی مساوی مشتقات جزئی مولفه‌های نظیر از همان نوع هستند . مثلا" ، اگر تابع $\mathbf{r}(u, v)$ دارای مولفه‌های $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ باشد ،

$$\mathbf{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\}, \qquad \mathbf{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \{x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}\}, \qquad \mathbf{r}_{uv} = \{x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}\}, \qquad \mathbf{r}_{vv} = \{x_{vv}, y_{vv}, z_{vv}\},$$

$$\mathbf{r}_{uuu} = \{x_{uuu}, y_{uuu}, z_{uuu}\}.$$

مثل یک تابع اسکالر ، ***مشتقات جزئی مختلط از مرتبه‌ای معین ، اگر همه‌شان پیوسته باشند ، به‌ترتیب مشتقگیری بستگی ندارند .*** به‌عنوان نمونه ،

$\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$ ، $\mathbf{r}_{uvu} = \mathbf{r}_{vuu} = \mathbf{r}_{uuv}$ ، و غیره .

هرگاه متغیرهای u و v خود توابعی از متغیرهای t و s باشند ؛ یعنی ، $u = u(t, s)$ ، $v = v(t, s)$ ، و تابع برداری $\mathbf{r}(u, v)$ دیفرانسیل داشته باشد (درحالت خاص، تمام مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته باشند) ، و توابع $u(t, s)$ و $v(t, s)$ دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول باشند ، آنگاه تابع مرکب $\mathbf{r}(u(t, s), v(t, s))$ دارای مشتقات جزئی نسبت‌به t و s است و خواهیم داشت

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

فرمول تیلور برای توابع برداری چند متغیره نیز برقرار است . درحالتی که تابع از کلاس C_{n+1} و دو متغیره باشد ، داریم

$$\mathbf{r}(u_0 + h, v_0 + k) = \mathbf{r} + \frac{1}{1!}(h\mathbf{r}_u + k\mathbf{r}_v)$$

$$+ \frac{1}{2!}(h^2\mathbf{r}_{uu} + 2hk\mathbf{r}_{uv} + k^2\mathbf{r}_{vv}) + \cdots + \mathbf{R}_{n+1}, \qquad (۱۳۰۲)$$

در طرف راست ، شناسه‌های u_0, v_0 به صراحت قید نشده‌اند . باقیماندهٔ $\mathbf{R}_{n+1}$ به شکل

$$\sqrt{(h^2 + k^2)^{n+1}}\,\mathbf{U}_{n+1}$$

است ، که در آن تابع $\mathbf{U}_{n+1}(h, k)$ درحوالی نقطهٔ $h = 0, k = 0$ کراندار است .

تبصرهٔ ۱ . شکل لاگرانژ باقیمانده را نمی‌توان برای تابع برداری ، مثل حالت یک متغیره ، به‌کار برد .

تبصرهٔ ۲ . فرمول (۱۳۰۲) برای توابعی از کلاس C_n نیز برقرار است ، اما در این‌حالت، تنها چیزی که می‌توان در مورد باقیمانده گفت این است که باقیمانده به شکل

$\sqrt{(h^2 + k^2)^n}\,\mathbf{V}_{n+1}$ است ، که درآن $\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \mathbf{V}_{n+1} = 0$.

۶۰۲ مقایسهٔ توابعی که به صفر میل می‌کنند

در این بخش توابعی را درنظر می‌گیریم که وقتی شناسه‌هایشان به‌مقادیر معینی‌میل می‌کنند،

مثلا " $t \to t_0$ یا $(u, v) \to (u_0, v_0)$ ، تابعها به صفر میل می‌نمایند . این مقادیر در طول بحث ثابت هستند و صریحا " ذکر نخواهند شد . هدف مامقایسهٔ این است که توابع مختلف چگونه سریع به صفر میل می‌کنند . توابع مورد بحث می‌توانند اسکالر یا برداری و یک یا چند متغیره باشند . این توابع با حروف یونانی نشان داده خواهند شد .

می‌گوییم α **سریعتر** از β به صفر میل می‌کند یا که α از **مرتبهٔ بالاتر** از β است ، و با علامت می‌نویسیم

$$\alpha = o(\beta) \text{ ، درصورتی که } |\alpha|/|\beta| \to 0 .$$

علامت $o(\beta)$ نمایش یک تابع خاص نیست ، بلکه نشانگر هر تابع مانند α است که‌از مرتبهٔ بالاتر از β باشد . درنتیجه ، علامت تساوی در $\alpha = o(\beta)$ یعنی α متعلق به کلاس توابعی است که سریعتر از β به صفر میل می‌کنند . مثلا " ، " معادلات " $\alpha = o(\beta)$ و $\gamma = o(\beta)$ تساوی $\alpha = \gamma$ را ایجاب نمی‌کنند . لذا ، شخص باید دربرخورد بااین علایم جانب احتیاط را داشته باشد .

هرگاه نسبت $|\alpha|/|\beta|$ در همسایگی مقادیر حدی شناسه‌ها کراندار باشد ، می‌گوییم α دست کم به‌سرعت β به‌صفر میل‌می‌کند یاکه α از **مرتبهٔ پایین‌تر** از β نیست ، و می‌نویسیم

$$\alpha = O(\beta).$$

چنانچه $\alpha = O(\beta)$ و $\beta = O(\alpha)$ باهم برقرار باشند ، می‌گوییم α و β **ازیک‌مرتبه** می‌باشند.

همهٔ نکات قید شده در مورد علامت " تساوی " در $\alpha = o(\beta)$ را می‌توان در باب علامت $\alpha = O(\beta)$ تکرار کرد .

هرگاه $\alpha = o(\beta)$ ، نیز داریم $\alpha = O(\beta)$ ولی عکس‌آن در حالت کلی درست‌نیست.

به‌عنوان مثالی از موارد استعمال این‌نمادگذاری ، فرمول (۱۱۰۲) تیلور را وقتی $h \to 0$ [یا (۱۳۰۲) را وقتی $(h, k) \to (0, 0)$] در نظر می‌گیریم . با این فرض‌که تابع $\mathbf{f}$ ازکلاس C_{n+1} است ، داریم $\mathbf{R}_{n+1} = O(h^{n+1})$ [یا $\mathbf{R}_{n+1} = O(\sqrt{(h^2 + k^2)^{n+1}})$] زیرا نسبت $|\mathbf{R}_{n+1}|/|h|^{n+1} = |\mathbf{U}(h)|$ در همسایگی $h = 0$ کراندار است . البته ، این ایجاب می‌کند که $\mathbf{R}_{n+1} = o(h^n)$. درواقع $|\mathbf{R}_{n+1}|/|h|^n = |\mathbf{U}(h)|\,|h|$ ؛ درنتیجه $\lim |\mathbf{R}_{n+1}|/|h|^n = 0$. به‌همین‌نحو ، در (۱۱۰۲) داریم $\mathbf{R}_{n+1} = o(h^n)$.

با این‌فرض‌که $\mathbf{f}$ تابعی‌از کلاس C_n است ، فقط می‌توان ادعاکرد که $\mathbf{R}_{n+1} = o(h^n)$ [یا $\mathbf{R}_{n+1} = o(\sqrt{(h^2 + k^2)^n})$] ولی نه لزوما " $\mathbf{R}_{n+1} = O(h^{n+1})$.

با احتیاطهای لازم می‌توان چند عمل صوری روی علایم o و O انجام داد . مثلا " ، معادلهٔ صوری زیر را داریم

$$o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha).$$

معنی این فرمول آن است که مجموع هر دو **تابع از مرتبهٔ بالاتر از** α **خود تابعی از مرتبهٔ بالاتر از** α **است**، که براحتی می‌توان آن را تحقیق کرد. خواننده معنی فرمولهای زیر را برای خود توضیح داده آنها را اثبات نماید:

$$o(\alpha) + O(\alpha) = O(\alpha), \qquad O(\alpha) + O(\alpha) = O(\alpha),$$

$$o(\alpha)o(\beta) = o(\alpha\beta), \qquad o(\alpha)O(\beta) = o(\alpha\beta), \qquad O(\alpha)O(\beta) = O(\alpha\beta).$$

ما اغلب از چند تابع متعارف برای مقایسه استفاده می‌کنیم. به ازای $t \to t_0$ [یا (u_0, v_0) $[(u, v) \to$ اینها اغلب توانهای $\alpha_k = |t - t_0|^k$ [یا $\alpha_k = ((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2)^{k/2}$] هستند. در این حالت می‌گوییم α از مرتبهٔ **بالاتر** از k است اگر که $\alpha = o(\alpha_k)$؛ و α از مرتبهٔ **ناکمتر** از k است اگر که $\alpha = O(\alpha_k)$.

هرگاه α از مرتبهٔ α_k باشد، می‌گوییم α از مرتبه k می‌باشد.

امثله و تمرین

۱. ثابت کنید $\alpha = |u - u_0| + |v - v_0|$ از مرتبهٔ 1 است. در واقع،

$$\alpha^2 = |u - u_0|^2 + |v - v_0|^2 + 2|u_1 - u_0|\,|v - v_0| \geq (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2.$$

درنتیجه $\alpha \geq [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2]^{1/2} = \alpha_1$ و از اینجا $\alpha_1/\alpha \leq 1$ و $\alpha_1 = O(\alpha)$. از آن طرف، $|u - u_0| \leq \alpha_1$، $|v - v_0| \leq \alpha_1$، و $\alpha = |u - u_0| + |v - v_0| \leq 2\alpha_1$. بنابراین، $\alpha/\alpha_1 \leq 2$ و $\alpha = O(\alpha_1)$.

۲. ثابت کنید $\beta = \max(|u - u_0|, |v - v_0|)$ از مرتبهٔ 1 است.

۳. تابعی مثال بزنید که، وقتی $t \to 0$ به صفر میل کند و از مرتبهٔ بالاتر از هر توان t^n باشد.

۴. تابعی مثال بزنید که، وقتی $t \to 0$ به صفر میل کند و از مرتبهٔ کوچکتر از هر توان حقیقی مثبت t^α ($\alpha > 0$) باشد.

۵. تابعی مثال بزنید از مرتبهٔ بین t و t^2.

۷۰۲ دیفرانسیل یک تابع برداری

دیفرانسیل تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ از کلاس C_1 درنقطهٔ t_0 تابعی است از یک متغیر جدید، یعنی نمو h متغیر مستقل t به صورت زیر:

$$(d\mathbf{r})_{t_0} = \dot{\mathbf{r}}(t_0)h. \tag{۱۴۰۲}$$

وقتی آن را درنقطهٔ دلخواه t در نظر می‌گیریم، تابعی خواهد بود از دو متغیر t و h که برای سادگی خواهیم نوشت $d\mathbf{r}$.

تفاضل بین نمو $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)$ و دیفرانسیل $(d\mathbf{r})_{t_0}$ وقتی $h \to 0$، به صفر

میل می‌کند و از مرتبهٔ بالاتر از h است؛ یعنی،

$$\Delta \mathbf{r} - d\mathbf{r} = o(h).$$

چون دیفرانسیل تابع همانی t مساوی نمو t است، می‌توان نوشت

$$(d\mathbf{r})_{t_0} = \dot{\mathbf{r}}(t_0)\, dt. \qquad (۱۵٫۲)$$

فرمول (۱۵٫۲) درحالتی که t متغیر مستقل نبوده بلکه تابع مشتقپذیری چون $t = t(s)$ از متغیر دیگر s باشد نیز برقرار می‌ماند، مشروط براینکه dt به معنی دیفرانسیل تابع $t(s)$ گرفته شود. در واقع، برای ترکیب $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ داریم

$$(d\mathbf{r})_{s_0} = \frac{d}{ds}\mathbf{r}(t(s_0))\, ds = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t_0)\frac{d}{ds}t(s_0)\, ds = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t_0)(dt)_{s_0},$$

که درآن

$$(dt)_{s_0} = \frac{d}{ds}t(s_0)\, ds$$

دیفرانسیل تابع اسکالر $t(s)$ در s_0 بوده و $t_0 = t(s_0)$.

دیفرانسیل‌تابع $\mathbf{r}(u, v)$ از کلاس C_1 و از دو متغیرمستقل u و v در نقطهٔ (u_0, v_0) تابعی است از دو متغیر جدید، یعنی نموهای h و k از متغیرهای u و v:

$$(d\mathbf{r})_{u_0, v_0} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0)h + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)k. \qquad (۱۶٫۲)$$

با درنظر گرفتن این عبارت در نقطهٔ متغیر (u, v) تابعی از چهار متغیر u, v, h, k حاصل می‌شود، که دراین حالت دیفرانسیل آن را به‌طور ساده به صورت $d\mathbf{r}$ نشان‌می‌دهیم.

دیفرانسیل $(d\mathbf{r})_{u_0, v_0}$ یک تابع خطی از h و k است، که نمو تابع

$$(\Delta \mathbf{r})_{u_0, v_0} = \mathbf{r}(u_0 + h, v_0 + k) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

را تقریب می‌کند، به این ترتیب که

$$(\Delta \mathbf{r})_{u_0, v_0} - (d\mathbf{r})_{u_0, v_0} = o(\sqrt{h^2 + k^2}). \qquad (۱۷٫۲)$$

مثل قبل، دیفرانسیل (۱۶٫۲) را می‌توان به شکل

$$(d\mathbf{r})_{u_0, v_0} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\, du + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\, dv \qquad (۱۸٫۲)$$

نوشت، که درآن du و dv به ترتیب دیفرانسیلهای دو متغیر u و v اند. این فرمول حتی در حالتی که u, v متغیرهای مستقل نبوده بلکه توابعی از یک یا چند متغیر باشندنیز معتبر است؛ در این حالت، du و dv دیفرانسیلهای توابع اسکالر مربوطه خواهند بود.

استفاده از دیفرانسیلها به‌جای مشتقها این مزیت را دارد که به ما اجازهٔ نوشتن فرمولها را به‌شکلی می‌دهد که تحت‌تغییر مختصات پایا می‌باشند. مثلاً، وقتی‌متغیر جدید s را با قرار دادن $t = t(s)$ در $\mathbf{r}(t)$ معرفی می‌کنیم، برای مشتقها داریم

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}.$$

فرمول مربوط به دیفرانسیل $d\mathbf{r}$ در هر دو حالت یکی خواهد بود :

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt, \qquad d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}ds.$$

۲
نظریهٔ عمومی منحنیها

۳ نمایش پارامتری یک منحنی

۱.۳ قوس ساده

یک مجموعه از نقاط فضا که نقش پیوسته و یک به یک بازهٔ بسته‌ای مانند $[a, b]$ باشد یک **قوس ساده** نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر، یک قوس ساده مجموعهٔ نقاطی است که بردارهای موضعشان مقادیر یک تابع برداری پیوسته مانند $\mathbf{r}(t)$ اند که بر بازهٔ بسته‌ای چون $[a, b]$ تعریف شده است به‌طوری که به‌ازای مقادیر مختلف $t_1 \neq t_2$ از t، مقادیر متمایز $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ را به خود می‌گیرد.

نمودار تابع پیوستهٔ $y = f(x)$ تعریف شده در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ در صفحهٔ xy نمونه‌ای است از یک قوس ساده. در واقع، این نمودار متناظر است با تابع برداری $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j},\ a \leq t \leq b$. این تابع برداری پیوسته است، و $t_1 \neq t_2$ بوضوح ایجاب می‌کند که

$$\mathbf{r}(t_1) = t_1\mathbf{i} + f(t_1)\mathbf{j} \neq t_2\mathbf{i} + f(t_2)\mathbf{j} = \mathbf{r}(t_2).$$

همچنین، مجموعهٔ نقاطی از فضای سه‌بعدی که در هر دو معادلهٔ

$$y = f(x), \qquad z = g(x),$$

که در آنها $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوستهٔ تعریف شده بر $[a, b]$ اند، صدق کنند یک قوس ساده خواهد بود.

دایره یک قوس ساده نیست، زیرا هر نگاشت پیوسته از یک بازهٔ بسته بروی آن باید لااقل دو نقطهٔ متمایز بازه را به یک نقطه بنگارد؛ لذا، این نگاشت یک به یک نیست.

۲.۳ منحنیها و نمایش پارامتری آنها

یک نگاشت از بازهٔ (a, b) (یا $[a, b)$، $(a, b]$، و $[a, b]$ به انضمام حالتهای $a = -\infty$ یا $b = \infty$ یا هر دو) بتوی فضا را *موضعا* "یک به یک یا *موضعا* "*انژکتیو* گوییم هرگاه به ازای

هر نقطهٔ $t_0 \in (a,b)$ ، عدد مثبتی مانند δ باشد بهطوری که $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subset (a,b)$ و تحدید نگاشت مزبور به $[t_0-\delta,\ t_0+\delta]$ یک به یک (انژکتیو) باشد . در حالت بازهٔ بسته، یا نیم بسته، مثلاً "شامل a ، علاوهبراین لازم است δ ای باشد بهطوری که $[a, a+\delta] \subset [a,b]$ و تحدید نگاشت به $[a, a+\delta]$ یک به یک باشد ؛ اگر بازه شامل b باشد ، فرضی مشابه در مورد $[b-\delta, b]$ خواهد شد . به عبارت دیگر ، نقش $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ (همچنین $[a, a+\delta]$ و $[b-\delta, b]$) یک قوس ساده میباشد .

نقش یک بازه (باز ، بسته ، نیم بسته ، متناهی ، یا نامتناهی) تحت یک نگاشت پیوسته و موضعا " انژکتیو بتوی فضا را یک **منحنی** مینامیم . لذا ، اگر مبداء انتخاب شود ، یک منحنی مجموعهٔ نقاطی است که بردارهای موضعشان مقادیر یک تابع برداری پیوسته و موضعا " یک به یک است . بنابراین ، چنین منحنی با یک معادلهٔ پارامتری برداری مانند $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، یا با دستگاه معادل آن مرکب از سه معادلهٔ اسکالر $x = x(t)\ \ , y = y(t)\ \ , z = z(t)$ ، که مولفههای بردار موضع $\mathbf{r}(t)$ را بیان میکنند ، نمایش داده میشود . خود تابع $\mathbf{r}(t)$ ، یا سه تایی $x(t), y(t), z(t)$ از توابع ، **نمایش پارامتری** یا ، خلاصهتر ، **مسیر** یک منحنی نامیده میشود .

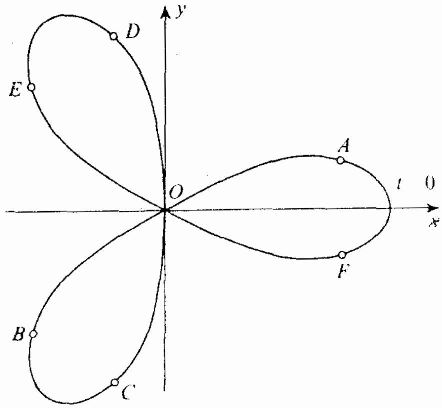
امثله و تمرین

۱ . **دایره** یک منحنی است . در واقع ، نمایش پارامتری آن ، مثلاً " ، تابع $\mathbf{r}(t) = a\mathbf{e}(t)$ است ، که در آن a شعاع دایره بوده و t در هر بازهٔ باز مانند (a,b) به طول بیش از 2π تغییر میکند . بهازای هر t_0 در چنین بازهای و δ ی به قدر کافی کوچک $(\delta < \min(\pi, t_0 - a, b - t_0))$ تحدید نگاشت مزبور به $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ انژکتیو ، و لذا ، نقش این بازه یک قوس ساده میباشد . با اینحال ، هر دو نقطهٔ $t, t+2\pi$ در صورت تعلق بهقلمرو تابع ، به یک نقطه از دایره نگاشته میشوند . وقتی t از 0 تا 2π تغییر میکند ، نقش تابع یکبار دایره را میپوشاند ، و هنگامی که t مجددا " از 2π تا 4π تغییر میکند ، این نقش دایره را برای دومین بار میپیماید ، الی آخر .

۲ . **برگ شبدر** (شکل ۳ . ۱) ، که با معادلات

$$x = \cos 3t \cos t, \qquad y = \cos 3t \sin t, \qquad z = 0 \qquad (0 \le t \le \pi)$$

تعریف میشود ، نیز یک منحنی است . در این حالت ، منحنی در نقطهٔ O خود قطعی دارد . اما این نقطه نظیر است به سه مقدار متمایز $t_1 = \frac{1}{6}\pi, t_2 = \frac{1}{2}\pi, t_3 = \frac{5}{6}\pi$ از پارامتر . نقش بازههای $[\frac{1}{12}\pi, \frac{3}{12}\pi], [\frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi], [\frac{9}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi]$ قوسهای سادهٔ AOB, COD, EOF هستند .



شکل ۱.۳

۳. معادلهٔ $\mathbf{r} = t\mathbf{a} + \mathbf{r}_0$ که درآن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{r}_0$ ثابت‌اندو $-\infty < t < \infty$ نمایش یک‌خط مستقیم ماربر نقطهٔ $[\mathbf{r}_0]$و موازی $\mathbf{a}$ است. چون این نگاشت بوضوح یک به یک است، خط مستقیم یک منحنی می‌باشد. نقش هربازهٔ بسته مانند $[a, b]$ یک پاره‌خط‌است؛لذا، یک قوس ساده می‌باشد.

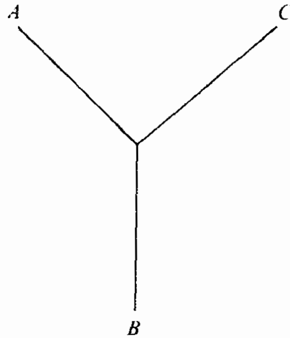
تبصره. گاهی یک منحنی را صرفا" نقش یک بازه تحت یک نگاشت پیوسته تعریف می‌کنند. این تعریف کلاس بسیار وسیعی از منحنیها را به‌وجود می‌آورد؛ بخصوص، منحنی پئانو[1] را، که درآنالیز ریاضی دیدیم که تمام مربع را می‌پوشاند. تعریف ما، که انژکتیو موضعی نگاشت را می‌طلبد، این پدیده‌ها را مستثنی می‌کند. منحنی پئانو طبق تعریف ما یک منحنی نیست.

بهرحال، تعریف ما شکلهایی مثل حرف Y را نیز از کلاس منحنیها خارج می کند (شکل ۲.۳). تحت هرنمایش پارامتری این مجموعه،لااقل یکی از نقاط‌انتهایی A, B, C، مثلا" A، باید نقش یک مقدار درونی t_0 از پارامتر باشد. در این صورت، نقطه‌ای که طبق این نمایش پارامتری حرکت‌می‌کند،پس از رسیدن به A باید در امتداد همان پاره‌خط OA که به A رسیده برگردد. بنابراین، نگاشت در همسایگی t_0 یک به یک نخواهد بود.

نکتهٔ مشهود ورای تعریف ما از منحنی این است که یک منحنی را می‌توان با یک حرکت بدون توقف و بازگشت درامتداد خطی‌که به‌نقطهٔ‌شروع ما منتهی می‌شود رسم نمود. برای آنکه شکلهایی نظیر شکل ۲.۳ منحنی باشند، باید شرط انژکتیو موضعی را،

1. Peano

مثلا" ، با شرط ضعیفتر قطعه قطعه موضعی عوض کرد ؛ یعنی ، فرض می‌کنیم بازهٔ (a, b) به تعدادی متناهی زیر بازه تقسیم شده و $\mathbf{r}(t)$ بر هر یک از آنها موضعا" انژکتیو باشد .



شکل ۲۰۳

۳۰۲ نمایشهای پارامتری هم‌ارز

دومسیر $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t),\ t \in (a, b)$ و $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(\tau), \tau \in (\alpha, \beta)$ درصورتی **هم‌ارز** نامیده می‌شوند که تابعی پیوسته و صعودی مانند $t = t(\tau)$ وجود داشته باشد که (α, β) را بروی (a, b) بنگاردبه‌طوری که ، به ازای هر τ ، $\mathbf{r}_1(t(\tau)) = \mathbf{r}_2(\tau)$.

دو نمایش پارامتری هم‌ارز نه تنها یک مجموعه را به‌عنوان نقش دارند بلکه در این مجموعه یک توالی از نقاط‌را نیز برقرار می‌کنند .

هرگاه یک‌تابع پیوسته و نزولی‌مانند $t(\tau)$ وجود داشته باشدکه (α, β) رابروی (a, b) بنگاردبه‌طوری‌که ، به ازای هر τ ، $\mathbf{r}_1(t(\tau)) = \mathbf{r}_2(\tau)$ ، آنگاه دونمایش پارامتری **قرینه** نامیده می‌شوند .

در این حالت ، دو مسیر یک مجموعه از نقاط‌را معین می‌کنند ولی ترتیب القا شده به نقاط به‌وسیلهٔ یک نمایش عکس ترتیب القا شده از دیگری می‌باشد .

یک مجموعه از نقاط‌را می‌توان به‌وسیلهٔ دو مسیر ناهم‌ارز و ناقرینه نیز نمایش داد . به‌عنوان مثال ، برگ شبدر در شکل (۱۰۳) دارای نمایش پارامتری دیگری با ترتیب نقاط به صورت $AODEOBCOFA$ می‌باشد ، حال آنکه ترتیب نقاط درنمایش پارامتری ملحوظ در بالا $AOBCODEOFA$ بود . واضح است که این دو مسیر نه هم‌ارز هستند نه قرینه . در این حالت ، تغییر پارامترها با یک تابع نایکنوا و نیز ناپیوسته (در این حالت خاص) صورت می‌گیرد .

نمایشهای پارامتری ابزار اصلی ما در بررسی منحنیها خواهند بود . با اینحال ، از

دیدگاه هندسی، دلیلی برای آنکه بین نمایشهای پارامتری هم‌ارزفرقی‌بگذاریم‌وجود ندارد. بنابراین، موضوع مطالعهٔ ما کلاس مسیرهای هم‌ارز است تا خود مسیرها.

هر کلاس از مسیرهای هم‌ارز یک منحنی *پارامتری* نامیده می‌شود. ما در این کتاب منحنیهای پارامتری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم نه منحنیها را به‌عنوان مجموعه‌هایی از نقاط. بنابراین، اصطلاح خلاصه‌تر **منحنی** را به‌جای منحنی پارامتری به کار خواهیم برد. به‌خاطراین امر که ابزارهای ما نیاز به استفاده از مسیرهای خاص دارند در حالی‌که هدف ما بررسی کلاسهای هم‌ارزی است، باید مسئلهٔ پایایی را در هر وضع سامان دهیم؛ یعنی، تحقیق کنیم که آیا نتایج حاصل به انتخاب خاص یک مسیر در یک کلاس از مسیرهای هم‌ارز بستگی دارد یا نه یا، به عبارت دیگر، آیا نتایج حاصل تحت یک تغییر یکنوای پارامتری سازی حفظ خواهد شد یا نه.

۴.۳ منحنیهای پارامتری منتظم

یک منحنی پارامتری را *منتظم از کلاس* C_n گوییم هرگاه بین نمایشهای پارامتری‌اش نمایشی مانند $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in (a, b)$ وجود داشته باشدبه‌طوری‌که $\mathbf{r}(t)$ تابعی از کلاس C_n بوده و، به‌ازای هر t، $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$.

البته، یک منحنی منتظم از کلاس C_n منتظم از هر کلاس پایین‌تر C_k $(k < n)$ نیز هست.

یک منحنی را *قطعه‌قطعه منتظم* از کلاس C_n گوییم هرگاه بین نمایشهای پارامتری اش نمایشی مانند $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in (a, b)$ وجود داشته باشدبه‌طوری‌که بازهٔ (a, b) را بتوان با نقاط $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ چنان تقسیم کرد که تحدید $\mathbf{r}(t)$ به هر بازهٔ جزئی (t_k, t_{k+1}) از کلاس C_n بوده و در شرط $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$ صدق نماید. نقاطی که مشتق n م ممکن است درآنها پیوسته نباشد یا وجود نداشته باشد یا که $\dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ فقط نقاط $t_1, \ldots, t_{n-1}$ است. نقاطی چون t که در آنها $\dot{\mathbf{r}}(t)$ وجود ندارد یا $\dot{\mathbf{r}}(t) = 0$، *نقاط منفرد* مسیر $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ نامیده می‌شوند. چنین انفرادی ممکن است خاصیت یک مسیر خاص باشد، اما این نیز محتمل است که تمام مسیرهای‌هم‌ارز به‌ازای مقادیری از پارامتر انفراد داشته باشند. در این حالت، انفراد یک خاصیت منحنی پارامتری است نه یک خاصیت نمایش پارامتری خاص. در این صورت، انفراد را *انفراد اساسی* منحنی می‌نامیم.

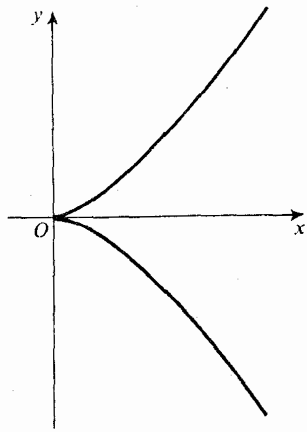
امثله و تمرین

۱. دو نمایش پارامتری یک خط مستقیم به صورتهای

$$\mathbf{r} = \tau^3\mathbf{a} \quad (-\infty < \tau < \infty), \qquad \mathbf{r} = t\mathbf{a} \quad (-\infty < t < \infty)$$

هم ارز هستند $(t = \tau^3)$. نقطهٔ $\tau = 0$ یک نقطهٔ منفرد نمایش پارامتری اول است $((d\mathbf{r}/d\tau)_{\tau=0} = 0)$ حال آنکه نقطهٔ نظیر $(t = 0)$ در نمایش دوم نامنفرد است $(d\mathbf{r}/dt = \mathbf{a} \neq 0)$. این یک نمونه از انفراد غیر اساسی است.

۲. **سهمی نیمه مکعبی** $x = t^2, y = t^3, z = 0 (-\infty < t < \infty)$ دارای انفراد اساسی $(0,0,0)$ نظیر به مقدار $t = 0$ از پارامتر است. در این حالت، هر نمایش پارامتری هم ارز در مقدار نظیر از پارامتر انفراد دارد، و این را می‌توان بی‌اشکال از نتایج بخش بعد نتیجه گرفت. این نوع انفراد یک **بازگشت** نامیده می‌شود (شکل ۳۰۳).



شکل ۳۰۳

۳. **مارپیچ**. هر منحنی که مسیر یک نقطهٔ متحرک با سرعت ثابت در امتداد مولد یک استوانه باشد در حالی که استوانه حول محورش با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد یک **مارپیچ** نامیده می‌شود. دستگاه مختصات را در فضا طوری اختیار می‌کنیم که محور استوانه محور z باشد، و جهت این محور را همان جهت حرکت نقطه در امتداد مولد استوانه می‌گیریم. فرض کنیم محور x از موضع اولیهٔ نقطهٔ متحرک بگذرد. در این صورت، معادلهٔ حرکت خواهد بود:

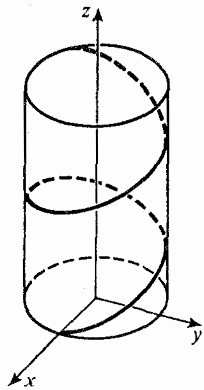
$$x = a\cos\omega t, \qquad y = a\sin\omega t, \qquad z = vt,$$

که در آن a شعاع استوانه، ω سرعت زاویه‌ای، و v سرعت نسبی حرکت در امتداد مولد است. این مسیر با

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = kt \qquad (k = v/\omega)$$

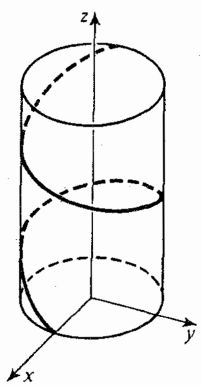
هم‌ارز است.

مارپیچ را **راست‌گرد** نامیم (شکل ۴.۳)اگر درنمایش نسبی آن دریک‌دستگاه مختصات



شکل ۴.۳

راست دست داشته باشیم $k > 0$. اگر در همان دستگاه مختصات $k < 0$، مارپیچ را **چپ گرد** خواهیم گفت (شکل۵.۳) .



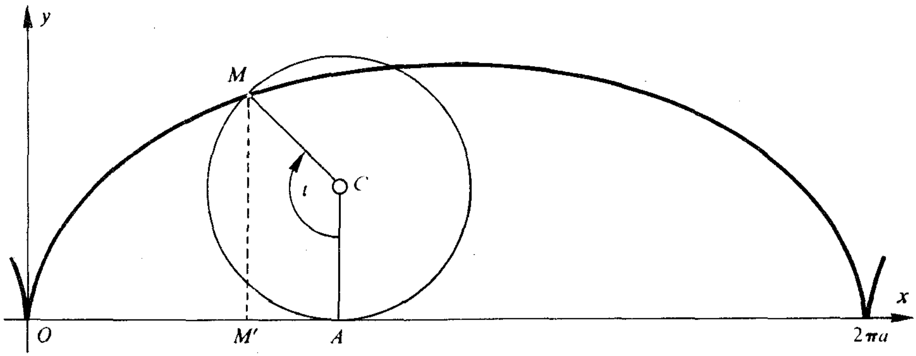
شکل ۵.۳

مارپیچ یک منحنی پارامتری تحلیلی منتظم است ، زیرا در نمایشی که برای آن یافتیم از توابع تحلیلی یک پارامتر حقیقی استفاده شده است ، و $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$.

۴. **چرخزاد** . چرخزاد منحنی مسطحی است که مسیر یک‌نقطه از دایره‌ای است که درامتداد یک خط بدون لغزش می‌غلطد . برای یافتن نمایش پارامتری چرخزاد ، این خط را محور x می‌گیریم و مبداء مختصات را در نقطهٔ تماس محور با نقطهٔ مورد نظر قرار می‌دهیم . همچنین ، فرض‌می‌کنیم این موضع نظیرمقدار 0 از پارامتر باشد . پارامترخودش زاویه‌ای است که دایره به‌اندازهٔ آن از موضع اصلی‌اش چرخیده است (شکل ۶.۳) .

فرض کنیم C مرکز دایره بوده، و M نقطهٔ متحرکی باشد که چرخزاد را رسم می‌کند. تصویر مرکز دایره را دروضعی که دایره به‌اندازهٔ زاویهٔ t چرخیده با A نشان می‌دهیم. دراین صورت، پاره‌خط OA برابر با قوس AM است؛ درنتیجه، $OA = at$ ، که درآن a شعاع دایره است. بردار $\overrightarrow{CM}$ با محور x زاویه‌ای به‌اندازهٔ $-\frac{1}{2}\pi - t$ می‌سازد. بنابراین، تصاویر بردار $\overrightarrow{CM}$ روی محور عبارتنداز

$$a\cos(-\tfrac{1}{2}\pi - t) = -a\sin t \quad , \quad a\sin(-\tfrac{1}{2}\pi - t) = -a\cos t.$$



شکل ۳.۶

بردار موضع M عبارت است از

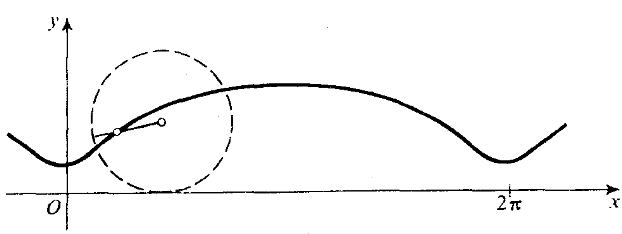
$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}.$$

تصویر آن روی محورهای مختصات معادلات پارامتری

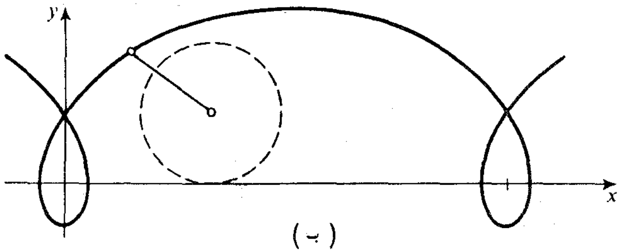
$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

را به دست می‌دهد. یک چرخش کامل دایره متناظر است با تغییر پارامتر از 0 تا 2π . با این کار یک قوس از چرخزاد حاصل می‌شود. بقیهٔ منحنی از قوسهای همنهشتی تشکیل شده که با انتقال آن قوس در امتداد محور x و به اندازهٔ مضربی از $2\pi a$ به دست می‌آیند.

نشان دهید نقاط $t = 2\pi n$ ، که n عدد صحیح دلخواهی است، نقاط منفرد اساسی منحنی‌اند.



(آ)



(ب)

شکل ۷۰۳

۵۰۳ طول قوس یک منحنی . پارامتری سازی طبیعی

طول مسیر $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود .

بازهٔ $[a, b]$ را به‌وسیلهٔ نقاط تقسیم $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$ به تعدادی متناهی بازهٔ مجزا تقسیم می‌کنیم ، و سپس مجموع طول قطعات مربوط به هر جفت نقاط نظیر به دو مقدار متوالی t_i و t_{i+1} از پارامتر در این تقسیم ، یعنی

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})|,$$

را تشکیل می‌دهیم . کوچکترین کران بالایی (l.u.b) این مجموعها به ازای تمام تقسیمها ، **طول قوس** یا ، خلاصه‌تر ، **طول مسیر** نامیده می‌شود . چنانچه این l.u.b متناهی باشد، مسیر **باطول متناهی** در $[a, b]$ نامیده می‌شود .

درحالت خاصی که مسیر $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ قطعه‌قطعه از کلاس C_1 است ، می‌توان از حساب انتگرال استفاده‌کرده قضیهٔ زیر را به دست آورد که برهانش درهر کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال یافت می‌شود .

قضیهٔ ۱ . نمایش پارامتری قطعه‌قطعه منتظم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$ با طول متناهی بوده و طولش برابر است با

$$l = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt. \qquad (۱۰۳)$$

یا ، برحسب مختصات ،

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

از این نتیجهٔ زیر به دست می‌آید :

نتیجهٔ ۱ . طول مسیرهای قطعه‌قطعه متنظم هم‌ارز باهم‌مساوی‌اند .

برهان. نمایشهای پارامتری هم‌ارز، از مسیر معلوم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ a \leq t \leq b$ با گذاردن $t = t(\tau)$ در آن، که $t(\tau)$ یک تابع صعودی از پارامتر جدید τ است، حاصل‌می‌شوند. از اینرو، مسیر هم‌ارز به شکل $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(\tau)),\ \alpha \leq \tau \leq \beta$ است، که درآن $t(\alpha) = a,\ t(\beta) = b$. اگر هردو نمایش قطعه‌قطعه منتظم از کلاس C_1 باشند، تابع $t(\tau)$ قطعه‌قطعه مشتقپذیر است‌و، احتمالا" جز در نقاط منفرد هر نمایش، داریم

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}.$$

درنتیجه، چون $dt/d\tau \geq 0$ ،

$$\int_\alpha^\beta \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right| d\tau = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\frac{dt}{d\tau}\, d\tau = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt.$$

به‌عنوان نتیجه‌ای از این، می‌توان از طول یک منحنی پارامتری بدون توسل بـه یک نمایش خاص سخن گفت .

نتیجهٔ ۲ . طول یک‌منحنی پارامتری به انتخاب دستگاه مختصات بستگی ندارد .

برهان. پایایی تحت دوران دستگاه مختصات حول مبداء از شکل برداری (۱۰۳) نتیجه می‌شود، زیرا قدر مطلق هر بردار تحت دوران پایا است . اگر مبداء را تغییر دهیم ،نمایش پارامتری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ به $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}_0$ تغییر می‌یابد، که در آن $\mathbf{r}_0$ یک‌بردارثابت است . درنتیجه، $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}}$.

بطورکلی، می‌توان ادعا کرد که هر فرمول برداری شامل مشتقات بردار موضع فقط تحت تغییر مبداء دستگاه مختصات پایاست .

اگر یک نمایش پارامتری قطعه‌قطعه منتظم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ از کلاس C_1 یا بالاتر داده شده باشد، می‌توان پارامتر جدید s را با فرمول

$$s = \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathbf{r}}(u)|\, du \qquad (۲۰۳)$$

معرفی کرد . چون این یک تابع صعودی است$(|\dot{\mathbf{r}}(u)| > 0$ جز حداکثر در تعدادی متناهـی

نقطه) ، تابع معکوس $t = t(s)$ نیز صعودی و قطعه قطعه ازکلاس C_1 است . با استفاده از این تابع ، یک نمایش پارامتری هم‌ارز ، یعنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)),$$

به دست خواهد آمد .

پارامتر s **پارامتر طبیعی** یا **پارامتر قوس** نام دارد .هرگاه $t \in [a, b]$، آنگاه $s \in [\alpha, \beta]$ ، که درآن α طول منفی قسمتی از منحنی نظیر به مقادیری از t بین a و t_0 بوده و β طول قسمتی از منحنی بین نقطهٔ نظیر به $t = t_0$ و نقطهٔ نظیر به $t = b$ است . مقدار s از پارامتر طبیعی خود طول قوس (طول منفی درحالت $s < 0$) قسمتی از منحنی بین نقطهٔ نظیر به $t = t_0$ یا $s = 0$ (مبداء پارامتری سازی طبیعی) ، و نقطهٔ نظیر به این مقدار s از پارامتر طبیعی است . پارامتری سازی طبیعی به انتخاب مبداء t_0 بستگی دارد . تغییر مبداء به t_1 موجب تغییر پارامتر طبیعی می‌شود .

پارامتر جدید s' و پارامتر قدیم s با فرمول

$$s = s + c$$

بهم مربوط می‌شوند ، که در آن c ثابتی است (مثبت اگر $t_1 < t_0$ و ، منفی ، اگر $t_1 > t_0$) برابر با طول قسمتی از منحنی بین دو مبداء ؛ یعنی ،

$$c = \int_{t_1}^{t_0} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt.$$

در غیر این صورت ، پارامتری سازی طبیعی از انتخاب نمایش خاص یک منحنی پارامتری مفروض مستقل است . این خاصیت پارامتری سازی طبیعی را ، لااقل در بررسیهای نظـری ، مناسبترین وسیله برای پرداختن به منحنیهای پارامتری می‌سازد ، زیرا مسئله پایایی تحت تغییرات پارامتری سازی را می‌توان در اینجا به تغییر سادهٔ $s' = s + c$ تقلیل داد .

درآینده از پارامتری سازی طبیعی خیلی استفاده خواهیم کرد . برای ساده کردن نمادگذاری ، نمادهای $\mathbf{r}'$ ، $\mathbf{r}''$ ، و غیره را به مشتقات نسبت به پارامتر طبیعی اختصاص می‌دهیم . چون تغییر پارامترهای طبیعی عبارت است از جمع با یک ثابت ،این مشتق برای تمام پارامتری سازیهای طبیعی هم‌ارز یکی است . درحالت کلی ، ما از نمادهای $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ یا $d\mathbf{r}/dt, d^2\mathbf{r}/dt^2$ و غیره استفاده خواهیم کرد .

قضیهٔ ۲ . هرگاه P نقطهٔ نامنفرد یک‌نمایش قطعه‌قطعه‌منتظم ازکلاس C_n یک منحنی‌پارامتری $\mathscr{K}$ باشد ،یک نقطهٔ منتظم نمایش طبیعی $\mathscr{K}$ نیز هست ، و این نمایش نیز قطعه‌قطعه ازکلاس C_n است .

برهان. فرض کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ نمایش اصلی $\mathscr{K}$ باشد ، و قرار می‌دهیم $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t_0)$. چون جایگذاری $t = \tau + t_0$ انتظام نقاط‌را تغییر نمی‌دهد ، می‌توان بی‌آنکه خللی بـه کلیت وارد شود فرض کرد $t_0 = 0$. لذا ، فرض می‌کنیم P نظیر به مقدار 0 از پارامتر t باشد.

با معرفی پارامتر طبیعی

$$s = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(u)|\, du,$$

وبه‌خاطرپیوستگی $\dot{\mathbf{r}}(u)$ در $u = 0$ ، داریم

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = |\dot{\mathbf{r}}(0)|.$$

چون نقطه منتظم است ، این مشتق ناصفر بوده و

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(0)|}.$$

بنابراین ، مشتق

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

وجود داشته و در $s = 0$ مخالف صفر است.

بعلاوه ، این امر که $|\dot{\mathbf{r}}(0)| \neq 0$ و پیوستگی مشتقات $\ddot{\mathbf{r}}, \ldots, \overset{(n)}{\mathbf{r}}$ در $t = 0$ وجود و پیوستگی مشتقات

$$\frac{d^2 t}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n t}{ds^n}$$

را ایجاب می‌کند که این ، به نوبهٔ خود ، پیوستگی مشتقات $\mathbf{r}', \ldots, \mathbf{r}^{(n)}$ را نسبت‌به‌پارامتر طبیعی در نقطهٔ $s = 0$ ایجاب خواهد کرد.

چون این امر برای هر نقطهٔ منتظم یک نمایش درست است ، لذا نمایش طبیعی قطعه قطعه از کلاس C_n خواهدبود احتمالا" بانقاط منفردی در نقاط منفردنمایش اصلی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

قضیهٔ اخیر نشان می‌دهد که *نمایش طبیعی دارای نقطهٔ منفرد P است اگر و فقط اگر این نقطه برای هر نمایش هم‌ارز منفرد باشد*. بنابراین ، نقاط منفرد پارامتری‌سازی طبیعی برنقاط منفرد اساسی منحنی پارامتری منطبق می‌شوند.

قضیهٔ ۳. *مشتق بردار موضع یک نقطه از منحنی نسبت به پارامتر طبیعی ، در صورت‌وجود ،*

یک برداریکه‌است. در نقاط منفرد اساسی یک منحنی پارامتری، این مشتق وجود نخواهد داشت.

برهان. در واقع، از (۲۰۳) نتیجه می‌شود که، در نقاط منتظم نمایش $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$،

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|. \qquad (۳۰۳)$$

لذا،

$$|\mathbf{r}'(t)| = |\dot{\mathbf{r}}(t)|\frac{dt}{ds} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = 1. \qquad (۴۰۳)$$

بنابراین، در مورد پارامتری سازی طبیعی نمی‌توان داشت $\mathbf{r}' = 0$؛ و لذا، مشتق $\mathbf{r}'$ در یک نقطهٔ منفرد اساسی وجود نخواهد داشت.

امثله و تمرین

۱. طول قسمتی از مارپیچ

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = bt$$

واقع بین نقاط نظیر به مقادیر 0 و t از پارامتر را پیدا کنید.

داریم

$$\dot{x} = -a\sin t, \qquad \dot{y} = a\cos t, \qquad \dot{z} = b,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2,$$

که از اینجا

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\, t.$$

بنابراین،

$$s = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$$

یکی از پارامترهای طبیعی بوده و نمایش طبیعی زیر را خواهیم داشت:

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}s.$$

۲. طول یک قوس از چرخزاد را که $0 \le t \le 2\pi$ پیدا کنید. طول بین نقاط نظیر به مقادیر 0 و t از پارامتر را بیابید. با استفاده از نتیجهٔ آخر، نمایش طبیعی چرخزاد را بنویسید.

۳. با استفاده از نمایش طبیعی، ثابت کنید نقاط تماس چرخزاد با محورش نقاط منفرد اساسی

هستند .

۴ . ثابت کنید نقطهٔ $t = 0$ یک انفراد اساسی منحنی $x = t^2, y = t$ است .

تبصرهٔ ۱ . در مثالهای ۱و۲ فوق می‌توانستیم پارامتر طبیعی را با استفاده از توابع مقدماتی برحسب پارامتری سازی داده شده بیان کنیم . لیکن ، درحالت کلی ، محاسبهٔ طول یک منحنی به‌انتگرالهایی ختم می‌شود که نمی‌توان آنها را به‌صورت توابع مقدماتی نمایش داد. ساده‌ترین مثال بیضی است که با نمایش پارامتری معروف

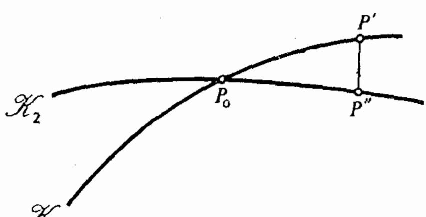
$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad a \neq b$$

نموده شده‌است . این دلیل خوبی است از اینکه در نظریهٔ منحنیها نباید فقط به پارامتری سازیهای طبیعی محدود شویم .

۴ . تماس منحنیها و یک منحنی با یک سطح

۱ . ۴ تماس منحنیها

دو منحنی پارامتری $\mathscr{K}_1$ و $\mathscr{K}_2$ با نقطهٔ مشترک P_0 را درنظر می‌گیریم (شکل ۱ . ۴) . فرض کنیم P' نقطه‌ای از $\mathscr{K}_1$ و P'' نقطه‌ای از $\mathscr{K}_2$ باشد به‌طوری‌که تفاضل مقادیرپارامترهای طبیعی P' و P_0 بر $\mathscr{K}_1$ ، و تفاضل مقادیرپارامترهای طبیعی P'' و P_0 بر $\mathscr{K}_2$ ،هردو مساوی h باشند.این یعنی قوسهای P_0P' و P_0P'' دارای‌طول $|h|$ اند و P' و P'' هر دو نسبت‌به P_0 در جهت‌افزایش پارامتر برمنحنیهای نظیر واقعند اگر $h > 0$ ،یا درجهت کاهش‌پارامتر قرار دارند اگر $h < 0$.



شکل ۱ . ۴

می‌گوییم دو منحنی دارای *تماس از مرتبهٔ* n اند اگر $\overrightarrow{P'P''} = o(h^n)$ ولی ، وقتی $h \to 0$ (یا $P', P'' \to P_0$) ، $\overrightarrow{P'P''} \neq o(h^{n+1})$.

قضیه . *دومنحنی پارامتری $\mathscr{K}_1$ و $\mathscr{K}_2$ منتظم از کلاس C_{n+1} دارای تماس از مرتبهٔ n در نقطهٔ نامنفرد P_0 اند اگر و فقط اگر ، برای نمایشهای طبیعی $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s), \mathbf{r} = \mathbf{r}_2(\sigma)$ آنها ، روابط زیر در P_0 برقرار باشند :*

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2, \ldots, \mathbf{r}_1^{(n)} = \mathbf{r}_2^{(n)}, \quad \mathbf{r}_1^{(n+1)} \neq \mathbf{r}_2^{(n+1)}.$$

برهان. فرض کنیم نقطهٔ P_0 به ترتیب نظیر به مقادیر s_0 و σ_0 از پارامترهای طبیعی s و σ از $\mathscr{K}_1$ و $\mathscr{K}_2$ باشد.

در این صورت، بردارهای موضع P' و P'' عبارتند از $\overrightarrow{OP'} = \mathbf{r}_1(s_0 + h)$ و $\overrightarrow{OP''} = \mathbf{r}_2(\sigma_0 + h)$، که از اینجا

$$\overrightarrow{P''P'} = \mathbf{r}_1(s_0 + h) - \mathbf{r}_2(\sigma_0 + h) = \mathbf{r}_1(s_0) - \mathbf{r}_2(\sigma_0) + \frac{h}{1!}[\mathbf{r}'_1(s_0) - \mathbf{r}'_2(\sigma_0)] + \cdots$$
$$+ \frac{h^n}{n!}[\mathbf{r}_1^{(n)}(s_0) - \mathbf{r}_2^{(n)}(\sigma_0)] + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[\mathbf{r}_1^{(n+1)}(s_0) - \mathbf{r}_2^{(n+1)}(\sigma_0)] + o(h^{n+1}).$$

البته، داریم $\mathbf{r}_1(s_0) = \mathbf{r}_2(\sigma_0)$ زیرا این بردار موضع نقطهٔ مشترک P_0 دو منحنی است. برای آنکه $\overrightarrow{P''P'} = o(h^n)$ ولی نه $\overrightarrow{P''P'} = o(h^{n+1})$، این مجموع باید با جملهٔ

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[\mathbf{r}_1^{(n+1)}(s_0) - \mathbf{r}_2^{(n+1)}(\sigma_0)]$$

شروع شود. بنابراین، شرط لازم و کافی عبارت است از

$$\mathbf{r}'_1(s_0) = \mathbf{r}'_2(\sigma_0), \ldots, \mathbf{r}_1^{(n)}(s_0) = \mathbf{r}_2^{(n)}(\sigma_0), \mathbf{r}_1^{(n+1)}(s_0) \neq \mathbf{r}_2^{(n+1)}(\sigma_0),$$

که برهان را تمام می‌کند.

توجه کنید که، از دیدگاه ما، یک منحنی پارامتری و قرینه‌اش، با اینکه مجموعه های نظیر از نقاط آنها برهم منطبق اند، باهم تماس ندارند. برای آنکه دو منحنی پارامتری تماس داشته‌باشند، تماس مجموعه‌های نظیر در یک نقطه کافی نیست بلکه باید جهت منحنیها که به‌وسیلهٔ پارامتری سازیها در نقطهٔ تماس معین می‌شود نیز یکی باشد. اگرما به تماس دو منحنی $\mathscr{K}_1$ و $\mathscr{K}_2$ به عنوان مجموعه‌هایی از نقاط علاقه‌مند باشیم، می‌توانیم آن‌را تماس $\mathscr{K}_1$ و $\mathscr{K}_2$ یا تماس $\mathscr{K}_1$ و قرینهٔ $\mathscr{K}_2$ تعریف کنیم.

تمرین

ثابت کنید دو منحنی مسطح به معادلات

$$y = f_1(x), \qquad y = f_2(x)$$

از کلاس C_{n+1} دارای تماس از مرتبهٔ n در نقطهٔ x_0 اند اگر و فقط اگر

$$f_1(x_0) = f_2(x_0), \qquad \frac{df_1(x_0)}{dx} = \frac{df_2(x_0)}{dx},$$

$$\frac{d^nf_1(x_0)}{dx^n} = \frac{d^nf_2(x_0)}{dx^n}, \qquad \frac{d^{n+1}f_1(x_0)}{dx^{n+1}} \neq \frac{d^{n+1}f_2(x_0)}{dx^{n+1}}.$$

راهنمایی. توجه کنید که فرمول برای $d^k\mathbf{r}_i/ds^k$ در نقطهٔ $x = x_0$ شامل مشتقات f_i نسبت به x فقط تا مرتبهٔ k است.

۲.۴ مماس بریک منحنی پارامتری

مماس برمنحنی $\mathscr{K}$ در نقطهٔ P خط مستقیمی است که با منحنی در نقطهٔ P تماس ازمرتبهٔ لااقل 1 دارد.

قضیه. *یک منحنی پارامتری از کلاس C_1 در هر نقطهٔ منتظم مماس داشته و بردار $\mathbf{r}'$ برداریکهٔ این خط می‌باشد.*

برهان. فرض کنیم نمایش پارامتری طبیعی منحنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

بوده و نقطهٔ P نظیر به مقدار s_0 از پارامتر باشد. معادلهٔ پارامتری خط مار بر P به‌شکل

$$\mathbf{R} = \sigma\mathbf{a} + \mathbf{r}(s_0)$$

است، که در آن $\mathbf{a}$ برداریکهٔ خط و σ پارامتر طبیعی آن می‌باشد.

طبق قضیهٔ بخش قبل، هرخط دارای تماس از مرتبهٔ اول است اگر و فقط اگر $\mathbf{r}'(s_0) = \mathbf{a}$. بنابراین، $\mathbf{r}'(s_0)$ بردار یکهٔ هادی خط می‌باشد.

معادلهٔ پارامتری مماس عبارت است از

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s_0) + \mathbf{r}'(s_0)u, \tag{۱.۴}$$

که در آن u پارامتر طبیعی است. این معادله را می‌توان به شکل

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s_0)) \times \mathbf{r}'(s_0) = 0$$

نیز نمایش داد.

یک منحنی می‌تواند تماسی از مرتبهٔ بالاتر با مماس داشته باشد و این درصورتی است که از کلاس C_n بوده و مشتقات $\mathbf{r}''(s_0), \ldots, \mathbf{r}^{(k)}(s_0)$ مساوی صفر باشند. در این صورت، ***تماس از مرتبهٔ اولین مشتق ناصفر یکی کمتر است.***

نقطهٔ P_0 که در آن مماس دارای تماس از مرتبهٔ بالاتر است یک نقطهٔ *اصلاح* منحنی نامیده می‌شود .

اگر یک‌منحنی با پارامتری سازی‌کلی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ داده شده باشد ، $d\mathbf{r}/dt$ نیز بردار مماس است اما لزوما" بردار یکه نیست ، و معادلهٔ‌پارامتری مماس عبارت است از

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)u, \tag{۲.۴}$$

که در آن u یک پارامتر است که، عموما" ، پارامتر طبیعی نیست . معادلهٔ (۲.۴)معادل است با

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)) \times \dot{\mathbf{r}}(t_0) = 0.$$

اگر معادلهٔ پارامتری منحنی با مختصات داده شده باشد ، یعنی

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

معادلهٔ مماس در t_0 خواهد بود :

$$X = x(t_0) + u\dot{x}(t_0), \quad Y = y(t_0) + u\dot{y}(t_0), \quad Z = z(t_0) + u\dot{z}(t_0) \tag{۳.۴}$$

یا

$$\frac{X - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)} \tag{۴.۴}$$

بردار $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ یا $\mathbf{r}'(s_0)$ فقط راستای مماس را معین نمی‌کند بلکه به‌آن جهتی‌نیز می‌دهد که در آن جهت پارامتر افزایش می‌یابد . هر تغییر در نمایش پارامتری قرینه (با قرار دادن یک تابع نزولی از پارامتر) جهت $\mathbf{r}'(s_0)$ را به جهت مخالف تغییر می‌دهد . لذا ، منحنی پارامتری قرینه دارای همان خط مماس در نقطهٔ داده شده است منتها با جهت متفاوت .

هرگاه P_0 یک نقطهٔ منتظم یک‌مسیر از کلاس C_1 باشد ،خطی‌که P_0 را بـه نقطهٔ متغیر P از مسیر وصل می‌کند به مماس در P ، وقتی P به P_0 میل می‌کند ، میل خواهد کرد .

در واقع ، خط‌واصل بین نقاط P_0 و P نظیر به مقادیر t_0 و t از پارامتر t مسیر دارای معادلهٔ پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{u}{t - t_0}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0))$$

است ، که در آن u پارامتر خط می‌باشد . این عبارت ، وقتی $t \to t_0$ ، معادلهٔ (۲.۴) مماس را حاصل می‌کند .

★ هرگاه P_0 نقطهٔ منفرد یک نمایش پارامتری باشد به این صورت که ، به ازای مقدار t_0 نظیر از پارامتر ، $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = 0$ ولی مشتقات مراتب بالاتر در t_0 وجود داشته و همهٔ‌آنها‌صفر

نباشند، آنگاه راستای خط مماس به‌وسیلهٔ مشتق ناصفر از پایین‌ترین مرتبه در این نقطه معین خواهد شد.

هرگاه این پایین‌ترین مرتبه عددی زوج باشد، آنگاه

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \cdots = \overset{(2k-1)}{\mathbf{r}}(t_0) = 0,$$

$$\mathbf{r}(t_0 + h) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{(2k)!}\overset{(2k)}{\mathbf{r}}(t_0)h^{2k} + o(h^{2k}),$$

و انحراف نقطهٔ P نظیر به مقدار $t_0 + h$ از صفحهٔ مار بر P_0 و عمود بر $\overset{(2k)}{\mathbf{r}}(t_0)$ به ازای h به‌قدر کافی کوچک، به‌یک‌نیم فضا به‌ازای مقادیر مثبت و منفی h اشاره دارد. بنابراین، نقطهٔ P_0 یک **بازگشت** می‌باشد. خط مستقیم با بردار هادی $\overset{(2k)}{\mathbf{r}}(t_0)$ برهر دو شاخهٔ منحنی در P_0 مماس است. اگر پارامتری سازی را به وضع طبیعی درآوریم، هیچ مشتقی در P_0 نسبت به پارامتر طبیعی وجود ندارد.

از آن طرف، هرگاه پایین‌ترین مرتبهٔ یک مشتق ناصفر در t_0 فرد باشد، آنگاه نقطهٔ P در پارامتری‌سازی طبیعی یک نقطهٔ منتظم خواهد شد. در واقع، هرگاه

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \cdots = \overset{(2k)}{\mathbf{r}}(t_0) = 0, \qquad \overset{(k+1)}{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0,$$

آنگاه

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{(2k+1)!}\overset{(2k+1)}{\mathbf{r}}(t_0)(t - t_0)^{2k+1} + o((t - t_0)^{2k+1}).$$

جایگذاری $(t - t_0)^{2k+1} = \tau$ نمایش پارامتری جدید $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(\tau)$ را حاصل می‌کند، که در آن P نظیر به مقدار $\tau = 0$ از پارامتر τ بوده، و

$$\dot{\mathbf{r}}^*(0) = \frac{1}{(2k+1)!}\overset{(2k+1)}{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0,$$

زیرا، طبق فرمول تیلور،

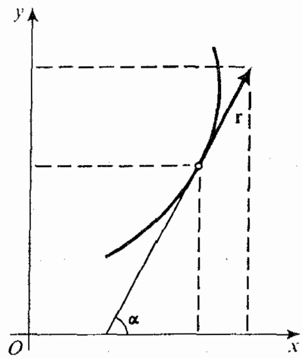
$$\mathbf{r}^*(\tau) = \frac{\tau}{(2k+1)!}\overset{(2k+1)}{\mathbf{r}}(t_0) + o(\tau). \quad \bigstar$$

نقاط اصلاح را می‌توان بدون معرفی‌صریح پارامتری سازی‌طبیعی نیز شناخت. خاصیت نظیر به‌اینکه $\mathbf{r}'', \mathbf{r}''', \ldots, \mathbf{r}^{(k)}$ در s_0 صفرند این است که مشتقات $\ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}, \ldots, \overset{(k)}{\mathbf{r}}$ با $\dot{\mathbf{r}}$ همخط هستند. این مطلب را ثابت کنید.

در مورد یک منحنی مسطح، بردار $\dot{\mathbf{r}}$ موازی صفحهٔ منحنی است. اگر در صفحه یک

دستگاه مختصات متعامد معرفی کنیم، تصاویر این بردار روی محورهای مختصات x و y به ترتیب مساوی طول بردار ضربدر کسینوس و سینوس زاویهٔ α بین محور x و بردار $\dot{\mathbf{r}}$ است (شکل ۲۰۴) . لذا، خواهیم داشت

$$\frac{\dot{x}(t_0)}{\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{\dot{y}(t_0)}{\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}} = \sin\alpha. \qquad (۵۰۴)$$



شکل ۲۰۴

تمرین

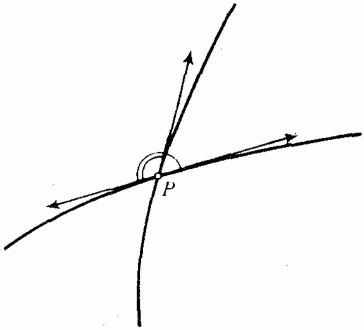
۱. **زاویهٔ بین منحنیها** . زاویهٔ بین دو مسیر $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t)$ و $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(\tau)$ با نقطهٔ مشترک P، به ترتیب نظیر به‌مقادیر t_0 و τ_0 از پارامترهای t و τ، زاویهٔ بین بردارهای مماس برمسیرها در نقطهٔ مشترک تعریف می‌شود . درنتیجه، فرمول زیر را خواهیم داشت :

$$\cos\phi = \frac{\dot{\mathbf{r}}_1(t_0)\dot{\mathbf{r}}_2(\tau_0)}{|\dot{\mathbf{r}}_1(t_0)|\,|\dot{\mathbf{r}}_2(\tau_0)|}; \qquad (۶۰۴)$$

یا، اگر مسیرها با معادلاتی برحسب مختصات مانند $x = x_1(t), y = y_1(t), z = z_1(t)$ و $x = x_2(\tau), y = y_2(\tau), z = z_2(\tau)$ داده شده باشند، این فرمول به صورت زیر درمی‌آید :

$$\cos\phi = \frac{\dot{x}_1(t_0)\dot{x}_2(\tau_0) + \dot{y}_1(t_0)\dot{y}_2(\tau_0) + \dot{z}_1(t_0)\dot{z}_2(\tau_0)}{\sqrt{(\dot{x}_1(t_0))^2 + (\dot{y}_1(t_0))^2 + (\dot{z}_1(t_0))^2}\sqrt{(\dot{x}_2(\tau_0))^2 + (\dot{y}_2(\tau_0))^2 + (\dot{z}_2(\tau_0))^2}}. \qquad (۷۰۴)$$

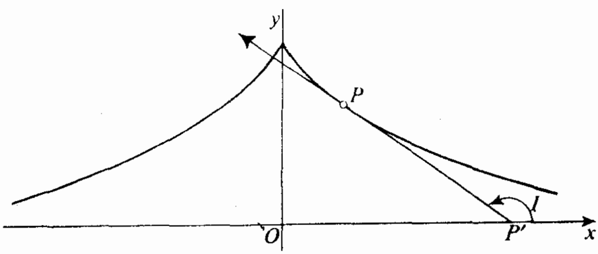
زاویه‌ای که‌به این طریق تعریف شود، وقتی پارامتری سازی یک یا هر دو منحنی با پارامتری‌سازی هم‌ارزی عوض شود، تغییر نمی‌کند . اما، اگر جهت یکی از منحنیها تغییر کند، تعریف ما ایجاب می‌کند که زاویهٔ اصلی با زاویهٔ مکملش عوض شود (شکل ۳۰۴) . اگر به زاویهٔ بین منحنیها علاقه‌مند باشیم درحالی که آنها را مجموعه‌هایی گرفته‌ایم تا مسیرها، می‌توان



شکل ۳۰۴

قرار گذاشت که از دو زاویهٔ مکمل همیشه کوچکتر را اختیار نمود. در این حالت، باید طرف راست (۶۰۴) و (۷۰۴) را با قدر مطلق آن عوض کرد.

۲. **کشاننده**. کشاننده منحنی مسطحی است با خاصیت زیر: آن قطعه از مماس که بین نقطهٔ تماس P و خط مستقیم ثابتی در صفحه (مجانب کشاننده) واقع است دارای طول ثابت a می‌باشد (شکل ۴۰۴). این خط را محور x دستگاه مختصات می‌گیریم، و فرض می‌کنیم



شکل ۴۰۴

t زاویهٔ جهتدار بین محور x و بردار $\overrightarrow{P'P}$ باشد، که در آن P نقطهٔ متغیر کشاننده بوده و P' نقطهٔ مشترک مماس در P و محور x باشد. جهت محور y را طوری می‌گیریم که این t بین 0 و π قرار گیرد. فرض کنیم $x = x(t), y = y(t)$، که t پارامتر است، معادلهٔ پارامتری منحنی باشد (که باید تعیین شود). در این صورت، داریم

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \pm\cos t, \qquad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \pm\sin t. \tag{۸۰۴}$$

بعلاوه، مختص y نقطهٔ P برابر است با تصویر بردار $\overrightarrow{P'P}$ روی محور y. لذا،

$$y = a\sin t,$$

که از اینجا $\dot{y} = a\cos t$، از (۸۰۴) خواهیم داشت

$$\dot{x} = \dot{y} \cot t. \tag{۹.۴}$$

دیگر آنکه ،

$$\dot{x} = \dot{y} \cot t = a \cos t \cot t = a\frac{\cos^2 t}{\sin t} = a\frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} = -a \sin t + \frac{a}{\sin t},$$

و

$$x = a \cos t + \int \frac{a\,dt}{\sin t} = a \cos t + a \ln\left|\tan \frac{t}{2}\right| + C.$$

اگر مبدأ دستگاه مختصات را طوری اختیار کنیم که به ازای $t = \frac{1}{2}\pi$ داشته باشیم $x = 0$ ، می‌توانیم C را صفر کنیم ؛ و درنتیجه ، معادله خواهد شد :

$$x = a \cos t + a \ln\left|\tan \frac{t}{2}\right|, \qquad y = a \sin t. \tag{۱۰.۴}$$

وقتی t از 0 تا π تغییر کند ، تمام نقاط کشاننده را خواهیم داشت . هرگاه $t \to 0$ آنگاه $x \to -\infty, y \to 0$ و هرگاه $t \to \pi$ آنگاه $x \to \infty, y \to 0$. از اینرو ، کشاننده به طور نامتناهی گسترش دارد و به مجانبش از دو طرف به طور مجانبی نزدیک می‌شود . نقطهٔ $t = \frac{1}{2}\pi$ یک نقطهٔ منفرد می‌باشد .

۳ . بردارهای مماس بر یک چرخزاد را در نقاط مختلف پیدا کنید . حد بردار یکهٔ مماس بر یک چرخزاد را وقتی پارامتر t از چپ به 0 نزدیک می‌شود ، و نیز وقتی t از راست به 0 نزدیک می‌شود ، چیست ؟

۴ . طول قطعه‌ای از کشاننده را از نقطهٔ منفرد ($t = \frac{1}{2}\pi$) تا نقطهٔ نظیر به مقدار t از پارامتر بیابید .

۵ . نشان دهید که

$$x = a\left(\ln t + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right), \qquad y = \frac{2at}{1 + t^2}, \qquad 0 < t < \infty,$$

نمایش پارامتری دیگری از کشاننده است .

۶ . ثابت‌کنید تمام خطوط مماس برمارپیچ درنقاط مختلف با محور z زاویهٔ ثابتی می‌سازند.

۷ . روی مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ یک منحنی بیابید که با خطوط مستقیم روی آن زاویهٔ ثابت α را بسازد . ثابت کنید تمام خطوط مماس براین منحنی با محور z زاویهٔ ثابت β را می‌سازند .

راهنمایی . زاویهٔ t بین محور x و تصویر مولد مستقیم‌الخط مخروط مار برنقاط منحنی روی صفحهٔ xy را به عنوان پارامتر به کار برید . در این صورت ، مختصات نقطه‌ای از

منحنی که نظیر به مقدار t از پارامتر است عبارتنداز

$$x = u\cos t, \qquad y = u\sin t, \qquad z = u,$$

که u خودبه t وابسته است . (توجه کنید که درحالت کلی اینها معادلات پارامتری مخروط با پارامترهای t و u اند .) این بستگی را می‌توان با داده‌های مسئله تعیین کرد .

[جواب . $x = e^{mt}\cos t, y = e^{mt}\sin t, z = e^{mt}$ ، که $\cot\alpha = m\sqrt{2}$ و $\cos\beta = \frac{1}{2}\cos\alpha$.]

۸ . ثابت کنید که

(آ) اگر تمام خطوط مماس بریک منحنی همرس باشند ، منحنی یک خط راست است ؛

(ب) اگر تمام خطوط مماس بریک منحنی موازی باشند ، منحنی نیز یک خط راست است .

۳.۴ تماس یک منحنی با یک صفحه یا کره . صفحهٔ بوسان

فرض کنیم P_0 نقطهٔ مشترک منحنی $\mathscr{K}$ با یک صفحه یا کرهٔ $\mathscr{S}$ بوده ، و P یک نقطهٔ متغیر از منحنی باشدبه‌طوری که طول قوس علامتدار بین P_0 و P مساوی h باشد . فاصلهٔ P از سطح (صفحه یا کره) را با d_h نشان می‌دهیم .

می‌گوییم سطح و منحنی در نقطهٔ P_0 ***دارای تماس از مرتبهٔ لااقل*** n هستند ، اگر داشته باشیم $d_h = o(h^n)$.

صفحه‌ای که‌در P_0 دارای بالاترین مرتبهٔ تماس ممکن با منحنی باشد **صفحهٔ بوسان** در P_0 نامیده می‌شود .

قضیه . ***منحنی پارامتری*** $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ***از کلاس*** C_2 ***در هر نقطهٔ منتظم*** s_0 ***که در آن مشتق‌دوم نسبت به طول قوس مخالف صفر است ، یعنی*** $\mathbf{r}''(s_0) \neq 0$ ***، صفحهٔ بوسان دارد . این صفحه موازی بردارهای*** $\mathbf{r}'(s_0)$ ***و*** $\mathbf{r}''(s_0)$ ***است و ، در نتیجه ، معادلهٔ صفحهٔ بوسان مساوی است با***

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}(s_0)]\mathbf{r}'(s_0)\mathbf{r}''(s_0) = 0. \tag{۱۱.۴}$$

این معادله برحسب مختصات برابر است با

$$\begin{vmatrix} X - x(s_0) & Y - y(s_0) & Z - z(s_0) \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{۱۲.۴}$$

مرتبهٔ تماس ناکمتر از 2 ***است .***

برهان. معادلهٔ صفحهٔ مار بر نقطهٔ P_0 و عمود بر بردار یکه‌ای چون $\mathbf{m}$ عبارت است از

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s_0))\mathbf{m} = 0.$$

فاصلهٔ نقطهٔ P با بردار موضع $\mathbf{r}(s_0 + h)$ از این صفحه برابر است با

$$d_h = |[\mathbf{r}(s_0 + h) - \mathbf{r}(s_0)]\mathbf{m}|.$$

با استفاده از فرمول تیلور داریم

$$\mathbf{r}(s_0 + h) - \mathbf{r}(s_0) = h\mathbf{r}'(s_0) + \frac{h^2}{2}\mathbf{r}''(s_0) + o(h^2).$$

درنتیجه،

$$d_h = h\mathbf{r}'(s_0)\mathbf{m} + \frac{h^2}{2}\mathbf{r}''(s_0)\mathbf{m} + o(h^2).$$

توجه کنید که، چون بردارهای $\mathbf{r}'(s_0)$ و $\mathbf{r}''(s_0)$ بدلیل ناصفر و عمود بودن، مستقل اند نتیجه می‌شود که بالاترین مرتبهٔ تماس فقط وقتی است که

$\mathbf{r}'(s_0)\mathbf{m} = 0$ و $\mathbf{r}''(s_0)\mathbf{m} = 0$.

به آسانی دیده می‌شود که این دو معادله $\mathbf{m}$ را با تقریب علامت به‌طور منحصر بفرد معین می‌کنند. در واقع، $\mathbf{m}$، بدلیل عمود بودن بر $\mathbf{r}'(s_0)$ و $\mathbf{r}''(s_0)$، موازی $\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)$، که با مفروضات ما بردار ناصفری است، می‌باشد. بنابراین، فقط ممکن است

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)}{|\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)|} \quad \text{یا} \quad \mathbf{m} = -\frac{\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)}{|\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)|}.$$

اما در معادلهٔ یک صفحه می‌توان هر بردار عمود، نه الزاماً یک برداریکه، را نیز به کار برد. بنابراین، بااستفاده از $\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)$ به جای $\mathbf{m}$، معادلهٔ (۴.۱۱) را خواهیم داشت.

درحالت‌کلی، تماس از مرتبهٔ بالاتر از دو انتظار نمی‌رود. اگر این مورد در یک نقطهٔ خاص رخ دهد، مثل حالتی‌که $\mathbf{r}'''(s_0) = 0$، می‌گوییم این نقطه یک **نقطهٔ تخت** منحنی است.

هرگاه $\mathbf{r}''(s_0) = 0$، یا صفحهٔ بوسان در نقطهٔ s_0 اصلاً وجود ندارد یا وجودداشته ولی با مشتقات مراتب بالاتر از 2 معین می‌شود. در این حالت، صفحهٔ بوسان تماس از مرتبهٔ بالاتر از 2 دارد. اما، درهمین حال، خط مماس نیز دارای تماس از مرتبهٔ بالاتر از 1 است. لذا، آن نقطه یک نقطهٔ اصلاح منحنی می‌باشد.

به‌عنوان مثال، اگر $\mathbf{r}''(s_0) = 0$ و اولین مشتق $\mathbf{r}(s)$ در s_0 که از $\mathbf{r}'(s_0)$ مستقل خطی است $\mathbf{r}^k(s_0)$ باشد، صفحهٔ بوسان وجود دارد. این صفحه موازی بردارهای $\mathbf{r}'(s_0)$ و $\mathbf{r}^k(s_0)$ است و مرتبهٔ تماس از k کمتر نیست.

۴۰۴ معادلهٔ صفحهٔ بوسان با یک پارامتری سازی کلی

اینک حالت پارامتری سازی کلی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، که لزوما " پارامتری سازی طبیعی نیست ،را در نظر می‌گیریم ، و فرض می‌کنیم t_0 یک نقطهٔ منتظم این پارامتری سازی باشد . اگرپارامتری سازی طبیعی را نیز در نظر بگیریم ، خواهیم داشت :

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\frac{ds}{dt},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}'\frac{ds}{dt} + \mathbf{r}'\frac{d^2s}{dt^2} = \mathbf{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{r}'\frac{d^2s}{dt^2}.$$

بنابراین ،

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^3. \qquad (۱۳۰۴)$$

درنتیجه ، بردارهای $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ در نقاط منتظم همخط هستند ؛ و لذا ، می‌توان در معادلهٔ صفحهٔ بوسان جای یکی را با دیگری عوض کرده و شکل برداری

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_0)]\dot{\mathbf{r}}(t_0)\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = 0 \qquad (۱۴۰۴)$$

و یا شکل مختصاتی

$$\begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (۱۵۰۴)$$

آن‌را به‌دست‌آورد .در اینجا ، $\mathbf{R}$ بردار موضع یک نقطه به مختصات X, Y, Z ازصفحهٔ بوسان است . درحالت خاص پارامتری سازی طبیعی ، معادلهٔ (۱۵۰۴) همان (۱۲۰۴) خواهد بود .

تمرین

۰۱ صفحهٔ بوسان مارپیچ را پیدا کنید . زاویهٔ بین آن و محور مارپیچ چیست ؟

۰۲ صفحهٔ بوسان منحنی $x = y, x = \frac{1}{2}z^2$ را پیدا کنید .

۰۳ صفحهٔ بوسان منحنی

$$x = t^2, \qquad y = t - t^2, \qquad z = 2t$$

را پیدا کنید . به‌شکل خاص بستگی صفحهٔ بوسان به پارامتر t توجه نمایید . ازاین بستگی چه چیز را می‌توان دربارهٔ موضع دوجانبهٔ منحنی و صفحهٔ بوسان نتیجه گرفت ؟

۵۰۴ مجانبهای یک منحنی

می‌گوییم منحنی پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \qquad a < t < b, \tag{۱۶.۴}$$

که درآن ممکن‌است $a = -\infty$ یا $b = \infty$، وقتی $t \to b$ (یا $t \to a$) دارای یک *شاخهٔ بی‌کران* است اگر $|\mathbf{r}(t)|$ وقتی $t \to b - 0$ (یا $t \to a + 0$)، به بی‌نهایت میل کند.

نکات زیر در ارتباط با حالت $t \to b - 0$ است اما، با اصلاحاتی واضح، برای $t \to a + 0$ نیز اعتبار دارند.

اگر پارامتر طول قوس (پارامتر طبیعی) باشد، یک شاخهٔ بی‌کران منحنی فقط می‌تواند نظیر به حالت $t \to \pm\infty$ باشد.

یک خط مستقیم درفضا *خط مجانبی* یا *مجانب* شاخهٔ بی‌کران منحنی (۱۶.۴) نامیده می‌شود اگر فاصلهٔ یک نقطهٔ متغیر منحنی از این خط، وقتی نقطه در امتداد شاخه به بی‌نهایت می‌رود، به صفر میل کند.

قضیهٔ ۱. *یک شاخهٔ بی‌کران منحنی (۱۶.۴)، وقتی $t \to b - 0$، دارای مجانب است اگر و فقط اگر حدود زیر وجود داشته باشند:*

$$\mathbf{a} = \lim_{t \to b - 0} \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} \qquad \text{و} \qquad \mathbf{p} = \lim_{t \to b - 0} [\mathbf{r}(t) - (\mathbf{a}\mathbf{r}(t))\mathbf{a}]. \tag{۱۷.۴}$$

مجانب موازی بردار $\mathbf{a}$ است و از نقطه‌ای با بردار موضع $\mathbf{p}$ می‌گذرد. لذا، معادله‌اش خواهد بود:

$$\mathbf{R} = \mathbf{p} + u\mathbf{a} \quad \text{یا} \quad (\mathbf{R} - \mathbf{p}) \times \mathbf{a} = 0. \tag{۱۸.۴}$$

برهان. ابتدا فرض کنیم مجانب وجود داشته باشد. بردار یکهٔ هادی این خط را با $\mathbf{a}^*$ نشان داده، و $\mathbf{p}^*$ را بردار موضع پای عمود برمجانب که از مبداء می‌گذرد می‌گیریم. در نتیجه، داریم

$$\mathbf{p}^*\mathbf{a}^* = 0.$$

بنابراین، معادلهٔ مجانب خواهد بود

$$(\mathbf{R} - \mathbf{p}^*) \times \mathbf{a}^* = 0.$$

طبق زیربخش ۶.۱، فاصلهٔ یک نقطه با بردار موضع $\mathbf{r}(t)$ تا این خط از فرمول

$$d = |[\mathbf{r}(t) - \mathbf{p}^*] \times \mathbf{a}^*|$$

به دست می‌آید.

بنابه تعریف مجانب، داریم

$$\lim_{t \to b - 0} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}^* - \mathbf{p}^* \times \mathbf{a}^*] = 0. \tag{۱۹.۴}$$

چون $|\mathbf{r}(t)| \to \infty$ ، نیز خواهیم داشت

$$\lim_{t\to b-0}\left[\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}\times \mathbf{a}^* - \frac{\mathbf{p}^*\times\mathbf{a}^*}{|\mathbf{r}(t)|}\right] = 0,$$

و

$$\lim_{t\to b-0}\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}\times \mathbf{a}^* = 0.$$

چون در اینجا هر دو عامل بردارهای یکه‌اند و هر دو به‌ازای مقادیر t به قدر کافی‌نزدیک به $b-0$ تعریف شده‌اند ، قدرمطلق حاصل ضرب برابر است‌با سینوس زاویهٔ بین دوبردار $\mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|$ و $\mathbf{a}^*$. درنتیجه، این زاویه دارای حدی مساوی 0 یا π است ، و داریم

$$\lim_{t\to b-0}\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|} = \pm\mathbf{a}^*.$$

حال (۱۹.۴) را از چپ در $\mathbf{a}^*$ ضرب‌برداری می‌کنیم ؛ خواهیم داشت

$$\lim_{t\to b-0}\left[\mathbf{a}^*\times(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{a}^*) - \mathbf{a}^*\times(\mathbf{p}^*\times\mathbf{a}^*)\right] = 0.$$

با اعمال (۲۱.۱) و نیز استفاده از اتحادهای $\mathbf{a}^{*2} = 1$ ، $\mathbf{a}^*\mathbf{p}^* = 0$ ، و $\mathbf{a} = \pm\mathbf{a}^*$ ، داریم

$$\lim_{t\to b-0}\left[\mathbf{r}(t) - (\mathbf{a}\mathbf{r}(t))\mathbf{a} - \mathbf{p}^*\right] = 0,$$

که وجود حد دوم در (۱۷.۴) و معادلهٔ

$$\mathbf{p} = \lim_{t\to b-0}\left[\mathbf{r}(t) - (\mathbf{a}\mathbf{r}(t))\mathbf{a}\right] = \mathbf{p}^*$$

را ایجاب خواهد کرد .

بعکس، هرگاه به‌ازای برداریکه‌ای چون $\mathbf{a}$ حد

$$\mathbf{p} = \lim_{t\to b-0}\left[\mathbf{r}(t) - (\mathbf{a}\mathbf{r}(t))\mathbf{a}\right]$$

وجود داشته باشد ، آنگاه

$$\lim_{t\to b-0}\{\mathbf{a}\times[(\mathbf{r}(t)-\mathbf{p})\times\mathbf{a}]\} = 0.$$

اما

$$|\mathbf{a}\times[(\mathbf{r}(t)-\mathbf{p})\times\mathbf{a}]| = |(\mathbf{r}(t)-\mathbf{p})\times\mathbf{a}|,$$

زیرا عوامل سمت چپ برهم عمودند و $|\mathbf{a}| = 1$. بنابراین ،

$$\lim_{t\to b-0}|(\mathbf{r}(t)-\mathbf{p})\times\mathbf{a}| = 0,$$

بدین معنی که فاصلهٔ نقطهٔ P واقع بر منحنی تا خط موازی با $\mathbf{a}$ و مار برنقطه‌ای بابردار موضع $\mathbf{p}$ ، وقتی $t\to b-0$ و P به بی‌نهایت می‌رود ، به صفر میل می‌کند . درنتیجه ،

این خط یک‌مجانب نظیر به‌شاخهٔ بی‌کران منحنی‌است . بنابراین ،بردار $\mathbf{a}$ باید درمعادلهٔ

$$\mathbf{a} = \lim_{t \to b-0} \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$$

صدق کند ، و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود .

راستای بردار $\mathbf{a} = \lim_{t \to b-0} (\mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|)$ ***راستای مجانبی*** منحنی است .
یک منحنی ممکن است راستای مجانبی داشته باشد بی‌آنکه مجانب داشته باشد . مثلاً ، سهمی $y = x^2, z = 0$ مجانب ندارد درحالی که راستای محور y راستای مجانبی آن است . ثابت کنید !

تاپایان این بخش، به قضیهٔ هوپیتال[1] با شکل زیر نیاز داریم .

لم . ***هرگاه تابع برداری*** $\mathbf{u}(s)$ ***و تابع اسکالر*** $\lambda(s) \neq 0$ ***وقتی*** $s \to \infty$ ***به صفر میل کنند و*** $\lim_{s \to \infty} (\mathbf{u}'(s)/\lambda'(s))$ ***موجود باشد ، آنگاه*** $\lim_{s \to \infty} (\mathbf{u}(s)/\lambda(s))$ ***نیز وجود داشته و***

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\mathbf{u}(s)}{\lambda(s)} = \lim_{s \to \infty} \frac{\mathbf{u}'(s)}{\lambda'(s)}.$$

اثبات ، کاربرد سادهٔ قضیهٔ هوپیتال در مورد هر مولفهٔ جداگانه است . با استفاده ازاین لم می‌توان قضیهٔ زیر را به اثبات رسانید .

قضیهٔ ۲ . ***هرگاه مماس بر یک منحنی از کلاس*** C_1 ***، وقتی نقطهٔ تماس در امتداد یک‌شاخهٔ بی‌کران آن به بی‌نهایت می‌رود ، همگرا به یک خط حدی باشد ، آنگاه خط حدی یک مجانب خواهد بود .***

برهان . روی منحنی پارامتری سازی طبیعی را اختیار می‌کنیم با جهتی که شاخهٔ بی کران منحنی نظیر به $s \to \infty$ باشد . فرض‌کنیم مبداء دستگاه مختصات در فضا بر خط حدی قرار داشته باشد . در این صورت ، منحنی دارای نمایش پارامتری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ است‌به طوری‌که

$$\lim_{s \to \infty} |\mathbf{r}(s)| = \infty. \qquad (۲۰.۴)$$

---

1. l'Hospital

مماس برمنحنی درنقطهٔ s دارای معادلهٔ

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)] \times \mathbf{r}'(s) = 0$$

است ، که در آن $\mathbf{r}'(s)$ بردار یکهٔ هادی مماس می‌باشد . چون این مماس همگرا به‌خط حدی است و مبداء روی آن قرار دارد ، فاصلهٔ مبداء تا مماس، یعنی $d = |\mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}'(s)|$ به 0 میل می‌کند ،وبردار یکهٔ‌هادی $\mathbf{r}'(s)$ به بردار یکهٔ هادی $\mathbf{a}$ ازخط حدی‌میل‌خواهدکرد؛یعنی،

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}'(s) = 0, \tag{۲۱.۴}$$

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{r}'(s) = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{a}^2 = 1. \tag{۲۲.۴}$$

حال دستگاه مختصات را در فضا طوری انتخاب می‌کنیم‌که همهٔ مولفه‌های بردار $\mathbf{a}$ مثبت باشند . در این صورت ، (۲۲.۴) ایجاب می‌کند که

$$\lim_{s\to\infty} x'(s) = \alpha > 0, \qquad \lim_{s\to\infty} y'(s) = \beta > 0, \qquad \lim_{s\to\infty} z'(s) = \gamma > 0, \tag{۲۳.۴}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

این نیز ایجاب می‌کند که ، وقتی $s \to \infty$،

$$x(s) \to \infty, \qquad y(s) \to \infty, \qquad z(s) \to \infty.$$

در واقع ، s_0 ی هست‌به‌طوری که به ازای $s > s_0$ همیشه داریم $x'(s) > \alpha/2 > 0$، که‌ازاینجا ، بنابرقضیهٔ لاگرانژ، به ازای $s > s_0$ ، $x(s) - x(s_0) > \frac{1}{2}\alpha(s - s_0)$ و ، وقتی $s \to \infty$ ، $x(s) \to \infty$. اثبات در مورد $y(s)$ و $z(s)$ نیز به همین نحو است .

حال بردار

$$\frac{\mathbf{r}(s)}{|\mathbf{r}(s)|} = \left\{ \frac{x(s)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y(s)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z(s)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}$$

را در نظر می‌گیریم . در مورد مولفهٔ اول این بردار داریم

$$\frac{x(s)}{\sqrt{x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + [y(s)/x(s)]^2 + [z(s)/x(s)]^2)}}.$$

بنابرقضیهٔ هوپیتال ،

$$\lim_{s\to\infty} \frac{y(s)}{x(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{y'(s)}{x'(s)} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{z(s)}{x(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{z'(s)}{x'(s)} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

مولفهٔ اول این بردار حدش

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\beta/\alpha)^2 + (\gamma/\alpha)^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \alpha$$

است .به همین‌نحو، می‌توان ثابت کرد که حدود مولفه‌های دوم و سوم به ترتیب β و γ هستند . بنابراین ، داریم

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\mathbf{r}(s)}{|\mathbf{r}(s)|} = \mathbf{a}. \qquad (۲۴\cdot۴)$$

راستای خط‌حدی راستای مجانبی خواهد بود .

برای اثبات اینکه خط‌حدی یک مجانب است ، کافی است ثابت کنیم که فاصلهٔ یک نقطهٔ متغیر منحنی تا خط‌حدی ، وقتی‌$s \to \infty$، به 0 میل می‌کند . این فاصله برابر است با

$$|\mathbf{r}(s) \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a} \times (\mathbf{r}(s) \times \mathbf{a})|.$$

پس از یک تبدیل ساده

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \frac{\dfrac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{r}|}}{\dfrac{1}{|\mathbf{r}|}} = \frac{\mathbf{a} \times \left(\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{a}\right)}{\dfrac{1}{|\mathbf{r}|}},$$

صورت کسر فوق یک تابع برداری است‌که، بنابر (۲۴۰۴) ، وقتی $s \to \infty$ ، به صفر میل می‌کند و مخرج تابع اسکالری است که به صفر میل می‌کند . با استفاده از لم فوق داریم

$$\lim_{s \to \infty} \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \lim_{s \to \infty} \frac{\left[\dfrac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{r}|}\right]'}{\left[\dfrac{1}{|\mathbf{r}|}\right]'}$$

$$= \lim_{s \to \infty} \frac{\{|\mathbf{r}|(\mathbf{a} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{a})) - (\mathbf{r}\mathbf{r}')(\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}))\}|\mathbf{r}|^{-3}}{-(\mathbf{r}\mathbf{r}')|\mathbf{r}|^{-3}}$$

$$= \lim_{s \to \infty} \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{a}) - (\mathbf{r}\mathbf{r}')\left[\mathbf{a} \times \left(\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{a}\right)\right]}{-\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}'}.$$

اما ، بنابر (۲۴۰۴) و (۲۲۰۴) ، مخرج به $-\mathbf{a}^2 = -1$ میل کرده، و صورت به 0 میل می‌کند ، زیرا ، بنابر (۲۲۰۴) و (۲۴۰۴) ،

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \times \mathbf{a} \to 0.$$

بنابراین ،

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{s\to\infty} \mathbf{r}\times\mathbf{a} = 0 .$$

توجه کنید که عکس این قضیه برقرار نیست. منحنیهایی هستند که مجانب دارند ولی مماس آنها حد ندارد؛ مثلاً، تابع

$$y = \frac{\sin x^2}{x}, \qquad x > 0,$$

نمایش یک منحنی است که مجانبش به‌ازای $x \to \infty$ برمحور x منطبق است. از طرف دیگر، راستای مماس براین منحنی، وقتی $x \to \infty$، حد ندارد.

امثله و تمرین

۱. یافتن مجانبها درحالتی‌که مجانب موازی یکی از محورهای مختصات باشد ساده‌تراست. ثابت کنید خط $x = x_0, y = y_0$ مجانب منحنی

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

است، وقتی $t \to \infty$، اگر و فقط اگر

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0, \qquad \lim_{t\to\infty} z(t) = \pm\infty.$$

شرطهای مشابه را برای مجانبهای موازی محورهای x و y بیان دارید.

۲. محور z مجانب منحنی

$$x = e^{-t}\cos e^t, \qquad y = e^{-t}\sin e^t, \qquad z = t$$

است، وقتی $t \to \infty$. مولفه‌های برداریکهٔ مماس براین منحنی عبارتند از

$$\left(\frac{e^{-t}\cos e^t - \sin e^t}{\sqrt{2+e^{-2t}}}, \qquad \frac{e^{-t}\sin e^t + \cos e^t}{\sqrt{2+e^{-2t}}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2+e^{-2t}}}\right).$$

بردار مماس، وقتی $t \to -\infty$، حد ندارد. شاخهٔ بی‌کران دیگر منحنی $(t \to \infty)$ مجانب ندارد ولی راستای محور x راستای مجانبی آن است.

این احکام را ثابت کنید.

۳. مجانب منحنی

$$x = e^t\cos t, \qquad y = e^t\sin t, \qquad z = \frac{1}{t}, \qquad 0 < t < \infty$$

را به‌ازای $t \to 0$ بیابید. آیا این منحنی به‌ازای $t \to \infty$ مجانب دارد؟ اگر چنین است، مجانب را پیدا کنید. آیا مماس برمنحنی همگرا به مجانب است؟

۴. تمرین فوق را در مورد منحنی

$$x = \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{t}}, \qquad y = \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{t}}, \qquad z = t, \qquad 0 < t < \infty$$

حل کنید.

۵. سه‌وجهی فرنه[1] و فرمولهای فرنه

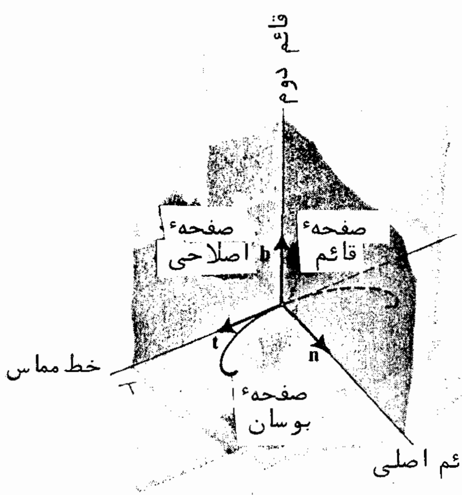
۱.۵ سه‌وجهی فرنه

ما به هر نقطهٔ یک منحنی پارامتری از کلاس C_2 یک سه‌تایی متعامد یکه از بردارهای یکه مربوط می‌کنیم که عبارتند از بردار مماس **t** ، بردار قائم اصلی **n** ، و بردار قائم دوم **b**.

بردار قائم اصلی **n** در نقطهٔ P برداریکهٔ قائم اصلی است؛ یعنی، آن قائم به منحنی در P که در صفحهٔ بوسان در P قرار دارد. جهت بردار قائم اصلی طوری انتخاب می‌شود که بردار اشاره به‌جهتی کند که منحنی، یا تصویرش روی صفحهٔ بوسان، درآن جهت مقعر است. این یعنی **n** همان‌جهت مشتق دوم بردار موضع نسبت به پارامتر طبیعی، یعنی $\mathbf{r}''$ ، را دارد.

بردار قائم دوم **b** برداریکه‌ای است که بر صفحهٔ بوسان عمود است به طوری که سه بردار **t, n, b** ، با همین ترتیب، یک سه‌تایی با جهت مثبت را تشکیل می‌دهند.

خطوط مار بر P و موازی بردارهای **t, n, b** بترتیب ***مماس، قائم اصلی، و قائم دوم*** منحنی در P نامیده می‌شوند. صفحه‌ای که شامل مماس وقائم اصلی باشد همان صفحهٔ بوسان است، صفحه‌ای که قائم اصلی و قائم دوم منحنی را دربرگیرد ***صفحهٔ قائم*** نامیده می‌شود. بالاخره، صفحهٔ معین شده به وسیلهٔ مماس و قائم دوم ***صفحهٔ اصلاحی*** منحنی در P نام دارد. کل این ساختمان‌بندی **سه وجهی فرنه** یا **کنج فرنه** نامیده می‌شود (شکل ۱.۵) .



شکل ۱.۵

1.Frenet

درحالتی‌که P نقطهٔ منتظم یک‌منحنی پارامتری از کلاس C_2 بوده و یک نقطهٔ اصلاح نباشد ($\mathbf{r}'' \neq 0$) بردارهای کنج فرنه از فرمولهای زیر به دست می‌آیند.

همانطور که قبلاً دیدیم، بردار یکهٔ مماس عبارت است از

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}'. \tag{۱۰۵}$$

بردار $\mathbf{r}''$ درصفحهٔ بوسان قرار دارد. چون $\mathbf{r}'$ برداریکه است، $\mathbf{r}''$ قائم به منحنی است؛ و درنتیجه، با بردار قائم اصلی همخط و همجهت است. بنابراین، داریم

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}. \tag{۲۰۵}$$

بالاخره، بردار قائم دوم عبارت است از

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}. \tag{۳۰۵}$$

اگر پارامتری سازی‌منحنی را به‌قرینه‌اش ($\sigma = -s$) تغییر دهیم، بردار مماس جهتش را تغییر نمی‌دهد، و بردار قائم دوم نیز جهتش را تغییر خواهد داد.

حال فرمولهایی را پیدا می‌کنیم که بردارهای کنج فرنه را برای یک پارامتری‌سازی دلخواه بیان کنند. با استفاده از فرمولهای (۳۰۳) و (۱۳۰۴) داریم

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}' = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}, \qquad \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\left(\frac{dt}{ds}\right)^3. \tag{۴۰۵}$$

چون $\mathbf{b}$ یک بردار یکه درجهت $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ است، درمی‌یابیم که

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}, \tag{۵۰۵}$$

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}, \tag{۶۰۵}$$

و چون

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t},$$

زیرا $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ یک دستگاه متعامد یکهٔ جهتدار با جهت مثبت از بردارها راتشکیل می‌دهند، داریم

$$\mathbf{n} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}|\dot{\mathbf{r}}|^2 - \dot{\mathbf{r}}(\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}. \tag{۷۰۵}$$

در یک نقطهٔ اصلاح، که $\mathbf{r}'' = 0$ یا، به‌طور کلیتر، بردارهای $\dot{\mathbf{r}}$ و $\ddot{\mathbf{r}}$ همخط هستند، این فرمولها را نمی‌توان به کار برد؛ و لذا، سه وجهی فرنه تعریف نمی‌شود.

★ هرگاه منحنی از کلاس C_k بوده و مشتق k ام آن در نقطهٔ اصلاح t_0، یعنی $\overset{(k)}{\mathbf{r}}(t_0)$، از $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ مستقل خطی باشد ولی تمام مشتقات مراتب از 2 تا $k-1$ با $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ همخط باشند، می‌توانیم یک‌سه‌وجهی مشابه با سه‌وجهی‌فرنه تعریف کنیم. درواقع، در این وضع، بردارهای $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ و $\overset{(k)}{\mathbf{r}}(t_0)$ صفحهٔ بوسان منحنی را معین خواهند کرد (ر.ک. زیربخش ۳.۴). بردار عمود براین صفحه را می‌توان به‌صورت بردار قائم دوم

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \overset{(k)}{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \overset{(k)}{\mathbf{r}}|}$$

در نظر گرفت، و بردار قائم اصلی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}.$$

بهرحال، باید به‌خاطر داشته باشیم که اگر کنج‌فرنه را درنقاط اصلاح این طور تعریف کنیم، دیگر نمی‌توان انتظارداشت که سه وجهی فرنه تابعی پیوسته از پارامتر باشد ویا اینکه فرمولهای فرنه در بخش بعد معتبر باشند. ★

تمرین

۱. بردارهای کنج فرنهٔ مارپیچ را پیدا کنید. زاویهٔ بین‌آنها و محور مارپیچ چیست؟

۲. بردارهای سه‌وجهی فرنهٔ منحنی $y = x^3, z = x^4$ را پیدا کنید. نقاط تخت این‌منحنی را بیابید.

۳. ثابت‌کنید تمام صفحات بوسان مارپیچ که از یک‌نقطهٔ غیرواقع برخود مارپیچ می‌گذرند در نقاطی برمارپیچ مماسند که در یک صفحه قرار دارند.

برهان. درواقع، شرط لازم و کافی برای آنکه چهار صفحهٔ $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ نقطهٔ مشترک داشته باشند آن است که

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

معادلهٔ صفحهٔ بوسان مارپیچ در نقطهٔ نظیر به مقدار t_i از پارامتر عبارت است از

$$a \sin t_i x + a \cos t_i y - z + k t_i = 0.$$

بنابراین، شرط اینکه صفحات بوسان در t_1, t_2, t_3, t_4 نقطهٔ مشترک داشته باشند عبارت است از

$$\begin{vmatrix} a\cos t_1 & a\sin t_1 & kt_1 & 1 \\ a\cos t_2 & a\sin t_2 & kt_2 & 1 \\ a\cos t_3 & a\sin t_3 & kt_3 & 1 \\ a\cos t_4 & a\sin t_4 & kt_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

که این ، شرط لازم و کافی برای همصفحه بودن چهار نقطهٔ $(a\cos t_i, a\sin t_i, kt_i)$ نیز هست . محاسبات لازم را کامل کنید .

۴. تابع $\phi(u)$ را طوری بیابید که قائمهای اصلی منحنی $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = \phi(u)$ موازی صفحهٔ xy باشند . این منحنی چه نوع منحنی است ؟

۵. ثابت کنید که اگر تمام صفحات بوسان یک منحنی از کلاس C_3 نقطهٔ مشترک داشته باشند ، منحنی بر یک صفحه واقع است . همچنین ، ثابت کنید که اگر منحنی فقط از کلاس C_2 بوده و تمام صفحات بوسان موازی باشند ، منحنی بریک صفحه قرار دارد .

۶. ثابت کنید که اگر همهٔ صفحات قائم به یک منحنی از کلاس C_1 نقطهٔ مشترک داشته باشند ، منحنی بر یک کره به مرکز این نقطه قرار دارد (قس. زیر بخش۲.۳ ، مثال ۱).

۲.۵ فرمولهای فرنه

حال منحنیهایی از کلاس C_3 را درنقاط منتظمی که فقط نقاط اصلاح نیستند درنظر می‌گیریم. با داشتن چنین منحنیی ،می‌خواهیم رفتاربردارهای کنج فرنه در P را وقتی P در امتداد منحنی حرکت می‌کند مطالعه کنیم . برای این کار ، مشتقات این بردارها را نسبت به پارامتر طبیعی s پیدا می‌کنیم .

مشتق بردار $\mathbf{t}$ ، همانطور که فوراً از (۱.۵) و (۲.۵) نتیجه می شود ، مساوی است با

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |\mathbf{r}''|\mathbf{n}.$$

با معرفی نماد $\kappa = |\mathbf{r}''|$ این رابطه را می‌توان به شکل

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n} \tag{۸.۵}$$

نوشت . برای محاسبهٔ مشتق بقیهٔ بردارها ، نمایشهای آنها را به صورت ترکیباتی خطی از بردارهای مستقل $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ اختیار می‌کنیم ؛ یعنی ،

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \lambda\mathbf{t} + \mu\mathbf{n} + \nu\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{۹.۵}$$

باضرب اینها در $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ خواهیم داشت

$$\alpha = \mathbf{t}\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \qquad \beta = \mathbf{n}\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \qquad \gamma = \mathbf{b}\frac{d\mathbf{n}}{ds},$$
$$\lambda = \mathbf{t}\frac{d\mathbf{b}}{ds}, \qquad \mu = \mathbf{n}\frac{d\mathbf{b}}{ds}, \qquad \nu = \mathbf{b}\frac{d\mathbf{b}}{ds}. \tag{۱۰۰۵}$$

اتحادهای $\mathbf{t}^2 = 1, \mathbf{n}^2 = 1, \mathbf{b}^2 = 1, \mathbf{tn} = 0, \mathbf{tb} = 0, \mathbf{nb} = 0$ ایجاب می‌کنند که

$$\mathbf{t}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0, \qquad \mathbf{n}\frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0, \qquad \mathbf{b}\frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0,$$
$$\mathbf{t}\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\mathbf{n}\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \qquad \mathbf{t}\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\mathbf{b}\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \qquad \mathbf{n}\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\mathbf{b}\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \tag{۱۱۰۵}$$

که از آنجا $\beta = \nu = 0$ و $\gamma = -\mu$. مقدار مشترک اخیر را با τ نشان می‌دهیم؛ یعنی،

$$\tau = \gamma = -\mu. \tag{۱۲۰۵}$$

باتوجه به (۸۰۵) و (۹۰۵) نتیجه می‌شود که $\mathbf{n}\, d\mathbf{t}/ds = \kappa, \mathbf{b}\, d\mathbf{t}/ds = 0$. بنابراین،

$$\alpha = -\kappa, \qquad \lambda = 0.$$

قضیه. مشتقات بردارهای سه‌وجهی فرنه نسبت به پارامتر قوس در فرمولهای زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n},$$
$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \tag{۱۳۰۵}$$
$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n}.$$

این فرمولها *فرمولهای فرنه* یا *فرمولهای سره*[1]*ـ فرنه* نامیده می‌شوند. معنی هندسی ضرایب κ و τ ، موسوم به *انحنا* و *تاب* منحنی، در بخش بعد توضیح داده می‌شود.

تمرین

۱. ثابت کنید که اگر قائم اصلی یک منحنی راستای ثابتی داشته باشد، منحنی یک خط

---

1. *Serret*

راست است .

۲. نقطهٔ P و نقطهٔ متغیر Q از یک منحنی معلوم از کلاس C_3 را در نظر بگیرید ، و حد راستای عمود مشترک‌قائمهای اصلی در P و Q را وقتی $Q \to P$ بیابید .

۳. همین تمرین را برای قائمهای دوم در P و Q حل کنید .

۴. همین تمرین را برای مماسهای در P و Q حل کنید .

۶ انحنا و تاب یک منحنی

۱.۶ انحنا

نقطهٔ منتظم M از منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ نظیر به مقدار ثابت s از پارامتر ، و نقطهٔ متغیر N در همسایگی M نظیر به مقدار $s + h$ از پارامتر را در نظر می‌گیریم . بنابراین ، $|h|$ مساوی طول قوس بین M و N است .

فرض کنیم ω زاویهٔ بین بردارهای مماس در M و N باشد (شکل ۱.۶) .

حد نسبت ω/h ، وقتی $h \to 0$ یا $N \to M$ ، ***انحنای منحنی*** در M نامیده‌می‌شود.

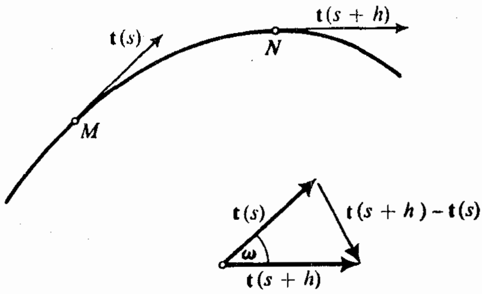
قضیه. یک منحنی پارامتری از کلاس C_2 در هر نقطه انحنا دارد ، و انحنا مساوی است با

$$\kappa = |\mathbf{r}''|$$

اگر منحنی از کلاس C_3 باشد ؛ انحنا با ضریب κ در فرمولهای فرنه یکی می‌باشد .

برهان . داریم $\omega = \sphericalangle(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s+h))$. از اینرو $|\mathbf{t}(s+h) - \mathbf{t}(s)| = 2\sin\frac{1}{2}\omega$ (شکل ۱.۶) . درنتیجه ، داریم

$$\frac{\omega}{|h|} = \frac{\omega}{2\sin\frac{1}{2}\omega}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}\omega}{|h|} = \frac{\frac{1}{2}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\,\frac{|\mathbf{t}(s+h) - \mathbf{t}(s)|}{|h|}.$$



شکل ۱.۶

وقتی

$h \to 0$ ، داریم $\frac{\frac{1}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} \to 1$ ، و $\kappa = \lim \frac{\omega}{|h|} = |\mathbf{t}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)|$.

حال فرمولهایی را می‌یابیم که انحنا را برحسب مختصات بیان می‌کنند. در حالت پارامتری سازی طبیعی (طول قوس) ، داریم

$$\kappa = |\mathbf{r}''| \quad \text{یا} \quad \kappa = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}. \tag{۱۰۶}$$

درحالت پارامتری سازی دلخواه، از فرمول اول فرنه، یعنی $\kappa = |\mathbf{t}'|$ ، و (۵ ۰ ۵) استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\kappa = |\mathbf{t}'| = |\dot{\mathbf{t}}|\,|\dot{\mathbf{r}}|^{-1} = |\dot{\mathbf{r}}|^{-1}\left|\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}|)\right| = |\dot{\mathbf{r}}|^{-3}\left||\dot{\mathbf{r}}|\ddot{\mathbf{r}} - \frac{d|\dot{\mathbf{r}}|}{dt}\dot{\mathbf{r}}\right|$$
$$= |\dot{\mathbf{r}}|^{-4}|\dot{\mathbf{r}}^2\ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{r}}|^{-4}|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}|.$$

چون بردار $\dot{\mathbf{r}}$ بوضوح بر $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ عمود است، داریم $|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}}|$ و، درنتیجه،

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

برای بیان این فرمول برحسب مختصات، نمادهای کمکی

$$A = \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} \tag{۲۰۶}$$

را معرفی می‌کنیم. در این صورت، فرمول مربوط به انحنا شکل

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} \quad \text{یا} \quad \kappa = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} \tag{۳۰۶}$$

را به خود خواهد گرفت.

امثله و تمرین

۱. انحنای یک دایره در تمام نقاطش یکی بوده و برابر است با عکس شعاع. دایرهٔ به شعاع a و مرکز مبداء دارای نمایش پارامتری

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = 0$$

است. از اینرو،

$$\dot{x} = -a\sin t, \qquad \dot{y} = a\cos t, \qquad \ddot{x} = -a\cos t, \qquad \ddot{y} = -a\sin t, \qquad \dot{z} = \ddot{z} = 0;$$

$$A=0, \qquad B=0, \qquad C=\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}=a^2,$$

$$\kappa=\frac{\sqrt{a^4}}{(a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t)^{3/2}}=\frac{a^2}{a^3}=\frac{1}{a}.$$

۲. انحنای مارپیچ، چرخزاد، و کشاننده را پیدا کنید.

۳. انحنای منحنی زنجیری

$$y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})=a\cosh\frac{x}{a}, \qquad z=0$$

را پیدا کنید.

۲.۶ دایرهٔ انحنا

لم. دو منحنی پارامتری از کلاس C_3 دارای تماس از مرتبهٔ لااقل 2 در نقطهٔ مشترک A اند اگر و فقط اگر در A بردار مماس مشترک، بردار قائم اصلی مشترک و، بعلاوه، یک انحنا داشته باشند.

این لم نتیجهٔ فوری قضیهٔ زیر بخش ۱.۴ و فرمولهای $\mathbf{r}'=\mathbf{t}, \mathbf{r}''=\mathbf{t}'=\kappa\mathbf{n}$ است.

دایره‌ای که با منحنی $\mathscr{K}$ در نقطهٔ P دارای تماس از بالاترین مرتبهٔ ممکن باشد **دایرهٔ بوسان** $\mathscr{K}$ در P یا **دایرهٔ انحنای** $\mathscr{K}$ در P نامیده می‌شود.

مرکز این دایره **مرکز انحنای** منحنی $\mathscr{K}$ در P نام دارد، وشعاع آن **شعاع انحنای** منحنی در P نامیده می‌شود.

به‌عنوان نتیجه‌ای فوری از این لم و مثال ۱ زیر بخش قبل، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیه. یک منحنی پارامتری از کلاس C_3 در هر نقطهٔ منتظمی که یک نقطهٔ اصلاح نباشد $(\kappa\neq 0)$ دایرهٔ انحنا دارد. دایرهٔ انحنا برصفحهٔ بوسان واقع بوده و دارای تماس از مرتبهٔ لااقل دو با منحنی است. شعاعش عکس انحنای منحنی درنقطهٔ تماس است، ومرکزش برآن نیمه از قائم اصلی واقع است که بردار قائم اصلی به آن اشاره دارد.

بنابراین، مرکز انحنای منحنی $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ در نقطهٔ s_0 دارای بردار موضع

$$\mathbf{R}_c=\mathbf{r}(s_0)+\frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0) \qquad (۴.۶)$$

است، و شعاع انحنا برابر است با $\rho = 1/\kappa$.

خط مستقیم مار برمرکز انحنای منحنی $\mathscr{K}$ در P و عمود برصفحهٔ بوسان $\mathscr{K}$ در P **خط قطبی** منحنی در P نامیده می‌شود. معادلهٔ پارامتری خط قطبی منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ در s عبارت است از $\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + u\mathbf{b}$ یا

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} + u\mathbf{b}, \tag{۵.۶}$$

که در آن u پارامتر خط قطبی است.

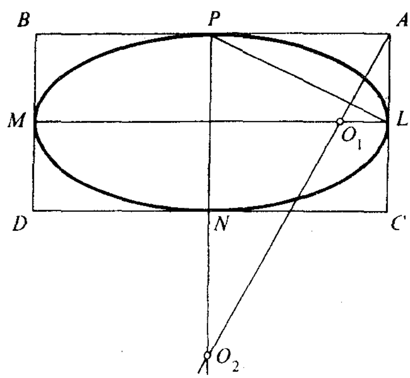
تمرین

۱. مراکز انحنای بیضی $x = a\cos t, y = b\sin t$ را در رئوس آن، یعنی نقاط برخورد بیضی با محورهای تقارنش، بیابید. ثابت کنید که این مراکز انحنا را می‌توان به طریق زیر به دست آورد: بیضی را در مستطیل $ABCD$ محاط می‌کنیم (شکل ۲.۶). سپس از A خطی عمود می‌کنیم بر PL، که رئوس بیضی واقع براضلاع مستطیل مار بر A را بهم وصل کرده است. این عمود محورهای بیضی یا امتدادهای آنها را در نقاط O_1 و O_2 قطع می‌کند، که به ترتیب مراکز انحنا در نقاط L و P می‌باشند.

۲. مکان هندسی مراکز انحنای مارپیچ $\mathscr{C}$ خود یک مارپیچ مانند $\mathscr{C}_1$ است با همان محور و همان پای پیچ. مکان هندسی مراکز انحنای $\mathscr{C}_1$ نیز به نوبهٔ خود با $\mathscr{C}$ یکی است. این احکام را ثابت کنید.

۳. معادلهٔ خط قطبی مارپیچ را در یک نقطهٔ دلخواه بیابید. آیا خط قطبی با محور مارپیچ همرس است؟

۴. ثابت کنید مماس برمنحنی در یک نقطه و مماس در نقطهٔ نظیر از مکان هندسی مراکز انحنای آن، با اینکه درحالت کلی یکدیگر را قطع نمی‌کنند، راستاهای عمود برهم دارند.



شکل ۲.۶

۳.۶ تاب یک منحنی

حال ضریب τ در فرمولهای فرنه را ، شبیه تعبیر هندسی ضریب κ در ۱.۶ ، تعبیر هندسی می‌کنیم .

روی یک منحنی از کلاس C_3 ، نقطهٔ منتظم P را که یک نقطهٔ اصلاح نباشد $(\kappa \neq 0)$ اختیار می‌کنیم و ، در همسایگی به‌قدر کافی کوچک P ، نقطهٔ متغیر Q را برمنحنی طوری می‌گیریم که Q نیز یک نقطهٔ اصلاح نباشد . فرض‌کنیم P نظیر به مقدار s از پارامتر طبیعی منحنی و Q نظیر به مقدار $s + h$ باشد . بنابرتعریف ، بردارهای قائم به صفحات‌بوسان در P و Q به‌ترتیب عبارتندِ از بردارهای قائم دوم $\mathbf{b}(s)$ و $\mathbf{b}(s + h)$. جزدرحالتی‌که راستاهای دو صفحه یکی هستند ، که به ازای h به‌قدر کافی کوچک فقط وقتی می‌تواند روی دهد که $\tau = 0$ ، زیرا در غیر این صورت $\mathbf{b}'(s) = -\tau\mathbf{n}(s) \neq 0$ ، این دو صفحه در خط مستقیمی مانند l مشترکند ، و این خط موازی بردار $\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s + h)$ است . این خط را به صورت‌زیر جهتدار می‌کنیم : اگر خط مزبور عمود برخط مماس به منحنی در نقطهٔ P نباشد ، جهت آن را جهت بردار $\mathbf{w}$ واقع برخط می‌گیریم که به همان نیم فضایی اشاره می‌کند که به‌وسیلهٔ صفحهٔ قائم معین می‌شود و بردار $\mathbf{t}(s)$ بدان اشاره دارد . به عبارت دیگر ، $\mathbf{w}$ یک بردار واقع بر خط است به‌طوری که $\mathbf{t}(s)\mathbf{w} > 0$. اگر خط عمود برخط مماس باشد ، جهت آن را دلخواه می‌گیریم .

به ازای h به‌قدر کافی کوچک ، حالت اخیر فقط وقتی می‌تواند روی‌دهد که $\tau = 0$. در واقع ، داریم

$$\mathbf{b}(s + h) = \mathbf{b}(s) + h\mathbf{b}'(s) + o(h) = \mathbf{b}(s) - h\tau\mathbf{n}(s) + o(h);$$

درنتیجه ،

$$\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s + h) = -h\tau\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s) + o(h)$$

یا

$$\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s + h) = h\tau\mathbf{t}(s) + o(h). \qquad (۶.۶)$$

هرگاه $\tau \neq 0$ و h به‌قدر کافی کوچک باشد ، جملات موجود در $o(h)$ نمی‌توانند جملهٔ $h\tau\mathbf{t}(s)$ را حذف کنند . درحالتی که $\tau \neq 0$ داریم $(\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s + h))\mathbf{t} = h\tau + o(h)$ ؛ لذا ، جهت فصل‌مشترک دوصفحهٔ بوسان با جهت‌بردار $\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s + h)$ یکی می‌شود اگر $h\tau > 0$ ، و مخالف آن می‌شود اگر $h\tau < 0$.

همینکه جهت خط مشخص شود ، زاویهٔ بین هر جفت مرتب از صفحات گذرنده براین خط را می‌توان باعددی‌بین $-\pi/2$ و $\pi/2$ سنجید . درواقع ، یک دوران حول خط به‌اندازهٔ زاویهٔ غیر منفرجه را در نظر می‌گیریم که صفحهٔ اولی را روی صفحهٔ دیگر قرار دهد. به

قدرمطلق این زاویه، برحسب آنکه سه بردار زیر یک سه‌تایی جهتدار با جهت مثبت یا منفی بسازند، علامت مثبت یا منفی می‌دهیم: (یک) یک بردار عمود بر محور دوران؛ (دو) بردار موضع آن پس از دوران؛ (سه) برداری واقع برمحور دوران که جهت آن را مشخص می‌کند.

این امر متناظر است با تعیین جهت دوران حول محور جهتدار. در مورد دستگاه مختصات راست دست، یا، به‌طور دقیقتر، **جهت راست دست فضا، جهت مثبت دوران چنان است‌که پیچش یک پیچ‌معمولی درجهت‌مثبت همان‌جهت مثبت محور دوران می‌باشد.**

حال زاویهٔ جهتدار بین صفحهٔ بوسان در P و صفحهٔ بوسان در Q را با ψ نشان می‌دهیم. حد نسبت ψ/h، وقتی $h \to 0$، ***تاب منحنی*** در P نامیده می‌شود.

قضیه. ***تاب منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ از کلاس C_3 در هر نقطهٔ منتظمی که نقطهٔ اصلاح نباشد وجود داشته و همان ضریب τ در فرمولهای فرنه می‌باشد.***

برهان. به‌خاطر پیوستگی، زاویهٔ بین $\mathbf{b}(s)$ و $\mathbf{b}(s+h)$، به ازای h به قدر کافی کوچک، از $\pi/2$ کوچکتر است. در نتیجه، هر دوران به اندازهٔ زاویه‌ای حاده که صفحهٔ بوسان در P را روی صفحهٔ بوسان در Q قرار دهد $\mathbf{b}(s)$ را به $\mathbf{b}(s+h)$ خواهد برد. بنابراین، قدر مطلق ψ همان زاویهٔ بین دو بردار اخیر است؛ یعنی،

$$|\psi| = \sphericalangle(\mathbf{b}(s),\ \mathbf{b}(s+h))$$

یا

$$\sin|\psi| = |\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s+h)|.$$

پس، باتوجه به (۶.۶)، داریم

$$\sin|\psi| = |h\tau\mathbf{t}(s) + o(h)| = |h||\tau| + o(h),$$

که به‌نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد که

$$\lim\left|\frac{\psi}{h}\right| = \lim\frac{\sin|\psi|}{|h|} = |\tau|. \tag{۷.۶}$$

هرگاه $\tau = 0$، این رابطه معادل $\lim\left|\frac{\psi}{h}\right| = 0$ است. توجه کنید که اگر $\tau \neq 0$، ψ وقتی مثبت است که حاصل ضرب $\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s+h)$ همان جهت محور دوران را داشته باشد که این حالت، همانطور که در بالا دیدیم، وقتی رخ می‌دهد که $h\tau > 0$، و ψ وقتی منفی است که $h\tau < 0$. بنابراین، $\psi h\tau > 0$ یا ψ/h همعلامت با τ است. این، همراه با (۷.۶)، ایجاب می‌کند که

$$\lim \frac{\psi}{h} = \tau,$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود .

حال چند فرمول برای تاب به‌دست می‌آوریم . با ضرب آخرین فرمول فرنه در **n** داریم

$$\tau = -\mathbf{b}'\mathbf{n} = -(\mathbf{t} \times \mathbf{n})'\mathbf{n} = -(\mathbf{t}' \times \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{t} \times \mathbf{n}')\mathbf{n} = \mathbf{t}\mathbf{n}\mathbf{n}',$$

زیرا $\mathbf{t}' \times \mathbf{n} = \kappa\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$. بعلاوه ،

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}', \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|} = \frac{\mathbf{r}''}{\kappa}, \qquad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{r}'''}{\kappa} - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{r}'',$$

و

$$\mathbf{r}'\mathbf{r}''\left(\mathbf{r}''' - \frac{\kappa'\mathbf{r}''}{\kappa}\right) = \mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''.$$

درنتیجه ،

$$\tau = \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''}{\kappa^2} = \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''}{(\mathbf{r}'')^2} \tag{۸.۶}$$

یا ، برحسب مختصات ،

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\kappa^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}.$$

این فرمولها فقط برای پارامتری‌سازی طول قوس معتبرند . با مراجعه به پارامتری سازی عمومی ، در می‌یابیم که

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}\frac{dt}{ds},$$

$$\mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\mathbf{r}}\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\mathbf{r}''' = \dddot{\mathbf{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\ddot{\mathbf{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2t}{ds^2} + \dot{\mathbf{r}}\frac{d^3t}{ds^3}.$$

با تشکیل حاصل ضرب مختلط سه‌معادله ، داریم

$$\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''' = \dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = \frac{\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^6}.$$

پس ، با یادآوری فرمول (۳۰۶) ، یعنی $\kappa = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|/|\dot{\mathbf{r}}|^3$ ، بالاخره خواهیم داشت

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})^2} = \frac{\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}}{\dot{\mathbf{r}}^2\ddot{\mathbf{r}}^2 - (\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}})^2} \tag{۹۰۶}$$

یا ، برحسب مختصات ،

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2} \tag{۱۰۰۶}$$

که درآن ، همانند در (۲۰۶) ،

$$A = \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}.$$

امثله و تمرین

۱. بردار قائم دوم یک منحنی مسطح ثابت است ، زیرا برصفحهٔ منحنی عمود است ؛ و در نتیجه ، $\tau = 0$. بعکس ، هرگاه در بازه‌ای مانند (a, b) ، $\tau = 0$ ، آنگاه نقش این بازه درصفحه قرار دارد . در واقع ، در این حالت $\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''' = 0$ ؛ درنتیجه ، $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''$ همیشه همصفحه هستند . پس ، همانطور که در تمرین ۱ در ۳۰۲ دیدیم ، بردار $\mathbf{r}'$ موازی یک صفحهٔ ثابت بوده و نقاط انتهایی بردارهای $\mathbf{r}$ در یک صفحهٔ ثابت قرار دارند .

۲. تاب مارپیچ را پیدا کنید .

[حل .]

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = bt,$$
$$\dot{x} = -a\sin t, \qquad \dot{y} = a\cos t, \qquad \dot{z} = b,$$
$$\ddot{x} = -a\cos t, \qquad \ddot{y} = -a\sin t, \qquad \ddot{z} = 0,$$
$$\dddot{x} = a\sin t, \qquad \dddot{y} = -a\cos t, \qquad \dddot{z} = 0,$$

$$A = \begin{vmatrix} a\cos t & b \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t, \qquad B = \begin{vmatrix} b & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix} = -ab\cos t,$$

$$C = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix} = a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = a^2,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^4 + a^2b^2 = a^2(a^2 + b^2),$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2b,$$

$$\tau = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

درتمرین ۲ در ۱۰۶ دیدیم که انحنای مارپیچ مساوی است با $\kappa = a(a^2+b^2)^{-1}$.
بنابراین ، مارپیچ یک منحنی با انحنا و تاب ثابت است .]

۳. انحنا و تاب منحنیهای زیر را بیابید :

(آ) $x = u, \quad y = u^2, \quad z = u^3$

(ب) $x = u, \quad y = \frac{1+u}{u}, \quad z = \frac{1-u^2}{u}$

(پ) $y = f(x), \quad z = g(x)$

(ت) $x = a(u - \sin u), \quad y = a(1-\cos u), \quad z = bu$

(ث) $x = a(3u - u^3), \quad y = 3au^2, \quad z = a(3u + u^3)$

از این منحنیها کدامها در یک صفحه واقعند ؟

۴. فرض کنید $u(\tau)$ و $v(\tau)$ توابع دلخواهی از کلاس C_2 باشند . تاب منحنی

$$x = a\int_0^t \frac{\dot u}{u^2+v^2+1}\,d\tau, \qquad y = a\int_0^t \frac{\dot v}{u^2+v^2+1}\,d\tau, \qquad z = a\int_0^t \frac{u\dot v - v\dot u}{u^2+v^2+1}\,d\tau,$$

که درآن $a \neq 0$ ثابت است ، را پیدا کنید .

۵. ثابت کنید هرگاه $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ، که در آن s پارامتر قوس است ، یک منحنی با انحنای ثابت باشد ، آنگاه $\mathbf{r} = \int_0^s \mathbf{b}(u)\,du$ یک منحنی با تاب ثابت می‌باشد .

۴۰۶ بردار داربو[1]

اگر پارامتر طبیعی یک‌منحنی را زمان بگیریم ،معادلهٔ آن را می‌توان به عنوان قانون حرکت نقطه‌ای که با سرعت 1 در طول منحنی حرکت می‌کند درنظر گرفت . در این صورت ، سه وجهی فرنه همراه نقطه به‌عنوان یک‌جسم‌صلب تغییر مکان خواهدداد . می‌توان این حرکت را به صورت انتقال رأس و دوران حول رأس تجزیه کرد . انتقال به‌وسیلهٔ معادلهٔ منحنی توصیف می‌شود . سرعت نقاط انتهایی بردارهای سه‌وجهی فرنه در دورانشان حول رأس عبارت است از $\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'$. اما می‌توان سرعت نقاط یک جسم صلب در دوران حول یک‌نقطه را با یک بردار ، یعنی بردار سرعت زاویه‌ای ، مشخص کرد . اگر این بردار را برای قسمت دورانی حرکت سه‌وجهی فرنهٔ با $\mathbf{d}$ نشان دهیم ، داریم

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}. \tag{۱۱۰۶}$$

---

1. *Darboux*

حال بردار $\mathbf{d}$ را معین می‌کنیم. برای این کار می‌نویسیم $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}$. با قراردادن در (۱۱۰۶)، داریم

$$\mathbf{t}' = -\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = \alpha\mathbf{b} - \gamma\mathbf{t}, \qquad \mathbf{b}' = -\alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{t}.$$

از مقایسهٔ این فرمولها با فرمولهای فرنه خواهیم داشت $\alpha = \tau, \beta = 0, \gamma = \kappa$. بنابراین،

$$\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}. \tag{۱۲۰۶}$$

این بردار **بردار داربو** نامیده‌می‌شود. بدنیست‌بدانید که این بردار قبل از داربو به وسیلهٔ لانکرت[1] کشف شده بود. این نتیجه را با تمرین ۲ در ۲۰۵ مقایسه کنید.

۵۰۶ موضع نسبی منحنی نسبت به سه‌وجهی فرنه‌اش

برای آنکه موضع نسبی بخشی از یک منحنی در یک نقطهٔ منتظم که نقطهٔ اصلاح نیست را نسبت به سه‌وجهی فرنه دریابیم، تصاویر منحنی را روی صفحات سه‌وجهی مطالعه می‌کنیم. فرض کنیم نقطهٔ ما نظیر به‌مقدار $s = 0$ از پارامتر طبیعی باشد. معادلهٔ پارامتری منحنی را می‌توان به شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0' + \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_0''s^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{r}_0'''s^3 + o(s^3)$$

نوشت. زیرنویس o بیانگر مقدار تابع درنقطهٔ $s = 0$ است. طبق فرمولهای فرنه، داریم

$$\mathbf{r}_0' = \mathbf{t}_0, \qquad \mathbf{r}_0'' = \kappa_0\mathbf{n}_0, \qquad \mathbf{r}_0''' = -\kappa_0^2\mathbf{t}_0 + \kappa_0'\mathbf{n}_0 + \kappa_0\tau_0\mathbf{b}_0.$$

با قرار دادن اینها در فرمول قبل، داریم

$$\mathbf{r} = (s - \tfrac{1}{6}\kappa_0^2s^3)\mathbf{t}_0 + (\tfrac{1}{2}\kappa_0s^2 + \tfrac{1}{6}\kappa_0's^3)\mathbf{n}_0 + \tfrac{1}{6}\kappa_0\tau_0s^3\mathbf{b}_0 + o(s^3).$$

حال یک دستگاه مختصات خاص را در فضا طوری اختیار می‌کنیم که نقطهٔ مورد بحث مبداء بوده و بردارهای $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ بردارهای یکهٔ محورهای مختصات باشند. در این دستگاه مختصات، منحنی را می‌توان با سه معادلهٔ

$$x = s + o(s),$$
$$y = \tfrac{1}{2}\kappa_0s^2 + o(s^2),$$
$$z = \tfrac{1}{6}\kappa_0\tau_0s^3 + o(s^3),$$

نمایش داد. ما در هر معادله فقط جمله‌ای را که درجه‌اش نسبت به s پایین‌ترین است نگه داشته، بقیهٔ جملات را با علامت o نشان داده‌ایم.

نگاهی دقیقتر به این معادلات معلوم می‌سازد که، با افزایش s، منحنی صفحهٔ قائم را در جهت بردار $\mathbf{t}$ قطع می‌کند، زیرا مختص x، بدنبال تغییرات s، از مقدار منفی به

1. Lancret

مقدار مثبت تغییر می‌یابد . منحنی ، درصورتی که $|s|$ به‌قدر کافی کوچک بماند ، صفحهٔ اصلاحی را قطع نخواهد کرد ، زیرا $y \geq 0$ از علامت s مستقل است . منحنی پس از تماس با صفحهٔ اصلاحی بازگشته و درطرفی‌از آن که بردار قائم $\mathbf{n}$ به‌آن اشاره دارد قرار می‌گیرد فقط‌وقتی که $\kappa_0 \neq 0$. منحنی ، به شرط آنکه $\kappa_0 \neq 0 \neq \tau_0$ ، از صفحهٔ بوسان می‌گذرد ، زیرا z با تغییر علامت s تغییر علامت می‌دهد . اگر تاب مثبت باشد ، منحنی ، وقتی s افزایش یابد ، از پایین صفحهٔ بوسان به بالای آن می‌رود ، زیرا علامت z باعلامت s یکی می‌باشد . چنانچه $\tau_0 < 0$ ، منحنی از بالای صفحهٔ بوسان به پایین آن خواهد رفت .

تصاویر منحنی در همسایگی نقطهٔ P روی صفحات سه‌وجهی فرنه در این نقطه با منحنیهای زیر تقریب می‌شوند :

(آ) تصویر روی صفحهٔ بوسان با سهمی

$$x = s, \qquad y = \tfrac{1}{2}\kappa_0 s^2, \qquad z = 0;$$

(ب) تصویر روی صفحهٔ قائم با سهمی نیمه مکعبی

$$x = 0, \qquad y = \tfrac{1}{2}\kappa_0 s^2, \qquad z = \tfrac{1}{6}\kappa_0\tau_0 s^3,$$

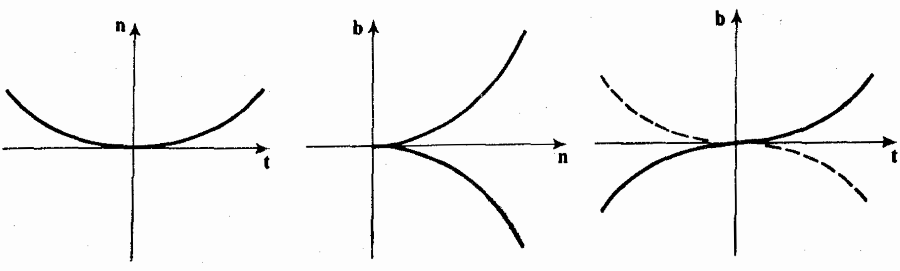
که مبداء دستگاه مختصات‌نقطهٔ‌بازگشت آن است ؛

(پ) تصویر روی صفحهٔ اصلاحی با سهمی مکعبی

$$x = s, \qquad y = 0, \qquad z = \tfrac{1}{6}\kappa_0\tau_0 s^3,$$

که مبداء نقطهٔ عطف آن است .

هرقدر بخش کوچکتری از منحنی را در نظر بگیریم ، این تقریبها بهتر خواهند بود . تصاویر منحنی درشکل ۳۰۶ نشان داده شده‌اند . خط منقطع نظیرحالت $\tau_0 < 0$ می‌باشد .



شکل ۳۰۶

۷. گسترده و گسترنده

۱.۷ گستردهٔ یک منحنی

یک منحنی در فضا در هر نقطه بی‌نهایت قائم دارد . اینها خطوط مستقیمی هستند که‌ازآن

نقطه گذشته و برخط مماس برمنحنی درهمان نقطه عمودند. بنابراین، این خطوط درصفحهٔ قائمی که به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{n}$ و $\mathbf{b}$ تولید می‌شود قراردارند. حال خانواده‌های یک پارامتری مشتقپذیر از خطوط قائم به یک منحنی با معادلهٔ پارامتری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ را در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که‌هر s نظیر به یک‌قائم درنقطهٔ نظیر به s بوده، و بردارهای قائم تابع مشتقپذیری از پارامتر باشد.

منحنی $\mathscr{K}_1$ ی که مماسهایش چنین خانوادهٔ یک پارامتری از قائمهای منحنی $\mathscr{K}$ را تشکیل دهند یک **گستردهٔ** منحنی $\mathscr{K}$ نامیده می‌شود.

حال گسترده‌های یک منحنی منتظم از کلاس C_3 را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم معادلهٔ منحنی $\mathscr{K}$ به صورت

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

باشد، که در آن s طول قوس روی $\mathscr{K}$ است. اگر گسترده وجود داشته باشد، بردار موضع $\mathbf{R}$ یک نقطه از گسترده که برقائم به $\mathscr{K}$ در نقطهٔ s قرار دارد عبارت است از

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + \alpha(s)\mathbf{n}(s) + \beta(s)\mathbf{b}(s),$$

که درآن α, β توابعی از پارامتر s، و $\mathbf{n}(s)$ و $\mathbf{b}(s)$ بردار قائم اصلی و بردار قائم دوم $\mathscr{K}$ در s می‌باشند. این رابطه را می‌توان به عنوان معادلهٔ پارامتری گسترده درنظر گرفت. با اینحال، توجه کنید که پارامتر s لزوما" پارامتر طبیعی گستردهٔ $\mathscr{K}_1$ نیست. بااین فرض که α و β توابعی مشتقپذیر هستند، آنها را معین می‌کنیم. بردار مماس برمنحنی $\mathscr{K}_1$ عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{r}'(s) + \alpha'(s)\mathbf{n}(s) + \alpha(s)\mathbf{n}'(s) + \beta'(s)\mathbf{b}(s) + \beta(s)\mathbf{b}'(s).$$

با استفاده از فرمولهای (۱۰۵) و (۱۳۰۵) خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{t} + \alpha\,\mathbf{n} + \alpha(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + \beta'\mathbf{b} - \beta\tau\mathbf{n},$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = (1 - \alpha\kappa)\mathbf{t} + (\alpha' - \beta\tau)\mathbf{n} + (\alpha\tau + \beta')\mathbf{b}.$$

اما این بردار مماس باید موازی بردار $\alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{b}$، که بردار هادی قائم نظیر به $\mathscr{K}$ است، باشد.

بنابراین، $d\mathbf{R}/ds \times (\alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{b}) = 0$، که نتیجه می‌دهد

$$1 - \alpha\kappa = 0, \qquad \beta(\alpha' - \beta\tau) - \alpha(\alpha\tau + \beta') = 0.$$

معادلهٔ اول ایجاب می‌کندکه $\alpha = 1/\kappa$؛ یعنی، برابر است با شعاع انحنای منحنی

$\mathscr{K}$، مشروط براینکه $\kappa \neq 0$ ، بنابراین، نقطه با بردار موضع $\mathbf{r} + \alpha\mathbf{n}$ مرکز انحنا است، و نقطهٔ گسترده با بردار موضع $\mathbf{r} + \alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{b}$ برخط قطبی منحنی $\mathscr{K}$ در s قرار دارد. هیچ نقطه‌ای برگسترده وجود ندارد که متناظر یک نقطهٔ اصلاح منحنی باشد.

معادلهٔ دوم یک‌معادلهٔ دیفرانسیل است،که می‌توان آن را به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\beta\alpha' - \beta^2\tau = \alpha^2\tau + \alpha\beta',$$

$$\beta\alpha' - \alpha\beta' = (\alpha^2 + \beta^2)\tau,$$

$$\frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha^2} = \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]\tau,$$

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]\tau,$$

$$-\frac{d/ds(\beta/\alpha)}{1 + (\beta/\alpha)^2} = \tau,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arc\,cot}\frac{\beta}{\alpha}\right) = \tau.$$

انتگرالگیری نتیجه می‌دهد که

$$\operatorname{arc\,cot}\frac{\beta}{\alpha} = \int \tau(s)\,ds + \text{ثابت};$$

و ، بالاخره،

$$\beta = \alpha\cot\left(\int \tau(s)\,ds + \text{ثابت}\right).$$

بنابراین، معادلهٔ گسترده، در صورت وجود، برابر است با

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\cot\left(\int \tau(s)\,ds + \text{ثابت}\right)\mathbf{b}(s). \qquad (۱۰۷)$$

به‌آسانی معلوم می‌شودکه، به‌ازای هرمقدار از ثابت مورد بحث، منحنی داده شده بامعادلهٔ (۱۰۷) یک گستردهٔ منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ است. بنابراین، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیه. *هرمنحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ از کلاس C_3 بی‌نهایت گسترده دارد. معادلهٔ گسترده‌ها به شکل (۱۰۷) است؛ بخصوص، گسترده‌هایی که با مقادیر ثابت از هم تمیز داده می‌شوند.*

تبصره. هرگاه منحنی در یک صفحه باشد، آنگاه $\tau = 0$، و در بین گسترده‌های منحنی یکی

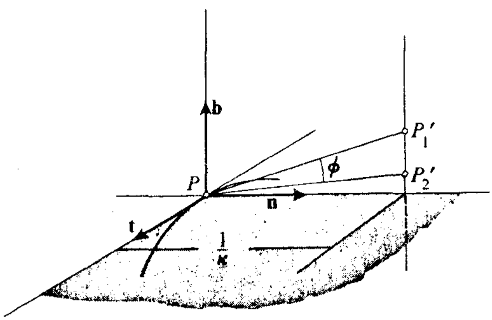
هست که در همان صفحه قرار دارد . معادلهٔ این گسترده عبارت است از

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s). \tag{۲۰۷}$$

بنابراین ، این گسترده مکان هندسی مراکز انحنای منحنی داده شده است .

درحالت‌کلی $(\tau \neq 0)$ ، مکان هندسی مراکز انحنا یک‌گسترده نیست ، زیراممکن است مماس براین مکان هندسی اصلا" منحنی را قطع نکند .

حال به‌اختصار توضیح می‌دهیم که چگونه گسترده‌های مختلف یک منحنی در رابطه با یکدیگر قرار دارند . همانطور که دیدیم ، نقطه‌ای از یک گسترده که نظیر نقطهٔ معلومی از منحنی $\mathscr{K}$ است برخط قطبی منحنی در این نقطه واقع است . نقطهٔ P رابرمنحنی ثابت گرفته ، و نقاط P_1' و P_2' راروی دو گستردهٔ مختلف در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰۷) . همچنین زاویهٔ بین قائمهای PP_1' و PP_2' به منحنی $\mathscr{K}$ در P را با ϕ نشان می‌دهیم . این زاویه برابر است‌با تفاضل بین زوایای ϕ_1 حادث از قائم‌اصلی و PP_1' و ϕ_2 حادث از قائم اصلی و PP_2' . چون تانژانت زوایای اخیر مساوی $\cot\left(\int\tau\, ds + C_1\right)$ و $\cot\left(\int\tau\, ds + C_2\right)$ با ثابتهای C_1 و C_2 است ، این تفاضل باید ثابت باشد ؛ یعنی ، ثابت $= \phi$.



شکل ۱۰۷

امثله و تمرین

۱ . گسترده‌های مارپیچ را پیدا کنید .

۲ . تمام گسترده‌های منحنیهای زیر را پیدا کنید :

(آ) چرخزاد ؛

(ب) بیضی $x = a\cos t, y = a\sin t, z = 0$ ؛

(پ) کشاننده .

۳ . ثابت کنید گسترده‌ای ازچرخزاد که در صفحهٔ‌منحنی قراردارد خودش یک‌چرخزاد است .

۴. ثابت کنید گسترده‌ای از کشاننده‌که در صفحهٔ منحنی قرار دارد یک منحنی زنجیری است.
۵. فرمولی بیابید که زاویهٔ θ بین قائم به منحنی در نقطهٔ P که برگستردهٔ معلومی مماس است و قائم اصلی منحنی در P را به صورت تابعی از پارامتر s بیان نماید.

۲۰۷ گسترندهٔ یک منحنی

هر منحنی مانند $\mathscr{K}_1$ که خطوط مماس برمنحنی $\mathscr{K}$ را در زاویهٔ قائمه قطع کند یک **گسترندهٔ** $\mathscr{K}$ نامیده می‌شود.

باتوجه به این تعریف، بدیهی است که $\mathscr{K}_f$ ***یک گسترندهٔ $\mathscr{K}$ است اگر و فقط اگر $\mathscr{K}$ یک گستردهٔ $\mathscr{K}_1$ باشد.***

فرض کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ معادلهٔ یک منحنی از کلاس C_2 بوده، و s پارامتر طبیعی باشد. پس معادلهٔ یک گسترنده، در صورت وجود، به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + \lambda(s)\mathbf{t}(s),$$

که درآن $\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'(s)$ بردار یکهٔ مماس منحنی $\mathscr{K}$ است. این رابطه معادلهٔ پارامتری یک گسترنده است اگر و فقط اگر بردار مماس $d\mathbf{R}/ds$ به بردار مماس $\mathbf{t}$ منحنی اصلی $\mathscr{K}$ متعامد باشد. این شرط به ما اجازهٔ تعیین تابع $\lambda(s)$ را می‌دهد؛ یعنی، داریم

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{r}' + \lambda'\mathbf{t} + \lambda\mathbf{t}' = (1 + \lambda')\mathbf{t} + \lambda\kappa\mathbf{n}.$$

شرط $d\mathbf{R}/ds\ \mathbf{t} = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$1 + \lambda' = 0, \qquad \lambda' = -1, \qquad \lambda = s_0 - s,$$

که s_0 یک ثابت دلخواه است. از اینرو، معادلهٔ گسترنده عبارت است از

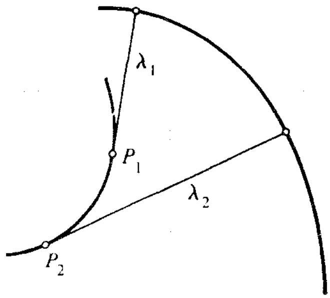
$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + (s_0 - s)\mathbf{t}(s), \tag{۳۰۷}$$

بنابراین، قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه. ***منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ از کلاس C_2 بی‌نهایت گسترنده دارد، که اینها با معادله‌ای به شکل (۳۰۷) نمایش داده می‌شوند؛ گسترنده‌های خاص به‌وسیلهٔ مقدار ثابت s_0 ازهم‌تمیز داده می‌شوند.***

دونقطهٔ P_1 و P_2 از منحنی $\mathscr{K}$ را که نظیر به مقادیر s_1 و s_2 از پارامترند، در نظر می‌گیریم (شکل ۲۰۷). قطعاتی از خطوط مماس در این نقاط که بین نقاط و یک گسترندهٔ ثابت منحنی قرار دارند به‌ترتیب دارای طولهای $\lambda_1 = |s_0 - s_1|$ و $\lambda_2 = |s_0 - s_2|$ می‌باشند.

تفاضل این طولها برابر است با $|s_1 - s_2|$،که طول قوس منحنی بین نقاط P_1 و P_2 است. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که اگر یک نخ را از روی منحنی باز کنیم و مواظب باشیم که در همه حال کشیده بماند، هر نقطه از نخ یک گسترنده از منحنی را رسم خواهد کرد.



شکل ۲۰۷

با اینکه فرمول (۳۰۷) بسیار ساده است، اما استفادهٔ عملی از آن نیاز به معرفی صریح پارامتر طبیعی دارد. به جای این کار، اغلب راحتتر آن است که فرمول (۳۰۷) را به کار نبرده، بلکه گسترنده را مستقیما" از تعریف به دست آوریم. یعنی، اگر معادلهٔ منحنی به‌صورت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد، با یک پارامتر دلخواه،داریم

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + \mu(t)\dot{\mathbf{r}}(t).$$

در اینجا

$$\dot{\mathbf{R}} = [1 + \dot{\mu}(t)]\dot{\mathbf{r}}(t) + \mu(t)\ddot{\mathbf{r}}(t),$$

و μ باید از معادلهٔ دیفرانسیل

$$\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{r}} = [1 + \dot{\mu}(t)][\dot{\mathbf{r}}(t)]^2 + \mu(t)\dot{\mathbf{r}}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$$

معین شود.

تمرین

گسترنده‌های مارپیچ را پیدا و ثابت کنید که تمام گسترنده‌های مارپیچ‌باهم و باگسترنده‌های یک دایره به شعاع مساوی شعاع استوانهٔ حامل مارپیچ همنهشت هستند.

۸ معادلهٔ طبیعی یک منحنی. انواع خاص منحنیها

۱.۸ معادلهٔ طبیعی یک منحنی

قضیه. *اگر دو تابع پیوستهٔ*

$$\kappa = \kappa(s) > 0, \qquad \tau = \tau(s)$$

دربازهٔ (a,b) ، متناهی یا نامتناهی ، مفروض باشند ، یک منحنی پارامتری وجود دارد به طوری که s پارامتر طبیعی آن بوده و توابع $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ انحنا و تاب منحنی را بـه صورت توابعی از پارامتر نمایش می‌دهند . دو منحنی که دارای یک انحنا و تاب باشند را می توان با یک حرکت جسم صلب برهم منطبق کرد .

برهان . اگر یک منحنی با این خاصیت وجود داشته باشد ، معادلهٔ پارامتری آن به صورت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ خواهد بود ، که $\mathbf{r}(s)$ در دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{t}, \\ \mathbf{t}' &= \kappa\mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= -\tau\mathbf{n} \, , \end{aligned} \tag{۱۰۸}$$

و شرایط اضافی

$$\mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1, \qquad \mathbf{tn} = \mathbf{nb} = \mathbf{bt} = 0 \tag{۲۰۸}$$

(یعنی بردارهای $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ یک سه‌تایی متعامد یکه از بردارها را تشکیل می‌دهند) صدق می‌کند .

از طرف دیگر ، هر جواب (۱۰۸) که در (۲۰۸) نیز صدق کند و به ازای آن سه تایی $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ جهتدار باجهت مثبت باشد یک منحنی با خواص مطلوب را نمایش خواهد داد .

بنابراین ، اثبات قضیه را می‌توان به اثبات وجود و یکتایی جواب (۱۰۸) و (۲۰۸) با مقادیر اولیهٔ داده شده تحویل کرد . مقادیر اولیه موضع نقطه به ازای مقدار اولیهٔ s_0 از پارامتر و مواضع بردارهای سه‌وجهی فرنه به‌ازای این مقدار s_0 می‌باشند .

برای آنکه از نتایج نظریهٔ معادلات دیفرانسیل استفاده کنیم ، دستگاه (۱۰۸) را با یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل اسکالر عوض می‌کنیم . فرض کنیم مولفه‌های بردارهای مورد نظر نسبت به دستگاه مختصات ثابتی در فضا به صورت زیر باشد :

$$\mathbf{t} = \{u_1, u_2, u_3\}, \qquad \mathbf{n} = \{v_1, v_2, v_3\}, \qquad \mathbf{b} = \{w_1, w_2, w_3\}, \qquad \mathbf{r} = \{x, y, z\}.$$

در این صورت ، دستگاه (۱۰۸) معادل دستگاهی مرکب از سه معادلهٔ

$$\frac{dx}{ds} = u_1, \qquad \frac{dy}{ds} = u_2, \qquad \frac{dz}{ds} = u_3, \tag{۳۰۸}$$

و نه معادلهٔ

$$\frac{du_i}{ds} = \kappa v_i,$$

$$\frac{dv_i}{ds} = -\kappa u_i + \tau w_i, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{۴۰۸}$$

$$\frac{dw_i}{ds} = -\tau v_i,$$

است ، و شرایط (۲۰۸) معادل این است که ماتریس

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \tag{۵۰۸}$$

یک ماتریس متعامد باشد .

دستگاه (۴۰۸) دستگاهی است مرکب از نه معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول با نه مجهول و ضرایب پیوسته . قضیهٔ وجودی و یکتایی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی ایجاب می‌کند که این دستگاه جوابی دارد که با مقادیر اولیهٔ $\{u_1^0, u_2^0, u_3^0\}, \{v_1^0, v_2^0, v_3^0\}, \{w_1^0, w_2^0, w_3^0\}$ به طور منحصر بفرد مشخص می‌شود .

حال ثابت می‌کنیم که اگر ماتریس مقادیر اولیه یک ماتریس متعامد باشد ، ماتریس برای جواب کامل نیز متعامد می‌ماند . چون دترمینان این ماتریس تابع پیوسته‌ای از پارامتر است ، و مقدارش فقط می‌تواند 1 یا 1 − باشد ، این دترمینان ثابت است . درنتیجه ، بردار های **t, n, b** یک سه‌تایی جهتدار باجهت مثبت می‌سازند، مشروط براینکه مقادیر اولیه نیز چنین کنند . حال تابع

$$u_iu_j + v_iv_j + w_iw_j$$

را ، که در آن u_k, v_k, w_k جوابهای دستگاه (۴۰۸) اند ، در نظر می‌گیریم . مشتق این تابع برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(u_iu_j + v_iv_j + w_iw_j) &= \frac{du_i}{ds}u_j + u_i\frac{du_j}{ds} + \frac{dv_i}{ds}v_j + v_i\frac{dv_j}{ds} + \frac{dw_j}{ds}w_j + w_i\frac{dw_j}{ds} \\ &= \kappa v_iu_j + \kappa u_iv_j - \kappa u_iv_j + \tau w_iv_j - \kappa v_iu_j + \tau v_iw_j - \tau v_iw_j - \tau w_iv_j = 0,\end{aligned}$$

و این بدان معناست که $u_iu_j + v_iv_j + w_iw_j$ ثابت است . اما ماتریس (۵۰۸) متعامد است اگر و فقط اگر

$$u_iu_j + v_iv_j + w_iw_j = \begin{cases} 1 \text{، بەازای } i = j \\ 0 \text{، بەازای } i \neq j \end{cases}$$

درنتیجه ، اگر ماتریس به‌ازای یک‌مقدار از s متعامد باشد ، به‌ازای تمام مقادیر متعامد خواهد

بود . با استفاده از جواب (۴۰۸) ، که به‌وسیلهٔ مقادیر اولیه‌ای از $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ معین می‌شوند، می‌توان جوابی از (۳۰۸) را یافت که به‌وسیلهٔ مقادیر اولیهٔ x_0, y_0, z_0 از توابع x, y, z به‌طور منحصر بفرد معین می‌شود. بنابراین، ملاحظه‌می‌شود که، با معلوم بودن نقطهٔ اولیه و مقادیر اولیهٔ سه‌بردار سه‌وجهی فرنه، می‌توان یک و فقط یک منحنی یافت که‌دارای توابع انحنا و تاب داده شده بوده و سه‌وجهی فرنهٔ داده شده را در نقطهٔ اولیه دارا باشد . اما هر دو جواب متمایز از (۴۰۸) یا، معادلا" ، (۱۰۸) که در شرایط (۲۰۸) صدق کنند ، نظیر به‌سه‌وجهیهای‌فرنهٔ مختلفی هستند . چون هر دو سه‌وجهی فرنه را می‌توان با یک حرکت جسم صلب برهم منطبق کرد ، این امر در مورد خود جوابها نیز درست است ، که بدین ترتیب قسمت دوم قضیه ثابت می‌شود .

معادلات $\kappa = \kappa(s)$ و $\tau = \tau(s)$ ، که بستگی‌انحنا و تاب را به‌طول قوس نشان می‌دهند و منحنی را باتقریب موضعش درفضا معین می‌کنند ، ***معادلات طبیعی*** منحنی‌نامیده می‌شوند .

معادلات طبیعی می‌توانند به شکل ضمنی $F(\kappa, \tau, s) = 0$ و $G(\kappa, \tau, s) = 0$ نیز داده شوند . بزودی در بخشهای زیر خواهیم دید که اگر فقط یکی از دو معادله معلوم باشد، این معادله اغلب خانوادهٔ کاملی از منحنیها را نمایش‌خواهد داد .

امثله و تمرین

۱. همانطور که قبلا" دیدیم (تمرین ۱ در ۱۰۵) ، معادلات طبیعی مارپیچ عبارتنداز $\kappa = a(a^2 + b^2)^{-1}, \tau = b(a^2 + b^2)^{-1}$.

۲. با حل معادلات دیفرانسیل (۳۰۸) و (۴۰۸) در این حالت خاص، تحقیق کنیدکه‌این معادلات واقعا" یک مارپیچ را نمایش می‌دهند .

۳. معادلات طبیعی منحنیی را بیابید که روی مخروط

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

قرار گرفته و مولدهای مستقیم‌الخط مخروط‌را درزاویهٔ ثابتی قطع می‌کند (ر.ک. تمرین ۸ در ۲۰۴) .

۴. اگر معادلات طبیعی یک منحنی

$$\kappa = \kappa(s), \qquad \tau = \tau(s)$$

باشند ، معادلات طبیعی منحنیی که با آن نسبت به

(آ) یک نقطه،

(ب) یک خط‌راست ،

(پ) یک صفحه

متقارن است چیست؟

۵. منحنیی بیابید که معادلات طبیعی‌اش

$$\kappa = a\cos s, \qquad \tau = a\sin s$$

باشند.

۶. به‌فرض‌آنکه بردار قائم اصلی یک منحنی تابعی از قوس یعنی $\mathbf{n}=\mathbf{n}(s)$ باشد، منحنی را پیدا نمایید.

۷. همین مسئله را درصورتی که بردار قائم دوم داده شده باشد حل کنید.

۲۰۸ مارپیچهای تعمیم یافته

یک مارپیچ تعمیم یافته منحنیی است که با راستای ثابتی در فضا زاویهٔ ثابتی می‌سازد. خطوط مستقیمی که دراین راستا منحنی را قطع می‌کنند یک‌سطح استوانه‌ای خواهند ساخت. منحنی براین‌سطح استوانه‌ای واقع بوده و مولدهای سطح را در زاویهٔ ثابتی قطع می‌کند. مارپیچی که قبلاً" در نظر گرفته شد حالت خاص بوده و وقتی است که استوانه یک استوانهٔ مستدیر است.

قضیه . *یک منحنی پارامتری از کلاس C_3 بدون نقاط اصلاح یک مارپیچ تعمیم یافته است اگر و فقط اگر ثابت $=\tau/\kappa$ ؛ بعلاوه، $\tau/\kappa=\cot\theta$، که درآن θ زاویهٔ ثابت بین منحنی و راستای ثابت در فضا است.*

برهان . فرض کنیم $\mathbf{a}$ یک بردار یکه باراستای‌ثابت باشد. در این صورت، داریم

$$\mathbf{ta}=\cos\theta=\text{ثابت}\,;$$

درنتیجه،

$\mathbf{at}'=0$، که از اینجا $\kappa\mathbf{an}=0$.

طبق فرض $\kappa\neq 0$. بنابراین، $\mathbf{an}=0$ ، و بردار $\mathbf{a}$ در صفحهٔ اصلاحی قرار دارد. با مشتقگیری از این معادله داریم

$\mathbf{an}'=0$ یا $-\kappa\mathbf{at}+\tau\mathbf{ab}=0$.

چون $\mathbf{a}$ یک بردار یکه در صفحهٔ $(\mathbf{t},\mathbf{b})$ بوده و $\mathbf{at}=\cos\theta$ ، داریم $\mathbf{ab}=\sin\theta$ یا $\mathbf{ab}=-\sin\theta$. بی‌آنکه به‌کلیت خللی وارد شود، می‌توان حالت اخیر را به‌وسیلهٔ تعویض بردار $\mathbf{a}$ با بردار $\mathbf{a}-$ که همان راستای خطوط را در فضا معین می‌کند حذف کرد. درنتیجه، خواهیم داشت

$$-\kappa \cos\theta + \tau \sin\theta = 0,$$

که از آنجا

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta = \text{ثابت}\,.$$

بعکس، اگر انحنا و تاب در معادلهٔ

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{ثابت}$$

صدق کنند، بردار $\mathbf{a} = (\tau/\kappa)\mathbf{t} + \mathbf{b}$ ، که موازی بردار داربو است، ثابت می‌باشد. درواقع داریم

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds} = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\mathbf{t} + \frac{\tau}{\kappa}\mathbf{t}' + \mathbf{b}' = \frac{\tau}{\kappa}\kappa\mathbf{n} - \tau\mathbf{n} = 0.$$

از سوی دیگر، زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{t}$ ثابت است، زیرا

$$\cot\theta = \frac{\tau/\kappa}{1} = \frac{\tau}{\kappa} = \text{ثابت}.$$

معادلهٔ ثابت $= \tau/\kappa$ معادلهٔ طبیعی کلاس مارپیچهای تعمیم یافته است.

امثله و تمرین

۱. تحقیق کنید که منحنی تمرین ۳ در بخش قبل یک مارپیچ تعمیم یافته است، و زاویه‌ای که این منحنی مولدهای مستقیم‌الخط استوانه‌اش را قطع می‌کند پیدا کنید.

۲. ثابت کنید منحنی $x = at, y = bt^2, z = t^3$ یک مارپیچ تعمیم یافته است اگر وفقط اگر $3a = 2b^2$. ثابت‌کنید که دراین حالت منحنی بریک‌سطح استوانه‌ای قراردارد که مولدهایش موازی صفحهٔ (xy) اند و با محور x زاویهٔ $45°$ می‌سازند. معادلهٔ این سطح استوانه‌ای را پیدا کنید.

۳. ثابت کنید منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ از کلاس C_4 یک مارپیچ تعمیم یافته است اگر و فقط اگر در اتحاد $\mathbf{r}''\mathbf{r}'''\mathbf{r}^{iv} = 0$ صدق کند.

راهنمایی. τ/κ را برحسب $\mathbf{r}$ و مشتقات آن بیان کرده، و از معادلهٔ ثابت $= \tau/\kappa$ مشتق بگیرید.

۳.۸ منحنیهای برتران[1]

می‌گوییم دومنحنی مزدوج به مفهوم **برتران** هستند اگر تناظری یک به یک بین نقاط آنها

---

1. *Bertrand.*

وجود داشته باشد به‌طوری که هر دومنحنی در نقاط نظیر دارای یک‌قائم‌اصلی مشترک باشند. هر منحنی که با این مفهوم مزدوج داشته باشد یک **منحنی برتران** نامیده می‌شود.

قضیه. *یک منحنی پیچ خورده از کلاس C_4، یعنی منحنیی که حتی قسمتی از آن، در یک صفحه قرار ندارد $(\tau \neq 0)$ یک منحنی برتران است اگر و فقط اگر در شرط*

$$\alpha\kappa + \beta\tau = 1 \tag{۶.۸}$$

صدق کند، که در آن α و β ثابت هستند. بخصوص، هرمنحنی با انحنای ثابت یک منحنی برتران است. در این حالت، هرگاه ثابت $\tau \neq$، آنگاه $\alpha = 1/\kappa, \beta = 0$ و منحنی مزدوج مکان هندسی مراکز انحنای منحنی اصلی بوده و همان انحنا را دارا خواهد بود. در مورد مارپیچ مستدیر (ثابت $= \kappa$، ثابت $= \tau$)، بی‌نهایت منحنی مزدوج وجود دارد، که همهٔ آنها مارپیچهایی هستند با یک محور و یک پای پیچ.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ معادلهٔ پارامتری منحنی برتران $\mathscr{K}$ بوده، و s پارامتر قوس بر $\mathscr{K}$ باشد. نقطه‌ای از منحنی مزدوج $\mathscr{K}_1$ نظیر به نقطهٔ s از $\mathscr{K}$ باید بردار موضعی به‌شکل

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s) + \alpha(s)\mathbf{n}(s) \tag{۷.۸}$$

داشته باشد، که در آن $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ بردارهای سه‌وجهی فرنهٔ $\mathscr{K}$ هستند. با متغیر s، این معادله را می‌توان معادلهٔ پارامتری $\mathscr{K}_1$ در نظر گرفت. اما پارامتر s لزوماً" پارامتر قوس‌بر $\mathscr{K}_1$ نیست. بنابرتعریف مزدوج به مفهوم برتران، قائم اصلی $\mathscr{K}_1$ در s باید بر قائم اصلی $\mathscr{K}$ منطبق باشد، و این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر بردار قائم اصلی $\mathscr{K}_1$ موازی $\mathbf{n}$ باشد. داریم

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{t} + \alpha'\mathbf{n} + \alpha(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = (1 - \kappa\alpha)\mathbf{t} + \alpha'\mathbf{n} + \alpha\tau\mathbf{b}.$$

چون $d\mathbf{R}/ds$ بر $\mathscr{K}_1$ مماس و، درنتیجه، بر $\mathbf{n}$ عمود است، داریم $\alpha' = 0$، ثابت $= \alpha$، و

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = (1 - \kappa\alpha)\mathbf{t} + \alpha\tau\mathbf{b}.$$

با مشتقگیری از این معادله، ضمن ثابت گرفتن α خواهیم داشت

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2} = (1 - \kappa\alpha)'\mathbf{t} + (1 - \kappa\alpha)\kappa\mathbf{n} + \alpha\tau'\mathbf{b} - \alpha\tau^2\mathbf{n}$$
$$= (1 - \kappa\alpha)'\mathbf{t} + [\kappa(1 - \kappa\alpha) - \alpha\tau^2]\mathbf{n} + \alpha\tau'\mathbf{b}.$$

بردار $d^2\mathbf{R}/ds^2$ در صفحهٔ بوسان منحنی $\mathscr{K}_1$ قراردارد. لذا، این بردار باید ترکیبی

خطی از بردارهای $d\mathbf{R}/ds$ و $\mathbf{n}$ باشد. پس بردار $(1-\kappa\alpha)'\mathbf{t}+\alpha\tau'\mathbf{b}$ ، که بر $\mathbf{n}$ عمود است، و بردار $d\mathbf{R}/ds=(1-\kappa\alpha)\mathbf{t}+\alpha\tau\mathbf{b}$ باید همخط باشند. این، در صورتی‌که $\kappa\alpha\neq 1$ و $\tau\neq 0$، یعنی

$$\frac{(1-\kappa\alpha)'}{1-\kappa\alpha}=\frac{\tau'}{\tau}.$$

این معادله با

$$\ln|1-\kappa\alpha|=\ln|\tau|+\ln|\beta|,$$

که درآن β ثابت انتگرالگیری است، یا با

$$\alpha\kappa+\beta\tau=1 \quad \text{یا} \quad 1-\kappa\alpha=\beta\tau$$

معادل است، موٴید آنکه یک منحنی برتران در (۶۰۸) صدق می‌نماید.

درحالت استثنایی $\alpha\kappa=1$ داریم ثابت $\kappa=1/\alpha=$ ؛ لذا، $\mathscr{K}$ دارای انحنای ثابت بوده، و معادلهٴ (۷۰۸) به صورت

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\frac{1}{\kappa}\mathbf{n} \tag{۸۰۸}$$

درمی‌آید، که این معادلهٴ مکان هندسی مراکز انحنای $\mathscr{K}$ می‌باشد.

برای اثبات آنکه این یک مزدوج برتران $\mathscr{K}$ است، بردارهای سه‌وجهی فرنهٴ $\mathscr{K}_1$ را پیدا می‌کنیم. بردار مماس دارای راستای

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds}=\mathbf{t}+\frac{1}{\kappa}(-\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b})=\frac{\tau}{\kappa}\mathbf{b}$$

است (به یاد بیاورید که ثابت $=\kappa$). لذا، این بردار با بردار قائم دوم $\mathbf{b}$ منحنی $\mathscr{K}$ موازی است، زیرا فرض کرده‌ایم که $\tau\neq 0$. بعلاوه، داریم

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2}=\frac{\tau'}{\kappa}\mathbf{b}+\frac{\tau}{\kappa}\mathbf{b}'=\frac{\tau'}{\kappa}\mathbf{b}-\frac{\tau^2}{\kappa}\mathbf{n}$$

و

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2}=-\frac{\tau^3}{\kappa^2}\mathbf{b}\times\mathbf{n}=\frac{\tau^3}{\kappa^2}\mathbf{t},$$

بدین معنا که بردار قائم دوم $\mathscr{K}_1$ موازی بردار مماس $\mathscr{K}$ است. بنابراین، صفحات اصلاحی موازی بوده، که درنتیجه بردارهای قائم اصلی موازی‌اند، و $\mathscr{K}_1$ مزدوج برتران $\mathscr{K}$ می‌باشد. واضح است که (۶۰۸) نیز در این حالت به ازای $\alpha=1/\kappa$ و $\beta=0$ برقرار است. درمورد منحنی $\mathscr{K}$ با انحنای ثابت و مکان هندسی مراکز انحنای آن $\mathscr{K}_1$ ، می‌توان انحنای $\mathscr{K}_1$ را با

استفاده از فرمول (۳۰۶) به دست آورد ؛ یعنی ،

$$\kappa_1 = \left|\frac{d\mathbf{R}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2}\right| \left|\frac{d\mathbf{R}}{ds}\right|^{-3} = \frac{|\tau|^3}{\kappa^2}\left(\frac{|\tau|}{\kappa}\right)^{-3} = \kappa.$$

درنتیجه ، $\mathscr{K}_1$ منحنیی است با همان انحنای ثابت و ، چون مزدوج بودن به مفهوم برتران یک رابطهٔ متقارن است ، $\mathscr{K}$ باید مکان هندسی مراکز انحنای $\mathscr{K}_1$ باشد .

شرط (۶۰۸) ثابتهای α و β را معین می‌کند مگر آنکه κ و τ هر دو ثابت باشند. در حالت اخیر، منحنی یک مارپیچ مستدیر است ، α را می‌توان دلخواه گرفت ، و β را متعاقبا" مشخص کرد . بنابراین ، در این حالت ، بی‌نهایت مزدوج وجود خواهد داشت . به آسانی معلوم می‌شود که همهٔ آنها مارپیچهایی مستدیر هستند با یک پای پیچ .

حالت $\tau = 0$ در بحث ما مستثنی شده است . مسلما" ، درحالتی که منحنی در یک صفحه است ، شرط (۶۰۸) برای وجود مزدوج لازم نیست . لذا، مزدوجهای یک منحنی مسطح با انحنای ناثابت همواره وجود خواهند داشت .

تمرین

۱ . ثابت کنید که صفحات بوسان در نقاط نظیر دو منحنی مزدوج برتران دارای یک زاویهٔ میل ثابت هستند .

راهنمایی . چون قائمهای اصلی دومنحنی برهم منطبق می شوند ، پس میل صفحات به‌وسیلهٔ زاویهٔ بین مماسهای $\mathbf{t}$ و $d\mathbf{R}/ds$ سنجیده می‌شود .

۲ . ثابت کنید که ، در نقاط نظیر دو نقطهٔ مزودج برتران ، تابها یک علامت را دارند .

۳ . چه‌موقع ممکن است تناظری یک به یک بین نقاط دومنحنی برقرار کرد که خط واصل بین نقاط نظیر قائم دوم مشترک دومنحنی باشد ؟

۴ . چه‌موقع می‌توان تناظری یک به یک بین نقاط منحنی $\mathscr{K}_1$ و منحنی $\mathscr{K}_2$ برقرار کرد که ، در هر نقطه ، قائم اصلی $\mathscr{K}_1$ قائم دوم $\mathscr{K}_2$ در نقطهٔ نظیر باشد ؟

۴۰۸ کرهٔ بوسان

کره‌ای که با یک منحنی در نقطه‌ای مانند P دارای تماس از مرتبهٔ بالاتر از دو باشد (ر.ک. زیربخش ۳۰۴) *کرهٔ بوسان* منحنی در P نامیده می‌شود .

قضیه . یک منحنی از کلاس C_4 در هر نقطهٔ منتظمی که در آن $\kappa \neq 0 \neq \tau$ یک و فقط یک کرهٔ بوسان دارد . مرکز C کرهٔ بوسان برخط قطبی واقع است ، و بردار $\overrightarrow{KC}$ به مبداء مرکز

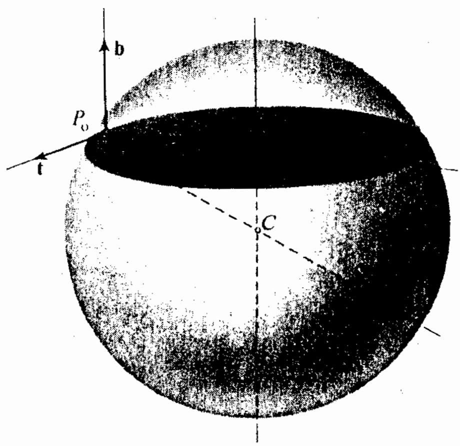
انحنای K و انتهای مرکز C کرهٔ بوسان برابر است با $-\kappa'\mathbf{b}/\kappa^2\tau$. شعاع کرهٔ بوسان مساوی است با

$$R_K = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa'^2}{\kappa^4\tau^2}}. \qquad (۹ \cdot ۸)$$

کرهٔ بوسان دارای تماس از مرتبهٔ لااقل 3 با منحنی می‌باشد .

توجه کنید که در نقاط تخت ، که $\tau = 0$ ، کرهٔ بوسان وجود ندارد . در این حالت ، صفحهٔ بوسان دارای تماس ازمرتبهٔ 3 یا بیشتراست؛ صفحهٔ بوسان را می‌توان حد کره‌های مماس وقتی شعاع آنها به بی‌نهایت میل می‌کند درنظر گرفت .

برهان . فرض کنیم C مرکز کره‌ای باشد که از نقطهٔ P_0 منحنی می‌گذرد ، و Q را یک‌نقطهٔ متغیر منحنی می‌گیریم . S و S' را نقاطی می‌گیریم که خط CQ کره را در آن نقاط قطع می‌کند (شکل ۱۰۸) . برای تخمین مرتبهٔ تماس کره و منحنی در P_0 ، بایدفاصلهٔ $d = QS$ از نقطهٔ Q تا سطح کره را تخمین بزنیم .



شکل ۱۰۸

به‌جای آن می‌توانیم کمیت $\delta = QS\,QS'$ را تخمین بزنیم . درواقع ،وقتی $Q \to P_0$ داریم $QS \to 0, QS' \to D$ ، که D قطر کره می‌باشد . بنابراین، $|\delta/d| \to D$ بدین معنا که $\delta = O(d)$ ، یا اینکه δ و d از یک مرتبه هستند . حال فرض کنیم معادلهٔ منحنی به صورت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ بوده، و نقطهٔ P_0 نظیر به مقدار $s = 0$ از پارامتر طبیعی s باشد . مقادیرتوابع نظیر در نقطهٔ $s = 0$ را با $\mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0, \tau_0, \kappa_0$ نشان می‌دهیم ، و $\mathbf{r}_C$ را بردار موضع

مرکزکره و R را شعاع کره می‌انگاریم . در این صورت ، خواهیم داشت

$$\delta = QS\,QS' = (QC - CS)(QC + CS') = (QC - R)(QC + R)$$
$$= QC^2 - R^2 = (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_C)^2 - R^2.$$

فرمول تیلور در $s = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$\delta = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)^2 - R^2 + 2s(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)\mathbf{t}_0 + s^2[1 + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)\kappa_0\mathbf{n}_0]$$
$$+ \tfrac{2}{3}s^3(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)(-\kappa_0^2\mathbf{t}_0 + \kappa_0'\mathbf{n}_0 + \kappa_0\tau_0\mathbf{b}_0) + o(s^3). \quad (۱۰\cdot۸)$$

از اینکه نقطهٔ P_0 روی کره است ، باید داشته باشیم

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)^2 - R^2 = 0. \quad (۱۱\cdot۸)$$

لازمهٔ اینکه تماس باید از مرتبهٔ لااقل 3 باشد شرایط

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)\mathbf{t}_0 = 0 \quad (۱۲\cdot۸)$$

را حاصل می‌کند ، و این بدان معناست که منحنی برکره مماس است . بعلاوه ،

$$1 + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)\kappa_0\mathbf{n}_0 = 0$$

یا

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)\mathbf{n}_0 = -\frac{1}{\kappa_0}; \quad (۱۳\cdot۸)$$

درنتیجه ، تصویر مرکز روی صفحهٔ بوسان برمرکز انحنا منطبق است یا ، به عبارت دیگر ، مرکز برخط قطبی قرار دارد ، بالاخره ،

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)(-\kappa_0^2\mathbf{t}_0 + \kappa_0'\mathbf{n}_0 + \kappa_0\tau_0\mathbf{b}_0) = 0$$

یا ، باتوجه به (۱۲۰۸) و (۱۳۰۸) ،

$$-\frac{\kappa_0'}{\kappa_0} + \kappa_0\tau_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_C)\mathbf{b}_0 = 0. \quad (۱۴\cdot۸)$$

معادلات (۱۲۰۸) ، (۱۳۰۸) ، و (۱۴۰۸) بردار موضع مرکز را کاملا" معین می‌کنند . درواقع ، از ضرب اسکالر

$$\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_0 = \alpha\mathbf{t}_0 + \beta\mathbf{n}_0 + \gamma\mathbf{b}_0$$

در $\mathbf{t}_0$ ، بنابر (۱۲۰۸) ، نتیجه می‌شود که $\alpha = 0$ ؛ همچنین ، با ضرب در $\mathbf{n}_0$ ، باتوجه به (۱۳۰۸) ، داریم $\beta = 1/\kappa_0$ ؛ و بالاخره ، با ضرب در $\mathbf{b}_0$ و استفاده از (۱۴۰۸) خواهیم داشت

$$\frac{\kappa_0'}{\kappa_0} + \kappa_0\tau_0\gamma = 0,$$

که از آنجا

$$\gamma = -\frac{\kappa_0'}{\kappa_0^2 \tau_0}.$$

درنتیجه،

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\kappa_0}\mathbf{n}_0 - \frac{\kappa_0'}{\kappa_0^2 \tau_0}\mathbf{b}_0. \tag{۱۵.۸}$$

این بردار بردار موضع مرکز کرهٔ بوسان درنقطهٔ P_0 است. چون بردار موضع مرکز انحنای K مساوی $\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_0 + (1/\kappa_0)\mathbf{n}_0$ است، در واقع خواهیم داشت

$$\overrightarrow{KC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_K = -\frac{\kappa_0'}{\kappa_0^2 \tau_0}\mathbf{b}_0.$$

همچنین، به‌آسانی می‌توان شعاع کرهٔ بوسان را پیدا کرد؛ یعنی، داریم

$$R_K^2 = (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_0)^2 = \frac{1}{\kappa_0^2} + \frac{\kappa_0'^2}{\kappa_0^4 \tau_0^2},$$

که با (۹.۸) مطابقت دارد.

نتیجه. ***صفحهٔ بوسان کرهٔ بوسان را درامتداد دایرهٔ بوسان قطع می‌کند.***

برهان. فصل مشترک کرهٔ‌بوسان در P_0 با صفحهٔ‌بوسان در P_0 مسلماً" دایره‌ای است مماس برمنحنی در P_0. مرکز این دایره تصویر مرکز کره روی صفحه است، و نتیجتاً"، مرکز انحنا است. اما این یعنی دایره دایرهٔ انحنا می‌باشد.

تمرین

۱. محاسباتی را که به فرمول (۱۰.۸) ختم می‌شوند کامل کنید.

۲. کره بوسان مارپیچ مستدیر را در یک نقطهٔ دلخواه بیابید.

۳. ثابت کنید که مراکز کرات بوسان منحنی $\mathscr{K}$ یک منحنی مانند $\mathscr{K}_1$ را تشکیل می‌دهند به طوری که، اگر منحنی $\mathscr{K}_1$ یک نقطه نباشد، خطوط مماس بر $\mathscr{K}_1$ خطوط قطبی $\mathscr{K}$ درنقاط متناظر می‌باشند.

۴. فرض‌کنید K و C مرکز انحنا و مرکز کرهٔ بوسان یک منحنی از کلاس C_4 در نقطهٔ P باشند. ثابت کنید زاویهٔ بین خط PK و مکان هندسی مراکز انحنا همان زاویهٔ بین PC و مکان هندسی مراکز کرات بوسان است.

۵. ثابت کنید هر کره با یک منحنی درنقطهٔ منتظم P تماس از مرتبهٔ لااقل 2 دارد، به

طوری که در این نقطه $\kappa \neq 0 \neq \tau$، اگر و فقط اگر دایرهٔ انحنای منحنی در P برکره واقع باشد.

۵.۸ منحنیهای کروی

اگر یک منحنی کاملا" بر یک کره واقع باشد، این کره کرهٔ بوسان منحنی در هر نقطه از آن است. درنتیجه، شعاع کرهٔ بوسان به عنوان تابعی از پارامتر ثابت است؛ ولذا، بردار موضع مرکز کرهٔ بوسان نیز چنین است.

بعکس، اگر تمام کرات بوسان در نقاط مختلف منحنی یکی باشند، منحنی برآن کرهٔ ثابت قرار خواهد داشت.

حال شرط لازم و کافی برای ثابت بودن مرکز و شعاع کرهٔ بوسان را پیدا می‌کنیم. در واقع، داریم

$$\mathbf{r}_C' = \mathbf{r}' + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}' - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'\mathbf{b} - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\mathbf{b}'$$

$$= \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'\mathbf{b} + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\tau\mathbf{n} = \left[\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'\right]\mathbf{b}.$$

این ایجاب می‌کند که مرکز کرهٔ بوسان ثابت است اگر و فقط اگر

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' = 0. \qquad (۱۶.۸)$$

از طرف دیگر، داریم

$$\frac{dR_K^2}{ds} = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}\left[\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'\right].$$

بنابراین، با مفروضات $\kappa \neq 0 \neq \tau$ ، این مشتق درصورتی صفر است که (۱۶.۸) برقرار باشد. درنتیجه، در این حالت ، شعاع و مرکز کرهٔ بوسان ثابت هستند. پس، قضیهٔ زیر برقرار خواهد بود.

قضیه. *شرط (۱۶.۸) شرط لازم و کافی برای آن است که یک منحنی از کلاس C_4 ، بدون نقاط اصلاح یا نقاط تخت، بر یک کره واقع باشد.*

همچنین، توجه کنید که، در صورت $\kappa' \neq 0$، شرط ثابت $= \mathbf{r}_C$ به تنهایی برای واقع بودن منحنی بر یک کره کافی است.

معادلهٔ (۱۶۰۸)را می‌توان به عنوان معادلهٔ طبیعی کلاس تمام منحنیهای کروی در نظر گرفت.

تمرین

ثابت کنید که منحنی $x = a \sin^2 t, y = a \sin t \cos t, z = a \cos t$ یک منحنی کروی است.

۳
نظریهٔ منحنیهای مسطح

۹ منحنیهای پارامتری مسطح

۱۰۹ فرمولهای فرنه برای یک منحنی مسطح

یک منحنی مسطح دارای تاب $\tau = 0$ است و، بالعکس، اتحاد $\tau = 0$ ایجاب می‌کند که منحنی در یک صفحه قرار گیرد. اگر دستگاه مختصات طوری اختیار شود که محورهای x و y در صفحهٔ منحنی باشند، مؤلفهٔ سوم بردار موضع هر نقطه از منحنی 0 بوده و همهٔ فرمولها ساده‌تر خواهند شد.

با انتخاب جهت برای صفحهٔ مورد بحث، می‌توان جهت مثبت دوران را در صفحه تشخیص داد. بالنتیجه، اندازهٔ زاویهٔ بین یک جفت مرتب از بردارها را می‌توان با اعداد مثبت یا منفی بیان کرد که هم‌جهت و هم‌زاویهٔ دوران برای انطباق بردار اول جفت بر بردار دوم آن را نشان می‌دهد. بردار مماس و بردار قائم اصلی هر دو در صفحهٔ منحنی واقعند. بردار قائم دوم ثابت بوده و براین صفحه عمود است؛ و لذا، در اغلب حالات می‌توان به آن توجهی نکرد. از اینرو، کنج مورد نظر ما، به جای کنج کامل فرنه، کنج مسطحی است که از بردار مماس و قائم در صفحهٔ منحنی تشکیل شده است. با استفاده از جهت صفحه، بردار قائم اصلی $\mathbf{n}$ را با برداریکهٔ همخطی مانند $\mathbf{n}_*$ عوض می‌کنیم که این بردار طوری جهتدار شده که جفت $\mathbf{t}, \mathbf{n}_*$ یک کنج جهتدار با همان جهت صفحه باشد. به عبارت دیگر، $\mathbf{n}_*$ حاصل دوران $\mathbf{t}$ درجهت مثبت به‌اندازهٔ یک‌زاویهٔ قائمه است. واضح است که‌داریم

$$\mathbf{n}_* = \varepsilon \mathbf{n}, \tag{۱۰۹}$$

که در آن ε ، باتوجه به پارامتری سازی منحنی، $+1$ یا -1 است. ما بردارهای قائمی را که در صفحهٔ منحنی قرار ندارند در نظر نمی‌گیریم.

چنانچه پارامتری‌سازی را به معادلش تغییر دهیم، بردارهای $\mathbf{t}$ و $\mathbf{n}_*$ حفظ می‌شوند، و تغییر به‌یک پارامتری‌سازی قرینه سبب تغییر هردو بردار $\mathbf{t}$ و $\mathbf{n}_*$ به قرینه‌هایشان می‌شود (یادآور می‌شویم‌که درمورد کنج فرنه در فضا، بردارهای $\mathbf{t}$ و $\mathbf{b}$ تغییر کردند اما $\mathbf{n}$ تغییر نکرد).

هرگاه منحنی با معادلات $x = x(s), y = y(s)$ در پارامتری‌سازی طبیعی تعریف شده باشد، آنگاه بردار مماس دارای مؤلفه‌های $\{x', y'\}$ و بردار $\mathbf{n}_*$ دارای مؤلفه‌های $\{-y', x'\}$ است. در مورد یک پارامتری‌سازی دلخواه داریم

$$\mathbf{t} = \left\{\frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \quad \mathbf{n}_* = \left\{-\frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}. \qquad (۲.۹)$$

در اینجا فرمولهایی که همان نقش فرمولهای فرنه در فضای سه‌بعدی را دارند عبارتند از

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}_*, \qquad \mathbf{n}_*' = -k\mathbf{t}. \qquad (۳.۹)$$

ضریب k **انحنای یک منحنی مسطح** نامیده می‌شود؛ فرق آن با انحنای κ فقط می‌تواند در علامت باشد:

$$k = \varepsilon\kappa, \qquad (۴.۹)$$

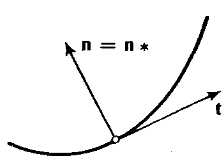
که درآن ε همان ε فرمول (۱.۹) است. توجه کنید که k (برخلاف κ) وقتی پارامتری سازی به قرینه‌اش تغییر یابد تغییر علامت می‌دهد.

۲.۹ انحنای یک منحنی مسطح

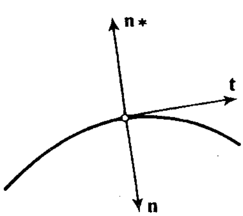
انحنای k را می‌توان، شبیه κ، به صورت حد نسبت زاویهٔ بین $\mathbf{t}(s_0)$ و $\mathbf{t}(s_0+h)$ به h، وقتی $h \to 0$، تعریف‌کرد. منتها فرقش این است‌که در اینجا هم ϕ و هم h با علامتشان گرفته می‌شوند:

$$k = \lim_{h\to 0}\frac{\phi}{h}.$$

هرگاه انحراف منحنی از مماس چنان باشد که، برای h به‌قدر کافی کوچک و مثبت، زاویهٔ بین $\mathbf{t}(s_0)$ و $\mathbf{t}(s_0+h)$ مثبت باشد، آنگاه $\varepsilon = 1$، $\mathbf{n} = \mathbf{n}_*$، k مثبت است، و $k = \kappa$ (شکل ۱.۹). چنانچه این زاویه منفی باشد، $k = -\kappa$، $\mathbf{n}_* = -\mathbf{n}$ (شکل ۲.۹).



شکل ۱.۹



شکل ۲.۹

با استفاده از فرمولهای (۲.۶) و (۳.۶)، فرمول زیر را برای انحنای منحنی مسطح

$x = x(t),\ y = y(t)$ به دست می‌آوریم :

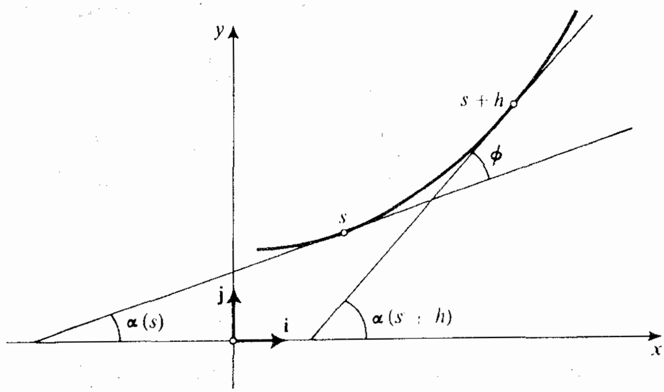
$$k = \pm\frac{|C|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \pm\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

زیرا در این حالت

$$\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}} = 0, \qquad A = B = 0.$$

به جای آنکه سعی کنیم علامت صحیح را از توضیحاتی اضافی تعیین کنیم ، فرمول انحنای یک منحنی مسطح را مستقلا " به دست می‌آوریم .

زاویهٔ جهتدار $\sphericalangle(\mathbf{i}, \mathbf{t}(s))$ از برداریکهٔ محور x به بردار مماس درنقطهٔ s را با $\alpha(s)$ نشان می‌دهیم (شکل ۳۰۹) . در این صورت ، زاویهٔ جهتدار $\phi = \sphericalangle(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s+h))$ از



شکل ۳۰۹

بردار مماس در s به بردار مماس در $s + h$ مساوی است با

$$\phi = \alpha(s + h) - \alpha(s).$$

بنابراین ، اگر s پارامتر طبیعی باشد ، خواهیم داشت

$$k = \lim_{h\to 0}\frac{\phi}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(s + h) - \alpha(s)}{h} = \alpha'(s).$$

یا

$$k = \alpha'. \tag{۵۰۹}$$

برای منحنی

$$x = x(s), \qquad y = y(s)$$

در پارامتری‌سازی طبیعی ، داریم

$$\cos\alpha = x', \qquad \sin\alpha = y'. \tag{۶۰۹}$$

که از آنجا

$$-(\sin\alpha)\alpha' = x'', \qquad (\cos\alpha)\alpha' = y''$$

درنتیجه،

$$\begin{array}{cc} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -(\sin\alpha)\alpha' & (\cos\alpha)\alpha' \end{array} = \begin{array}{cc} x' & y' \\ x'' & y'' \end{array}$$

یا

$$\alpha' = x'y'' - x''y'$$

که، باتوجه به (۵۰۹) ، فرمول زیر را برای پارامتری‌سازیهای طبیعی نتیجه می‌دهد :

$$k = x'y'' - x''y'. \qquad (۷۰۹)$$

در یک پارامتری‌سازی دلخواه، داریم

$$x' = \dot{x}\frac{dt}{ds}, \qquad y' = \dot{y}\frac{dt}{ds},$$

$$x'' = \ddot{x}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{x}\frac{d^2t}{ds^2}, \qquad y'' = \ddot{y}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{y}\frac{d^2t}{ds^2},$$

که از آنجا

$$x'y'' - x''y' = (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\left(\frac{dt}{ds}\right)^3,$$

و چون $dt/ds = (ds/dt)^{-1} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}$ ، فرمول زیر نتیجه خواهد شد :

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \qquad (۸۰۹)$$

۳۰۹ دایرهٔ بوسان یا دایرهٔ انحنای یک منحنی مسطح

شکی نیست که دایرهٔ بوسان یک منحنی مسطح در صفحهٔ منحنی قرار دارد. همانند حالت کلی، بردار موضع مرکز انحنا عبارت است از (قس. (۴۰۶))

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} = \mathbf{r} + \frac{1}{k}\mathbf{n}_*, \qquad (۹۰۹)$$

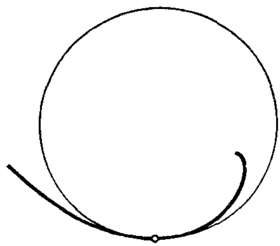
و شعاع انحنا مساوی است با $\rho = 1/\kappa = 1/|k|$. اما درمورد منحنی مسطح ممکن و جالب است که وضع منحنی و دایرهٔ بوسان را نسبت بهم در مجاورت یک نقطه بررسی کنیم .

قضیه. هرگاه انحنای k یک منحنی مسطح مانند $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ از کلاس C_3 و مشتقش k' دریک

نقطه مانند s_0 *مخالف صفر باشند، آنگاه، وقتی* s *افزایش یابد، منحنی از برون دایرهٔ انحنا به درون آن می‌رود اگر* $kk' > 0$ *، یا از درون به برون خواهد رفت اگر* $kk' < 0$ *(شکل ۹.۴).*

برهان. دایرهٔ بوسان در نقطهٔ s_0 را در نظر گرفته، فاصلهٔ d از مرکز این دایره تا نقطهٔ متغیر از منحنی با بردار موضع $\mathbf{r}(s)$ را تخمین می‌زنیم:

$$d = \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0} \right|,$$



شکل ۹.۴

که در آن $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0),\ \mathbf{n}_{*0} = \mathbf{n}_*(s_0)$. داریم

$$\begin{aligned} d^2 - \rho_0^2 &= \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0}\right)^2 - \frac{1}{k_0^2} \\ &= \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0}\right)^2 - \left(\frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0}\right)^2 = \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{2}{k_0}\mathbf{n}_{*0}\right)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

بنابرفرمول تیلور داریم

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (s - s_0)\mathbf{r}'_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2}\mathbf{r}''_0 + \frac{(s - s_0)^3}{6}\mathbf{r}'''_0 + o((s - s_0)^3),$$

اما

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{t}_0, \qquad \mathbf{r}''_0 = \mathbf{t}'_0 = k_0\mathbf{n}_{*0}, \qquad r'''_0 = k'_0\mathbf{n}_{*0} + k_0\mathbf{n}'_{*0} = k'_0\mathbf{n}_{*0} - k_0^2\mathbf{t}_0.$$

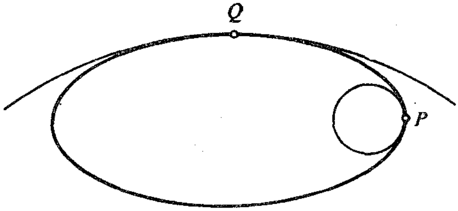
پس از جایگزینی به دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} d^2 - \rho_0^2 = \Bigg[& (s - s_0)\mathbf{t}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2}k_0\mathbf{n}_{*0} + \frac{(s - s_0)^3}{6}(k'_0\mathbf{n}_{*0} - k_0^2\mathbf{t}_0) - \frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0} \\ & + o((s - s_0)^3)\Bigg] \end{aligned}$$

$$\cdot\Big[(s-s_0)\mathbf{t}_0+\frac{(s-s_0)^2}{2}k_0\mathbf{n}_{*0}+\frac{(s-s_0)^3}{6}(k_0'\mathbf{n}_{*0}-k_0^2\mathbf{t}_0)$$
$$+o((s-s_0)^3)\Big]$$
$$-(s-s_0)\frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0}\mathbf{t}_0+\frac{(s-s_0)^2}{2}\Big(\mathbf{t}_0^2-\frac{1}{k_0}k_0\mathbf{n}_{*0}^2\Big)$$
$$+\frac{(s-s_0)^3}{6}\Big[3k_0\mathbf{n}_{*0}\mathbf{t}_0+3k_0\mathbf{n}_{*0}\mathbf{t}_0-\frac{1}{k_0}\mathbf{n}_{*0}(k_0'\mathbf{n}_{*0}-k_0^2\mathbf{t}_0)\Big]$$
$$+o((s-s_0)^3)=+\frac{k_0'}{k_0}\cdot\frac{(s-s_0)^3}{6}+o((s-s_0)^3).$$

درنتیجه، اگر k' در s_0 مخالف 0 باشد، تفاضل $d^2-\rho_0^2$ ، وقتی s از مقادیر $s<s_0$ به مقادیر $s>s_0$ تغییر کند، تغییر علامت می‌دهد. اگر $kk'<0$ ، این تغییراز مثبت به منفی است، که این معنی را می‌دهد که نقطه از برون دایره به درون آن می‌رود. اگر $kk'>0$ ، مقادیر $d^2-\rho_0^2$ از منفی به‌مثبت تغییر می‌کنند ،نظیر به‌اینکه نقطه از درون دایرهٔ انحنا به برون آن خواهد رفت.

یک منحنی فقط‌وقتی می‌تواند کاملا" داخل یا کاملا" خارج دایرهٔ بوسان خود در نقطه‌ای چون P_0 قرار گیرد که مشتق انحنا نسبت به طول قوس در این نقطه صفر باشد $(k_0'=0)$. چنین نقاطی رئوس منحنی نامیده می‌شوند. رئوس یک بیضی نمونه‌هایی‌ازاین نقاط هستند (شکل ۹.۵).



شکل ۹.۵

با استفاده‌از فرمولهای (۹.۸)، (۹.۹)، و (۷.۲) می‌توان فرمولهای مختصات (x_C, y_C) مرکز انحنای منحنی $x=x(t), y=y(t)$ را به‌این صورت نوشت:

$$x_C=x+\frac{(\dot x^2+\dot y^2)^{3/2}}{\dot x\ddot y-\ddot x\dot y}\Big(-\frac{\dot y}{(\dot x^2+\dot y^2)^{1/2}}\Big),$$
$$y_C=y+\frac{(\dot x^2+\dot y^2)^{3/2}}{\dot x\ddot y-\ddot x\dot y}\,\frac{\dot x}{(\dot x^2+\dot y^2)^{1/2}},$$

یا ، بالاخره،

$$x_C = x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, \qquad y_C = y + \dot{x}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}. \tag{۱۰۰۹}$$

این فرمولها را می‌توان برای پارامتری‌سازی طبیعی خلاصه‌تر کرد .

امثله و تمرین

۱ . نمایش یک‌منحنی به‌صورت نمودار یک تابع مانند $y = f(x)$ ساده‌ترین نمایش یک منحنی مسطح است . این نمایش حالت خاصی از نمایش پارامتری است $(x = t, y = f(t))$. بسیاری از فرمولها برای این پارامتری‌سازی ساده‌تر هستند :

$$\mathbf{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}, \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}\right), \qquad \mathbf{n} = \left(-\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}\right), \qquad s = \int \sqrt{1 + f'^2}\,dx.$$

$$k = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}, \qquad x_C = x - f'\frac{1 + f'^2}{f''}, \qquad y_C = y + \frac{1 + f'^2}{f''}.$$

توجه کنید که در اینجا از نماد f' برای مشتق df/dx استفاده شده است . این امر با نمادگذاری ما ناسازگار است ، چرا که x یک پارامتر طبیعی نیست .برقراری این فرمولها را تحقیق کنید .

۲ . انحنای چرخزاد (شکل ۵۰۳) ، کشاننده (شکل ۴۰۴) ، و منحنی زنجیری

$$y = a\cosh\frac{x}{a} = a\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

را حساب کنید .

۳ . معادلهٔ طبیعی یک منحنی مسطح عبارت است از بستگی انحنای k به طول قوس s : $k = k(s)$. در مورد منحنی مسطح می‌توان معادلهٔ پارامتری یک منحنی را از معادلهٔ طبیعی مفروض آن با انتگرالگیری به دست آورد . در واقع ، برای این کار باید دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{d\alpha}{ds} = k(s); \qquad x' = \cos\alpha, \qquad y' = \sin\alpha$$

را حل کنیم . داریم

$$\alpha = \int_{s_0}^{s} k(u)\,du + \alpha_0$$

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos\left(\int_{s_0}^{v} k(u)\,du + \alpha_0\right) dv + x_0,$$

$$y = \int_{s_0}^{s} \sin\left(\int_{s_0}^{v} k(u)\,du + \alpha_0\right) dv + y_0.$$

هرگاه، مثلاً "، $k = a/(a^2 + s^2)$ و دستگاه مختصات را طوری اختیار کنیم که داشته باشیم $\alpha_0 = x_0 = y_0 = 0$ ، آنگاه

$$\alpha(s) = \int_0^s \frac{a}{a^2 + u^2}\,du = \arc\tan\frac{s}{a},$$

و

$$x = a\ln(s + \sqrt{s^2 + a^2}) - 2a\ln a, \qquad y = \sqrt{s^2 + a^2} - a.$$

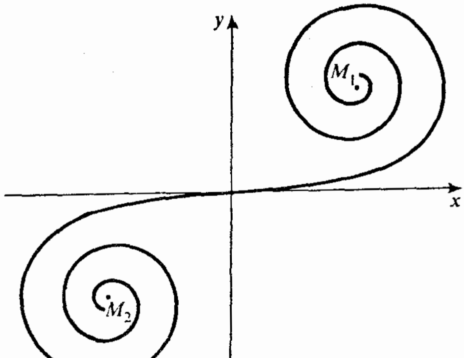
۴. نمونهٔ جالب دیگر منحنیی است که در آن انحنا با طول قوس متناسب است: $k = as$. با مقادیر اولیهٔ $\alpha_0 = x_0 = y_0 = 0$ داریم

$$\alpha = \frac{as^2}{2}, \qquad x = \int_0^s \cos\frac{au^2}{2}\,du, \qquad y = \int_0^s \sin\frac{au^2}{2}\,du.$$

در اینجا انتگرالها را نمی‌توان با توابع مقدماتی بیان کرد، و برای تعیین مختصات نقطهٔ نظیر به‌مقدار معلومی از پارامتر s ،مجبور به‌استفاده از روشهای عددی یا جداول مخصوص خواهیم بود. بهرحال، به‌آسانی می‌توان از رفتار منحنی یک تصویر کیفی به دست آورد. توجه کنید که

$$\lim_{s\to\infty} x = \lim_{s\to\infty} y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\lim_{s\to-\infty} x = \lim_{s\to-\infty} y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$



شکل ۹.۶

و نیز $y' = y'' = 0$ در $s = 0$. لذا، منحنی در مبدأ مختصات دارای نقطهٔ عطف است،

منحنی حول نقطهٔ $M_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a})$ پیچیده و، وقتی $s \to \infty$ ، به طور مجانبی به این نقطه نزدیک می‌شود؛ همین مطلب در مورد نقطهٔ $M_2 = (-\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}, -\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a})$ ، وقتی $s \to -\infty$ ، نیز صادق است (شکل ۹۰۶).

۹۰۴ گسترده و گسترندهٔ یک منحنی مسطح

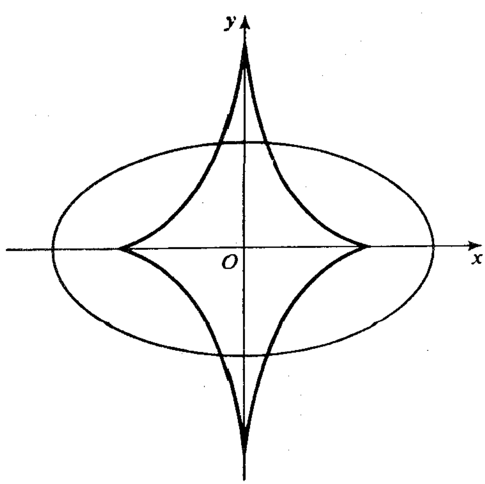
همانطور که در زیر بخش ۱۰۷ دیدیم ، یک منحنی مسطح دقیقا" یک گسترده دارد که در همان صفحهٔ منحنی واقع است . این گسترده مکان هندسی مراکز انحنای منحنی است ؛ بنابراین ، معادلات (۱۰۰۹) با پارامتر متغیر t را می‌توان به عنوان یک نمایش پارامتری گسترده در نظر گرفت .

همهٔ گسترنده‌های یک منحنی مسطح در صفحهٔ منحنی واقعند ؛ لذا ، فرمول (۳۰۷) برقرار است . همچنین ، دراینجا راحتتر است‌که معادلات گسترنده‌ها را مستقیما" و به‌عنوان مسیرهای قائم خانوادهٔ مماسها ، یعنی منحنیهایی که همهٔ مماسها را در زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند ، به دست آورد تا وارد کردن پارامتر طبیعی و به‌کار بردن فرمولهای (۳۰۷) .

تمرین

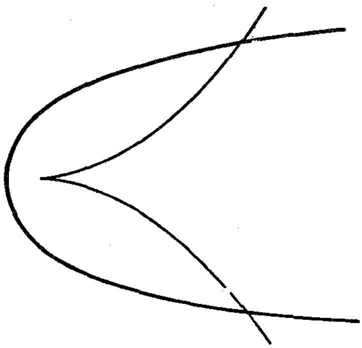
۱ . گستردهٔ منحنیهای زیر را بیابید :

(آ) بیضی (شکل ۹۰۷) ؛



شکل ۹۰۷

(ب) سهمی (شکل ۹۰۸) ؛

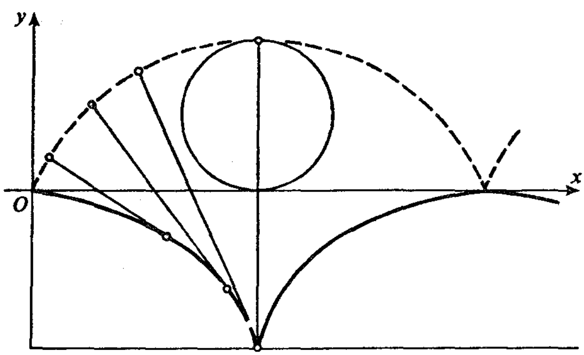


شکل ۹ . ۸

(پ) هذلولی ؛

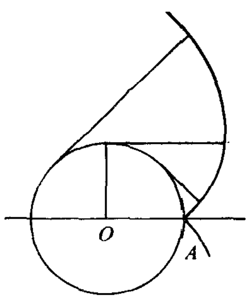
(ت) منحنی زنجیری.

۲ . ثابت کنید گسترده‌ٔ یک چرخزاد چرخزادی است همنهشت با آن (شکل ۹ . ۹) .



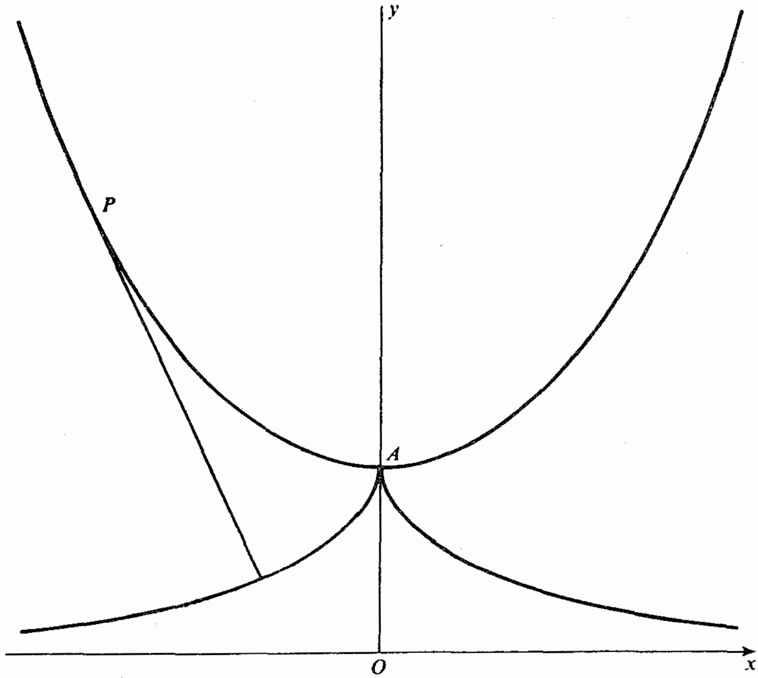
شکل ۹ . ۹

۳ . معادلهٔ گسترندهٔ یک دایره را بیابید (شکل ۹ . ۱۰) .



شکل ۹ . ۱۰

۴. ثابت کنید گستردهٔ کشاننده یک منحنی زنجیری است (شکل ۱۱۰۹) .



شکل ۱۱۰۹

۵۰۹ مجانبهای یک منحنی مسطح

درحالتی که منحنی در صفحه است ، می‌توان از نظریه‌ای که در زیر بخش ۵۰۴ ذکر شد استفاده کرد . اما بعضی از فرمولها را می‌توان خلاصه‌تر کرد .

در اینجا راستای مجانبی با شیبش m تعریف می‌شود . چون بردار هادی راستای مجانبی منحنی

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = 0$$

مساوی

$$\mathbf{a} = \left(\lim \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \lim \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

است ، شیب راستای مجانبی عبارت خواهد بود از

$$m = \lim_{t \to b-0} \frac{y(t)}{x(t)} \tag{۱۱۰۹}$$

اگر این نسبت به ∞ یا $-\infty$ میل کند ، راستای مجانبی بر راستای محور y منطبق می‌شود .

مناسبترین کار دراین حالت این است‌که یک‌نقطهٔ‌مجانب را نقطهٔ برخوردش $(0, b)$ با مجور y بگیریم ،البته مشروط براینکه‌محور y راستای مجانبی نداشته‌باشد . دراین‌صورت، معادلهٔ مجانب به شکل

$$y = mx + b$$

خواهدبود .

هر خط با این معادله یک مجانب است اگر و فقط اگر فاصلهٔ یک نقطه از منحنی تا یک نقطه از خط با همان طول به صفر میل کند :

$$\lim_{t \to b-0} [y(t) - mx(t) - b] = 0.$$

این امر معادل وجود حد

$$b = \lim_{t \to b-0} [y(t) - mx(t)] \qquad (۱۲ \cdot ۹)$$

است ، که در آن m از فرمول (۱۱ ۰ ۹) معین می‌شود .

برای یافتن‌مجانبهای‌موازی‌محور y ، باید مقادیر x_0 راطوری‌بیابیم‌که $x_0 = \lim x(t)$ درحالی که $\lim y(t) = \pm\infty$.

۱۰ نمایشهای دیگر یک منحنی مسطح

۱۰۱۰ معادلهٔ ضمنی یک منحنی

یک منحنی در صفحه اغلب با یک معادلهٔ ضمنی به صورت

$$F(x, y) = 0 \qquad (۱ \cdot ۱۰)$$

بیان می‌شود . این معادله به شکل معادلات خطوط ، دوایر ، و مقاطع مخروطی است کــه در هندسهٔ تحلیلی به کار می‌روند .

بدون فرضهایی علاوه بر پیوستگی دربارهٔ $F(x, y)$ ، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) صادق در این معادله می‌تواند مجموعهٔ بستهٔ کاملا" دلخواهی باشد . از اینرو ، بایـد در مورد F فرضهای دیگری نیز منظور شود .

قضیه. *هرگاه تابع دو متغیرهٔ $F(x, y)$ در همسایگی نقطهٔ (x_0, y_0) ، که در معادلـهٔ $F(x_0, y_0) = 0$ صدق کند ، از کلاس C_1 بوده ، و دست کم یکی از مشتقات جزئی آن $F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)$ در این نقطه مخالف صفر باشد ، آنگاه معادلهٔ $F(x, y) = 0$ دریکی*

از همسایگیهای این نقطه یک قوس ساده در صفحه را نمایش داده، و مماس بر این قوس در نقطهٔ (x_0, y_0) دارای معادلهٔ

$$(X - x_0)F_x(x_0, y_0) + (Y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (۲.۱۰)$$

است.

برهان. فرض کنیم $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. پس، طبق قضیهٔ تابع ضمنی، یک همسایگی از (x_0, y_0) وجود دارد که در آن $F(x, y) = 0$ معادل $y = f(x)$ است، که $f(x)$ تابعی است از کلاس C_1 و

$$\frac{df(x_0)}{dx} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

معادلهٔ $y = f(x)$ در این همسایگی یک قوس ساده را نمایش می دهد. نقطهٔ (x_0, y_0) یک نقطهٔ منتظم این قوس بوده و $\{1, df(x_0)/dx\}$ بردار مماس آن است. لذا، معادلهٔ مماس به شکل

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 \\ 1 & \dfrac{df}{dx}(x_0) \end{vmatrix} = 0,$$

یا

$$(X - x_0)F_x + (Y - y_0)F_y = 0,$$

می باشد، و برهان تمام می شود.

هرگاه $F_y(x_0, y_0) = 0$ ولی $F_x(x_0, y_0) \neq 0$، با تعویض نقش متغیرها به همین نحو عمل می شود.

تمرین

۱. کل برهان را در این حالت تکرار کنید.

۲. انحنای یک منحنی که با معادلهٔ ضمنی $F(x, y) = 0$ داده شده است، که در آن F یک تابع از کلاس C_2 است، را در یک نقطهٔ منتظم بیابید.

۳. معادلهٔ قائم به منحنی $F(x, y) = 0$ را در یک نقطهٔ منتظم بیابید.

۴. ثابت کنید مسیرهای قائم یک خانوادهٔ یک پارامتری از دوایر به شعاع ثابت و مرکز واقع بر یک خط مستقیم کشانندهٔ هستند.

مسیر قائم یک خانواده از منحنیها منحنیی است که منحنیهای خانواده را در زاویهٔ قائمهٔ قطع می کند.

۵. معادلهٔ ضمنی برگ شبدر (زیر بخش ۲.۳، مثال ۲)

$$x = \cos 3t \cos t, \qquad y = \cos 3t \sin t$$

را با حذف پارامتر t بیابید.

[**جواب**. $x^3 - 3xy^2 = (x^2 + y^2)^3$]

۲.۱۰ نقاط منفرد یک منحنی که با معادلهٔ ضمنی داده شده است

اگر $F_x = 0$ و $F_y = 0$ را مجاز بدانیم، معادلهٔ $F(x, y) = 0$ نه فقط ممکن است نمایش منحنیها باشد بلکه قلمروها، نقاط منفرد، وغیره را نیز نشان می‌دهد. نقاطی چون (x, y) که در هر سه معادلهٔ $F(x, y) = 0, F_x(x, y) = 0, F_y(x, y) = 0$ صدق کنند ***نقاط منفرد*** منحنی نام دارند. حال یک نقطهٔ منفرد از یک منحنی را در نظر می‌گیریم به‌طوری که در یک همسایگی از آن هیچ نقطهٔ منفرد دیگری وجود نداشته باشد.

قضیه. ***هرگاه نقطهٔ (x_0, y_0) یک نقطهٔ منفرد منحنی $F(x, y) = 0$ باشد، که در آن F تابعی از کلاس C_2 بوده، و منحنی در یکی از همسایگیهای (x_0, y_0) نقطهٔ منفرد دیگری نداشته باشد، و دست کم یکی از مشتقات مرتبهٔ دوم F در (x_0, y_0) مخالف 0 باشد، آنگاه رفتار منحنی در مجاورت (x_0, y_0) به صورت زیر خواهد بود:***

۱. ***هرگاه در نقطهٔ (x_0, y_0) داشته باشیم $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 > 0$، آنگاه یک همسایگی از (x_0, y_0) وجود دارد که هیچ نقطه‌ای از منحنی را در بر نمی‌گیرد. نقطهٔ (x_0, y_0) نقطهٔ منفرد منحنی نام دارد؛***

۲. ***هرگاه در نقطهٔ (x_0, y_0) داشته باشیم $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 < 0$، آنگاه دو شاخه از منحنی مار بر (x_0, y_0) وجود دارد، هر یک در (x_0, y_0) دارای مماس است، و این مماسها از هم متمایز می‌باشند. این نقطه، گره یا نقطهٔ خودقطعی است؛***

۳. ***هرگاه در نقطهٔ (x_0, y_0) داشته باشیم $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 0$، آنگاه دو شاخه از منحنی مار بر (x_0, y_0) وجود دارد که در (x_0, y_0) دارای یک مماس مشترک هستند. لذا، این نقطه یا یک نقطهٔ بازگشت است یا یک نقطهٔ تماس دو شاخهٔ منحنی.***

برای اثبات کامل این قضیه، خواننده را به حساب دیفرانسیل و انتگرال ارجاع می‌دهیم. ما در اینجا فقط شرح مختصری می‌آوریم که شهود هندسی واقع در ورای برهان را توضیح می‌دهد.

می‌توان فرض کرد که نقطهٔ منفرد در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد. با استفاده از فرمول تیلور داریم

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2}[F_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2F_{xy}(x_0, y_0)xy + F_{yy}(x_0, y_0)y^2] + o(x^2 + y^2).$$

منحنی را در یک همسایگی به‌قدر کافی کوچک مبدأ با یک منحنی مرتبهٔ دوم که از حذف

جملات مراتب بالاتر به‌دست می‌آید تقریب می‌کنیم (این قسمتی از برهان است که بایستی توجیه شود) . لذا ، معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$F_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2F_{xy}(x_0, y_0)_{xy} + F_{yy}(x_0, y_0)y^2 = 0.$$

بحث دراین معادلهٔ درجهٔ دوم به سه حالت مذکور در قضیه منجر می‌شود . درحالت اول یک جفت خط موهومی داریم با یک نقطهٔ حقیقی ؛ یعنی ، مبدأ . درحالت دوم دوخط متقاطع داریم ، که مماسهای دو شاخهٔ منحنی‌اند ، و در حالت سوم یک خط مضاعف‌داریم ، که مماس برهر دو شاخهٔ منحنی است .

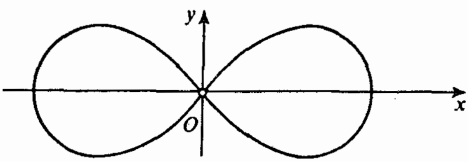
اگر هر سه مشتق جزئی مرتبهٔ دوم F در نقطهٔ منفرد صفر باشند ، رفتار منحنی‌باآنچه در قضیه توصیف‌شده فرق خواهدداشت . این رفتار را می‌توان با استفاده‌از مشتقات مراتب بالاتر مورد مطالعه قرار داد .

امثله و تمرین

۱ . لمنیسکات برنولی[1] (شکل ۱۰۱۰)

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

در مبدأ دارای گره است .



شکل ۱۰۱۰

۲ . سهمی نیمه مکعبی (شکل ۳۰۳)

$$y^2 = ax^3$$

در 0 دارای یک نقطهٔ بازگشت است .

۳ . منحنی

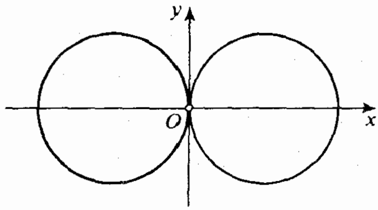
$$(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$$

در 0 انفراد دارد . در این نقطه داریم $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 0$ ، اما این نقطه یک نقطهٔ بازگشت نیست بلکه نقطهٔ تماس دو شاخهٔ منحنی است . برای اثبات آن توجه می کنیم که طرف چپ معادله حاصلضرب $(x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x)$ است ؛ و لذا ، منحنی

---

1. Bernoulli

از دو دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x = 0$ تشکیل شده است که برمحور y در مبداء مماسند (شکل ۲۰۱۰) .

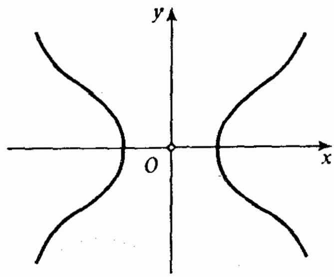


شکل ۲۰۱۰

۴ . مبدأ $(0, 0)$ یک نقطهٔ منفرد منحنی (شکل ۳۰۱۰)

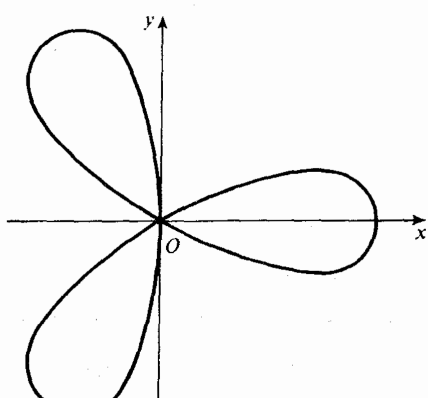
$$y^2 + x^4 - x^6 = 0$$

است .



شکل ۳۰۱۰

۵ . برگ شبدر $x^3 - 3xy^2 - (x^2 + y^2)^3 = 0$ (شکل ۴۰۱۰) در مبدأ مختصات دارای یک نقطهٔ منفرد است . در اینجا داریم $F_{xx}(0, 0) = F_{xy}(0, 0) = F_{yy}(0, 0) = 0$ ؛ بنابراین ،



شکل ۴۰۱۰

قضیه قابل اجرا نیست . بررسی قسمتی از معادله که از پایین‌ترین درجه است $(x^3 - 3xy^2 = 0)$ نشان می‌دهد که سه شاخه مار بر مبدأ وجود دارند که‌به‌ترتیب‌دارای خطوط مماس $x = 0$ ، $x = \sqrt{3}y$ ، و $x = -\sqrt{3}y$ می‌باشند .

۳.۱۰ مختصات قطبی

یک منحنی مسطح را می‌توان در مختصات قطبی با یک معادله مانند $\rho = \rho(\phi)$ نمایش داد ، که در آن ρ **بردار شعاعی** و ϕ **زاویهٔ قطبی** است . این معادله را می‌توان فوراً " به‌معادلات پارامتری در مختصات دکارتی متعامد تغییر داد ، در صورتی که مبدأ مختصات درقطب قرار گرفته و محور x برمحور قطبی منطبق شود . با استفاده از ϕ به عنوان یک پارامتر ، داریم

$$x = \rho(\phi)\cos\phi, \qquad y = \rho(\phi)\sin\phi. \tag{۳.۱۰}$$

بنابراین ، طول قوس از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$s = \int_{\phi_0}^{\phi} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\phi. \tag{۴.۱۰}$$

زاویهٔ μ بین خط‌واصل از قطب به یک نقطهٔ منحنی و مماس برمنحنی در این‌نقطه‌ازرابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\cot\mu = \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \tag{۵.۱۰}$$

همچنین ، انحنا برابر است با

$$k = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{3/2}}. \tag{۶.۱۰}$$

امثله و تمرین

۱ . فرمولهای (۴.۱۰) ، (۵.۱۰) ، و (۶.۱۰) را ، یا از فرمولهای نظیر برای نمایشهای پارامتری و یا از طریق دیگر ، به دست آورید .

۲ . معادلهٔ طبیعی مارپیچ لگاریتمی که معادله‌اش در مختصات قطبی

$$\rho = ce^{k\phi}$$

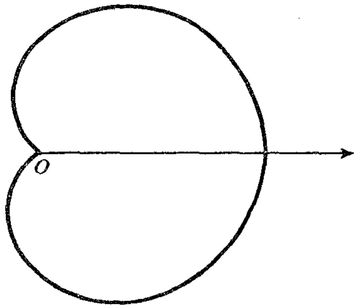
است و در آن c و k ثابت اند ، را پیدا کنید ، و منحنی آن را رسم نمایید .

۳ . ثابت کنید مارپیچ لگاریتمی شعاعهای خارج شده از مبدأ را در یک زاویهٔ ثابت قطع می‌کند . این زاویه را برحسب ثابتهای c و k بیان نمایید .

۴ . گستردهٔ منحنیهای زیر را بیابید :

(آ) لمنیسکات $\rho = a\sqrt{2\cos 2\phi}$: تحقیق کنید که معادلهٔ ضمنی با معادلهٔ ضمنی اولین مثال از بخش پیش یکی است؛

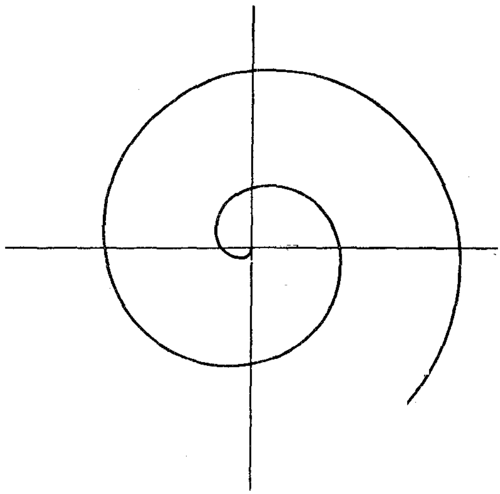
(ب) دلگون $\rho = a(1 - \cos\phi)$ (شکل ۵۰۱۰) .



شکل ۵۰۱۰

۵ . گسترندهٔ منحنیهای زیر را بیابید :

(آ) مارپیچ ارشمیدسی $\rho = a\phi$ (شکل ۶۰۱۰)؛



شکل ۶۰۱۰

(ب) دلگون تمرین پیش.

۴۰۱۰ پوش خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای مسطح

معادلهٔ

$$F(x, y, \alpha) = 0 \qquad (۷۰۱۰)$$

را در نظر می‌گیریم ، که در آن F دارای مشتقات جزئی پیوستهٔ F_x, F_y, F_α است . اگر $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$ (جز در نقاط منفرد) ، این معادله، به‌ازای مقدار ثابتی از α ، یک منحنی ، و باتغییر α ، یک‌خانواده از منحنیها را نمایش‌می‌دهد . فرض‌کنیم (برای بازه‌های به‌قدر کافی کوچک ، لااقل موضعی) منحنیهای مختلف نظیر به مقادیر مختلف α باشند .

منحنی $\mathscr{C}$ **پوش** این خانواده از منحنیها نامیده می‌شود اگر که در هر نقطه‌اش بر یکی از منحنیهای خانواده مماس بوده و ، در همسایگی به قدر کافی کوچکی از نقطهٔ تماس ، به منحنیهای مختلف در نقاط متمایز مماس باشد .

فرض کنیم پوش دارای نمایش پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{۸۰۱۰}$$

باشد . با تحدید به یک همسایگی که در آن پوش برمنحنیهای مختلف خانواده در نقاط متمایز مماس است ، تابع معکوسپذیری مانند $\alpha(t)$ حاصل می‌شود که مقدارش همان مقدار پارامتر α از منحنی است که به پوش در $(x(t), \ y(t))$ مماس است . با این فرض که نمایش پارامتری (۸۰۱۰) یک پوش از کلاس C_1 (لااقل قطعه قطعه) بوده و تابع $\alpha(t)$ نیزدارای مشتق ناصفر باشد ، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت .

قضیه . ***نقاط پوش خانوادهٔ $F(x, y, \alpha) = 0$ ازمنحنیهادر دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند:***

$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad F_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \tag{۹۰۱۰}$$

این معادلات می‌توانند به‌وسیلهٔ نقاط منفرد منحنیهای خانواده ، حتی اگر متعلق به پوش هم نباشند ، نیز برقرار شوند . نقاطی که نقاط منتظم منحنیهای خانواده بوده ودر(۹۰۱۰) صادق باشند روی پوش قرار می‌گیرند .

برهان . چون فرض می‌کنیم درهمسایگی مورد نظر $\alpha'(t) \neq 0$ ، لذا α را می‌توان پارامترپوش گرفت . فرض کنیم $x(\alpha), y(\alpha)$ مختصات نقطهٔ تماس منحنی $F(x, y, \alpha)$ و پوش باشد . چون این نقطه برمنحنی نظیر از خانواده قرار دارد ، اتحاد زیر را خواهیم داشت :

$$F\big(x(\alpha), y(\alpha), \alpha\big) = 0. \tag{۱۰۰۱۰}$$

با مشتقگیری از این اتحاد نسبت به α داریم

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_\alpha \frac{dx}{d\alpha} + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_\alpha \frac{dy}{da} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \tag{۱۱۰۱۰}$$

که در آن اندیس α مقدار تابع درنقطهٔ $(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)$ را نشان می‌دهد . از آن سو، چون منحنی $x = x(\alpha), y = y(\alpha)$ بر $F(x, y, \alpha) = 0$ در $(x(\alpha), y(\alpha))$ مماس است ، خواهیم داشت

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_\alpha \frac{dx}{d\alpha} + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_\alpha \frac{dy}{d\alpha} = 0 \qquad (۱۲۰۱۰)$$

فرمولهای (۱۰۰۱۰) تا (۱۲۰۱۰) باهم ایجاب می‌کنند که نقاط پوش باید در معادلهٔ (۹۰۱۰) صدق کنند.

برای یافتن معادلات مجموعه نقاط صادق در (۹۰۱۰)، می‌توان یا x, y را به عنوان توابعی از پارامتر α بیان کرد و یا x، y، و α را به عنوان توابعی از یک پارامتر کمکی مانند t، و سپس، با حذف α، معادلهٔ ضمنی منحنی را به دست آورد.

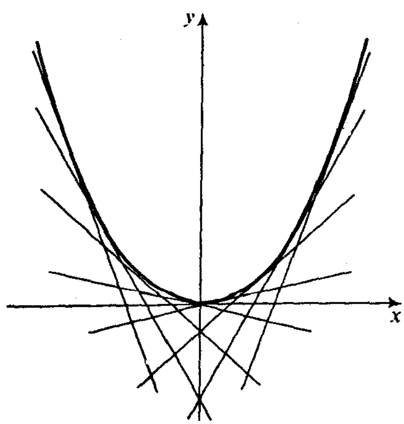
بهرحال، معادلات (۱۱۰۱۰) و (۱۲۰۱۰) درصورتی‌که منحنی $x = x(\alpha), y = y(\alpha)$ نقاط منفرد منحنیهای خانواده را در برگیرد نیز برقرار است، زیرا، در این حالت، $[\partial F/\partial x]_\alpha = [\partial F/\partial y]_\alpha = 0$، و (۱۲۰۱۰) تماس منحنیها را ایجاب نمی‌کند. هرگاه نقطهٔ $(x(\alpha), y(\alpha))$ یک نقطهٔ منتظم $F(x, y, \alpha) = 0$ باشد، آنگاه (۹۰۱۰) رابطهٔ (۱۲۰۱۰) را ایجاب می‌کندو (۱۲۰۱۰) نتیجه‌می‌دهدکه‌منحنیهای $x = x(\alpha), y = y(\alpha)$ و $F(x, y, \alpha) = 0$ در نقطهٔ $(x(\alpha), y(\alpha))$ برهم مماسند.

امثله و تمرین

۱. خانوادهٔ

$$\alpha x - py = \frac{\alpha^2}{2}$$

از خطوط مستقیم، که در آن p ثابت بوده و α پارامتر خانواده است (شکل ۷۰۱۰).



شکل ۷۰۱۰

برای یافتن پوش باید معادلات

$$\alpha x - py = \frac{\alpha^2}{2}, \qquad x = \alpha$$

را حل کنیم. باحذف α داریم $y = x^2/2p$. چون منحنیهای خانوادهٔ ما ، که خطوطی مستقیم‌اند ، نقطهٔ منفرد ندارند ، این معادله معادلهٔ پوش خواهد بود . در اینجا پوش یک سهمی است که برتمام خطوط خانواده مماس است .

۲ . خانوادهٔ

$$(x-\alpha)^2 + y^2 - 2p\alpha = 0$$

از دوایر (شکل ۸۰۱۰) . با مشتقگیری نسبت به α داریم

$$-2(x-\alpha) - 2p = 0,$$

که از آنجا

$$\alpha = p + x.$$

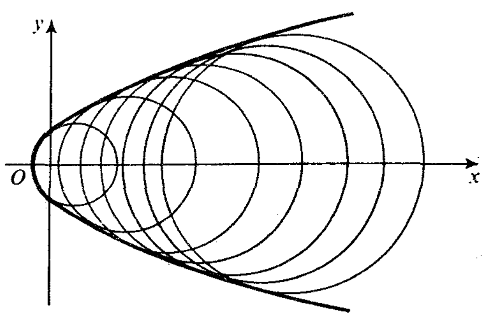
با جایگزینی در معادلهٔ خانواده به دست می‌آوریم

$$p^2 + y^2 - 2p^2 - 2px = 0,$$

یا

$$y^2 = 2p(x + p/2),$$

که معادلهٔ یک سهمی است . در اینجا پوش باهمهٔ دوایر خانواده تماس ندارد ، و فقط برآنهایی مماس است که نظیر $\alpha > p/2$ می‌باشند .



شکل ۸۰۱۰

۳ . خانوادهٔ

$$(y+\alpha)^2 - (x+\alpha)^3 = 0$$

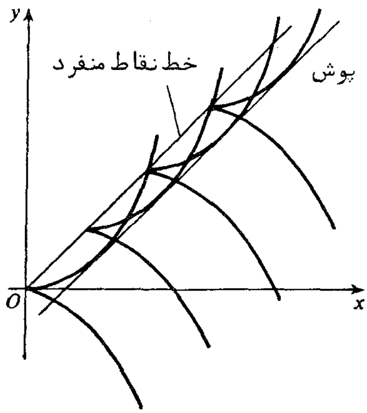
از سهمیهای نیمه مکعبی (شکل ۹۰۱۰) با پارامتر α . با مشتقگیری داریم

$$2(y+\alpha) - 3(x+\alpha)^2 = 0.$$

و از حذف $(y+\alpha)$ خواهیم داشت

$$4(x+\alpha)^3 = 9(x+\alpha)^4,$$

که $x+\alpha=0$ یا $4=9(x+\alpha)$ را ایجاب می‌کند، که از اینجا $x=-\alpha$ یا $x=\frac{4}{9}-\alpha$. درحالت اول، با حذف α داریم $2(y-x)=0$ یا $y=x$ و، در حالت دوم، $2(y-x+\frac{4}{9})=3(\frac{4}{9})^2$ یا $x-y=\frac{8}{27}$. خط اول خط نقاط بازگشت خانواده است، و خط دوم پوش می‌باشد.



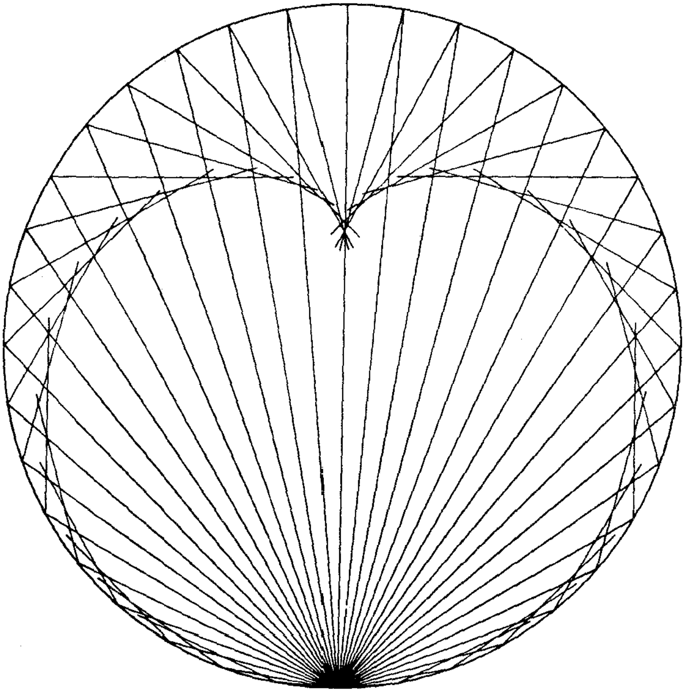
شکل ۹.۱۰

۴. گسترده‌ٔ یک منحنی مسطح را می‌توان به عنوان پوش خانوادهٔ خطوط قائم به منحنی در نظر گرفت. معادلهٔ گسترده را از این را به دست آورید.

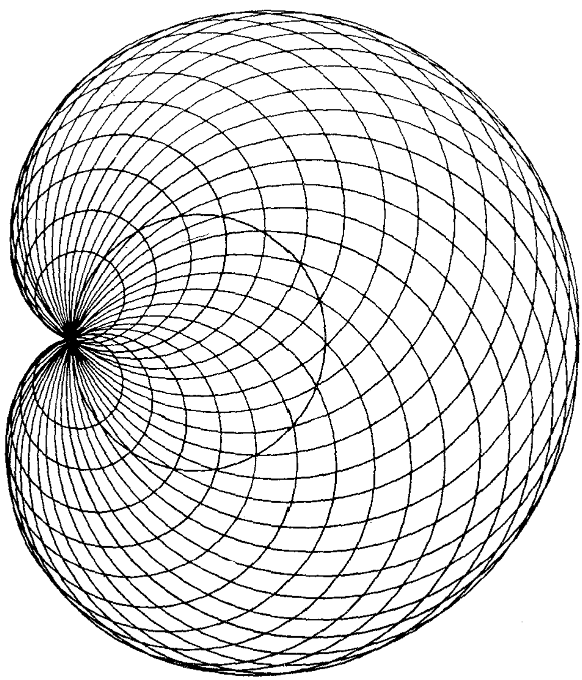
۵. منحنی $x=x(t), y=y(t)$ از کلاس C_2 داده شده است. خانوادهٔ خطوط مستقیمی را در نظر می‌گیریم که از دوران خطوط مماس برمنحنی به‌قدر زاویهٔ ثابت α حول نقطهٔ تماس حاصل می‌شوند. خانوادهٔ خطوط مستقیمی که به این طریق تعریف می‌شود به پارامتر t بستگی دارد. درحالت خاصی که $\alpha=\pi/2$، این خانواده خانوادهٔ قائمها است. پوش این خانواده از خطوط را پیدا کنید. ثابت کنید نقطهٔ تماس پوش و خط نظیر به مقدار t از پارامتر تصویر متعامد مرکز انحنای منحنی روی این خط است.

۶. منحنی $\mathscr{C}$ درصفحه و نقطهٔ F مفروضند. پوش منعکس شعاعهای خارج شده از F نسبت به‌منحنی را **شعاع پوش** $\mathscr{C}$ نسبت‌به F می‌نامند. ثابت‌کنید شعاع پوش یک دایره نسبت به یک نقطه از محیطش یک دلگون است (شکل ۱۰.۱۰).

۷. پوش خانواده‌ای از دوایر را بیابیدکه مراکزشان‌بردایرهٔ $x^2-2ax+y^2=0$ قرار داشته و از نقطهٔ $(0,0)$ می‌گذرند. تحقیق کنید که این پوش یک دلگون است (شکل ۱۱.۱۰).
راهنمایی. معادلهٔ دایرهٔ مراکز را به شکل $x=a(1+\cos\theta), y=a\sin\theta$ نوشته و θ را به عنوان پارامتر خانواده به کار برید.



شکل ۱۰.۱۰



شکل ۱۱.۱۰

۴
سطوح در فضای سه بعدی

۱۱ نمایش تحلیلی سطوح

۱۰۱۱ سطح معمولی

مجموعهٔ $\mathscr{F}$ از نقاط یک فضای سه بعدی که با یک مستطیل بسته از صفحه در یک تناظر یک به یک پیوسته باشد یک **پارچهٔ ساده** از یک سطح نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر، پارچهٔ ساده از یک سطح مجموعهٔ نقاطی است که بردارهای موضع آنها مقادیر یک تابع برداری پیوسته و یک به یک مانند

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) \tag{۱۰۱۱}$$

است، که در مستطیل بسته‌ای چون $a \leq u^1 \leq b, c \leq u^2 \leq d$ از صفحه به پارامترهای u^1, u^2 تعریف شده است.

در هماهنگی با نمادگذاریی که در حساب تانسورها معمول شده است، ماهر دوپارامتر را با یک‌حرف دارای بالانویس نشان‌می‌دهیم .لذا ،بالانویسها در u^1, u^2 صرفا" اندیسهایی هستند برای تمایز دو پارامتر؛ مثلا'، u^2 پارامتر دوم است، نه مربع u . اگر ملزم به استفاده از توانهای‌این حروف اندیسدار باشیم، آنها را داخل پرانتز گذاشته و سپس توان را می‌نویسیم؛ مثلا"، مربعهای u^1 و u^2 با $(u^1)^2$، $(u^2)^2$ نشان داده می‌شوند، و غیره.

مجموعهٔ نقاطی که در معادلهٔ

$$z = f(x, y)$$

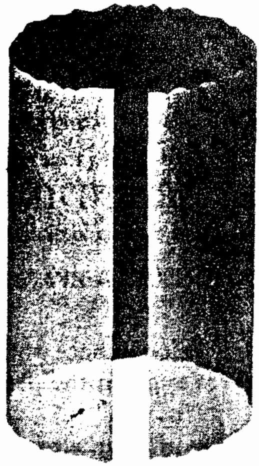
صدق‌می‌کنند ،که‌درآن f تابع دومتغیرهٔ‌پیوسته‌ای‌است‌که‌درمستطیل $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ تعریف شده است، نمونه‌ای است از یک پارچهٔ ساده از یک سطح. در واقع ،در این حالت، x و y نقش پارامترها را بازی می‌کنند، و تابع برداری پیوسته عبارت است از $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$. واضح است که این تابع یک به یک است، زیرا مقادیر تابع به ازای دو نقطهٔ متمایز از صفحهٔ xy باید دست کم در یک مؤلفه متفاوت باشند.

شهودا" می‌توان گفت که یک پارچهٔ ساده از یک سطح با کشیدن، منقبض‌کردن، و خم‌کردن یک مستطیل ولی بدون پاره‌کردن یا چسباندن بهم به دست می‌آید. بەجای آنکه

در این تعریف از مستطیل استفاده‌کنیم ،می‌توانستیم هرقلمرو همبند سادهٔ بسته و کراندار در صفحه، بخصوص، یک قرص بسته، را به‌کار بریم .

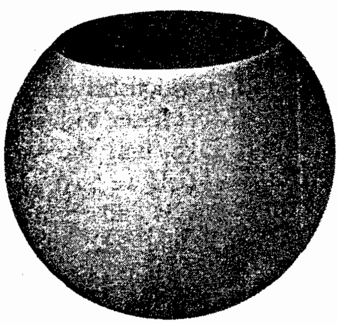
سطح استوانه یک پارچهٔ ساده نیست ، زیرا نمی‌توان آن را از یک مستطیل بدون چسباندن بهم به‌دست‌آورد.به‌همین‌ترتیب ، کره و طوق تخت نیز یک پارچهٔ ساده نیستند.

اما ، استوانه که از آن یک نوار باز بین دو مولد برداشته شده (شکل ۱۰۱۱) ، کره



شکل ۱۰۱۱

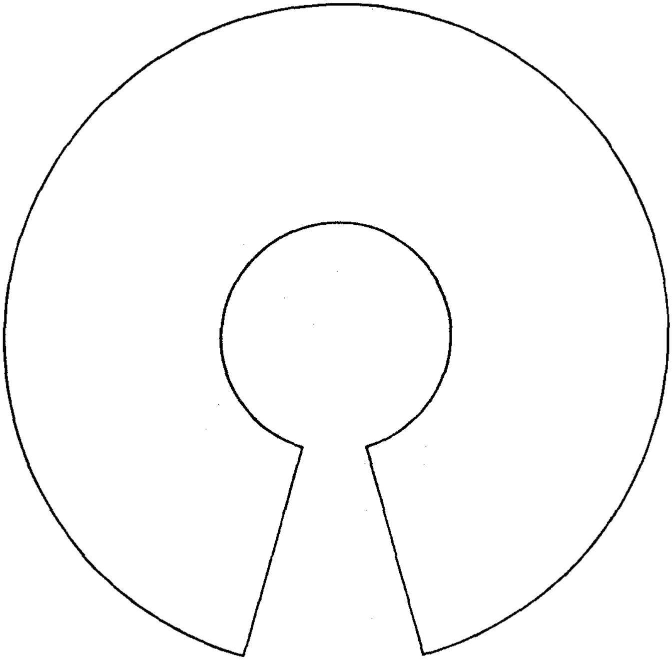
بدون یک کلاه‌باز (شکل ۲۰۱۱) ، یا طوقی که از آن یک قطاع باز برداشته شده (شکل



شکل ۲۰۱۱

۳۰۱۱) پارچه‌های ساده‌ای از یک سطح هستند .

بنابراین ،استوانه، کره، وطوق را می‌توان با دوپارچهٔ ساده پوشاند . از آن سو ،دو پارچهٔ ساده برای پوشاندن یک چنبره کافی نیست ، ولی چهار پارچه این عمل را انجام خواهد داد .



شکل ۱۱ ۳۰

این مثالها نشان می‌دهند که مفهوم پارچهٔ ساده از یک‌سطح برای بررسی سطوح خیلی محدودکننده است، ولی راه را برای یک تعمیم مناسب نشان می‌دهد.

می‌گوییم مجموعهٔ همبند $\mathscr{F}$ از نقاط یک فضای اقلیدسی سه بعدی یک **سطح معمولی** است اگر هر نقطهٔ P این مجموعه همسایگی مانند U در $\mathscr{F}$ داشته باشد که بست آن یک پارچهٔ ساده باشد. در اینجا **همسایگی P در $\mathscr{F}$** یعنی مؤلفهٔ همبند P در اشتراک $\mathscr{F}$ و یک مجموعهٔ باز در فضا که شامل P است.

با بیان شهودی، این تعریف می‌گوید که، به‌ازای هرنقطه از یک سطح معمولی، می‌توان بخشی از سطح را از آن جدا کرد به‌طوری‌که شامل P بوده و یک پارچهٔ ساده باشد.

تعریف همسایگی P در $\mathscr{F}$ با تعریف معمولی همسایگی در توپولوژی القایی زیر فضای $\mathscr{F}$ فرق دارد. این تعریف توپولوژیی در $\mathscr{F}$ تعریف می‌کند که ما آن را **توپولوژی ذاتی** $\mathscr{F}$ می‌نامیم. با آنکه این توپولوژی با توپولوژی القایی معمولی در بسیاری از حالات یکی است، مثلاً" در مورد کره، چنبره، و غیره، اما، در حالت کلی، همانطور که از مثال ۴ زیر می‌توان دید، دو توپولوژی باهم متفاوت می‌باشند.

اگر در تعریف بالا از توپولوژی القایی در $\mathscr{F}$ استفاده می‌شد، کلاس سطوح معمولی

خیلی بیشتر از منحنیهای معمولی محدود می‌شد . حتی تعریف فعلی ما نیز در مقایسه با تعریف منحنیها محدود کننده‌تر است ، زیرا به سطوحی که خود را قطع می‌کنند اجازهٔ وجود نمی‌دهد ، درحالی که تعریف منحنیها این کار را خواهد کرد .

متأسفانه ، یک سطح را نمی‌توان همانند منحنیها تعریف کرد به این صورت که آن را نقش موضعا " یک به یک و دو پیوستهٔ یک صفحه گرفت ، زیرا یک کره ، که حتما " جزوسطوحی است که باید بررسی شود ، دارای این خاصیت نیست . لذا ، این امر ما را به تعریفی مقیدتر وادار می‌سازد .

با استفاده از مفهوم چندگونای دو بعدی مجرد ، می‌توان یک سطح را نقش پیوسته و یک به یک یک چندگونای مجرد تعریف کرد ، و باتوجه به نقشهای موضعا "یک به یک چندگوناها ، تعمیمی به دست آورد که اجازهٔ خود قطعی بدهد (قس. زیربخش ۴۰۱۱) .

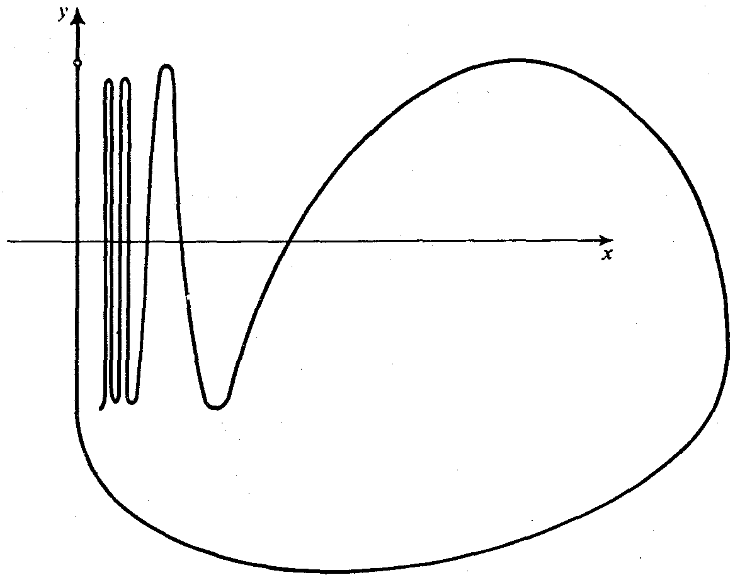
امثله و تمرین

۱ . با نشان دادن یک نگاشت پیوستهٔ یک به یک که یک مربع را به قرص تبدیل می‌کند ، ثابت کنید یک قرص مستدیر بسته یک پارچهٔ ساده است .

۲ . کرهٔ $\mathscr{S}$ یک سطح معمولی است ، زیرا ، به ازای هر نقطهٔ آن مانند P ، نیمکرهٔ باز شامل P یک همسایگی P در $\mathscr{S}$ است که بست آن یک پارچهٔ ساده است .

۳ . به همین ترتیب ، استوانه ، چنبره ، بیضی‌گون ، هذلولی‌گون ، و سهمی‌گون سطوح معمولی می‌باشند .

۴ . یک‌منحنی درنظرمی‌گیریم مرکب ازپاره‌خط $[-1,1)$ ازمحور y ، نمودارتابع $y = \sin(1/x)$ به ازای $x > 2/\pi$ ، و قوس واصل بین نقطهٔ $(0,-1)$ و نقطهٔ $(2/\pi, 1)$ (شکل ۴۰۱۱) . واضح است که این منحنی را می‌توان با طول قوس پارامتریزه کرد به این ترتیب که از نقطهٔ $(0,1)$ اندازه‌گیری شود درامتداد پاره‌خط، قوس واصل ، و سپس در امتداد نمودار . درنتیجه ، این منحنی نقش پیوستهٔ موضعا " یک به یک نیمخط $(0,\infty)$ است ؛ ولذا ، یک منحنی معمولی می‌باشد . سطح استوانه‌ای متشکل از عمودهای وارد به صفحهٔ xy ومار بر نقاط این منحنی یک سطح معمولی است . یک همسایگی به‌قدر کافی کوچک یک نقطه روی سطح که تصویرش برپاره‌خط قرار داشته باشد یک قرص مستدیر است . لیکن ، هر همسایگی این نقطه در توپولوژی القایی نیز شامل نقاطی است که تصاویرشان بر نمودار تابع قرار دارند . این مثالی است از دو توپولوژی ، توپولوژی ذاتی سطح و توپولوژی القایی ، که باهم یکی نیستند . سطح با توپولوژی ذاتی با صفحه همانریخت است ، درحالی که با توپولوژی القایی ، بدلیل موضعا " همبند نبودن ، نمی‌تواند با صفحه همانریخت باشد .



شکل ۴۰۱۱

۲۰۱۱ سطوح منتظم . نقاط منفرد

حال لازم است که کلاس سطوح را با اعمال چند شرط انتظام ، به همان نحو که در مورد منحنیها گفته شد ، محدود کنیم .

می‌گوییم سطح معمولی $\mathscr{F}$ از **کلاس** C_n است اگر هر نقطهٔ P از $\mathscr{F}$ همسایگیی در $\mathscr{F}$ داشته باشد با نمایش پارامتری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ ،که در آن $\mathbf{r}$ تابعی از کلاس C_n است .

نقطهٔ P از سطح نظیر به مقادیر (u_0^1, u_0^2) از پارامترها را یک **نقطهٔ منتظم** پارامتری‌سازی گویند اگر

$$\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2) \times \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2) \neq 0, \qquad (۲۰۱۱)$$

که در آن از نمادهای

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \qquad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$$

استفاده شده است . نقطه‌ای که به‌ازای آن در یک پارامتری‌سازی معلوم $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$ ،یک **نقطهٔ منفرد** پارامتری‌سازی نامیده می‌شود .

نقطهٔ P از سطح را **منفرد** گویند اگر در هر پارامتری‌سازی منفرد باشد . در مورد منحنیهای از کلاس C_n $(n \geq 1)$ ، پارامتری‌سازی خاصی (پارامتری‌سازی طول قوس) وجود

داشت با این خاصیت که فقط نقاط منفرد اساسی در این پارامتری‌سازی نقاط منفرد بودند. در مورد سطوح، چنین پارامتری‌سازیی درحالت کلی وجود ندارد. حتی‌کره را نیزنمی‌توان طوری پارامتریزه کرد که انفراد نداشته باشد، اگرچه تمام نقاط آن از نظر هندسی غیرقابل تمیزند.

مثلا" درمورد منحنیها، ابزار اصلی بررسی ما نمایش پارامتری سطوح است. چون یک سطح پارامتری‌سازیهای زیادی را می‌پذیرد و نیز چون یک نمایش پارامتری اصولا" خاصیت موضعی دارد، یعنی فقط در همسایگی روی سطح معتبر است، باید پایایی نتایج راتحت تغییر پارامتری‌سازی بررسی کرد. این امر در زیر بخش بعد به تفصیل مورد بحث قرارخواهد گرفت.

این زیربخش را باتنظیم شرایط برحسب مختصات به پایان می‌بریم. معادلهٔ پارامتری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ را می‌توان با سه معادلهٔ زیر عوض کرد:

$$x = x(u^1, u^2), \qquad y = y(u^1, u^2), \qquad z = z(u^1, u^2).$$

در این صورت، شرط (۲۰۱۱) معادل است با

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = 2, \tag{۳۰۱۱}$$

که در آن از نمادهای $x_1 = \partial x/\partial u^1, x_2 = \partial x/\partial u^2$ و مشابه آنها برای y و z استفاده‌شده است. به عبارت دیگر، لااقل باید یکی از ژاکوبیهای زیر مخالف صفر باشد:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}.$$

بی‌آنکه در خواص نقاط منفرد یک سطح معمولی وارد شویم، فقط ذکر می‌کنیم که این نقاط می‌توانند نقاط تیز تنهایی‌باشند مثل رأس یک‌مخروط، یاممکن‌است از آنها بی‌نهایت تا موجود باشدکه خطوطی را تشکیل‌می‌دهند که درامتداد آنها سطح تامی‌شود، مثل یالهای یک مکعب. در اغلب بررسیهای ما نقاط منفرد مستثنی خواهند شد.

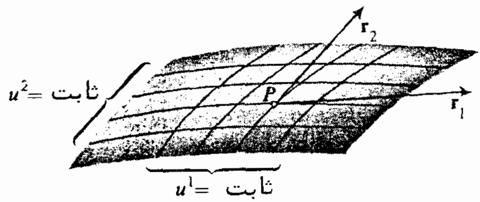
۳۰۱۱ مختصات منحنی‌الخط

به فرض معلوم بودن نمایش پارامتری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$، مقادیر پارامترهای u^1 و u^2 موضع یک نقطه را روی سطح معین می‌کنند. بنابراین، این پارامترها ***مختصات منحنی‌الخط*** یا ***مختصات گاوسی*** روی سطح نیز نامیده می‌شوند.

اگر مقدار یکی از مختصات، مثلا" u^2، ثابت بوده و دیگری، یعنی u^1، تغییرکند، نقاط نظیر روی سطح بر یک منحنی به معادلهٔ $u^2 =$ ثابت قرار می‌گیرند. این منحنی **خط**

مختص u^1 یا ، به‌طورخلاصه، u^1 ـ **خط** یا u^1 ـ **منحنی** نامیده می‌شود . u^1 ـ خطوط در یک همسایگی که پارامتری‌سازی معتبر است یک خانوادهٔ یک پارامتری تشکیل می‌دهند .

به طریق مشابه، خطوط ثابت $= u^1$ با متغیر u^2 خانوادهٔ یک پارامتری دیگری تشکیل می‌دهد از u^2 ـ خطوط. هر دو خانواده با هم یک **تور** از **خطوط مختص** یا **منحنیهای مختص** روی سطح تشکیل می‌دهند . (از هر نقطهٔ منتظم پارامتری‌سازی دقیقاً" یک خط از هر خانواده می‌گذرد (شکل ۵۰۱۱)) .



شکل ۵۰۱۱

یک‌سطح را می‌توان به‌طرق مختلف پارامتریزه‌کرد .اگرمختصات‌منحنی‌الخط (u^1, u^2) را با مختصات جدید $(u^{1'}, u^{2'})$ که با (u^1, u^2) به‌وسیلهٔ

$$u^1 = u^1(u^{1'}, u^{2'}),\quad u^2 = u^2(u^{1'}, u^{2'}) \tag{۴۰۱۱}$$

بهم مربوطند عوض کنیم ، برای سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

معادلهٔ پارامتری جدیدی به شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_*(u^{1'}, u^{2'}) = \mathbf{r}(u^1(u^{1'}, u^{2'}), u^2(u^{1'}, u^{2'})) \tag{۵۰۱۱}$$

حاصل می‌شود . توجه کنید که‌در اینجا ما علامت $'$ را به اندیس متغیر مربوط‌کرده‌ایم تا خود حرف . این در دستگاه نمادگذاری ما چند مزیت صوری دارد .

قضیه .*اگر ژاکوبی تبدیل (۴۰۱۱) در قلمروی مخالف صفر باشد ، برای نمایش جدید دراین قلمرو نقاط منفرد جدید ظاهر نمی‌شوند . کلاس نمایش جدید (۵۰۱۱) لااقل برابر است با مینیمم دو عدد : کلاس تبدیل (۴۰۱۱) و کلاس معادلهٔ اصلی (۱۰۱۱) .*

برهان . به شرط مشتقپذیری تبدیل داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{1'} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{1'}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} = \frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}}\mathbf{r}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}}\mathbf{r}_2,\\ \mathbf{r}_{2'} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{2'}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} = \frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}}\mathbf{r}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}}\mathbf{r}_2.\end{aligned} \tag{۶۰۱۱}$$

بنابراین ،

$$\mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'} = \left(\frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}}\mathbf{r}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}}\mathbf{r}_2\right) \times \left(\frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}}\mathbf{r}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}}\mathbf{r}_2\right)$$

$$= \frac{\partial u^1}{\partial u^{1'}}\frac{\partial u^2}{\partial u^{2'}}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \frac{\partial u^2}{\partial u^{1'}}\frac{\partial u^1}{\partial u^{2'}}\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} & \dfrac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} & \dfrac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} \end{vmatrix} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2,$$

یا

$$\mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'} = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2). \qquad (۷۰۱۱)$$

چون ، طبق فرض ، در قلمرو مورد نظر داریم $\partial(u^1, u^2)/\partial(u^{1'}, u^{2'}) \neq 0$ ، یک نقطه در پارامتری‌سازی جدید می‌تواند منفرد باشد $(\mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'} = 0)$ اگر و فقط اگر در پارامتری‌سازی قدیم منفرد باشد $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0)$. نقاط منفرد جدید فقط می‌توانند در نقاطی که ژاکوبی صفر است ظاهر شوند .

امثله و تمرین

به پیروی از نمادگذاری رسمی ، ما اغلب مختصات منحنی‌الخط را روی سطوح با دو حرف متمایز ، مثلا " (u, v) ، به جای (u^1, u^2) نشان می‌دهیم .

۱ . **صفحه** . با استفاده از دستگاه مختصات مناسب در فضا ، یعنی محور z عمود بر صفحه و مبداء روی صفحه ، می‌توان صفحه را با معادلات پارامتری

$$x = u^1, \qquad y = u^2, \qquad z = 0$$

نمایش داد .

نمایشی دیگر عبارت است از

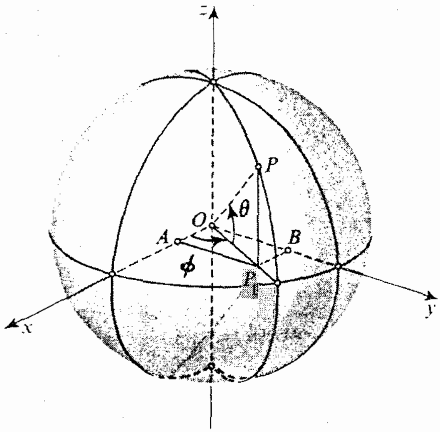
$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = 0,$$

که در آن ρ, θ مختصات قطبی در صفحه می‌باشند .

این نمایش در مبداء ، که متناظر $\rho = 0$ و هر θ است ، منتظم نیست . همچنین ، اگر θ تمام مقادیر خط حقیقی را بگیرد ، صفحه بی‌نهایت بار پوشانده می‌شود . برای به دست آوردن صفحه‌ای که مبداء پوشانده نشود ، باید θ را به بازه‌ای به طول 2π ، مثلا " $[0, 2\pi)$ ، مقید کرد ، اما ، در این صورت ، نگاشت همانریختی نیست ، زیرا دنباله‌ی $(1, 2\pi - 1/n)$

همگرا به‌نقطهٔ $(1,0)$ است درحالی‌که مختصات این نقاط چنین نیستند. اما دراین‌همسایگی، هر نقطه که θ درون بازه‌ای به طول 2π است یک همانریختی موضعی می‌باشد.

۲. **مختصات کروی روی یک کره** (شکل ۶.۱۱). موضع نقطهٔ P روی کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را می‌توان بادومختص به‌نام طول‌جغرافیایی ϕ و عرض‌جغرافیایی θ معین‌کرد. **طول جغرافیایی** زاویهٔ دو وجهی جهتدار ϕ است از صفحهٔ xz به صفحهٔ ماربر P و محور z. **عرض جغرافیایی** زاویهٔ θ است‌بین‌خط OP و صفحهٔ xy، با علامت مثبت برای نقاطی‌که $z > 0$



شکل ۶.۱۱

و منفی برای نقاطی که $z < 0$. دو مختص مواضع تمام نقاط کره رامشخص می‌کنند جز دو نقطهٔ $(0, 0, a)$ و $(0, 0, -a)$، به‌نام **قطبها**، که به ترتیب‌نظیر به مقادیر $\theta = \pi/2,\ \theta = -\pi/2$ و هر ϕ می‌باشند. برای به دست آوردن نمایش پارامتری کره باید تصاویر بردار $\overrightarrow{OP}$ را روی محورهای مختصات برحسب مختصات کروی θ و ϕ بیان‌کنیم. ابتدا نقطهٔ P را روی‌صفحهٔ xy تصویرکرده‌با P_1 نشان می‌دهیم. دراین‌صورت، داریم $OP_1 = a\cos\theta$. حال تصاویر $\overrightarrow{OP_1}$ را روی محورهای x و y در نظر گرفته، خواهیم داشت $OA = a\cos\theta\cos\phi,\ OB = a\cos\theta\sin\phi$. از تصویر مستقیم $\overrightarrow{OP}$ روی محور z حاصل می‌شود $OC = a\sin\theta$. لذا، معادلات پارامتری عبارت خواهند بود از

$$x = a\cos\theta\cos\phi, \qquad y = a\cos\theta\sin\phi, \qquad z = a\sin\theta. \qquad (۸.۱۱)$$

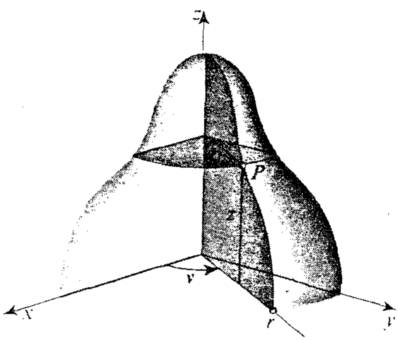
مؤلفه‌های بردار $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ (دراین حالت $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$) مینورهای علامتدار ماتریس

$$\begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\phi & -a\sin\theta\sin\phi & a\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\phi & a\cos\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix}$$

هستند، که همه‌جا از رتبهٔ 2 است جز در قطبها $(\theta = \pm\pi/2)$. لذا، نمایش‌پارامتری (۸.۱۱)

منتظم است. اما، وقتی θ در بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ و ϕ در بازهٔ $(-\infty, \infty)$ تغییر کند، نقش نقاط این نوار کرهٔ سوراخ شده (یعنی، کره‌ای که قطبهایش حذف شده‌اند) بی‌نهایت بار پوشانده می‌شود، و نگاشت مورد نظر فقط یک همانریختی موضعی می‌باشد. تحدید ϕ به بازهٔ $[0, 2\pi)$، این نگاشت را یک به یک می‌سازد، اما نگاشت معکوس از پیوسته بودن باز می‌ماند. خطوط ثابت $= \phi$ **نصف‌النهارات**، وخطوط ثابت $= \theta$ **دوایر عرض جغرافیایی** نامیده می‌شوند. دایرهٔ $\theta = 0$ **استوا** نیز نام دارد. فقط این دایره در میان تمام دوایر عرض جغرافیایی است که دایره‌ای عظیمه می‌باشد. همهٔ نصف‌النهارات نیز دوایری عظیمه می‌باشند.

۳. **سطوح دوار**. یک سطح دوار از دوران یک منحنی مسطح حول یک محور دوران، که در صفحه واقع بوده و به منحنی محکم شده است، به اندازهٔ یک دوران کامل به دست می‌آید (شکل ۷۰۱۱). محور دوران را محور z دستگاه مختصات اختیار می‌کنیم. فصل مشترک سطح دوار با صفحات ماربر محور **نصف‌النهارات** نامیده می‌شوند. اینها منحنیهایی هستند



شکل ۷۰۱۱

که با منحنی مولد سطح دوار همنهشت‌اند. هر یک از آنها را می‌توان با معادلات پارامتری

$$r = f(u), \qquad z = h(u)$$

نمایش داد، که فاصلهٔ r یک نقطهٔ واقع بر نصف‌النهار را از محور دوران و مختص z این نقطه را به عنوان توابعی از پارامتر u مشخص می‌کنند. به ازای یک u ثابت، تمام آنها بر دایره‌ای به نام **دایرهٔ عرض جغرافیایی** سطح قرار دارند. برای آنکه موضع نقطهٔ P روی سطح را به‌طور کامل مشخص کنیم، به پارامتر دیگری که نصف‌النهار ماربر P را نشان دهد نیاز داریم. بدین منظور، می‌توانیم از زاویهٔ دو وجهی جهتدار v از صفحهٔ xz به‌صفحهٔ نصف‌النهار استفاده کنیم. در این صورت، مختصات نقطهٔ P واقع برسطح به شکل زیر خواهند بود:

$$x = f(u)\cos v, \qquad y = f(u)\sin v, \qquad z = h(u). \tag{۹۰۱۱}$$

اینها معادلات پارامتری سطح دوار هستند. خطوط ثابت $v =$ نصف‌النهارات، و خطوط ثابت $u =$ دوایر عرض جغرافیایی هستند.

هرگاه نصف‌النهار را بتوان در صفحه‌اش با معادلهٔ $z = F(r)$ نشان داد، معادلات ساده‌تر خواهند شد. در این صورت، با پارامترهای r و v، خواهیم داشت

$$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v, \qquad z = F(r). \tag{۱۰۰۱۱}$$

مجدداً در اینجا، وقتی v در بازهٔ $(-\infty, \infty)$ تغییر کند، سطح بی‌نهایت بار پوشانده می‌شود، منتها تحدید v به $[0, 2\pi)$ بر پیوستگی تبدیل معکوس اثر خواهد گذاشت.

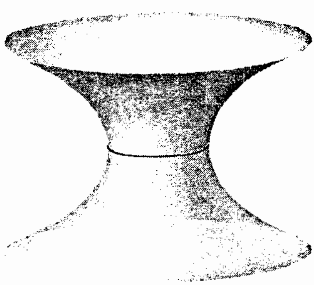
۴. کره حالت خاصی است از یک سطح دوار، که منحنی مولدش یک نیمدایره است. معادلات پارامتری کره را با استفاده از نتایج مثال پیش پیدا کنید.

۵. **زنجیرگون** (شکل ۸۰۱۱). سطح دوار حاصل از دوران یک منحنی زنجیری حول هادی‌اش (هادی منحنی زنجیری $y = a\cosh(x/a)$ محور x است) یک زنجیرگون نامیده می‌شود. با این فرض که هادی محور z باشد، داریم

$$r = a\cosh(z/a).$$

با استفاده از نمادگذاری $z = u^1$ و $v = u^2$، از (۹۰۱۱) نمایش پارامتری زنجیرگون به‌شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= a\cosh\frac{u^1}{a}\cos u^2, \\ y &= a\cosh\frac{u^1}{a}\sin u^2, \\ z &= u^1 \end{aligned} \tag{۱۱۰۱۱}$$



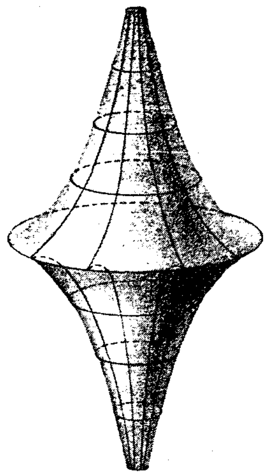
شکل ۸۰۱۱

در اینجا u^1 و u^2 جای حروف u و v را گرفته‌اند.

۶. **کره‌نما** (شکل ۹۰۱۱). یک کره‌نما سطح دواری است که از دوران یک کشاننده (۱۰۰۴)

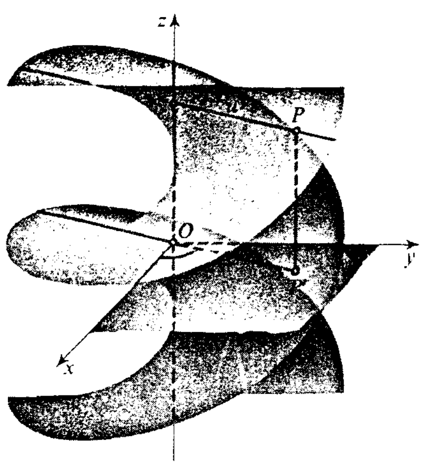
حول مجانبش به دست می‌آید. تحقیق کنید که معادلات پارامتری کره‌نما عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
x &= a \sin u^1 \cos u^2, \\
y &= a \sin u^1 \sin u^2, \\
z &= a\left(\cos u^1 + \ln \tan \frac{u^1}{2}\right).
\end{aligned}
\qquad (۱۲۰۱۱)
$$



شکل ۹۰۱۱

۷۰ مارپیچ‌گون (شکل ۱۰۰۱۱). مارپیچ‌گون سطحی است که از خطوط قائم به محور یک مارپیچ مستدیر که از نقاط مارپیچ می‌گذرند تشکیل شده است. موضع نقطه P روی مارپیچ‌گون



شکل ۱۰۰۱۱

با دو پارامتر مشخص می‌شود، یکی از آنها، یعنی u^2، مبین نقطه‌ای است روی مارپیچ که خط عمود حامل P از آن می‌گذرد، و دیگری نشانگر موضع P روی عمود است. لذا، معادلات پارامتری مارپیچ‌گون عبارتند از

$$x = u^1 \cos u^2, \qquad y = u^1 \sin u^2, \qquad z = au^2. \tag{۱۳.۱۱}$$

در اینجا تناظر بین صفحهٔ (u^1, u^2) و مارپیچ‌گون یک به یک است، اما نقاط $u^1 = 0$ نقاط منفرد می‌باشند. این مطلب را ثابت کنید. u^1 - خطوط و u^2 - خطوط چیستند؟

۸. **مخروط‌گون**. مخروط‌گون سطحی است که از خطوط قائم به یک خط معلوم (**محور مخروط‌گون**) که از تمام نقاط یک منحنی به نام **هادی** مخروط‌گون می‌گذرند تشکیل شده است. یک مارپیچ‌گون حالت خاصی است از یک مخروط‌گون، هادی آن یک مارپیچ بوده و محورش بر محور مارپیچ منطبق است. معادلات یک مخروط‌گون که محورش محور z بوده و هادی‌اش $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ باشد عبارتند از

$$x = u^1 f(u^2), \qquad y = u^1 g(u^2), \qquad z = u^1 h(u^2).$$

۹. **پارامتری‌سازی دیگری از یک کره**. تحقیق کنید که معادلات

$$x = \frac{4a^2 u}{4a^2 + u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{4a^2 v}{4a^2 + u^2 + v^2}, \qquad z = a\frac{4a^2 - u^2 - v^2}{4a^2 + u^2 + v^2} \tag{۱۴.۱۱}$$

یک کرهٔ فاقد نقطهٔ $(0, 0, 1)$ را نمایش می‌دهند. تمام نقاط دیگر این کره نقاط منتظم این پارامتری سازی هستند.

رابطهٔ بین این مختصات و مختصات کروی عبارت است از

$$\begin{aligned} u &= 2a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos \phi, \\ v &= 2a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \sin \phi. \end{aligned} \tag{۱۵.۱۱}$$

۱۰. اگر معادلهٔ نیمدایره را به شکل $r = \sqrt{a^2 - z^2}$ بنویسیم، می‌توان نمایش دیگری از کره را به‌وسیلهٔ (۹.۱۱) به دست آورد:

$$x = \sqrt{a^2 - (u^1)^2} \cos u^2, \qquad y = \sqrt{a^2 - (u^1)^2} \sin u^2, \qquad z = u^1, \tag{۱۶.۱۱}$$

که در آنها u^1 به جای u و u^2 به جای v قرار گرفته است. رابطهٔ بین این پارامترها و مختصات کروی را بیابید.

★ ۴.۱۱ چندگوناهای دیفرانسیل

ایدهٔ معرفی مختصات به‌طور موضعی، در همسایگیهای به‌قدر کافی کوچک، تجرید کامل خود را در مفهوم **چندگونای دیفرانسیل** می‌یابد. ما در اینجا چندگونای دیفرانسیل دو بعدی را

تعریف کرده، نحوهٔ تعمیم این مفهوم را به بعدهای دلخواه نشان می‌دهیم.

فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک هاسدورف[1] همبند بوده، U_κ $(\kappa \in K)$ یک دستگاه از همسایگیهایی باشد که M را می‌پوشانند، و، به ازای هر κ، ψ_κ یک نگاشت همانریختی از همسایگی U_κ بتوی فضای عددی دوبعدی R^2 باشد. این نگاشت ψ_κ به هر نقطهٔ $P \in U_\kappa$ یک جفت مرتب از مختصات را نسبت می‌دهد: مختصات $\psi_\kappa(P)$ در R^2. ما آنها را **مختصات موضعی** P در دستگاه مختصات موضعی (U_κ, ψ_κ) می‌نامیم. هرگاه نقطهٔ P متعلق به اشتراک دوهمسایگی مختصات، یعنی $U_\kappa \cap U_\lambda$ باشد، این نقطه در دو دستگاه مختصات $(U_\kappa, \psi_\kappa), (U_\lambda, \psi_\lambda)$ مختصات متفاوتی خواهد داشت. فرض کنیم (u^1, u^2) مختصات P در (U_κ, ψ_κ) و $(u^{1'}, u^{2'})$ مختصات P در $(U_\lambda, \psi_\lambda)$ باشد؛ یعنی،

$$(u^1, u^2) = \psi_\kappa(P) \quad \text{و} \quad (u^{1'}, u^{2'}) = \psi_\lambda(P).$$

در این صورت، داریم

$$(u^{1'}, u^{2'}) = \psi_\lambda \psi_\kappa^{-1}((u^1, u^2))$$

یا

$$u^{1'} = \phi^{1'}(u^1, u^2), \qquad u^{2'} = \phi^{2'}(u^1, u^2),$$

که در آنها $\phi^{1'}$ و $\phi^{2'}$ توابع پیوسته‌ای هستند که در $\psi_\kappa(U_\kappa \cap U_\lambda)$ تعریف شده‌اند.

هرگاه برای هر اشتراک ناتهی $U_\kappa \cap U_\lambda$، توابع نظیر $\phi^{2'}$، $\phi^{1'}$ از کلاس C_r بوده و نیز در $\psi_\kappa(U_\kappa \cap U_\lambda)$ دارای ژاکوبی ناصفر باشند:

$$\frac{\partial(u^{1'}, u^{2'})}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0$$

کلاس دستگاههای مختصات موضعی $\{(U_\kappa, \psi_\kappa) | \kappa \in K\}$ یک **ساختمان دیفرانسیل** از کلاس C_r در M نامیده می‌شود.

حال فرض کنیم U یک همسایگی در M بوده و ψ یک همانریختی از U بتوی R^2 باشد. در این صورت، (U, ψ) یک دستگاه مختصات موضعی **مجاز** برای ساختمان دیفرانسیل داده شده از کلاس C_r است اگر که ساختمان پس از الحاق آن به دستگاه مختصات موضعی (U, ψ) یک ساختمان دیفرانسیل از همان کلاس باقی بماند. مجموعهٔ تمام دستگاههای مختصات موضعی مجاز برای یک ساختمان دیفرانسیل معلوم نیز یک ساختمان دیفرانسیل از همان کلاس تشکیل می‌دهد. این ساختمان یک ساختمان دیفرانسیل **اشباع شده** یا **ماکزیمال** است، که همهٔ دستگاههای مختصات مجاز خود را در برمی‌گیرد.

فضای توپولوژیک M همراه با یک ساختمان دیفرانسیل ماکزیمال از کلاس C_r، به‌طوری

1. Hausdorff

که در بالا شرح داده شد، یک **چندگونای دیفرانسیل** دوبعدی از کلاس C_r نامیده می‌شود. چون ساختمان دیفرانسیل ماکزیمال به‌وسیلهٔ هر ساختمان دیفرانسیل، نه الزاما "ماکزیمال، مشخص شده، و می‌تواند از آن با اشباع به دست آید، لذا چندگونای دیفرانسیل به‌وسیلهٔ هرساختمان دیفرانسیل مشخص خواهد شد، و این یک راه عملی برای توصیف یک‌چندگونای دیفرانسیل است. بهرحال، اگر دو ساختمان دیفرانسیل متمایز دارای یک اشباع باشند، دو ساختمان یک چندگونای دیفرانسیل را معین خواهند کرد.

صفحهٔ اقلیدسی نمونه‌ای است از یک چندگونای دیفرانسیل **تحلیلی** (یا از کلاس C^ω). ساده‌ترین ساختمان دیفرانسیل مرکب است از یک همسایگی منطبق بر صفحه و نگاشت ψ که به هر نقطهٔ P مختصات دکارتی آن را نسبت می‌دهد.

کره نیز یک چندگونای تحلیلی است. یک ساختمان دیفرانسیل ممکن برای آن به صورت زیر است: دو همسایگی عبارتنداز U_1 ــ کرهٔ سوراخ شدهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ بدون نقطهٔ $(0, 0, a)$ ، U_2 ــ همان کره بدون‌نقطهٔ $(0, 0, -a)$. نگاشت ψ^{-1} بافرمولهای (۱۴۰۱۱) داده می‌شود، و u و v نقشهای u^1 و u^2 را خواهند داشت. نگاشت ψ_2^{-1} از فرمولهایی مشابه باتغییر علامت z به دست می‌آید. تبدیل‌مختصات موضعی عبارت خواهد بود از

$$u^{1'} = \frac{4a^2u^1}{(u^1)^2 + (u^2)^2} \qquad u^{2'} = \frac{4a^2u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2},$$

که توابعی تحلیلی‌اند با ژاکوبی ناصفر به ازای $(u^1)^2 + (u^2)^2 > 0$.

مفهوم چندگونای دیفرانسیل تعمیم روشنی به ابعاد n دارد؛ در اینجا نگاشت ψ_κ ساختمان دیفرانسیل یک همانریختی بتوی فضای n بعدی R^n است؛ و درنتیجه، به هر نقطه در U_κ ، n مختص را اختصاص خواهد داد.

۵۰۱۱ نگاشت چندگوناهای دیفرانسیل؛ جادهنده و نشاننده

فرض کنیم M و M' چندگوناهایی دیفرانسیل از کلاس C_r وبه‌ترتیب‌از بعدهای n و n' باشند. نگاشت $f: M \to M'$ در یک نقطهٔ $P \in M$ مشتقپذیر از کلاس C_s $(s \le r)$ نامیده می‌شود اگر دستگاههای‌مختصات موضعی‌مجاز (U, ψ) در M و (V, ψ') در M' وجود داشته باشندبه‌طوری‌که $P \in U$ ، $V = f(U)$ ، و مختصات‌موضعی‌نقاط $f(Q) \in V$ توابعی‌از کلاس C_s از مختصات موضعی نقطهٔ $Q \in U$ باشند.

فرض کنیم $(v^1, v^2, \ldots, v^{n'})$ مختصات $f(Q)$ در (V, ψ^1) ، و $(u^1, u^2, \ldots, u^m)$ مختصات Q در (U, ψ) باشند. در این صورت،

$$(v^1, v^2, \ldots, v^{n'}) = \psi' \circ f \circ \psi^{-1}(u^1, u^2, \ldots, u^m);$$

که n' تابع m متغیره به شکل

$$v^j = f^j(u^1, u^2, \ldots, u^m), \qquad j = 1, 2, \ldots, n'$$

را حاصل می‌کند. اینها توابعی هستند که تعریف می‌خواهد که از کلاس C_s باشند. نگاشت از کلاس C_s نامیده می‌شود اگر در هر نقطهٔ دلخواه از این کلاس باشد.

نگاشت f **منتظم** یا یک **جادهنده** نامیده‌می‌شود اگر ماتریس ژاکوبی

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} & \cdots & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} & & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial v^{n'}}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^{n'}}{\partial u^2} & & \dfrac{\partial v^{n'}}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

از رتبهٔ m باشد. البته، این فقط وقتی می‌تواند روی دهد که $n' \geq m$.

یک جادهنده ممکن است یک همانریختی از چند گونای M بروی نقش خودنباشد. اما، بنابرقضیهٔ تابع ضمنی، ***یک جادهنده همیشه یک نگاشت موضعا " همانریخت است***.

هرجادهنده‌ای که یک به یک باشد **نشاننده** نامیده می‌شود.

یک سطح منتظم، به صورتی که در زیر بخش ۲۰۱۱ تعریف شد، حالت خاصی است‌از یک چندگونای دوبعدی که به عنوان یک زیرمجموعه از فضای اقلیدسی سه بعدی گرفته شده است، نگاشت شمول یک نشاننده از چندگونای دوبعدی در یک فضای سه‌بعدی خواهد بود. نمایش پارامتری موضعی معکوس نگاشت مختصات ψ بوده، و به شکل مختصات چنین است: $x = x(u^1, u^2), y = y(u^1, u^2), z = z(u^1, u^2)$ ؛ اینها نقش توابع f^1, f^2, f^3 که معرف نشاننده‌اند را نیز بازی می‌کنند. فرمول (۳۰۱۱) شرط‌انتظام نشاننده می‌باشد.

برای آنکه به تعریف کلیتری از سطح برسیم، که خود قطعی و پوششهای مکرر را مجاز بداند، باید نشاننده را با یک جادهندهٔ یک چندگونای دوبعدی عوض کنیم. این کار به قدر حالت منحنیها دارای عمومیت است.

سادگی نسبی حالت منحنیها به این خاطر است که هر چندگونای یک بعدی نقش‌یک جادهنده از خط حقیقی است، حال آنکه تمام سطوح نقش یک جادهنده از صفحه نیستند.★

۶۰۱۱ معادلهٔ ضمنی سطح

با اینکه ابزار اصلی ما در بررسی سطوح نمایش پارامتری است، نمی‌توان از ذکر شیوهٔ دیگر

نمایش سطوح ، که خواننده در هندسهٔ تحلیلی با آن آشنا شده ، صرف نظر کرد . این نمایش **معادلهٔ ضمنی** به شکل

$$F(x, y, z) = 0 \tag{۱۷۰۱۱}$$

است . مثلاً ، معادلهٔ صفحه و کره به ترتیب $Ax + By + Cz + D = 0$ و $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ است ، و غیره .

بدون فرضهایی دیگر در مورد تابع F ، مجموعهٔ نقاط صادق در (۱۷۰۱۱) می‌تواند خیلی عجیب باشد ، بدین معنی که از مجموعهٔ تهی تا تمام فضا تغییر کند . این مجموعه تحت شرایطی یک سطح است ، و ، در این صورت ، (۱۷۰۱۱) معادلهٔ ضمنی سطح نامیده می‌شود .

قضیه. ***هرگاه تابع $F(x, y, z)$ در همسایگی نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) که در (۱۷۰۱۱) صادق است از کلاس C_n $(n \geq 1)$ بوده ، و یکی از مشتقات جزئی F_x, F_y, F_z در این نقطه مخالف صفر باشد ، آنگاه این نقطه دارای یک همسایگی مانند U در فضا است به‌طوری که نقاط $\overline{U}$ صادق در (۱۷۰۱۱) یک پارچهٔ سادهٔ از سطحی که مجاز به پارامتری‌سازی منتظم از کلاس C_n است تشکیل می‌دهند .***

برهان . فرض کنیم $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. طبق قضیهٔ تابع ضمنی ، یک همسایگی مانند U از (x_0, y_0, z_0) هست که در آن مختص z نقاط صادق در معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ تابعی از x و y است :

$$z = f(x, y), \tag{۱۸۰۱۱}$$

که در آن f تابعی از کلاس C_n بوده و دارای مشتقات جزئی زیر است :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{۱۹۰۱۱}$$

معادلهٔ (۱۸۰۱۱) نمایش پارامتری

$$x = u^1, \qquad y = u^2, \qquad z = f(u^1, u^2)$$

را به دست می‌دهد . بردارهای $\mathbf{r}_1$ ، $\mathbf{r}_2$ ، و $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ به‌ترتیب دارای مؤلفه‌های

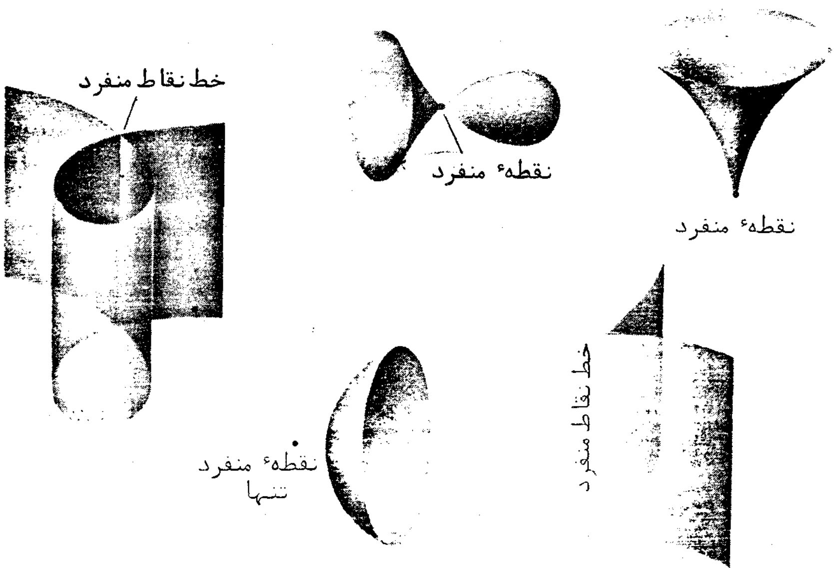
$$\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$$

هستند . بنابراین ، $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0$ و ، درنتیجه ، پارامتری‌سازی منتظم است . باانتخاب یک همسایگی مناسب مانند V ، به‌طوری که $\overline{V} \subset U$ ، می‌توان ، به‌خاطر قضیهٔ زیر بخش ۳۰۱۱ ،

حکم کرد که مجموعهٔ نقاط $\bar{V}$ صادق در معادله یک پارچهٔ ساده از یک سطح را تشکیل می‌دهد.

۷۰۱۱ نقاط منفرد یک سطح که با معادلهٔ ضمنی داده شده است

هرگاه در قلمروبازی $F_x = F_y = F_z = 0$ ، آنگاه $F(x, y, z)$ ثابت است، و معادلهٔ (۱۷۰۱۱) یا نمایش یک مجموعهٔ تهی است یا، درحالتی که مقدار ثابت $F(x, y, z)$ صفر باشد، نمایش تمام قلمرو می‌باشد. حالت جالبتر وقتی است که سه مشتق جزئی در نقاط تنها یا در نقاط یک منحنی درفضا صفر باشند. دراین صورت، این نقاط **نقاط منفرد** سطح نامیده می‌شوند.



شکل ۱۱۰۱۱

بررسی یک سطح در مجاورت یک نقطهٔ منفرد را می‌توان، همچون حالت منحنیها، با صفرگرفتن آن قسمت از بسط تیلور تابع $F(x, y, z)$ در (x_0, y_0, z_0) که از پایین‌ترین مرتبه است و در نظر گرفتن سطح نموده شده با معادلهٔ حاصل به‌عنوان تقریبی از سطح انجام داد.

بدون واردشدن در جزئیات، در شکل ۱۱۰۱۱ فقط چند نوع نقطهٔ منفرد را نشان داده‌ایم.

امثله و تمرین

۱. با حذف u^1, u^2 از معادلات (۱۱۰۱۱) زنجیرگون، معادلهٔ ضمنی زنجیرگون به دست

می‌آید . داریم $x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2 (u^1/a), z = u^1$ که از اینجا معادلهٔ ضمنی خواهد بود

$$x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2 (z/a).$$

۲ . معادلات ضمنی (آ) مارپیچگون ؛ (ب) کره‌نما ؛ (پ) چنبره را پیدا کنید .

۳ . معادلهٔ ضمنی سطح

$$x = \frac{a(u^1u^2 + 1)}{u^1 + u^2}, \qquad y = \frac{b(u^1 - u^2)}{u^1 + u^2}, \qquad z = \frac{c(u^1u^2 - 1)}{u^1 + u^2}$$

را پیدا کنید .

۱۲ صفحهٔ مماس

۱.۱۲ صفحهٔ مماس و بردار قائم به سطحی که با نمایش پارامتری داده شده است

فرض کنیم P_0 یک نقطهٔ منتظم سطح و P یک نقطهٔ متغیر آن باشد . دسته صفحات ماربر P_0 و فاصلهٔ P از آن صفحات را در نظر می‌گیریم . برای هر صفحهٔ ثابت ، این فاصله ، وقتی روی صفحه $P \to P_0$ ،به صفر میل می‌کند . صفحه‌ای که به‌ازای آن این فاصله ، وقتی P روی سطح به P_0 میل کند ،از بالاترین مرتبهٔ کوچکی نسبت به‌فاصلهٔ P_0P است**صفحهٔ مماس** برسطح در P_0 نامیده می‌شود .

خط ماربر P_0 که عمود برصفحهٔ مماس در P_0 باشد ***قائم*** به‌سطح در P_0 نامیده می‌شود، و هر بردار واقع براین خط یک ***بردار قائم*** در P_0 نام دارد . ما اغلب ، بی‌آنکه هر بار قید کنیم ، از بردارهای یکهٔ قائم استفاده خواهیم کرد .

چون در تعریف صفحهٔ مماس از یک‌حد ، وقتی $P \to P_0$ ، استفاده شده است ، تعریف فقط به رفتار سطح در همسایگی کوچکی از P_0 بستگی دارد . در چنین حالات ، یعنی وقتی مفهوم یاخاصیتی با همسایگی به‌قدر کافی کوچکی از یک نقطه معین می‌شود ، می‌گوییم این یک مفهوم یا خاصیت **موضعی** است .

به‌خاطرخصلت موضعی صفحهٔ مماس ،می‌توان خود را به یک همسایگی مختصات روی سطح که پارامتری‌سازی منتظم می‌پذیرد مقید کرد .

قضیه . در هر نقطهٔ منتظم $P_0 = (u_0^1, u_0^2)$ واقع بر یک سطح از کلاس C_1 که با معادلهٔ پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

نموده شده یک‌صفحهٔ مماس منحصر بفرد وجود دارد . این صفحه با بردارهای $\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2)$ و $\mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2)$ مشخص می‌شود . بنابراین ،بردار

$$\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2) \times \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2) \tag{۱۰۱۲}$$

یکی از بردارهای قائم بوده، و معادلهٔ صفحهٔ مماس عبارت است از

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(u_0^1, u_0^2))\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2)\mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2) = 0. \tag{۲۰۱۲}$$

توجه کنید که شرط از کلاس C_1 بودن فقط یک شرط کافی است، و تحت شرط ضعیفتر نیز صفحهٔ مماس منحصر بفرد وجود دارد؛ مثلاً"، سطح $z = f(x, y)$ در (x_0, y_0) صفحهٔ مماس دارد اگر و فقط اگر تابع f در این نقطه دیفرانسیل کامل داشته باشد.

برهان. معادلهٔ یک صفحهٔ ماربر P_0 عبارت است از

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0)\mathbf{N} = 0,$$

که در آن $\mathbf{R}$ بردار موضع یک نقطهٔ دلخواه صفحه است، و $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0^1, u_0^2)$. فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه سطح با بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ از صفحه مساوی است با

$$d = \frac{|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|},$$

و فاصلهٔ P_0P برابر است با

$$\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

با استفاده از فرمول تیلور و معرفی نماد $h^i = u^i - u_0^i$ و $\mathbf{r}_{i,0} = \mathbf{r}_i(u_0^1, u_0^2)$ داریم

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{1,0}h^1 + \mathbf{r}_{2,0}h^2 + o(\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}),$$

که نشان می‌دهد که ρ از همان مرتبهٔ $\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}$ است. بعلاوه،

$$d = \frac{[\mathbf{r}_{1,0}h^1 + \mathbf{r}_{2,0}h^2 + o(\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2})]\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

$$= \frac{\mathbf{r}_{1,0}\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}h^1 + \frac{\mathbf{r}_{2,0}\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}h^2 + o(\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}).$$

از اینرو، وقتی $\rho \to 0$، d/ρ **به صفر میل می‌کند اگر و فقط اگر**

$$\mathbf{r}_{1,0}\mathbf{N} = 0, \qquad \mathbf{r}_{2,0}\mathbf{N} = 0.$$

اما، در مورد یک نقطهٔ منتظم، **بردارهای $\mathbf{r}_{1,0}$ و $\mathbf{r}_{2,0}$ مستقل‌اند، و بردار قائم $\mathbf{N}$ به‌وسیلهٔ معادلاتی با تقریب عامل اسکالری چون $\lambda \neq 0$ مشخص می‌شود:**

$$\mathbf{N} = \lambda\mathbf{r}_{1,0} \times \mathbf{r}_{2,0}.$$

بنابراین، صفحهٔ مماس وجود داشته و بر بردار $\mathbf{r}_{1,0} \times \mathbf{r}_{2,0}$ عمود است. معادلهٔ صفحه

عبارت است از (۲۰۱۲) ، که برهان را تمام خواهد کرد .

هرگاه معادلهٔ سطح ، به جای شکل برداری ، با مختصات داده شده باشد:

$$x = x(u^1, u^2), \qquad y = y(u^1, u^2), \qquad z = z(u^1, u^2),$$

آنگاه معادلهٔ صفحهٔ مماس عبارت خواهد بود از

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{۳۰۱۲}$$

که در آن X, Y, Z مختصات یک نقطهٔ دلخواه از صفحه بوده و x, y, z, x_i, y_i, z_i مقادیر توابع x, y, z و مشتقات آنها در نقطهٔ تماس می‌باشند .

تمرین

۱ . معادلهٔ صفحات مماس و مؤلفه‌های بردارهای قائم سطوح زیربخش ۳۰۱۱ را بیابید .

۲ . نقاط برخورد مارپیچ‌گون $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ را با خط مستقیم $x = 1, y = 0$ پیدا کرده ، زوایای بین این خط و سطح نقاط برخورد را تعیین کنید . زاویهٔ بین یک منحنی و یک سطح زاویهٔ بین مماس برمنحنی و صفحهٔ مماس برسطح تعریف می‌شود .

۳ . همان مسئله را در مورد مارپیچ‌گون تمرین پیش و مارپیچ $x = \cos t,\ y = \sin t, z = -t$ حل کنید .

۴ . صفحهٔ مماس و بردار قائم سطح تمرین ۳ از زیربخش ۶۰۱۱ را بیابید .

۵ . درحالت کلی ، زاویهٔ ϕ بین سطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ و منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{p}(t)$ در نقطهٔ مشترک P که نظیر به مقادیر t_0, u_0^1, u_0^2 از پارامترهاست از فرمول

$$\sin\phi = \frac{|\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dot{\mathbf{p}}|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|\,|\dot{\mathbf{p}}|} \tag{۴۰۱۲}$$

به دست می‌آید ، که درآن مقادیر توابع $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ در (u_0^1, u_0^2) و مقدار $\dot{\mathbf{p}}$ در t_0 گرفته شده‌اند . این مطلب را ثابت کنید!

۶ . اگر تمام‌خطوط قائم‌به سطحی همرس باشند ، این سطح یک کره یا قسمتی از آن است. درواقع ،باانتخاب نقطهٔ تقاطع به عنوان مبداء در فضا ، بردار موضع $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ و بردار قائم $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ همخط خواهند بود و

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r} = 0.$$

اما این یعنی که $\mathbf{r}_i\mathbf{r} = 0$ ، و در نتیجه ، $\partial(\mathbf{r}^2)/\partial u^i = 0$ یا $\mathbf{r}^2 =$ ثابت ، و مطلب ثابت می‌شود .

۷. ثابت کنید هرگاه تمام صفحات مماس بریک سطح از یک نقطه بگذرند ،آنگاه این سطح یک سطح مخروطی است .

راهنمایی . نقطهٔ مشترک تمام صفحات را مبداء گرفته ، ثابت کنید هر وقت یک نقطه با بردار موضع $\mathbf{p}$ روی سطح واقع باشد ، نقطه با بردار موضع $\lambda\mathbf{p}$ نیز چنین است .

۸. ثابت‌کنید سطحی‌که تمام صفحات مماسش موازی یک‌خط ثابت باشد یک سطح استوانه‌ای است .

۹. ثابت کنید سطحی که تمام قائمهایش خط مستقیم معلومی را قطع کنند یک سطح دوار است . تحقیق کنید که تمام سطوح دوار از این خاصیت برخوردارند .

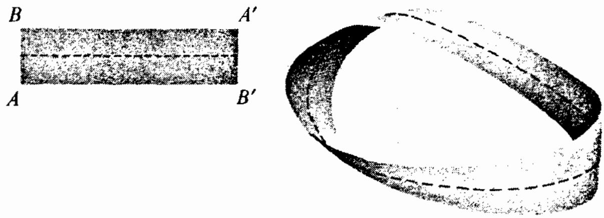
۲۰۱۲ جهت یک سطح

در بین تمام بردارهای قائم به‌یک سطح درنقطهٔ معلوم P دقیقا" دو بردار یکه با جهتهای مخالف وجود دارد . اگر یکی از آنها را $\mathbf{m}$ بگیریم ، می‌توان طرف مثبت و منفی سطح را در P تعریف کرد . در این موقع ، برای صفحهٔ مماس در P یک جهت مقرر می‌کنیم . بدین معنی که ، می‌گوییم یک جفت مرتب از بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ در صفحهٔ مماس در P ***جهتدار با جهت مثبت*** است اگر سه تایی $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{m}$ ***جهتدار با جهت مثبت*** در فضا باشد . این کار جهت مثبت دوران در صفحهٔ مماس از $\mathbf{a}_1$ به $\mathbf{a}_2$ به اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ بین آنها را نیز مشخص می‌کند .هرگاه جهت فضا راست‌گرد باشد ، آنگاه دوران مثبت درصفحه برای ناظری روی صفحهٔ مماس که سرش در جهت نیم فضایی است که بردار $\mathbf{m}$ به‌آن اشاره دارد خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است .

می‌گوییم انتخاب بردار یکهٔ قائم $\mathbf{m}$ در نقطهٔ P یک‌**جهت** برای سطح در P را مقرر می‌کند . انتخاب جهت را می‌توان در همسایگی به قدرکافی کوچک یک نقطهٔ منتظم به‌طور پیوسته ادامه داد .اما این کار همیشه برای کل سطح ممکن نیست . ولی بعضی‌از سطوح مجاز به انتخاب بردارهای یکهٔ قائم درهرنقطه هستند ــ مثلا" ،بردارهای قائم به یک کره اشاره به برون کره دارند ــ در مورد سطوح دیگراین کار عملی نیست . چنین سطوح جهت ***ناپذیر*** نامیده می‌شوند . نمونهٔ بسیار مشهور از یک سطح جهت‌ناپذیر **نوار موبیوس**[1] است (شکل ۱۰۱۲) ، که می‌توان آن را از یک نوار کاغذی به شکل مستطیل $ABA'B'$ تهیه کرد . بدین ترتیب که ابتدا یک برنوار را چرخانده و سپس دو انتهای نوار را طوری بهم می‌چسبانیم که نقاط A' و B' به‌ترتیب برنقاط A و B منطبق شوند . اگر با انتخاب یک بردار قائم خاص

1. Möbius

در یک نقطه، به‌طور پیوسته در امتداد خط نقطه‌چین روی نوار حرکت کنیم، به نقطهٔ شروع خواهیم رسید منتها با جهت مخالف. این نشان می‌دهد که روی نوار موبیوس نمی‌توان هیچ جهت پیوسته به‌دست‌آورد. هرسطح جهت‌ناپذیر یک **سطح یکطرفه** نیز نامیده می‌شود، زیرا، بدون برگرداندن ضلع نوار، می‌توان با حرکت روی سطح، از یک طرف سطح‌درنقطهٔ P به طرف دیگر آن رسید.



شکل ۱۰۱۲

میان پارامتری‌سازی و جهتها یک‌رابطهٔ‌طبیعی وجود دارد؛ یعنی، هر پارامتری سازی منتظم یک جهت را القا می‌کند که با انتخاب

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \tag{۵۰۱۲}$$

داده می‌شود. تابع $\mathbf{m} = \mathbf{m}(u^1, u^2)$ در یک قلمرو فاقد نقاط منفرد یک تابع پیوسته است؛ در واقع، اگر نمایش پارامتری از کلاس C_n باشد، تابعی است از کلاس C_{n-1}، و لذا، جهت در کل قلمرو موجودیت دارد. اگر مختصات را با فرمولهای

$$u^1 = u^1(u^{1'}, u^{2'}), \qquad u^2 = u^2(u^{1'}, u^{2'}) \tag{۶۰۱۲}$$

به مختصات منحنی الخط $u^{1'}, u^{2'}$ تغییر دهیم، بنابر (۷۰۱۱) داریم

$$\mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'} = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

و، برای بردار یکهٔ نظیر، خواهیم داشت

$$\mathbf{m}' = \varepsilon \mathbf{m},$$

که در آن

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}\right)$$

بنابراین، در پارامتری‌سازی‌جدید، جهت القاشده تغییر نمی‌کند اگر ژاکوبی تبدیل مختصات مثبت باشد، و به قرینهٔ خود تغییر می‌کند اگر ژاکوبی منفی باشد. تبدیلات مختصات با ژاکوبی مثبت تبدیلات **جهت نگهدار** نامیده می‌شوند.

★ رابطهٔ بین جهت و مختصات موضعی تعمیمی برای مفهوم جهت به چندگوناهای دیفرانسیل مجرد را پیشنهاد می‌کند. گوییم بر یک چندگونا **یک جهت مقرر است اگر** یک ساختمان دیفرانسیل طوری مفروض باشدکه توابع‌گذار ϕ ، که معرف تغییر مختصات موضعی در همسایگیهای مختصات رویهم افتاده‌اند، دارای ژاکوبی همه جا مثبت باشند. اگر چنین ساختمان دیفرانسیل مجازی وجود داشته باشد، چندگونا را **جهت‌پذیر** می‌نامند، ودر این صورت دو جهت متمایز را می‌توان تعریف کرد؛ در غیر این صورت، چندگوناجهت **ناپذیر** خواهد بود. ★

۳.۱۲ صفحهٔ مماس درمورد معادلهٔ ضمنی

قضیه. *هر سطح* $F(x, y, z) = 0$ *ازکلاس* C_1 *در هرنقطهٔ نامنفرد* (x, y, z) *صفحهٔ مماس دارد. این صفحه دارای معادله‌ای به شکل*

$$F_x(X - x) + F_y(Y - y) + F_z(Z - z) = 0 \qquad (۷.۱۲)$$

است، که در آن X, Y, Z *مختصات هر نقطه از صفحه بوده، و مشتقات* F_x, F_y, F_z *درنقطهٔ تماس* (x, y, z) *حساب می‌شوند.*

برهان. هرگاه در نقطهٔ تماس (x, y, z) داشته باشیم $F_z \neq 0$، آنگاه سطح را می‌توان موضعاً" بامعادلهٔ $z = f(x, y)$ نمایش‌داد، که حالت خاصی‌از یک‌معادلهٔ‌پارامتری‌است‌با پارامترهای x, y . در این صورت، بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ عبارتنداز

$$\mathbf{r}_1 = \left\{1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right\}, \qquad \mathbf{r}_2 = \left\{0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right\},$$

که در آنها

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}\ .$$

درنتیجه،

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\} = \left\{\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1\right\}.$$

اما این یعنی بردار

$$\mathbf{M} = \{F_x, F_y, F_z\}$$

نیز یک بردار قائم است. بنابراین، (۷.۱۲) معادلهٔ یک صفحهٔ ماربر (x, y, z) و قائم به $\mathbf{M}$ است.

امثله و تمرین

۱ . صفحهٔ مماس برکرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ رادرنقاط $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $(1,0,0)$ پیدا کنید .

۲ . ثابت کنید سطوح $F(x, y, z) = 0$ و $x = x(u^1, u^2),\ y = y(u^1, u^2),\ z = z(u^1, u^2)$ در نقطهٔ مشترک (x_0, y_0, z_0) که نظیر به مقادیر پارامترهای (u_0^1, u_0^2) است مماسند (یعنی ، دارای صفحهٔ مماس مشترک هستند) اگر و فقط اگر معادلات زیر در این نقطه برقرار باشند :

$$F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 = 0,$$

$$F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 = 0.$$

۳ . ثابت کنید زاویهٔ ϕ بین منحنی $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ و سطح $F(x, y, z) = 0$ (ر . ک . زیربخش ۱۰۱۲ ، تمرینهای ۲–۷) در نقطهٔ مشترک (x_0, y_0, z_0) که نظیر به مقدار t_0 از پارامتر t است با فرمول زیر بیان می‌شود :

$$\sin\phi = \frac{(F_x)_0\dot{x}(t_0) + (F_y)_0\dot{y}(t_0) + (F_z)_0\dot{z}(t_0)}{\sqrt{(F_x)_0^2 + (F_y)_0^2 + (F_z)_0^2}\cdot\sqrt{[\dot{x}(t_0)]^2 + [\dot{y}(t_0)]^2 + [\dot{z}(t_0)]^2}}, \qquad (۸۰۱۲)$$

که در آن

$$(F_x)_0 = F_x(x_0, y_0, z_0), \qquad (F_y)_0 = F_y(x_0, y_0, z_0), \qquad (F_z)_0 = F_z(x_0, y_0, z_0).$$

۴ . زاویهٔ بین خط $x = a/2, y = 0$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را در نقاط مشترک کره و خط پیدا کنید .

۵ . زاویهٔ بین سطوح $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ و $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را بیابید . زاویهٔ بین دوسطح در نقطهٔ مشترک P مساوی زاویهٔ دو وجهی بین صفحات مماس برسطوح در P تعریف می‌شود .

۶ . مارپیچ $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ را کجا قطع می‌کند ، و زوایای بین مارپیچ و کره در نقاط برخورد چقدراند ؟

۷ . تمرینهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۷ ، و ۸ زیربخش قبل را با استفاده از معادلات ضمنی حل کنید .

۱۳ پوش خانواده‌هایی از سطوح

۱۰۱۳ پوش یک خانوادهٔ یک پارامتری از سطوح

خانوادهٔ یک پارامتری از سطوح

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \qquad (۱۰۱۳)$$

از کلاس C_1 را در نظر گرفته ، فرض می‌کنیم تابع F نسبت به α نیز مشتق پیوسته داشته باشد .

فرض کنیم معادلهٔ (۱۰۱۳) به ازای هر α سطحی را نمایش دهد. هرگاه روی سطحی از خانواده نظیر به مقدار α_0 از پارامتر داشته باشیم $F_\alpha \neq 0$ ، آنگاه (۱۰۱۳)، به ازای مقادیر مختلفی از α در همسایگی از α_0 ، سطوح مختلفی را نمایش خواهند داد.

پوش خانوادهٔ یک پارامتری از سطوح (۱۰۱۳) سطحی است مانند $\mathscr{F}$ که در هر نقطه بریک سطح از خانواده مماس باشد و ، بعلاوه، در هر همسایگی نقطهٔ تماس با یک سطح ، نقاط تماس با سطوح دیگر خانواده نیز وجود داشته باشند (لذا ، پوش نمی‌تواند در تمام نقاط یک همسایگی باز بریکی‌از سطوح خانواده منطبق‌شود) .فرض کنیم خانوادهٔ داده شده از سطوح یک‌پوش دارد که سطح منتظمی است که موضعا" با معادلهٔ پارامتری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ نموده می‌شود. به هر نقطهٔ (u^1, u^2) از پوش سطحی از خانواده نظیر است که بر پوش در این نقطه مماس است. با این تناظر، α تابعی از u^1, u^2 می‌شود: $\alpha = \alpha(u^1, u^2)$. همچنین، فرض‌کنیم یک‌نمایش پارامتری برای پوش وجود دارد،به‌طوری که $\alpha(u^1, u^2)$ تابعی از کلاس C_1 است. با این مفروضات قوی و نسبتا" ساختگی ، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه. *نقاط پوش خانوادهٔ (۱۰۱۳) از سطوح در معادلات*

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{۲۰۱۳}$$

صدق می‌کنند. این معادلات به ازای نقاط منفرد سطوح خانواده نیز برقرارند، حتی‌اگر این نقاط متعلق به پوش هم نباشند.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ نمایش پارامتری پوش باشد. چون نقطهٔ (u^1, u^2) پوش نقطهٔ تماس پوش با سطحی از خانوادهٔ (۱۰۱۳) نظیر به مقدار $\alpha(u^1, u^2)$ از پارامتر است، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$F\big(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2), \alpha(u^1, u^2)\big) = 0.$$

با مشتقگیری از این اتحاد نسبت به متغیرهای u^1, u^2 داریم

$$\begin{aligned} F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 + F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} &= 0, \\ F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 + F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \tag{۳۰۱۳}$$

چون پوش و سطح مماسند، پس دارای صفحهٔ مماس مشترک می‌باشند. بنابراین، بردار $\{F_x, F_y, F_z\}$ ،که قائم به‌سطح خانواده‌است ،بایدبربردارهای $\{x_1, y_1, z_1\}$ و $\{x_2, y_2, z_2\}$ که برپوش مماسند، عمود باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned} F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 &= 0, \\ F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{۴۰۱۳}$$

(قس. زیربخش ۳۰۱۲، تمرین ۲). از این معادلات و معادلات (۳۰۱۳) نتیجه می شود که شرایط

$$F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} = 0 \qquad \text{و} \qquad F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} = 0$$

باید برقرار باشند. اما، بنا به فرض ما، مشتقات $\partial\alpha/\partial u^1$ و $\partial\alpha/\partial u^2$ نمی‌توانند باهم صفر باشند. بنابراین، باید در نقاط پوش داشته باشیم $F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$ که، همراه با معادلهٔ خانواده، (۲۰۱۳) را نتیجه می‌دهد.

واضح است‌که نقاط منفرد سطوح‌خانواده، یعنی‌نقاطی‌که درآنها $F_x = F_y = F_z = 0$، نیز در (۴۰۱۳) و، درنتیجه، در (۲۰۱۳) صدق می‌کنند. اگر نقاط صادق در (۲۰۱۳)که نقاط منفرد خانواده نیستند یک سطح تشکیل دهند، روابط (۲۰۱۳) روابط (۴۰۱۳) را ایجاب می‌کنند و این، به نوبهٔ خود، یعنی این سطح برسطح نظیر از خانواده مماس است؛ به عبارت دیگر، این یک پوش می‌باشد.

تابع $\alpha(u^1, u^2)$ به پارامتری سازی انتخاب شده برای پوش بستگی دارد و ازپیش‌معلوم نیست. برای آنکه پوش یک خانوادهٔ یک پارامتری را بیابیم به صورت زیر عمل می‌کنیم. پس از یافتن معادلات (۲۰۱۳)، یا α را حذف کرده یک معادلهٔ ضمنی به دست‌می‌آوریم، یا اینکه x, y, z, α را به‌عنوان توابعی‌از دوپارامتر کمکی گرفته معادلات پارامتری را به‌دست می‌آوریم. بالاخص، α می‌تواند یکی‌از آنها باشد. معادلهٔ حاصل اجتماع پوش و مجموعهٔ نقاط منفرد را نمایش می‌دهد. بنابراین، تحقیق اینکه کدام قسمت آن پوش است ضرورت دارد.

به ازای مقدار ثابتی از α، معادلات (۲۰۱۳) درحالت کلی یک منحنی روی سطح را نمایش می‌دهد که نظیر این مقدار از پارامتر است. اگر این یک خط از نقاط منفردنباشد، این منحنی نیز روی پوش قرارمی‌گیرد. سطح و پوش درامتداد این منحنی بریکدیگر مماسند. چنین منحنیهایی **خطوط مشخص** خانواده نامیده می‌شوند.

امثله و تمرین

۱. پوش یک خانوادهٔ یک پارامتری از کرات یک **سطح کانال** نامیده می‌شود. هرگاه مراکز کرات روی منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{p}(t)$ قرار داشته و شعاع کره به مرکز نقطهٔ t مساوی $a(t)$ باشد، آنگاه معادلهٔ خانوادهٔ کرات عبارت است از

$$[\mathbf{R} - \mathbf{p}(t)]^2 - [a(t)]^2 = 0,$$

که در آن t پارامتر خانواده بوده و نقش α را در توضیحات نظری ما دارد. معادلهٔ

پوش را می‌توان از دستگاه معادلات

$$(\mathbf{R}-\mathbf{p})^2 - a^2 = 0, \qquad (\mathbf{R}-\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}} + a\dot{a} = 0$$

معین کرد. در این حالت، هیچ نقطهٔ منفردی روی سطوح وجود ندارد.

۲. درحالت خاص، پوش خانواده‌ای از کرات به‌شعاع ثابت b که مراکزشان روی دایره‌ای به شعاع $a > b$ واقعند یک **چنبره** است؛ یعنی، سطحی است دوار که به‌وسیلهٔ دایره‌ای به شعاع b که مرکزش درفاصلهٔ a از محور است تولید می‌شود. درواقع، با نوشتن معادلهٔ دایره به شکل

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = 0,$$

معادلهٔ خانوادهٔ کرات به صورت

$$(x - a\cos t)^2 + (y - a\sin t)^2 + z^2 = b^2$$

به دست می‌آید. بامشتقگیری نسبت به t داریم

$$2a(x - a\cos t)\sin t - 2a(y - a\sin t)\cos t = 0$$

یا

$$x\sin t - y\cos t = 0,$$

که نتیجه می‌دهد

$$x = w\cos t, \qquad y = w\sin t,$$

که درآنها باید w معین شود. با جایگزینی این در معادلهٔ خانواده داریم

$$(w-a)^2\cos^2 t + (w-a)\sin^2 t + z^2 = b^2$$

یا

$$(w-a)^2 + z^2 = b^2.$$

حال پارامتر جدید u را معرفی می‌کنیم به این ترتیب که

$$w - a = b\cos u, \qquad z = b\sin u.$$

در این صورت، بافرض $u^1 = u$ و $u^2 = t$ ، معادلهٔ پارامتری پوش به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$x = (a + b\cos u^1)\cos u^2,$$
$$y = (a + b\cos u^1)\sin u^2,$$
$$z = b\sin u^1,$$

که معادلهٔ سطحی است که از دوران منحنی $x = a + b\cos u^1, y = 0, z = b\sin u^1$ ، یعنی دایره‌ای به شعاع b و مرکز $(a, 0, 0)$ ، حول محور z به دست می‌آید.

۳. پوش خانواده‌های زیر از کرات را بیابید:

(آ) کراتی به‌شعاع c ومرکز واقع برمارپیچ $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$. چه‌نامساوی باید بین a, b, c برقرار باشد تا سطحی بدون خود قطعی به دست آید؟

(ب) $x^2 + y^2 + (z-\alpha)^2 = 2\alpha$.

۴. ثابت کنید هرگاه خانوادهٔ سطوح به شکل پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, \alpha)$$

باشد، که درآن α پارامتر خانواده بوده و u^1, u^2 پارامترهای سطوح خاص خانواده‌اند، آنگاه پوش در معادلات

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, \alpha) \qquad \text{و} \qquad \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_\alpha = 0$$

صدق می‌کند.

۲۰۱۳ پوش خانوادهٔ یک پارامتری از صفحات

یک خانوادهٔ یک پارامتری از صفحات با معادله‌ای به شکل

$$\mathbf{N}(u)\mathbf{R} = \delta(u) \tag{۵۰۱۳}$$

نموده می‌شود، که در آن $\mathbf{N}(u)$ یک بردار قائم به صفحهٔ نظیر به مقدار u از پارامتر است. چون سطوح خانواده صفحه‌اند، نقطهٔ منفرد ندارند. خطوط مشخص خانواده درمعادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\mathbf{N}(u)\mathbf{R} = \delta(u), \qquad \frac{d\mathbf{N}(u)}{du}\mathbf{R} = \frac{d\delta}{du}. \tag{۶۰۱۳}$$

بردارهای $\mathbf{N}(u)$ و $d\mathbf{N}(u)/du$ ، جز درحالتی که خانواده از صفحات موازی تشکیل شده، همخط نیستند (مگر درمورد مقادیر استثنایی از u)؛ و لذا، خطوط مشخص خانواده خطوط مستقیمی هستند که با دو معادلهٔ خطی (۶۰۱۳) تعریف می‌شوند. بردار هادی خط مشخص $\mathbf{N}\times\dot{\mathbf{N}}$ است؛ بنابراین، خط مشخص واقع برصفحهٔ نظیر به‌مقدار u از پارامتر خانواده دارای معادلهٔ پارامتری به شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(u) + v\mathbf{N}(u)\times\dot{\mathbf{N}}(u)$$

است ، که درآن v پارامتر خط بوده و $\mathbf{r}_0(u)$ نقطهٔ دلخواهی از خط مشخص u است. هرگاه $\mathbf{r}_0(u)$ را جواب مشتقپذیر معادلات (۶۰۱۳) و دو پارامتر u و v را پارامترهای مستقل یک نمایش پارامتری سطح بگیریم، آنگاه معادلهٔ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(u) + v\mathbf{N}(u)\times\dot{\mathbf{N}}(u)$$

معادلهٔ پارامتری پوش خواهد بود. این پوش با خطوطی مستقیم که کاملاً" برصفحه واقعند

جارو می‌شود . سطحی که دارای این خاصیت باشد را یک **سطح خط‌دار**، و خطوط مستقیم را **مولدهای مستقیم‌الخط** یا **خطوط جاری** سطح می‌نامند . درمورد پوش خانواده‌ای از صفحات ، خطوط جاری خطوط مشخص خانواده می‌باشند .

قضیه . *هرگاه توابع $\mathbf{N}(u)$ و $\delta(u)$ از کلاس C_2 بوده و $\mathbf{N}\dot{\mathbf{N}}\ddot{\mathbf{N}} \neq 0$ ، آنگاه پوش این خانواده از صفحات یا (۱) سطحی است که با مماسهای یک منحنی پیچ‌خورده در فضا جارو می‌شود یا (۲) یک سطح مخروطی است ؛ یعنی ، سطحی است که با خطوط مستقیم ماربر یک نقطهٔ ثابت در فضا به نام رأس مخروط و ماربر نقاط منحنیی به نام هادی سطح مخروطی جارو می‌گردد .*

هرگاه $\mathbf{N}\dot{\mathbf{N}}\ddot{\mathbf{N}} = 0$ ولی خانوادهٔ (۵.۱۳) از صفحاتی موازی تشکیل نشده باشد ،آنگاه پوش یک سطح استوانه‌ای است ؛ یعنی ،سطحی‌است که تمام خطوط جاری آن موازی یکدیگرند .

برهان . سعی می‌کنیم منحنیی بیابیم که تمام خطوط مشخص برآن مماس باشند .این‌منحنی ، درصورت وجود ، **یال بازگشت** پوش نام دارد . ما از پارامتر u خانواده به عنوان پارامتر یال بازگشت استفاده کرده ، به هر مقدار u نقطهٔ تماس یال بازگشت با خط مشخص نظیر u را نسبت می‌دهیم . فرض‌کنیم معادلهٔ پارامتری حاصل از این طریق $\mathbf{R} = \mathbf{p}(u)$ بوده و $\mathbf{p}$ تابعی از کلاس C_1 باشد . چون به‌ازای هر u این نقطه برخط مشخص نظیر واقع است، پس معادلات (۶.۱۳) متحداً" برقرار می‌باشند :

$$\mathbf{N}(u)\mathbf{p}(u) = \delta(u),$$
$$\dot{\mathbf{N}}(u)\mathbf{p}(u) = \dot{\delta}(u).$$

با مشتقگیری از این اتحادها نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{N}}(u)\mathbf{p}(u) + \mathbf{N}(u)\dot{\mathbf{p}}(u) &= \dot{\delta}(u),\\ \ddot{\mathbf{N}}(u)\mathbf{p}(u) + \dot{\mathbf{N}}(u)\dot{\mathbf{p}}(u) &= \ddot{\delta}(u).\end{aligned} \qquad (۷.۱۳)$$

چون خط مشخص باید بر یال بازگشت مماس باشد ،بردار مماس $\dot{\mathbf{p}}(u)$ باید موازی $\mathbf{N}(u) \times \dot{\mathbf{N}}(u)$ باشد . لذا ، این بردار بر $\mathbf{N}(u)$ و $\dot{\mathbf{N}}(u)$ عمود است ، به این معنی که

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{p}} = 0, \qquad \dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{p}} = 0.$$

بنابراین ، معادلهٔ دوم (۷.۱۳) نتیجه می‌دهد که

$$\ddot{\mathbf{N}}(u)\mathbf{p}(u) = \ddot{\delta}(u).$$

درنتیجه ، یال بازگشت در دستگاه مرکب از سه معادلهٔ

$$\mathbf{N}(u)\mathbf{p} = \delta(u),$$

$$\dot{\mathbf{N}}(u)\mathbf{p} = \dot{\delta}(u),$$
$$\ddot{\mathbf{N}}(u)\mathbf{p} = \ddot{\delta}(u)$$

صدق می‌کند. هرگاه $\mathbf{N}\dot{\mathbf{N}}\ddot{\mathbf{N}} \neq 0$ ، این معادلات $\mathbf{p}$ را به‌عنوان تابعی از u معین می‌کنند. درواقع ، این دستگاه معادل دستگاه معادلات زیر است که به شکل مختصات بیان شده‌است:

$$Ax + By + Cz = \delta,$$
$$\dot{A}x + \dot{B}y + \dot{C}z = \dot{\delta},$$
$$\ddot{A}x + \ddot{B}y + \ddot{C}z = \ddot{\delta},$$

که در اینجا $\mathbf{N} = \{A, B, C\}, \mathbf{p} = \{x, y, z\}$.

شرط $\mathbf{N}\dot{\mathbf{N}}\ddot{\mathbf{N}} \neq 0$ یعنی دستگاه دارای دترمینان ناصفر است. هرگاه جواب $\mathbf{p}(u)$ این دستگاه معادلات ثابت باشد، خطوط مشخص از یک نقطهٔ فضا با این بردار موضع ثابت می‌گذرند ؛ درنتیجه، پوش یک سطح مخروطی می‌باشد. هرگاه جواب درهیچ بازه‌ای ثابت نباشد، آنگاه $\dot{\mathbf{p}}(u) \neq 0$ جز دربعضی نقاط تنها ، و در این صورت، با استدلال‌کردن در جهت عکس، به‌آسانی ثابت می‌شود که خطوط مشخص برمنحنی $\mathbf{r} = \mathbf{p}(u)$ مماسند .

بالاخره، هرگاه $\mathbf{N}\dot{\mathbf{N}}\ddot{\mathbf{N}} = 0$ ولی $\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{N}} \neq 0$ ، آنگاه تمام بردارهای $\mathbf{N} \times \dot{\mathbf{N}}$ موازی هستند (ر.ک. زیربخش ۳۰۲، تمرین ۱) ، که بدین معنی است که تمام خطوط مشخص موازی بوده و پوش یک سطح استوانه‌ای می‌باشد .

امثله و تمرین

۰۱ پوش یک‌خانوادهٔ یک‌پارامتری از صفحات می‌تواند یک‌خط باشد. مثلاً ، پوش خانوادهٔ

$$x \cos u + y \sin u = 0$$

از صفحات خط $x = y = 0$ است .

۰۲ پوش خانوادهٔ صفحات بوسان منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{p}(t)$ از کلاس C_3 با انحنای ناصفر با سطح متشکل از خطوط مماس براین منحنی یکی است. به عبارت دیگر، منحنی ***یال بازگشت پوش صفحات بوسان خود می‌باشد*** .

۰۳ پوش صفحات قائم به یک‌منحنی. فرض‌کنیم یک‌منحنی ازکلاس C_2 ، که دارای انحنای ناصفر است ، با پارامتری‌سازی طبیعی $\mathbf{r} = \mathbf{p}(s)$ مفروض باشد. معادلهٔ خانوادهٔ قائمها عبارت است از

$$(\mathbf{R} - \mathbf{p}(s))\mathbf{t}(s) = 0,$$

که در آن $\mathbf{t}(s)$ بردار مماس برمنحنی است. معادلهٔ پارامتری پوش‌جواب معادلات

$$(\mathbf{R} - \mathbf{p})\mathbf{t} = 0, \qquad -\mathbf{t}^2 + (\mathbf{R} - \mathbf{p})\kappa\mathbf{n} = 0$$

است ، که $\mathbf{n}$ بردار قائم اصلی منحنی و κ انحنا است ، یا

$$(\mathbf{R}-\mathbf{p})\mathbf{t}=0, \qquad (\mathbf{R}-\mathbf{p})\mathbf{n}=1/\kappa.$$

به‌ازای مقدار ثابتی از پارامتر s ، اینها معادلات‌خط مشخص هستند .این خط مشخص دارای راستای $\mathbf{t}\times\mathbf{n}=\mathbf{b}$ بوده و از مرکز انحنای منحنی می‌گذرد ؛ بنابراین ، بر خط قطبی منحنی منطبق است . در واقع ، تصویر بردار $\mathbf{R}-\mathbf{p}$ روی صفحهٔ بوسان برداری است به طول $1/\kappa=\rho$ و همجهت بردار قائم اصلی $\mathbf{n}$. معادلهٔ سطح عبارت است از

$$\mathbf{r}=\mathbf{p}(u^1)+\frac{1}{\kappa(u^1)}\mathbf{n}(u^1)+u^2\mathbf{b}(u^1).$$

۴. یال بازگشت پوش خانوادهٔ صفحات قائم را پیدا کرده، نتیجه را با نتایج زیر بخش ۴۰۸، بخصوص (۱۵۰۸) ، مقایسه نمایید .

۵. پوش خانوادهٔ صفحات اصلاحی منحنی $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ از کلاس C_3 با انحنای ناصفر را بیابید . نشان دهید که خطوط مشخص دارای راستای بردارهای داربو در نقاط نظیر می‌باشند . آیا منحنی برپوش واقع است ؟

۶. سه پوش تمرینات ۲ ، ۳ ، و ۵ را برای مارپیچ به دست آورید .

۷. همچنین ، پوش یک خانوادهٔ یک پارامتری از سطوح دیگر ممکن است یال بازگشتی‌باشد که تمام‌خطوط (درحالت کلی منحنیها)مشخص برآن مماس باشند . یال بازگشت پوش خانوادهٔ $F(x,y,z,\alpha)=0$ در معادلات

$$F(x,y,z,\alpha)=0, \qquad F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0, \qquad F_{\alpha\alpha}(x,y,x,\alpha)=0$$

صدق می‌کنند . یال بازگشت ممکن است یک نقطه نیز باشد ، مثل حالت مخروط ، یا از چند نقطهٔ تنها تشکیل شده باشد .

★ ۳۰۱۳ پوش یک خانوادهٔ دوپارامتری از سطوح

پوش خانوادهٔ

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0 \qquad (۸۰۱۳)$$

از سطوح ،که درآن F تابعی است از کلاس C_1 و F_α, F_β در هیچ مجموعهٔ بازی متحد صفر نیستند ، سطحی است که در هر نقطه‌اش بر یکی از سطوح خانواده مماس است و ، بعلاوه ، در هر همسایگی یک نقطهٔ تماس با یک سطح از خانواده ، نقاط تماس با سطوح دیگر نیز وجود دارند .

فرض کنیم پوش را بتوان با یک معادلهٔ پارامتری از کلاس C_1 به‌صورت

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2)$$

نمایش‌داد ،به‌طوری‌که پارامترهای $\alpha(u^1, u^2), \beta(u^1, u^2)$ سطحی که در نقطهٔ (u^1, u^2) برپوش مماس است توابعی از کلاس C_1 بوده و ژاکوبی $\partial(\alpha, \beta)/\partial(u^1, u^2)$ مخالف 0 باشد . با این مفروضات ، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم .

قضیه . مختصات نقاط پوش خانوادهٔ (۸۰۱۳) در معادلات زیر صدق می‌کنند :

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad F_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad F_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0. \tag{۹۰۱۳}$$

این دستگاه معادلات به‌وسیلهٔ نقاط منفرد سطوح خانواده نیز برقرار است .

برهان . فرض‌کنیم معادلات پوش عبارت باشند از

$$x = x(u^1, u^2), \qquad y = y(u^1, u^2), \qquad z = z(u^1, u^2).$$

چون (u^1, u^2) نقطهٔ تماس‌پوش‌وسطح نظیر به مقادیر $\alpha(u^1, u^2), \beta(u^1, u^2)$ از پارامترهاست ، لذا اتحاد زیر را داریم :

$$F\big(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2), \alpha(u^1, u^2), \beta(u^1, u^2)\big) = 0.$$

با مشتقگیری نسبت به u^1 و u^2 ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 + F_\alpha \alpha_1 + F_\beta \beta_1 &= 0 \\ F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 + F_\alpha \alpha_2 + F_\beta \beta_2 &= 0 \end{aligned} \tag{۱۰۰۱۳}$$

که درآنها

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i} \text{ ، } \alpha_i = \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}$$ ، وغیره .

پوش و سطح نظیر از خانواده در نقطهٔ‌مشترک‌دارای صفحهٔ مماس مشترک هستند . بردارهای $\{x_1, y_1, z_1\}, \{x_2, y_2, z_2\}$ برپوش مماسند ،حال‌آنکه بردار $\{F_x, F_y, F_z\}$ برسطح خانواده عمود می‌باشد . لذا ، داریم

$$\begin{aligned} F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 &= 0, \\ F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{۱۱۰۱۳}$$

این روابط، همراه با (۱۰۰۱۳) ، نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} F_\alpha \alpha_1 + F_\beta \beta_1 &= 0, \\ F_\alpha \alpha_2 + F_\beta \beta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{۱۲۰۱۳}$$

چون ، طبق فرض، دترمینان $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \partial(\alpha, \beta)/\partial(u^1, u^2)$ مخالف صفر است ، لذا نتیجه می‌شودکه $F_\alpha = 0, F_\beta = 0$ ، و پوش در معادلات (۹۰۱۳) صدق خواهد کرد . در مورد نقاط منفرد سطح، داریم $F_x = F_y = F_z = 0$ ، و معادلهٔ (۱۱۰۱۳) ، و درنتیجه

(۱۲۰۱۳) و (۹۰۱۳) ، نیز برقرار می‌باشند.

اگر بخواهیم پوش خانوادهٔ معلومی را بیابیم ، می‌توانیم از پارامترهای α و β به عنوان پارامترهای پوش استفاده کرده و x, y, z را از معادلات (۹۰۱۳) به‌صورت توابعی از α و β پیداکنیم .همچنین ، می‌توان α و β را حذف کرده یک معادلهٔ ضمنی به‌دست آورد . درهردو حالت ،به‌خاطر نقاط منفرد سطوح خانواده ، امتحان لازم است .

امثله و تمرین

۱ . هر سطح پوش خانوادهٔ تمام صفحات مماس برخود است . درحالت کلی ،این‌خانواده یک خانوادهٔ دوپارامتری می‌باشد .

۲ . پوش خانواده‌های زیر از سطوح را بیابید :

(آ) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=\alpha^2+\beta^2$ ؛

(ب) $2\alpha x+2\beta y+z=\alpha^2+\beta^2$. ✶

۱۴ سطوح خط دار و گستردنی

۱۰۱۴ سطوح گستردنی

صفحه و سطوحی که پوش خانواده‌های یک پارامتری از صفحات هستند سطوح **گستردنی** نامیده می‌شوند . بعدهاخواهیم دید (در زیر بخش ۳۰۲۰) که این نام از آنجا ناشی‌شده که این سطوح را می‌توان به‌طور ایزومتریک بروی صفحه نگاشت ــ گسترش داد .

همانطور که در زیر بخش ۲۰۱۳ دیدیم ، سطوح گستردنی غیر تخت یا سطوحی هستند که از خطوط مماس یک منحنی پیچ خورده تشکیل شده‌اند یا سطوح مخروطی یا استوانه‌ای می‌باشند . بعکس، نشان می‌دهیم که هر سطح از انواع فوق پوش یک خانوادهٔ یک پارامتری‌ازصفحات است ؛ به‌عبارت دیگر ، خانوادهٔ صفحات مماس‌آن به یک پارامتر بستگی دارد . بعلاوه ، هر صفحهٔ مماس با سطح در امتداد یک خط مستقیم ــ خط مشخص این‌خانواده ــ تماس دارد . درنتیجه ، یک سطح گستردنی به‌وسیلهٔ خانواده‌ای از مولدهای مستقیم الخط جارو می‌شود ، و همهٔ صفحات مماس در نقاط یک مولد خاص برهم منطبق هستند .

۲۰۱۴ سطح تشکیل شده به‌وسیلهٔ مماسهای یک منحنی در فضا

فرض کنیم

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) \tag{۱۰۱۴}$$

یک منحنی ازکلاس C_3 بوده‌و، برای‌سادگی، u^1 پارامتر طبیعی آن باشد. دراین‌صورت، معادلهٔ خط مماس در یک نقطهٔ نظیر به مقدار u^1 از پارامتر عبارت است از

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{p}'(u^1), \tag{۲۰۱۴}$$

که درآن u^2 پارامتر نمایش پارامتری منحنی می‌باشد.

هرگاه u^1 و u^2 را دو پارامتر مستقل بگیریم، (۲۰۱۴) معادلهٔ پارامتری سطح متشکل از مماسهای منحنی (۱۰۱۴) خواهد بود. خطوط u^2 (یعنی، ثابت $= u^1$) مولدهای مستقیم الخط خطوط جاری سطح می‌باشند.

حال می‌پردازیم به یافتن بردار قائم این سطح. اگر $\mathbf{t}(u^1)$، $\mathbf{n}(u^1)$، و $\mathbf{b}(u^1)$ بردارهای مماس، قائم اصلی، و قائم دوم منحنی (۱۰۱۴) باشند، می‌توان معادلهٔ این سطح را به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{t}(u^1), \tag{۲۰۱۴'}$$

که از آن، طبق فرمولهای فرنه،

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{t}(u^1) + u^2\kappa(u^1)\mathbf{n}(u^1), \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{t}(u^1),$$

و

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -u^2\kappa(u^1)\mathbf{b}(u^1), \tag{۳۰۱۴}$$

که درآنها $\kappa(u^1)$ انحنای منحنی‌درنقطهٔ u^1 است. این نشان می‌دهد که نمایش پارامتری (۲۰۱۴) همه‌جاجزدرنقاط خودمنحنی $(u^2 = 0)$ ونقاط‌آن خطوط جاریی که‌درنقاط‌اصلاحی $(\kappa(u^1) = 0)$ بر منحنی مماسند منتظم است. درسایر نقاط، داریم

$$\mathbf{m} = -\operatorname{sgn}(u^2)\mathbf{b}(u^1), \tag{۴۰۱۴}$$

که درآن

$$\operatorname{sgn}(u^2) = \begin{cases} 1\text{، } & u^2 > 0 \text{ اگر} \\ -1\text{، } & u^2 < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

صفحهٔ مماس بر سطح در نقطهٔ (u^1, u^2) دارای معادلهٔ

$$[\mathbf{R} - \mathbf{p}(u^1) - u^2\mathbf{t}(u^1)]\mathbf{b}(u^1) = 0$$

یا

$$(\mathbf{R} - \mathbf{p}(u^1))\mathbf{b}(u^1) = 0$$

است، زیرا $\mathbf{t}(u^1)\mathbf{b}(u^1) = 0$. این‌معادله‌فقط به‌پارامتر u^1 بستگی داشته و معادلهٔ‌صفحهٔ بوسان منحنی در u^1 است. از اینرو، صفحهٔ مماس بر سطح در هر نقطهٔ مولد مستقیم‌ـ الخط نظیر، براین صفحهٔ بوسان منطبق است. درنتیجه، این سطح پوش خانوادهٔ صفحات

بوسان منحنی می‌باشد .

درحالتی که منحنی در صفحه واقع است ، همهٔ خطوط مماس نیز در صفحه واقع شده و قسمتی از صفحه را می‌پوشانند . معادلهٔ (۲۰۱۴) را می‌توان ، در یک قلمرو به‌قدرکافی کوچک ، به‌عنوان نمایش پارامتری بخشی از صفحه گرفت . اگر منحنی یک منحنی پیچ‌خورده باشد ، سطح به دو پارچهٔ $u^2 < 0$ و $u^2 > 0$ تقسیم می‌شود . همانطور که از (۲۰۱۴) می‌بینیم ، جهت صفحهٔ مماس که به‌وسیلهٔ پارامتری سازی (۲۰۱۴) القا می‌شود درمورد دو پارچه مخالف یکدیگر است .

برای اطلاع از شکل این سطوح و نقش خود منحنی ، سطح را با یک صفحهٔ قائم به منحنی بـرش داده،ثابت می‌کنیم این مقطع در آن نقطه از منحنی دارای نقطهٔ بازگشت است . برای‌این منظور ، فرض‌کنیم نقطهٔ P_0 از منحنی نظیر به مقدار u_0^1 از پارامترباشد . در این صورت ، معادلهٔ صفحهٔ قائم عبارت است از

$$(\mathbf{R} - \mathbf{p}(u_0^1))\mathbf{t}(u_0^1) = 0.$$

با گذاردن طرف راست معادلهٔ (۲۰۱۴) درآن ، داریم

$$(\mathbf{p}(u^1) - \mathbf{p}(u_0^1))\mathbf{t}(u_0^1) + u^2\mathbf{t}(u^1)\mathbf{t}(u_0^1) = 0,$$

که از آنجا

$$u^2 = -\frac{(\mathbf{p}(u^1) - \mathbf{p}(u_0^1))\mathbf{t}(u_0^1)}{\mathbf{t}(u^1)\mathbf{t}(u_0^1)},$$

که این ، در صورتی که $u^1 - u_0^1$ به‌قدر کافی کوچک باشد ، دارای معنی است . باجایگزینی این مقدار از u^2 در معادلهٔ (۲۰۱۴′) سطح ، معادلهٔ پارامتری (با پارامتر u^1) مقطع مورد بحث به‌دست می‌آید :

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) - \lambda(u^1)\mathbf{t}(u^1),$$

که درآن

$$\lambda(u^1) = \frac{(\mathbf{p}(u^1) - \mathbf{p}(u_0^1))\mathbf{t}(u_0^1)}{\mathbf{t}(u^1)\mathbf{t}(u_0^1)}.$$

درحالت کلی ، پارامتر u^1 طول قوس این منحنی نیست . با استفاده از فرمول فرنه برای منحنی اولیه ، درمی‌یابیم که

$$\mathbf{r}' = (1 - \lambda')\mathbf{t} - \kappa\lambda\mathbf{n},$$
$$\mathbf{r}'' = (-\lambda'' + \kappa^2\lambda)\mathbf{t} + (\kappa - \kappa'\lambda - 2\kappa\lambda')\mathbf{n} - \kappa\lambda\tau\mathbf{b}.$$

با محاسبهٔ مشتقات λ ، پس از چند عمل ، بالاخره درمی‌یابیم که

$$\lambda' = 1 - \kappa\lambda\frac{\mathbf{n}\mathbf{t}_0}{\mathbf{t}\mathbf{t}_0}, \qquad \lambda'' = -(\kappa\lambda)'\frac{\mathbf{n}\mathbf{t}_0}{\mathbf{t}\mathbf{t}_0} - \kappa\lambda\left(\frac{\mathbf{n}\mathbf{t}_0}{\mathbf{t}\mathbf{t}_0}\right)',$$

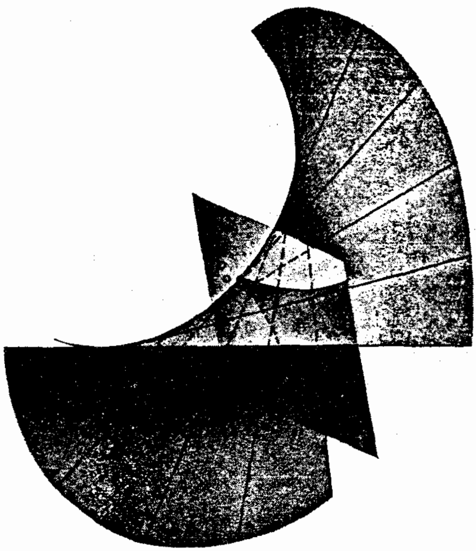
که درآنها زیرنویس o مقدار تابع نظیر را در u_0^1 نشان می‌دهد. بنابراین، در u_0^1 داریم

$$\lambda(u_0^1) = 0, \qquad \lambda'(u_0^1) = 1, \qquad \lambda''(u_0^1) = 0,$$

زیرا $\mathbf{n}_0\mathbf{t}_0 = 0$. این ایجاب می‌کند که

$$\mathbf{r}'(u_0^1) = 0 \text{ و } \mathbf{r}''(u_0^1) = -\kappa_0\mathbf{n}_0 .$$

مشتق دوم مخالف صفر است جز آنکه P_0 یک نقطهٔ اصلاح منحنی اصلی باشد. این یعنی P_0 یک نقطهٔ بازگشت فصل مشترک سطح با صفحهٔ قائم به یال بازگشت در P_0 است. دو شاخه از طرف منفی قائم اصلی منحنی اولیه یعنی از طرف تحدب منحنی، به نقطهٔ P_0 نزدیک می‌شوند (شکل ۱۰۱۴).



شکل ۱۰۱۴

۳۰۱۴ سطوح مخروطی و استوانه‌ای

هرگاه راس مخروط بر مبداء مختصات منطبق بوده و هادی آن به معادلهٔ

$$\mathbf{r} = \mathbf{q}(t) \tag{۵۰۱۴}$$

باشد، آنگاه

$$\mathbf{r} = u^2\mathbf{q}(u^1) \tag{۶۰۱۴}$$

معادلهٔ پارامتری مخروط است. فرض کنیم (۵۰۱۴) از کلاس C_1 باشد. دراین صورت،

$$\mathbf{r}_1 = u^2\dot{\mathbf{q}}(u^1), \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{q}(u^1),$$

و

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = u^2\dot{\mathbf{q}}(u^1) \times \mathbf{q}(u^1).$$

هرگاه بردارهای $\mathbf{q}(u^1)$ و $\dot{\mathbf{q}}(u^1)$ همخط نبوده (این بردارها فقط وقتی می‌توانند به‌ازای u^1 در بازه‌ای همخط باشند که معادله دراین بازه نمایش پاره خطی ماربر راس باشد)، و $u^2 \neq 0$ ، بدین معنی که نقطهٔ مورد نظر راس نیست، آنگاه نقطهٔ (u^1, u^2) یک نقطهٔ منتظم بوده و صفحهٔ مماس دارای معادله‌ای به شکل

$$(\mathbf{R} - u^2\mathbf{q}(u^1))\dot{\mathbf{q}}(u^1)\mathbf{q}(u^1) = 0,$$

یا

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{q}}(u^1)\mathbf{q}(u^1) = 0$$

است، زیرا $\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}\mathbf{q} = 0$. لذا، معادله فقط به u^1 بستگی دارد، و خانوادهٔ صفحات مماس یک خانوادهٔ یک پارامتری می‌باشد.

یک استوانه با هادی (۵۰۱۴) و یالهای موازی بردار ثابت $\mathbf{a}$ ، دارای معادله‌ای به‌شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{q}(u^1) + u^2\mathbf{a} \qquad (۷۰۱۴)$$

است، که از آنجا

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \dot{\mathbf{q}}(u^1)\mathbf{a}.$$

لذا، معادلهٔ صفحات مماس، یعنی

$$(\mathbf{R} - \mathbf{q}(u^1) - u^2\mathbf{a})\dot{\mathbf{q}}(u^1)\mathbf{a} = 0$$

یا

$$\mathbf{R}\mathbf{q}(u^1)\mathbf{a} = \mathbf{q}(u^1)\dot{\mathbf{q}}(u^1)\mathbf{a},$$

باز فقط به پارامتر u^1 بستگی دارد.

۴۰۱۴ سطوح خط دار

سطوح گستردنی حالات خاصی هستند از کلاس عمومی‌تری از سطوح به‌نام سطوح خط دار.

یک *سطح خط دار* سطحی است با این خاصیت که از هر نقطهٔ آن خط مستقیمی می‌گذرد که کاملا" روی سطح قرار دارد. بنابراین، سطح با خطوط مستقیمی، به‌نام ***خطوط جاری*** یا ***مولدهای مستقیم الخط***، پوشیده می‌شود، که یک خانوادهٔ یک پارامتری وابسته به یک پارامتر را تشکیل می‌دهند.

برای یافتن معادلهٔ پارامتری یک سطح خط دار، منحنی $\mathscr{K}$ را روی سطح طوری اختیار می‌کنیم که خطوط جاری را قطع کند. فرض کنیم معادلهٔ پارامتری این منحنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(t)$$

باشد . ما این منحنی را **هادی** سطح می‌نامیم . در هر نقطه از این منحنی ، برداریکهٔ خط جاری ماربر ایـن نقطه را اختیار می‌کنیم . این بردار یکه به t بستگی دارد ؛ درنتیجه ، تابع دیگر

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}(t)$$

را نیز خواهیم داشت .

حال می‌توان معادلهٔ سطح را به‌شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{l}(u^1) \tag{۸۰۱۴}$$

نوشت . پارامتر u^1 خطوط جاریی را روی سطح مشخص می‌کند که نقطه‌ای به مختصات منحنی الخط (u^1, u^2) برآن واقـع است ، و پـارامتر u^2 موضع این نقطه را روی خط جاری نشان می‌دهد .

در بررسی بیشتر خود ، فرض می‌کنیم هر دو تابع $\mathbf{p}(t)$ و $\mathbf{l}(t)$ از کلاس C_1 باشند . دراین صورت ، چون مقادیر $\mathbf{l}(t)$ بردارهای یکه‌اند ، خواهیم داشت

$$\mathbf{l}\,d\mathbf{l} = 0 \text{ ، } \mathbf{l}\dot{\mathbf{l}} = 0 \text{ ، } \mathbf{l}^2 = 1$$

قضیه . ***یک سطح خط‌دار منتظم (۸۰۱۴) از کلاس C_1 گستردنی است اگر و فقط اگر***

$$d\mathbf{p}\,d\mathbf{l}\,\mathbf{l} = 0 \text{ یا } \dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}}\mathbf{l} = 0 \tag{۹۰۱۴}$$

برهان . از رابطهٔ (۸۰۱۴) داریم

$$\mathbf{r}_1 = \dot{\mathbf{p}}(u^1) + u^2\dot{\mathbf{l}}(u^1), \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{l}(u'),$$

که از آنجا

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \dot{\mathbf{p}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1) + u^2\dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1). \tag{۱۰۰۱۴}$$

لذا ، سطح گستردنی است اگر و فقط اگر صفحات مماس در تمام نقاط یک خط جاری برهم منطبق بـاشند ، و این برقرار است اگر و فقط اگر راستای بردار قائم (۱۰۰۱۴) به u^2 بستگی نـداشته باشد . این ، به‌نوبهٔ خود ، امکان پذیر است اگر و فقط اگر دو بردار $\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}$ و $\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}$ به‌ازای هر u^1 همخط باشند یا

$$(\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}) \times (\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}) = 0,$$

ولی

$$(\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}) \times (\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}) = (\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}}\mathbf{l})\mathbf{l} - (\mathbf{l}\dot{\mathbf{l}}\mathbf{l})\dot{\mathbf{p}} = (\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}}\mathbf{l})\mathbf{l},$$

که شرط (۹۰۱۴) را تامین می‌کند .

درحالت کلی ، وقتی سطح گستردنی نباشد ، بردارهای $\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}$ و $\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}$ مستقل خطی‌اند و بردار قائم (۱۰۰۱۴) راستایش را با تغییر u^2 در امتداد خط جاری تغییر می‌دهد . خط جاری روی صفحهٔ مماس درهر نقطه از آن قرار دارد ولی صفحهٔ مماس از یک نقطه به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند . به عبارت دیگر ، صفحهٔ مماس حول خط جاری ، وقتی نقطهٔ تماس در امتداد آن حرکت کند ، می‌چرخد . صفحهٔ مماس در P_0 سطح را درامتداد خط جاری ماربر P_0 قطع می‌نماید .

حال به بررسی رفتار بردار قائم ، وقتی $u^2 \to \infty$ ، می‌پردازیم . برای این‌کار ، بردار (۱۰۰۱۴) را با بردار

$$\mathbf{M}^* = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|u^2|} = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}}{|u^2|} + \operatorname{sgn}(u^2)\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l},$$

که به‌ازای $u^2 \neq 0$ تعریف شده و با $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ همجهت است ، عوض می‌کنیم . بردار یکهٔ قائم $\mathbf{m}$ نظیر همان جهت را داشته ، و به‌ازای هر u^2 تعریف شده است ، و این بردار بشرطی که $\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}$ و $\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}$ مستقل خطی باشند ، به‌طور پیوسته تابع u^2 است ، چرا که دراین حالت $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ به‌ازای هر u^2 مخالف صفر است .

وقتی $u^2 \to -\infty$ ، $\mathbf{M}^* \to -\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}$ ، و وقتی $u^2 \to \infty$ ، $\mathbf{M}^* \to \dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}$. این یعنی ، وقتی نقطهٔ تماس در امتداد خط جاری حرکت کند ، صفحهٔ مماس به‌اندازهٔ π حول خط جاری می‌چرخد ، و موضع حدی صفحهٔ مماس قائم به $\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}$ می‌باشد .

۵۰۱۴ خط محض یک سطح خط دار

نقطه‌ای از خط جاری یک سطح خط دار که در آن صفحهٔ مماس به موضع حدی صفحه عمود باشد **نقطهٔ محض** خط جاری نامیده می‌شود . مجموعهٔ تمام نقاط محض یک منحنی تشکیل می‌دهند به‌نام **خط محض** سطح . فرض‌کنیم (u^1, u^2) نقطهٔ محض خط جاری u^1 باشد . دراین صورت ، بردار قائم سطح دراین نقطه باید بر $\dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)$ عمود باشد یا اینکه

$$[\dot{\mathbf{p}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1) + u^2\dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)][\dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)] = 0,$$

که نتیجه می‌دهد

$$[\dot{\mathbf{p}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)][\dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)] + u^2[\dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)]^2 = 0$$

یا

$$\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}} + u^2\dot{\mathbf{l}}^2 = 0,$$

که درآن مقادیر توابع $\dot{\mathbf{p}}$ ، $\dot{\mathbf{l}}$ ، و $\mathbf{l}$ در u^1 گرفته شده‌اند .

هرگاه $\dot{\mathbf{l}}^2 = 0$ ، نقطهٔ محض وجود نخواهد داشت . این به‌ازای u^1 در یک بازه‌فقط

وقتی می‌تواند رخ دهد که قسمت نظیر از سطح یک سطح استوانه‌ای باشد، چرا که، دراین صورت، $\mathbf{l}$ در آن بازه ثابت می‌باشد. معادله، جز برای این نقاط، u^2 را به‌صورت زیر معین می‌کند:

$$u^2 = -\frac{\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}}}{\dot{\mathbf{l}}^2} = -\frac{d\mathbf{p}\, d\mathbf{l}}{(d\mathbf{l})^2}.$$

با گذاردن این مقدار در معادلهٔ سطح، بردار موضع نقطهٔ محض از خط جاری u^1 به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} - \frac{\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}}}{(\dot{\mathbf{l}})^2}\mathbf{l} = \mathbf{p} - \frac{d\mathbf{p}\, d\mathbf{l}}{d\mathbf{l}^2}\mathbf{l}. \qquad (۱۱۰۱۴)$$

معادلهٔ (۱۱۰۱۴)، وقتی طرف راست آن تابعی از متغیر u^1 گرفته شود، معادلهٔ خط محض می‌باشد.

هرگاه $\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l}$ و $\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}$ مستقل خطی باشند یا $\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}} \neq 0$، می‌توان به‌آسانی از آخر امتحان کرد و دید که نقطه با بردار موضع (۱۱۰۱۴) واقعا" نقطهٔ محض خط جاری نظیر است؛ و درنتیجه، (۱۱۰۱۴) معادلهٔ خط محض می‌باشد.

اما، درحالتی که دوبردار وابستهٔ خطی باشند و $\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}} = 0$، نیز این معادله، به‌شرط $\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l} \neq 0$، معنی دارد. در واقع، دراین حالت، $\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{l}}, \mathbf{l}$ بردارهایی همصفحه هستند و داریم

$$\dot{\mathbf{p}} = \alpha\mathbf{l} + \beta\dot{\mathbf{l}},$$

که از آن

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l} = \beta\dot{\mathbf{l}} \times \mathbf{l}.$$

معادلهٔ (۱۱۰۱۴) به‌شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} - \beta\mathbf{l}$$

است، که درآن $\beta = \beta(u^1)$ به u^1 بستگی دارد. با مشتقگیری نسبت به u^1، داریم

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} - \beta\dot{\mathbf{l}} - \dot{\beta}\mathbf{l} = \alpha\mathbf{l} + \beta\dot{\mathbf{l}} - \beta\dot{\mathbf{l}} - \dot{\beta}\mathbf{l} = (\alpha - \dot{\beta})\mathbf{l},$$

که نشان می‌دهد که، جز در حالت $\alpha - \dot{\beta} = 0$، خط جاری بر منحنی (۱۱۰۱۴) مماس است. لذا، به‌زبان کلی، این سطح سطح مماسهای بر (۱۱۰۱۴) است، و (۱۱۰۱۴) معادلهٔ یال بازگشت سطح می‌باشد. اگر $\alpha - \dot{\beta} = 0$ در یک بازه برقرار باشد، تابع (۱۱۰۱۴) دراین بازه ثابت بوده، و قسمت نظیر از منحنی به یک نقطه تقلیل می‌یابد. دراین صورت، قسمت نظیر از سطح یک مخروط بوده و (۱۱۰۱۴) راس را نمایش می‌دهد. حال نتایج را در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه . معادلهٔ (۱۱۰۱۴) نمایش خط محض یک سطح خط دار ناگسترد‌نی است . اگرسطح گستردنی باشد ، معادلهٔ (۱۱۰۱۴) نمایش یال بازگشت سطح است ، که دراین حالت یک مخروط به راس خود تقلیل می‌یابد .

بردارقائم یک سطح خط دار در نقطهٔ محض خط جاری بر $\dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)$ عمود است . درهمین حال ، مثل تمام بردارهای قائم دیگر در نقاط این خط جاری ، بر $\mathbf{l}(u)$ عمودبوده ، و لذا ، با

$$\mathbf{l}(u^1) \times [\dot{\mathbf{l}}(u^1) \times \mathbf{l}(u^1)] = [\mathbf{l}(u^1)]^2\dot{\mathbf{l}}(u^1) - [\mathbf{l}(u^1)\dot{\mathbf{l}}(u^1)]\mathbf{l}(u^1)$$
$$= \dot{\mathbf{l}}(u^1)$$

همخط است . به عبارت دیگر ، در نقطهٔ محض خط جاری داریم

$$\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{l}} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{m} \times d\mathbf{l} = 0. \qquad (۱۲۰۱۴)$$

★ برای ارائهٔ مفهوم نقطهٔ محض خط جاری یک سطح خط دار راه دیگری نیز وجود دارد . دو خط جاری نظیر به مقادیر u^1 و $u^1 + h$ از پارامتر را درنظر گرفته ،روی خط جاری نظیر به u^1 نزدیکترین نقطه به‌خط جاری دیگر را پیدا می‌کنیم خطی که نزدیکترین نقاط‌دوخط را بهم وصل می‌کند عمود مشترک آنها است . ثابت می‌کنیم حد این نزدیکترین نقطه ، وقتی $h \to 0$ ، نقطهٔ محض خط جاری u^1 است .

درواقع ، فرض کنیم نقطهٔ P از خط جاری u^1 نزدیکترین نقطه به خط جاری $u^1 + h$ بوده و دارای بردار موضع

$$\mathbf{p}(u^1) + \lambda\mathbf{l}(u^1) = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{l}$$

باشد و ، بعلاوه ، بردار موضع نزدیکترین نقطهٔ P^* از خط جاری $u^1 + h$ به‌صورت

$$\mathbf{p}(u^1 + h) + \mu\mathbf{l}(u^1 + h) = \mathbf{p}^* + \mu\mathbf{l}^*$$

باشد ، که درآن $\mathbf{p}^*$ و $\mathbf{l}^*$ اختصارهایی برای $\mathbf{p}(u^1 + h)$ و $\mathbf{l}(u^1 + h)$ هستند . خط PP^* بر $\mathbf{l}$ و $\mathbf{l}^*$ عمود است . چون $\overrightarrow{PP}^* = \mathbf{p}^* - \mathbf{p} + \mu\mathbf{l}^* - \lambda\mathbf{l}$ ، داریم

$$(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l} + \mu(\mathbf{l}^*\mathbf{l}) - \lambda\mathbf{l}^2 = 0,$$
$$(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l}^* + \mu\mathbf{l}^{*2} - \lambda(\mathbf{l}\mathbf{l}^*) = 0.$$

هرگاه $\dot{\mathbf{l}} \neq 0$ ، آنگاه ، به‌ازای هر h به‌قدر کافی کوچک ، بردارهای $\mathbf{l}$ و $\mathbf{l}^*$ یک زاویهٔ حادهٔ ناصفر تشکیل می‌دهند و $0 < \mathbf{l}\mathbf{l}^* < 1$. بنابراین ، می‌توان این دستگاه معادلات را نسبت به λ حل کرد . با توجه به اینکه $\mathbf{l}^2 = \mathbf{l}^{*2} = 1$ ، خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{(\mathbf{l}^*\mathbf{l})[(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l}^*] + (\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l}}{(\mathbf{l}^*\mathbf{l})^2 - 1}$$

$$= \frac{[(\mathbf{l}^*\mathbf{l}) - 1][(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l}^*] + (\mathbf{p}^* - \mathbf{p})(\mathbf{l}^* - \mathbf{l})}{(\mathbf{l}^*\mathbf{l})^2 - 1}$$

$$= \frac{(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})\mathbf{l}^*}{\mathbf{l}^*\mathbf{l} + 1} + \frac{(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})(\mathbf{l}^* - \mathbf{l})}{(\mathbf{l}^*\mathbf{l})^2 - 1}.$$

وقتی $h \to 0$ ، $\mathbf{p}^* \to \mathbf{p}$ و $\mathbf{l}^* \to \mathbf{l}$ حد اولین جمعوند صفر است . برای محاسبهٔ حد جمعوند دوم ، توجه می‌کنیم که $(\mathbf{l}^* - \mathbf{l})^2 = 2 - 2\mathbf{l}^*\mathbf{l}$ ، که از آن $\mathbf{l}^*\mathbf{l} - 1 = -\frac{1}{2}(\mathbf{l}^* - \mathbf{l})^2$. درنتیجه ،

$$\frac{(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})(\mathbf{l}^* - \mathbf{l})}{(\mathbf{l}^*\mathbf{l})^2 - 1} = -2\frac{(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})(\mathbf{l}^* - \mathbf{l})}{(\mathbf{l}^* - \mathbf{l})^2(\mathbf{l}^*\mathbf{l} + 1)} = -\frac{2}{\mathbf{l}^*\mathbf{l} + 1}\frac{\dfrac{\mathbf{p}^* - \mathbf{p}}{h}\dfrac{\mathbf{l}^* - \mathbf{l}}{h}}{\left(\dfrac{\mathbf{l}^* - \mathbf{l}}{h}\right)^2}.$$

حال ، وقتی $h \to 0$ ، $\mathbf{l}^*\mathbf{l} + 1 \to 2$ ، $(\mathbf{p}^* - \mathbf{p})/h \to \dot{\mathbf{p}}$ ، و $(\mathbf{l}^* - \mathbf{l})/h \to \dot{\mathbf{l}}$. بنابراین ، کل عبارت ، وقتی $h \to 0$ ، به $-\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}}/\dot{\mathbf{l}}^2$ میل می‌کند ، یا اینکه

$$\lim_{h \to 0} \lambda = -\frac{\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{l}}}{\dot{\mathbf{l}}^2},$$

و حد نقطهٔ مورد نظر بر نقطهٔ محض خط جاری u^1 منطبق شده ، و مطلب به اثبات می‌رسد . ✶

امثله و تمرین

۱ . سهمی‌گون هذلولوی و هذلولی‌گون یک پارچه سطوحی خط دار هستند . هریک ازآنها دارای دو خانواده از خطوط جاری می‌باشند . خطوط محض آنها را پیدا کنید .

۲ . مخروط‌گون (مثال ۸ از ۳۰۱۱) یک سطح خط دار است . معادلهٔ مخروط‌گونی را بیابید که محورش محور z بوده و هادی‌اش خط $x = at + 1, y = bt, z = ct$ باشد . خط محض این سطح را پیدا کنید . ثابت کنید خط محض در یک صفحه قرار دارد .

۳ . خط محض مارپیچ گون را پیدا نمایید .

۴ . سطح

$$x = (u^1)^2 + 2u^1u^2, \qquad y = u^1 + u^2, \qquad z = (u^1)^3 + 3(u^1)^2u^2$$

یک سطح خط دار است ، زیرا u^2 - خطوط (ثابت $= u^1$) خطوطی مستقیم هستند . آیا این سطح گستردنی است ؟

۵ . با استفاده از معادلهٔ (۱۱۰۱۴) ، یالهای بازگشت سطوح گستردنی مثالهای ۲ و ۳

در ۲۰۱۳ ، یعنی پوش خانوادهٔ صفحات قائم یک منحنی معلوم و خانوادهٔ صفحات اصلاحی آن ، را پیدا کنید .

۵
فرمهای درجهٔ دوّم اساسی یک سطح

۱۵ چند نکته درباب نمادگذاری

۱۵‏.۱ نماد جمعبندی

در نظریهٔ سطوح از نمـاد فشردهٔ خاصی استفاده می‌شود مناسب هندسهٔ دیفرانسیل، که در ارتباط با حساب تانسورها وضع شده است. اغلب، یک شیءِ هندسی، مثلاً" یک‌بردار، یک نقطه، وغیره، بـا یک دستگاه از اعداد ــ یعنی مختصات آن ــ بیان می‌شود. دراین حالات، این اعداد با یک حرف به‌انضمام یک یا چند اندیس، به‌صورت بالانویس یا زیرـ نویس، نشان داده می‌شوند. در بخش ۱۱ ، ازاین نوع نماد برای نمایش مختصات منحنی الخط یک نقطه به وسیلهٔ حرف u با بالانویس: u^1, u^2 ، و مشتقات جزئی $\mathbf{r}$ را به‌وسیلهٔ حرف $\mathbf{r}$ بازیرنویس: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ استفاده‌کردیم. به‌کمک اندیس متغیری مانند i ، دومعادلهٔ (۱۱‏.۴) را می‌توان با یک عبارت

$$u^i = u^i(u^{1'}, u^{2'}), \qquad i = 1, 2$$

عوض کرد. با استفاده از علامت جمعبندی، می‌توان (۱۱‏.۶) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r}_{i'} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_k .$$

چون برد جمعبندی در بسیاری از فرمولهای ما یکی است، یعنی $i = 1, 2$ ، در ساده‌سازی قدمی فراتر نهاده، علامت جمعبندی را دراین حالات حذف کرده، می‌نویسیم

$$\mathbf{r}_{i'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_k . \tag{۱۵‏.۱}$$

به بیان دقیقتر، قرارمی‌گذاریم هروقت یک اندیس در یک تکجمله‌ای یکبار به‌صورت زیرنویس و یکبار به‌صورت بالانویس تکرار شود، این عبارت را مجموع تکجمله‌ای با 1 به جای اندیس مشترک و همان تکجمله‌ای با 2 به جای اندیس مشترک بگیریم؛ مثلاً"،

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2,$$
$$a_j b^{jk} = a_1 b^{1k} + a_2 b^{2k},$$

$$g^{ij}g_{jk} = g^{i1}g_{1k} + g^{i2}g_{2k}.$$

اگر یک تکجمله‌ای صوری بیش از یک جفت اندیس داشته باشد، جمعبندی برای هر جفت جداگانه صورت خواهد گرفت؛ مثلاً"،

$$a_{ij}b^{ij} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b^{ij} = a_{11}b^{11} + a_{21}b^{21} + a_{12}b^{12} + a_{22}b^{22},$$

$$a_{ijk}b^{ijk} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ijk}b^{ijk} = a_{111}b^{111} + a_{112}b^{112}$$
$$+ a_{121}b^{121} + a_{122}b^{122} + a_{211}b^{211} + a_{212}b^{212} + a_{221}b^{221} + a_{222}b^{222}.$$

ترتیب جمعبندیها، بدلیل تعویضپذیری جمع، اهمیتی ندارد. اندیسهایی که یکبار به صورت زیرنویس و یکبار به‌صورت بالانویس می‌آیند ***اندیسهای ظاهری*** یا ***اندیسهای جمعبندی*** نام دارند. همیشه دو اندیس جمعبندی در یک تکجمله‌ای صوری را می‌توان، بدون تغییر در معنی عبارت، با حرف دیگر عوض کرد؛ مثلاً"،

$$a^ib_i = a^jb_j = a^kb_k = a^1b_1 + a^2b_2.$$

همچنین، هر اندیسی که دریک حرف به‌صورت بالانویس و زیرنویس ظاهر شود یک اندیس جمعبندی خواهیم گرفت؛ مثلاً"،

$$a^j_{ij} = a^1_{i1} + a^2_{i2}.$$

اندیسهای دیگر ***اندیسهای آزاد*** نام دارند، و می‌توان مستقلاً" به‌جای آنها مقدارگذاشت. در معدودی حالت که نمی‌خواهیم یک اندیس تکراری اندیس جمعبندی باشد، این امر را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

(بدون جمعبندی!) a_ib^i یا $a_ib^i(i!)$.

با این قرار، لازم است در نوشتن فرمولهایی که بیش از یک جمعبندی دارند احتیاط شود. یعنی، برای احتراز از ابهام، باید اندیس جمعبندیهای مختلف را با حروف متمایزنشان داد. مثلاً"، مربع مجموع $a^ib_i = a^1b_1 + a^2b_2$ را به‌شکل

$$(a^ib_i)^2 = a^ib_ia^jb_j$$

نوشت، نه به‌شکل $a^ib_ia^ib_i$.

با این احتیاط، برای احتراز از تکرار اندیسهای جمعبندی، می‌توان، طبق معمول، تکجمله‌ایها را به‌طور صوری درهم ضرب کرد. اما، قانون شرکتپذیری صوری نتیجه‌ای است از قوانین شرکتپذیری، تعویضپذیری، و پخشپذیری با هم؛ مثلاً"، داریم

$$(a_{ij}b^i)c^j = a_{ij}b^ic^j. \qquad (*)$$

در واقع،

$$(a_{ij}b^i) = a_{1j}b^1 + a_{2j}b^2,$$
$$(a_{ij}b^i)c^j = (a_{1j}b^1 + a_{2j}b^2)c^j$$
$$= (a_{11}b^1 + a_{21}b^2)c^1 + (a_{12}b^1 + a_{22}b^2)c^2$$
$$= a_{11}b^1c^1 + a_{12}b^1c^2 + a_{21}b^2c^1 + a_{22}b^2c^2 = a_{ij}b^ic^j.$$

همچنین، می‌توان تکجمله‌ایهایی که دارای بالانویس و زیرنویس آزاد یکسان هستند را با هم جمع کرد. این مجموعها، وقتی در تکجمله‌ای دیگر، چه دارای اندیس جمعبندی باشد یا نه، ضرب شود، به‌طور صوری در قانون پخشپذیری صدق می‌کند.

مثلاً"، با یک اندیس آزاد i، داریم

$$(a_{ijk} + b_{ijk})c^{jk} = a_{ijk}c^{jk} + b_{ijk}c^{jk}. \tag{**}$$

این رابطه درواقع نمایش دو اتحاد است، یکی به‌ازای $i = 1$، و دیگری به‌ازای $i = 2$. مثالی دیگر عبارت است از

$$\begin{aligned}[(a_i + b_i)c^{ik}](a_k^jb_j) &= (a_i + b_i)c^{ik}(a_k^ib_j)\\ &= (a_ic^{ik} + b_ic^{ik})a_k^jb_j = a_ic^{ik}a_k^jb_j + b_ic^{ik}a_k^ib_j.\end{aligned} \tag{***}$$

در اینجا همهٔ اندیسها، اندیسهای جمعبندی می‌باشند.

اگر یک حرف اندیسدار نمایش یک تابع از یک یا چند متغیر باشد، می‌توان قواعد مشتقگیری را برای مجموعها و حاصلضربها به‌طور صوری به‌کار برد؛ مثلاً"،

$$d(a_{ij}b^{jk}) = (da_{ij})b^{jk} + a_{ij}db^{jk},$$

$$\frac{d}{dt}(a_{ij}b^{ij}) = \left(\frac{d}{dt}a_{ij}\right)b^{ij} + a_{ij}\frac{d}{dt}b^{ij},$$

$$\frac{\partial}{\partial u^k}a_{ij}b^{jl} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}b^{jl} + a_{ij}\frac{\partial b^{jl}}{\partial u^k}.$$

امثله و تمرین

۱. عبارت زیر را با فرض $g_{ij} = g_{ji}$ به‌شکل گسترده بنویسید:

(آ) $a_{ij}x^ix^j$؛

(ب) $g_{ij}x^iy^i$؛

(پ) $g_{ij}x^ix^j$.

۲. ثابت کنید که

$$(a^{ij} + a^{ji})(b_{ij} - b_{ji}) = 0.$$

✱ برهان. اگراندیسهای‌جمعبندی i و j با هم عوض شوند، مقدار عبارت‌سمت

چپ تغییر نمی‌کند . بنابراین ،

$$(a^{ij} + a^{ji})(b_{ij} - b_{ji}) = (a^{ji} + a^{ij})(b_{ji} - b_{ij}).$$

اما ، از آن‌سو ، طبق قانون تعویضپذیری ، داریم

$$(a^{ij} + a^{ji})(b_{ij} - b_{ji}) = -(a^{ji} + a^{ij})(b_{ji} - b_{ij}).$$

این ایجاب می‌کند که عبارت مورد نظر مساوی صفر باشد .★

۳ . فرض کنید $a_1^1 = 1,\ a_2^1 = a_1^2 = 2,\ a_2^2 = 0;\ b_1^1 = b_2^2 = 1,\ b_2^1 = 2,\ b_1^2 = 0$ ، و مقدار عبارات زیر را بیابید :

(آ) a_i^i ؛

(ب) a_i^i (بدون جمعبندی) ؛

(پ) $a_i^i b_j^j$ ؛

(ت) $a_j^i b_i^j$ ؛

(ث) $a_j^i a_i^j$ ؛

(ج) $b_i^j b_j^k$.

۲۰۱۵ مشتق و دیفرانسیل یک تابع دومتغیره

فرض کنیم $f(u^1, u^2)$ یک تابع مشتقپذیر از دو متغیر u^1, u^2 بوده ، و این متغیرها خود توابعی از متغیر t باشند . مشتقات جزئی را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم :

$f_{u^1} = f_1$ ، $f_{u^2} = f_2$ ، $f_{u^1u^1} = f_{11}$ ، $f_{u^1u^2} = f_{12}$ ، $f_{u^2u^2} = f_{22}$ ، و غیره .

دراین صورت ، مشتقات ترکیب نسبت به t با فرمولهای زیر بیان می‌شوند :

$$\frac{df}{dt} = f_i \frac{du^i}{dt},$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = f_{ij}\frac{du^i}{dt}\ \frac{du^j}{dt} + f_i\frac{d^2u^i}{dt^2},$$

$$\frac{d^3f}{dt^3} = f_{ijk}\frac{du^i}{dt}\ \frac{du^j}{dt}\ \frac{du^k}{dt} + 3f_{ij}\frac{d^2u^i}{dt^2}\ \frac{du^j}{dt} + f_i\frac{d^3u^i}{dt^3}.$$

تحقیق کنید !

دیفرانسیل این تابع مساوی است با $df = f_i\, du^i$.

هرگاه متغیرهای u^1, u^2 توابعی از دو متغیر جدید $u^{1'}, u^{2'}$ باشند ، آنگاه ، بعد از گذاردن این تابعها به‌جای u^1, u^2 ، برای مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای $u^{1'}, u^{2'}$ داریم

$$f_{i'} = f_i \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}},$$

که درآن i و i' اندیسهای متفاوتی هستند که مقادیر 1 و 2 را مستقلا" می‌گیرند؛ i' دراینجا اندیس آزاد و i اندیس جمعبندی است.

همچنین،

$$f_{i'j'} = \frac{\partial}{\partial u^{j'}} f_{i'} = \frac{\partial}{\partial u^{j'}}\left(f_i \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u^{j'}} f_i\right)\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} + f_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'}\,\partial u^{j'}}$$

$$= f_{ij}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\,\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} + f_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'}\,\partial u^{j'}} = f_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\,\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} + f_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'}\,\partial u^{j'}}.$$

$$f_{i'j'k'} = f_{ijk}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\,\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\,\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}$$

$$+ f_{ij}\left[\frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'}\,\partial u^{j'}}\,\frac{\partial u^j}{\partial u^{k'}} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{j'}\,\partial u^{k'}}\,\frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{k'}\,\partial u^{i'}}\,\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\right] + f_i \frac{\partial^3 u^i}{\partial u^{i'}\,\partial u^{j'}\,\partial u^{k'}}.$$

۵۰۱۳ علایم کرونکر[1]

ما اغلب در محاسبات از علایم کرونکر $\delta_{ij}, \delta^{ij}, \delta_i^j$ استفاده خواهیم کرد. این علایم با فرمول زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{، اگر } i = j \\ 0 \text{، اگر } i \neq j \end{cases} \qquad (۲۰۱۵)$$

علایم کرونکر در اتحادهای زیر صدق می‌کنند:

$$\delta_i^j \delta_j^k = \delta_i^k, \qquad \delta_{ij}\delta^{jk} = \delta_i^k, \qquad (۳۰۱۵)$$

$$a_i \delta_j^i = a_j, \qquad (۴۰۱۵)$$

$$b^k \delta_k^i = b^i. \qquad (۵۰۱۵)$$

مثلا"، اتحاد آخر را ثابت می‌کنیم و اثبات دوتای دیگر را برای خواننده‌می‌گذاریم. طرف چپ این اتحاد، به‌ازای مقدار ثابتی از i، مجموع دو جمله است، یعنی $b^1\delta_1^i + b^2\delta_2^i$. دراین‌دو جمله، جمله‌ای که درآن اندیس پایینی در δ مخالف i است مساوی صفر است، و دیگری دارای مقدار $b^i 1 = b^i$ می‌باشد، و بدین ترتیب اتحاد ثابت می‌شود.

به بیان کلی، ضرب صوری یک تکجمله‌ای صوری دارای یک زیرنویس (یا بالانویس)

---

1. Kronecker

آزاد مانند i در δ_k^i (یا δ_i^k) یعنی همان تکجمله‌ای که درآن اندیس i با k عوض شده است؛ مثلاً "،

$$a_{ij}\delta_k^i = a_{kj},$$
$$\delta_k^i b^{ks} = b^{is},$$
$$a_{ij}^k \delta_r^i \delta_k^s = a_{rj}^s.$$

تمرین

۱ . اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$a_i^{jk}b_jc_k + a_i^{lm}b_lc_m + \delta_i^l a_l^{ks}b_kc_s - a_m^{jl}\,\delta_j^k\,\delta_l^s b_k \delta_i^m c_s = 2a_i^{jk}b_jc_k.$$

راهنمایی. ابتدا خود را از علایم کرونکر خلاص کرده، سپس اندیسهای جمعبندی را طوری تغییر دهید که همهٔ جمعوندها به‌یک شکل درآیند.

۲ . با این فرض که

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = g_{21} = 0, \qquad g_{22} = \cos^2(u^1),$$
$$g^{11} = 1, \qquad g^{12} = g^{21} = 0, \qquad g^{22} = \frac{1}{\cos^2(u^1)},$$

عبارت زیر را محاسبه نمایید :

$$g_{ij}g^{jk}, \qquad g_{ij}g^{ij}, \qquad g_{ij}\,\delta_1^i\,\delta_2^j, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial u^j}g_{kl}\right)g^{jk}.$$

باید مقادیر 1 و 2 را جداگانه به‌جای اندیسهای آزاد قرار داده، مقادیر تمام ترکیبات را پیدا کنیم (مثلاً "، چهارتا برای $g_{ij}g^{jk}$ ، یعنی $g_{1j}g^{j1}, g_{1j}g^{j2}, g_{2j}g^{j1}, g_{2j}g^{j2}$).

۳ . δ_i^i را پیدا کنید.

★ ۴.۱۵ تعمیم به ابعاد بالاتر

نمادهای به‌کاررفته دراینجا را می‌توان به‌آسانی برای هندسهٔ ابعاد بالاتر مناسب ساخت. اگربعد به‌جای 2 مساوی n باشد، همهٔ اندیسها مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را خواهند گرفت. تکرار یک اندیس به‌صورت زیرنویس و بالانویس در یک تکجمله‌ای بدین معنی است که جمعبندی روی اندیسی که تمام مقادیر را می‌گیرد انجام می‌شود؛ مثلاً "،

$$a_ib^i = a_1b^1 + a_2b^2 + \cdots + a_nb^n.$$

علایم کرونکر به‌همان صورت قبل تعریف می‌شوند، جز آنکه در اینجا اندیسها اعداد $1, 2, \ldots, n$ را اختیار می‌کنند.

تمام فرمولهای زیربخش پیش با این تغییر برد اندیسها برقرارند جز یکی، وآن‌در تمرین ۳ از ۳۰۱۵ است، که دراین وضع خواهیم داشت

$$\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^n = n \bigstar$$

۱۶ اولین فرم اساسی

۱۰۱۶ منحنیهای واقع بر یک سطح و بردارهای مماس

اگر یک منحنی پارامتری روی سطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ به‌مختصات منحنی الخط u^1, u^2 واقع باشد، مختصات منحنی‌الخط نقاط منحنی توابعی از پارامتر منحنی می‌شوند، و می‌توان مسیر، و یا بخشی از آن که درقلمرو اعتبار دستگاه مختصات موضعی سطح قرار دارد، را با معادلات

$$u^1 = u^1(t), \qquad u^2 = u^2(t) \tag{۱۰۱۶}$$

تعریف کرد.

معادلهٔ پارامتری منحنی در فضا با گذاردن این توابع در معادلهٔ سطح به‌جای u^1 و u^2 به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t)).$$

اگر نمایش پارامتری سطح و منحنی هر دو از کلاس C_r باشند، معادلهٔ اخیر نیز از کلاس C_r است. اگر، علاوه براین، نقطهٔ P_0 نظیر به مقدار t_0 از پارامتر، یک نقطهٔ منتظم پارامتری سازی سطح بوده و

$$[\dot{u}^1(t_0)]^2 + [\dot{u}^2(t_0)]^2 > 0,$$

P_0 یک نقطهٔ منتظم مسیر می‌باشد. درواقع، بردار مماس بر منحنی در P_0 خواهدبود:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \frac{du^i}{dt}(t_0)\mathbf{r}_i(u^1(t_0), u^2(t_0)). \tag{۲۰۱۶}$$

چون این نقطه یک نقطهٔ منتظم سطح است، دو بردار $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ درآن مستقل هستند. ضرایب $du^1/dt, du^2/dt$ همزمان صفر نیستند. بنابراین، $d\mathbf{r}(t_0)/dt \neq 0$. از تعویض مشتق با دیفرانسیل، که معادل ضرب دراسکالر دلخواه است، بردار مماس دیگری بر منحنی به‌دست می‌آید:

$$d\mathbf{r} = du^i\mathbf{r}_i. \tag{۳۰۱۶}$$

همانطور که دیدیم، بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ صفحهٔ مماس بر سطح را در $(u^1(t_0), u^2(t_0))$ معین می‌کنند. لذا، بردار مماس بر منحنی (۳۰۱۶) که ترکیبی خطی از $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ است، در صفحهٔ مماس‌قرار می‌گیرد. این بردار را یک بردار مماس بر سطح در نقطهٔ P_0 می‌نامیم.

حال می‌توان بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ را در یک نقطه از سطح، به‌عنوان پایهٔ یک فضای برداری از تمام بردارهای مماس بر سطح مزبور دراین نقطه به‌کار برد. بنابراین، هربردار مماس $\mathbf{a}$ براین سطح را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به‌شکل

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{r}_i$$

نمایش داد. واضح است که این پایه به‌وسیلهٔ مختصات منحنی‌الخط موضعی روی سطح مشخص می‌شود. از اینرو، اعداد a^1, a^2 را **مولفه‌های** بردار $\mathbf{a}$ نسبت به دستگاه مختصات منحنی الخط یا، اگر از قراین روشن باشد، فقط مولفه‌های بردار می‌گوییم.

لذا، می‌توان گفت که مولفه‌های بردار مماس بر منحنی (۱۰۱۶) عبارتند از $(du^1/dt, du^2/dt)$.

دومسیر $u^i = \phi^i(t),\ u^i = \psi^i(\tau)$ واقع بریک سطح، که درنقطه‌ای مانند $P_0 = (u_0^1, u_0^2)$ نظیربه مقادیر t_0 و τ_0 ازپارامترمشترکند (یعنی، $(\phi^i(t_0) = \psi^i(\tau_0))$)، دارای یک بردار مماس مشترک در P_0 هستند اگر و فقط اگر $\dot{\phi}^i(t_0) = \dot{\psi}^i(\tau_0)$.

از طرفی، هر بردار که بر صفحهٔ مماس در (u_0^1, u_0^2) واقع باشد به شکل $\mathbf{a} = a^i\mathbf{r}_i$ است؛ و درنتیجه، برمسیری‌واقع روی سطح مماس می‌باشد؛ مثلاً"، مسیر $u^i = u_0^i + a^i t$ در $t = 0$.

اگر مختصات منحنی‌الخط را طبق فرمول (۴۰۱۱) تغییر دهیم، پایهٔ صفحهٔ مماس نیز تغییر می‌کند، و این به‌نوبهٔ خود موجب تغییر مختصات بردار مماس مفروض می‌شود. درمورد بردارهای پایه داریم

$$\mathbf{r}_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\mathbf{r}_i, \qquad \mathbf{r}_i = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\mathbf{r}_{i'},$$

که از آنجا

$$\mathbf{a} = a^{i'}\mathbf{r}_{i'} = a^i\mathbf{r}_i = a^i\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\mathbf{r}_{i'}.$$

این رابطه، بجهت استقلال بردارهای $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$، ایجاب می‌کند که

$$a^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}a^i, \tag{۴۰۱۶}$$

که مولفه‌های‌بردار $\mathbf{a}$ رادر دستگاه جدید برحسب مولفه‌های مختصات قدیم بیان می‌کند. این‌کار را می‌توان به‌صورت دیگر نیز انجام داد؛ یعنی، به‌صورت

$$a^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}a^{i'}. \tag{۵۰۱۶}$$

توجه کنیدکه بردار مماس دریک نقطه از سطح ممکن است مساوی هیچ بردارمماس‌در نقطهٔ دیگر نباشد. لذا، برای بررسی بردارهای مماس بریک سطح، باید تصریح شود که این بردارها در چه نقطه‌ای مماسند. به‌عبارت دیگر، ما آنها را بردارهای وابسته به یک نقطه درنظر می‌گیریم نه به‌صورت بردارهای آزاد.

امثله و تمرین

۱. بردار مماس بر دایرهٔ عرض جغرافیایی ثابت $\theta = \theta_0$ = روی کرهٔ $x = a\cos\theta\cos\phi,\ y = a\cos\theta\sin\phi,\ z = a\sin\theta$ در نقطهٔ (θ_0, ϕ_0) به شکل زیر است:

$$\lambda \mathbf{r}_\phi(\theta_0, \phi_0) = \lambda\{-a\cos\theta_0\sin\phi_0, a\cos\theta_0\cos\phi_0, 0\}.$$

مولفه‌های آن در مختصات منحنی الخط موضعی عبارتند از $\{0, \lambda\}$.به‌همین ترتیب، بردار مماس بر نصف النهار دراین نقطه مساوی

$$\mu\{-a\sin\theta_0\cos\phi_0, -a\sin\theta_0\sin\phi_0, a\cos\theta_0\}$$

بوده، و مولفه‌های آن در مختصات منحنی‌الخط عبارتند از $\{\mu, 0\}$.

۲. همان دایرهٔ عرض جغرافیایی دارای معادلهٔ

$$u = a\tan\left(\frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta_0}{2}\right)\cos t, \qquad v = a\tan\left(\frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta_0}{2}\right)\sin t$$

در مختصات ذکر شده در تمرین ۹ از ۳۰۱۱ است. لذا، مولفه‌های بردار مماس در این مختصات عبارتند از

$$\left\{-a\tan\left(\frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta_0}{2}\right)\sin t_0, a\tan\left(\frac{\pi}{\mu} + \frac{\theta_0}{2}\right)\cos t_0\right\}.$$

این مطلب را ثابت کنید!

۳. ثابت کنید که نصف‌النهار ثابت $\phi = \phi_0$ = دارای معادلات $u = t\cos\phi_0, v = t\sin\phi_0$ در مختصات u, v تمرین ۹ از ۳۰۱۱ روی کره است.

۴. راستای منحنی $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$ در یک نقطه با نسبت $du^1 : du^2$ مشتقات یا دیفرانسیلها معین می‌شود تا خود مشتقات $\dot{u}^1, \dot{u}^2$، زیرا ضرب هر دوی آنها در یک عدد طول و، احتمالا"، جهت بردار مورد نمایش آنها را تغییر می‌دهداماراستای خطی را که بردار بر آن واقع است تغییر نمی‌دهد.

۵. تابع حقیقی $f(P)$ تعریف شده در تمام نقاط یک همسایگی نقطهٔ P_0 واقع بر یک سطح از کلاس C_k $(k \geq 1)$ را درنظر می‌گیریم. این تابع در یک دستگاه مختصات موضعی مانند (u^1, u^2) با یک تابع حقیقی دو متغیره، که آن را با همان حرف ولی به

صورت $f(u^1, u^2)$ نشان می‌دهیم، نموده می‌شود. روی سطح مزبور، یک منحنی با بردار مماس $\mathbf{a}$ در P_0 در نظر می‌گیریم. نقطه‌ای مانند P از این سطح به پارامتر t منحنی بستگی دارد؛ یعنی، $P = P(t)$. بنابراین، $\phi(t) = f(P(t))$ یک تابع حقیقی از t است. نشان دهید که اگر تابع $f(u^1, u^2)$ در $P_0 = P(t_0)$ مشتقپذیر بوده، وبردار $\mathbf{a}$ در دستگاه مختصات موضعی دارای مولفه‌های $\{a^1, a^2\}$ باشد، مشتق ϕ در t_0 مساوی است با

$$\frac{d\phi}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0^1, u_0^2)a^i.$$

درنتیجه، این‌مشتق به منحنی بستگی ندارد بلکه فقط تابع بردار مماس $\mathbf{a}$ است. همچنین، ثابت کنید این مشتق به دستگاه مختصات موضعی نیز بستگی ندارد.

۶. با بردار ثابت $\mathbf{a}$ و تابع متغیر f، در تمرین پیش به هر تابع مشتقپذیر f یک‌عدد حقیقی مربوط می‌شود. این نگاشت از مجموعهٔ توابع مشتقپذیر بتوی مجموعهٔ اعداد حقیقی یک **تابعی** نامیده می‌شود. مقدار نظیر به تابع f را با $X_{\mathbf{a}}f$ نشان می‌دهیم. خواص تابعی $X_{\mathbf{a}}$ مذکور در زیر را ثابت کنید:

$$X_{\mathbf{a}}(f + g) = X_{\mathbf{a}}f + X_{\mathbf{a}}g\,,$$
$$X_{\mathbf{a}}(\alpha f) = \alpha X_{\mathbf{a}}f, \qquad \alpha = \text{ثابت}\,,$$
$$X_{\mathbf{a}}(f \cdot g) = (X_{\mathbf{a}}f) \cdot g(P_0) + f(P_0)X_{\mathbf{a}}g.$$

تابعیهای برخوردار از این خواص **اشتقاق** نامیده می‌شوند. ثابت کنید که اشتقاق $X_{\mathbf{a}}$، به‌ازای $\mathbf{a} = \mathbf{r}_i$، با مشتق جزئی نسبت به u^i یکی است؛ یعنی، $X_{\mathbf{r}_i}f = (\partial f/\partial u^i)(u_0^1, u_0^2)$.

۷. اگر X و Y دو اشتقاق در P_0 بوده و α یک عدد حقیقی باشد، مجموع $X + Y$ و حاصل ضرب αX را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر f،

$$(X + Y)f = Xf + Yf, \qquad (\alpha X)f = \alpha Xf.$$

ثابت کنید که‌اشتقاقها یک فضای خطی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید نگاشت

$$\mathbf{a} \to X_{\mathbf{a}}$$

ازفضای مماس‌در P_0 بتوی‌فضای‌اشتقاقهادر P_0 یک تبدیل خطی است که بردارهای مستقل را به بردارهای مستقل می‌برد.

★ **تبصره.** این‌نگاشت، درصورتی‌که‌سطح وتوابع ازکلاس C_∞ باشند، یک‌ایزومرفیسم

فضاهای‌خطی‌است .این‌امرتعریف بردارهای مماس در P_0 رابه‌عنوان اشتقاقها در P_0 ممکن‌می‌سازد.این روش، با آنکه کمتر شهودی است ، ولی دارای محسنات فنی بوده و درحال‌حاضر در هندسهٔ دیفرانسیل از آن خیلی استفاده می‌شود . ★

★ ۲.۱۶ بردارهای مماس درچندگوناهای دیفرانسیل

این امر کـه هر بردار مماس بر یک سطح را می‌توان به‌عنوان یک بردار مماس بر یک مسیر روی سطح ، یـا خانواده‌ای از مسیرها با یک نقطهٔ مشترک و مشتقات مساوی در این نقطه ، مشخص کـرد ، به‌ما اجازهٔ تعمیم مفهوم بردار مماس به‌چندگوناهای دیفرانسیل مجرد را می‌دهد .

چون تحدید به ابعاد دو تعمیم را ساده‌تر نمی‌کند ، تعمیم را برای‌حالت کلی‌چند‌گونای n بعدی بیان می‌کنیم . بنابراین ، اندیسهای ما دراین بخش مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را اختیار خواهند کرد .

نگاشت‌پیوستهٔ ϕ ازبازهٔ $[0, \alpha]$ بتوی‌چندگونای M یک‌**مسیر در M** نامیده می‌شود. نقشها ، به‌ازای یک همسایگی به‌قدر کافی کوچک از $t_0 \in [0, \alpha]$ ، دریک همسایگی مختصات نقطهٔ $\phi(t_0)$ قرار می‌گیـرند ؛ درنتیجه ، نگاشت را دراین همسایگی می‌توان در مختصات موضعی با معادله‌ای به شکل

$$u^i = \phi^i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

نشان داد . اگر این توابع در t_0 مشتق پیوسته داشته باشند ، می‌گوییم مسیر از کلاس C_1 است . به‌ازای $t_0 = 0$ و $t_0 = 1$ ،به‌ترتیب از مشتقات راست و چپ استفاده خواهیم کرد .

دو مسیر ϕ و ψ از کلاس C_1 راکه‌ازنقطهٔ P_0 می‌گذرند (یعنی، $\phi(0) = \psi(0) = P_0$) **هم‌ارز** گوییم اگر $\dot\phi^i(0) = \dot\psi^i(0)$.کلاس‌هم‌ارزی‌تحت‌این‌رابطهٔ‌هم‌ارزی‌یک‌بردارمماس چند‌گونا در P_0 نامیده مـی‌شود . همچنین ، می‌گوییم این بردار بر هر یک از مسیرهای کلاس هم‌ارزی‌درمبداء مسیرمماس است . برای‌توجیه این تعریف ، باید استقلال رابطهٔ‌هم‌ارزی رااز دستگاه مختصات موضعی مجاز در P_0 ، که با کاربردساده‌ای‌از قاعدهٔ زنجیره‌ای‌برای مشتقگیری از ترکیب توابع صورت می‌گیرد ، اثبات کرد .

جمع بردارهای مماس در P_0 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم . فرض‌کنیم بردار $\mathbf{v}$ با مسیر ϕ و $\mathbf{w}$ با ψ نموده‌شده‌باشند ،و $u^i = \phi^i(t), u^i = \psi^i(t) (0 \le t \le \beta)$ نمایشهای‌موضعی این مسیرها در مختصـات موضعی ثـابتی در یکـی‌از همسایگیهای نقطهٔ P_0 به مختصات $u_0^i = \phi^i(0) = \psi^i(0)$ باشند . $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ را کـلاس‌هم‌ارزی مسیری تعریف می‌کنیم که‌نمایشش در همان مختصات مـوضعی $\phi^i(t) + \psi^i(t) - u_0^i, t \in [0, \beta]$ است . باید اعتبار این تعریف

را با اثبات استقلالش از نماینده‌های ϕ و ψ و دستگاه مختصات موضعی ثابت کنیم .

همچنین ، بردار $\lambda \mathbf{v}$ ، که $\mathbf{v}$ با معادلات $u^i = \phi^i(t)$ نموده شده ، را کلاس هم‌ارزی مسیری به معادلات $u^i = \phi^i(\lambda t)$ تعریف می‌کنیم . با اعمالی که اینگونه تعریف شدند ، بردارهای مماس در P_0 یک فضای برداری n بعدی به‌نام **فضای مماس** برچندگونا در P_0 را تشکیل می‌دهند . هر دستگاه مختصات موضعی در همسایگی P_0 یک پایهٔ طبیعی ازفضای مماس در P_0 را القا می‌کند . این پایه از بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ تشکیل شده ، که $\mathbf{e}_j$ بردار مماس بر مسیر نموده شده با معادلهٔ

$$u^i = \delta^i_j t + u^i_0$$

است ، که دراین معادله u^i_0 مختصات نقطهٔ P_0 می‌باشند .

اگر مختصات موضعی به‌صورت زیر تغییر کنند :

$$u^i = u^i(u^{1'}, \ldots, u^{n'}), \tag{۶.۱۶}$$

بردارهای پایهٔ طبیعی طبق فرمولهای

$$\mathbf{e}_{k'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \mathbf{e}_k, \tag{۷.۱۶}$$

و مولفه‌های بردار مماس طبق فرمولهای زیر تغییر خواهند کرد :

$$a^{k'} = \frac{\partial u^{k'}}{\partial k^k} a^k. \tag{۸.۱۶}$$

در واقع ، معادلهٔ مسیر $u^{i'} = \delta^{i'}_{k'} t + u^{i'}_0$ در مختصات قدیم مساوی است با

$$u^k = u^k(\delta^{1'}_{k'} t + u^{1'}_0, \ldots, \delta^{n'}_{k'} t + u^{n'}_0).$$

بنابراین ، مولفه‌های بردار مماس $\mathbf{e}_{k'}$ این مسیر در مختصات قدیم برابر می‌شود با

$$\frac{du^k}{dt} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}} \delta^{j'}_{k'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}},$$

و (۷.۱۶) فورا" نتیجه خواهد شد . اثبات فرمولهای (۸.۱۶) به‌خواننده محول می‌شود .

همچنین ، می‌توان تعریف بردار مماس دریک نقطه را برحسب اشتقاقها ، به‌صورتی که در تمرینات ۵ ، ۶ ، و ۷ بخش پیش توصیف شده ، به چندگوناهای دیفرانسیل تعمیم داد . ★

۳.۱۶ طول قوس یک منحنی واقع بر یک سطح

روی سطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ یک منحنی به معادلات پارامتری

$$u^1 = u^1(t), \qquad u^2 = u^2(t), \qquad a \le t \le b \tag{۹۰۱۶}$$

را درنظر می‌گیریم . معادلهٔ این منحنی در فضا به‌شکل $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$ می‌باشد .

قضیه . ***طول قوس منحنی (۹۰۱۶) بین $t = a$ و $t = b$ برابر است با***

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\,\frac{du^j}{dt}}\,dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\,du^i\,du^j}, \tag{۱۰۰۱۶}$$

که درآن du^i, du^j دیفرانسیلهای تابع (۹۰۱۶) بوده، و

$$g_{ij}(u^1, u^2) = \mathbf{r}_i(u^1, u^2)\mathbf{r}_j(u^1, u^2). \tag{۱۱۰۱۶}$$

برهان . طبق قضیهٔ زیر بخش ۵۰۳ ، داریم

$$s = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| ds \quad \text{یا} \quad s = \int_a^b |d\mathbf{r}| .$$

حال می‌پردازیم به محاسبهٔ مربع $d\mathbf{r}$. داریم

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 du^1 + \mathbf{r}_2 du^2 = \mathbf{r}_i du^i,$$

$$ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = (\mathbf{r}_i du^i)^2 = \mathbf{r}_i du^i \mathbf{r}_j du^j = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j du^i du^j,$$

که درآن مشتقات جزئی $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{r}_j$ فقط به متغیرهای u^1, u^2 وابسته‌اند ولی ازدیفرانسیلهای du^1, du^2 مستقل می‌باشند . علاوه براین ، با معرفی نماد (۱۱۰۱۶) ، داریم

$$ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = g_{ij} du^i du^j \tag{۱۲۰۱۶}$$

یا

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2,$$

که فوراً (۱۰۰۱۶) را نتیجه خواهد داد .

۴۰۱۶ اولین فرم اساسی یک سطح

طرف راست فرمول (۱۲۰۱۶) یک فرم درجهٔ دوم از دیفرانسیلهای du^1, du^2 است . این فرم را ***اولین فرم اساسی*** یا ***فرم متری*** سطح می‌نامیم . اگر du^1 و du^2 با هم صفر نباشند ، و نقطهٔ (u^1, u^2) از سطح نقطهٔ منتظم باشد ، فرم درجهٔ دوم (۱۲۰۱۶) دارای مقدار مثبت است ، زیرا این فرم درجهٔ دوم مساوی مربع طول بردار ناصفر $\mathbf{r}_i du^i$ است . درنتیجه، اولین فرم اساسی در یک نقطهٔ منتظم سطح یک فرم درجهٔ دوم معین مثبت می‌باشد . ضرایب g_{ij} موجود درفرم متری توابعی هستند از کلاسی که از کلاس سطح یکی کمتراست .

از فرمولهای (۱۱۰۱۶) نتیجه می‌شود که این ضرایب نسبت به اندیسها متقارن

هستند ؛ یعنی ،

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

این ضرایب ماتریس 2×2 متقارن زیر را می‌سازند :

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \qquad (۱۳۰۱۶)$$

که دترمینان آن ، به‌نام **مبین اولین فرم اساسی** ، با g نموده می‌شود ؛ یعنی ،

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}. \qquad (۱۴۰۱۶)$$

در نقاط منتظم پارامتری سازی سطح ، همواره داریم $g_{11} > 0$ ، $g_{22} > 0$ ، و $g > 0$.
عناصر ماتریس معکوس (۱۳۰۱۶) به‌وسیلهٔ g^{ij} با بالانویس نموده می‌شوند : یعنی ،

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1}.$$

این ماتریس متقارن نیز هست :

$$g^{ij} = g^{ji}.$$

چون

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

داریم

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j. \qquad (۱۵۰۱۶)$$

همچنین ، می‌توان مستقیما" حساب کرد که

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \qquad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}. \qquad (۱۶۰۱۶)$$

و نیز ، برای کاربردهای آتی ، ملاحظه می‌کنیم که

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2 = g. \qquad (۱۷۰۱۶)$$

در واقع ،

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2\mathbf{r}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

این برهان دیگری است از اینکه در نقاط منتظم $g > 0$.

امثله و تمرین

در مثالهای زیر ، محاسبات را کامل کنید .

۱ . صفحه در مختصات دکارتی متعامد یکهٔ x, y دارای اولین فرم اساسی

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

است ، که از آنجا $g_{11} = g_{22} = 1$ ، $g_{12} = 0$ ، و $g^{11} = g^{22} = 1$ ، $g^{12} = 0$.

۲ . اولین فرم اساسی صفحه در مختصات قطبی ρ, ϕ عبارت است از

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \, d\phi^2.$$

در نتیجه ،

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = g_{21} = 0, \qquad g_{22} = \rho^2, \qquad g = \rho^2,$$
$$g^{11} = 1, \qquad g^{12} = g^{21} = 0, \qquad g^{22} = \rho^{-2}.$$

۳ . کره در مختصات کروی θ, ϕ دارای معادلات پارامتری زیر است (مثال ۲ ، زیربخش ۳۰۱۱):

$$x = a\cos\theta\cos\phi, \qquad y = a\cos\theta\sin\phi, \qquad z = a\sin\theta,$$

که از آنجا

$$x_\theta = -a\sin\theta\cos\phi, \qquad y_\theta = -a\sin\theta\sin\phi, \qquad z_\theta = a\cos\theta,$$
$$x_\phi = -a\cos\theta\sin\phi, \qquad y_\phi = a\cos\theta\cos\phi, \qquad z_\phi = 0,$$
$$g_{11} = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = a^2, \qquad g_{12} = g_{21} = x_\theta x_\phi + y_\theta y_\phi + z_\theta z_\phi = 0,$$
$$g_{22} = x_\phi^2 + y_\phi^2 + z_\phi^2 = a^2\cos^2\theta,$$

لذا ، اولین فرم اساسی مساوی است با

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\phi^2)$$

و

$$g_{11} = a^2, \qquad g_{12} = g_{21} = 0, \qquad g_{22} = a^2\cos\theta,$$
$$g = a^4\cos^2\theta, \qquad g^{11} = \frac{1}{a^2}, \qquad g^{12} = g^{21} = 0, \qquad g^{22} = \frac{1}{a^2\cos^2\theta}.$$

۴ . در مورد پارامتری سازی u, v مثال ۹ ، زیربخش ۳۰۱۱ ، داریم

$$g_{11} = g_{22} = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}, \qquad g_{12} = 0, \qquad g = \frac{256a^8}{(4a^2 + u^2 + v^2)^4},$$
$$g^{11} = g^{22} = \frac{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}{16a^4}, \qquad g^{12} = 0,$$

لذا ، اولین فرم اساسی مساوی است با

$$ds^2 = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2).$$

۵ . اولین فرم اساسی سطح دوار (۹۰۱۱)

$$x = f(u)\cos v, \qquad y = f(u)\sin v, \qquad z = h(u)$$

مساوی است با

$$ds^2 = (f'^2 + h'^2)\,du^2 + f^2\,dv^2,$$

و

$$g_{11} = f'^2 + h'^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = f^2, \quad g = f^2(f'^2 + h'^2),$$

$$g^{11} = \frac{1}{f'^2 + h'^2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{f^2}.$$

۶ . بالاخص، اولین فرم اساسی زنجیرگون (۱۱۰۱۱)

$$x = a\cosh\frac{u^1}{a}\cos u^2, \quad y = \cosh\frac{u^1}{a}\sin u^2, \quad z = u^1$$

برابر است با

$$ds^2 = \cosh^2\frac{u^1}{a}[(du^1)^2 + a^2(du^2)^2].$$

بنابراین،

$$g_{11} = \cosh^2\frac{u^1}{a}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2\cosh^2\frac{u^1}{a},$$

$$g = a^2\cosh^4\frac{u^1}{a}, \quad g^{11} = \frac{1}{\cosh^2(u^1/a)}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{a^2\cosh^2(u^1/a)}.$$

۷ . اولین فرم اساسی کره‌نمای (۱۲۰۱۱)

$$x = a\sin u^1\cos u^2, \quad y = a\sin u^1\sin u^2, \quad z = a\left(\cos u^1 + \ln\tan\frac{u^1}{2}\right)$$

مساوی است با

$$ds^2 = a^2[\cot^2 u^1(du^1)^2 + \sin^2 u^1(du^2)^2].$$

بنابراین،

$$g_{11} = a^2\cot^2 u^1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2\sin^2 u^1,$$

$$g = a^4\cos^2 u^1, \quad g^{11} = \frac{\tan^2 u^1}{a^2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{a^2\sin^2 u^1}.$$

۸ . اولین فرم اساسی مارپیچ گون (۱۳۰۱۱)

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av$$

برابر است با

$$ds^2 = du^2 + [u^2 + a^2]\,dv^2.$$

بنابراین،

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = u^2 + a^2, \quad g = u^2 + a^2.$$

g^{ij} را پیدا نمایید .

۹ . یک سطح گستردنی با یال بازگشت $\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1)$ ، که u^1 پارامتر قوس یال بازگشت $\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1)$ است ، دارای معادلهٔ پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{p}'(u^1) = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{t}(u^1)$$

است ، که درآن $\mathbf{t}(u^1)$ بردار یکهٔ مماس یال می‌باشد . درنتیجه ،

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{t}(u^1) + u^2\kappa(u^1)\mathbf{n}(u^1), \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{t}(u^1)$$

($\kappa(u^1)$ انحنا و $\mathbf{n}(u^1)$ بردار قائم اصلی یال است) . بنابراین ، داریم

$$g_{11} = 1 + (u^2)^2\kappa^2, \qquad g_{12} = g_{21} = 1, \qquad g_{22} = 1, \qquad g = (u^2)^2\kappa^2,$$

$$g^{11} = \frac{1}{(u^2)^2\kappa^2}, \qquad g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{(u^2)\kappa^2}, \qquad g^{22} = 1 + \frac{1}{(u^2)^2\kappa^2},$$

و اولین فرم اساسی مساوی است با

$$ds^2 = (1 + (u^2)^2\kappa^2)(du^1)^2 + 2\,du^1\,du^2 + (du^2)^2.$$

توجه کنید که ضرایب این فرم فقط به انحنای یال بازگشت بستگی دارند ، و از تاب مستقل می‌باشند .

۱۰ . چنبرهٔ

$$x = (b + a\cos u^1)\cos u^2, \qquad y = (b + a\cos u^1)\sin u^2, \qquad z = a\sin u^1$$

دارای اولین فرم اساسی

$$ds^2 = a^2(du^1)^2 + (b + a\cos u^1)^2(du^2)^2$$

است ؛ پس

$$g_{11} = a^2, \qquad g_{12} = g_{21} = 0, \qquad g_{22} = (b + a\cos u^1)^2,$$

$$g = a^2(b + a\cos u^1)^2, \qquad g^{11} = \frac{1}{a^2}, \qquad g^{12} = g^{21} = 0, \qquad g^{22} = \frac{1}{(b + a\cos u^1)^2}.$$

۱۱ . اولین فرم اساسی سطوح زیر را بیابید :

(آ) بیضی گون

$$x = a\cos u^1\cos u^2, \qquad y = b\cos u^1\sin u^2, \qquad z = c\sin u^1;$$

(ب) سهمی‌گون هذلولوی

$$x = a(u^1 + u^2), \qquad y = b(u^1 - u^2), \qquad z = u^1u^2;$$

(پ) سطح

$$x = u^1e^{au^2}\cos u^2, \qquad y = u^1e^{au^2}\cos u^2, \qquad z = f(u^1)e^{au^2},$$

که درآن $f(u^1)$ تابعی از کلاس C_1 است .

۵.۱۶ طول بردار مماس. زاویهٔ بین بردارها و بین منحنیهای روی یک سطح

همانطور که در ۱.۱۶ دیدیم ، بردار مماس $\mathbf{a}$ در نقطهٔ (u^1, u^2) از یکسطح را می‌توان به‌وسیلهٔ مولفه‌هایش (a^1, a^2) نسبت به دستگاه مختصات منحنی‌الخط مشخص کرد ؛ یعنی ،

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{r}_i.$$

مربع طول این بردار برابر است با

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^2 = (a^i \mathbf{r}_i)^2 = a^i \mathbf{r}_i a^j \mathbf{r}_j = a^i a^j (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) = g_{ij} a^i a^j$$

یا

$$|\mathbf{a}|^2 = g_{ij} a^i a^j. \qquad (۱۸.۱۶)$$

حاصل ضرب اسکالر دو بردار مماس $\mathbf{a} = a^i \mathbf{r}_i$, $\mathbf{b} = b^i \mathbf{r}_i$ در یک نقطه مساوی است با

$$\mathbf{ab} = (a^i \mathbf{r}_i)(b^j \mathbf{r}_j) = a^i b^j \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = g_{ij} a^i b^j$$

یا ، بالاخره ،

$$\mathbf{ab} = g_{ij} a^i b^j. \qquad (۱۹.۱۶)$$

اگر زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a} = a^i \mathbf{r}_i$ و $\mathbf{b} = b^i \mathbf{r}_i$ مساوی ϕ باشد ، برای $\cos\phi = \mathbf{ab}/(|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|)$ فرمولهای زیر را خواهیم داشت :

$$\cos\phi = \frac{g_{ij} a^i b^j}{\sqrt{g_{ij} a^i a^j}\sqrt{g_{ij} b^i b^j}}. \qquad (۲۰.۱۶)$$

دو منحنی

$$u^1 = \psi^1(\tau), \quad u^2 = \psi^2(\tau) \quad \text{و} \quad u^1 = \phi^1(t), \quad u^2 = \phi^2(t) \qquad (۲۱.۱۶)$$

از کلاس C_1 را روی سطح درنظر می‌گیریم که از نقطهٔ مشترک P_0 به مختصات $u_0^i = \phi^i(t_0) = \psi^i(\tau_0)$ می‌گذرند . فرض کنیم du^i و δu^i دیفرانسیلها در راستای این منحنیها باشند ؛ یعنی ، دراین نقطهٔ مشترک ،

$$du^i = \frac{d\phi^i}{dt}\,dt, \qquad \delta u^i = \frac{d\psi^i}{d\tau}\,d\tau. \qquad (۲۱.۱۶)$$

دراین صورت ، بردارهای

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_i\,\delta u^i \quad \text{و} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i\,du^i$$

به‌ترتیب بر دو منحنی در نقطهٔ P_0 مماسند ، و ، با استفاده از (۲۰.۱۶) ، قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید.

قضیه. *زاویهٔ ϕ بین مسیرهای (۲۱.۱۶) روی یک سطح در معادلهٔ*

$$\cos\phi = \frac{g_{ij}\,du^i\,\delta u^j}{\sqrt{g_{ij}\,du^i\,du^j}\sqrt{g_{ij}\,\delta u^i\,\delta u^j}} \qquad (۲۲.۱۶)$$

صدق می‌کند .

اگر زاویهٔ بین منحنیهای بی‌جهت به‌جای مسیرهای جهتدار مورد نظر باشد ، باید طرف راست (۲۲۰۱۶) را بـا قدر مطلقش عوض کرد ، و ، دراین صورت ، ϕ زاویهٔ حادهٔ بین منحنیها می‌باشد . دراین حالت ، می‌توان دیفرانسیلهای $du^1, du^2 ; \delta u^1, \delta u^2$ را دلخواه گرفت جـز اینکه باید در معادلات منحنی نظیر صدق کنند ؛ به‌عبارت دیگر ، می‌توان به dt و $d\tau$ در (۲۱۰۱۶′) مقادیر ناصفر کاملاً دلخواه داد . اگر بخواهیم ϕ زاویهٔ بین منحنیهای جهتدار (درنتیجه ، یک زاویهٔ حاده یا منفرجه ، بسته به جهت) باشد ، باید (۲۲۰۱۶) را همـانطور که هست به‌کار بریم و dt و $d\tau$ در (۲۱۰۱۶′) را فقط به‌مقادیر مثبت محدود کنیم .

بالاخص ، اگر منحنی اول u^1 ــ خط و منحنی دوم u^2 ــ خط باشد ، می‌توان هرمقدار مثبت را برای du^1 اختیار کرد درحالی که $du^2 = 0$ ، و ، به‌همین ترتیب ، هر مقدارمثبت برای δu^2 برگزید درحالی که $\delta u^1 = 0$ ؛ مثلاً ،

$$du^1 = 1, \qquad du^2 = 0, \qquad \delta u^1 = 0, \qquad \delta u^2 = 1.$$

فرمول (۲۲۰۱۶) عبارت زیر را برای زاویهٔ ω بین خطوط مختصات به‌دست می‌دهد :

$$\cos\omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \qquad (۲۳۰۱۶)$$

از ایـن فرمول معلوم می‌شود که **خطوط مختص در هر نقطهٔ (u^1, u^2) دو بدو متعامدند *اگر و فقط اگر* در آن نقطه**

$$g_{12} = 0. \qquad (۲۴۰۱۶)$$

اگر خطوط مختـص در هـر نقطه متعـامد باشند ، می‌گوییم مختصات منحنی الخط متعامد هستند . در مورد مختصـات منحنی الخـط متعامد ، (۲۴۰۱۶) یک اتحاد است و اولین فرم اساسی شکل زیر را خواهد داشت :

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2.$$

امثله وتمرین

۱ . مختصات دکارتی متعـامد در صفحـه و نیز مختصات قطبی نمونه‌هایی از مختصات متعامد هستند . همچنین است هر سه پارامتری سازی کره که در ۳۰۱۱ درنظر گرفته شد (مثالهای ۲ ، ۴ ، ۹ ، ۱۰) . این مطلب ، درحالت کلی ، برای مختصات منحنی الخط روی سطـوح دوار مذکور در همان زیر بخش (مثال ۳) نیز درست است . این

امر را می‌توان فورا" از اولین فرمهای اساسی نظیر در ۴۰۱۶ دریافت.

۲ . **مسیرهای همزاویهٔ یک خانواده از منحنیها روی سطح**

یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیها را روی سطح درنظر می‌گیریم . یک **مسیر همزاویهٔ** این خانواده منحنیی است که تمام منحنیهای این خانواده را در زاویهٔ ثابت $\alpha \neq 0$ قطع می‌کند . درحالت خاص $\alpha = \pi/2$ ، منحنی یک **مسیر قائم** نامیده می‌شود .

دیفرانسیلهادرراستای‌منحنیهای خانواده را با δu^i ، و دیفرانسیلهادرراستای‌مسیر همزاویه که باید پیدا شوند را با du^i نشان می‌دهیم . دراین صورت ، معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{|g_{ij}\,\delta u^i\,du^j|}{\sqrt{g_{ij}\,du^i\,du^j}\sqrt{g_{ij}\,\delta u^i\,\delta u^j}} = \cos\alpha;$$

یا ، معادلا" ،

$$(g_{ij}\,\delta u^i\,du^j)^2 = g_{ij}\,du^i\,du^j\,g_{kl}\delta u^k\,\delta u^l\cos^2\alpha,$$

که درآن α زاویهٔ ثابت بوده ، و $\delta u^1, \delta u^2$ به‌وسیلهٔ معادلات خانواده با تقریب یک ضریب ثابت تعیین می‌شوند . لذا ، این معادله یک معادلهٔ دیفرانسیل است که برحسب دیفرانسیلهای du^1, du^2 بیان شده‌است . جواب را می‌توان به شکل یک‌بستگی تابعی یکی از متغیرهای u^i به دیگری ، یا یک بستگی ضمنی بین آنها ، و یا به شکل پارامتری‌که درآن هر دو متغیر u^i توابعی از یک پارامتر کمکی هستند ، جستجوکرد . معادله نسبت به دیفرانسیلها از درجهٔ دوم است ؛ از اینرو ، با دو معادلهٔ درجهٔ اول معادل می‌باشد . جواب هریک از آنها شامل یک ثابت انتگرالگیری است . بنابراین ، درحالت کلی ، دو خانوادهٔ یک پارامتری از مسیرهای همزاویه خواهیم داشت .

درحالت خاص که مسیر قائم است ، معادلهٔ دیفرانسیل ساده‌تر می‌شود ،

$$g_{ij}\,du^i\,\delta u^j = 0,$$

و فقط یک خانواده از مسیرهای قائم به‌دست می‌آید .

۳ . مسیرهای همزاویهٔ خانوادهٔ خطوط جاری استوانهٔ مستدیر

$$x = a\cos u^1, \qquad y = a\sin u^1, \qquad z = u^2$$

را پیدا کنید .

★**حل** . خطوط جاری عبارتند از u^2 ـ منحنیها (ثابت = u^1) لذا ، می‌توان قرار داد $\delta u^1 = 0,\ \delta u^2 = 1$. اولین فرم اساسی استوانه مساوی است با

$$ds^2 = a^2(du^1)^2 + (du^2)^2 = 0,$$

و معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای همزاویه برابر است با

$$\frac{|du^2|}{\sqrt{a^2(du^1)^2 + (du^2)^2}} = \cos\alpha$$

یا

$$du^2 = \pm\cos^2\alpha\sqrt{a^2(du^1)^2 + (du^2)^2}$$

همچنین، داریم

$$\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 = a^2\cos^2\alpha + \left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2\cos^2\alpha,$$

$$(1 - \cos^2\alpha)\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 = a^2\cos^2\alpha, \qquad \frac{du^2}{du^1} = \pm a\cot\alpha,$$

که از آنجا

$$u^2 = \pm au^1\cot\alpha + C.$$

بنابراین، معادلات مسیرها در فضا برابرند با

$$x = a\cos u^1, \qquad y = a\sin u^1, \qquad z = \pm(a\cot\alpha)u^1 + C.$$

بدیهی است که این مسیرها مارپیچ هستند. یک خانواده $(+)$ از مارپیچهای راست گرد، و دیگری $(-)$ از مارپیچهای چپ گرد تشکیل شده است.

درحالت خاص مسیرهای قائم $\alpha = \pi/2, \cot\alpha = 0$، دوخانواده برهم منطبق می‌شوند، و مسیرها دوایر $z = c$ می‌باشند. ★

۴ . مسیرهای همزاویهٔ نصف النهارات یک کره را بیابید (آنها را **خطوط مایل یا خطوط اریب** می‌نامند).

۵ . ثابت کنید که روی یک سطح با اولین فرم اساسی $ds^2 = (du^1)^2 + G(u^1, u^2)(du^2)^2$، دو خانوادهٔ یک پارامتری (از منحنیها) تعریف شده با معادلات دیفرانسیل $du^1 + \sqrt{G}\,du^2 = 0$ و $du^1 - \sqrt{G}\,du^2 = 0$ یکدیگر را در زوایای قائمه قطع می‌کنند.

۶ . بەازای چه تابع f خطوط مختص سطح زیربخش ۴.۱۶، تمرین ۱۱ پ، متعامدند؟

۷ . برای زاویهٔ بین دو منحنی ثابت $= \phi(u^1, u^2)$ و ثابت $= \psi(u^1, u^2)$ یک فرمول بیابید.

۸ . مسیرهای همزاویهٔ نصف النهارات یک چنبره را بیابید. بەازای چه زوایایی این مسیرها منحنیهایی بسته هستند؟

۶.۱۶ تغییر مختصات منحنی‌الخط

واضح است که ضرایب g_{ij} اولین فرم اساسی یک سطح به مختصات منحنی‌الخط بستگی

دارند. اگر مختصات u^1, u^2 با مختصات جدید $u^{1'}, u^{2'}$ عوض شوند، بردارهای پایهٔ طبیعی صفحهٔ مماس طبق فرمولهای

$$\mathbf{r}_{i'} = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}\mathbf{r}_j$$

تغییر می‌کنند. بنابراین، ضرایب اولین فرم اساسی به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$g_{i'j'} = \mathbf{r}_{i'}\mathbf{r}_{j'} = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}}\mathbf{r}_k\frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}}\mathbf{r}_l = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}}\mathbf{r}_k\mathbf{r}_l = \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}}g_{kl},$$

یا، بالاخره،

$$g_{i'j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}g_{ij}, \qquad (۲۵\cdot۱۶)$$

یا

$$g_{ij} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j}g_{i'j'}. \qquad (۲۶\cdot۱۶)$$

لازم به‌یادآوری است که در این فرمولها i و i' و j و j' اندیسهای مستقلی هستند، و یک حرف i یا j با پریم یا بی‌پریم به‌کار رفته تا حفظ فرمولهای نظیر را ساده‌تر سازد.

با استفاده‌ازفرمولهای (۲۵۰۱۶)، می‌توان $g^{i'j'}$ را در مختصات جدید حساب‌کرد. داریم

$$g^{i'k'}g_{j'k'} = \delta^{i'}_{j'},$$

که از آنجا، طبق (۲۵۰۱۶)،

$$g^{i'k'}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}g_{jk} = \delta^{i'}_{j'}.$$

با ضرب دو طرف این رابطه در $(\partial u^{j'}/\partial u^l)/(\partial u^i/\partial u^{i'})$، داریم

$$g^{i'k'}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^l}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}g_{jk} = \delta^{i'}_{j'}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^l}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}.$$

اما

$$\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^l}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} = \delta^j_l, \qquad \delta^{i'}_{j'}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^l}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^l}\frac{\partial u^i}{\partial u^{j'}} = \delta^i_l.$$

بنابراین، داریم

$$g^{i'k'}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\delta^j_l\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}g_{jk} = \delta^i_l,$$

و نیــز ،

$$g^{i'k'}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}g_{lk} = \delta^i_l.$$

حال ، با ضرب دوطرف در g^{lj} ، به‌دست می‌آوریم که

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}g^{i'k'}g_{lk}g^{lj} = \delta^i_l g^{lj},$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}g^{i'k'}\delta^j_k = g^{ij}.$$

پس ، بــا اعمــال اتحاد $(\partial u^k/\partial u^{k'})\delta^j_k = \partial u^j/\partial u^{k'}$ و تغییر اندیس جمعبندی از k' به j' ، بالاخره خواهیم داشت

$$g^{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}g^{i'j'}, \tag{۲۷۰۱۶}$$

یا

$$g^{i'j'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j}g^{ij}. \tag{۲۸۰۱۶}$$

البته ، حاصل ضــرب اسکالر دو بردار مماس **a** و **b** به مختصات منحنی‌الخط سطح بستگی ندارد . در واقع ،

$$\mathbf{ab} = g_{ij}a^ib^j = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j}g_{i'j'}\frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}}a^{k'}\frac{\partial u^j}{\partial u^{l'}}b^{l'}$$

$$= \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial u^{l'}}g_{i'j'}a^{k'}b^{l'} = \delta^{i'}_{k'}\delta^{j'}_{l'}g_{i'j'}a^{k'}b^{l'} = g_{i'j'}a^{i'}b^{j'}.$$

همچنین ، فرمولهای طول قوس یک منحنی روی سطح و زاویهٔ بین دو منحنی یا دو بردار نیز از مختصات مستقل هستند .

۷۰۱۶ شکلهای خاص اولین فرم اساسی

اولین فرم اساسی را می‌توان با انتخاب مختصات منحنی‌الخط خاص به‌شکل خاص ساده‌تری تبدیل کرد .

هرگاه تــور مختص متعــامد باشد ، آنگاه ، همانطور که دیده شد ، $g_{12} = g_{21} = 0$ و $g^{12} = g^{21} = 0$. البته ، همیشه می‌تــوان مختصات منحنی‌الخط را موضعا" طوری اختیار کرد که وضع به‌این صورت باشد . حتی این را می‌شود طوری انجام داد که $g_{11} = 1$ ؛ در

نتیجه ، اولین فرم اساسی خواهد شد

$$ds^2 = (du^1)^2 + G(u^1, u^2)(du^2)^2. \qquad (۲۹ \cdot ۱۶)$$

مختصاتی که بهازای آن اولین فرم اساسی به شکل (۲۹ • ۱۶) باشد مختصات **نیمهژئودزیک** نامیده میشود . بعدها ، در زیر بخش ۵۰۲۱ ، ثابت میکنیم که مختصات نیمه ژئودزیک همیشه وجود دارند ، و معنی هندسی مختصات نیمه ژئودزیک را نیز توضیح میدهیم .

امکان دیگر انتخاب مختصات منحنی الخط است بنحوی که $g_{11} = g_{22} = [\rho(u^1, u^2)]^2, g_{12} = 0$ ؛ و لذا ، اولین فرم اساسی شکل زیر را خواهدگرفت :

$$ds^2 = [\rho(u^1, u^2)]^2[(du^1)^2 + (du^2)^2]. \qquad (۳۰ \cdot ۱۶)$$

این نوع مختصات را **مختصات همگرمایی** می نامند .

★ با این فرض که سطح تحلیلی است ، وجود موضعی مختصات همگرمایی را ثابت میکنیم . برهان نسبتا" کوتاه است ولی درآن از یک عامل انتگرالگیری فرمهای دیفرانسیل خطی مختلط استفاده میشود . برهانهای مشهوری تحت فقط این فرض که سطح از کلاس C_3 (یا حتی کمتر) است نیز وجود دارند .[1]

یک فرم درجهٔ دوم معین مثبت مانند $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ را میتوان بهصورت حاصل ضرب دو فرم خطی با ضرایب مزدوج مختلط نمایش داد :

$$ds^2 = \lambda_i \, du^i \bar{\lambda}_j \, du^j,$$

که درآن λ_1 و λ_2 توابع مختلطی از متغیرهای حقیقی u^1, u^2 اند . توابع λ_i لزوما" مختلط اند زیرا ، درغیر اینصورت ، اگر حقیقی باشند ، فرم درجهٔ دوم مربع یک فرم خطی بوده و نمیتواند معین مثبت باشد . فرض کنیم μ یک عامل انتگرالگیری مختلط ناصفر معادلهٔ $\lambda_i du^i = 0$ بوده ؛ یعنی ، یک تابع مختلط از u^1, u^2 بهطوری که $\mu\lambda_i du^i$ دیفرانسیل تابع مختلط z از دو متغیر حقیقی u^1, u^2 باشد . دراین صورت ، داریم

$$dz = \mu\lambda_i \, du^i;$$

و ، درنتیجه ،

$$d\bar{z} = \bar{\mu}\bar{\lambda}_i \, du^i.$$

بنابراین ،

---

1. S. S. Chern, P. Hartman and A. Winter, "On isothermic coordinates," *Commentarii Mathematici Helvetici* **28,** 301–309 (1954); S.S. Chern, "An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface," *Proceedings of the American Mathematical Society* **6,** 771–782 (1955).

$$dz\,d\bar{z} = \mu\bar{\mu}\lambda_i\,du^i\bar{\lambda}_j\,du^j = \mu\bar{\mu}\,ds^2$$

$$ds^2 = \frac{1}{\mu\bar{\mu}}dz\,d\bar{z}.$$

فرض کنیم $v^1(u^1, u^2)$ و $v^2(u^1, u^2)$ به‌ترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی تابع z باشند. دراین صورت، داریم

$$dz\,d\bar{z} = (dv^1)^2 + (dv^2)^2,$$

و

$$ds^2 = \frac{1'}{\mu\bar{\mu}}[(dv^1)^2 + (dv^2)^2].$$

تابع $\mu\bar{\mu}$ حقیقی و مثبت است؛ و درنتیجه، می‌توان قرار داد $\rho^2 = 1/\mu\bar{\mu}$ و مشاهده کرد که v^1 و v^2 مختصات همگرمایی می‌باشند.

برای اثبات وجود یک عامل انتگرالگیری، خواننده را به درس مشروحی ازمعادلات دیفرانسیل ارجاع می‌دهیم. ★

۸.۱۶ مساحت یک سطح

برای تعیین مساحت ناحیهٔ S روی سطحی به معادلهٔ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

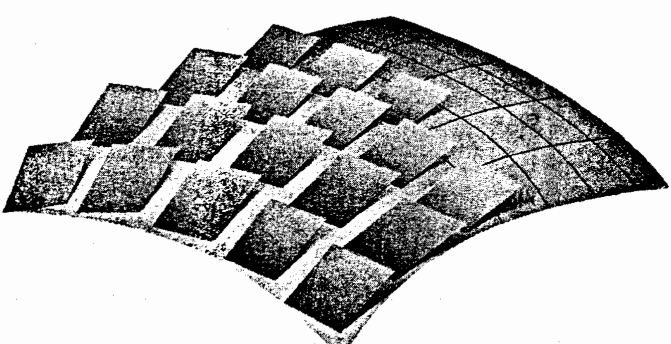
که نظیر است به مستطیل Ω از صفحه با پارامترهای u^1, u^2، این ناحیه را با خطوط

$$u^1 = u_0^1, u^1 = u_1^1, \ldots, u^1 = u_n^1$$

و

$$u^2 = u_0^2, u^2 = u_1^2, \ldots, u^2 = u_m^2$$

به تعدادی متناهی چهارضلعی منحنی‌الخط تقسیم می‌کنیم (شکل ۱۰۱۶). بعد، هر چهار

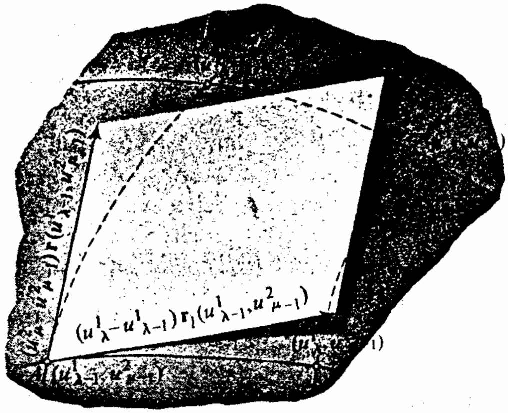


شکل ۱۰۱۶آ

ضلعی مانند $ABCD$ را که‌به خطوط $u^1 = u^1_{\lambda-1}, u^1 = u^1_\lambda, u^2 = u^2_{\mu-1}, u^2 = u^2_\mu$ محدود شده است‌با متوازی الاضلاع مستقیم الخط در صفحهٔ مماس بر سطح در $A = (u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})$ تولید شده به‌وسیلهٔ بردارهای

$$(u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})\mathbf{r}_1(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1}) \quad \text{و} \quad (u^2_\mu - u^2_{\mu-1})\mathbf{r}_2(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})$$

که بر اضلاع چهار ضلعی منحنی‌الخط مماسند عوض کرده و آنها را هم از حیث طول و هم از لحاظ راستا تقریب می‌کنیم .



شکل ۱۰۱۶ ب

بدین ترتیب ، قلمرو روی سطح بـا مقیاسهایی بـه شکل متوازی الاضلاعهای مماس پوشیده می‌شود که حجره‌های اصلی افراز را تقریب می‌کنند .

مساحت یک متوازی الاضلاع مساوی است با

$$|(u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})\mathbf{r}_1(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1}) \times (u^2_\mu - u^2_{\mu-1})\mathbf{r}_2(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})|$$
$$= (u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})(u^2_\mu - u^2_{\mu-1})|\mathbf{r}_1(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1}) \times \mathbf{r}_2(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})|.$$

بنابر (۱۷۰۱۶) ، $|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = \sqrt{g}$ ؛ و درنتیجه ، این مساحت برابر است با

$$\sqrt{g(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})}(u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})(u^2_\mu - u^2_{\mu-1}).$$

حال مجموع مساحات تمام مقیاسهای پوششی S ، یعنی

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \sqrt{g(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})}(u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})(u^2_\mu - u^2_{\mu-1}),$$

را یک تقریب برای مساحت قلمرو S می‌گیریم ، که هرچه افراز ظریفتر باشد بهتر است . خود مساحت S حد این مجموعهاست وقتی تنیدهٔ افراز (یعنی ، قطر بزرگترین مقیاس) به‌صفر میل کند . هرگاه تابع $\sqrt{g(u^1, u^2)}$ در ناحیهٔ Ω انتگرالپذیر باشد ، که حالتی‌است که اگـر Ω در همسایگی مختصات بـرای مختصات u^1, u^2 قرار داشته و پارامتری سازی از

کلاس C_1 باشد ،آنگاه مجموعهای مورد نظر حدی مساوی انتگرال تابع $\sqrt{g}$ روی Ω خواهند داشت ؛ یعنی ،

$$S \text{ مساحت } = \int_\Omega \int \sqrt{g(u^1, u^2)}\, du^1\, du^2. \qquad (۳۱ \cdot ۱۶)$$

این فرمول برای قلمرو کلیتر S که نقش یک قلمرو اندازه پذیر ژردان Ω درصفحهٔ (u^1, u^2) باشد نیز برقرار است . بویژه ، فرمول برای قلمروهایی که به منحنیهای ژردان بستهٔ قطعه قطعه مشتقپذیر (از کلاس C_1) محدودند نیز معتبر است .

فرمول (۳۱ · ۱۶) مساحتی را تعریف می‌کند که جمعی است ؛ یعنی ، هرگاه S اجتماع دو قلمرو مجزای S_1 و S_2 باشد ، آنگاه مساحت S مساوی است با مجموع مساحات S_1 و S_2 . بعلاوه ، هرگاه سطح صفحه باشد ، این مساحت همان مساحت معمولی خواهدبود . (تحقیق کنید !)

در اثبات فرمول (۳۱ · ۱۶) از یک دستگاه مختصات گاوسی ثابت استفاده شد . لذا ، برای اطمینان از اینکه مساحت (۳۱ · ۱۶) دارای معنی هندسی مستقل است ، باید ثابت کرد که فرمول (۳۱ · ۱۶) با تغییر مختصات منحنی‌الخط شکلش را حفظ می‌کند . با اعمال فرمول (۳۱ · ۱۶) بر مختصات جدید ، باید از آن روی قلمرو Ω' نظیر به همان قلمرو S روی سطح انتگرال بگیریم ؛ بنابراین ، چون Ω' نقش Ω در تبدیل مختصات $(u^1, u^2) \to (u^{1'}, u^{2'})$ است ، خواهیم داشت

$$\int_{\Omega'} \int \sqrt{g'(u^{1'}, u^{2'})}\, du^{1'}\, du^{2'},$$

که در آن

$$g' = g_{1'1'}\, g_{2'2'} - g_{1'2'}^2.$$

اما

$$g' = (\mathbf{r}_{1'} \times \mathbf{r}_{2'})^2 = \left[\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}\right]^2 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2 = \left[\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}\right]^2 g.$$

درنتیجه ، طبق قضیهٔ تغییر متغیر در انتگرال مضاعف ،

$$\int_{\Omega'} \int \sqrt{g'}\, du^{1'}\, du^{2'} = \int_{\Omega'} \int \sqrt{g} \left|\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}\right| du^{1'}\, du^{2'} = \int_\Omega \int \sqrt{g}\, du^1\, du^2,$$

و این همان مطلوب می‌باشد .

امثله و تمرین

۱ . *مساحت کره* . وقتی مختصات کروی روی یک کره در قلمرو $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi,\ 0 \le \phi < 2\pi$

1. Jordan

تغییر کنند، نقاط‌نظیر نیمی از کره را می‌پوشانند. از اینرو، مساحت نیمکره مساوی است با

$$\int\int a^2 \cos \theta \, d\theta \, d\phi = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi a^2 [\sin \theta]_0^{\pi/2} = 2\pi a^2,$$

و مساحت تمام کره مساوی $4\pi a^2$ است، که در آن a شعاع کره می‌باشد.

به‌همین‌نحو، در مختصات (u, v) مثال ۹، زیر بخش ۳۰۱۱، تمام کره بدون یک نقطه نقش تمام صفحه می‌باشد. می‌توان مساحت کره را از انتگرال مجازی

$$16a^4 \int\int \frac{du \, dv}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}$$

روی تمام صفحه به‌دست آورد.

۲. مساحت چنبرهٔ حاصل‌از دوران یک دایره به شعاع a حول یک محور واقع درصفحهٔ دایره به فاصلهٔ b از مرکز آن $(b > a)$ را پیدا کنید.

۳. مساحت قطعه‌ای از مارپیچ گون

$$x = u^1 \cos u^2, \qquad y = u^1 \sin u^2, \qquad z = bu^2$$

نظیر به یک پای پیچ که داخل استوانه بوده و مارپیچ

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t, \qquad z = bt$$

را حمل می‌کند را پیدا کنید.

۴. تحقیق کنید که معادلهٔ پارامتری

$$x = a \cos u^1 \cos u^2, \qquad y = b \cos u^1 \sin u^2, \qquad z = c \sin u^1$$

نمایش بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

است. اولین فرم اساسی بیضی گون را دراین‌مختصات بیابید. نقاط منفرد این نمایش کدامند؟ مساحت یک بیضی گون دوار $(a = b)$ را پیدا کنید.

۵. برای مساحت سطح یک مخروط مستدیر به ارتفاع h و قاعدهٔ به شعاع r فرمولهایی بیابید.

۱۷ دومین فرم اساسی

۱۰۱۷ انحراف سطح از صفحهٔ مماس

فرض کنیم سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

از کلاس C_2 باشد، و انحراف آن را از صفحهٔ مماس در نقطهٔ P به مختصات گاوسی (u^1, u^2) تخمین‌می‌زنیم. نقطهٔ‌دیگر Q از سطح به مختصات $(u^1 + h^1, u^2 + h^2)$ رااختیار می‌کنیم. همانطور که می‌دانیم، صفحهٔ مماس بر سطح در P به معادلهٔ

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(u^1, u^2))\mathbf{m}(u^1, u^2) = 0$$

است. بنابراین، چون $\mathbf{m}$ بردار یکهٔ قائم است، قدر مطلق فاصلهٔ Q از صفحهٔ مماس مساوی است با

$$d = [\mathbf{r}(u^1 + h^1, u^2 + h^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2)]\mathbf{m}(u^1, u^2).$$

علامت d نشان می‌دهد که‌نقطهٔ Q کدام طرف صفحهٔ مماس است. مثبت است وقتی Q در نیم فضایی باشد که بردار $\mathbf{m}$ در Q به‌آن اشاره دارد.

با اعمال فرمول تیلور در مورد تفاضل $\mathbf{r}(u^1 + h^1, u^2 + h^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2)$، داریم

$$d = \left[\mathbf{r}_i h^i + \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_{ij}h^i h^j + o((h^1)^2 + (h^2)^2)\right]\mathbf{m}$$

یا

$$d = \mathbf{r}_{ij}\mathbf{m}h^i h^j + o((h^1)^2 + (h^2)^2),$$

زیرا $\mathbf{r}_i\mathbf{m} = 0$. دراینجا مقادیر توابع $\mathbf{r}_i, \mathbf{m}$ در نقطهٔ $P = (u^1, u^2)$ گرفته شده‌اند.

با معرفی نماد

$$b_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}{\sqrt{g}}, \qquad (۱۰۱۷)$$

قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیه. ***فاصلهٔ علامتدارنقطهٔ $(u^1 + h^1, u^2 + h^2)$ واقع برسطحی از کلاس C_2 از صفحهٔ مماس در (u^1, u^2) مساوی است با***

$$\delta = \tfrac{1}{2}b_{ij}h^i h^j \qquad (۲۰۱۷)$$

با خطایی از مرتبهٔ بالاتراز 2 نسبت به $\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}$.

ضرایب b_{ij} از فرمولهای (۱۰۱۷) به‌دست می‌آیند و فقط به نقطهٔ تماس بستگی دارند. به‌ازای h^1 و h^2 به‌قدرکافی‌کوچک، δ مثبت‌است اگر نقطهٔ $(u^1 + h^1, u^2 + h^2)$ آن‌طرف صفحهٔ مماس باشد که بردار $\mathbf{m}$ در (u^1, u^2) به آن اشاره دارد، و منفی است اگر در طرف دیگر باشد.

۲۰۱۷ دومین فرم اساسی یک سطح

فرم دیفرانسیل درجهٔ دوم

$$\mathrm{II} = b_{ij}\, du^i\, du^j,$$

که ضرایب آن با فرمولهای (۱۰۱۷) تعریف شده‌اند، **دومین فرم اساسی** سطح نامیده می‌شود. نتایج بخش پیش معنی هندسی دومین فرم اساسی را نشان می‌دهند.

بنابر (۱۰۱۷)، داریم

$$b_{ij} = b_{ji};$$

درنتیجه، این فرم دارای سه ضریب اصلی است:

$$\mathrm{II} = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}\, du^1\, du^2 + b_{22}(du^2)^2.$$

برای ضرایب دومین فرم اساسی فرمول دیگری نیز به‌دست می‌آوریم. با مشتقگیری از اتحاد

$$\mathbf{r}_i\mathbf{m} = 0$$

نسبت به u^j، داریم

$$\mathbf{r}_{ij}\mathbf{m} + \mathbf{r}_i\mathbf{m}_j = 0,$$

که درآن $\mathbf{m}_j = \partial\mathbf{m}/\partial u^j$. درنتیجه،

$$b_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\mathbf{m} = -\mathbf{r}_i\mathbf{m}_j. \qquad (۳۰۱۷)$$

مبین دومین فرم اساسی مختصراً" با b نموده می‌شود:

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \qquad (۴۰۱۷)$$

هرگاه معادلهٔ سطح، به‌جای برداری، به‌شکل مختصات باشد:

$$x = x(u^1, u^2), \qquad y = y(u^1, u^2), \qquad z = z(u^1, u^2),$$

آنگاه فرمول برای b_{ij} عبارت است از

$$b_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} x_{ij} & y_{ij} & z_{ij} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (۵۰۱۷)$$

که درآن $A = y_1z_2 - y_2z_1, B = z_1x_2 - z_2x_1, C = x_1y_2 - x_2y_1$ مولفه‌های بردار $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ می‌باشند.

امثله وتمرین

در مثالهای زیر، محاسبات را هرجا لازم بود کامل کنید:

۱ . دومین فرم اساسی صفحه متحد صفر است. این مطلب از معنی هندسی دومین فرم که در ۱۰۱۷ توضیح شده واضح است. همچنین، به‌آسانی می‌توان آن را با محاسبه تحقیق کرد. این مطلب را در مختصات دکارتی و مختصات قطبی در صفحه تحقیق کنید.

بعکس، اگر برای سطحی داشته باشیم $b_{ij} = 0$ ، سطح یک صفحه و یا قسمتی از آن است. درواقع، دراین حالت داریم $\mathbf{r}_i\mathbf{m}_j = 0$ و نیز $\mathbf{mm}_j = 0$، زیرا $\mathbf{m}$ یک بردار یکه می‌باشد. چون بردار $\mathbf{m}_j$ درهرنقطه بر سه بردار مستقل خطی $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ متعامداست، بایـد متحد صفر باشد: $\mathbf{m}_j = 0$. ازاینرو، $\mathbf{m}$ یک تابع ثابت می‌باشد: ثابت $= \mathbf{m}$. بنابراین، $\mathbf{r}_i\mathbf{m} = \partial(\mathbf{rm})/\partial u^i$ ، و چون $\mathbf{r}_i\mathbf{m} = 0$ ، داریم ثابت $= \mathbf{rm}$ ، که این معادلهٔ یک صفحه می‌باشد.

۲ . دومین فرم اساسی کره در مختصات کروی (۸۰۱۱) عبارت است از

$$\mathrm{II} = a(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi^2),$$

که از آنجا $b_{11} = a, b_{12} = b_{21} = 0, b_{22} = a\cos^2\theta$. از مقایسهٔ دومین فرم اساسی با اولین فرم اساسی

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi^2)$$

درمی‌یابیم که دو فرم متناسب‌اند:

$$ds^2 = a\mathrm{II}.$$

با مختصات مثال ۹، ۳۰۱۱ ، دومین فرم اساسی برابر است با

$$\mathrm{II} = \frac{16a^3}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2),$$

و اولین فرم اساسی مساوی است با

$$ds^2 = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2),$$

و مجددا" خواهیم داشت

$$ds^2 = a\mathrm{II}.$$

۳ . یک خاصیت مشخص کره را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم هرگاه برای سطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ در قلمروی چون Ω در صفحه با پارامترهای u^1, u^2 داشته باشیم $\mathrm{II} = \alpha\, ds^2$ $(\alpha \neq 0)$ ، آنگاه معادله قسمتی از یک کره به شعاع $|1/\alpha|$ را نمایش می‌دهد. درواقع، داریم $b_{11} = \alpha g_{11},\ b_{12} = \alpha g_{12},\ b_{22} = \alpha g_{22}$ ؛ بنابراین، $\mathbf{m}_i\mathbf{r}_j = -\alpha\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$ یا $(\mathbf{m}_i + \alpha\mathbf{r}_i)\mathbf{r}_j = 0$. از آن سو، نیز داریم $(\mathbf{m}_i + \alpha\mathbf{r}_i)\mathbf{m} = 0$ ، زیرا $\mathbf{m}$ به $\mathbf{m}_i$ و همچنین

به $\mathbf{r}_i$ متعامداست. لذا، $\mathbf{m}_i + \alpha\mathbf{r}_i = 0$ برداری متعامد به سه بردار مستقل $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ می‌باشد. بنابراین، خواهیم داشت

$$\mathbf{m}_i = -\alpha\mathbf{r}_i.$$

با مشتقگیری از این نسبت به u^j، به‌دست می‌آوریم $\mathbf{m}_{ij} = -\alpha_j\mathbf{r}_i - \alpha\mathbf{r}_{ij}$، که درآن $\alpha_j = \partial\alpha/\partial u^j$. با قرار دادن $i = 1, j = 2$، و $i = 2, j = 1$، خواهیم داشت

$$\mathbf{m}_{12} = -\alpha_2\mathbf{r}_1 - \alpha\mathbf{r}_{12}, \qquad \mathbf{m}_{21} = -\alpha_1\mathbf{r}_2 - \alpha\mathbf{r}_{21}.$$

اگر نمایش از کلاس C_3 باشد، $\mathbf{m}_{12} = \mathbf{m}_{21}$ و $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21}$. درنتیجه،

$$\alpha_1\mathbf{r}_2 - \alpha_2\mathbf{r}_1 = 0.$$

چون بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ مستقل‌اند، $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ و α ثابت است. فرض کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ معادلهٔ سطح باشد، و بردار $\mathbf{R} = \mathbf{r} + (1/\alpha)\mathbf{m}$ را درنظر می‌گیریم. داریم

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i + \frac{1}{\alpha}m_i = \frac{1}{\alpha}(\alpha\mathbf{r}_i + \mathbf{m}_i) = 0.$$

درنتیجه، ثابت $= \mathbf{R}$. نقطه‌با بردار موضع $\mathbf{R}$ ثابت است. فاصلهٔ بین این نقطه و نقاط سطح مساوی است با

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}(u^1, u^2)| = \left|\frac{1}{\alpha}\mathbf{m}\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\right|,$$

که برهان را تمام می‌کند.

. دومین فرم اساسی سطح دوار

$$x = f(u)\cos v, \qquad y = f(u)\sin v, \qquad z = h(u)$$

به شکل

$$\frac{f'h'' - h'f''}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}du^2 + \frac{fh'}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}dv^2$$

است. بنابراین،

$$b_{11} = \frac{f'h'' - h'f''}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}, \qquad b_{12} = b_{21} = 0, \qquad b_{22} = \frac{fh'}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}.$$

در پارامتری سازی

$$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v, \qquad z = F(r),$$

دومین فرم اساسی به شکل

$$\mathrm{II} = \frac{F''}{\sqrt{1 + F'^2}}dr^2 + \frac{rF}{\sqrt{1 + F'^2}}dv^2$$

است .

۵ . دومین فرم اساسی زنجیرگون (۱۱۰۱۱) عبارت است از

$$\mathrm{II} = \frac{1}{a}[-(du^1)^2 + a^2(du^2)^2].$$

بنابراین ،

$b_{11} = -1/a$ ، $b_{12} = b_{21} = 0$ ، $b_{22} = a$ ، و $b = -1$.

۶ . دومین فرم اساسی کره نمای (۱۲۰۱۱) عبارت است از

$$\mathrm{II} = a[-\cot u^1(du^1)^2 + \sin u^1 \cos u^1(du^2)^2],$$

که از آنجا $b_{11} = -a\cot u^1,\ b_{12} = b_{21} = 0,\ b_{22} = a\sin u^1 \cos^2 u^1,\ b = -a^2\cos^2 u^1$.

نسبت مبینهای دو فرم اساسی ، یعنی

$$\frac{b}{g} = -\frac{1}{a^2},$$

یک ثابت منفی میباشد .

۷ . دومین فرم اساسی مارپیچ گون (۱۳۰۱۱)

$$x = u^1\cos u^2, \qquad y = u^1\sin u^2, \qquad z = au^2$$

عبارت است از

$$\mathrm{II} = -\frac{a}{\sqrt{(u^1)^2 + a^2}}\,du^1\,du^2.$$

بنابراین ،

$$b_{11} = b_{22} = 0, \qquad b_{12} = b_{21} = -\frac{a}{\sqrt{(u^1)^2 + a^2}}, \qquad b = -\frac{a^2}{(u^1)^2 + a^2}.$$

۸ . دومین فرمهای اساسی چنبره‌ٔ

$$x = (b + a\cos u^1)\cos u^2, \qquad y = (b + a\cos u^1)\sin u^2, \qquad z = a\sin u^1$$

و بیضی گون

$$x = a\cos u^1\cos u^2, \qquad y = b\cos u^1\sin u^2, \qquad z = c\sin u^1$$

را پیدا کنید .

۹ . اولین و دومین فرمهای اساسی نمودار تابع دو متغیره و از کلاس C_2

$$z = f(x, y)$$

به صورت سطح را با استفاده از نمادگذاری کلاسیک

$$p = \partial f/\partial x, q = \partial f/\partial y, r = \partial^2 f/\partial x^2, s = \partial^2 f/\partial x\,\partial y, t = \partial^2 f/\partial y^2$$

پیدا نمایید .

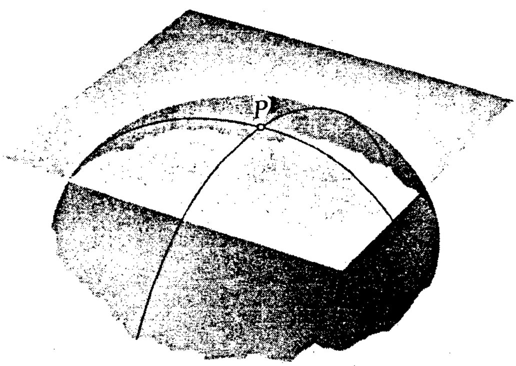
۳.۱۷ رده‌بندی نقاط یک سطح

با توجه به علامت مبین دومین فرم اساسی ، سه نوع نقطه روی یک سطح تمیز داده‌می‌شود :

۱ . در نقطهٔ P داریم $b > 0$. دراین صورت ، دومین فرم اساسی

$$b_{ij}\,du^i\,du^j = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}\,du^1\,du^2 + b_{22}(du^2)^2$$

معین است ؛ یعنی ، بـه‌ازای تمـام مقادیر du^1, du^2 که هر دو با هم صفر نباشند ، مقادیر متحـدالعلامه (مثبت یـا منفـی) به‌خود می‌گیرد . بنابراین ، سطح در یک همسایگی بـه‌قدرکافی کوچک نقطهٔ P در یک طرف صفحهٔ مماس در P قرار دارد . نقطهٔ P تنها نقطـهٔ مشترک صفحهٔ مماس و سطح در مجاورت P است . این نوع نقطه یک **نقطهٔ بیضوی** سطـح نامیده می‌شود (شکل ۱.۱۷) . همهٔ نقاط یک کره و همهٔ نقاط یک بیضی گون نمونه‌هایی از نقاط بیضوی هستند .



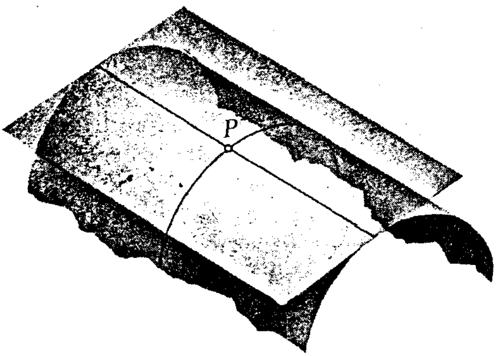
شکل ۱.۱۷

۲ . در نقطهٔ P داریم $b = 0$. دراینجا می‌توان دو حالت زیر را تشخیص داد :

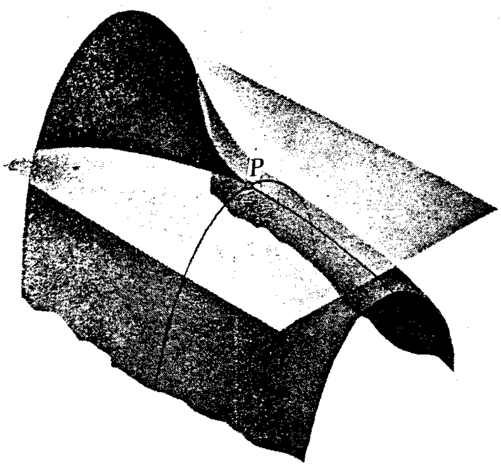
(آ) همهٔ ضرایب b_{ij} مساوی‌صفرنیستند . دراین حالت ، دومین فرم اساسی فقط برای راستای $du^1{:}du^2$ مساوی صفر بوده ، و برای تمام راستاهای دیگر یک علامت دارد . هـر منحنی روی یـک سطح و باراستای $du^1{:}du^2$ ، که نتیجتا" دومین فرم اساسی صفـر می‌شود ، در P تماسی از مرتبهٔ لااقل 2 با صفحهٔ مماس بر سطح در P دارد . به عبارت دیگر ، هر صفحهٔ مماس بر سطح یک صفحهٔ بوسان این منحنی در P است . اگر سطح و صفحهٔ مماس در P دارای یک منحنی مشترک باشند ، این راستای‌منحنـی در P خواهد بود . برای کسب اطلاع بیشتر در مورد رفتار هر سطح دراین راستا ، باید برای‌انحراف سطح‌از صفحهٔ‌مماس‌جملات‌از مرتبهٔ‌بیشتری‌از فرمول

تیلوررا به‌کار بریم . در مجاورت P ، نقاط سطح ممکن است یک طرف صفحهٔ مماس و یا اینکه هر دو طرف سطح واقع باشند ، اما ، دراین صورت ، **اشتراک** صفحهٔ مماس با سطح در P دارای یک نقطهٔ بازگشت (یا نقطهٔ بازگشت مضاعف) با یک مماس درراستایی که دومین فرم اساسی درآن جهت صفر است می‌باشد .

نقاطی از نوع توصیف شده در بالا **نقاط سهموی** نامیده می‌شوند (شکل ۲۰۱۷ و ۳۰۱۷) . تمام نقاط منتظم یک سطح گستردنی نقاط سهموی هستند . روی سطحهای دیگر، نقاط سهموی می‌توانند منحنیهایی را که **منحنیهای سهموی** نامیده می‌شوند تشکیل دهند .



شکل ۲۰۱۷

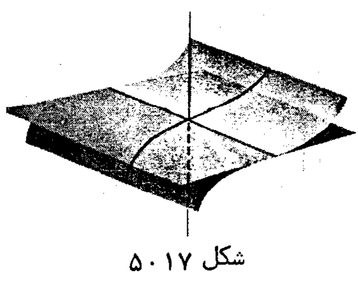


شکل ۳۰۱۷

فلیکس‌کلاین[1] ، درتلاشی ناموفق برای یافتن یک محک زیبایی هندسی ، تمام خطوط سهموی را روی چهرهٔ آپولو بلودر[2] رسم کرده است . شکل ۴۰۱۷ نشانگر طرح پیچیده‌ای است که توسط وی داده شده است .

شکل ۴۰۱۷

(ب) حالت دیگری که در نقطهٔ P داریم $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ ، و صفحهٔ مماس دارای تماس از مرتبهٔ بالاتر با سطح است . انحراف با جملات مرتبهٔ بالاتر نسبت به du^1, du^2 معین می‌شود . دراین حالت ، نقطه یک **نقطهٔ تخت** سطح نامیده می‌شود . شکل ۵۰۱۷ یک نقطهٔ تخت را نشان می‌دهد . این سطح یک استوانه است



شکل ۵۰۱۷

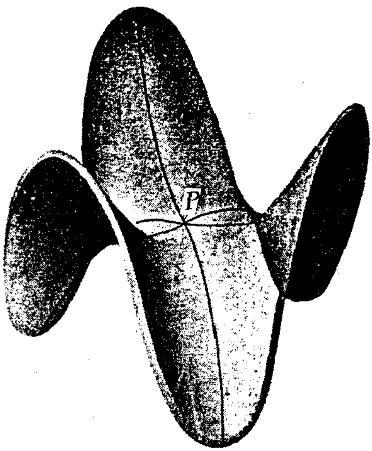
1. Felix Klein

2. Apollo Belvedere

که‌هادی‌آن یک‌نقطهٔ عطف در P دارد . البته ، تمام نقاط خط‌جاری ماربر P نقاط تخت هستند . شکل ۶.۱۷ نمونه‌ای از یک نقطهٔ تخت تنها را نشان می‌دهد . این نقطه نقطهٔ $(0, 0, 0)$ از زین میمون

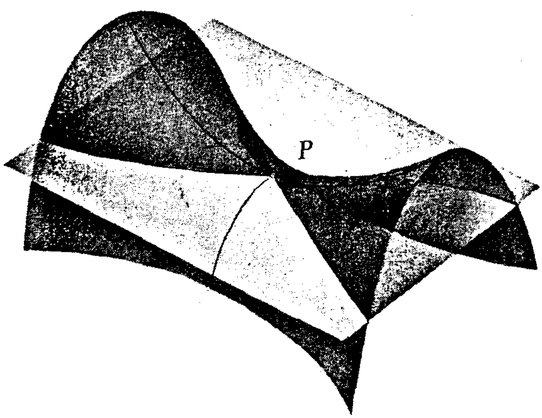
$$z = x(x^2 - 3y^2)$$

است .



شکل ۶.۱۷

۳ . درنقطهٔ P داریم $b < 0$. دراین حالت ، معادلهٔ $b_{ij}\,du^i\,du^j = 0$ به‌ازای نسبت $du^1 : du^2$ دارای دو جواب متمایز است . دومین فرم اساسی به‌ازای هر دو راستا صفراست . صفحهٔ مماس در مجاورت P سطح را در امتداد دو منحنی ماربر P قطع می‌کند که مماسهای آنهادر P این‌دو راستا را دارند . این منحنیها سطح را در یک



شکل ۷.۱۷

همسایگی به‌قدرکافی کوچک نقطهٔ P به‌دو جفت نواحی قائم الزاویه تجزیه‌می‌کنند . یک جفت از این نواحی در یک طرف سطح، و دیگری در طرف دیگر قرار دارد (شکل ۷۰۱۷) . این سطح در نزدیکی P به شکل زین است . این نوع نقطه را یک **نقطهٔ هذلولوی** سطح می‌نامند . تمام نقاط سهمی‌گون هذلولوی و هذلولی‌گون یکپارچه نقاطی هذلولوی هستند .

امثله و تمرین

۱ . ثابت کنید تمام نقاط بیضی گون ، سهمی‌گون بیضوی ، و هذلولی‌گون دو پارچه نقاط بیضوی هستند ؛ درحالت خاص، تمام نقاط یک کره چنین‌اند .

۲ . ثابت کنید تمام نقاط یک سطح گستردنی نقاط سهموی یا نقاط تخت هستند . شکل ۲۰۱۷ نقاط سهموی این حالت را نشان می‌دهد .

۳ . نقطهٔ سهموی سطح

$$z = x^3 - y^2$$

را پیدا کرده ، و در انحراف این سطح از صفحهٔ مماس دراین نقطه بحث نمایید . وضع در شکل ۳۰۱۷ نموده شده است .

۴ . رفتار سطح

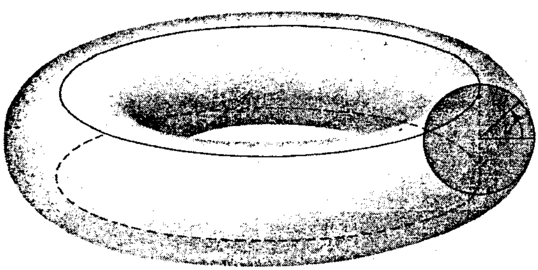
$$z = y^2 - x^2$$

در مجاورت نقطهٔ سهموی $(0, 0)$ چگونه است ؟

۵ . نشان دهید که جمیع نقاط یک سطح خط داری که گستردنی نباشد هذلولوی هستند ؛ درحالت خاص، تمام نقاط مارپیچ گون و تمام نقاط سهمی‌گون هذلولوی یا هذلولی‌گون یک پارچه چنین‌اند .

۶ . نشان دهید که تمام نقاط منتظم کره‌نما و تمام نقاط زنجیر گون هذلولوی هستند .

۷ . نشان دهید که خطوط $u^1 = \pm\pi/2$ خطوط سهموی چنبرهٔ



شکل ۸۰۱۷

$$x = (b + a\cos u^1)\cos u^2, \quad y = (b + a\cos u^1)\sin u^2, \quad z = a\sin u^1 (b > a)$$

بوده و چنبره را بـه‌دو ناحیه تقسیم می‌کنند. ناحیهٔ برونی $(-\frac{1}{2}\pi < u^1 < \frac{1}{2}\pi)$ از نقاط بیضـوی، و ناحیهٔ دیگر $(\frac{1}{2}\pi < u^1 < \frac{3}{2}\pi)$ از نقاط هذلولوی تشکیل شده است (شکل ۸۰۱۷).

۸. سینوس‌گون $z = \cos x,\ 0 \le x < 2\pi$ حول محـور z دوران مـی‌کند. کـدام نقاط سینوس‌گون بیضوی، کدام سهموی، و کدام هذلولوی هستند؟

۹. درحالت‌کلی، ثابت‌کنید نقاط یک سطح دوارکه در آنها تحدب نصف‌النهار به‌سوی محور است نقاط هذلولوی هستند، و نقاطی که تحدب در آنها به خارج محور است نقاط بیضوی می‌باشند. نقاط سهموی آنهایی هستند که مماس در آنها بر محور عمود است یا اینکه انحنای نصف‌النهار در آن نقاط صفر می‌باشد.

۱۰. نقاط سطح

$$z = ax + by + f(cx + dy),$$

که درآن a, b, c, d ثابت‌انـد، و f یک تابع دلخواه از کلاس C_2 است، از چه نوع هستند؟

۴۰۱۷ نگاشت کروی یا گاوسی یک سطح و انحنای گاوسی

سطح جهت دار $\mathscr{F}$ ازکلاس C_2 را درنظرگرفته، و یک نگاشت ازاین سطح بتوی کرهٔ یکه به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. این نگاشت به هر نقطهٔ P از سطح نقطـهٔ P^* را که بردار موضعش بردار یکهٔ قائم مثبت در P است نسبت می‌دهد. این نگاشت را نگاشت **کروی** یا **گاوسی** سطح می‌نامیم. ایـن تعریف نیاز به یک سطح جهتدار دارد؛ بهرحال، توجه دارید که همیشه می‌توان یک همسایگی به‌قدر کافی کوچک را جهتدار کرد؛ و لذا، تا وقتی ملاحظات موضعی مد نظرند، لازم نیست در جهت پذیری دقیق باشیم. فرض‌کنیم نمایش پارامتری موضعی سطح به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2).$$

دراین صورت، نقش نقطه‌ای به مختصات منحنی‌الخط (u^1, u^2) تحت نگاشت گاوسی دارای بردار موضع

$$\mathbf{R} = \mathbf{m}(u^1, u^2)$$

است. ایـن معادله را مـی‌توان معادلهٔ پارامتری بخشی از کره که با نقشهای نقاط سطح پوشانده می‌شود درنظر گرفت. اگر در یک نقطه $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq 0$، این پارامتری سازی کره در نقاط متناظر کره منتظم است. بردار $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$، چون بر دو بردار مماس بر $\mathscr{F}$ عمود

است ، بر سطح عمود بوده ، و لذا ، با بردار قائم $\mathbf{m}$ همخط است ؛ دو بردار $\mathbf{m}$ و $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ ممکن است همجهت یا مختلف‌الجهت باشند . صفحات مماس بر $\mathscr{F}$ در P و بر کرهٔ یکه در P^* موازی هستند ؛ این صفحات دارای جهتهای یکسان القا شده به‌وسیلهٔ پارامتری سازی درحالت اول و جهتهای مخالف درحالت دوم خواهند بود . از اینرو ، اگر بردارهای $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ و $\mathbf{m}$ همجهت باشند ، گوییم نگاشت کروی جهت را حفظ می‌کند ، و اگر مختلف الجهت باشند ، گوییم این نگاشت جهت را تغییر می‌دهد . درحالتی که $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = 0$ ، جهت صفحهٔ مماس بر کره نامعین است .

حال قلمرو Ω را روی سطح ، که شامل نقطهٔ P است ، و نقش کروی‌اش Ω^* است درنظر می‌گیریم ، ونسبت مساحت Ω^* به مساحت Ω را تشکیل می‌دهیم . حد این نسبت ، وقتی قلمرو Ω به نقطهٔ P منقبض‌شود ، درحالتی که نگاشت گاوسی جهت را حفظ می‌کند ، یا حد قرینهٔ این نسبت درحالتی که‌نگاشت گاوسی جهت را تغییر می‌دهد ، ***انحنای گاوسی*** سطح در P نامیده می‌شود . درنقاطی که جهت نقش نامعین باشد ، انحنای گاوسی را صفر می‌گیریم . انحنای گاوسی با K نشان داده می‌شود .

قضیه . ***انحنای گاوسی در نقاط منتظم یک سطح از کلاس C_2 وجود دارد . انحنای گاوسی در مختصات منحنی‌الخط برابر است با نسبت مبین دومین فرم اساسی به مبین اولین فرم اساسی ؛ یعنی ،***

$$K = \frac{b}{g} = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}. \tag{۶۰۱۷}$$

برهان . برای سطح یک نمایش پارامتری از کلاس C_2 اختیار می‌کنیم . چون فقط به قلمروهای کوچک علاقه‌مندیم ، به‌خاطر فرایند حد ، می‌توان خودرا به قلمروهایی که کاملا" دریک‌همسایگی مختصات شامل P قرار دارند محدود کرد . مجموعهٔ نقاط صفحهٔ u^1, u^2 که Ω را مشخص می‌کنند را با همان حرف Ω نشان خواهیم داد . از اینرو ، قلمرو Ω^* روی کره نیز نقش Ω در صفحهٔ u^1, u^2 با نمایش پارامتری

$$\mathbf{R} = \mathbf{m}(u^1, u^2)$$

خواهد بود ، که ممکن است نقاط منفرد داشته باشد یا نباشد . مساحت Ω برابر است با

$$\int_\Omega \int \sqrt{g}\, du^1\, du^2,$$

درحالی که مساحت Ω^* مساوی است با

$$\int_\Omega \int |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|\, du^1\, du^2.$$

وقتی Ω به نقطهٔ P به مختصات (u^1, u^2) منقبض شود، نسبت

$$\frac{\text{مساحت } \Omega^*}{\text{مساحت } \Omega} = \frac{\int_\Omega\int |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|\, du^1\, du^2}{\int_\Omega\int \sqrt{g}\, du^1\, du^2}$$

به نسبت انتگرالدهها دراین نقطه میل خواهد کرد. اگر در نقطهٔ P، $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = 0$ (که حالتی است که جهت نقش تعریف نشده است)، این حد برابر صفر است. اگر $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq 0$، طبق تعریف داریم

$$K = \varepsilon\frac{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}{\sqrt{g}}, \tag{۷۰۱۷}$$

که درآن اگر جهت تغییر نکند، $\varepsilon = 1$ و، اگر جهت تغییر کند، $\varepsilon = -1$؛ به‌عبارت دیگر،

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2\mathbf{m}).$$

داریم

$$b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \begin{vmatrix} -\mathbf{r}_1\mathbf{m}_1 & -\mathbf{r}_1\mathbf{m}_2 \\ -\mathbf{r}_2\mathbf{m}_1 & -\mathbf{r}_2\mathbf{m}_2 \end{vmatrix} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2).$$

اما $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|\mathbf{m} = \sqrt{g}\mathbf{m}$. درنتیجه،

$$b = \sqrt{g}\mathbf{m}(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) = \sqrt{g}(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2\mathbf{m}).$$

اگر $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = 0$، داریم $b = 0$ و $K = 0$؛ لذا، (۶۰۱۷) برقرار است. اگر $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq 0$، می‌توان با استفاده از همخطی $\mathbf{m}$ و $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ نتیجه گرفت که

$$(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)\mathbf{m} = \varepsilon|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|\,|\mathbf{m}| = \varepsilon|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|;$$

بنابراین،

$$|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2| = \frac{\varepsilon b}{\sqrt{g}}.$$

از تلفیق این با (۷۰۱۷) خواهیم داشت

$$K = \varepsilon\frac{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}{\sqrt{g}} = \varepsilon^2\frac{b}{g} = \frac{b}{g},$$

و برهان تمام خواهد بود.

نتیجه. *انحنای گاوسی در نقاط بیضوی مثبت، در نقاط هذلولوی منفی، و در نقاط سهموی*

صفر است.

همچنین، توجه کنید که محاسبات ما نشان می‌دهند که

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = K\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2. \tag{۸۰۱۷}$$

این رابطه را ثابت کنید.

امثله و تمرین

۱ . انحنای گاوسی کره به شعاع a ثابت و برابر است با $1/a^2$. تحقیق کنید!

۲ . انحنای گاوسی کره‌نما (ر.ک. تمرین ۱۶ از ۲۰۱۷) یک ثابت منفی است؛ $-1/a^2$.

۳ . ثابت کنید کـه انحنای گـاوسی یک سطح خط‌دار نامثبت است، و این انحنا متحد صفر است اگر و فقط اگر سطح گستردنی باشد.

۴ . انحنای گاوسی تمام سطوح مورد بحث در امثله و تمرینات بالا را به‌صورت تابعی از پارامترها بنویسید.

۵۰۱۷ تغییر مختصات منحنی‌الخط

اگر مختصات u^1, u^2 را به $u^{1'}, u^{2'}$ تغییر دهیم، ضرایب دومین فرم اساسی نیز تغییر می‌کنند. این ضرایب را با $b_{i'j'}$ نشان می‌دهیم. در مختصات جدید داریم

$$\mathbf{r}_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\mathbf{r}_i, \qquad \mathbf{m}' = \varepsilon\mathbf{m}, \qquad \mathbf{m}'_{j'} = \varepsilon\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\mathbf{m}_j,$$

که در آن

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}.$$

درنتیجه،

$$b_{i'j'} = -\mathbf{r}_{i'}\mathbf{m}'_{j'} = -\varepsilon\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\mathbf{r}_i\frac{\partial u^i}{\partial u^{j'}}\mathbf{m}_j = \varepsilon\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}(-\mathbf{r}_i\mathbf{m}_j),$$

یا

$$b_{i'j'} = \varepsilon\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}b_{ij'}, \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}. \tag{۹۰۱۷}$$

ضرایب دومین فرم اساسی طبق فرمولهای (۹۰۱۷) تغییر می‌کنند، که به فرمولهای تبدیل ضرایب اولین فرم اساسی شباهت دارند. اختلاف به‌خاطر ضریب ε است که، وقتی تبدیل

مختصات جهت را تغییر دهد، موجب تغییر علامت می‌شود.

با یک محاسبه (که به خواننده محول می‌شود) می‌توان نتیجه گرفت که مبین b' دومین فرم اساسی در مختصات جدید با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$b' = \left[\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}\right]^2 b, \qquad (۱۰ \cdot ۱۷)$$

درحالی که برای مبین اولین فرم اساسی داریم

$$g' = \left[\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}\right]^2 g. \qquad (۱۱ \cdot ۱۷)$$

درنتیجه،

$$\frac{b'}{g'} = \frac{b}{g};$$

یعنی، انحنای گاوسی به انتخاب مختصات موضعی بستگی ندارد. این مطلب از تعریف هندسی انحنای گاوسی که به نمایش پارامتری بستگی ندارد واضح است.

۱۸ قضیهٔ اساسی نظریهٔ سطوح

۱۰۱۸ فرمولهای گاوس[1] و وینگارتن[2] برای $\mathbf{r}_{ij}$ و $\mathbf{m}_i$

فرض کنیم سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

از کلاس C_2 باشد.

مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم تابع برداری $\mathbf{r}$ در نقطهٔ نامنفرد (u^1, u^2) را می‌توان، مثل یک بردار در فضای سه‌بعدی، به‌صورت ترکیبی خطی از سه بردار مستقل خطی $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ دراین نقطه نمایش داد.

اگر ضرایب را با $\Gamma^1_{ij}, \Gamma^2_{ij}, \beta_{ij}$ نشان دهیم، داریم

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^1_{ij}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{ij}\mathbf{r}_2 + \beta_{ij}\mathbf{m} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + \beta_{ij}\mathbf{m}.$$

ازضرب‌طرفین‌این‌رابطه در $\mathbf{m}$، نتیجه‌می‌شود $\mathbf{r}_{ij}\mathbf{m} = \beta_{ij}\mathbf{m}^2$ یا $\beta_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\mathbf{m} = b_{ij}$، که نشان می‌دهد β_{ij} ها همان ضرایب دومین فرم اساسی‌اند، و داریم

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + b_{ij}\mathbf{m}. \qquad (۱ \cdot ۱۸)$$

بقیهٔ ضرایب Γ^k_{ij} **علایم کریستوفل[3] نوع دوم** نامیده می‌شوند. ما در بخش بعدی به‌این

---

1. Gauss 2. Weingarten 3. Christoffel

علایم باز خواهیم گشت.

فرمولهای (۱۰۱۸) **فرمولهای گاوس** نامیده می‌شوند.

همچنین، مشتقات $\mathbf{m}_i$ ترکیباتی خطی از $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$، و $\mathbf{m}$ هستند. چون $\mathbf{m}_i$ بر $\mathbf{m}$ عمود است، و لذا با $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ همصفحه است، داریم

$$\mathbf{m}_i = -b_i^k \mathbf{r}_k, \qquad (۲۰۱۸)$$

که درآن ضرایب تجزیه با $-b_i^1, -b_i^2$ نشان داده شده‌اند. برای یافتن رابطهٔ بین این ضرایب و ضرایب فرمهای اساسی، طرفین (۲۰۱۸) را در $\mathbf{r}_j$ ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{m}_i \mathbf{r}_j = -b_i^k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_j,$$
$$-b_{ij} = -b_i^k g_{kj},$$

یا

$$b_{ij} = b_i^k g_{kj}. \qquad (۳۰۱۸)$$

اگر طرفین رابطهٔ اخیر را به‌طور صوری در g^{jl} ضرب کنیم، داریم

$$b_{ij} g^{jl} = b_i^k g_{kj} g^{jl} = b_i^k \delta_k^l = b_i^l,$$

و با تعویض اندیسهای j و l، بالاخره خواهیم داشت

$$b_i^j = b_{il} g^{lj}. \qquad (۴۰۱۸)$$

فرمولهای (۱۸۰۲) **فرمولهای وینگارتن** نامیده می‌شوند.

۲۰۱۸ علایم کریستوفل

دراین بخش، به علایم کریستوفل Γ_{ij}^k نظر دقیقتری می‌اندازیم.

از تقارن b_{ij} و $\mathbf{r}_{ij}$ نسبت به اندیسهای پایینی، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که Γ_{ij}^k نیز نسبت به زیرنویسهایش متقارن است:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \qquad (۵۰۱۸)$$

حال هدف ما بیان علایم کریستوفل برحسب ضرایب اولین فرم اساسی ومشتقاتشان است.

ابتدا ضرب اسکالر طرفین (۱۰۱۸) را در $\mathbf{r}_l$ تشکیل می‌دهیم. چون $\mathbf{r}_l \mathbf{m} = 0$، داریم

$$\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_l = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l = \Gamma_{ij}^k g_{kl}.$$

حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_l$ را **علامت کریستوفل نوع اول** نامیده وآن را با Γ_{ijl} نشان

$$\Gamma_{ijl} = \mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_l = \Gamma^s_{ij}g_{sl}. \tag{۶۰۱۸}$$

علایم کریستوفل نوع اول نیز نسبت به دو زیرنویس اول متقارن است :

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}. \tag{۷۰۱۸}$$

اگر طرفین (۶۰۱۸) را به‌طور صوری در g^{lk} ضرب کنیم ، خواهیم داشت

$$\Gamma_{ijl}g^{lk} = \Gamma^s_{ij}g_{sl}g^{lk} = \Gamma^s_{ij}\,\delta^k_s = \Gamma^k_{ij}$$

یا

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma_{ijl}g^{lk}. \tag{۸۰۱۸}$$

فرمولهای (۷۰۱۸) و (۸۰۱۸) رابطهٔ بین علایم کریستوفل نوع اول و دوم را بیان کرده ، ابزاری برای تبدیل یک نوع علامت کریستوفل به‌نوع دیگر را فراهم می‌سازند .

قضیه. *علایم کریستوفل نوع اول را می‌توان با فرمولهای*

$$\Gamma_{ijk}= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right) \tag{۹۰۱۸}$$

بیان کرد ، که فقط مستلزم ضرایب اولین فرم اساسی ومشتقاتشان نسبت به مختصات منحنی الخط‌اند .

علایم کریستوفل نوع دوم را می‌توان با فرمولهای زیر بیان نمود :

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\, g^{km}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right). \tag{۱۰۰۱۸}$$

برهان. با مشتقگیری از اتحاد

$$\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = g_{ij}$$

نسبت به u^k ، داریم

$$\mathbf{r}_{ik}\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i\mathbf{r}_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

یا

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

دو جایگشت دوری متوالی از اندیسها نتیجه می‌دهند که

$$\Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i},$$

$$\Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}.$$

دو معادلهٔ اخیر را با هم جمع کرده، سپس معادلهٔ قبلی را کم می‌کنیم؛ درنتیجه، با توجه به تقارن علایم کریستوفل نوع اول نسبت به دو اندیس اول، خواهیم داشت

$$2\Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

یا (۹۰۱۸). فرمولهای (۱۰۰۱۸) از اینها به وسیلهٔ (۸۰۱۸) نتیجه می‌شوند.

اگر مختصات منحنی الخط تغییر کنند، علایم کریستوفل نیز تغییر می‌کنند. قانون تبدیل علایم کریستوفل را می‌توان از فرمولهای (۶۰۱۸) و (۸۰۱۸) به‌دست آورد (ر.ک. تمرین ۳ دراین زیربخش).

فرمولهای علایم کریستوفل در حالت دستگاه مختصات متعامد ($g_{12} = 0$) بسیار ساده‌تر می‌شوند. درواقع، دراین حالات، داریم

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{121} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},$$

$$\Gamma_{221} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{112} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},$$

$$\Gamma_{122} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}.$$

چون دراین حالت، طبق (۱۶۰۱۶)، نیز داریم

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{1}{g_{11}}, \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{1}{g_{22}}, \qquad g^{12} = g^{21} = 0,$$

فرمولهای علایم کریستوفل نوع دوم خواهند بود

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, \qquad \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$
$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}. \tag{۱۱۰۱۸}$$

لازم به‌یادآوری است که فرمولهای (۱۱۰۱۸) فقط برای مختصات متعامد برقرارند!

مختصات خاصتر علایم کریستوفل ساده‌تری به‌دست می‌دهند. بالاخص، برای مختصات نیمه ژئودزیک $(g_{11} = 1, g_{12} = 0,\ g_{22} = G)$ ، داریم

$$\Gamma^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^2_{11} = 0,$$
$$\Gamma^1_{12} = 0, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^1},$$
$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^2}. \tag{۱۲۰۱۸}$$

در مورد مختصات ایزومتریک $(g_{11} = g_{22} = [\rho(u^1, u^2)]^2,\ g_{12} = 0)$ ، داریم

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial u^1}, \qquad \Gamma^2_{11} = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial u^2},$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial u^2}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial u^1},$$
$$\Gamma^1_{22} = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial u^1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial u^2}. \tag{۱۳۰۱۸}$$

امثله و تمرین

۱ . علایم کریستوفل یک کره در مختصات کروی عبارتند از

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = 0, \qquad \Gamma^1_{22} = \cos u^1 \sin u^1, \qquad \Gamma^2_{12} = -\tan u^1\ (u^1 = \theta).$$

۲ . علایم کریستوفل صفحه در مختصات دکارتی همه‌صفرند: $\Gamma^k_{ij} = 0$. با اینحال، در مختصات قطبی (ρ, ϕ) داریم

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = 0, \qquad \Gamma^1_{22} = -\rho, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{\rho}.$$

این مثال نشان می‌دهد که علایم کریستوفل نوع دوم یک سطح ممکن است در یک دستگاه همه صفر و در دستگاهی دیگر مخالف صفر باشند.

۳ . فرمولهای تبدیل علایم کریستوفل تحت تبدیل مختصات $u^{i'} = u^{i'}(u^1, u^2)$ را به‌دست

آوریـــد .

داریم

$$\mathbf{r}_{i'j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \mathbf{r}_{ij} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} \mathbf{r}_i, \qquad \mathbf{r}_{l'} = \frac{\partial u^l}{\partial u^{l'}} \mathbf{r}_l,$$

که از آنجا

$$\Gamma_{i'j'l'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^l}{\partial u^{l'}} \Gamma_{ijl} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} \frac{\partial u^l}{\partial u^{l'}} g_{il}.$$

طرف راست این فرمول نه فقط شامل علایم کریستوفل در مختصات قدیم و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم مختصات است بلکه شامل ضرایب اولین فرم اساسی نیز می‌باشد . با ضرب این معادله در (۲۸۰۱۶) ، یعنی

$$g^{l'k'} = \frac{\partial u^{l'}}{\partial u^r} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k} g^{rk},$$

پس از چند محاسبهٔ ساده ، معلوم می‌شود که

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k} \Gamma^k_{ij} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}. \qquad (۱۴۰۱۸)$$

فرمولهای تبدیل علایم کریستوفل نوع دوم ، به‌خلاف نوع اول ، فقط شامل علایم در مختصات قدیم و مشتقات مختصات‌اند . اما با قوانین تبدیل ضرایب هر دو فرم از دو جهت متفاوت‌اند . اول اینکه ، شامل مشتقات دوم مختصات قدیم نسبت به مختصات جدیداند . دوم اینکه ، نسبت به علایم کریستوفل قدیم همگن نیستند .

۴ . علایم کریستوفل را برای سطوح زیر حساب کنید :

(آ) زنجیرگون ؛

(ب) کره‌نما ؛

(پ) مارپیچ گون ؛

(ت) چنبره

در پارامتری سازیهایی که در تمرینات پیشتر داده شده‌اند .

۵ . علایم کریستوفل یک سطح گستردنی را بیابید . آنها را برحسب طول قوس ، انحنا ، و تاب یال بازگشت بیان نمایید .

۶ . علایم کریستوفل سطح

$$z = f(x, y)$$

را ، با استفاده از نمادهای

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

به‌دست آورید.

۷ . ثابت کنید که

$$\frac{\partial(\ln g)}{\partial u^i} = \Gamma^k_{ik} = \Gamma^1_{i1} + \Gamma^2_{i2}.$$

۸ . ثابت کنیدکه اگر ω زاویهٔ بین منحنیهای مختصات باشد،

$$\sqrt{g}\frac{\partial \omega}{\partial u^1} = -\frac{\Gamma^2_{11}}{g^{22}} - \frac{\Gamma^1_{12}}{g^{11}}, \qquad \sqrt{g}\frac{\partial \omega}{\partial u^2} = -\frac{\Gamma^2_{12}}{g^{22}} - \frac{\Gamma^2_{22}}{g^{11}}.$$

۳۰۱۸ فرمولهای گاوس و کودازی[1]

قضیهٔ ۱ . *ضرایب اولین و دومین فرم اساسی یک سطح از کلاس C_3 در معادلات زیر صدق می‌کنند:*

$$b = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\, \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\, \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\, \partial u^1} - (\Gamma^s_{11}\Gamma^r_{22} - \Gamma^s_{12}\Gamma^r_{12})g_{sr}; \tag{۱۵۰۱۸}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^l_{11}b_{l2} &= \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^l_{12}b_{l1}, \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + \Gamma^l_{21}b_{l2} &= \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + \Gamma^l_{22}b_{l1}. \end{aligned} \tag{۱۶۰۱۸}$$

فرمول (۱۵۰۱۸) **فرمول گاوس**، و فرمولهای (۱۶۰۱۸) **فرمولهای کودازی** نامیده می‌شوند.

برهان. با مشتقگیری از (۱۰۱۸) نسبت به u^k، داریم

$$\mathbf{r}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k}\mathbf{r}_l + \Gamma^s_{ij}\mathbf{r}_{sk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}\mathbf{m} + b_{ij}\mathbf{m}_k.$$

با گذاردن عبارات (۱۰۱۸) و (۲۰۱۸) به‌جای $\mathbf{r}_{jk}$ و $\mathbf{m}_k$، نتیجه می‌شود که

---
1. *Codazzi*

$$\mathbf{r}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k}\mathbf{r}_l + \Gamma^s_{ij}\Gamma^l_{sk}\mathbf{r}_l + \Gamma^s_{ij}b_{sk}\mathbf{m} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}\mathbf{m} - b_{ij}b^l_k\mathbf{r}_l$$
$$= \left(\frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{ij}\Gamma^l_{sk} - b_{ij}b^l_k\right)\mathbf{r}_l + \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{ij}b_{sk}\right)\mathbf{m}.$$

پیوستگی مشتق سوم ایجاب می‌کند که

$$\mathbf{r}_{ijk} = \mathbf{r}_{ikj}.$$

با گذاردن عبارت فوق به‌جای $\mathbf{r}_{ijk}$ و عبارت حاصل شده از قبلی با تعویض اندیسهای j و k به‌جای $\mathbf{r}_{ikj}$ ، یک معادلهٔ برداری به‌دست می‌آید که با معادلات حاصل از متحد گرفتن ضرایب $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ در طرفین معادل است. این‌کار به معادلات زیر منجر می‌شود :

$$\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - b_{ij}b^s_k = \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj} - b_{ik}b^s_j \tag{۱۷.۱۸}$$

(اندیسهای ظاهری s و l با r و s عوض شده‌اند) ، و

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^l_{ij}b_{lk} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^l_{ik}b_{lj} \tag{۱۸.۱۸}$$

(که درآن s با l عوض شده است) . فرمولهای (۱۷.۱۸) و (۱۸.۱۸) بستگیهای بین ضرایب دو فرم اساسی را نشان می‌دهند .

برای به‌دست‌آوردن (۱۵.۱۸) ، طرفین (۱۷.۱۸) را در g_{sl} ضرب می‌کنیم . پس از تغییر اندیس جمعبندی در جمعوند دوم از r تا s ، خواهیم داشت

$$g_{sl}\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{ij}\Gamma_{skl} - b_{ij}b_{kl} = g_{sl}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^s_{ik}\Gamma_{sjl} - b_{ik}b_{jl}. \tag{۱۹.۱۸}$$

توجه کنید که یک جایگشت از اندیسهای آزاد j و k طرف چپ (۱۹.۱۸) را به‌طرف راست بدل می‌کند . لذا ، کافی است همهٔ تبدیلات لازم فقط در طرف چپ اعمال شوند و طرف راست تبدیل یافته را باجایگشتی از j و k در عبارت حاصل به‌دست آورد .

مشتقگیری از اتحاد $\Gamma^s_{ij}g_{sl} = \Gamma_{ijl}$ نسبت به u^k نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^k}g_{sl} + \Gamma^s_{ij}\frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k},$$

که از آنجا

$$g_{sl}\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ij}\frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k}.$$

با گذاردن این در طرف چپ (۱۹.۱۸) ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ij}\frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{ij}\Gamma_{skl} - b_{ij}b_{kl}$$
$$= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ij}\left[\frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{sk}}{\partial u^l}\right)\right] - b_{ij}b_{kl}$$
$$= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \tfrac{1}{2}\Gamma^s_{ij}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^s}\right) - b_{ij}b_{kl}$$
$$= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ij}\Gamma_{kls} - b_{ij}b_{kl} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - g_{sr}\Gamma^s_{ij}\Gamma^r_{kl} - b_{ij}b_{kl}.$$

لذا ، معادلهٔ (۱۹۰۱۸) معادل است با

$$\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - g_{sr}\Gamma^s_{ij}\Gamma^r_{kl} - b_{ij}b_{kl} = \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} - g_{sr}\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{jl} - b_{ik}b_{jl},$$

یا

$$b_{ij}b_{kl} - b_{ik}b_{jl} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{u^j} - g_{rs}(\Gamma^s_{ij}\Gamma^r_{kl} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{jl}) \cdot \qquad (۲۰۰۱۸)$$

با محاسبه‌ای ساده ، از (۹۰۱۸) حاصل می‌شود

$$\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial u^i\,\partial u^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j\,\partial u^k} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k\,\partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial u^i\,\partial u^j}\right),$$

که می‌توان‌آن را در (۲۰۰۱۸) قرار داد . حال ، با جانشانی $i = j = 1$ و $k = l = 2$ ، فرمول گاوس (۱۵۰۱۸) به‌دست می‌آید . جانشانیهای دیگری از اندیسها به اتحادهایی بدیهی و یا معادله‌ای معادل با (۱۵۰۱۸) منجر خواهند شد .

فقط دوفرمول‌از (۱۸۰۱۸) مستقل‌اند ; فرمولهایی که به‌ازای $i = 1, j = 1, k = 2$ یا $i = 2, j = 1, k = 2$ حاصل می‌شوند . اینها با فرمولهای‌کودازی (۱۶۰۱۸) یکی‌هستند . ترکیبات دیگری از اندیسها معادلات‌جدیدی به‌دست نخواهند داد .

به‌عنوان نتیجه ، قضیهٔ مهم زیر از گاوس را به‌دست می‌آوریم که وی آن را (*theorema egregium*) نامیده است .

قضیهٔ ۲ (گاوس) . *انحنای گاوسی K یک سطح از کلاس C_3 فقط به ضرایب اولین فرم اساسی و مشتقات مراتب اول و دوم آنها بستگی دارد .*

برهان . از (۶۰۱۷) و (۱۵۰۱۸) فوراً نتیجه می‌شود که

$$(۲۰\cdot۱۸)\quad K = \frac{b}{g} = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\,\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\,\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\,\partial u^1} - (\Gamma^r_{11}\Gamma^s_{22} - \Gamma^r_{12}\Gamma^s_{12})g_{rs}\right].$$

طرف راست فقط شامل ضرایب g_{ij} و مشتقات آنها با علایم کریستوفل است که آنها را نیز می‌توان، طبق قضیهٔ ۲۰۱۸، برحسب ضرایب g_{ij} بیان کرد.

از زمان کشف این قضیه فرمولهای متعدد معادلی برای بیان K برحسب ضرایب g_{ij} به‌دست آمده‌اند. علاوه بر (۲۱۰۱۸)، به‌دو تا از آنها اشاره می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial \Gamma^s_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma^s_{12}}{\partial u^1} + (\Gamma^r_{11}\Gamma^s_{r2} - \Gamma^r_{12}\Gamma^s_{r1})\right]g_{s2},$$

و

$$K = \frac{1}{g^2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 u^2} - \dfrac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\,\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\,\partial u^1} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1} & \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & g_{11} & g_{12} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{g^2}\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & g_{11} & g_{12} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

فرمول اخیر K را مستقیما "برحسب g_{ij} ها، بدون‌دخالت علایم کریستوفل، بیان می‌کند.

فرمول مربوط به K در مختصات خاص خیلی ساده‌تر می‌شود. یافتن فرمولی برای مختصات متعامد $(g_{12} = 0)$ به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌شود (ر.ک. تمرین ۱ در زیر). حال ثابت می‌کنیم، **در مختصات نیمه ژئودزیک** $(g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = G)$، که‌درآن علایم کریستوفل با فرمولهای (۱۲۰۱۸) داده می‌شوند، داریم

$$(۲۲\cdot۱۸)\qquad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^1\,\partial u^1}.$$

در واقع، با گذاردن مقادیر

$$g_{11} = 1,\quad g_{12} = 0,\quad g_{22} = G$$

در (۲۱۰۱۸)، به‌دست می‌آوریم

$$K = \frac{1}{G}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^1\,\partial u^1} - (\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12}) - (\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12})G \right].$$

بنابر (۱۲۰۱۸)، داریم

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^1},$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^2}\ ;$$

و درنتیجه،

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^1\,\partial u^1} + \frac{1}{4G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u^1}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{G}}\,\frac{\sqrt{G}\dfrac{\partial}{\partial u^1}\left(\dfrac{\partial G}{\partial u^1}\right) - \dfrac{\partial G}{\partial u^1}\dfrac{1}{2\sqrt{G}}\dfrac{\partial G}{\partial u^1}}{G} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{G}}\,\frac{\sqrt{G}\dfrac{\partial}{\partial u^1}\left(\dfrac{\partial G}{\partial u^1}\right) - \dfrac{\partial G}{\partial u^1}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u^1}}{G} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\dfrac{\partial G}{\partial u^1}}{\sqrt{G}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^1\,\partial u^1}. \end{aligned}$$

امثله و تمرین

۱. ثابت کنید، درمختصات متعامد $(g_{12} = 0)$، فرمول (۲۱۰۱۸) برای انحنای گاوسی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}\right)\right]. \qquad (۲۳۰۱۸)$$

۲. بالاخص، در مختصات ایزومتریک، وقتی $g_{12} = g_{22} = \rho^2, g_{12} = 0$، داریم

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 \ln\rho}{\partial u^1\,\partial u^1} + \frac{\partial^2 \ln\rho}{\partial u^2\,\partial u^2}\right) \qquad (۲۴۰۱۸)$$

یا، با استفاده از عملگر لاپلاس[1]

1. Laplace

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^1\, \partial u^1} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2\, \partial u^2},$$

به‌دست می‌آوریم

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\Delta \ln \rho.$$

۳ . فرمولهای کودازی را در مختصات نیمه ژئودزیک و مختصات همگرمایی بنویسید .

۴ . با استفاده‌ازفرمولهای‌این‌بخش، مجددا "انحنای گاوسی سطوح منظور در بخشهای پیش را حساب کنید .

۵ . ثابت کنید فرمولهای کودازی (۱۶۰۱۸) در تعویض b_{ij} با g_{ij} متحدا" برقرارند .

۶ . ثابت کنید انحنای گاوسی یک سطح با اولین فرم اساسی

$$ds^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2}[(du^1)^2 + (du^2)^2]$$

مساوی $1/a^2$ است . به‌ازای چه λ ای ، فرم درجهٔ دوم $\lambda\, ds^2$ دومین فرم اساسی این سطح است ؟

۴۰۱۸ قضیهٔ اساسی نظریهٔ سطوح

در بخش پیش، رابطهٔ بین دو فرم اساسی یک سطح به‌دست آمد . دراین بخش، به‌این امرکه‌آیا این معادلات برای وجود یک سطح با فرمولهای‌اساسی مفروض کافی‌اند می‌پردازیم . جواب مثبت این سوال موضوع قضیهٔ بونه[1] است ، که قضیهٔ اساسی نظریهٔ سطوح نیز نام دارد . برهان این قضیه بر نظریهٔ دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی استواراست ، و در اینجا به تفصیل بیان نمی‌شود . با اینحال ، مایلیم ایدهٔ اساسی برهان را به‌طور مختصر شرح دهیم .

همانطورکه دیدیم ، تابع $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ ، که نمایش پارامتری سطح است ، در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ij} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij}\mathbf{m}, \\ \mathbf{m}_i &= -b_i^j \mathbf{r}_j, \end{aligned} \tag{۲۵۰۱۸}$$

که دستگاهی است از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دو ، و ، علاوه براین ، در شرط $\mathbf{m}\mathbf{r}_i = 0$ نیزصدق‌می‌نماید . پنج‌معادلهٔ برداری‌در (۲۵۰۱۸) وجوددارندکه‌باپانزده‌معادلهٔ

---

1. Bonnet

اسکالر معادل‌اند. این معادلات را می‌توان به‌صورت دستگاهی از معادلات جزئی خطی مرتبهٔ اول با مجهولات $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ درنظر گرفت. همانطور که پیشتر دیدیم، ضرایب این دستگاه به‌وسیلهٔ اولین و دومین فرمهای اساسی سطح معین می‌شوند. به‌آسانی، با محاسبه، ثابت می‌شود که به‌ازای جواب $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ از دستگاه (۲۵۰۱۸) به‌طوری که $\mathbf{r}_i\mathbf{m} = 0$ ، و ضرایب (۲۵۰۱۸) از ضرایب فرمهای مفروض $I = g_{ij}du^i du^j$ و $\mathrm{II} = b_{ij}\, du^i du^j$ طبق (۱۰۰۱۸) و (۴۰۱۸) حساب می‌شوند، معادلهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ نمایش سطحی است که اولین فرم اساسی‌اش با I و دومین فرم اساسی‌اش با II یکی است. کل مسئلهٔ وجود (به‌طور موضعی) سطح مطلوب به‌مسئلهٔ وجود یک جواب (۲۵۰۱۸) با خاصیت‌اضافی $\mathbf{m}\mathbf{r}_i = 0$ تحویل می‌گردد.

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی شرط‌لازم و کافی برای وجود جواب (۲۵۰۱۸) در یک همسایگی به‌دست می‌دهد، به‌این صورت که معادلات $\mathbf{r}_{ijk} = \mathbf{r}_{ikj}, \mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ji}$ باید از معادلات (۲۵۰۱۸) نتیجه شوند. بااستفاده از معادلهٔ اول، فرمولهای گاوس و کودازی (۱۵۰۱۸) و (۱۶۰۱۸) به‌دست می‌آیند. می‌توان نشان داد که این معادلات با $\mathbf{r}_{ijk} = \mathbf{r}_{ikj}$ معادل‌اند. معادلهٔ دوم $\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ji}$ نیز به معادلاتی معادل فرمولهای گاوس و کودازی منجر می‌شود. از اینرو، برقراری فرمولهای (۱۵۰۱۸) و (۱۶۰۱۸) وجود جواب را ایجاب می‌کند. جواب باید بیشتر خاص شود تا در شرط اضافی صدق کند، که این نیز عملی است.

این امر مآلا" قضیهٔ زیر را به‌دست خواهد داد:

قضیه (بونه). *دو فرم دیفرانسیل درجهٔ دوم $\mathrm{I} = g_{ij}\, du^i du^j$ با ضرایب از کلاس C_2 و $\mathrm{II} = g_{ij}\, du^i du^j$ با ضرایب از کلاس C_1 که در قلمروی از صفحهٔ u^1u^2 تعریف شده‌اند، در همسایگی یک نقطه از این قلمرو اولین و دومین فرم اساسی سطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ اند اگر و فقط اگر*

۱. $g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 > 0, g_{11} > 0$ ؛

۲. *ضرایب g_{ij} و b_{ij} در معادلات گاوس (۱۵۰۱۸) و کودازی (۱۶۰۱۸)، که در آنها ضرایب Γ^k_{ij} با (۱۰۰۱۸) برحسب g_{ij} بیان شده‌اند، صدق نمایند.*

سطح کاملا" با دو فرم اساسی، و با تقریب جابش در فضا، مشخص می‌شود؛ یعنی، دو سطح مختلف با اولین و دومین فرمهای اساسی یکسان را می‌توان با یک حرکت اقلیدسی در فضا برهم منطبق کرد.

امثله و تمرین

۱ . فرمهای $(du^1)^2 + (du^2)^2$ و $(du^1)^2 - (du^2)^2$ نمی‌توانند اولیــن و دومین فرم اساسی یک سطح باشند ، چرا که در فرمولهای گاوس صدق نمی‌کنند . در واقع ، با استفاده از فرم اول و فرمولهای (۲۲۰۱۸) ، داریم $K = 0$. از سوی دیگر ، $b/g = -1$.

۲ . فرمهای $\mathrm{I} = (du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2$ و $\mathrm{II} = \cos^2 u^1 (du^1)^2 + (du^2)^2$ نمی‌توانند اولین و دومین فرم اساسی یک سطح باشند . با آنکه در این حالت فرمول گاوس برقرار است (و $K = 1$) ، فرمولهای کودازی برقرار نیستند . در فرمول

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + \Gamma^l_{21} b_{l2} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + \Gamma^l_{22} b_{l1}$$

طرف چپ بــرابر $-\tan u^1$ است حال آنکه طرف راست مساوی $\cos^3 u^1 \sin u^1$ می‌باشد .

۳ . تحقیق کنیــد که فرمهای $\mathrm{I} = (du^1)^2 + (du^2)^2$ و $\mathrm{II} = (du^1)^2$ می‌توانند اولین و دومین فرم اساسی یک سطح باشند . توجه کنید که ، وقتی فرم اول $(du^1)^2 + (du^2)^2$ باشد ، فرمولهای کودازی خودبخود برقرار می‌باشند .

۵۰۱۸ تفهیم اولین فرم اساسی

قضیهٔ زیر را نیز بدون اثبات ذکر می‌کنیم .

قضیه . *هر فــرم دیفرانسیل درجهٔ دوم $g_{ij}\, du^i\, du^j$ با ضرایب از کلاس C_1 ، که معین مثبت باشد ، موضعاً " (یعنی ، در همسایگی به قدر کافی کوچک هر نقطه) اولین فرم اساسی سطحی مانند $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ از کلاس C_2 می‌باشد . از این سطحها بی‌نهایت به اشکال مختلف وجود دارند .*

طبق قضیهٔ بــونه ، اگــر دومین فرم اساسی رانیز داشته باشیم ، شکل سطح مشخص خواهد شد .

★ ۱۹ تانسورها و جبرتانسورها

۱۰۱۹ اشیاء هندسی

گردآیهٔ ضرایب اولین فرم اساسی ، گردآیهٔ ضرایب دومین فرم اساسی ، و گردآیهٔ علایم کریستوفل یک سطــح نمونه‌هایی هستند از گردآیه‌هایی از توابع حقیقی یک نقطه از سطح که به انتخاب مختصات منحنی‌الخط موضعی بستگی دارند . همانطور که دیدیم ، اگر مقادیر

همهٔ توابع یک گردآیه در یک نقطه به‌ازای یک دستگاه مختصات و همچنین تبدیلات مختصات را بدانیم ، می‌توانیم مقادیر توابع این گردآیه را در دستگاه مختصات جدید مشخص کنیم . فرمولهای نظیر فقط شامل توابع گردآیه در دستگاه مختصات اولیه و مشتقات تبدیلات مختصات می‌باشند .

یک گردآیهٔ مرتب از توابع یک نقطه بر یک سطح که به مختصات موضعی طوری وابسته باشد که عناصر گردآیهٔ نظیر به یک دستگاه مختصات فقط توابعی از عنصرهای گردآیه نظیر به دستگاه مختصات دیگر و مشتقات (از مراتب مختلف) توابع نمایش تغییر مختصات است **شیٔ هندسی دیفرانسیل** نامیده می‌شود . توابع گردآیه به‌ازای مختصات مفروض **مولفه‌های** شیٔ هندسی نام دارند . ما با چند نمونه از اشیاء هندسی دیفرانسیل برخورده‌ایم . قانون تبدیل (۲۸۰۱۶) و (۹۰۱۷) برای مولفه‌های اشیاء g_{ij}, b_{ij} فقط شامل مشتقات مرتبهٔ اولند ، حال آنکه قانون تبدیل (۱۴۰۱۸) برای مولفه‌های Γ_{ij}^k شامل مشتقات مرتبهٔ دوم نیز هست . توجه کنید که گردآیهٔ علایم کریستوفل نوع اول ، یعنی Γ_{ijk} ، به هیچوجه یک شیٔ هندسی نیست ، زیرا قانون تبدیل (ر.ک. مثال ۳ ، ۲۰۱۸) شامل ضرایب g_{ij} اولین فرم اساسی نیز می‌باشد .

دربین اشیاء هندسی روی یک سطح ، تانسورها بویژه مفید و ساده‌اند . جبرتانسورها و حساب تانسورها به‌صورت ابزارهای مهمی درهندسه و فیزیک درآمده‌اند . در واقع ، در سراسر نظریهٔ سطوح این کتاب ، روشهای تانسوری به‌کار می‌روند . هدف ازبخش ۱۹ آن است که مفهوم تانسور و چندمطلب اساسی درباب آن را بنوعی به‌خواننده عرضه کنیم ، لیکن ، خواندن بخش ۱۹ برای فهمیدن کتاب لازم نیست . جزدربخش ۲۴ که مفاهیم اساسی آنالیز تانسورها عرضه میشوند، و ۱۳۰۳۰، نتایج بخش ۱۹ مورد مراجعهٔ ما در این کتاب قرار نخواهند گرفت.

۲۰۱۹ تانسورها در فضای برداری n بعدی

برای حالت کلی n بعدی تعریفی می‌آوریم . لذا ، اندیسهای ما مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را گرفته و جمعبندیها روی مقادیر $1, 2, \ldots, n$ از اندیس جمعبندی صورت می‌گیرند . با این پیرایش، توافق جمعبندی زیر بخش ۱۰۱۵ را در اینجا اعمال می‌کنیم .

یک فضای برداری n بعدی روی اعداد حقیقی مانند R^n را درنظر می‌گیریم . هر مجموعه از n بردار مستقل مانند $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ را می‌توان به عنوان پایه‌ای از این فضا به‌کار برد ، و هر بردار مانند $\mathbf{v}$ را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به‌شکل

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

نمایش داد . اعداد v^i **مولفه‌های** بردار $\mathbf{v}$ نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{e}_i\}$ نامیده می‌شوند .

بردارهای پایهٔ دیگر $\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}$ را همواره می‌توان به شکل

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i \qquad (۱.۱۹)$$

بیان نمود. n^2 عدد $A^i_{i'}$ یک ماتریس نامنفرد تشکیل می‌دهند به‌نام **ماتریس تغییر پایه**. عنصرهای معکوس ماتریس $(A^i_{i'})$ را با $A^{i'}_i$ نشان می‌دهیم. بنابراین،

$$A^i_{r'}A^{r'}_j = \delta^i_j, \qquad A^{i'}_r A^r_{j'} = \delta^{i'}_{j'}. \qquad (۲.۱۹)$$

$\mathbf{v}$ نسبت به‌این پایهٔ جدید مجموعهٔ دیگری از مولفه‌ها مانند $[v^{1'}, v^{2'},\ldots,v^{n'}]$ را داراست. به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$v^{i'} = A^{i'}_i v^i \qquad (۳.۱۹)$$

درواقع، $\mathbf{v} = v^{i'}\mathbf{e}_{i'} = v^i\mathbf{e}_i$. باگذاردن (۱.۱۹) به‌جای $\mathbf{e}_{i'}$، به‌دست می‌آید $v^{i'}A^i_{i'}\mathbf{e}_i = v^i\mathbf{e}_i$. این، به‌خاطر استقلال بردارهای $\mathbf{e}_i$، معادل $v^{i'}A^i_{i'} = v^i$ است. باضرب طرفین در $A^{k'}_i$، خواهیم داشت $v^{i'}A^i_{i'}A^{k'}_i = v^iA^{k'}_i$، و، بنابر (۲.۱۹)، $v^{k'} = A^{k'}_i v^i$. تغییر اندیس k' به i' (۳.۱۹) را به‌دست خواهد داد.

توجه‌کنید که یک بردار با معلوم بودن مولفه‌هایش نسبت به یک پایه معین است. تغییر مولفه‌ها، وقتی پایه تغییر کند، با قانون تبدیل (۳.۱۹) معین خواهد شد.

یک **تانسور از نوع** (k, l) (که $k, l \geq 0$ اعدادی صحیح‌اند) یا یک تانسور k بار **کنتراواریان** و l بار **کوواریان** که با دستگاهی مرکب از $(k+l)^n$ مولفه نسبت به‌پایه‌ای مانند $\mathbf{e}_i$ معین می‌شود، و به‌وسیلهٔ حرفی با k بالانویس و l زیرنویس مانند

$$a^{i_1 i_2\cdots i_k}_{j_1 j_2\cdots j_l}$$

نموده می‌شود، چنان است که اگر پایه به $\mathbf{e}_{i'}$ تغییر یابد، بنابر فرمول (۱.۱۹)، مولفه‌ها نسبت به پایهٔ جدید عبارت خواهند بود از

$$a^{i'_1 i'_2\cdots i'_k}_{j'_1 j'_2\cdots j'_l} = A^{i'_1}_{i_1} A^{i'_2}_{i_2}\cdots A^{i'_k}_{i_k} A^{j_1}_{j'_1} A^{j_2}_{j'_2}\cdots A^{j_l}_{j'_l}\, a^{i_1 i_2\cdots i_k}_{j_1 j_2\cdots j_l}. \qquad (۴.۱۹)$$

در این قانون تبدیل، به‌ازای هر اندیس بالایی یک ضریب $A^{i'}_i$، و به‌ازای هر اندیس پایینی یک ضریب $A^j_{j'}$ از ماتریس معکوس را داریم.

یک تانسور از نوع $(0,0)$، به‌نام **اسکالر**، فقط مولفهٔ a را دارد که به انتخاب پایه بستگی ندارد. آن را می‌توان با خود a یکی کرد.

قانون تبدیل تانسورها از نوع $(1,0)$ بر (۳.۱۹) منطبق است. از اینرو، می‌توان یک بردار را یک تانسور از نوع $(1,0)$ درنظر گرفت.

یک تانسور از نوع $(0, 1)$ یک **بردار کوواریان** یا یک **همبردار** نامیده می‌شود. مولفه‌های v_k یک بردار کوواریان دارای قانون تبدیل

$$v_{i'} = A^i_{i'}v_i \qquad (۵.۱۹)$$

است .

امثله و تمرین

۱ . ثابت کنید که اگر با مولفه‌های a^k_{ij} یک تانسور نسبت به پایهٔ $e_1, e_2, \dots, e_n$ شروع کنیم ، بعد تبدیل مولفه‌ها نظیر به تغییر پایهٔ $e_{i'} = A^i_{i'} e_i$ را اعمال کنیم ، و سپس براین مولفه‌ها تبدیل نظیر به تغییر $e_{i''} = A^{i'}_{i''} e_{i'}$ را اعمال نماییم ، مولفه‌های حاصل همان مولفه‌های حاصل از تبدیل نظیر به تغییر مستقیم از پایهٔ e_i به $e_{i''}$ خواهند بود .

راهنمایی . توجه‌کنید که $A^i_{i''} = A^i_{i'} A^{i'}_{i''}$ ؛ یعنی ، ماتریس تغییر $e_i \to e_{i''}$ حاصل ضرب ماتریسهای تغییرات $e_{i'} \to e_{i''}$ و $e_i \to e_{i'}$ است .

۲ . اگر همهٔ مولفه‌های یک تانسور نسبت به پایه صفر باشند ، نسبت به پایهٔ دیگر نیز صفر خواهند بود .

۳ . ثابت کنید که علایم کرونکر δ^j_i مولفه‌های یک تانسور از نوع $(1,1)$ نسبت به هر پایه‌اند . علایم کرونکر δ_{ij} و δ^{ij} تانسور تعریف نمی‌کنند .

۳.۱۹ تانسورها به‌عنوان توابع چندخطی

راه دیگری برای تعریف تانسور در فضای برداری n بعدی وجود دارد که از پایهٔ فضا استفاده نمی‌شود .

فرض کنیم $V = R^n$ یک فضای n بعدی و $\hat{V}^*$ دوگان آن باشد ؛ یعنی ، فضای خطی مرکب از توابع خطی اسکالر بر V با تعاریف طبیعی مجموع و حاصل ضرب در یک اسکالر .

یک تانسور از نوع (k, l) تابعی تعریف می‌شود که $V^l \times \hat{V}^k$ را بتوی R می‌نگارد ، بر هر محور خطی است یا ، به زبان دیگر ، تابعی از $l + k$ متغیر است ، l متغیر از فضای برداری V و k متغیر از فضای دوگان $\hat{V}$ که نسبت به هر متغیر خطی است .

به‌ازای تانسور $\mathbf{a}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_k)$ ، که‌درآن $\hat{\mathbf{v}}$ ها در $\hat{V}$ و $\mathbf{v}$ ها در V تغییر می‌کنند ، و پایهٔ $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ از V ، مولفه‌های $a^{j_1, \dots, j_k}_{i_1, \dots, i_l}$ را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم :

$$a^{j_1, \dots, j_k}_{i_1, \dots, i_l} = \mathbf{a}(e_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_l}, \hat{\mathbf{e}}^{j_1}, \dots, \hat{\mathbf{e}}^{j_k}),$$

که درآن $\hat{\mathbf{e}}^1, \dots, \hat{\mathbf{e}}^n$ عنصرهای پایهٔ دوگان $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ هستند ؛ یعنی ، توابع خطی $\hat{\mathbf{e}}^i$ به‌طوری که

$$\hat{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j.$$

تمرین

۱ . ثابت کنید که ، در تحدید به تانسورهای از نوع $(1,2)$ ، مولفه‌ها که به‌صورت فوق تعریف شده‌اند از قانون تبدیل (۴۰۱۹) ، وقتی پایه تغییر می‌کند ، تبعیت می‌کنند .
راهنمایی . توجه کنید که ، وقتی پایه‌ای از V بر طبق فرمولهای (۱۰۱۹) تغییر کند ، پایهٔ دوگان نظیر برطبق فرمولهای $\hat{\mathbf{e}}^{i'} = A^{i'}_{i}\mathbf{e}_i$ تغییر خواهد کرد .

۲ . برای درنظر گرفتن بردارها به‌عنوان تانسورهایی از نوع $(1,0)$ ، باید بردار $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ را با تابع خطی $\mathbf{v}(\hat{\mathbf{v}})$ تعریف شده در $\hat{V}$ ، که $\mathbf{v}(\hat{\mathbf{e}}^i) = v^i$ و $\hat{\mathbf{e}}^i$ عنصر i م پایهٔ دوگان $\mathbf{e}_i$ است ، یکی کنیم . ثابت کنید این انطباق به انتخاب پایهٔ $\mathbf{e}_i$ بستگی ندارد .

۴۰۱۹ تانسورها در فضای اقلیدسی

بردارها در فضای اقلیدسی نه فقط یک فضای برداری تشکیل می‌دهند بلکه یک تابع اسکالر دوتایی نیز دارند به‌نام **ضرب نقطه‌ای** یا **ضرب اسکالر**. این ضرب نسبت به هر متغیر خود خطی است ، و ، وقتی هر دو متغیر یک مقدار ناصفر بگیرند ، مثبت می‌باشد . اگر در یک فضای n بعدی ضرب نقطه‌ای یا ضرب اسکالر را با این خواص تعریف کنیم ، چیزی به‌دست می‌آید که ما فضای برداری اقلیدسی n بعدی می‌نامیم . با استفاده از ضرب نقطه‌ای ، می‌توان **طول** یک بردار را به‌عنوان جذر مربع اسکالر بردار تعریف کرد . این طول نامنفی است و فقط به‌ازای بردار صفر برابر صفر است .

به‌ازای دو بردار u, v در یک فضای برداری اقلیدسی و پایهٔ $\mathbf{e}_i$ از فضا ، قرار می‌دهیم

$$\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j.$$

حاصل ضرب اسکالر این بردارها مساوی است با

$$\mathbf{uv} = u^i v^j(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = g_{ij}u^i v^j, \tag{۶۰۱۹}$$

که در آن ضرایب $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ تابع انتخاب پایه می‌باشند . پس از تغییر پایه به (۱۰۱۹) ، ضرایب جدید عبارت خواهند بود از

$$g_{i'j'} = \mathbf{e}_{i'}\mathbf{e}_{j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = A^i_{i'}A^j_{j'}g_{ij}.$$

بنابراین ، g_{ij} مولفه‌های یک تانسور از نوع $(0,2)$ می‌باشند . این تانسور در فضای برداری اقلیدسی نقشی بسیار اساسی دارد و **تانسور اساسی** یا **تانسور متری** نامیده می‌شود ، زیرا برای تعیین طول یک بردار به‌کار می‌رود :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{g_{ij}v^i v^j}.$$

خواص ضرب نقطه‌ای خواص زیر را برای تانسور متری ایجاب می‌کنند :

۱ . $g_{ij} = g_{ji}$ ؛

۲ . $\begin{vmatrix} g_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ ؛ $g =$

۳ . فرم درجهٔ دوم $g_{ij}u^iu^j$ معین مثبت است ؛ یعنی ، مقدارش مثبت است مگر آنکه به‌ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $u^i = 0$. این ایجاب می‌کند که دترمینان g مثبت باشد .

حال اگر g^{ij} را عناصر ماتریس معکوس (g_{ij}) تعریف کنیم ، یعنی با شرایط

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \qquad g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i, \tag{۷۰۱۹}$$

می‌توان تحقیق کرد که کمیتهای g^{ij} مولفه‌های یک تانسور از نوع $(2, 0)$ می‌باشند . این تانسور را **تانسور متری کنتراواریان** می‌نامیم . این تانسور نیز از خواص ۱ ، ۲ ، و ۳ برخوردار است .

در یک فضای اقلیدسی همواره می‌توان پایه‌ای چون $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ یافت به‌طوری‌که هر بردار به‌طول یک بوده و هر دو بردار متمایز دارای حاصل ضرب نقطه‌ای صفر باشند . نسبت به‌این پایه ، که **پایهٔ متعامد یکه** نام دارد ، تانسور متری دارای مولفه‌های زیر است :

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \qquad g^{ij} = \delta^{ij}.$$

وقتی فضاهای اقلیدسی را درنظر می‌گیریم ، مناسبتر آن است که اندیسهای کوواریان و کنتراواریان را جدا مرتب نکنیم ، بلکه همهٔ $k + l$ اندیس را دریک سطر مرتب کرده ودر جای لازم به‌عنوان زیرنویس یا بالانویس قرار دهیم . برای احتراز از ابهام ، جاهای آزاد را با نقطه پر می‌کنیم . مثلاً ،

$$a_{i\cdot\cdot l}^{\cdot jk}$$

مولفه‌های یک تانسور از نوع $(2,2)$ را نشان می‌دهد ؛ اندیس اول ، یعنی i ، یک اندیس کوواریان است ؛ اندیسهای دوم و سوم ، یعنی j, k ، اندیسهای کنتراواریان هستند ؛ و اندیس آخر ، یعنی l ، باز یک اندیس کوواریان می‌باشد .

امثله و تمرین

۱ . ثابت کنید هرگاه مولفه‌های یک تانسور از نوع $(0, 2)$ نسبت به یک پایه متقارن باشند ، یعنی $a_{ij} = a_{ji}$ ، آنگاه مولفه‌های آن نسبت به هر پایه متقارن می‌باشند . این **تانسور متقارن** نامیدن خود تانسور را توجیه خواهد کرد .

. ثابت کنید g^{ij} ها مولفه‌های یک تانسور از نوع $(2, 0)$ اند .

۳ . فضاهای اقلیدسی‌نما نیز وجود دارند با یک ضرب نقطه‌ای که تانسوری مانند g_{ij} تولید می‌کنند که فقط در شرایط ۱ و ۲ صدق می‌نماید .

۵.۱۹ اعمال بر تانسورها

حال بر تانسورها چند عمل تعریف می‌کنیم که حاصل آنها مجددا" تانسور است.

۱. یک **جایگشت اندیسها** تانسور جدیدی به‌دست می‌دهد؛ مثلا"،

$$b_{ijk} = a_{jki}$$

مولفه‌های یک تانسور هستند اگر a_{ijk} ها چنین باشند. در تعریف تانسورهای ۳.۱۹، این عمل نظیر به یک جایگشت از متغیرها می‌باشد.

۲. **ضرب در یک اسکالر** مولفه‌های یک تانسور مولفه‌های تانسور دیگری از همان نوع به دست می‌دهد. در تعریف ۳.۱۹، این یعنی ضرب تابع در یک ثابت.

۳. **جمع** مولفه‌های نظیر دو تانسور از یک نوع مولفه‌های تانسور جدیدی از همین نوع، به‌نام **مجموع** تانسورهای داده شده، را به‌دست می‌دهد؛ مثلا"،

$$c_{ij}^{\cdot\cdot k} = a_{ij}^{\cdot\cdot k} + b_{ij}^{\cdot\cdot k}.$$

جمیع تانسورها از نوع (k, l) با جمع و ضرب در اسکالرها یک فضای خطی با بعد n^{k+l} را تشکیل می‌دهند.

در تعریف ۳.۱۹، جمع تانسورها چیزی جز جمع توابع چند خطی مربوطه نیست.

۴. **ضرب تانسورها**. حاصل ضربهای مولفه‌های یک تانسور از نوع (k_1, l_1) در مولفه‌های یک تانسور از نوع (k_2, l_2) مولفه‌های یک تانسور از نوع $(k_1 + k_2, l_1 + l_2)$ اند نسبت به همان پایه؛ مثلا"،

$$o_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot k\cdot m} = a_{ij}^{\cdot\cdot k} b_{l}^{\cdot m}.$$

با استفاده از تعریف ۳.۱۹، این عمل یعنی ضرب توابع چند خطی، یکی $k_1 + l_1$ متغیره و دیگری $k_2 + l_2$ متغیره، تابعی از $k_1 + k_2 + l_1 + l_2$ متغیر به دست می‌دهد.

در همهٔ تعاریف فوق از مولفه‌های بردارها نسبت به یک پایه استفاده شده است. درنتیجه، برای آنکه تعریفها معتبر باشند، باید ثابت شود که مولفه‌ها از قانون تبدیل برای تانسورها تبعیت می‌کنند. این اثباتها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

ضرب تانسورها شرکتپذیر و نسبت به جمع پخشپذیر است.

توجه کنید که، اگر اسکالر را یک تانسور از نوع $(0, 0)$ بگیریم، ضرب یک تانسور در یک اسکالر را می‌توان حالت خاصی از ضرب تانسورها تلقی کرد.

۵. **انقباض تانسورها**. این عملی است که از یک تانسور از نوع $(k+1, l+1)$ به یک تانسور از نوع (k, l) منجر می‌شود. درحالت خاص، وقتی بر یک تانسور از نوع $(1, 1)$ اعمال می‌شود، به یک اسکالر منتج خواهد شد.

این عمل برحسب مولفه‌ها عبارت است از یک جمعبندی نسبت به یک جفت اندیس، یکی کوواریان و دیگری کنتراواریان، که مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را می‌گیرند درحالی که بقیهٔ اندیسها ثابت می‌باشند. به‌عنوان مثال، اعداد

$$b_{ij} = a_{sij}^{\cdot\cdot\cdot s} = a_{sij}^{\cdot\cdot\cdot 1} + a_{2ij}^{\cdot\cdot\cdot 1} + a_{2ij}^{\cdot\cdot\cdot 2} + \cdots + a_{nij}^{\cdot\cdot\cdot n} \qquad (۸.۱۹)$$

مولفه‌های انقباض تانسور $a_{kij}^{\cdot\cdot\cdot l}$ نسبت به اولین اندیس کوواریان و تنها اندیس کنتراواریان است. این تانسور دو انقباض دیگر نیز می‌پذیرد:

$$a_{ksj}^{\cdot\cdot\cdot s} \quad \text{و} \quad a_{kis}^{\cdot\cdot\cdot s} \cdot$$

همهٔ آنها تانسورهایی از نوع $(0, 2)$ اند. البته، این تعریف نیز، با اثبات اینکه نتیجه از قوانین تبدیل (۴.۱۹) برای تانسورها پیروی می‌کند، نیاز به توجیه دارد. این مطلب را در مورد تانسور (۸.۱۹) ثابت خواهیم کرد.

چون $a_{kij}^{\cdot\cdot\cdot l}$ مولفه‌های تانسورها هستند، پس از تغییر پایهٔ (۱.۱۹) داریم

$$a_{k'i'j'}^{\cdot\cdot\cdot l'} = A_{k'}^{k} A_{i'}^{i} A_{j'}^{j} A_{l}^{l'} a_{kij}^{\cdot\cdot\cdot l}.$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} b_{i'j'} &= a_{s'i'j'}^{\cdot\cdot\cdot s'} = A_{s'}^{k} A_{i'}^{i} A_{j'}^{j} A_{s}^{s'} a_{kij}^{\cdot\cdot\cdot s} \\ &= (A_{s'}^{k} A_{s}^{s'}) A_{i'}^{i} A_{j'}^{j} a_{kij}^{\cdot\cdot\cdot s} = A_{i'}^{i} A_{j'}^{j} \delta_{s}^{k} a_{kij}^{\cdot\cdot\cdot s} \\ &= A_{i'}^{i} A_{j'}^{j} a_{sij}^{\cdot\cdot\cdot s} = A_{i'}^{i} A_{j'}^{j} b_{ij}, \end{aligned}$$

که برهان را تمام خواهد کرد.

در فضای برداری اقلیدسی، که دارای تانسور متری g_{ij} است، عمل انقباض برای تعریف عملی برای پایین و بالا بردن اندیسها به‌کار رفته است. بهتر است عمل را با یک مثال توضیح دهیم. فرض کنیم $a_{ij}^{\cdot\cdot k}$ یک تانسور از نوع $(1, 2)$ باشد. با ضرب این تانسور در تانسور g_{ij} و انجام انقباض نسبت به اندیس کنتراواریان و اولین اندیس تانسور متری، تانسوری از نوع $(0,3)$ به‌دست می‌آوریم:

$$a_{ijk} = a_{ij}^{\cdot\cdot s} g_{sk}.$$

این عمل **پایین آوردن اندیس** k نام دارد. به‌همین ترتیب، می‌توان، با استفاده از تانسور g^{ij}، اندیسها را بالا برد. حاصل بالا بردن i در a_{ij}^{k} عبارت است از

$$a_{\cdot j}^{i \cdot k} = g^{is} a_{sj}^{\cdot\cdot k},$$

و حاصل بالا بردن j یا هر دوی i و j عبارت است از

$$a_{i}^{\cdot jk} = g^{jr} a_{ir}^{\cdot\cdot k}, \qquad a^{ijk} = g^{is} g^{jr} a_{rsk}.$$

توجه کنید که اعمال متوالی بالا بردن و پایین آوردن (یا پایین آوردن و بالا بردن) یک اندیس همدیگر را حذف می‌کنند؛ مثلاً،

$$g^{kr} a_{ijr} = g^{kr} g_{rs} a_{ij}^{\cdot\cdot s} = \delta_{s}^{k} a_{ij}^{\cdot\cdot s} = a_{ij}^{\cdot\cdot k}.$$

به‌خاطر این عمل، یک انعکاس منحصر بفرد از تانسورهای نوع (k, l) بتوی تانسورهایی از هر نوع $(k_1 . l_1)$ که $k_1 + l_1 = k + l$ ، بخصوص بتوی تانسورهایی از نوع $(k_1 + l_1, 0)$ یا $(0, k_1 + l_1)$، تعریف می‌شود. درحالت خاص بردار، این تناظری یک به یک بین بردارها و همبردارها به‌دست می‌دهد. به‌خاطر این، در فضاهای برداری اقلیدسی، به‌جای تانسورهای از نوع (k, l) از **مولفه‌های نوع** (k, l) یک تانسور سخن می‌گوییم، و دستگاههای مولفه‌ها، که می‌توان آنها را با بالا و پایین بردن اندیسها بهم تبدیل کرد، را به‌عنوان نمایشهای متفاوت یک تانسور درنظر می‌گیریم. توجه کنید که اگر پایه متعامد یکه باشد، تمام انواع مولفه‌های یک تانسور مفروض یکی هستند؛ مثلا" ، $a_{ijk} = a_{ij}^{\cdot\cdot k} = a^{i}_{\cdot jk}$ ، و غیره.

۶.۱۹ میدانهای تانسوری بر سطوح

بردارهای مماس بر یک سطح از کلاس C_2 در نقطهٔ مفروض P یک فضای برداری دو بعدی تشکیل می‌دهند. در ۱.۱۶ ، به هر دستگاه موضعی از مختصات منحنی‌الخط در همسایگی P یک پایه از این فضای برداری مرکب از دو بردار $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ مربوط کردیم. تحت تغییر مختصات موضعی بر طبق فرمولهای

$$u^i = u^i(u^{1'}, u^{2'}),$$

بردارهای پایه به‌صورت زیر تبدیل می‌گردند:

$$\mathbf{r}_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \mathbf{r}_i .$$

در فضای برداری مماس برسطح درنقطهٔ P نیز می‌توان تانسور درنظر گرفت. ما از $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ به‌عنوان پایه استفاده می‌کنیم، و لذا، مشتقات جزئی $\partial u^i / \partial u^{i'}$ نقش $A^i_{i'}$ را در قوانین تبدیل دارند.

اگر به‌هر نقطهٔ P از قلمرو Ω بر سطح یک تانسور از نوع (k, l) در فضای برداری مماس در P نسبت دهیم، چیزی به‌دست می‌آید که ما آن را یک **میدان تانسوری** از نوع (k, l) در Ω می‌نامیم. مولفه‌ها نسبت به پایهٔ طبیعی تولید شده به‌وسیلهٔ مختصات منحنی‌الخط تانسورها در نقاط Ω ، یعنی

$$a^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_l},$$

توابعی هستند از نقاط سطح (یا از پارامترهای u^1, u^2). ما آنها را **مولفه‌های میدان تانسوری نسبت به مختصات منحنی‌الخط** (u^1, u^2) می‌نامیم. تحت تغییر مختصات منحنی‌الخط، این مولفه‌ها طبق قانون زیر تبدیل می‌شوند:

$$a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}=\frac{\partial u^{i_1}}{\partial u^{i_1}}\frac{\partial u^{i_2}}{\partial u^{i_2}}\cdots\frac{\partial u^{i_k}}{\partial u^{i_k}}\frac{\partial u^{j_1}}{\partial u^{j_1}}\frac{\partial u^{j_2}}{\partial u^{j_2}}\cdots\frac{\partial u^{j_l}}{\partial u^{j_l}}a^{i_1 i_2\cdots i_k}_{j_1 j_2\cdots j_l} \tag{۹۰۱۹}$$

گوییم یک میدان تانسوری بر یک سطح از کلاس C_n از کلاس $C_r\ (r \leq n-1)$ است اگر مولفه‌های آن توابعی از کلاس C_r باشند. واضح است که فرض کرده‌ایم $n \geq r+1$، زیرا، درغیر این‌صورت، مولفه‌ها دریک دستگاه مختصات ممکن است از کلاس C_r و در دیگری از کلاس پایین‌تر از $(n-1)$ باشد.

چون صفحهٔ مماس‌بر یک سطح یک صفحهٔ اقلیدسی است و ضرب اسکالر در هر صفحهٔ مماس‌تعریف شده است، یک میدان از تانسور متری $g_{ij} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$ خواهیم داشت. این‌میدان را قبلاً" در بخش ۱۶ به‌کار برده‌ایم، که در آنجا با نشان دادن اینکه این یک میدان تانسوری است، قانون تبدیل (۲۵۰۱۶) را به‌دست آوردیم.

در نظریهٔ سطوح ما تقریباً" با میدانهای تانسوری کار می‌کنیم، نه با تانسورها دریک نقطه. لذا، بدون ایجاد ابهام، می‌توان میدانهای تانسوری را فقط تانسور نامید.

درنظریهٔ سطوح به چند شیٔ هندسی برخوردیم که‌تانسور نیستند. ضرایب دومین فرم اساسی، به‌عنوان تانسور، ازقانون تبدیل مشابه (۷۰۱۷) تبعیت می‌کنند، اما، تحت یک تبدیل مختصات که‌جهت را تغییر می‌دهد، مولفه‌ها علاوه بر یک تبدیل شبیه به‌تانسور تغییر علامت نیز می‌دهند. یک شیٔ هندسی از این نوع یک ***تانسورنما*** نامیده می‌شود.

مبینهای g و b فرمهای اساسی، با آنکه هرکدام فقط یک مولفه دارند، میدانهای اسکالر نیستند، زیرا، تحت تغییر مختصات، تبدیل (۸۰۱۷) یا (۹۰۱۷) را متحمل می‌شوند که عبارت است از ضرب در مربع ژاکوبی تبدیل مختصات. این مثالی از یک ***چگالی اسکالر*** است.

علایم کریستوفل نیز مولفه‌های یک تانسور نیستند، زیرا قانون تبدیل (۱۴۰۱۸) آنها شامل مشتقات مرتبهٔ دوم مختصات است.

انحنای گاوسی K یک میدان اسکالر است (ر.ک. بخش ۵۰۱۷)، زیرا به انتخاب مختصات موضعی بستگی ندارد.

۷۰۱۹ میدانهای تانسوری برچندگوناهای دیفرانسیل

به‌همین‌ترتیب، می‌توان یک میدان تانسوری بر یک چندگونای دیفرانسیل را تناظری تعریف کرد که به هر نقطهٔ P از چندگونا یک تانسور از نوع معلوم در فضای برداری مماس در P نسبت می‌دهد (ر.ک. ۲۰۱۶). به‌ازای دستگاه مختصات موضعی u^i در چندگونا، **مولفه‌های** میدان برداری نسبت به پایهٔ $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ مربوط به مختصات منحنی‌الخط (u^i) مولفه‌های

تانسورنسبت به مختصات موضعی (u^i) نام دارند. فرمولهای تبدیل برای پایه‌های طبیعی ۲.۱۶ ایجاب می‌کنند که مولفه‌های یک میدان تانسوری از نوع (k, l) طبق فرمولهای (۹.۱۹) تبدیل می‌شوند، که در آن اندیسها مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را بخود می‌گیرند.

کلاس انتظام یک میدان تانسوری مثل حالت دو بعدی تعریف می‌شود.

با معرفی یک میدان از تانسورمتری g_{ii} از کلاس C_1 در یک چندگونا از کلاس C_2 که در شرایط داده شده در ۳.۱۹ صدق کند، می‌توان ***حاصل ضرب اسکالر*** و ***طول*** بردارها را درهر فضای برداری مماس تعریف کرد؛ همچنین، طول مسیر $u^i = u^i(t), a \leq t \leq b$ را می‌توان با فرمول زیر تعریف نمود:

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\, du^i\, du^j}.$$

با تعریف فاصلهٔ بین دو نقطه از چندگونا به عنوان کوچکترین کران بالایی طول مسیرهای واصل بین دو نقطه، چندگونا به‌یک فضای متری تبدیل خواهد شد.

با استفاده‌از تانسورهای g_{ij} و g^{ij}، می‌توان اندیسها را بالا و پایین برد. علایم کریستوفل Γ^k_{ij} را می‌توان با فرمولهای (۱۰.۱۸) تعریف کرد. قانون تبدیل آنها تحت تبدیلات مختصات موضعی عبارت است از (۱۴.۱۸)، که درآن اینک اندیسها مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را خواهند گرفت.

چندگوناهای دیفرانسیل با تانسورمتری مفروض g_{ij} بر آنهارا ***چندگوناهای ریمانی*** یا، بویژه وقتی بررسیها به‌خواص موضعی محدودند، ***فضاهای ریمانی*** می‌نامند. هندسهٔ فضاهای ریمانی تعمیم به‌ابعاد بالاتر هندسهٔ ذاتی سطوح است که موضوع فصل بعدمی‌باشد. درباب نظریهٔ فضاهای ریمانی مطلب زیاد نوشته شده است. خوانندهٔ مشتاق به اطلاعات بیشتر درباب فضاهای ریمانی می‌تواند به‌چند کتاب در سطوح مختلف دست یابد. کتاب ***هندسهٔ دیفرانسیل و ریمانی*** لاگویتز[1] خواننده را با این مبحث مختصرا" آشنا خواهد ساخت. ★

---

1. D. Laugwitz, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York (1965).

۶
هندسهٔ ذاتی سطوح

۲۰ نگاشتهای سطوح

۱.۲۰ کلیات

دو سطح $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_2$ ونگاشت ϕ از $\mathscr{F}_1$ بتوی $\mathscr{F}_2$ رادرنظرمی‌گیریم .فرض کنیم این‌نگاشت نقطهٔ P_0 از $\mathscr{F}_1$ رابه‌نقطهٔ Q_0 از $\mathscr{F}_2$ بنگارد . همچنین ، سطوح $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_2$ در همسایگی نقاط P_0 و Q_0 به‌ترتیب نمایشهای پارامتری منتظمی به‌صورت زیر داشته باشند :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{R}(v^1, v^2),$$

که درآنها u^1, u^2 پارامترهای یکی از سطوح ، و v^1, v^2 پارامترهای سطح دیگر هستند . با محدودشدن‌به همسایگی‌کوچکتر ، درصورت لزوم ، می‌توان این تبدیل را با بیان مختصات (v^1, v^2) نقش نقطهٔ P بر $\mathscr{F}_2$ به‌صورت توابعی از مختصات (u^1, u^2) نقطهٔ P بر $\mathscr{F}_1$:

$$v^1 = v^1(u^1, u^2), \qquad v^2 = v^2(u^1, u^2) \tag{۱.۲۰}$$

توصیف کرد .نگاشت را ***منتظم از کلاس*** C_n گوییم هرگاه توابع (۱.۲۰) از کلاس C_n بوده وژاکوبی $\partial(v^1, v^2)/\partial(u^1, u^2)$ مخالف صفرباشد . درنتیجه ، یک نگاشت منتظم، موضعا " (یعنی، وقتی همسایگی به‌قدر کافی کوچک باشد) یک به یک است .

یک نگاشت از سطح $\mathscr{F}_1$ بتوی سطح دیگر $\mathscr{F}_2$، در هر نقطه نگاشتی از بردارهای‌مماس بر $\mathscr{F}_1$ دراین‌نقطه بتوی بردارهای‌مماس بر $\mathscr{F}_2$ درنقش نقطه‌القا می‌کند . یعنی ، با معلوم بودن‌بردار مماس $\mathbf{w} = w^i\mathbf{r}_i$ بر $\mathscr{F}_1$ در P_0 ، منحنی $u^i = u^i(t)$ ماربر P_0 را طوری اختیار می‌کنیم‌که بردارمماس آن‌در P_0 با $\mathbf{w}$ یکی‌باشد ؛ یعنی ، طوری که $u_0^i = u^i(0)$ هامختصات P_0 بوده‌و $du^i(0)/dt = w^i$. بانگاشتن این‌منحنی‌بتوی‌سطح دیگر ، یک منحنی به‌معادلات

$$v^i = \phi^i(t) = v^i(u^1(t), u^2(t))$$

به‌دست می‌آید ،که درآن $v_0^i = \phi^i(0)$ ها مختصات Q_0 اند . حال نقش $\mathbf{w}$ را مساوی بردار مماس $\mathbf{w}^* = w^{*i}\mathbf{R}_i$ بر منحنی $v_i = \phi^i(t)$ در نقطـهٔ Q_0 تعریف می‌کنیم . واضح است که

$$\mathbf{w}^* = \left[\frac{dv^i}{dt}\right]_0 \mathbf{R}_{i,0} = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(u_0^1, u_0^2)\left[\frac{du^j}{dt}\right]_0 \mathbf{R}_{i,0} \, ,$$

که درآن $\mathbf{R}_{i,0} = \mathbf{R}_i(v_0^1, v_0^2)$ ، یا

$$w^{*i} = A_j^i w^j \text{، که درآن } A_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(u_0^1, u_0^2). \qquad (۲۰۲۰)$$

این فرمول فقط به نگاشت سطوح و مولفه‌های بردار بستگی دارد نه به انتخاب منحنی. این امر تعریف توسیع نگاشت سطوح به بردارهای مماس را توجیه می‌کند. چون ماتریس (A_j^i) نامنفرد است ،زیرا ژاکوبی تبدیل بنا به‌فرض مخالف صفر است ، (۲۰۲۰) یک نگاشت خطی از فضای برداری مماس در P_0 بروی فضای برداری مماس در Q_0 را نمایش می‌دهد.

فرمول (۱۰۲۰) را می‌توان به‌عنوان تبدیل مختصات روی سطح دوم نیز درنظرگرفت. با گذاردن تابع (۱۰۲۰) در معادلهٔ سطح دوم ، نمایش پارامتری دیگری از سطح خواهیم داشت :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(v^1(u^1, u^2), v^2(u^1, u^2)) = \mathbf{R}^*(u^1, u^2).$$

با این پارامتری سازی جدید سطح دوم ، نقاط متناظر از هر دو سطح دارای یک مختصات منحنی الخط بوده ، و بردارهای متناظر دارای مولفه‌های یکسان نسبت به پایه‌های طبیعی روی هر دو سطح می‌باشند. دراین حالت ، به‌طور خلاصه می‌گوییم که پارامتری سازیهای سطوح نسبت به نگاشت **سازگار** هستند. پارامتری سازیهای سازگار محاسبات را ساده‌تر می‌کنند و ، لذا ، از این به بعد ، وقتی با نگاشتی برخورد کنیم ، فرض است که پارامتری سازیها سازگارند.

۲۰۲۰ نگاشتهای ایزومتریک

یک نگاشت از یک سطح بتوی سطح دیگر را یک **نگاشت ایزومتریک** یا **ایزومتری** گوییم هرگاه طول منحنیهای روی سطوح به‌وسیلهٔ این نگاشت حفظ شوند ؛ یعنی ، طول نقش یک قوس برابر طول خود قوس باشد.

قضیه. ***یک‌نگاشت منتظم از کلاس C_1 بین دو سطح از کلاس C_1 ایزومتری است اگر و فقط اگر ، در پارامتری سازیهای سازگار ، دارای اولین فرمهای اساسی یکسان باشند ؛ یعنی ،***

$$g_{ij} = \tilde{g}_{ij}, \qquad (۳۰۲۰)$$

که درآن $g_{ij}\,du^i\,du^j$ اولین فرم اساسی سطح اول و $\tilde{g}_{ij}\,du^i\,du^j$ اولین فرم اساسی سطح‌دوم است.

برهان. با توجه به سازگاری پارامتری سازیها ، یک منحنی روی سطح اول و نقش آن تحت

نگاشت مورد بحث دارای معادلات پارامتری یکسان در مختصات منحنی‌الخط

$$u^i = u^i(t)$$

می‌باشند. طول قوس از t_0 تا t روی سطح اول برابر است با

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt,$$

و روی سطح دوم مساوی است با

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{\tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt.$$

طبق تعریف، نگاشت ایزومتری است اگر و فقط اگر به‌ازای هر منحنی، متحدا" نسبت به t داشته باشیم

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt.$$

اما این رابطه به‌ازای هر منحنی معادل اتحاد زیر است:

$$g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = \tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}.$$

بخصوص، با اختیار منحنی

$$u^1 = u_0^1 + t, \qquad u^2 = u_0^2,$$

در $t = 0$ داریم

$$g_{11}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{11}(u_0^1, u_0^2);$$

با اختیار منحنی

$$u^1 = u_0^1, \qquad u^2 = u_0^2 + t,$$

خواهیم داشت

$$g_{22}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{22}(u_0^1, u_0^2),$$

و، بالاخره، از منحنی

$$u^1 = u_0^1 + t, \qquad u^2 = u_0^2 + t$$

به‌دست می‌آید

$$g_{11}(u_0^1, u_0^2) = g_{12}(u_0^1, u_0^2) + g_{22}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{11}(u_0^1, u_0^2) + \tilde{g}_{12}(u_0^1, u_0^2) + \tilde{g}_{22}(u_0^1, u_0^2);$$

درنتیجه،

$$g_{12}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{12}(u_0^1, u_0^2).$$

چون (u_0^1, u_0^2) می‌تواند دلخواه باشد، این $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$ را ثابت می‌کند.

از آن سو، اتحادهای $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$ ایجاب می‌کنند که، به‌ازای هر منحنی $u^i = u^i(t), a \leq t \leq b$، داشته باشیم

$$\int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt = \int_a^b \sqrt{\tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt;$$

درنتیجه، نگاشت ایزومتری می‌باشد.

دوسطحی که برای آنها یک نگاشت ایزومتری از یکی بروی دیگری وجود داشته باشد *ایزومتریک* خوانده می‌شوند. اگر هر نقطه از یک سطح همسایگیی داشته باشد که بتوان آن رابه‌طورایزومتریک روی همسایگیی از نقش نقطه روی سطح دیگر نگاشت، سطوح را **موضعاً** *ایزومتریک* خواهیم نامید.

گاهی می‌توان یک نگاشت ایزومتریک از یک سطح بروی دیگری را به وسیلهٔ یک‌تغییر شکل پیوسته از سطح اول بتوی دیگری به‌دست آورد، به‌طوری که سطح همواره در یک کلاس انتظام و ایزومتریک باقی بماند. اگر این ممکن باشد، دو سطح را *قابل اعمال* بریکدیگر خواهیم نامید. گاهی سطوح ایزومتریک چنین تغییر شکل را پذیرا نیستند مثل، مثلاً، یک دستکش راست و یک دستکش چپ.

امثله و تمرین

۱. *ایزومتری موضعی بین زنجیرگون و مارپیچ گون*. زنجیرگون

$$x = a\cosh\frac{u^1}{a}\cos u^2, \qquad y = a\cosh\frac{u^1}{a}\sin u^2, \qquad z = u^1$$

دارای اولین فرم اساسی

$$ds^2 = \cosh^2\frac{u^1}{a}[(du^1)^2 + a^2(du^2)^2]$$

است (ر.ک. مثال ۴، ۴.۱۶).

مارپیچ گون

$$x = v^1\cos v^2, \qquad y = v^1\sin v^2, \qquad z = av^2$$

دارای اولین فرم اساسی

$$ds^2 = (dv^1)^2 + [(v^1)^2 + a^2](dv^2)^2$$

می‌باشد.

ثابت می‌کنیم نگاشت

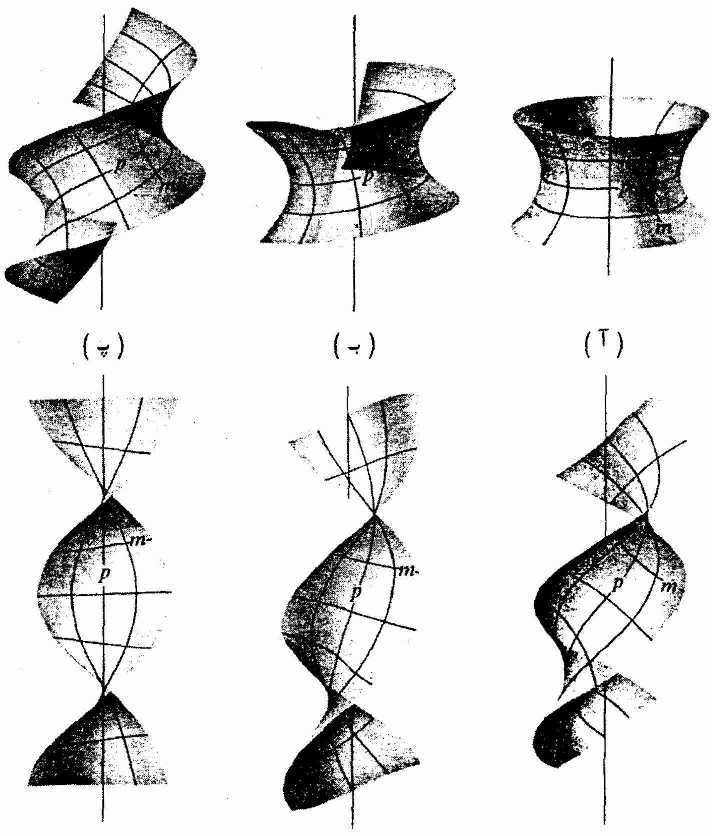
$$v^1 = a \sinh \frac{u^1}{a}, \qquad v^2 = u^2$$

یک ایزومتری است . ابتدا ، با درنظر گرفتن معادلات اخیر به‌عنوان تبدیل مختصات منحنی‌الخط روی مارپیچ گــون ، یک پارامتری سازی سازگار روی مارپیچ گون به‌دست می‌آوریم . دراین صورت ، داریم

$$dv^1 = \cosh \frac{u^1}{a} du^1, \qquad dv^2 = du^2,$$

و اولین فرم اساسی در پارامتری سازی جدید خواهد شد

$$ds^2 = \cosh^2 \frac{u^1}{a}(du^1)^2 + a^2 \cosh^2 \frac{u^1}{a}(du^2)^2.$$



(آ) (ب) (پ)

(ت) (ث) (ج)

شکل ۱۰۲۰

چون ایــن همان اولین فرم اساسی زنجیرگون است ، نگاشت ما ایزومتری می‌باشد. توجه کنید که نگاشت یک به یک است فقط اگر پارامتر u^1 به بازه‌ای به‌طول کوچکتر از 2π محدود شده باشد.

دراین نگاشت ،نصف‌النهارات زنجیرگون به‌صورت خطوط جاری مارپیچ گون ،و دوایر عرض جغــرافیایی زنجیرگون بـــه‌صورت مارپیچ درمی‌آیند . کوچکترین دایرهٔ عرض جغرافیایی‌زنجیرگون‌به‌صورت محور مارپیچ‌گون‌درخواهد آمد . این نگاشت رامی‌توان به‌صورت تغییر شــکل پیوسته‌ای از یک سطح در فضا انجام داد ، به این ترتیب که زنجیرگون را در امتــداد یک نصــف‌النهار بــریده و سپس کوچکترین دایرهٔ عرض جغرافیایی را راست کرد . شکل ۱۰۲۰ چندمرحلهٔ‌متوالی‌این عمل را نشان می‌دهد .

۲ . ثابت کنید سطح

$$x = 3u^1 + 3u^1(u^2)^2 - (u^1)^3, \qquad y = 3u^2 - 3(u^1)^2u^2 + (u^2)^3, \qquad z = 3(u^1)^2 - 3(u^2)^2$$

با یک سطح دوار ایزومتریک (موضعا ") است .

راهنمایی . تغییر مختصات $v^1 = (u^1)^2 + (u^2)^2, v^2 = \arctan \frac{u^2}{u^1}$ را به‌کار برید .

۳۰۲۰ ایزومتری یک سطح گستردنی با صفحه

سطحی که به‌وسیلهٔ خطوط مماس بر منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{p}(s)$ ، که در آن s پارامتر طبیعی است ، جارو شود ، معادله‌ای به‌شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{t}(u^1)$$

داشته و اولین فرم اساسی آن برابر است با

$$ds^2 = \left[1 + (\kappa(u^1))^2(u^2)^2\right](du^1)^2 + 2\,du^1\,du^2 + (du^2)^2.$$

(طبق معمول ، $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa$ بردارهای سه‌وجهی فــرنه و انحنای منحنی را نشان می‌دهند) . ضرایب فقط به‌انحنای منحنی بستگی دارند . لذا ، اگر دو منحنی دارای انحناهای یکسان به‌صورت تــوابعی از پارامترهای طبیعی بــوده ولی تابهای مختلف داشته باشند ، سطوح ایزومتریک (لااقل موضعا ") خواهند بود . بخصوص، می‌توان یک منحنی با انحنای‌معلوم و تاب صفر اختیار کــرد . وجود این منحنی را قضیهٔ اساسی نظریهٔ منحنیهای زیربخش ۱۰۸ تضمین مــی‌کند . دراین حالت ، منحنی در یک صفحه واقع می‌شود و هر دو پارچهٔ $u^2 > 0$ و $u^2 < 0$ روی یکدیگر قــرار می‌گیرند . پارامترهای (u^1, u^2) را می‌توان مختصات منحنی‌الخط صفحه‌درنظرگرفت ، و اگر خود را به همسایگی به‌قدر کافی کوچکی روی صفحه به پــارامتــرهای (u^1, u^2) که تماما " در یکی از نیمصفحه‌های $u^2 > 0$ یا $u^2 < 0$ واقع است محدودکنیم ،این پارامتری سازی یک نمایش پارامتری منتظم بخشی از صفحه خواهدبود .

نگاشت یک سطح گستردنی با یال بازگشت معلوم بتوی صفحه که با بردن نقطه به‌مختصات (u^1, u^2) به نقطه‌ای از صفحه با همان مختصات منحنی الخط حاصل می‌شود درصورت تحدید به یک همسایگی به‌قدر کافی کوچک روی یکی از پارچه‌های سطح مزبور یک به یک است ، و واضح است که اولین فرم اساسی را حفظ می‌کند . لذا ، این نگاشت یک ایزومتری موضعی می‌باشد .

اثبات اینکه مخروطها و استوانه‌ها نیز با صفحه موضعاً " ایزومتریک هستند به‌خواننده محول می‌شود . از تلفیق این مطلب با نتایج حاصل در زیر بخش ۱۴ ،خواهیم داشت:

قضیه . ***سطوح گستردنی ، به استثنای یال بازگشت آنها ، با صفحه موضعاً " ایزومتریک هستند .***

این امر نام "گستردنی" را توجیه می‌کند ، زیرا می‌توان آنها را روی یک صفحه ، بدون انبساط یا انقباض ، گسترانید ، اما در این گسترش ممکن است قسمتهایی از صفحه بیش از یکبار پوشیده شوند . با برگشت به عقب ، می‌توان قسمتهایی از سطح گستردنی را با تغییر شکل صفحه ، بدون انبساط و انقباض ، به‌دست آورد . هرکس طرز به‌دست آوردن یک سطح مخروطی یا استوانه‌ای را به‌این طریق می‌داند . شکل ۲۰۲۰ طرز به‌دست آوردن یک

شکل ۲۰۲۰

سطح‌گستردنی دارای یال بازگشت را با چسباندن دو تکه کاغذ تخت واقع بر هم درامتداد یک منحنی مسطح و سپس تغییراین منحنی به‌یک‌منحنی پیچ خورده نشان می‌دهد. دراین عمل دو تکه کاغذ تخت واقع بر هم از یکدیگر جدا شده و دو پارچهٔ سطح را تشکیل می‌دهند، و منحنی به‌صورت یال بازگشت درخواهد آمد.

تمرین

همانطور که‌در مثال ۲ در ۲۰۱۳ دیدیم، خطوط قطبی یک منحنی مانند $\mathscr{C}$ یک سطح گستردنی تشکیل مـی‌دهند. ثابت کنید که، در گسترش سطح روی صفحه، گسترده‌های این منحنی (ر.ک. بخش ۷) به‌صورت خطوط مستقیم درمی‌آیند.

۴۰۲۰ نگاشت همشکل یا همزاویه

یک نـگاشت از سطـح $\mathscr{F}_1$ بروی سطح $\mathscr{F}_2$ را **همشکل یا همزاویه** گوییم هرگاه زاویهٔ بین منحنیهای متقاطع متناظر روی سطوح را حفظ کند. اولین فرمهای اساسی $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_2$ در مختصات سازگار را با g_{ij} و $\tilde{g}_{ij}$ نشان می‌دهیم.

قضیه. ***یک نگاشت از کـلاس C_1 همشکل است اگر و فقط اگر اولین فرمهای اساسی سطوح در مختصات سازگار در هر نقطه متناسب باشند:***

$$\tilde{g}_{ij} = \alpha^2 g_{ij}. \qquad (۴۰۲۰)$$

ضریب $\alpha^2 = [\alpha(u^1, u^2)]^2$ به (u^1, u^2) ***بستگی داشته و مثبت است.***

برهان. فرمول (۲۲۰۱۶) مربـوط‌به زاویهٔ بین منحنیها روی یک سطح بی‌درنگ نشان می‌دهد که (۴۰۲۰) همشکلی نگاشت را ایجاب می‌کند.

درواقع،

$$\cos\tilde{\phi} = \frac{\tilde{g}_{ij}\,du^i\,\delta u^j}{\sqrt{\tilde{g}_{ij}\,du^i\,du^j}\sqrt{\tilde{g}_{ij}\,\delta u^i\,\delta u^j}} = \frac{\alpha^2 g_{ij}\,du^i\,\delta u^j}{\sqrt{\alpha^2 g_{ij}\,du^i\,du^j}\sqrt{\alpha^2 g_{ij}\,\delta u^i\,\delta u^j}}$$
$$= \frac{g_{ij}\,du^i\,\delta u^j}{\sqrt{g_{ij}\,du^i\,du^j}\sqrt{g_{ij}\,\delta u^i\,\delta u^j}} = \cos\phi.$$

برای اینکه ثابت‌کنیم به‌ازای یک نگاشت همشکل شرط (۴۰۲۰) برقرار است، دریک نقطه از سطح اول دوراستای عمود بر هم $du^1:du^2$ و $\delta u^1:\delta u^2$ را اختیار می‌کنیم. راستای اول کاملا" دلخواه بوده، و راستای دوم با معادلهٔ

$$g_{ij}\,du^i\,\delta u^j = 0$$

معین می‌شود. چون نگاشت همشکل است، نقشها نیز بر هم عمودند و خواهیم داشت

$$\tilde{g}_{ij}\,du^i\,\delta u^j = 0. \tag{۵۰۲۰}$$

با انتخاب $du^1 = 0, du^2 = 1$، درمی‌یابیم که‌دیفرانسیلهای راستاهای عمود برهم در دستگاه معادلات

$$g_{21}\,\delta u^1 + g_{22}\,\delta u^2 = 0,$$

$$\tilde{g}_{21}\,\delta u^1 + \tilde{g}_{22}\,\delta u^2 = 0$$

صدق می‌کنند. اما این دستگاه معادلات دارای یک جواب نابدیهی است اگر و فقط‌اگر دترمینانش صفر باشد. بنابراین، داریم

$$\begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

که‌ازآنجا $\tilde{g}_{21} = (\tilde{g}_{22}/g_{22})g_{21}$ یا $\tilde{g}_{21} = \alpha^2 g_{21}$، $\tilde{g}_{22} = \alpha^2 g_{22}$، که‌درآن $\alpha^2 = \tilde{g}_{22}/g_{22}$.
با همین استدلال در مورد $du^1 = 1, du^2 = 0$ ، به‌دست می‌آید

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

که $\tilde{g}_{12} = (\tilde{g}_{11}/g_{11})g_{12}$ را نتیجه می‌دهد. اما $\tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{21} = \alpha^2 g_{21} = \alpha^2 g_{12}$. اگر $\tilde{g}_{12} \neq 0$ و، درنتیجه، $g_{12} \neq 0$ ، این ایجاب می‌کند که $\tilde{g}_{11} = \alpha^2 g_{11}$. اگر $g_{12} = \tilde{g}_{12} = 0$ ، راستاهای $du^1 = du^2 = 1$ و $\delta u^1 = g_{22}, \delta u^2 = -g_{11}$ برهم‌عمودند. درنتیجه،

$$\tilde{g}_{11}g_{22} - \tilde{g}_{22}g_{11} = 0$$

یا

$$\frac{\tilde{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\tilde{g}_{22}}{g_{22}}.$$

لذا، (۴۰۲۰) در تمام حالات ثابت می‌شود.

با استفاده از این قضیه و وجود موضعی مختصات ایزومتریک که به‌ازای آنها اولین فرم اساسی

$$ds^2 = \rho^2[(du^1)^2 + (du^2)^2]$$

با اولین فرم اساسی $(du^1)^2 + (du^2)^2$ صفحه در مختصات دکارتی متناسب است (که در

۷۰۱۶ محرز شد) ، خواهیم داشت:

***نتیجه.* هرسطح از کلاس C_3 موضعاً " همشکل صفحه است . درنتیجه ، به‌ازای هر دوسطح از کلاس C_3 ، یک نگاشت موضعاً " همشکل وجود دارد که یک نقطهٔ منتظم دلخواه یکی از سطحها را به‌یک نقطهٔ منتظم دلخواه سطح دیگر می‌برد .**

این نگاشت ازمنحصربفردبودن خیلی دور است ؛ درواقع ، بی‌نهایت از این‌نگاشتها وجود دارند که ، علاوه براین ، حتی یک راستای مفروض در نقطهٔ انتخاب شده را به یک راستای معلوم می‌نگارند .

از نسبت (۴۰۲۰) معلوم می‌شود که نسبت طول نقش قوسهای کوچک آغاز شده از نقطهٔ (u^1, u^2) به طول‌قوسهاتقریبا "مساوی $\alpha(u^1, u^2)$ بوده و به‌راستای‌قوس بستگی ندارد . با اینحال ، این نسبت ممکن است تابع نقطه باشد . بنابراین ، یک نگاشت همشکل در همسایگی به‌قدر کافی کوچک به یک تشابه نزدیک است ، اگرچه نسبت تشابه از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگرتغییرمی‌کند . اگر این نسبت α ثابت باشد ، نگاشت یک **تشابه** نامیده‌می‌شود .

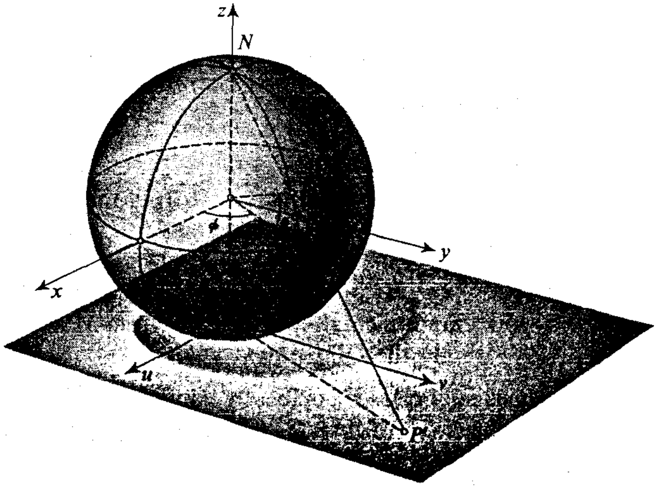
نگاشتهای‌از یک کره بروی صفحه دارای کاربردهایی در نقشه کشی هستند . همانطور که بعدا " خواهیم دید ، یک نگاشت ایزومتریک یا متشابه از کره بتوی صفحه وجود ندارد . به این دلیل است که نمی‌توان نقشهٔ کاملی از جهان با مقیاسی که در تمام نقشه ثابت باشدرسم کرد . استفاده از نگاشتهای همشکل این حسن را دارد که زوایای روی نقشه همان زوایای روی کره هستند ، و با آنکه مقیاس روی نقشه تغییر می‌کند ، در یک نقطهٔ معلوم در تمام جهات یکی است .

امثله و تمرین

۱ . **تصویر گنجنگار.** ما یک نگاشت از کرهٔ سوراخ شده به شعاع a بروی صفحه را به طریق زیر تعریف می‌کنیم . از یک نقطهٔ ثابت روی کره مانند N ، که آن را قطب شمال می‌نامیم ، نقاط کره را روی صفحهٔ مماس در نقطهٔ S ، یعنی قرینهٔ N ، تصویرمی‌کنیم (شکل ۳۰۲۰) . این نگاشت به هر نقطه از کره ، بجز N ، یک نقطه ازصفحه ، یعنی تصویرنقطهٔ مفروض از کره ، را نسبت می‌دهد . این نگاشت یک‌به‌یک و برو است . آن را **تصویر گنجنگار** می‌نامند .

یک دستگاه مختصات متعامد دکارتی در فضا طوری اختیار می‌کنیم که مبداء O بر

مرکزکره قرار داشته و خط جهتدار ON محور z باشد . دراین صورت ، قطب شمال ،



شکل ۳۰۲۰

که مرکز تصویر است ، دارای مختصات $(0, 0, a)$ است . در صفحهٔ تصویر نیز مختصات دکارتی متعامد u, v را با مبداء دستگاه مختصات در نقطهٔ تماس با کره ، ومحورهای u و v موازی محورهای x و y اختیار می‌کنیم . دراین صورت ، نقطه‌ای از کره به مختصات کروی (θ, ϕ) به نقطه‌ای از صفحه به مختصات

$$u = 2a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos\phi, \qquad v = 2a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \sin\phi$$

نگاشته می‌شود . اثبات این مطلب را به‌خواننده محول می‌کنیم . معادلات اخیر را می‌توان یک تبدیل از مختصات موضعی روی کره درنظر گرفت . از مقایسهٔ آنها با فرمولهای (۱۵۰۱۱) ، معلوم می‌شود که مختصات جدید روی کره همان مختصات مورد بحث در تمرین ۹ از ۳۰۱۱ و تمرین ۲ از ۴۰۱۶ است . این مختصات جدید روی‌کره و مختصات (u, v) روی صفحه نسبت به تصویر گنجنگار سازگارند . اما اولین فرم اساسی کره برحسب این مختصات عبارت است از

$$ds^2 = \frac{16a^2}{4a^2 + u^2 + v^2}(du^2 + dv^2),$$

که با اولین فرم اساسی صفحه ، یعنی $du^2 + dv^2$ ، متناسب است . بنابراین ،تصویر گنجنگار یک نگاشت همشکل می‌باشد . در نقشه کشی ، از آن برای رسم نواحی قطبی استفاده می‌شود .

۲ . **تصویر مرکاتور**[1] . این تصویر یک نگاشت همشکل از کره بتوی صفحه است، به‌طوری که نصف‌النهارات به خطوطی موازی محور v ، و دوایر عرض جغرافیایی به خطوطی موازی محور u نگاشته مـی‌شوند درحالی که مقیاس در امتداد استوا $(\theta = 0)$ در تمام نقاط یکـی است . بنا به فرض، خطوط ثـابت $= \theta$ به خطوط ثابت $= v$ ، و خطوط ثابت $= \phi$ به‌خطوط ثابت $= u$ نگاشته می‌شوند . بنابراین ، نگاشت ما به صورت زیر می‌باشد :

$$u = f(\phi), \qquad v = g(\theta).$$

چون مقیاس در امتداد استوا $\theta = 0$ یکی است ، u باید با ϕ متناسب باشد ؛ یعنی ،

$$u = \lambda\phi, \qquad \lambda = \text{ثابت}$$

لذا ، با معرفی مختصات جدید ϕ و θ روی صفحه ، اولین فرم اساسی جدید

$$ds^2 = du^2 + dv^2 = [g'(\theta)]^2\, d\theta^2 + \lambda^2\, d\phi^2$$

به‌دست مـی‌آید . از مقایسهٔ این فرم با اولین فرم اساسی کره به شعاع a ، یعنی

$$a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi^2),$$

شرط همشکلی نگاشت را به‌صورت زیر خواهیم یافت :

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{a^2} = \frac{\lambda^2}{a^2\cos^2\theta}$$

یا

$$g'(\theta) = \frac{\lambda}{\cos\theta}.$$

علامت + را برای رادیکال انتخاب می‌کنیم . انتخاب دیگر تصویری به‌دست می‌دهد که نسبت به محور v متقارن است . بعلاوه ، داریم

$$g(\theta) = \int \frac{\lambda\, d\theta}{\cos\theta} = \lambda \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + C.$$

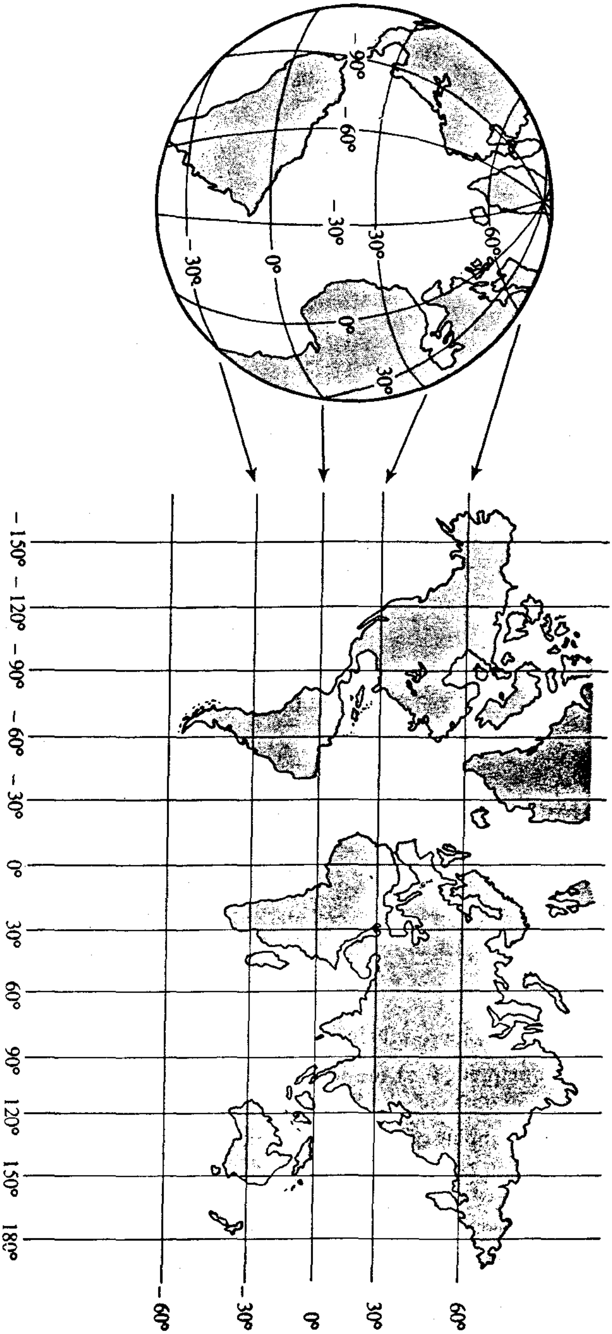
انتخاب ثابت C نگاشت را فقط با انتقال نقش در امتداد محور v متاثر می‌سازد . بنابراین ، معادلات تصویر مرکاتور

$$u = \lambda\phi, \qquad v = \lambda \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

به‌دست می‌آیند (شکل ۴۰۲۰) . درتصویر مرکاتور ، خطوط اریب (یعنی ، خطوطی

---

1. *Mercator*


-90°
-60°
-30°
30°
-30°
0°
60°
0°
30°
-150°
-120°
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
120°
150°
180°
-60°
-30°
0°
30°
60°

شکل ۴۰۲۵

که نصف النهارات را در زاویهٔ ثابتی قطع می‌کنند) به‌خطوطی مستقیم نگاشته می‌شوند. به این دلیل، از نقشه‌های تصویر مرکاتور در کشتیرانی و هدایت هواپیما استفاده می‌شود.

۳ . ثابت کنید هر نگاشت ایزومتریک سطوح یک نگاشت همشکل است.

۴ . ثابت کنید که انعکاس صفحه نسبت به یک دایره به مرکز O و شعاع R ، یعنی نگاشتی که هر نقطهٔ $P \neq 0$ را به نقطهٔ P' واقع بر همان شعاع OP طوری می‌برد که $OP \cdot OP' = R^2$ ، یک نگاشت همشکل از صفحه با نقطهٔ محذوف O است.

۵ . یک نگاشت همشکل از یک چنبره بتوی صفحه پیدا کنید.

۵.۲۰ نگاشتهای هم‌مساحت

یک *نگاشت هم‌مساحت* نگاشتی است که مساحت ناحیه‌ها را حفظ می‌کند.

قضیه. *هر نگاشت منتظم از کلاس C_1 از سطح $\mathscr{F}_1$ بتوی سطح $\mathscr{F}_2$ یک نگاشت موضعاً هم‌مساحت است اگر و فقط اگر، در مختصات سازگار،*

$$g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2 = \tilde{g}. \qquad (۶.۲۰)$$

برهان. مساحت نواحی روی هر دو سطح نظیر به ناحیهٔ Ω روی صفحه به پارامترهای (u^1, u^2) به ترتیب برابرند با

$$\int_\Omega\int\sqrt{g}\,du^1\,du^2 \quad \text{یا} \quad \int_\Omega\int\sqrt{\tilde{g}}\,du^1\,du^2 .$$

این نگاشت هم‌مساحت است اگر و فقط اگر به‌ازای هر Ω ،

$$\int_\Omega\int\sqrt{g}\,du^1\,du^2 = \int_\Omega\int\sqrt{\tilde{g}}\,du^1\,du^2,$$

که، به‌نوبهٔ خود، معادل این است که انتگرالدهها با هم مساوی باشند. بنابراین، $\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}}$ یا $g = \tilde{g}$ شرط لازم و کافی بوده، و قضیه ثابت می‌شود.

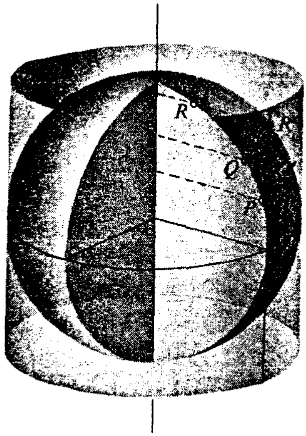
امثله و تمرین

۱ . **تصویر *لامبرت*[1].** با تصویر نقاط یک کره بتوی استوانهٔ محیطی‌اش به‌وسیلهٔ

---

1. *Lambert*

عمودهایی برمحورا ستوانه و ، بعد ، گسترش استوانه روی صفحه ، نگاشتی از کره (بدون دونقطهٔ متقاطر) بتوی صفحه ، به‌نام **تصویر لامبرت** ، به‌دست می‌آید (شکل ۵۰۲۰) .



شکل ۵۰۲۰ T

بااستفاده ازمختصات استوانه‌ای (ϕ, z) روی استوانه ، برای این تصویر معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\phi = \phi, \qquad z = a \sin\theta,$$

که‌درآن ϕ طول جغرافیایی و θ عرض جغرافیایی روی کره است . اولین فرم اساسی استوانه برحسب مختصات استوانه‌ای مساوی است با

$$ds^2 = a^2\, d\phi^2 + dz^2,$$

و برحسب مختصات جدید برابر است با

$$ds^2 = a^2\, d\phi^2 + a^2 \cos^2\theta\, d\theta^2,$$

که درآنجا $\tilde{g} = a^4 \cos^2\theta$. بنابراین ، $\tilde{g}$ مساوی‌مبین‌اولین فرم‌اساسی کره بوده ، و تصویر بتوی استوانه هم‌مساحت می‌باشد .

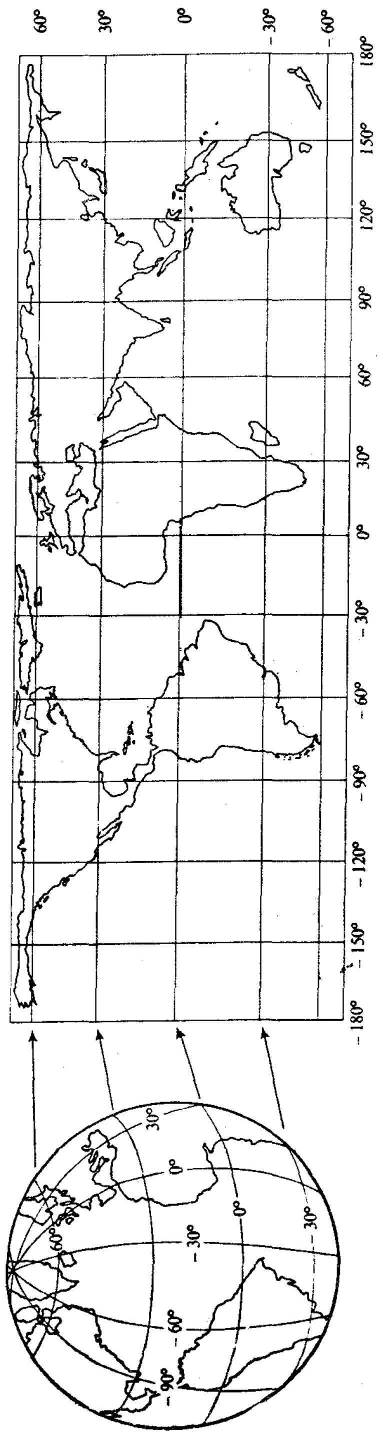
با گستردن استوانه روی صفحه ، تصویر لامبرت به‌دست می‌آید :

$$u = a\phi, \qquad v = a \sin\theta,$$

که (u, v) مختصات دکارتی در صفحه است . تصویر لامبرت نیز هم‌مساحت است .

۲ . ثابت کنید که اگر یک نگاشت همشکل و هم مساحت باشد ، ایزومتری است . واضح است که ایزومتریها همشکل و هم‌مساحت می‌باشند .

۳ . یک نگاشت هم‌مساحت از صفحه بروی چنبرهٔ حاصل از دوران یک دایره به شعاع a حول محوری که در صفحهٔ دایره در فاصلهٔ $b > a$ ازمرکز قرار دارد را پیدا کنید.


60°
30°
0°
-30°
-60°
180°
150°
120°
90°
60°
30°
0°
-30°
-60°
-90°
-120°
-150°
-180°

۴ . ثابت کنید به‌ازای هرنگاشت هم‌مساحت یک تور وجود دارد که طول قوس‌منحنیهای آن حفظ می‌شود .

راهنمایی . از مختصات همگرمایی روی یکی از سطوح استفاده کنید .

۲۱ انحنای ژئودزیک و خطوط ژئودزیک

۱.۲۱ هندسهٔ ذاتی یک سطح

همانطور که در ۲.۲۰ دیدیم ، اولیـن فرم اساسی سطح ، وقتی سطح به‌طور ایزومتریک روی سطح دیگرنگاشته شود ،تغییر نمی‌کند و ، بعکس، نگاشتی که اولین فرم اساسی راحفظ کند یک ایزومتری است .

از اینرو ، کمیتی که بتوان آن را فقط برحسب ضرایب اولین فرم اساسی ومشتقاتشان بیان کردنیزحفظ می‌شود ، البته مشروط بر اینکه مختصات روی هر دو سطح سازگار باشند . ما قبلا" بااین نوع کمیات آشنا شده‌ایم ،ازآنجمله ضرایب اولین فرم اساسی g_{ij} و علایم کریستوفل Γ^k_{ij} ، طول یک منحنی روی یک سطح ، زاویهٔ بین منحنیهای واقع بر یک سطح ، مساحت یک ناحیه روی یک سطح ، و (در پرتو قضیهٔ زیر بخش ۳.۱۸) انحنای گاوسی .

با اینحال ، بیـن دو کمیت اول و چهار کمیت بعدی فوق فرقی اساسی وجود دارد . ضرایب اولین فـرم اساسی و علایم کریستوفل به انتخاب مختصات منحنی‌الخط بستگی دارند ،ولذا ، مقادیرشان تحت یک‌نگاشت‌ایزومتریک فقط درحالتی حفظ‌می‌شوندکه‌مختصات منحنی‌الخط نسبت‌به‌این‌نگاشت سازگار باشند .ازآن سو ، بقیهٔ کمیتها کمیات هندسی واقعی هستند ،که ازمختصات منحنی‌الخط به‌کار رفته در محاسبهٔ آنها مستقل‌اند ، و لذا ،همیشه تحت یک نگاشت ایزومتریک ،بی‌توجه به مختصات‌منحنی‌الخط، حفظ می‌شوند .گوییم اینها ***پایاهای*** نگاشتهای ایزومتریک سطوح می‌باشند .

همچنین ،بعضی از***خواص*** یک‌سطح یا نقاط‌آن می‌توانند تحت یک نگاشت ایزومتریک حفظ شوند ؛ مثـلا" ، نـوع یـک نقطه (بیضوی ، هذلولوی ، یا سهموی) تحت یک نگاشت ایزومتریک تغییر نمی‌کند ، زیرا این نوع به وسیلهٔ علامت انحنای گاوسی مشخص می‌شود ، که یک پایای نگاشتهای ایزومتریک است .

کمیات وخواصی که به وسیلهٔ نگاشتهای ایزومتریک سطوح حفظ می‌شوند به هندسه‌ای تعلق دارند به‌نام ***هندسهٔ ذاتی*** سطوح .

ما قبلا" چندکمیت ذاتی را ذکر کرده‌ایم : طول ، زاویه ، مساحت ، و انحنای‌گاوسی . از اینهافقط‌انحنـای گاوسی به اثبات بیش و کـم پیچیده‌ای برای خاصیت ذاتی خود نیاز دارد (Gauss's *theorema egregium*) ؛ خاصیت ذاتی سایـرین تقریبا" بدیهی است . از

خاصیت ذاتی انحنای گاوسی فورا" قضیهٔ زیر بهدست میآید .

قضیه . ***کره با صفحه موضعا " ایزومتریک نیست .***

درواقع ، اگر کره با صفحه موضعا " ایزومتریک بود ، انحناهای گاوسی در نقاط متناظر یکیمیشد . اما انحنای گاوسی کره عددی مثبت است ، حال آنکه انحنای گاوسی صفحه صفر میباشد . این قضیه را ثابت خواهد کرد .

این فصل اصولا " به هندسهٔ ذاتی سطوح اختصاص دارد . با اینحال، درطول راه مفاهیمی را نیز معرفی نموده و چند مطلب را که به هندسهٔ ذاتی مربوط نمیشوندثابت خواهیم کرد .

۲۰۲۱ انحنای یک منحنی روی سطح

یک منحنی در فضا داده شده است . ***بردار انحنای*** این منحنی در نقطهٔ P برداری است همراستا و همجهت بردار قائم اصلی در P و طولش برابر است با انحنای منحنی در P . اگر بردار انحنا را با $\mathbf{k}$ نشان دهیم ، خواهیم داشت

$$\mathbf{k} = \kappa\mathbf{n}. \tag{۱۰۲۱}$$

اگر منحنی روی سطحی قرار گیرد ، میتوان این بردار را به دو مولفه تجزیه کرد : مماس و قائم به این سطح در نقطهٔ P . مولفهٔ مماسی را ***بردار انحنای ژئودزیک*** نامیده و آن را با $\mathbf{k}_g$ نشان میدهیم ، و مولفهٔ قائم را ***بردار انحنای قائم*** نامیده و با $\mathbf{k}_n$ نشان خواهیم داد .

فرض کنیم منحنی روی سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

از کلاس C_2 قرار داشته و ، در مختصات منحنیالخط، به معادلهٔ پارامتری

$$u^i = u^i(s) \tag{۲۰۲۱}$$

باشد ، که در آن s پارامتر طول قوس است . دراینصورت ، معادلهٔ پارامتری منحنی در فضا عبارت است از

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s)),$$

و بردار انحنا مساوی است با

$$\mathbf{k} = \kappa\mathbf{n} = \mathbf{r}''.$$

ما داریم

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_i \frac{du^i}{ds}, \qquad \mathbf{r}'' = \mathbf{r}_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \mathbf{r}_i \frac{d^2u^i}{ds^2}$$

و، طبق (۱۰۱۸)، داریم

$$\mathbf{r}'' = (\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + b_{ij}\mathbf{m}) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \mathbf{r}_k \frac{d^2u^k}{ds^2};$$

درنتیجه،

$$\mathbf{k} = \mathbf{r}'' = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}\right)\mathbf{r}_k + b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}\mathbf{m}$$

در اینجا تجزیهٔ لازم صورت گرفته است؛ و لذا، برای بردار انحنای ژئودزیک داریم

$$\mathbf{k}_g = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}\right)\mathbf{r}_k \qquad (۳۰۲۱)$$

و برای بردار انحنای قائم خواهیم داشت

$$\mathbf{k}_n = b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}\mathbf{m}. \qquad (۴۰۲۱)$$

همچنین، داریم

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n. \qquad (۵۰۲۱)$$

از تعریف بردارانحناواضح‌است که‌بردارهای‌انحنای‌ژئودزیک و قائم یک منحنی به‌انتخاب پارامتری سازی بستگی ندارند. همچنین، از (۳۰۲۱) نتیجه می‌شود که مولفه‌های بردار انحنای ژئودزیک نسبت به پایهٔ طبیعی $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ بر حسب علایم کریستوفل و مشتقهای مختصات منحنی الخط نسبت به پارامتر منحنی بیان می‌شوند. بنابراین، ***بردار انحنای ژئودزیک یک پایای ایزومتریها*** است؛ یعنی، اگر یک نگاشت ایزومتری دو سطح $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_2$ باشد، بردار انحنای ژئودزیک یک منحنی روی $\mathscr{F}_1$ در نقطه‌ای مانند P به وسیلهٔ این نگاشت به بردار انحنای ژئودزیک نقش منحنی روی $\mathscr{F}_2$ در نقش P برده می‌شود.

در زیر بخش بعدی، انحنای ژئودزیک با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌گیرد. بررسی انحنای قائم را به بخش ۱۰۲۵ موکول می‌کنیم.

۳۰۲۱ انحنای ژئودزیک

یک منحنی از کلاس C_2 مانند

$$u^i = u^i(s)$$

را روی سطحی از کلاس C_2 در نظر می‌گیریم. چون بردار انحنای ژئودزیک $\mathbf{k}_g$ در نقطهٔ P تصویرقائم‌بردار $\mathbf{k}$ در P (که برمماس منحنی‌عمود است) روی صفحهٔ مماس بر سطح در نقطهٔ P است (که این خط مماس را در بر دارد)، باید بر بردار مماس $\mathbf{t}$ منحنی در P عمود باشد. دراین نقطه، علاوه بر برداریکهٔ مماس $\mathbf{t}$، برداریکهٔ دیگر $\mathbf{u}$ را نیز در نظرمی‌گیریم که از دوران $\mathbf{t}$ حول قائم به سطح در P به اندازهٔ یک زاویهٔ قائمهٔ مثبت‌در جهت موضعی سطح حاصل می‌شود. بنابراین،

$$\mathbf{u} = \mathbf{m} \times \mathbf{t}. \tag{۶۰۲۱}$$

بردار $\mathbf{u}$، بدلیل عمود بودن بر $\mathbf{m}$، یک بردار مماس بر سطح است؛ بعلاوه، (۶۰۲۱) نشان می‌دهدکه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{t}$ متعامدند، و سه بردار $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{m}$ یک سه‌تایی جهتدار با جهت مثبت تشکیل می‌دهند. $\mathbf{u}$ را **قائم ژئودزیک منحنی** در P می‌نامند. توجه کنید که جهت بردار $\mathbf{u}$ به جهت سطح بستگی دارد.

فرض کنیم سطح با منحنی واقع روی آن به‌طور ایزومتریک روی سطح دیگر نگاشته شده باشد. با این نگاشت، جهت سطح اول جهتی را به سطح دیگر القا می‌کند که ممکن است با جهت سطح دوم یکی باشد یا نباشد. درحالت اول، گوییم نگاشت ***جهت را حفظ می‌کند***، و، درحالت دوم، ***جهت رابرمی‌گرداند***. بردار قائم ژئودزیک منحنی در P به بردارقائم ژئودزیک نقش در نقطهٔ متناظر برده می‌شود اگر نگاشت جهت را حفظ کند، و به بردار قائم ژئودزیک قرینه برده میشود اگر نگاشت جهت را برگرداند. بنابراین، بردار قائم ژئودزیک را می‌توان به هندسهٔ ذاتی سطوح مربوط دانست فقط با یک شرط که جهتش به جهت سطح بستگی دارد. چون $\mathbf{k}_g$ و $\mathbf{u}$ دارای یک‌راستا هستند (متعامد به $\mathbf{m}$ و $\mathbf{u}$)،

$$\mathbf{k}_g = k_g\mathbf{u}.$$

ضریب k_g ***انحنای ژئودزیک*** منحنی روی سطح نامیده می‌شود. چون بردار $\mathbf{k}_g$ پایای نگاشتهای‌ایزومتریک‌بوده و $\mathbf{u}$ به‌ازای نگاشتهای‌حافظ‌جهت پایا‌ست و تحت ایزومتریهایی که جهت را برمی‌گردانند تغییر علامت می‌دهد؛ انحنای ژئودزیک اسکالر k_g نیز همان خاصیت را دارد؛ یعنی، قدر مطلقش پایا بوده و علامتش به جهت بستگی خواهد داشت.

قضیه. ***انحنای ژئودزیک‌هر منحنی از کلاس C_2 روی یک سطح از کلاس C_2 برابر است با***

$$k_g = \sqrt{g}\begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{ds} & \dfrac{du^2}{ds} \\ \dfrac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma^1_{ij}\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^j}{ds} & \dfrac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma^2_{ij}\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^j}{ds} \end{vmatrix} \tag{۷۰۲۱}$$

که‌در آن s پارامترطول قوس منحنی‌است. قدر مطلق انحنای ژئودزیک به دستگاه‌مختصات منحنی‌الخط بستگی نـدارد، ولی علامتش با تغییر جهت سطح یا منحنی تغییر می‌یابد. قدر مطلق انحنای ژئودزیک پایای نگاشت ایزومتریک است.

برهان. داریم

$$k_g = \mathbf{k}_g\mathbf{u} = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\mathbf{r}_k\mathbf{u}, \qquad (۸۰۲۱)$$

ولی

$$\mathbf{r}_k\mathbf{u} = \mathbf{r}_k(\mathbf{m} \times \mathbf{t}) = \mathbf{m}(\mathbf{t} \times \mathbf{r}_k),$$

و

$$\mathbf{t} = \frac{du^l}{ds}\mathbf{r}_l.$$

بنابراین،

$$\mathbf{r}_k\mathbf{u} = \frac{du^l}{ds}\mathbf{m}(\mathbf{r}_l \times \mathbf{r}_k),$$

$$\frac{du^l}{ds}(\mathbf{r}_l \times \mathbf{r}_1) = \frac{du^2}{ds}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1) = -\frac{du^2}{ds}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = -\sqrt{g}\frac{du^2}{ds}\mathbf{m},$$

زیرا $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \sqrt{g}\mathbf{m}$. به همین نحو، داریم

$$\frac{du^l}{ds}(\mathbf{r}_l \times \mathbf{r}_2) = \sqrt{g}\frac{du^1}{ds}\mathbf{m}.$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}_1\mathbf{u} = -\sqrt{g}\frac{du^2}{ds}, \qquad \mathbf{r}_2\mathbf{u} = \sqrt{g}\frac{du^1}{ds}.$$

با گذاردن این مقادیر در (۸۰۲۱)، رابطهٔ (۷۰۲۱) به‌دست می‌آید.

همانطورکه قبلاً دیده شد، انحنای ژئودزیک تحت یک نگاشت ایزومتریکی که جهت را حفظ می‌کند حفظ می‌شود، و زمانی که ایزومتری جهت را برگرداند تغییر علامت می‌دهد. تغییر جهت منحنـی (تعـویض s با $-s$) علامت سطر اول دترمینان (۷۰۲۱) را تغییر می‌دهد ولـی تاثیری بر سطر دوم ندارد. بنابراین، علامت انحنای ژئودزیک نیز در این حالت تغییر می‌یـابد. پایایی فرمول (۸۰۲۱) را می‌شد با محاسبه اثبات کرد، ولی این

مطلب باتوجه به‌اینکه انحنای ژئودزیک بی‌توسل به مختصات منحنی‌الخط و فقط بااستفاده از بردار انحنای منحنی و بردار قائم سطح تعریف شده نیز نتیجه می‌شود .

فرمول (۷۰۲۱) فقط برای پارامتری سازی طبیعی منحنی برقرار است . برای آنکه یک فرمول معتبر کلی به‌دست آید ، ابتدا توجه می‌کنیم که برای یک پارامتری سازی دیگر t از منحنی ، داریم

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{du^k}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{-1/2}\frac{du^k}{dt},$$

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} = \frac{d^2u^k}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du^k}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = \left(g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{-1}\frac{d^2u^k}{dt^2} + \frac{du^k}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}.$$

اگر این را در (۷۰۲۱) گذارده و حاصل ضرب

$$\left(g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{1/2}\frac{d^2t}{ds^2}$$

در سطر اول را از سطر دوم دترمینان کم کنیم ، خواهیم داشت

$$k_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{3/2}}\begin{vmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} & \frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} \end{vmatrix} \qquad (۹۰۲۱)$$

توجه کنید که تعاریف بردارهای انحنای ژئودزیک و انحنای قائم یک سطح فوراً دو خاصیت زیر را نتیجه می‌دهند :

۱ . هرگاه دو سطح در امتداد یک خط بر هم مماس بوده (یعنی ، هر دو در تمام نقاط این خط که بر هر دوی آنها واقعند صفحات مماس یکسان داشته باشند) و در نقاط مشترک آنها یک جهت داشته باشند ، آنگاه انحنای ژئودزیک خط واقع بر هر دو سطح یکسان است . هرگاه جهتها مخالف یکدیگر باشند ، آنگاه انحنای ژئودزیک روی یکی از سطوح قرینهٔ انحنای ژئودزیک روی دیگری می‌باشد .

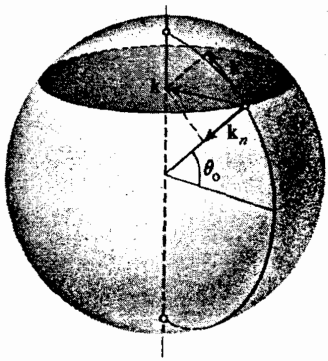
۲ . هرگاه دوسطح در امتداد منحنی $\mathscr{C}$ یکدیگر را در هر نقطه با زاویهٔ قائمه قطع کنند ، آنگاه بردارانحنای ژئودزیک $\mathscr{C}$ بر یک سطح با بردار انحنای قائم $\mathscr{C}$ بر سطح دیگر درهر نقطه از $\mathscr{C}$ یکی است ، و بالعکس.

امثله و تمرین

۱ . ***انحنای ژئودزیک یک دایرهٔ عرض جغرافیایی برکره .*** این انحنای ژئودزیک را با

استفادهٔ مستقیم از تعریف، برای $\theta = \theta_0$ پیدامی‌کنیم. بردارانحنای $\mathbf{k}$ درصفحهٔ دایره قرار دارد و طولش مساوی عکس شعاع این دایره است؛ یعنی، $|a\cos\theta_0|^{-1}$. بنابراین (ر.ک. شکل ۱۰۲۱)، طول بردار $\mathbf{k}_g$ مساوی قدر مطلق

$$\frac{1}{a\cos\theta_0}\sin\theta_0 = \frac{1}{a}\tan\theta_0$$



شکل ۱۰۲۱

است. علامت به جهت‌کره و دایره بستگی دارد. بخصوص، اگر جهت کره به وسیلهٔ دستگاه مختصات منحنی‌الخط با طول جغرافیایی ϕ به‌عنوان اولین مختص و عرض جغرافیایی θ به عنوان دومین مختص القا شده باشد (دراین صورت، بردار قائم $\mathbf{m}$ از مرکزبه خارج اشاره‌دارد)،و اگر جهت دایرهٔ عرض جغرافیایی در جهت‌افزایش طول جغرافیایی ϕ باشد، بردار ژئودزیک با فرمول فوق بیان خواهد شد.

۲. انحنای ژئودزیک یک منحنی واقع بر یک صفحه با انحنای مسطح که در زیر بخش ۲۰۹ مطرح شد یکی است.

۳. انحناهای ژئودزیک مارپیچ

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = bt$$

واقع بر استوانهٔ $x = a\cos u^1, y = a\sin u^1, z = u^2$ و بر مارپیچ گون $x = u^1\cos u^2$ $y = u^1\sin u^2, z = u^2$ را بیابید.

۴. انحناهای ژئودزیک منحنیهای مختصات سطح

$$x = u^1\cos u^2, \qquad y = u^1\sin u^2, \qquad z = f(u^2),$$

که درآن f تابعی از کلاس C_2 است، را بیابید.

۵. ثابت کنید دوایر عظیمهٔ کره دارای انحنای ژئودزیک صفر هستند.

۶. انحنای‌ژئودزیک منحنی $\mathscr{C}$ واقع بر یک سطح گستردنی در هر نقطه با انحنای‌مسطح

در نقطهٔ نظیر نقش منحنی به وسیلهٔ یک نگاشت ایزومتریک جهت نگهدار سطح گستردنی روی صفحه یکی است . این نتیجه‌ای است از خاصیت ذاتی انحنای ژئودزیک .

۷ . ثابت کنید قدر مطلق انحنای ژئودزیک منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ روی سطح گستردنی که به‌وسیلهٔ مماسهای برمنحنی جارو می‌شود با انحنای آن یکی است .

۸ . ثابت کنیدانحنای ژئودزیک‌منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ برسطح اصلاحی آن ، یعنی پوش صفحات اصلاحی آن ، همه‌جا مساوی 0 است . بنابراین ، اگر سطح را روی صفحه بگسترانیم ، منحنی به خطی مستقیم بدل خواهد شد .

۹ . نتایج این بخش را به‌کار برده ، مسئلهٔ ۳۰۲۰ را با محاسبهٔ انحنای ژئودزیک گسترده‌های مربوطه حل کنید .

۱۰ . ثابت کنید انحنای ژئودزیک یک منحنی به معادلهٔ ضمنی $\phi(u^1, u^2) = 0$ ، که درآن ϕ تابعی از کلاس C_2 است ، برابر است با

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\frac{g_{12}\phi_2 - g_{22}\phi_1}{g_{11}(\phi_1)^2 - 2g_{12}\phi_1\phi_2 + g_{22}(\phi_2)^2} + \frac{\partial}{\partial u^2}\frac{g_{12}\phi_1 - g_{11}\phi_2}{g_{11}(\phi_1)^2 - 2g_{12}\phi_1\phi_2 + g_{22}(\phi_2)^2}\right],$$

که درآن $\phi_1 = \partial\phi/\partial u^1, \phi_2 = \partial\phi/du^2$.

۱۱ . ثابت کنید که اگر مختصات منحنی الخط متعامد باشند $(g_{12} = 0)$ ، انحنای ژئودزیک u^1 ــ خط مساوی

$$-\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \ln\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2},$$

وانحنای ژئودزیک u^2 ــ خط برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \ln\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}.$$

۱۲ . ثابت کنیدکه‌اگرهریک از u^1 ــ خطوط یک دستگاه مختصات ایزومتریک روی یک‌سطح انحنای ژئودزیک ثابت داشته باشد ، هریک از u^2 ــ خطوط نیز انحنای ژئودزیک ثابت خواهد داشت .

۱۳ . ثابت کنید انحنای ژئودزیک یک منحنی که در هر نقطه با u^1 ــ خط زاویهٔ $\alpha(s)$ می‌سازد مساوی است با

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\Gamma^2_{1i}\frac{du^i}{ds}.$$

این فرمول به گاوس منسوب است .

۴۰۲۱ خطوط ژئودزیک

یک **خط ژئودزیک** یا ، خلاصه‌تر ، یک **ژئودزیک** ، یک سطح منحنیی است که انحنای ژئودزیک آن در هر نقطه صفر باشد .

چون قدر مطلــق انحنای ژئودزیک یک پایای ایزومتریهای سطوح است ، مفهوم خط ژئودزیک به هندسهٔ ذاتی تعلق خواهد داشت .

معادلهٔ دیفرانسیل خط ژئودزیک را می‌توان با متحد صفر گرفتن طرف راست (۷۰۲۱) یا (۹۰۲۱) به‌دست آورد . این معادله یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم است . به‌جای آن یک دستگاه معــادلات دیفــرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به‌کار می‌بریم ، که با متحد صفر گرفتن هر مولفهٔ بردار انحنای ژئودزیک جداگانه به‌دست می‌آید . معادلات زیر را داریم :

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0 \qquad (k = 1, 2). \tag{۱۰۰۲۱}$$

اما ، چون s در این معادله پارامتر قوس است ، شرط

$$g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 1 \tag{۱۱۰۲۱}$$

نیز باید به‌وسیلهٔ خط ژئودزیک برقرار شود .

شرط (۱۱۰۲۱) به‌ما اجازهٔ تعویض معادلات (۱۰۰۲۱) با یک معادله به‌صورت زیر را نیز می‌دهد :

$$\frac{d^2u^2}{(du^1)^2} = \Gamma^1_{22}\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^3 + (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\frac{du^2}{du^1} - \Gamma^2_{11}, \tag{۱۲۰۲۱}$$

که در آن u^2 تابعی از u^1 گرفته می‌شود .

به‌آسانی ثــابت می‌شود که اگر مقادیر اولیه برای u^i و du^i/ds در شرط (۱۱۰۲۱) صدق کنند ، این شرط به‌وسیلهٔ جواب معادلات (۱۰۰۲۱) که با این مقادیر اولیه معیــن می‌شود نیز برقرار است .

درواقع ، با مشتقگیری از سمت چپ (۱۱۰۲۱) ، داریم

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + 2g_{ij}\frac{d^2u^i}{ds^2}\frac{du^j}{ds}.$$

با گذاردن یک جواب دستگاه (۱۰۰۲۱) به‌جای u^i ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} - 2g_{ij}\Gamma^i_{lk}\frac{du^l}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} - 2\Gamma_{lkj}\frac{du^l}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}$$
$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^l}\frac{du^l}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}$$
$$-\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}\frac{du^l}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^i}\frac{du^l}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}.$$

اگر در جمعوند دوم اندیس k را به i و l را به k ، در جمعوند سوم l را به i ، و در جمعوند چهارم l را به i ، k را به j ، و j را به k تغییر دهیم ، درمی‌یابیم که مجموع صفر می‌باشد .

این یعنی طرف چپ (۱۱۰۲۱) ثابت است و مقدارش همه‌جا همان مقدار در نقطهٔ ابتدایی‌است . این ما را از قید اینکه هر دم جواب (۱۰۰۲۱) را در (۱۱۰۲۱) امتحان کنیم آزاد می‌سازد .

قضیهٔ ۱ . از هر نقطهٔ منتظم یک سطح از کلاس C_2 در هر راستا دست‌کم یک خط ژئودزیک‌می‌گذرد . اگرفرضهای انتظام قویتر باشند ، مثلا" سطح از کلاس C_3 باشد ، دقیقا" یک چنین خط ژئودزیک وجود خواهد داشت .

برهان . فرض کنیم $\mathbf{a} = a^i\mathbf{r}_i$ بردار یکهٔ راستای داده شده در نقطهٔ $P_0(u_0^1, u_0^2)$ باشد . دراین صورت ، مولفه‌های a^i ، وقتی به عنوان مقادیر اولیه برای du^i/ds به‌کار روند ، در معادلهٔ (۱۱۰۲۱) صدق می‌کنند . از اینرو ، معادلهٔ یک خط ژئودزیک مار بر P_0 در راستای $\mathbf{a}$ جواب معادلهٔ (۱۰۰۲۱) با مقادیر اولیهٔ $u^i = u_0^i, du^i/ds = a^i$ است . بنابر قضیهٔ وجودی و یکتایی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل ، این جواب درصورتی که ضرایب پیوسته باشندوجود دارد ، و اگر در شرایط قویتری صدق کنند (مثلا" ، شرط لیپ‌شیتس[1]) منحصر بفرداست ، و درهرحالت ، اگر ضرایب مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند ، این امر درست خواهدبود . این فرض که سطح از کلاس C_2 باشد پیوستگی ضرایب Γ_{ij}^k را ایجاب می‌کند؛ فرض از کلاس C_3 بودن ایجاب می‌کند که ضرایب Γ_{ij}^k از کلاس C_1 باشند . این برهان قضیهٔ ما را کامل خواهد کرد .

در اینجا پارامتری سازی هندسی زیر از خطوط ژئودزیک را ذکر می‌کنیم .

---

1. Lipschitz

قضیهٔ ۲. *یک منحنی از کلاس C_2 روی یک سطح از کلاس C_2 یک خط ژئودزیک است اگر و فقط اگر صفحهٔ بوسان منحنی در هر نقطه به صفحهٔ مماس بر سطح در آن نقطه متعامد بوده یا انحنای منحنی در این نقطه صفر باشد.*

برهان. این مطلب فوراً" از این امر که $k_g = 0$ اگر و فقط اگر **k** و **m** همخط باشند نتیجه می‌شود که حالتی است که اگر و فقط اگر $\mathbf{k} = 0$ یا بردار قائم اصلی منحنی، یعنی **n**، و بردار قائم سطح، یعنی **m**، همخط باشند. شرط اخیر یعنی صفحهٔ بوسان شامل قائم سطح باشد؛ و لذا، به صفحهٔ مماس متعامد خواهد بود.

امثله و تمرین

احکام زیر را ثابت کنید:

۱. خطوط ژئودزیک روی صفحه خطوط مستقیم می‌باشند.

۲. خطوط ژئودزیک روی کره دوایر عظیمه‌اند.

۳. خطوط ژئودزیک روی استوانهٔ مستدیر عبارتند از خطوط جاری، مقطع صفحات عمود بر خطوط جاری، و مارپیچهای واقع بر استوانه.

۴. گستردهٔ یک منحنی در فضا خطوط ژئودزیک روی پوش صفحات قائم به منحنی است (قس. تمرین ۸ در ۳۰۲۰ و تمرین ۹ در ۳۰۲۱).

۵. هر خط مستقیم واقع بر یک سطح یک خط ژئودزیک آن سطح است.

۶. خطوط ژئودزیک یک سطح دوار را بیابید.

۷. معادلهٔ دیفرانسیل خطوط ژئودزیک سطح $z = f(x, y)$ را بیابید.

۸. معادلات پارامتری خطوط ژئودزیک سهمی‌گون دوار

$$x = u^1 \cos u^2, \qquad y = u^1 \sin u^2, \qquad z = \frac{(u^1)^2}{2p}, \qquad p = \text{ثابت}$$

را بیابید.

۹. ثابت کنید هرگاه سطحی مختصات منحنی‌الخط متعامد بپذیرد، به‌طوری که همهٔ u^1 ـ خطوط و u^2 ـ خطوط خطوط ژئودزیک باشند، آنگاه سطح گستردنی خواهد بود.

۱۰. ثابت کنید که تصویر از مرکز یک کره بروی کره‌ای هم‌مرکز با آن و به شعاع متفاوت، با آنکه ایزومتری نیست، خطوط ژئودزیک را بتوی خطوط ژئودزیک می‌نگارد.

۱۱. مثال پیش یک نگاشت همشکل (حتی یک تشابه) است؛ نگاشتهای مستوی صفحهٔ

$$(x, y) \to (ax + by + c, dx + ey + f),$$

که‌در آن $ae - bd \neq 0$ ، خطوط مستقیم (ژئودزیکها) را بتوی خطوط مستقیم می‌نگارند بی‌آنکه لزوماً " نگاشتهایی همشکل یا هم مساحت باشند. این مطلب را با اختیار مقادیر خاصی برای ضرایب نشان دهید.

۱۲ . ثابت کنیدیک نگاشت همشکل که همهٔ ژئودزیکها را به‌ژئودزیکها ببرد یک تشابه است
راهنمایی. از مختصات همگرمایی استفاده کنید.

۵۰۲۱ مختصات نیمه ژئودزیک

حال به‌توصیف ساختنی می‌پردازیم که‌به‌مختصات نیمه ژئودزیک ختم می‌شود . یک منحنی منتظم دلخواه روی‌سطحی که ازنقطهٔ دلخواه P_0 می‌گذرد اختیار کرده، و پارامتر طبیعی منحنی را با u^2 نشان می‌دهیم‌به‌طوری‌که P_0 نظیر به مقدار $u^2 = 0$ باشد . همچنین ، در هرنقطه ازاین منحنی خط‌ژئودزیک معین شده به وسیلهٔ بردار قائم ژئودزیک $\mathbf{u}$ درنقطهٔ نظیر را اختیار و پارامتر طول قوس روی این خط‌ژئودزیک را با u^1 نشان می‌دهیم .

دو پارامتر u^1, u^2 موضع یک نقطه‌رادرقلمرو جارو شده به وسیلهٔ این خطوط‌ژئودزیک معین‌می‌کنند . در همسایگی به‌قدر کافی کوچک نقطهٔ P_0 می‌توان آنها را به‌عنوان‌مختصات منحنی‌الخط در یک نمایش پارامتری منتظم سطح به‌کار برد .

★ برای اثبات این امر ، یک مختصات منحنی‌الخط مجاز معلوم در همسایگی P_0 رابا v^1 و v^2 نشان می‌دهیم . فرض کنیم معادلهٔ منحنی انتخابی ما عبارت باشد از

$$v^i = \phi^i(\tau), \qquad a < \tau < b.$$

دراین صورت ، نقطهٔ P_0 دارای مختصات $v_0^i = \phi^i(0)$ است .

دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\frac{d^2v^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(v^1, v^2)\frac{dv^i}{dt}\frac{dv^j}{dt} = 0. \qquad (۱۳۰۲۱)$$

فرض کنیم

$$\Psi^i(t, \tau, \xi^1, \xi^2) \qquad (۱۴۰۲۱)$$

جواب دستگاه با مقادیر اولیهٔ زیر باشد :

$$\Psi^i(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \phi^i(\tau) \qquad (۱۵۰۲۱)$$

$$\frac{\partial\Psi^i}{\partial t}(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \xi^i. \qquad (۱۶۰۲۱)$$

ξ^1 و ξ^2 را به مستطیل $\alpha < \xi^1 < \beta,\ \gamma < \xi^2 < \delta$ مقید می‌کنیم که شامل جفت مولفه‌های (ξ^1, ξ^2) از تمام بردارهای یکهٔ مماس در همسایگی از نقطهٔ P_0 که شامل منحنی

است می‌باشد.

دراین‌صورت ،نظریهٔ معادلات دیفرانسیل می‌گوید که، اگر توابع Γ^k_{ij} از کلاس C_1 و توابع $\phi^i(t)$ از کلاس C_2 باشند، جوابها به‌ازای t در بازه‌ای چون $-\eta \leq t \leq \eta$ وجود دارند و توابع $\Psi^i(t, \tau, \xi^1, \xi^2)$ در متوازی السطوح $-\eta \leq t \leq \eta, a < \tau < b, \alpha < \xi^1 < \beta$ $\gamma < \xi^2 < \delta$ از کلاس C_2 می‌باشند.

حال اگر توابع $u^i = \psi^i(t)$ جوابی از دستگاه (۳۰۲۱) با مقادیر اولیهٔ ثابت $\psi^i(0) = \phi^i(\tau), \dot\psi^i(0) = \lambda\xi^i, \lambda =$ به‌دست دهند، توابع $v^i = \omega^i(t) = \psi^i(t/\lambda)$ نیز جوابی از (۱۳۰۲۱) با مقادیر اولیهٔ $\omega^i(0) = \phi^i(\tau), \dot\omega^i(0) = \xi^i$ به‌دست خواهند داد. به‌عبارت دیگر، طبق یکتایی جواب، داریم

$$\Psi^i(t/\lambda, \tau, \lambda\xi^1, \lambda\xi^2) = \Psi^i(t, \tau, \xi^1, \xi^2)\cdot \tag{۱۷۰۲۱}$$

بخصوص، به‌ازای $\lambda = t/\eta$ ، داریم

$$\Psi^i(\eta, \tau, t\xi^1/\eta, t\xi^2/\eta) = \Psi^i(t, \tau, \xi^1, \xi^2). \tag{۱۸۰۲۱}$$

با مشتقگیری از این اتحاد نسبت به t و گذاردن $t = 0$ در آن، به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial\Psi^i}{\partial\xi^k}(\eta, \tau, 0, 0)\xi^k = \eta\xi^i.$$

و با جایگذاری $\xi^k = \delta^k_j$ ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial\Psi^i}{\partial\xi^j}(\eta, \tau, 0, 0) = \eta\delta^i_j. \tag{۱۹۰۲۱}$$

دراین صورت، از (۱۵۰۲۱) و (۱۸۰۲۱) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial\Psi^i}{\partial\tau}(\eta, \tau, 0, 0) = \frac{\partial\Psi^i}{\partial\tau}(0, \tau, \xi^1, \xi^2) = \dot\phi^i(\tau). \tag{۲۰۰۲۱}$$

حال به‌کار ساختن خویش باز می‌گردیم؛ قرارمی‌دهیم $t = u^1$ و $\tau = u^2$ ومولفه‌های بردار قائم ژئودزیک $\mathbf{u}(u^2)$ را با $a^1(u^2), a^2(u^2)$ نشان می‌دهیم. چون خطوط ژئودزیک ما جوابهای دستگاه (۱۳۰۲۱) با شرایط اولیهٔ $v^i = \phi^i(0), dv^i/dt = a^i(u^2)$ اند، معادلهٔ ژئودزیک خواهد بود

$$v^i = \Psi^i(u^1, u^2; a^1(u^2), a^2(u^2)),$$

که، بنابر (۱۸۰۲۱)، همان

$$v^i = \Psi^i(u^1, u^2, a^1(u^2), a^2(u^2)) = \Psi^i\left(\eta, u^2, \frac{u^1a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1a^2(u^2)}{\eta}\right) \tag{۲۱۰۲۱}$$

می‌باشد. مشتقات جزئی

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^1} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi^j}\left(\eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta}\right)\frac{a^j(u^2)}{\eta},$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^2} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial \tau}\left(\eta, u^2, \frac{u^1 a^1(u^2)}{\eta}, \frac{u^1 a^2(u^2)}{\eta}\right) + \frac{u^1}{\eta}\frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi^j}(\cdots)\frac{da^j}{du^2}.$$

پس در نقطهٔ P_0 ، که متناظر $u^1 = 0 = u^2$ است ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^1} = a^i(0), \qquad \frac{\partial v^i}{\partial u^2} = \dot{\phi}^i(0).$$

اما $a^i(0)$ و $\dot{\phi}^i(0)$ مولفه‌های دوبردارناصفرمتعامدند ؛ لذا ،بردارهای مستقلی هستند . بنابراین ، دترمینان

$$J = \begin{vmatrix} a^1(0) & a^2(0) \\ \dot{\phi}^1(0) & \dot{\phi}^2(0) \end{vmatrix}$$

مخالف صفر است ، و این ژاکوبی تبدیل مختصات از (v^1, v^2) به (u^1, u^2) در P_0 می‌باشد . بنابراین ، (u^1, u^2) مختصاتی مجاز در همسایگی P_0 می‌باشند . ★

درمختصات (u^1, u^2) ، منحنی اولیه دارای معادلهٔ $u^1 = 0$ است ، خطوط ژئودزیک دارای معادلات ثابت $= u^2$ اند ، و u^1 پارامتر طول قوس روی خطوط ژئودزیک است . از حالا به‌بعد درهمهٔ بحثها از این مختصات موضعی استفاده می‌کنیم . برای خطوط ژئودزیک ثابت $= u^2$ ، داریم

$$\frac{du^1}{ds} = 1 \text{ ، } \frac{du^2}{ds} = 0 \text{ ، و } \frac{d^2u^i}{ds^2} = 0 .$$

با گذاردن این در معادلات (۱۸۰۲۱) ، نتیجه می‌شود که ، در مختصات ما ،

$$\Gamma^k_{11} = 0. \tag{۲۲۰۲۱}$$

همچنین ، باگذاردن $du^1/ds = 1$ و $du^2/ds = 0$ در (۱۱۰۲۱) ، خواهیم داشت

$$g_{11} = 1, \qquad \frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} = 0. \tag{۲۳۰۲۱}$$

فرمول (۲۲۰۲۱) معادل است با

$$\tfrac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{l1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^l}\right) = 0$$

که ، در پرتو (۲۳۰۲۱) ، نتیجه می‌دهد که

$$g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0,$$

$$g^{22}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0.$$

اماهردوضریب g^{12} و g^{22} نمی‌توانندهمزمان صفر شوند ، زیرا درغیر این‌صورت‌دترمینان $g^{11}g^{22} - (g^{12})^2 = 1/g$ صفر می‌شد . بنابراین ،

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0,$$

که نشان می‌دهد که g_{12} به u^1 بستگی ندارد . اما زاویهٔ بین خط $u^1 = 0$ و هر خط ژئودزیک $u^2 = c$ یک زاویهٔ قائمه است ؛ و لذا ، به‌ازای هر u^2 ، $g_{12}(0, u^2) = 0$ ؛ درنتیجه ، به u^2 نیز بستگی ندارد ؛ و لذا ، ثابت ما صفر است . این یعنی مختصات منحنی‌الخط (u^1, u^2) متعامد می‌باشند .

حال‌اگر $g_{22}(u^1, u^2)$ را با $G(u^1, u^2)$ نشان دهیم ، خواهیم دید که اولین فرم‌اساسی سطح دراین مختصات عبارت است از

(۲۴۰۲۱) $$ds^2 = (du^1)^2 + G(du^2)^2,$$

که‌با (۲۹۰۱۶) یکی است . لذا ، مختصات (u^1, u^2) همانهایی هستند که در زیر بخش۱۶ مختصات نیمه‌ژئودزیک نامیدیم. نام "نیمه ژئودزیک" را این امر که یک خانواده ازخطوط مختصات از خطوط‌ژئودزیک و خانوادهٔ دیگر از مسیرهای قائم اولی تشکیل شده است توجیه خواهد کرد . لذا ، وجود مختصات نیمه ژئودزیک در همسایگی به‌قدر کافی کوچک نقطهٔ P راثابت‌کرده‌ایم،به‌طوری‌که‌خط $u^1 = 0$ خط مفروض دلخواهی ماربر P می‌باشد .

با شروع کار ساختن از یک خط‌ژئودزیک می‌توان مختصات نیمه ژئودزیک را از این هم خاصتر کرد . اگر ، علاوه براین ، منحنی $u^1 = 0$ یک خط‌ژئودزیک در پارامتری سازی طول قوس باشد ،اولین فرم‌اساسی و علایم کریستوفل درشرایط‌اضافی زیر صدق می‌کنند :

(۲۵۰۲۱) $$g_{22}(0, u^2) = 1, \qquad \Gamma^i_{jk}(0, u^2) = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2).$$

امثله و تمرین

۱ . مختصات دکارتی متعامد در صفحه حالت خاصی از مختصات نیمه ژئودزیک‌اند . همچنین‌اند مختصات قطبی در صفحه . مبداء یک نقطهٔ منفرد پارامتری سازی در حالت اخیر است .

۲ . مثال‌مختصات قطبی‌ساختن مختصات نیمه ژئودزیک‌زیر را ،به‌نام **مختصات ژئودزیک قطبی** ، پیشنهاد می‌کند . نقطهٔ P_0 از سطح را ثابت گرفته و همهٔ خطوط‌ژئودزیک خارج شده از این نقطه را در نظر می‌گیریم . یک چنین خطی باراستای‌خود معین

می‌شود ؛ ولذا ، می‌توان آن را با زاویهٔ بین بردار مماس ثابتی در P_0 و بردارمماس ژئودزیک ما مشخص کرد . موضع نقطهٔ P روی ژئودزیک را می‌توان با طول قوس ژئودزیک بین P_0 و P معین نمود . به‌این طریق ، می‌توان دو پارامتر معرف موضع نقطهٔ P را به‌دست آورد . در صفحه اینها مختصات قطبی به مبداء P_0 می‌باشند . ثابت کنید می‌توان این دو پارامتر را به‌عنوان مختصات منحنی‌الخط در همسایگی P_0 که‌خود P_0 حذف شده است به‌کاربرد . نقطهٔ P_0 یک نقطهٔ منفرد این‌پارامتری سازی است ؛ مختصات آن به‌طور منحصر بفرد تعریف نشده‌اند .

۳ . *مختصات کروی* روی کرهٔ یکه مختصات نیمه ژئودزیک‌اند . روی یک کره به شعاع a ، مختصات $u^1 = a\theta, u^2 = a\phi$ نیز نیمه ژئودزیک هستند . اگر عرض جغرافیایی θ را با $\psi = \pi/2 - \theta \ (0 < \psi < \pi)$ عوض کنیم ، مختصات $v^1 = \phi, v^2 = a\psi$ مختصات قطبی به مبداء "قطب شمال" $(\theta = \pi/2)$ می‌باشند .

۴ . اگر پارامتر u منحنی که یک سطح دوارتولید می‌کند پارامترطول قوس باشد ، مختصات منحنی‌الخط مثال ۳ در ۳۰۱۱ مختصات نیمه ژئودزیک خواهند بود .

۵ . اگر مختصات منحنی‌الخط نیمه ژئودزیک باشند ، فرمول تمرین ۱۳ در ۳۰۲۱ ، که انحنای ژئودزیک یک‌منحنی‌رابرحسب زاویه‌اش α با u^1 ـ خط بیان می‌کند ، خواهد شد

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u^1}\frac{du^2}{ds};$$

و درنتیجه ، معادلهٔ خطوط ژئودزیک را می‌توان به‌شکل زیر نوشت :

$$\frac{d\alpha}{du^2} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u^1}.$$

۶ . با استفاده ازفرمول اخیر ، ثابت‌کنیدکه‌خطوط ژئودزیک یک سطح دوار نصف‌النهارات را درزاویهٔ α قطع می‌کنند ، به‌طوری‌که $\sin\alpha$ با فاصلهٔ نقطه تا محور نسبت عکس دارد (قضیهٔ کلرو[1]) .

۶۰۲۱ خاصیت مینیمال خطوط ژئودزیک

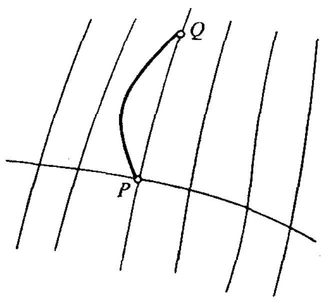
قضیه . ***یک قوس از خط ژئودزیک $\mathscr{C}$ ماربر نقطهٔ P که کاملا " در همسایگی به قدر کافی کوچکی از P سطح $\mathscr{F}$ از کلاس C_3 قرار گرفته کوتاهترین راه بین P و نقطهٔ دیگری از این***

---

1. Clairot

خط ژئودزیک در آن همسایگی است.

برهان. بامعلوم بودن خط‌ژئودزیک $\mathscr{C}$ ، یک منحنی روی سطح درنظر می‌گیریم که از P گذشته و متعامد به $\mathscr{C}$ باشد (شکل ۲۰۲۱). با استفاده از این منحنی به‌عنوان پایه برای



شکل ۲۰۲۱

ساختن یک دستگاه مختصات نیمه ژئودزیک در همسایگی P بصورتی که در زیر بخش پیش توصیف شد استفاده می‌کنیم. با انتخاب پارامتری سازی مناسبی برای منحنی، مختصات P ، $(0, 0)$ می‌شوند، و معادلهٔ خط ژئودزیک داده شدهٔ $\mathscr{C}$ خواهد شد $u^2 = 0$. حال نقطهٔ Q را روی خط ژئودزیک $\mathscr{C}$ گرفته و یک منحنی از کلاس C_1 واصل بین P و Q در داخل همسایگیی که مختصات منحنی‌الخط ساخته‌شده منتظم انداختیار می‌کنیم. اگر معادلات این منحنی $(0 \leq t \leq 1)$ $u^i = u^i(t)$ باشند، برای طول آن فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\, dt.$$

بعلاوه، چون $G > 0$ ، نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\, dt \geq \left| \int_0^1 \frac{du^1}{dt}\, dt \right| = |u^1(1)|,$$

که درآن $u^1(1)$ مختص u^1 ، Q است؛ یعنی، $|u^1(1)|$ طول قوس ژئودزیک بین نقاط P و Q است، و قضیه ثابت خواهد بود.

به عبارت دیگر، هر خط ژئودزیک موضعا" کوتاهترین راه بین دو نقطه است. این مطلب به‌طور همه‌جایی برقرار نیست. مثلا" ، هر دو نقطهٔ یک کره را می‌توان با دست کم دو قوس از یک خط ژئودزیک بهم وصل کرد ولی، جز درحالتی که نقاط متقاطرند که بی‌نهایت ژئودزیک آنها را بهم وصل می‌کنند، فقط یکی از دو قوس واصل کوتاهترین

است . این قوس قوسی است که از نصف دایرهٔ عظیمهٔ ماربر دو نقطه کوچکتر است .

خطوط ژئودزیک روی یک سطح از بسیاری جهات شبیه خطوط مستقیم درصفحه‌اند . درست‌مثل خطوط مستقیم در صفحه ، بر یک سطح به‌قدر کافی منتظم دقیقا " یک ژئودزیک وجود دارد که از نقطهٔ مفروضی گذشته و راستای مفروضی دارد . بااینحال، در صفحه ، دو خط متمایز فقط می‌توانند در یک نقطه برخورد کنند ، که این برای خطوط ژئودزیک فقط در همسایگی به‌قدر کافی کوچک نقطهٔ مشترک درست است . بدون این قید ، امر فوق ممکن است برای خطوط ژئودزیک برقرار نباشد . درواقع ، هر دو خط ژئودزیک روی کره ، یعنی دوایر عظیمه ، دو نقطهٔ مشترک خواهند داشت .

یک خط مستقیم درصفحه کوتاهترین فاصله بین دو نقطه است ؛ این باز برای خطوط ژئودزیک فقط تحت این شرط که همسایگی به‌قدر کافی کوچک است درست می‌باشد .

همانند خطوط مستقیم روی صفحه که خطوطی با انحنای مسطح صفرند ، خطوط ژئودزیک خطوطی با انحنای ژئودزیک صفر می‌باشند .

۷.۲۱ تاب ژئودزیک

به هر نقطه از منحنی $u^i = u^i(s)$ از کلاس C_1 روی سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

از کلاس C_1 می‌توان یک‌کنج مرکب از سه بردار یکهٔ دو بدو بر هم عمود مربوط کرد :**بردار مماس** $\mathbf{t}$ ، **بردار قائم ژئودزیک** $\mathbf{u} = \mathbf{m} \times \mathbf{t}$ (که در صفحهٔ مماس بر سطح قرار دارد) ، و **بردار قائم** $\mathbf{m}$ به سطح .

فرض کنیم سطح و منحنی هر دو از کلاس C_2 بوده ، و توابع برداری $\mathbf{t}(s), \mathbf{u}(s), \mathbf{m}(s)$ ازکلاس C_1 باشند . چون این سه بردار به‌ازای هر s مستقل خطی‌اند ، می‌توان مشتقات آنها را به‌صورت ترکیباتی خطی از $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{m}$ نوشت :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{u} + \gamma\mathbf{m},$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \alpha_1\mathbf{t} + \beta_1\mathbf{u} + \gamma_1\mathbf{m},$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \alpha_2\mathbf{t} + \beta_2\mathbf{u} + \gamma_2\mathbf{m},$$

که درآن ضرایب توابعی از پارامتر s اند .

با مشتقگیری از اتحادهای

$$\mathbf{t}^2 = 1, \quad \mathbf{u}^2 = 1, \quad \mathbf{m}^2 = 1, \quad \mathbf{tu} = 0, \quad \mathbf{tm} = 0, \quad \mathbf{um} = 0,$$

معلوم می‌شود که

$$\alpha = \beta_1 = \gamma_2 = 0, \quad \beta = -\alpha_1, \quad \gamma = -\alpha_2, \quad \gamma_1 = -\beta_2.$$

چون بردار

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n} = \beta\mathbf{u} + \gamma\mathbf{m}$$

بردار انحناست، طبق (۲۰۲۱)، ضرایب β, γ به ترتیب انحناهای ژئودزیک و قائم می‌باشند؛ یعنی، $\beta = -\alpha_1 = k_g, \gamma = -\alpha_2 = k_n$. دو ضریب مساوی دیگر را با τ_g نشان می‌دهیم و **تاب ژئودزیک** منحنی می‌نامیم: $\tau_g = \gamma_1 = -\beta_2$. با این نماد، فرمولهای زیر، به‌نام فرمولهای بونه ـ کووالفسکی[1]، را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \qquad\quad k_g\mathbf{u} + k_n\mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} &= -k_g\mathbf{t} + \qquad\quad \tau_g\mathbf{m}, \qquad (۲۶۰۲۱) \\ \frac{d\mathbf{m}}{ds} &= -k_n\mathbf{t} - \tau_g\mathbf{u}. \end{aligned}$$

با استفاده از اینها، می‌توان برای تاب ژئودزیک فرمولی به‌دست آورد. بنابر فرمول (۲۰۱۸) وینگارتن، داریم

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = -b_j^i \frac{du^j}{ds}\mathbf{r}_i,$$

و، بنابر خط سوم (۲۶۰۲۱)،

$$\tau_g = -\mathbf{u}\frac{d\mathbf{m}}{ds} = -\left(\mathbf{mt}\frac{d\mathbf{m}}{ds}\right) = (\mathbf{m}\mathbf{r}_k\mathbf{r}_i)b_j^i\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}, \qquad (۲۷۰۲۱)$$

زیرا $\mathbf{t} = (du^k/ds)\mathbf{r}_k$. با توجه به‌این امر که

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1 = \sqrt{g}\,\mathbf{m},$$

فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\tau_g = \sqrt{g}\left(b_j^2\frac{du^j}{ds}\frac{du^1}{ds} - b_j^1\frac{du^j}{ds}\frac{du^2}{ds}\right),$$

که می‌توان آن را به‌شکل معادل زیر نیز نوشت:

---

1. Kovalevsky

$$\tau_g = \sqrt{g}(\delta_i^1 b_j^2 - \delta_i^2 b_j^1)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}. \qquad (۲۸۰۲۱)$$

نتایج فوق قضیهٔ زیر را نتیجه می‌دهند .

قضیه . ***تاب ژئودزیک در یک نقطه از یک منحنی روی یک سطح از کلاس C_2 فقط به راستای منحنی بستگی دارد و از فرمول (۲۸۰۲۱) به‌دست می‌آید . تاب ژئودزیک در یک نقطه به ازای یک راستای مفروض روی یک سطح از کلاس C_3 مساوی تاب خط ژئودزیک این راستا در این نقطه است .***

برهان . قسمت اول قضیه فوراً از این امر نتیجه می‌شود که فرمول (۲۸۰۲۱) فقط شامل ضرایبی است که به نقطهٔ واقع بر سطح و مشتقات اول معادلات منحنی نسبت به پارامتر قوس بستگی دارند . برای اثبات قسمت دوم ، می‌بینیم که برای یک خط ژئودزیک ، بردار قائم اصلی منحنی ، یعنی $\mathbf{n}$ ، با بردار قائم به سطح ، یعنی $\mathbf{m}$ ، همخط است . بنابراین ، داریم

$$\mathbf{n} = \varepsilon\mathbf{m}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

که نتیجه می‌دهد که بردار قائم دوم مساوی است با

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \varepsilon\mathbf{t} \times \mathbf{m} = -\varepsilon\mathbf{u}.$$

با مشتقگیری از این نسبت به s و استفاده از فرمولهای بونه ـ کووالفسکی (۲۶۰۲۱) ، به دست می‌آوریم

$$-\tau\mathbf{n} = \varepsilon k_g\mathbf{t} - \varepsilon\tau_g\mathbf{m} = -\tau_g\mathbf{n},$$

زیرا ، برای یک خط ژئودزیک ، $k_g = 0$. درنتیجه ، $\tau = \tau_g$ ، و اثبات تمام است .

حال به تاب ژئودزیک در زیر بخش ۶۰۲۹ بازمی‌گردیم .

امثله و تمرین

۱ . قبل از هرچیز ، می‌بینیم که تاب ژئودزیک یک مفهوم از هندسهٔ ذاتی نیست . در واقع ، تاب ژئودزیک درهر راستایی از صفحه صفر است ، ولی بر استوانهٔ مستدیر ، که موضعاً "باصفحه ایزومتریک است ، همهٔ خطوط ژئودزیک ، جز خطوط جاری ومقاطع حاصل ازصفحات عمود بر محور ، مارپیچ بوده و دارای تاب ناصفرند که ، بنابرقضیهٔ ما ، مساوی تاب ژئودزیک درراستای مارپیچ می‌باشد .

۲ . ثابت کنید تاب ژئودزیک روی کره در هر راستا مساوی صفر است .

۲۲ سطوح با انحنای گاوسی ثابت

۱.۲۲ قضایای عمومی

سطوح با انحنای گاوسی ثابت کلاس مهمی از سطوح را تشکیل می‌دهند . یکی از خواص جالب این کلاس آن است که یک سطح از این کلاس خانواده‌ٔ بزرگی از نگاشتهای موضعا " ایزومتریک بتوی خود را می‌پذیرد .

قضیه . ***دو سطح با انحنای گاوسی ثابت مساوی موضعا " ایزومتریک اند . یک نگاشت موضعا ' ایزومتریک وجود دارد که یک نقطهٔ مفروض دلخواه از یک سطح و یک راستای مفروض دلخواه در این نقطه را به یک نقطهٔ مفروض دلخواه از سطح دوم و یک راستا در آن نقطه می‌نگارد***

برهان . دستگاههای مختصات نیمهٔ ژئودزیک را روی هردو سطح در همسایگی نقاط مفروض به صورت زیر می‌سازیم : خطوط ژئودزیک ماربر نقاط مفروض در راستای داده شده را منحنیهای پایهٔ $u^1 = 0$ می‌گیریم . دراین صورت ، اولین فرمهای اساسی هردو سطح به‌ترتیب به شکل زیر خواهند بود :

$$(du^1)^2 + G(du^2)^2, \qquad (du^1)^2 + \tilde{G}(du^2)^2,$$

که درآنها

$$G(0, u^2) = \tilde{G}(0, u^2) = 1, \qquad \frac{\partial G(0, u^2)}{\partial u^1} = \frac{\partial \tilde{G}(0, u^2)}{\partial u^1} = 0. \qquad (۱.۲۲)$$

بنابر (۲۲.۱۸) ، داریم

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{(\partial u^1)^2},$$

و همین رابطه برای $\tilde{G}$:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial^2 \sqrt{\tilde{G}}}{(\partial u^1)^2}.$$

درنتیجه ، $\sqrt{G}$ و $\sqrt{\tilde{G}}$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial u^1)^2} = -Kz \qquad (۲.۲۲)$$

با ضریب ثابت K اند ، زیرا هر دو سطح ، طبق فرض ، دارای یک انحنای گاوسی ثابت

می‌باشند.

چون K به u^2 بستگی ندارد، معادلهٔ (۲۰۲۲) را می‌توان یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی گرفت، و یک جواب به‌طور منحصر بفرد با مقادیر اولیهٔ z و $\partial z/\partial u^1$، که ممکن است به u^2 نیز به‌عنوان پارامتر بستگی داشته باشند، معین می‌شود. اما، بنابر (۱۰۲۲)، هردوی $\sqrt{G}$ و $\sqrt{\bar{G}}$ در شرایط اولیهٔ یکسان صدق می‌کنند. درنتیجه، همه‌جا داریم $\sqrt{G}=\sqrt{\bar{G}}$، بدین معنی که اولین فرمهای اساسی یکی هستند. لذا، نگاشت از یک‌سطح بتوی دیگر، که یک نقطه به مختصات منحنی‌الخط (u^1,u^2) بر سطح اول را به یک نقطه با همان مختصات منحنی‌الخط بر سطح دیگر می‌برد، یک ایزومتری موضعی است. طرز ساختن دستگاههای مختصات بوضوح معلوم می‌کند که نقطه و راستای مفروض بر سطح اول به‌وسیلهٔ این نگاشت به نقطه و راستای معلوم بر سطح دیگر نگاشته می‌شود، و برهان تمام است.

از این قضیه و خواص معلوم کره، صفحه، و کره‌نما، نتیجهٔ زیر را خواهیم داشت.

نتیجهٔ ۱. *یک سطح با انحنای گاوسی ثابت و مثبت $K=a^{-2}$ با سطح یک کره به‌شعاع a موضعاً "ایزومتریک" است. یک سطح با انحنای گاوسی ثابت $K=0$ با یک صفحه موضعاً "ایزومتریک" است. یک سطح با انحنای گاوسی ثابت منفی $K=-a^{-2}$ با کره نما موضعاً "ایزومتریک" است.*

درحالتی که سطح دوم منطبق بر سطح اول است، خواهیم داشت:

نتیجهٔ ۲. *به‌ازای دو نقطهٔ دلخواه P و Q از یک سطح با انحنای گاوسی ثابت و دو راستای مماسی دلخواه در P و Q، یک نگاشت موضعاً "ایزومتریک" از سطح بتوی خود وجود دارد که P را به Q و راستای مفروض در P را به‌راستای مفروض در Q می‌برد.*

تمرین

با انتگرالگیری از معادلهٔ (۲۰۲۲)، تحقیق کنید که اولین فرم اساسی یک سطح با انحنای گاوسی ثابت مساوی است با

(آ) درحالت $K=1/a^2>0$:

$$ds^2=(du^1)^2+\cos^2\frac{u^1}{a}(du^2)^2; \qquad (۳۰۲۲)$$

(ب) درحالت $K = -1/a^2 < 0$:

$$ds^2 = (du^1)^2 + \cosh^2 \frac{u^1}{a}(du^2)^2. \qquad (۴.۲۲)$$

۲.۲۲ سطوح دوار با انحنای ثابت

معادلهٔ یک سطح دوار به شکل

$$x = f(u^1)\cos u^2, \qquad y = f(u^1)\sin u^2, \qquad z = h(u^1)$$

را ،که $f(u^1) \geq 0$ و u^1 پارامتر طبیعی بر نصف‌النهار است ، درنظر می‌گیریم . بنابر نتایج تمرین ۳، ۴.۱۶ ، داریم

$ds^2 = (du^1)^2 + G(du^2)^2$ ، که درآن $G = f^2$ ، زیرا $[f'(u^1)]^2 + [h'(u^1)]^2 = 1$.

چون مختصات نیمه ژئودزیک‌اند ، داریم

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^1\,\partial u^1},$$

و چون f فقط تابع u^1 بوده و K ثابت است ، تابع f در معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$\frac{d^2f}{(du^1)^2} = -Kf \qquad (۵.۲۲)$$

صدق می‌کند . پس از حل این معادله ، می‌توان h را از معادلهٔ

$$(f')^2 + (h')^2 = 1 \qquad (۶.۲۲)$$

تعیین کرد .

سه حالت زیر را درنظر می‌گیریم .

۱ . $K = 0$. پس جواب (۵.۲۲) عبارت است از $f = Au^1 + B$ ، که از آنجا

$$h = \pm\sqrt{1 - A^2}u^1 + C,$$

که درآن A, B, C ثابتهای انتگرالگیری بوده و $|A| \leq 1$. نصف النهار یک‌خط‌راست است وسطح ،که به مقادیر ثابتها بستگی دارد ، یک مخروط، یک استوانه ، یا یک صفحه است که به محور دوران عمود می‌باشد .

۲ . $K = 1/a^2 > 0$. ***انحنای گاوسی مثبت*** . جواب معادلهٔ (۵.۲۲) به شکل

$$f = A\cos\left(\frac{u^1}{a} + \phi_0\right)$$

است بـا ثابتهای انتگرالگیری A و ϕ_0 . ثابت ϕ_0 لازم نیست ، زیرا با تغییر u^1 به وسیلهٔ یک ثابت می‌توان آن را حذف کرد . لذا ، با فرض $\phi_0 = 0$ و

$$f = A\cos\frac{u^1}{a}$$

مطالب محدود نخواهند شد.

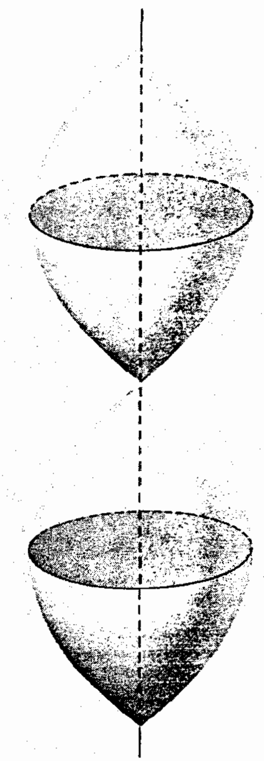
بنابر (۶۰۲۲) ، داریم

$$h = \varepsilon\int\sqrt{1-\frac{A^2}{a^2}\sin^2\frac{u^1}{a}}\,du^1, \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{۷۰۲۲}$$

مجدداً ، سه حالت متمایز داریم.

(آ) $A = a$. پس $f = a\cos(u^1/a),\ h = a\sin(u^1/a) + C$ ، که در آن C ثابت انتگرالگیری است. نصف النهار یک نیمدایره به شعاع a و مرکز واقع بر محور دوران است، و سطح یک کره می‌باشد.

(ب) $A < a$. دراین حالت انتگرال را نمی‌توان با توابع مقدماتی بیان کرد. با اینحال، به آسانی می‌توان شکل سطح را به‌طور کیفی توصیف کرد. انحراف یک نقطهٔ سطح ازمحور



شکل ۱۰۲۲

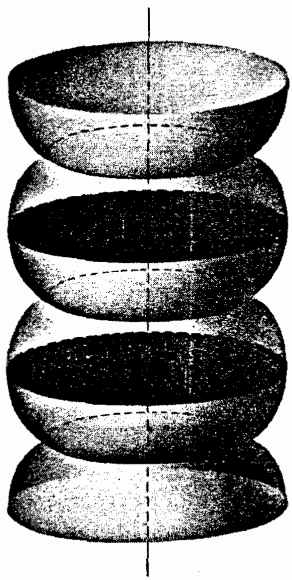
f بین 0 و $A < a$ تغییر می‌کند. به‌ازای $u^1 = -\frac{1}{2}a\pi + 2na\pi\,(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$، مقدار 0 گرفته مـی‌شود. دراین نقاط، به‌آسانی معلوم می‌شود که نصف النـهار محور را در زاویهٔ $\arcsin A/a$ قطع می‌کند. آن قسمت از سطح دوار که نظیر به مقادیر u^1 بین $-\frac{1}{2}a\pi$ و $\frac{1}{2}a\pi$ است شکل دوک دارد. این وضع به‌طور متناوب درامتداد محور دوران تکرارمی‌شود (شکل ۱۰۲۲).

(پ) $A > a$. دراین حـالت، بـرای با معنی بودن h، باید مقادیر پارامتر u^1 را با شرط

$$\left|\frac{A}{a}\sin\frac{u^1}{a}\right| \le 1$$

محدود کرد. این یعنی u^1 باید به‌بازهٔ $[-a\arcsin a/A, a\arcsin a/A]$ یا به انتقال آن به اندازهٔ مضربی از 2π محدود شود.

انحراف f از محور دوران همیشه کمتر از $r_1 = A\cos\arcsin a/A = \sqrt{A^2 - a^2}$ و بیشتر از $r_2 = A$ نیست. آن قسمت از سطح نظیر تغییر پارامتر u^1 در این بازه که متناوبا" تکـرار مـی‌شود در شکل ۲۰۲۲ نموده شده است. این قسمت به دو دایرهٔ عرض



شکل ۲۰۲۲

جغرافیایی به شعاع مینیمم $r_1 = \sqrt{A^2 - a^2}$ ختم می‌شود. صفحهٔ مماس بر سطح در یک نقطهٔ متغیر، وقتی نقطه به یکی از این دوایر عرض جغرافیایی نزدیک شود، به صفحهٔ ین

دایره، و در نتیجه به موضعی عمود بر محور، نزدیک می‌شود. بین این دو دایرهٔ عرض جغرافیایی یک دایرهٔ عرض جغرافیایی به شعاع ماکزیمم $r_2 = A$ وجود دارد. صفحات مماس بر سطح در نقاط این دایرهٔ عرض جغرافیایی موازی محور می‌باشند.

۳. $K = -1/a^2 < 0$: **انحنای گاوسی منفی.**

دراین حالت، جواب (۵۰۲۲) عبارت است از

$$f = C_1 e^{u^1/a} + C_2 e^{-u^1/a}$$

که درآن C_1 و C_2 ثابتهای انتگرالگیری‌اند.

مجددا"، سه حالت درنظر می‌گیریم.

(آ) $C_2 = 0$. دراینجا، با قرار دادن $C_1 = c$، داریم

$$f = c\, e^{u^1/a}, \qquad h = \varepsilon \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} e^{2u^1/a}}\, du^1, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

که کرانی برای u^1 را به‌دست می‌دهد؛ یعنی،

$$\frac{c^2}{a^2} e^{2u^1/a} \leq 1.$$

یا

$$u^1 \leq \frac{a}{2} \ln \frac{a^2}{c^2}.$$

تحت این شرط، می‌توان قرارداد $(c/a)e^{u^1/a} = \sin\phi, 0 \leq \phi \leq \pi/2$. داریم

$$f = a \sin\phi, \qquad h = \varepsilon a\left(\ln \tan\frac{\phi}{2} + \cos\phi\right) + C_3.$$

لذا، نصف النهار نیمی از یک کشاننده به‌ازای $\varepsilon > 0$ و نیم دیگر به‌ازای $\varepsilon < 0$ است و سطح پارچهٔ نظیر از کره نما می‌باشد. حالت $C_1 = 0$ را می‌توان با گذاردن $-u^1$ به‌جای u^1 به این حالت تحویل کرد.

(ب) $C_1C_2 > 0$، به‌این معنی که هردوی C_1 و C_2 مثبت‌اند. با قراردادن

$$2\sqrt{C_1C_2} = A, \qquad \ln\frac{C_1}{C_2} = 2b,$$

داریم

$$f = A \cosh\left(\frac{u^1}{a} + b\right).$$

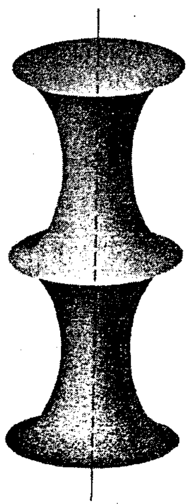
بی‌آنکه خللی به کلیت وارد شود، می‌توان فرض کرد $b = 0$، زیرا هر تغییری از این

ثابت یعنی صرفاً " تغییری از پارامتر u^1 . بنابراین،

$$f = A\cosh u^1/a, \qquad h = \varepsilon\int\sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2}\sinh^2\frac{u^1}{a}}\,du^1.$$

مجدداً " دراین حالت h را نمی‌توان با توابع مقدماتی بیان کرد . مقدار ماکزیمم مجاز $\sinh(u^1/a)$ عبارت‌است‌از a/A . به‌ازای مقدار نظیر از پارامتر، $\cosh(u^1/a)$ مقدار ماکزیمم $\sqrt{A^2 + a^2}/A$ را می‌گیرد .

بنابراین ، انحراف از محور دوران از مقدار ماکزیمم $\sqrt{A^2 + a^2}$ (که نظیر به $u^1 = -a\,\mathrm{arsinh}\,(a/A)$ است) تا مقدار مینیمم A (به‌ازای $u^1 = 0$) تغییر می‌کند و مجدداً " به‌ازای $u^1 = a\,\mathrm{arsinh}\,(a/A)$ مقدار ماکزیمم است . با محاسبه‌ای ساده می‌توان امتحان کرد که، در نقاط دایرهٔ عرض جغرافیایی به شعاع مینیمم ، صفحهٔ مماس موازی محوراست ، حال آنکه صفحات مماس، وقتی نقطهٔ تماس به یکی از دوایر عرض جغرافیایی پایانی به شعاع ماکزیمم نزدیک می‌شود ، بر محور عمود می‌باشد . سطوح به دست آمده به‌این طریق را سطوح دوار با انحنای منفی ثابت از نوع **هذلولوی** می‌نامند و در شکل ۳۰۲۲ نموده شده‌اند .



شکل ۳۰۲۲

(پ) $C_1 > 0,\ C_2 < 0$. جایگذاری $A = 2\sqrt{-C_1C_2},\ 2b = \ln(-C_1/C_2)$ نتیجه می‌دهد که

$$f = A\sinh(u^1/a + b).$$

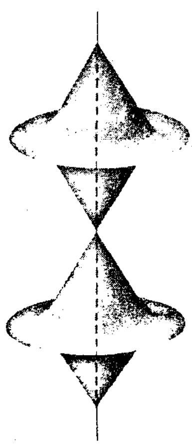
مجدداً " ، می‌توان فرض کرد $b = 0$ و به‌دست آورد که

$$f = A \sinh \frac{u^1}{a}, \qquad h = \varepsilon \int \sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2} \cosh \frac{u^1}{a}}\, du^1.$$

مجددا" ، انتگرال را نمی‌توان با توابع مقدماتی بیان کرد . این بار بایستی فرض کرد $A < a$. قرار می‌دهیم $A = a \sin \alpha$. پس $\cosh^2 (u^1/a)$ باید بین 1 و $1/\sin^2 \alpha$ باشد . لذا ، پارامتر u^1 را به‌بازهٔ $[0, \operatorname{arcosh}(1/\sin\alpha)]$ محدود می‌کنیم . انحراف f از محور دوران بین 0 و $A \sinh(\operatorname{arcosh}(1/\sin\alpha)) = a \cos\alpha$ تغییر می‌کند . قسمت نظیر از نصف النهار محور را درزاویه‌ای مساوی α قطع می‌کند . زاویهٔ بین مماس بر نصف النهار ومحور دوران ، وقتی نقطهٔ تماس به انحراف ماکزیمم نزدیک شود ، به‌زاویهٔ قائمه میل می‌کند . در شکل ۴۰۲۲ ، این قسمت از نصف النهار با خطی پیوسته نموده شده است .

شکل ۴۰۲۲

حالت $C_1 < 0, C_2 > 0$ با جایگذاری $-u^1 = v^1$ به حالت قبل تحویل می‌شود . در اینجا با همان مقدار ثابت A قسمتی به‌دست می‌آید که در شکل ۴۰۲۲ با خط منقطع نموده شده است . با تکرار این قسمتها به‌طور متناوب ، می‌توان یک سطح دوار نامتناهی ساخت که در شکل ۵۰۲۲ نموده شده است ، و سطح در برخورد با محور و روی دوایر عرض



شکل ۵۰۲۲

جغرافیایی به شعاع ماکزیمم که یالهای بازگشت سطح‌اند نقاط منفرد دارد .

تمرین

محاسبات لازم برای نتایج بخش پیش را کامل کنید.

۲۳ قضیهٔ گاوس ــ بونه

۱۰۲۳ گسترش یک منحنی از سطح روی صفحه

منحنی $\mathscr{C}: u^i = u^i(t)$ روی سطح $\mathscr{F}$ از کلاس C_2 را درنظر می‌گیریم. صفحات مماس بر سطح در نقاط این منحنی یک خانوادهٔ یک پارامتری از صفحات را تشکیل می‌دهند. معادلهٔ این خانواده عبارت است از

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))]\mathbf{m}(u^1(t), u^2(t)) = 0,$$

که درآن t پارامتر خانواده است. مشخصهای این خانواده، علاوه براین، درمعادلهٔ

$$\left(-\mathbf{r}_i \frac{du^i}{dt}\right)\mathbf{m} + (\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{m}_i \frac{du^i}{dt} = 0,$$

یا

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{m}_i \frac{du^i}{dt} = 0،$$

نیز صدق می‌کنند، زیرا $\mathbf{r}_i\mathbf{m} = 0$. درنتیجه، مشخصها از نقاط منحنی ما می‌گذرند، زیرا معادله به‌ازای $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ برقرار است.

پوش این خانواده از صفحات یک سطح گستردنی است که بر سطح مفروض در امتداد منحنی مماس است. این سطح گستردنی را می‌توان به‌طور ایزومتریک بتوی صفحه نگاشت. نقش منحنی $\mathscr{C}$ تحت این نگاشت یک منحنی مسطح است به‌نام **گسترش منحنی** $\mathscr{C}$ بر صفحه.

قضیه. *گسترشهای دو منحنی که در یک ایزومتری دو سطح نظیر بهم هستند همنهشت می‌باشند.*

برهان. چون منحنیها در یک ایزومتری سطوح نظیر به یکدیگرند، انحناهای ژئودزیک آنها در نقاط نظیر یکی هستند. اینها، به نوبهٔ خود، (با تقریب علامت) با انحناهای ژئودزیک روی سطوح گستردنی مماسی یکی هستند (ر.ک. تذکر ۱، ص ۲۴۷)، ومآلا" با انحناهای مسطح گسترشهای خود یکی می‌باشند. لذا، گسترشها دارای معادلات طبیعی یکسان $k = k(s)$ اند (یا معادلات فقط در علامت فرق دارند)، که ایجاب می‌کند

که دو منحنی مسطح همنهشت می‌باشند (با یک حرکت جسم صلب در صفحه اگر علامات یکی باشند، یا، درغیر این‌صورت، با حرکتی در فضا).

امثله و تمرین

۱. به‌ازای یک دایرهٔ کوچک روی کره، سطح گستردنی مماسی یک مخروط است. پس از گسترش روی صفحه مجددا" قوسی از یک دایره به شعاع متفاوت به‌دست می‌آید. ثابت کنید شعاع گسترش دایره به عرض جغرافیایی $\theta = \theta_0$ مساوی $a \cot \theta_0$ است، که درآن a شعاع کره است.

۲. ثابت کنید که گسترش یک خط ژئودزیک خطی راست است.

۲۰۲۳ دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری روی یک سطح

یک *میدان برداری مماسی* در یک قلمروواقع بر یک سطح تابعی است که به هر نقطه از قلمرو یک بردار نسبت می‌دهد که بر سطح دراین نقطه مماس است. ما به میدانهای برداری مماسی روی سطح میدانهای برداری روی سطح نیز می‌گوییم. ما میدانهای برداری تعریف شده در طول یک منحنی واقع بر سطح،به‌جای در یک قلمرو،را نیز درنظر می‌گیریم.

یک میدان برداری را می‌توان به‌طور تحلیلی با تعریف مولفه‌های بردارها نسبت به مختصات منحنی‌الخطی به‌عنوان توابعی از مختصات نقطهٔ

$$a^i = a^i(u^1, u^2) \qquad (۱۰۲۳)$$

تعریف کرد. البته، این نمایش میدان موضعی است و به انتخاب مختصات منحنی‌الخط بستگی دارد. گوییم یک میدان برداری روی یک سطح از کلاس C_n از کلاس $C_k\ (k \le n-1)$ است اگر توابع (۱۰۲۳) از کلاس C_k باشند. از این به بعد فرض می‌کنیم تمام میدانهای برداری مورد نظر از کلاس C_2 اند، مگر اینکه خلاف آن گفته شده باشد.

بردارهای میدان (۱۰۲۳) عبارتند از

$$\mathbf{a}(u^1, u^2) = a^i(u^1, u^2)\mathbf{r}_i(u^1, u^2). \qquad (۲۰۲۳)$$

دیفرانسیل این میدان برداری در نقطهٔ P، مساوی

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= da^i\mathbf{r}_i + a^i\,d\mathbf{r}_i = da^i\mathbf{r}_i + a^i\mathbf{r}_{ij}\,du^j \\ &= da^k\mathbf{r}_k + a^i\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k\,du^j + a^ib_{ji}\mathbf{m}\,du^j \qquad (۳۰۲۳) \\ &= (da^k + \Gamma^k_{ij}a^i\,du^j)\mathbf{r}_k + b_{ij}a^i\,du^j\,\mathbf{m}, \end{aligned}$$

عموما" یک بردارمماس‌نیست. اما فرمول (۳۰۲۳) تجزیهٔ این میدان برداری به دومولفه را به دست می‌دهد: $(da^k + \Gamma^k_{ij}a^i\,du^j)\mathbf{r}_k$، که تصویر دیفرانسیل (۳۰۲۳) روی صفحهٔ

مماس است ، و مولفهٔ قائم $b_{ij}a^i\,du^j\mathbf{m}$.

تصویر دیفـرانسیل میدان برداری روی صفحهٔ مماس **دیفرانسیل مطلق** میدان روی سطح نامیده می‌شود .

ما مـولفه‌های دیفرانسیل مطلق را *دیفرانسیلهای مطلق مولفه‌ها* می‌نامیم ، و برای دیفرانسیل مطلق علامت D را به‌کار می‌بریم ؛ لذا ، $D\mathbf{a}$ دیفرانسیل مطلق میدان‌برداری $\mathbf{a}$ است ، و Da^i دیفرانسیل مطلق مولفهٔ i م آن می‌باشد .

قضیهٔ ۱ . *دیفرانسیلهای مطلق مولفه‌های یک میدان برداری روی یک سطح از فرمول*

$$Da^k = da^k + \Gamma^k_{ij}a^i\,du^j \tag{۴۰۲۳}$$

به‌دست می‌آیند . لذا ، مفهوم دیفرانسیل مطلق یک مفهوم ذاتی می‌باشد .

برهان . از (۳۰۲۳) نتیجه می‌شود که

$$D\mathbf{a} = (da^k + \Gamma^k_{ij}a^i\,du^j)\mathbf{r}_k ;$$

درنتیجه ، مـولفه‌های Da^k از (۴۰۲۳) به‌دست می‌آیند . دراین فرمول معادلات سطح فقط به‌شکل علایـم کریستوفل ظاهر می‌شوند . بنابراین ، دیفرانسیل مطلق تحت ایزومتریها پایاست ، و برهان تمام می‌باشد .

با استفاده از علامت مشتقگیری مطلق ، می‌توان (۳۰۲۳) را به‌شکل

$$d\mathbf{a} = D\mathbf{a} + b_{ij}a^i\,du^i\mathbf{m} \tag{۵۰۲۳}$$

نوشت .

از تعریف دیفرانسیل مطلق فورا" خواهیم داشت :

قضیهٔ ۲ . *هرگاه دوسطح در امتداد یک منحنی برهم مماس باشند ، دیفرانسیلهای مطلق روی هـردو سطح درراستای این منحنی از یک‌میدان برداری مماسی تعریف شده درامتداد منحنی یکی هستند .*

بالاخص، دیفرانسیل مطلـق یک میدان از بردارهای مماس بر یک سطح مانند $\mathscr{F}$ که درامتداد منحنـی $\mathscr{C}$ روی سطح تعریف شده است مساوی دیفرانسیل مطلق همان میدان است که به‌عنوان یک میدان از بردارهای مماس بر سطح گستردنی مماس به $\mathscr{F}$ درامتداد $\mathscr{C}$ گرفته شده است . دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری در صفحه با دیفرانسیل معمولی

یکی است، زیرا $b_{ij} = 0$.

با تلفیق همهٔ نتایج این بخش، قضیهٔ زیر بهدست میآید .

قضیهٔ ۳. *تحت گسترش یک منحنی از یک سطح روی صفحه، دیفرانسیل مطلق در راستای منحنی از یک میدان برداری تعریف شده در امتداد این منحنی به دیفرانسیل معمولی در راستای منحنی گسترش یافتهٔ نقش یک میدان برداری مفروض نگاشته میشود .*

این مطلب به معنی زیر است : همان نگاشت ایزومتریک سطح گستردنی مماسی که گسترش منحنی را بهدست میدهد طوری تعمیم یافته است که بردارهای مماس در نقاط منحنی را بتوی بردارها در صفحه مینگارد .

بهجای دیفرانسیل مطلقمیدان درراستای یک منحنی مانند $u^i = u^i(t)$ ، میتوان از مشتق مطلق نسبت به پارامتر t استفاده کرد :

$$\frac{Da^k}{dt} = \frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\, a^i \frac{du^j}{dt}. \qquad (۶.۲۳)$$

امثله و تمرین

۱ . مشتق مطلق نسبت به پارامتر طول قوس منحنی $u^i = u^i(s)$ میدان بردارهای مماس براین منحنی مساوی است با

$$\frac{Dt^k}{ds} = \frac{dt^k}{ds} + \Gamma^k_{ij} t^i \frac{du^j}{ds},$$

که درآن t^i ها مولفههای بردار مماس $\mathbf{t}$ نسبت به دستگاه مختصات منحنی الخط است . چون $t^k = du^k/ds$ ،نیز میتوانیم بنویسیم

$$\frac{Dt^k}{ds} = \frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}.$$

از مقایسهٔ این فرمول با فرمول بردار انحنای ژئودزیک (۳.۲۱) ، معلوم میشودکه مشتق مطلق میدان بردارهای یکهٔ مماس یک منحنی نسبت به قوس مساوی بردار انحنای ژئودزیک منحنی

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{k}_g = k_g \mathbf{u}$$

است، کـه درآن $\mathbf{u}$ بردار قائم ژئودزیک منحنی تعریف شده درزیر بخش ۳.۲۱

می‌باشد.

درنتیجه، قدر مطلق انحنای ژئودزیک هر منحنی روی یک سطح مساوی طول مشتق مطلق میدان بردارهای یکهٔ مماس بر منحنی نسبت به قوس است.

۲. فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو میدان برداری مماسی باشند که در قلمروی واقع بر سطح یا در طول یک منحنی تعریف شده‌اند. دراین صورت، حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{ab}$ تابعی‌است از نقاط آن قلمرو یا منحنی. پس داریم

$$d(\mathbf{ab}) = D\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot D\mathbf{b}. \qquad (۷۰۲۳)$$

درواقع،

$$d(\mathbf{ab}) = (d\mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a}(d\mathbf{b}) = (D\mathbf{a} + b_{ij}a^i\,du^j\mathbf{m})\mathbf{b} + \mathbf{a}(D\mathbf{b} + b_{ij}b^i\,du^j\mathbf{m}) = D\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot D\mathbf{b},$$

زیرا $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به عنوان بردارهای مماس بر $\mathbf{m}$ متعامدند؛ درنتیجه، $\mathbf{ma} = \mathbf{mb} = 0$.

۳. مشتق مطلق میدان بردارهای قائم ژئودزیک $\mathbf{u}$ به یک منحنی روی سطح نسبت به طول قوس متعامد به $\mathbf{u}$ است، زیرا دیفرانسیل معمولی میدان بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}$ متعامد به $\mathbf{u}$ است؛ و درنتیجه، بردار $\mathbf{m}$ نیز چنین است. بنابراین، داریم

$$\frac{D\mathbf{u}}{ds} = \lambda\mathbf{t},$$

که درآن ضریب λ مساوی است با

$$\lambda = \mathbf{t}\frac{D\mathbf{u}}{ds}.$$

مشتقگیری مطلق از اتحاد $\mathbf{tu} = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$\mathbf{t}\frac{D\mathbf{u}}{ds} = -\mathbf{u}\frac{D\mathbf{t}}{ds}$$

یا $\lambda = -k_g$. درنتیجه، برای مشتقگیری مطلق فرمولهایی شبیه فرمولهای فرنه برای صفحه خواهیم داشت:

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = k_g\mathbf{u}, \qquad \frac{D\mathbf{u}}{ds} = -k_g\mathbf{t}.$$

۴. مشتق مطلق در امتداد دایرهٔ عرض جغرافیایی $\theta = \theta_0$ میدان بردارهای یکهٔ مماس به نصف النهارات و در جهت افزایش پارامتر θ نسبت به ϕ را بیابید.

۵. فرض کنید $\mathbf{r} = \mathbf{p}(s)$ یک منحنی در فضا با پارامتری سازی طبیعی بوده و $\mathbf{n}(s)$ و $\mathbf{b}(s)$ به ترتیب بردار یکهٔ قائم اصلی و بردار یکهٔ قائم دوم باشند. بر سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^2) + u^1\mathbf{b}(u^2)$$

مشتقات مطلق میدان بردارهای یکهٔ مماس به u^1 ـ خطوط (یعنی ، خطوط ثابت $= u^2$) را در امتداد منحنیهای مختصات بیابید .

۶ . با استفاده از نتایج تمرینات ۳ و ۵ ، انحناهای ژئودزیک خطوط ثابت $= u^1$ برسطح تمرین ۵ را بیابید .

۳.۲۳ انتقال موازی به مفهوم لوی ــ سیویتا [1]

گوییم یک میدان برداری روی یک سطح تعریف شده در امتداد منحنی $\mathscr{C}$ به‌وسیلهٔ ***انتقال موازی*** یا ***تغییر مکان موازی*** در امتداد منحنی به‌دست آمده است ، یا ***در امتداد منحنی موازی*** است ،اگر دیفرانسیل مطلق میدان در راستای منحنی صفر باشد . به عبارت دیگر ،این یعنی دیفرانسیل معمولی در راستای منحنی در هر نقطه از منحنی $\mathscr{C}$ قائم بـه سطح است .

این تعریف فـورا " به شرطی لازم و کافی برای توازی یک میدان از بردارهای مماس به سطح مانند $\mathbf{a}(t)$ در امتداد یک منحنی چون $u^i = u^i(t)$ منجر می‌شود ؛ یعنی ،

$$Da^k = da^k + \Gamma^k_{ij} a^i \, du^j = 0,$$

یا

$$da^k = -\Gamma^k_{ij} a^i \, du^j, \tag{۸.۲۳}$$

یا،برحسب مشتقات نسبت به پارامتر روی منحنی ،

$$\frac{da^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij} a^i \frac{du^j}{dt} \tag{۹.۲۳}$$

اگربردار $\mathbf{a}_0 = a^i_0 \mathbf{r}_i(u^1(t_0), u^2(t_0))$ در نقطهٔ اولیهٔ t_0 معلوم باشد ، میدان برداری‌حاصل از $\mathbf{a}_0$ در امتداد منحنی به وسیلـهٔ انتقـال مـوازی در امتداد منحنی توسط معادلهٔ دیفرانسیل (۹.۲۳) با توابع مجهول a^1, a^2 و شرایط‌اولیـهٔ $a^i(t_0) = a^i_0$ معین می‌شود .

قضیهٔ زیر تعبیر توصیفی تری از انتقال موازی به‌دست می‌دهد .

قضیهٔ ۱ . ***یک میدان برداری مماسی روی یک سطح مانند $\mathbf{a}$ که بر منحنی $\mathscr{C}$ تعریف شده است در امتداد $\mathscr{C}$ موازی است اگر و فقط‌اگر این میدان به وسیلهٔ نگاشتی که منحنی را روی صفحه گسترش می‌دهد به میدانی از بردارهای مساوی در صفحه نگاشته شود . مفهوم انتقال موازی در امتداد یک منحنی روی یک سطح یک مفهوم از هندسی ذاتی سطح است .***

---

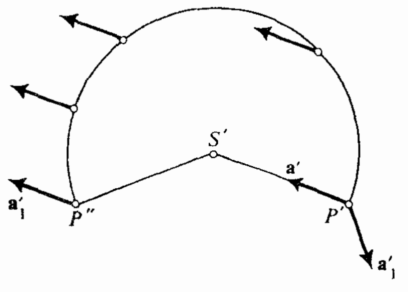
1. Levi-Civita

برهان. همانطورکه در بخش قبل دیدیم ، این نگاشت دیفرانسیل مطلق میدان را به دیفرانسیل معمولی نقش میدان می‌برد . لذا ، طبق تعریف ، میدان موازی است $(D\mathbf{a} = 0)$ اگر و فقط اگر این نقش یک میدان ثابت باشد . چون گسترش یک منحنی یک نگاشت ایزومتریک است ، انتقال موازی مفهومی از هندسهٔ ذاتی بوده ، و برهان تمام می‌باشد .

در پرتو این قضیه ، عمل انتقال یک بردار مماس بر سطح $\mathscr{F}$ در P به‌طور موازی در امتداد منحنی $\mathscr{C}$ روی سطح که از P می‌گذرد را می‌توان به‌طور هندسی به‌صورت زیرتعریف کرد : سطح گستردنی مماس بر $\mathscr{F}$ در امتداد منحنی $\mathscr{C}$ را به‌طور ایزومتریک بتوی صفحه می‌نگاریم ، وبا این کار گسترش $\mathscr{C}^*$ از $\mathscr{C}$ را به‌دست می‌آوریم . این نگاشت نقطهٔ P رابه نقطهٔ P^* بر $\mathscr{C}^*$ و بردار مماس $\mathbf{a}$ را به برداری چون $\mathbf{a}^*$ در صفحهٔ متصل در P^* می‌نگارد . یک میدان برداری ثابت $(= \mathbf{a}^*)$ را در امتداد گسترش $\mathscr{C}^*$ تعریف کرده و آن را با ایزومتری معکوس بتوی سطح گستردنی به‌طور معکوس می‌نگاریم . با این‌کار میدانی از بردارهای مماس به سطح گستردنی در نقاط منحنی $\mathscr{C}$ ، و درنتیجه مماس بر $\mathscr{F}$ ، به دست می‌آید ، که میدان حاصل از انتقال موازی است .

انتقال موازی یک بردار به منحنیی وابسته است که در امتداد آن صورت می‌گیرد ؛ یعنی ، اگر دو نقطهٔ P, Q با دو قوس متمایز بهم مربوط شده باشند و بردار $\mathbf{a}$ در P مفروض‌باشد ، انتقال موازی $\mathbf{a}$ به Q در امتداد دوقوس ، در حالت کلی ، دو بردار مختلف در Q به‌دست می‌دهد . همچنین ، انتقال موازی یک بردار در امتداد یک منحنی بسته ، درحالت‌کلی ، پس‌ازرسیدن به نقطهٔ اولیه ، به بردار متفاوتی با بردار اولیه منجرمی‌شود . این امر در مثال زیر روشن خواهد شد .

انتقال موازی در امتداد یک دایرهٔ عرض جغرافیایی روی کره را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۰۲۳) . در نقطه‌ای مانند P بردار $\mathbf{a}$ را مماس بر نصف النهار اختیار کرده ، و



شکل ۱۰۲۳

نتیجهٔ حاصل از انتقال موازی $\mathbf{a}$ حول دایرهٔ عرض جغرافیایی و مراجعت به P را پیدا می‌کنیم. سطح گستردنی مماسی در این حالت یک مخروط است و بردار $\mathbf{a}$ بر مولد مستقیم‌الخط قرار دارد. اگر مخروط را در امتداد این مولد بریده و آن را روی صفحه گسترش دهیم، قطاع $S'P'P''$ از یک دایره را به‌دست می‌آوریم. نقش P دو برابر نقش P' و P'' تکرار می‌شود. $\mathbf{a}'$ نقش $\mathbf{a}$، در P' از خط $P'S'$ حرکت می‌کند. حال اگر یک میدان ثابت مانند $\mathbf{a}'$ را در امتداد نقش دایرهٔ عرض جغرافیایی بسازیم، در P'' برداری مانند $\mathbf{a}_1'$ خواهیم داشت، که در نگاشت ایزومتریک معکوس روی سطح همان نقش $\mathbf{a}_1$ مثل بردار $\mathbf{a}_1''$ در P' دارد. درنتیجه، پس از یک انتقال موازی حول دایرهٔ عرض جغرافیایی بردار $\mathbf{a}$ به‌صورت یک بردار $\mathbf{a}_1$ باز می‌گردد، که با $\mathbf{a}$ زاویه‌ای مساوی زاویهٔ $P'S'P''$ در راس گسترش مخروط مماسی می‌سازد.

این بخش را با قضیهٔ زیر به‌پایان می‌بریم.

قضیهٔ ۲. *انتقال موازی در امتداد یک منحنی حاصل ضرب اسکالر دو بردار را حفظ می‌کند. درنتیجه، طول یک بردار و زاویهٔ بین بردارها را نیز حفظ خواهد کرد.*

برهان. بنابر (۷۰۲۳)، داریم

$$d(\mathbf{ab}) = (D\mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a}(D\mathbf{b}).$$

بنابراین، $D\mathbf{a} = 0 = D\mathbf{b}$ ایجاب می‌کند که $d(\mathbf{ab}) = 0$، و برهان تمام است.

۴۰۲۳ انتقال موازی و انحنای ژئودزیک

فرض کنیم $\mathbf{a}(s)$ یک میدان از بردارهای یکهٔ مماس بر سطح (جهتدار) $\mathscr{F}$ موازی درامتداد منحنی $\mathscr{C}: u^i = u^i(s)$ باشد، که s پارامترطبیعی (طول قوس) بر منحنی است. همچنین، $\alpha(s)$ زاویهٔ جهتدار از بردار $\mathbf{a}(s)$ به بردار مماس $\mathbf{t}$ بر منحنی باشد.

قضیه. *مشتق زاویهٔ α نسبت به طول قوس مساوی انحنای ژئودزیک منحنی $\mathscr{C}$ است:*

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_g. \qquad (۱۰۰۲۳)$$

برهان. به‌خاطر قضیهٔ ۲ از زیر بخش قبل، مهم نیست کدام میدان موازی در امتداد $\mathscr{C}$

گرفته‌شود . درواقع ، ازتغییر این میدان به دیگری α به‌قدر یک ثابت جمعی تغییر می‌کند ، و آن زاویهٔ ثابت بین دو میدان است ، که بر مشتق اثری ندارد . در امتداد منحنی داریم

$$\cos\alpha = \mathbf{a}(s)\mathbf{t}(s),$$

که از آنجا

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{a}(s)\mathbf{t}(s)) = \frac{D\mathbf{a}}{ds}\mathbf{t} + \mathbf{a}\frac{D\mathbf{t}}{ds}.$$

اما ، بنا به فرض ما که $\mathbf{a}$ در امتداد منحنی موازی است ، $D\mathbf{a}/ds = 0$ ، و بنابر نتایج مثال ۱ ، ۲۰۲۳ ، $D\mathbf{t}/ds = k_g\mathbf{u}$. بنابراین ، داریم

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} = k_g\mathbf{a}\mathbf{u}.$$

این فرمول برای هرمیدان $\mathbf{a}$ که در امتداد منحنی موازی است برقرار است . با ثابت‌گرفتن نقطهٔ دلخواه s_0 از منحنی ، می‌توان میدان $\mathbf{a}$ را طوری گرفت که در نقطهٔ s_0 ، $\mathbf{a}(s_0) = \mathbf{u}(s_0)$. دراین صورت ، زاویهٔ $\alpha(s_0) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = -\pi/2$ ، $\mathbf{a}(s_0)\mathbf{u}(s_0) = 1$ ، $\sin\alpha(s_0) = -1$ ، و داریم

$$\frac{d\alpha}{ds}(s_0) = k_g(s_0).$$

چون نقطهٔ s_0 دلخواه گرفته شده بود ، این معادله به‌ازای هر s برقرار است ، و برهان تمام می‌باشد .

امثله و تمرین

۱ . رابطهٔ (۱۰۰۲۳) را با استفاده از گسترش منحنی روی صفحه و فرمول (۵۰۹) ثابت کنید .

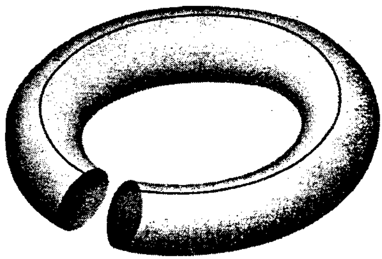
۲ . ثابت کنید یک منحنی بر یک سطح یک خط ژئودزیک است اگر و فقط اگر میدان بردارهای مماس در امتداد این منحنی موازی باشد .

۳ . ثابت کنید هر منحنی بر یک سطح یک خط ژئودزیک است اگر و فقط اگر میدان بردارهای قائم ژئودزیک به این منحنی در امتداد منحنی موازی باشد .

۵۰۲۳ انتقال موازی در امتداد یک کنتور بسته

یک ناحیه روی یک سطح را همبند *ساده* گوییم درصورتی که هر منحنی بسته یا یک منحنی که دو نقطه از کرانهٔ آن را بهم وصل می‌کند قلمرو را به دو یا چند قسمت از هم جدا تقسیم

کند. مثلاً"، یک قرص مستدیر همبند ساده است. همچنین، سطح یک کره، ولی سطح یک چنبره این‌طور نیست. درواقع، هر نصف النهار از چنبره یک منحنی بسته است که چنبره را قسمت نمی‌کند، زیرا اگر چنبره را درامتداد نصف النهار آن برش دهیم، باز هم همبند می‌باشد (شکل ۲۰۲۳)



شکل ۲۰۲۳

یک قلمرو همبند ساده درنظر می‌گیریم با کنتور $\mathscr{C}$ که قطعه قطعه از کلاس C_1 است و یک میدان از کلاس C_2 از بردارهای یکهٔ مماس به سطح مانند $\mathbf{a}(u^1, u^2)$ در این قلمرو. توجه کنید که هر قلمرو بریک سطح چنین میدان را نمی‌پذیرد؛ مثلاً"، هیچ میدان پیوسته‌ای از بردارهای یکهٔ مماس بر تمام یک کره نیست. با اینحال، چنین میدانی بریک نیمکره یا حتی بر یک کرهٔ سوراخ شدهٔ حاصل از حذف یک نقطه وجود دارد. برای ساختن این میدان دراین حالت، بردارهای یکهٔ مماس بر u ــ خطوط در مثال ۹ از ۳۰۱۱ را اختیار می‌کنیم. درنتیجه، ضرورت وجود میدان $\mathbf{a}$ محدودیتی برای قلمرو مورد نظر به بار می‌آورد. اگر قلمرو تماماً" در یک همسایگی که یک دستگاه منتظم از مختصات منحنی الخط می‌پذیرد واقع باشد، یک میدان از این نوع دراین قلمرو وجود خواهد داشت؛ مثلاً"، میدان بردارهای یکهٔ مماس بر u^1 ــ خطوط.

فرض کنیم $\mathbf{p}_0$ بردار مفروض دلخواهی در یکی از نقاط کنتور بوده و $\mathbf{p}$ بردارحاصل از $\mathbf{p}_0$ با انتقال موازی درامتداد منحنی باشد. پس از بازگشت به نقطهٔ شروع، بردار یکه‌ای به‌دست می‌آوریم که، درحالت‌کلی، با $\mathbf{p}_0$ متمایز است. زاویهٔ جهتدار $\Delta\phi$ که بردار $\mathbf{p}$ در اثر انتقال موازی حول کنتور به‌قدر آن گشته است را حساب می‌کنیم. واضح است که، درپرتو قضیهٔ ۲ از ۳۰۲۳، این زاویه به‌انتخاب بردار اولیهٔ $\mathbf{p}_0$ بستگی‌ندارد. درواقع، اگر این بردار را با $\mathbf{q}_0$ عوض کرده و میدان برداری دیگر $\mathbf{q}$ را درامتداد کنتور به‌راه اندازیم، زاویهٔ $\measuredangle(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ثابت خواهد ماند؛ لذا، این تغییر بر $\Delta\phi$ اثری نخواهد داشت.

قضیه. *فرض کنیم $\mathscr{C}$ یک کنتور قطعه قطعه هموار از قلمرو همبند سادهٔ Ω روی یک‌سطح از کلاس C_3 باشد، به‌طوری که بست Ω مجموعهٔ بازی مرکب از فقط نقاط منتظم بوده و یک میدان از کلاس C_2 از بردارهای یکهٔ مماس مانند $\mathbf{a}(u^1, u^2)$ را بپذیرد. در این صورت، زاویهٔ دوران یک بردار حاصل از انتقال موازی آن حول کنتور مساوی است با*

$$\Delta\phi = \int_{\Omega}\int K\sqrt{g}\, du^1\, du^2 = \int_{\Omega}\int K\, dS, \qquad (۱۱.۲۳)$$

که درآن K انحنای گاوسی سطح بوده و dS عنصر مساحت می‌باشد.

برهان. روی کنتور پارامتر طبیعی اختیار می‌کنیم، به‌طوری که جهت کنتور بر جهت القایی حاصل ازجهت‌سطح منطبق باشد (یعنی، قائم ژئودزیک $\mathbf{u}$ به کنتور در جهت درون‌قلمرو باشد یا، به عبارت دیگر و به‌طور شهودی‌تر، قلمرو برای ناظری که در امتداد کنتور در جهت مثبت حرکت کرده و در طرف مثبت سطح می‌ماند، در طرف چپ باقی بماند). فرض کنیم $\mathbf{a}(u^1, u^2)$ میدان برداری باشد که وجودش محرز است. همچنین، ϕ زاویهٔ جهتدار از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{p}$ در هر نقطهٔ کنتور باشد. دراین صورت، ϕ تابعی از یک نقطه بر کنتور می‌باشد. میدان برداری حاصل از $\mathbf{a}(u^1, u^2)$ با چرخش همهٔ بردارها به قدر زاویهٔ قائمه و درجهت مثبت را با $\mathbf{b}(u^1, u^2)$ نشان می‌دهیم. این نیز یک میدان از کلاس C_2 است، زیرا $\mathbf{b} = \mathbf{m} \times \mathbf{a}$.

برای میدان موازی $\mathbf{p}(s)$ در امتداد کنتور، داریم

$$\cos\phi = \mathbf{ap},$$

$$-\sin\phi\, d\phi = d(\mathbf{ap}) = (D\mathbf{a})\mathbf{p},$$

زیرا $D\mathbf{p} = 0$.

نقطهٔ دلخواه s_0 را بر کنتور ثابت گرفته، و فرض می‌کنیم میدان موازی طوری باشد که در نقطهٔ شروع $\mathbf{p}(s_0) = \mathbf{b}(u^1(s_0), u^2(s_0))$. دراین صورت، در s_0 داریم

$$\phi(s_0) = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \sin\phi(s_0) = 1;$$

درنتیجه، در s_0،

$$d\phi = -(D\mathbf{a})\mathbf{b}.$$

چون s_0 کاملاً" دلخواه است، این رابطه در تمام طول کنتور برقرار است. توجه کنید که $d\mathbf{a} = D\mathbf{a} + b_{ij}a^i\, du^j\mathbf{m}$ و $\mathbf{bm} = 0$، زیرا $\mathbf{b}$ مماسی برسطح است، پس داریم

$$d\phi = -\mathbf{b}(d\mathbf{a})$$

و، درنتیجه،

$$\Delta\phi = -\oint \mathbf{b}\, d\mathbf{a},$$

که درآن $\oint$ انتگرال خط در امتداد کنتور می‌باشد. این را می‌توان به‌شکل زیر نیزنوشت:

$$\Delta\phi = -\oint \mathbf{a}_1\mathbf{b}\, du^1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}\, du^2. \qquad (۱۲\cdot۲۳)$$

اما توابع $\mathbf{a}_1\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}_2\mathbf{b}$ در تمام قلمرو بستهٔ Ω و همسایگی آن تعریف شده اند. با اعمال فرمول مشهور گرین[1]، یعنی

$$\oint (M\,dx + N\,dy) = \int_\Omega\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

براین انتگرال، به‌دست می‌آوریم که

$$\Delta\phi = -\int_\Omega\int \left(\frac{\partial(\mathbf{a}_2\mathbf{b})}{\partial u^1} - \frac{\partial(\mathbf{a}_1\mathbf{b})}{\partial u^2}\right) du^1\,du^2$$

$$= -\int_\Omega\int (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2)\, du^1\,du^2 = \int_\Omega\int (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1)\, du^1\,du^2,$$

زیرا $\mathbf{a}_{21}\mathbf{b} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{b} = 0$.

حال براین انتگرال چند تبدیل اعمال می‌کنیم. ابتدا، چون $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}$ یک سه‌تایی جهتدار متعامد یکه با جهت مثبت از بردارها راتشکیل می‌دهد، داریم

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \qquad \mathbf{ab} = \mathbf{am} = \mathbf{bm} = 0, \qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{m}^2 = 1,$$

و، درنتیجه،

$$\mathbf{aa}_i = \mathbf{bb}_i = \mathbf{mm}_i = 0.$$

با استفاده از نمادهای اختصاری

$$\mathbf{a}_i\mathbf{b} = -\mathbf{ab}_i = \alpha_i, \qquad \mathbf{a}_i\mathbf{m} = -\mathbf{am}_i = \beta_i, \qquad \mathbf{b}_i\mathbf{m} = -\mathbf{bm}_i = \gamma_i,$$

می‌توان نیز نوشت

$$\mathbf{a}_i = \alpha_i\mathbf{b} + \beta_i\mathbf{m}, \qquad \mathbf{b}_i = -\alpha_i\mathbf{a} + \gamma_i\mathbf{m}, \qquad \mathbf{m}_i = -\beta_i\mathbf{a} - \gamma_i\mathbf{b},$$

که از آنجا

$\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j = \beta_i\gamma_j$ و $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1$.

از سوی دیگر، داریم

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = (-\beta_1\mathbf{a} - \gamma_1\mathbf{b}) \times (-\beta_2\mathbf{a} - \gamma_2\mathbf{b})$$

1. Green

$$= \beta_1\gamma_2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \beta_2\gamma_1(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\mathbf{m};$$

و درنتیجه ،

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)\mathbf{m}.$$

بنابر نتایج زیر بخش ۴۰۱۷ ، داریم

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = K\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = K\sqrt{g}\mathbf{m},$$

و

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = K\sqrt{g}.$$

بنابراین ، (۱۲۰۲۳) شکل

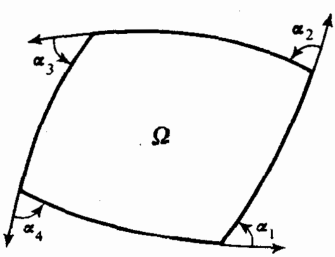
$$\Delta\phi = \int_\Omega\int K\sqrt{g}\, du^1\, du^2$$

را به‌خود می‌گیرد ، که برهان را تمام خواهد کرد .

توجه‌کنید که فرض اینکه قلمرو نقطهٔ منفرد ندارد لازم است . در مثال مخروط و یک کنتور در اطراف راس مخروط ، قبلا" دیدیم که ، اگرچه متحدا" $K = 0$ جز به‌ازای راس ، که در آن تعریف نشده است ، $\Delta\phi \neq 0$.

۶۰۲۳ قضیهٔ گاوس ــ بونه

ناحیهٔ Ω را بر یک سطح از کلاس C_3 درنظر می‌گیریم که به یک کنتور قطعه قطعه از کلاس C_2 محدود شــده است (شکل ۳۰۲۳) ، و فرض می‌کنیم جهت کنتور با جهت‌سطح سازگار



شکل ۳۰۲۳

باشد ؛ یعنی ، قــائم ژئــودزیک در جهــت درون قلمــرو باشد . فرض کنیم در هر نقطهٔ ناپیوستگی (تعدادی متناهی) از مماس بر کنتور (برای اختصار ، آنـها را رأس می‌نامیم) ، یک مماس از چپ و یک مماس از راست وجود داشته باشد . بالاخره ، زوایای جهتدار مماس از چپ با مماس از راست در رئوس متوالی را با $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ نشان می‌دهیم .

قضیه (گاوس ــ بونه) . هرگاه کنتور $\mathscr{C}$ قطعه‌قطعه از کلاس C_2 بوده و کرانهٔ قلمرو همبند سادهٔ Ω روی سطح $\mathscr{F}$ از کلاس C_3 باشد که میدانی از کلاس C_2 از بردارهای یکهٔ مماس می‌پذیرد ، آنگاه

$$\int_\Omega\int K\,dS + \oint k_g\,ds + \sum \alpha_i = 2\pi. \qquad (۱۳.۲۳)$$

برهان . برهان ترکیبی از نتایج دو بخش قبل است . فرض کنیم $\mathbf{t}$ بردار مماس بر کنتور باشد . $\mathbf{t}$ تابعی از پارامتر قوس کنتور است که همه‌جا بر کنتور جز در تعدادی متناهی راس تعریف شده است . همچنین است تابع اسکالر ψ ، مساوی زاویه از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{t}$ در همان نقطهٔ کنتور . وقتی نقطه در امتداد کنتور حرکت کند ، زاویهٔ ψ تغییر می‌کند . مقدارش، وقتی نقطه‌ازراس i م بگذرد ، به‌قدر α_i جهش می‌نماید . بعد از یک دور کامل حول کنتور ، نمو این زاویه 2π خواهد بود :

$$\Delta\psi = 2\pi. \qquad (۱۴.۲۳)$$

با آنکه این امر تا حدی شهودا" واضح است ، اثبات دقیق آن از حوصلهٔ این کتاب خارج می‌باشد . حال میدان برداری کمکی $\mathbf{p}$ حاصل از انتقال موازی حول کنتور را اختیار می‌کنیم؛ داریم

$$\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{p}) + \measuredangle(\mathbf{p}, \mathbf{t})$$

یا ، با استفاده ازنمادگذاری این بخش‌وبخش‌پیش، $\phi = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{p}), \alpha = \measuredangle(\mathbf{p}, \mathbf{t}), \psi = \phi + \alpha$.
درنتیجه ،

$$\Delta\psi = \Delta\phi + \Delta\alpha.$$

بنابر قضیهٔ ۴.۲۳ ، مجموع نموهای زاویهٔ α در امتداد قطعات هموار کنتور برابر است با $\oint k_g\,ds$. هنوزجهشهایی از زاویه در رئوس وجود دارند که جمع کل آنها $\sum_i \alpha_i$ است . بنابراین ،

$$\Delta\alpha = \oint k_g\,ds + \sum_i \alpha_i.$$

بنابر (۱۱.۲۳) ، داریم

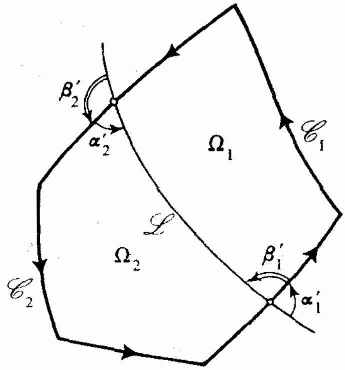
$$\Delta\phi = \int_\Omega\int K\,dS.$$

از تلفیق همهٔ اینها با (۱۴.۲۳) ، به‌دست می‌آوریم

$$\int_\Omega\int K\,dS + \oint k_g\,ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi,$$

که برهان را تمام خواهد کرد.

با آنکه قضیه را با فرض محدود کننده‌ای درباب قلمرو Ω ثابت کردیم، این قضیه برای قلمروهای همبند ساده از کلاس وسیعتر معتبر است. در واقع، اگر قلمرو Ω رابتوان به تعدادی متناهی قلمرو کنار هم تجزیه کردبه‌طوری که مفروضات قضیه در هر قلمرو جزئی جداگانه برقرار باشد، قضیه برای تمام قلمرو برقرار است، حتی اگر تمام قلمرو میدانی از بردارهای یکه را نپذیرد. برای آنکه از طرز تعمیم نتایج ایده‌ای داشته باشیم، حالتی را درنظر می‌گیریم که قلمرو Ω به دو قلمرو Ω_1, Ω_2 تجزیه شده‌است(شکل ۴۰۲۳). فرض‌کنیم $\mathscr{C}$ کنتور Ω بوده، و $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ به‌ترتیب اجزای این کنتور در Ω_1 و Ω_2



شکل ۴۰۲۳

باشند، و $\mathscr{L}$ منحنی جداکن Ω_1 از Ω_2 باشد. زوایا در رئوس‌کنتور Ω_1 را با α_j' و زوایا در رئوس کنتور Ω_2 را با β_k' نشان می‌دهیم. برای قلمروهای Ω_1, Ω_2، داریم

$$\int_{\Omega_1}\int K\, dS + \oint_1 k_g\, ds + \sum \alpha_j' = 2\pi,$$
$$\int_{\Omega_2}\int K\, dS + \oint_2 k_g\, ds + \sum \beta_j' = 2\pi, \qquad (۱۵۰۲۳)$$

که درآنها $\oint_1$ و $\oint_2$ انتگرالهای خط در امتداد دو کنتوراند. با یک جهت مناسب بر $\mathscr{L}$، داریم

$$\oint_1 k_g\, ds = \int_{\mathscr{C}_1} k_g\, ds + \int_{\mathscr{L}} k_g\, ds,$$

و

$$\oint_2 k_g\, ds = \int_{\mathscr{C}_2} k_g\, ds - \int_{\mathscr{L}} k_g\, ds.$$

لذا،

$$\oint_1 k_g\, ds + \oint_2 k_g\, ds = \oint_{\mathscr{C}} k_g\, ds.$$

اگر زوایای کنتور قلمرو $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ را با α_i نشان دهیم، به‌آسانی می‌بینیم که مجموع تمام زوایای α'_j و β'_k مساوی مجموع تمام α_i ها بعلاوهٔ چهار زاویهٔ اضافی روی کنتورها ($\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1, \beta'_2$ در شکل) در رئوس جدید است که در جاهای اتصال $\mathscr{L}$ به کنتور قدیم ایجاد می‌شوند. مجموع این چهار زاویه مساوی 2π است، زیرا

$$\alpha'_1 + \beta'_1 = \alpha'_2 + \beta'_2 = \pi.$$

بنابراین،

$$\sum \alpha'_j + \sum \beta'_j = \sum \alpha_i + 2\pi.$$

حال، با افزودن دو معادلهٔ (۱۵۰۲۳) بهم، خواهیم داشت

$$\int_{\Omega_1}\int K\, dS + \int_{\Omega_2}\int K\, dS + \int_{\mathscr{C}_1} k_g\, ds + \int_{\mathscr{L}} k_g\, ds + \int_{\mathscr{C}_2} k_g\, ds - \int_{\mathscr{L}} k_g\, ds + \sum \alpha'_j + \sum \beta'_j = 4\pi,$$

یا

$$\int_{\Omega}\int K\, dS + \oint_{\mathscr{C}} k_g\, ds + \sum \alpha_i + 2\pi = 4\pi,$$

و، بالاخره،

$$\int_{\Omega}\int K\, dS + \oint_{\mathscr{C}} k_g\, ds + \sum \alpha_i = 2\pi.$$

فرمول گاوس ــ بونه در حالات خاص زیر ساده‌تر خواهد شد.

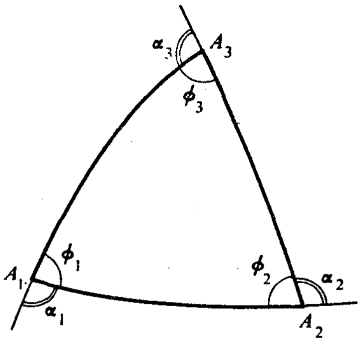
۱ . اگر کنتور هموار از کلاس C_2 باشد، $\Sigma\alpha_i = 0$ و داریم

$$\int_{\Omega}\int K\, dS + \oint_{\mathscr{C}} k_g\, ds = 2\pi.$$

۲ . اگر قلمرو به‌وسیلهٔ یک چندضلعی ژئودزیک کراندار باشد، یعنی قطعات هموار کنتور خطوط ژئودزیک باشند، $\oint k_g\, ds = 0$ و

$$\int_{\Omega}\int K\, dS + \sum \alpha_i = 2\pi.$$

اگر زوایای درونی یک n ضلعی ژئودزیک (شکل ۵۰۲۳) را با $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$



شکل ۵۰۲۳ [1]

نشان دهیم ، داریم $\alpha_i = \pi - \phi_i$ و

$$\int_\Omega\int K dS + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \phi_i) = 2\pi,$$

$$\int_\Omega\int K\, dS + n\pi - \sum_{i=1}^{n} \phi_i = 2\pi,$$

که از آنجا

$$\int_\Omega\int K\, dS = \sum_{i=1}^{n} \phi_i - \pi(n-2). \quad (۱۶۰۲۳)$$

بخصوص، برای یک مثلث ژئودزیک با زوایای درونی α, β, γ ، داریم

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_\Omega\int K\, dS. \quad (۱۷۰۲۳)$$

تفاضل $\Delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ بین π و مجموع زوایای درونی مثلث را نقص زاویهٔ مثلث می‌نامند .این کمیت در صفحهٔ اقلیدسی برای هر مثلث صفر است . بر یک سطح باانحنای گاوسی منفی‌این نقص مثبت ، و بر یک سطح با انحنای گاوسی مثبت نقص منفی خواهدبود .

بر یک سطح‌باانحنای‌ثابت ، نقص زاویه با مساحت مثلث ژئودزیک Ω متناسب‌است . درواقع ،

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_\Omega\int K\, dS = K\int_\Omega\int dS = K(\text{مساحت } \Omega).$$

درحالت خاص کره به شعاع a ، داریم $K = a^{-2}$ و نتیجه می‌گیریم که

$$\text{مساحت } \Omega = a^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = -a^2\Delta. \quad (۱۸۰۲۳)$$

تمرین

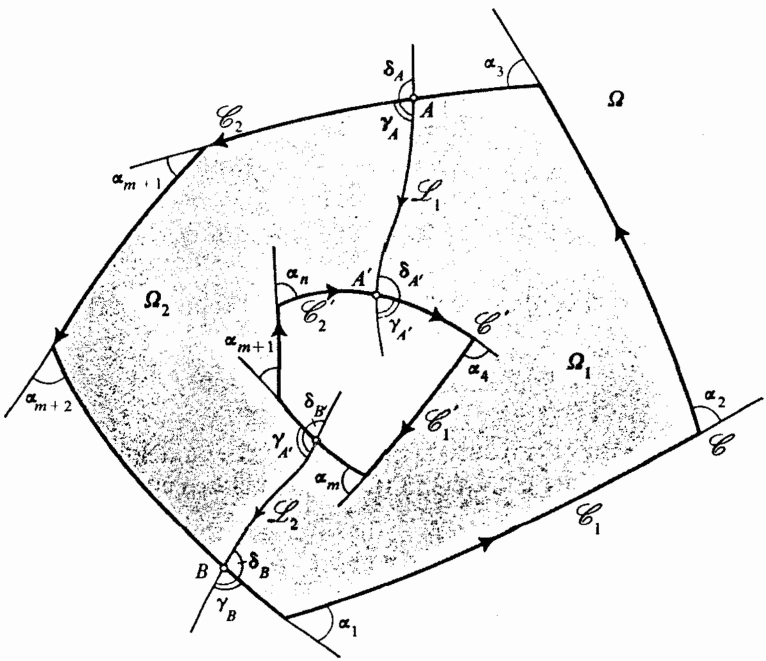
۱ . ثابت کنید بر یک سطح با انحنای گاوسی منفی، هیچ خط ژئودزیک بستهٔ هموار بدون خود قطعی وجود ندارد .

۲ . ثابت کنید دو خط ژئودزیک بستهٔ هموار مختلف در یک ناحیهٔ همبند ساده روی یک سطح با انحنای گاوسی مثبت باید یکدیگر را قطع کنند .

۷۰۲۳ فرمول گاوس ــ بونهٔ تعمیم یافته

اگر قلمرو Ω همبند ساده نباشد، کرانهٔ آن یک کنتور ساده نیست ولی از چند منحنی بسته تشکیل شده است . بر هر مولفهٔ کرانه جهتی به وسیلهٔ جهت خود قلمرو القا می‌شود .

ابتدا قلمرو طوق مانند Ω را درنظر می‌گیریم که کرانه‌اش از دو منحنی $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ تشکیل شده است (شکل ۶۰۲۳) . با دو منحنی هموار $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ که هریک نقطه‌ای از $\mathscr{C}$ (به‌ترتیب، A و B) را به نقطه‌ای از $\mathscr{C}'$ (A' و B') وصل می‌کنند ، می‌توان این طوق را به دو قلمرو همبند سادهٔ کنار هم Ω_1 و Ω_2 تقسیم کرد .



شکل ۶۰۲۳

آن قسمت از $\mathscr{C}$ را که به کرانهٔ Ω_1 تعلق دارد با $\mathscr{C}_1$ ، و قسمت باقیمانده درکرانهٔ

Ω_2 را بـا $\mathscr{C}_2$ نشان مـی‌دهیم و، به همین ترتیب، قسمتهای $\mathscr{C}'$ را با $\mathscr{C}'_1$ و $\mathscr{C}'_2$ نشان مـی‌دهیم . کـرانـهٔ Ω_1 از $\mathscr{C}_1, \mathscr{L}_1, \mathscr{C}'_1, \mathscr{L}_2$ و کرانهٔ Ω_2 از $\mathscr{C}_2, -\mathscr{L}_1, \mathscr{C}'_2, -\mathscr{L}_2$ تشکیل شـده است، که در آنها $-\mathscr{L}_i$ همان $\mathscr{L}_i$ با جهت مخالف است. همچنین، زوایـای منحنیهای جهتدار در نقاط $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}'_1$ را با $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$، و این زوایا در نقاط $\mathscr{C}_2$ و $\mathscr{C}'_2$ را با $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ نمایش می‌دهیم. بی آنکه به‌کلیت خللی وارد شـود، می‌توان فرض کرد که نقاط A, A', B, B' آن نقاطی از $\mathscr{C}$ یا $\mathscr{C}'$ اند که در آنـها منحنی نظیـر هموار است. اما این نقاط رئوس کنتورهای دو ناحیهٔ جزئی Ω_1 و Ω_2 اند. پس کنتور Ω_1 دارای زوایای $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ و چهار زاویهٔ اضافی $\gamma_A, \gamma_{A'}, \gamma_B, \gamma_{B'}$ در A, A', B, B'، وکنتور Ω_2 دارای زوایای $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ و زوایای اضافی $\delta_A, \delta_{A'}, \delta_B, \delta_{B'}$ درآن نقاط می‌باشد. توجه کنید که $\gamma_A + \delta_A = \gamma_{A'} + \delta_{A'} = \gamma_B + \delta_B = \gamma_{B'} + \delta_{B'} = \pi$؛ درنتیجه، مجموع 8 زاویهٔ اضافی مساوی 4π می‌باشد. حال، با اعمال فرمول گاوس ــ بونه برهر قلمرو همبند ساده جداگانه، خواهیم داشت

$$\int_{\Omega_1}\int K\,dS + \int_{\mathscr{C}_1} k_g\,ds + \int_{\mathscr{L}_1} k_g\,ds + \int_{\mathscr{C}'_1} k_g\,ds + \int_{\mathscr{L}_2} k_g\,ds + \sum_i^m \alpha_i$$
$$+ \gamma_A + \gamma_{A'} + \gamma_B + \gamma_{B'} = 2\pi,$$

$$\int_{\Omega_2}\int K\,dS + \int_{\mathscr{C}_2} k_g\,ds - \int_{\mathscr{L}_1} k_g\,ds + \int_{\mathscr{C}'_2} k_g\,ds - \int_{\mathscr{L}_2} k_g\,ds + \sum_{m+1}^n \alpha_i$$
$$+ \delta_A + \delta_{A'} + \delta_B + \delta_{B'} = 2\pi.$$

باافزودن این دو فرمول بـهم، بـه‌دست می‌آوریم که

$$\int_{\Omega}\int K\,dS + \int_{\mathscr{C}} k_g\,ds + \int_{\mathscr{C}'} k_g\,ds + \sum_1^n \alpha_i + 4\pi = 4\pi.$$

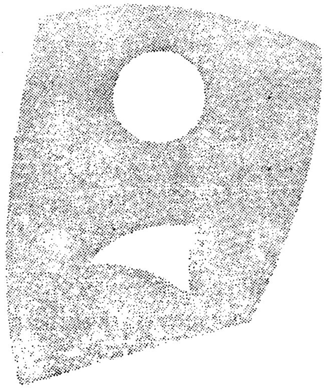
چون $\int_{\mathscr{C}} k_g\,ds + \int_{\mathscr{C}'} k_g\,ds$ انتگرالی روی تمـام کـرانهٔ $\partial\Omega$ از Ω است، بالاخره خواهیم داشـت

$$\int_{\Omega}\int K\,dS + \int_{\partial\Omega} k_g\,ds + \sum_i \alpha_i = 0. \qquad (۱۹.۲۳)$$

اثبات اینکه اگر قلمرو Ω (شکل ۷.۲۳) دو حفره داشته و کرانه‌اش از سه منحنی بستهٔ از هم جدا تشکیل شده باشد،

$$\int_{\Omega}\int K\,dS + \int_{\partial\Omega} k_g\,ds + \sum_i \alpha_i = -2\pi$$

به خواننده محول می‌شود. درحالت کلی، اگر قلمرو Ω دارای n حفره بوده یا کرانه‌اش



شکل ۷۰۲۳

$n+1$ مولفه داشته باشد، خواهیم داشت

$$\int_\Omega \int K\, dS + \int_{\partial\Omega} k_g\, ds + \Sigma\alpha_i = 2\pi(1-n). \qquad (۲۰۰۲۳)$$

۸۰۲۳ انتگرال انحنا

به‌ازای قلمرو Ω بر یک سطح (درحالت خاص، تمام سطح)، انتگرال

$$\int_\Omega \int K\, dS = \int_\Omega \int K\sqrt{g}\, du^1\, du^2$$

را *انتگرال انحنای* ناحیهٔ Ω می‌نامیم.

با استفاده از فرمول گاوس ـ بونه، انتگرال انحنای چند سطح بسته را حساب می‌کنیم.

۱. **کره.** برای یافتن انتگـرال انحنای کره، با استفاده از یک منحنی هموار بسته‌مانند $\mathscr{C}$، آن را به دو قلمرو همبند سادهٔ Ω_1, Ω_2 تجزیه می‌کنیم. این منحنی کرانهٔ هردو قلمرو است ولی با جهتهای مخالف. داریم

$$\int_{\Omega_1} \int K\, dS + \int_{\mathscr{C}} k_g\, ds = 2\pi,$$

$$\int_{\Omega_2} \int K\, dS - \int_{\mathscr{C}} k_g\, ds = 2\pi.$$

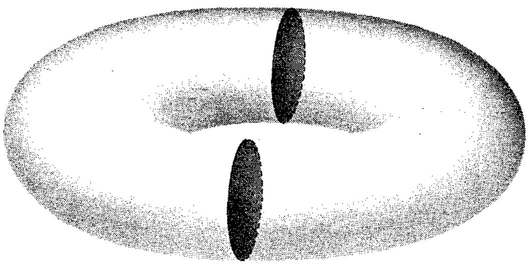
از اینرو، برای انتگرال انحنای تمام کره داریم

$$\int_\Omega \int K\, dS = 4\pi.$$

یعنی ، انتگرال انحنای کره مساوی 4π است .

واضح است که ما در اینجا ، جز از اینکه یک منحنی بسته کره را به دو قلمرو همبند ساده تجزیه می‌کند ، از خواص دیگر کره استفاده نکردیم . اما این امر برای تمام سطوح بسته‌ای که با کره همانریخت (معادل توپولوژیک) هستند درست است . بنابراین ، همهٔ آنها دارای انحنای فراگیر 4π اند ، مشروط بر اینکه در شرایط انتظامی که وجود انحنای گاوسی را تضمین می‌کنند صدق نمایند .

۲ . چنبره . چنبره معادل توپولوژیک کره نیست . چنبره را می‌توان با استفاده از دو منحنی بستهٔ هموار به دو قلمرو تجزیه کرد (شکل ۸۰۲۳) . این قلمروها همبند ساده



شکل ۸۰۲۳

نبوده ، بلکه طوق مانند هستند . دو منحنی با هم کرانهٔ مشترک دو ناحیه را تشکیل می‌دهند ، ولی جهتهای القایی کرانه‌های دو قلمرو مخالف یکدیگر می‌باشند . با استفاده از فرمول (۱۱۰۲۳) ، داریم

$$\int_{\Omega_1}\int K\,dS + \int_{\partial\Omega_1} k_g\,ds = 0,$$

$$\int_{\Omega_2}\int K\,dS + \int_{\partial\Omega_2} k_g\,ds = 0.$$

چون $\int_{\partial\Omega_1} = -\int_{\partial\Omega_2}$ ، برای تمام چنبره خواهیم داشت

$$\int\int K\,dS = 0.$$

انتگرال انحنای چنبره مساوی 0 است . مجددا" ، این امر برای هر سطح همانریخت با چنبره برقرار خواهد ماند .

برای تعمیم این نتایج به سطوح بستهٔ دیگر ، باید پایاهای توپولوژیکی ، به‌نام مشخص

اویلر[1] ــ پوانکارهٔ[2] سطح، را درنظر گرفت.

۹.۲۳ مشخص اویلر ــ پوانکاره

یک سطح بستهٔ جهت‌پذیر را به تعدادی متناهی قلمرو همبند سادهٔ کنار هم طوری‌تجزیه می‌کنیم که کرانه‌های آنها چندضلعیهایی منحنی‌الخط‌بوده و بستهای سه قلمرو یا بیشتر فقط بتوانند در یک راس چند ضلعیها مشترک باشند. بخشی از کرانه که دو راس را بهم وصل کرده و شامل راس دیگری نباشد یک *ضلع* نامیده می‌شود. تعداد رئوس را با v، تعداد اضلاع را با e، و تعداد قلمروها را با f نشان می‌دهیم. دراین صورت، عدد صحیح

$$\chi = v - e + f$$

مشخص اویلر ــ پوانکاره سطح نامیده می‌شود.

قضیه. *انتگرال انحنای یک سطح جهت‌پذیر بسته از کلاس C_3 با مشخص اویلر ــ پوانکارهٔ χ برابر است با $2\pi\chi$.*

برهان. تجزیه‌ای از سطح به صورتی که در تعریف χ توصیف شد را درنظر می‌گیریم. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود، فرض می‌کنیم همهٔ اضلاع خطوط ژئودزیک باشند؛ لذا، قسمت $\oint k_g\,ds$ فرمول گاوس ــ بونه مساوی صفر است و می‌تواند حذف شود. بعلاوه، کنتورهای قلمروهای خاص می‌توانند فقط در رئوس تجزیه زاویه داشته باشند. مجموع زوایای درونی در راس A_i تمام چند ضلعیها با این راس مساوی 2π است. تعداد چند ضلعیها با این راس مساوی تعداد اضلاع e_i مرسوم از A_i است. چون زاویهٔ برونی چند ضلعی در A_i (این زاویه‌ای است که در فرمول گاوس ــ بونه می‌آید) مساوی π منهای زاویهٔ درونی است، مجموع زوایای برونی همهٔ چند ضلعیها در A_i مساوی $e_i\pi - 2\pi = (e_i - 2)\pi$ می‌باشد. مجموع همهٔ زوایای برونی چند ضلعیها در تمام رئوس مساوی است با

$$\Sigma_{i=1}^{v}(e_i - 2)\pi = (2e - 2v)\pi = 2\pi(e - v),$$

چونکه $\Sigma_{i=1}^{v} e_i = 2e$، زیرا هر ضلع در مجموع دوبار حساب می‌شود ــ به‌ازای هر نقطهٔ انتهایی‌اش یکبار.

درنتیجه، اگر فرمول گاوس ــ بونه را برای هر چند ضلعی جداگانه بنویسیم و بعد مجموع آنها را بگیریم، خواهیم داشت

$$\iint K\,dS + 2\pi(e - v) = f \cdot 2\pi,$$

---

1. Euler 2. Poincaré

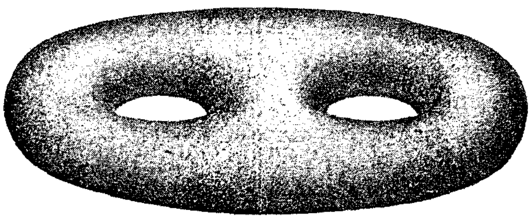
که از آنجا

$$\iint K\, dS = 2\pi(f - e + v) = 2\pi\chi,$$

و برهان تمام می‌شود.

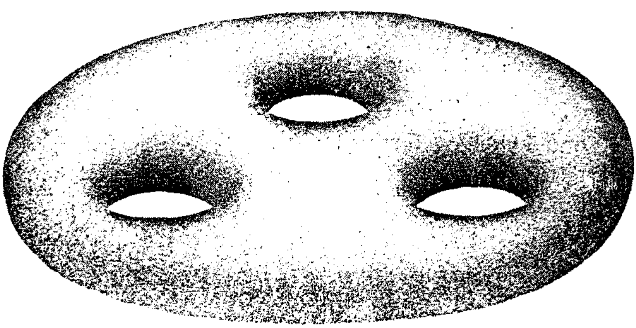
چون انتگرال $\iint K\, ds$ به تجزیهٔ خاصی از سطح به چند ضلعیها بستگی ندارد، این استقلال مشخص اویلر ـ پوانکاره را از تجزیهٔ سطح به چند ضلعیها برای سطوح از کلاس C_3 ثابت خواهد کرد.

درنتیجه، مشخص اویلر ـ پوانکارهٔ کره 2 ، از آن چنبره 0 ، و از آن چنبره با دو حفره (شکل ۹.۲۳) 2− است. عدد $1 - \chi/2$ جنس سطح نامیده می‌شود. لذا، کره سطحی



شکل ۹.۲۳

با جنس 0 ، چنبره با جنس 1 ، چنبره با دو حفره با جنس 2 ، چنبره با سه حفره (شکل ۱۰.۲۳) با جنس 3 است، و غیره.



شکل ۱۰.۲۳

★ ۲۴ مشتقگیری مطلق درچند گوناهای ریمانی

۱.۲۴ دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری و یک میدان تانسوری

همانطور که در ۶.۱۹ دیدیم، می‌توان علایم کریستوفل Γ_{ij}^{k} را در یک چندگونای ریمانی

تعریف کرد. این کار به‌ما اجازهٔ تعریف دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری و میدانهای تانسوری را خواهد کرد. دیفرانسیل مطلق میدان برداری به وسیلهٔ

$$Da^k = da^k + \Gamma^k_{rs}\, du^r\, du^s \qquad (۱۰۲۴)$$

برحسب مختصات موضعی تعریف می‌شود، که‌در آن a^k ها مولفه‌های میدان برداری‌می‌باشند. برای توجیه‌این تعریف، باید ثابت کنیم که مولفه‌های Da^k، وقتی مختصات موضعی‌تغییر کنند، از قانون تبدیل بردارها تبعیت می‌کنند.

مشتقگیری مطلق را می‌توان‌به‌طرز منحصر بفرد به میدانهای تانسوری از نوع دلخواه طوری تعمیم داد که شرایط‌زیر برقرار شوند:

۱. دیفرانسیل مطلق یک اسکالر با دیفرانسیل معمولی یکی باشد:

$$Da^i = da^i\,;$$

۲. دیفرانسیل مطلق حاصل ضرب دو تانسور از قاعدهٔ معمول برای دیفرانسیل حاصل ضربها تبعیت کند:

$$D(a^{\cdots}_{\cdots}b^{\cdots}_{\cdots}) = (Da^{\cdots}_{\cdots})b^{\cdots}_{\cdots} + a^{\cdots}_{\cdots}Db^{\cdots}_{\cdots}\,;$$

۳. عمل مشتقگیری مطلق و انقباض تانسورها تعویضپذیر باشند.

با اعمال این شرایط، می‌توان فرمولی برای دیفرانسیل مطلق یک بردار کوواریان مانند a_i پیداکرد. درواقع، با اختیار بردار دلخواه b^i، می‌توان اسکالر a_ib^i راتشکیل داد. بنابر خاصیت ۱، داریم

$$da_ib^i + a_idb^i = d(a_ib^i) = D(a_ib^i).$$

بنابر خواص ۲ و ۳، نیز داریم

$$D(a_ib^i) = (Da_i)b^i + a_iDb^i = (Da_i)b^i + a_i(db^i + \Gamma^i_{rs}b^r du^s)\cdot$$

لذا،

$$da_ib^i = (Da_i)b^i + a_i\Gamma^i_{rs}b^r du^s = (Da_i)b^i + \Gamma^r_{is}a_r du^s b^i$$

یا

$$(da_i - \Gamma^r_{is}a_r du^s)b^i = (Da_i)b^i.$$

چون این برای هرمیدان برداری دلخواه b^i درست است، نتیجه می‌گیریم که باید مساوی

$$Da_i = da_i - \Gamma^r_{is}a_r du^s \qquad (۲۰۲۴)$$

باشد.

با استدلالی مشابه، می‌توان دید که دیفرانسیل مطلق یک تانسور مخلوط‌از نوع (k, l) مانند $a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}$ باید مساوی

$$(\text{۳۰۲۴})\; Da^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} = da^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} + \sum_{t=1}^{k} \Gamma^{i_t}_{rs} a^{i_1\cdots i_{t-1} r i_{t+1}\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\, du^s - \sum_{t=1}^{l} \Gamma^{r}_{j_t s} a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_{t-1} r j_{t+1}\cdots j_l}\, du^s$$

باشد. باقی می‌ماند اثبات اینکه مولفه‌های (۲۰۲۴) و (۳۰۲۴)به‌ترتیب بر طبق قوانین تبدیل برای بردارهای کوواریان و برای تانسورها از نوع (k, l) تبدیل می‌شوند.

از تعویض دیفرانسیل $da^{\cdots}_{\cdots}$ با $(\partial a^{\cdots}_{\cdots}/\partial u^s)\, du^s$ و معرفی نماد

$$(\text{۴۰۲۴})\quad \nabla_s a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} = \frac{\partial a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}}{\partial u^s} + \sum_{t=1}^{k} \Gamma^{i_t}_{rs} a^{i_1\cdots i_{t-1} r i_{t+1}\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} - \sum_{t=1}^{l} \Gamma^{r}_{j_t s} a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_{t-1} r j_{t+1}\cdots j_l}\, du^s$$

داریم

$$Da^{\cdots}_{\cdots} = \nabla_s a^{\cdots}_{\cdots}\, du^s.$$

می‌توان ثابت کرد که ضرایب $\nabla_s a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}$، که با فرمول (۴۰۲۴) تعریف شده‌اند، مولفه‌های یک تانسور از نوع $(k, l+1)$ اند مشروط بر اینکه a ها مولفه‌های یک تانسور از نوع (k, l) باشند. این تانسور مشتق **کوواریان** تانسور $a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}$ می‌باشد.

تمرین

۱. ثابت کنید که Da^i طبق قانون تبدیل برای مولفه‌های یک تانسور از نوع $(1, 0)$، و Da_i طبق قانون تبدیل برای تانسورها از نوع $(0, 1)$ تبدیل می‌شوند.

۲. ثابت کنید که $Dg_{ij} = 0,\ Dg^{ij} = 0$.

۳. هرگاه $u^1, \ldots, u^n$ مختصات دکارتی در فضای اقلیدسی n بعدی باشند، آنگاه

$$Da^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} = da^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} \quad \text{و} \quad \nabla_s a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l} = \frac{\partial}{\partial u^s} a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}.$$

۲۰۲۴ تانسور ریمان[1]ــ کریستوفل

باآنکه مشتق کوواریان تعمیمی از مشتق جزئی است، تفاوتی اساسی بین آنها وجود دارد؛ مثلا"، اگرچه دو مشتقگیری جزئی متوالی تعویضپذیراند:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial u^i},$$

این همیشه برای مشتقات کوواریان صادق نیست.

با محاسبهٔ $\nabla_r\nabla_s v^k - \nabla_s\nabla_r v^k$، معلوم می‌شود که

1. *Riemann*

$$\nabla_r \nabla_s v^k - \nabla_s \nabla_r v^k = R_{rsj}^{\cdots k} v^j,$$

که در آن ضرایب $R_{rsj}^{\cdots k}$ مولفه‌های یک تانسور از نوع $(1, 3)$ می‌باشند. این تانسور **تانسور ریمان ــ کریستوفل** یا **تانسور انحنای** فضا نامیده می‌شود.

همچنین، می‌توان مولفه‌های کوواریان (از نوع $(0, r)$) این تانسور را درنظر گرفت:

$$R_{rsij} = R_{rsi}^{\cdots k} g_{kj}.$$

این مولفه‌ها در اتحادهای زیر صدق می‌کنند:

$$R_{rsij} = -R_{rsji} = -R_{srij} = R_{ijrs}.$$

درحالت خاص $n = 2$، در بین مولفه‌ها فقط مولفهٔ اساسی R_{1212} وجود دارد (بقیه یا صفرند یا مساوی این یکی یا مساوی $-R_{1212}$). اگر چندگونا یک سطح گرفته شود، مولفهٔ R_{1212} با انحنای گاوسی رابطهٔ نزدیکی خواهد داشت؛ یعنی،

$$R_{1212} = K \cdot g.$$

تمرین

۱. از (۴۰۲۴) فرمولی نتیجه بگیرید که $R_{rsj}^{\cdots k}$ را برحسب تانسور متری g_{ij} یا علایم کریستوفل Γ_{ij}^k یا هر دو بیان نماید. (با فرمولهای مربوط به K در (۲۱۰۱۸) مقایسه کنید.)

۲. ثابت کنید که برای فضای اقلیدسی n بعدی، $R_{rsj}^{\cdots k} = 0$.

۳۰۲۴ تغییر مکان موازی و خطوط ژئودزیک

به همان طریقی که تغییرمکان موازی در امتداد منحنیها بر یک سطح تعریف شد، می‌توان **تغییر مکان موازی** یک بردار یا تانسوررا در امتداد یک منحنی در یک چندگونای ریمانی تعریف کرد. می‌گوییم میدان تانسوری $a_{j_1 \cdots j_l}^{i_1 \cdots i_k}$ **در امتداد منحنی** $u^i = u^i(t)$ **موازی** است اگر که در هر نقطه از منحنی و در راستای آن داشته باشیم

$$D a_{j_1 \cdots j_l}^{i_1 \cdots i_k} = 0.$$

یک **خط ژئودزیک** در چندگونا یک منحنی تعریف می‌شود که خانوادهٔ بردارهای یکهٔ مماس آن در امتداد منحنی موازی باشند. این منجر به معادلات دیفرانسیل خطوط ژئودزیک منطبق با معادلات (۴۰۲۱) می‌شود منتها در آنها اندیس جمعبندی مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را خواهد گرفت.

درحالت 2 بعدی، همهٔ قضایای هندسهٔ ذاتی سطوح برای یک چندگونای ریمانی، حتی اگر چندگونا را نتوان به‌عنوان یک سطح در فضای سه بعدی مجسم کرد، معتبر می‌مانند. ★

۷
خواص غیر ذاتی سطوح

دراین فصل همه‌جا سطوح موردنظر را از کلاس C_3 ، منحنیهای پارامتری روی‌سطح را از کلاس C_2 ، و میدانهای برداری را از کلاس C_1 می‌گیریم . درنتیجه ، اولین فرم‌اساسی از کلاس C_2 ، و دومین فرم اساسی از کلاس C_1 است . این مفروضات همیشه در صورت قضایا تکرار نخواهند شد .

۲۵ انحنای قائم ، انحنای میانگین ، نقاط نافی

۱.۲۵ انحنای قائم سطح

بر یک سطح ماربر نقطهٔ P یک منحنی درنظر می‌گیریم . تصویر بردار انحنای $\mathbf{k}$ منحنی در P روی بردار قائم $\mathbf{m}$ سطح در P را ***انحنای قائم*** در P منحنی روی سطح می‌نامیم . این انحنا را با k_n نشان می‌دهیم .

قضیه. ***انحنای قائم در P یک منحنی روی یک سطح به‌راستای‌منحنی بستگی داشته‌و مساوی نسبت مقادیر دومین فرم اساسی به اولین فرم اساسی به‌ازای این راستا است :***

$$k_n = \frac{b_{ij}\,du^i\,du^j}{g_{ij}\,du^i\,du^j}. \tag{۱.۲۵}$$

برهان. طبق تعریف ، انحنای‌قائم مساوی تصویر بردارانحنای $\mathbf{k}$ روی $\mathbf{m}$ است ؛ درنتیجه ،

$$k_n = \mathbf{km}.$$

همانطورکه‌در ۲.۲۱ دیدیم ، داریم $\mathbf{k} = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n$. چون $\mathbf{k}_g$ مماس بر سطح است ، $\mathbf{k}_g\mathbf{m} = 0$. لذا ، $k_n = \mathbf{km} = \mathbf{k}_n\mathbf{m}$ که ، به خاطر(۴.۲۱) ، ایجاب می‌کند که

$$k_n = b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}, \tag{۲.۲۵}$$

که درآن s پارامتر طبیعی منحنی است. اما، برای پارامتر طبیعی، اتحاد زیر را داریم:

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 1,$$

که ایجاب می‌کند

$$k_n = \frac{b_{ij}\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^j}{ds}}{g_{ij}\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^j}{ds}}.$$

با ضرب صورت و مخرج در ds^2، (۱۰۲۵) را خواهیم داشت. این فرمول با این شکل به پارامتری سازی بستگی ندارد. بعلاوه، فرمول تنها مستلزم مشتقات اول مختصات نقاط منحنی نسبت به پارامتر طبیعی است؛ درنتیجه، فقط به راستا و، احتمالاً، جهت منحنی، بستگی دارد. اما تغییر علامت همهٔ دیفرانسیلهای مربوطه (که متناظر تغییر جهت است) اثری برنسبت ندارد. لذا، انحنای قائم فقط به راستا بستگی دارد، و قضیه ثابت است.

به‌خاطر این امر می‌توان درباب انحنای قائم در یک نقطهٔ مفروض با راستایی معلوم بدون اشاره به یک منحنی خاص از این راستا صحبت کرد، و انحنای قائم، برخلاف انحنای ژئودزیک، کمیتی مربوط به خود سطح می‌شود تا منحنیهای واقع بر آن.

بعلاوه، برخلاف انحنای ژئودزیک، انحنای قائم به هندسهٔ ذاتی سطح تعلق ندارد؛ به عبارت دیگر، تحت ایزومتریها حفظ نمی‌شود. ساده‌ترین مثال استوانهٔ مستدیر است. این سطح با صفحه موضعاً ایزومتریک است، ولی انحنای قائم یک برش عرضی عمود بر محور آن عکس شعاع بوده و مخالف صفر است، درحالی که نقش این برش عرضی خطی مستقیم بوده و انحنای قائم آن صفر می‌باشد.

امثله و تمرین

۱. قائم اصلی یک مارپیچ محور استوانهٔ محمل خود را در زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. لذا، بر استوانه عمود است؛ و درنتیجه، مساوی بردار انحنای $\mathbf{k}$ می‌باشد. بالنتیجه، انحنای قائم مارپیچ روی استوانه مساوی انحنا یا قرینهٔ انحنای مارپیچ درفضاست. علامت به جهت انتخابی استوانه بستگی دارد.

۲. بطور کلی، انحنای قائم در راستایی معلوم بر انحنا یا قرینهٔ انحنای یک خط ژئودزیک این راستا منطبق است.

۳. انحنای قائم مارپیچ $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ct$ روی مارپیچ گون

$x = u^1 \cos u^2, y = u^1 \sin u^2, z = cu^2$ را بیابید.

۴ . ثابت کنید مربع انحنای یک منحنی روی یک سطح، در یک نقطه، مجموع مربعات انحناهای قائم و ژئودزیک در این نقطه است.

۵ . نشان دهید که انحنای قائم در نقطهٔ P به‌ازای یک راستای معلوم، با تقریب علامت، بر انحنای فصل مشترک سطح با صفحهٔ قائم به سطح در P که شامل خط مماس با راستای معلوم است منطبق می‌باشد.

۶ . انحنای قائم سطح

$$s = f(x, y)$$

در راستای خط مماسی که کسینوسهای هادی آن a, b, c اند را بیابید.

۷ . انحناهای ژئودزیک و قائم یک دایره به شعاع b روی کره به شعاع a رابیابید.

۸ . ثابت کنید انحنای قائم یک نصف النهار از یک سطح دوار فقط و فقط در نقاط سهموی صفر است.

۹ . انحنای قائم دوایر عرض جغرافیایی یک کره نما را بیابید.

۲۰۲۵ قضیهٔ مونیه[1]

زاویهٔ بین بردار قائم اصلی $\mathbf{n}$ یک منحنی بر سطح در P و بردار قائم $\mathbf{m}$ به سطح در این نقطه‌را با α نشان می‌دهیم. اگر κ انحنای منحنی در P و k_n انحنای قائم باشد، طبق تعریف انحنای قائم داریم

$$k_n = \kappa \cos \alpha. \qquad (۳۰۲۵)$$

چون انحنای قائم فقط به‌راستای‌منحنی و زاویهٔ α به موضع صفحهٔ بوسان منحنی بستگی دارد، می‌توان ادعا کرد که انحنا در P منحنی روی یک سطح کاملا" به وسیلهٔ صفحهٔ بوسان منحنی درآن نقطه معین می‌شود. درواقع، فصل مشترک این صفحهٔ بوسان باصفحهٔ مماس‌سطح در P راستای‌منحنی را مشخص می‌کند؛ لذا، انحنای قائم k_n، و نیز زاویهٔ α، معین می شوند. درنتیجه، خواهیم داشت

$$\kappa = \frac{k_n}{\cos \alpha}.$$

تنها استثنا وقتی است که‌صفحهٔ بوسان منحنی بر سطح مماس باشد، که در این حالت $\cos \alpha = 0$. طبق (۳۰۲۵)، این فقط‌وقتی می‌تواند رخ دهدکه انحنای‌قائم در راستای

---

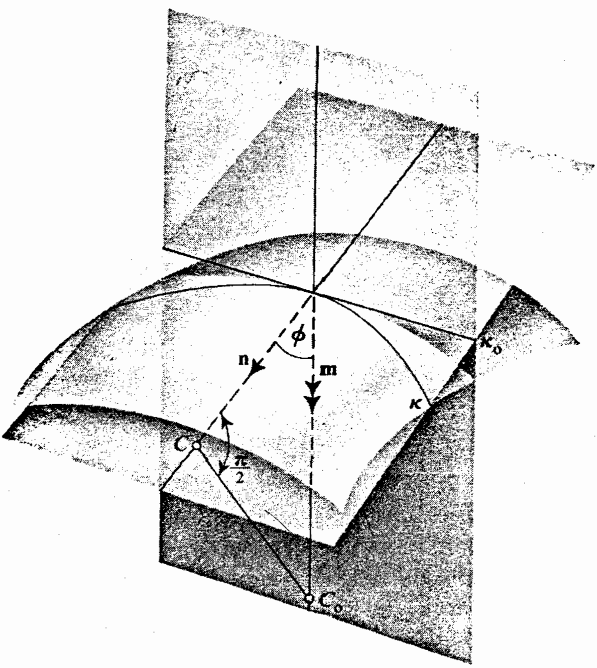
1. Meusnier

منحنی صفر باشد. لذا، همهٔ منحنیها روی سطح که در P یک صفحهٔ بوسان دارند در P یک انحنا خواهند داشت.

درحالتی که صفحهٔ بوسان بر سطح عمود است $(\cos\alpha = \pm 1)$، انحنای منحنی همان انحنای مقطع قائم صفحه به‌ازای همان راستا، یعنی فصل مشترک سطح با یک صفحهٔ قائم به سطح و مماس بر منحنی، است. دراین صورت، انحنای منحنی بر انحنای قائم یا قرینهٔ انحنای قائم منطبق می‌باشد.

این نتایج را می‌توان به نحو توصیفی تری در قضیهٔ زیر بیان کرد.

قضیه (مونیه). ***مرکز انحنا در P منحنی $\mathscr{K}$ با انحنای قائم ناصفر روی سطح $\mathscr{F}$ تصویر قائم روی صفحهٔ بوسان در P مرکز انحنا مقطع قائم سطح در P است که بر $\mathscr{K}$ در P مماس می‌باشد (شکل ۱۰۲۵).***



شکل ۱۰۲۵

برهان. فرض‌کنیم C_0 مرکزانحنای مقطع قائم بوده، و C مرکز انحنای منحنی در P باشد. دراین صورت، داریم

$$\overrightarrow{PC} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{PC_0} = \frac{1}{k_n}\mathbf{m} \ .$$

از آن سو، تصویر بردار $\overrightarrow{PC_0}$ روی بردار $\mathbf{n}$ ، که بردار نیز گرفته شده، مساوی است با

$$(\overrightarrow{PC_0}\mathbf{n})\mathbf{n} = \frac{1}{k_n}(\mathbf{mn})\mathbf{n} = \frac{\cos\alpha}{k_n}\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} = \overrightarrow{PC}.$$

لذا، تصویر نقطهٔ C_0 روی قائم اصلی با C یکی است. اما قائم اصلی منحنی و قائم سطح هردو بر مماس بر منحنی که در صفحهٔ بوسان است عمودند. از اینرو، تصویر قائم PC_0 بر صفحهٔ بوسان با قائم اصلی منحنی، و تصویر C_0 بر صفحهٔ بوسان با تصویر C_0 بر قائم اصلی یکی می‌باشد. لذا، این تصویر بر مرکز انحنای C منطبق بوده، و قضیه ثابت خواهد شد.

مرکز انحنای C_0 مقطع قائم با راستایی معلوم در P را ***مرکز انحنای قائم*** به ازای راستای معلوم در P، و $R_n = 1/k_n$، یعنی عکس انحنای قائم، را ***شعاع انحنای قائم*** می‌نامیم.

راستاهایی که به‌ازای آنها $k_n = 0$ ***راستاهای مجانبی*** نامیده می‌شوند. این حالت در زیربخش ۳۰۲۶ موردبحث قرارخواهد گرفت. به‌ازای اینها، قضیهٔ فوق برقرار نمی‌باشد.

تمرین

۱. با استفاده از خاصیت کشاننده که پاره خط مماس بین نقطهٔ تماس و مجانب ثابت است، ثابت کنید انحنای ژئودزیک تمام دوایر عرض جغرافیایی کره‌نما یکی است.

۲. یک بیضی با نیم محورهای a, b $(a > b)$ را فصل مشترک یک استوانهٔ مستدیر قائم به‌شعاع b با یک صفحه گرفته‌و، با استفاده از قضیهٔ مونیه، انحنای بیضی دررئوس آن (یعنی، نقاط برخورد بیضی با محورهای اصلی) را پیدا کنید.

۳. مجموعهٔ مراکزانحنا درنقطهٔ $(0, 0, 0)$ تمام منحنیهای ماربر این نقطه و واقع برسطح $s = f(x, y)$ را بیابید مشروط بر اینکه $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

۳۰۲۵ نقش کروی بردار مماس بر یک سطح.

حال به نگاشت یک سطح‌بتوی کرهٔ یکه به وسیلهٔ بردارهای قائم، که در ۴۰۱۷ بحث‌شد، بازمی‌گردیم. این نگاشت به هر نقطهٔ P از سطح نقطهٔ پایان یک بردار به مبداء مرکزکره و مساوی بردارقائم $\mathbf{m}$ در P را نسبت می‌دهد. نقش نقطهٔ P به مختصات منحنی الخط

روی سطح (u^1, u^2)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

دارای بردار موضع

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(u^1, u^2)$$

است. با توسیع این نگاشت به بردارهای مماس سطح داده شده، درمی‌یابیم که بردارهای مماس $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ به بردارهای مماس $\mathbf{m}_1$ و $\mathbf{m}_2$ بر کره، و بردار مماس بر سطح

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{r}_i$$

به بردار مماس $a^j\mathbf{m}_j$ بر کره نگاشته می‌شود. اما $\mathbf{m}_1$ و $\mathbf{m}_2$ متعامد به $\mathbf{m}$ اند؛ ولذا، موازی صفحهٔ مماس بر سطح در P می‌باشند. درنتیجه، در بین بردارهای مماس بر سطح در P یکی مساوی $a^j\mathbf{m}_j$ وجود دارد. این بردار مماس در P را با $\mathscr{S}(\mathbf{a})$ نشان می‌دهیم. لذا،

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) = a^i\mathbf{m}_j.$$

طبق فرمولهای وینگارتن (۲۰۱۸)، داریم

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) = -b^i_ja^j\mathbf{r}_i. \qquad (۴۰۲۵)$$

نگاشت $\mathscr{S}$ یک تبدیل خطی از فضای برداری بردارهای مماس در P بتوی خوداست زیرا، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود، داریم

$$\mathscr{S}(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\mathscr{S}(\mathbf{a}) + \mu\mathscr{S}(\mathbf{b}). \qquad (۵۰۲۵)$$

این نگاشت $\mathscr{S}$ را **تبدیل کروی** فضای مماس، و $\mathscr{S}(\mathbf{a})$ را **نقش کروی** بردار مماس $\mathbf{a}$ می‌نامیم. توجه کنید که تعریف $\mathscr{S}(\mathbf{a})$ اساساً مستقل از پارامتری سازی است ولی به جهت سطح بستگی دارد. در واقع، اگر جهت سطح تغییر کند، $\mathbf{m}$ با $-\mathbf{m}$ عوض می‌شود، و نقش بردار مماس بر منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$، به جای $\mathbf{m}'(s)$، $-\mathbf{m}'(s)$ خواهد شد.

تبدیل کروی فضای برداری مماس ابزار مفیدی در بحث مسائل مختلف نظریهٔ سطوح است. ابتدا به اثبات چند رابطه بین این تبدیل و کمیاتی که از قبل می‌شناسیم می‌پردازیم.

قضیه. *حاصل ضرب داخلی بردار $\mathbf{a}$ و نقش کروی آن مساوی قرینهٔ مقدار دومین فرم اساسی به‌ازای بردار $\mathbf{a}$ است:*

$$\mathbf{a}\mathscr{S}(\mathbf{a}) = -b_{ij}a^ia^j.$$

برهان. طبق (۴۰۲۵) و (۱۹۰۱۶)، داریم

$$\mathbf{a}\mathscr{S}(\mathbf{a}) = g_{ij}a^i(-b^j_ka^k) = -g_{ij}b^j_ka^ia^k.$$

و طبق (۳۰۱۸)، $g_{ij}b^j_k = b_{ik}$. لذا،

$$\mathbf{a}\mathscr{S}(\mathbf{a}) = -b_{ik}a^i a^k = -b_{ij}a^i a^j,$$

که برهان را تمام می‌کند .

نتیجه. ***انحنای قائم k_n در راستای بردار a مساوی است با***

$$k_n = -\frac{\mathbf{a}\mathscr{S}(\mathbf{a})}{\mathbf{a}^2}. \tag{۶۰۲۵}$$

امثله و تمرین

۱ . **با فرض‌بردار $d\mathbf{r} = du^i\mathbf{r}_i$ برای a ، داریم $\mathscr{S}(d\mathbf{r}) = du^i\mathbf{m}_i = d\mathbf{m}$. لذا ، می‌توان‌نوشت**

$$b_{ij}\,du^i\,du^j = -d\mathbf{r}\,d\mathbf{m}\ \text{،}$$

و

$$k_n = -\frac{d\mathbf{r}\,d\mathbf{m}}{d\mathbf{r}^2}.$$

۲ . نقش کروی بردار مماس بر نصف‌النهار زنجیرگون (۱۱۰۱۱) را بیابید . زاویهٔ بین این بردار و نقش آن چیست ؟

۳ . همین مسئله‌را برای‌بردار مماس بر دایرهٔ عرض جغرافیایی زنجیرگون، و برای‌راستایی که زاویهٔ بین نصف النهار و دایرهٔ عرض جغرافیایی رانصف می‌کند حل کنید .

۴ . همین مسئلــه را برای یک بردار مماس بر خط‌جاری از مارپیچ گون (۱۳۰۱۱) ، و بردار مماس عمود بر خط‌جاری حل کنید .

۴۰۲۵ نگاشت کروی و انحنای گاوسی

دو بردار مماس a و b در نقطهٔ P از یک سطح را درنظر می‌گیریم .

قضیه. ***حاصل‌ضرب خارجی نقشهای‌کروی دو بردار مماس در P مساوی حاصل ضرب‌خارجی بردارها ضربدر انحنای گاوسی سطح در P است :***

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) \times \mathscr{S}(\mathbf{b}) = K\mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{۷۰۲۵}$$

برهان. داریم $\mathscr{S}(\mathbf{a}) = a^i\mathbf{m}_i,\ \mathscr{S}(\mathbf{b}) = a^j\mathbf{m}_j$ ؛ درنتیجه ،

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) \times \mathscr{S}(\mathbf{b}) = a^i b^j \mathbf{m}_i \times \mathbf{m}_j = (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2.$$

طبق فرمولهای وینگارتن (۲۰۱۸) ، داریم

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = b_1^i b_2^j \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2.$$

با استفاده از اتحاد $b_j^i = g^{ik}b_{jk}$ ، داریم

(۸۰۲۵)
$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{g} b = K ;$$

درنتیجه ،

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) \times \mathscr{S}(\mathbf{b}) = K(a^1 b^2 - a^2 b^1)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 .$$

اما این با (۷۰۲۵) معادل است ، زیرا

$$(a^1 b^2 - a^2 b^1)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

بخصوص، با فرض $\mathbf{a} = d\mathbf{r} = du^i \mathbf{r}_i$ و $\mathbf{b} = \delta\mathbf{r} = \delta u^i \mathbf{r}_i$ ، خواهیم داشت

(۹۰۲۵)
$$\mathscr{S}(d\mathbf{r}) \times \mathscr{S}(\delta\mathbf{r}) = d\mathbf{m} \times \delta\mathbf{m} = K\, d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}.$$

۵۰۲۵ انحنای میانگین یک سطح

مثل قبل ، دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در P و بردار

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathscr{S}(\mathbf{b})$$

را درنظر مـی‌گیریم . ثابت می‌کنیم این بردار با $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ همخط‌است ؛ و در واقع ، مساوی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ضربدر ضریبی است که فقط تابع نقطهٔ سطح بوده و به انتخاب بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بستگی ندارد .

داریم

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = -b_k^i a^k b^j \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = (-b_k^1 a^k b^2 + b_k^2 a^k b^1)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$$
$$\mathbf{a} \times \mathscr{S}(\mathbf{b}) = -b_k^j a^i b^k \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = (-b_k^2 a^1 b^k + b_k^1 a^2 b^k)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 .$$

از این نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathscr{S}(\mathbf{b}) &= (-b_1^1 a^1 b^2 - b_2^1 a^2 b^2 + b_1^2 a^1 b^1 + b_2^2 a^2 b^1 \\ &\quad - b_1^2 a^1 b^1 - b_2^2 a^1 b^2 + b_1^1 a^2 b^1 + b_2^1 a^2 b^1)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\ &= -(b_1^1 + b_2^2)(a^1 b^2 - a^2 b^1)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -(b_1^1 + b_2^2)\mathbf{a} \times \mathbf{b}.\end{aligned}$$

این ضریب را با $-2H$ نشان داده ، و H را **انحنای میانگین** سطح در $\mathbf{P}$ می‌نامیم .

لذا ، داریم

(۱۰۰۲۵)
$$H = \tfrac{1}{2}(b_1^1 + b_2^2) = \tfrac{1}{2} b_i^i.$$

با استفاده از این نماد ، داریم

(۱۱۰۲۵)
$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathscr{S}(\mathbf{b}) = -2H\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

فرمول (۱۰۰۲۵) را می‌توان به شکلهای مفید دیگر نیز نوشت ؛ مثلا" ،

(۱۲۰۲۵)
$$H = \frac{1}{2} \frac{g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12} + g_{22} b_{11}}{g}$$

یا

$$H = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & b_{12} \\ g_{21} & b_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & g_{12} \\ b_{21} & g_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}}. \qquad (۱۲\cdot۲۵)'$$

قضیه. قدر مطلق انحنای میانگین به مختصات منحنی الخط بستگی ندارد. انحنای میانگین با تغییر جهت سطح تغییر علامت می‌دهد.

برهان. با آنکه این فورا" از تعریف انحنای میانگین به عنوان ضریب H در (۱۱۰۲۵) نتیجه مــی‌شود، ما اینجا برهانی محاسبه‌ای مبتنی بر فرمول (۱۲۰۲۵) و قوانین تبدیل (۲۸۰۱۶) و (۲۷۰ ۶) ارائه می‌دهیم. داریم

$$b_{i'j'}g^{i'j'} = \varepsilon\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}b_{ij}\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^s}g^{rs} = \varepsilon\left(\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^r}\right)\left(\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\frac{\partial u^{j'}}{\partial u^s}\right)b_{ij}g^{rs}$$
$$= \varepsilon\delta^i_r\delta^j_s b_{ij}g^{rs} = \varepsilon b_{ij}g^{ij},$$

که در آن $\varepsilon = \operatorname{sgn}\partial(u^1, u^2)/\partial(u^{1'}, u^{2'})$ و مساوی 1 است اگــر تبدیل جهت را حفظ‌کند، و -1 است اگر جهت را برگرداند.

امثله و تمرین

۱ . انحنای میانگین کره، زنجیرگون، و مارپیچ گون را بیابید.

۲ . فرمول (۱۰۲۵) درحالت خاص (به‌ازای $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1$ و $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2$) نتیجه می‌دهد که

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2 = -2H\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -2H\sqrt{g}\mathbf{m}.$$

بنابراین،

$$H = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\mathbf{m}(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2). \qquad (۱۳\cdot۲۵)$$

۳ . سطح $\mathscr{F}$ را درنظر می‌گیریم. سطح حاصل از $\mathscr{F}$ با حرکت یک نقطه در امتداد قائم به $\mathscr{F}$ در آن نقطه به اندازهٔ فاصلهٔ ثابت a یک **سطح موازی** $\mathscr{F}$ نامیده می‌شود. اگر معادلهٔ پارامتری سطح $\mathscr{F}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

باشد، سطح موازی دارای معادلهٔ

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(u^1, u^2) + a\mathbf{m}(u^1, u^2)$$

است، که در آن $a =$ ثابت . از اینرو، $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + a\mathbf{m}_1, \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + a\mathbf{m}_2$، و

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + a(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1 \times \mathbf{r}_2) + a^2\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \\ &= (1 - 2Ha + Ka^2)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (1 - 2Ha + Ka^2)\sqrt{g}\mathbf{m}\,.\end{aligned}$$

درنتیجه، بردار قائم به‌سطح موازی بر بردار قائم یا قرینهٔ بردار قائم به سطح اصلی در نقطهٔ نظیر منطبق است؛ به‌طور دقیقتر، بر $\varepsilon\mathbf{m}$ منطبق است، که درآن

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(1 - 2Ha + Ka^2).$$

مبین اولین فرم اساسی سطح موازی در مختصات (u^1, u^2) مساوی است با

$$\tilde{g} = (1 - 2Ha + Ka^2)^2 g,$$

که به‌معنی آن است که نقاط منفرد پارامتری سازی (u^1, u^2) سطح موازی نقاط صادق‌در معادلهٔ $1 - 2Ha + Ka^2 = 0$ می‌باشند.

برای‌یافتن انحنای میانگین $\tilde{H}$ سطح موازی، عبارت زیر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\mathbf{m}_1 \times \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \times \mathbf{m}_2) &= (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r}_2 + a\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2 + a\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) \\ &= (-2H + 2aK)\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \frac{-2H + 2aK}{1 - 2Ha + Ka^2}\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \\ &= -2\tilde{H}\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2.\end{aligned}$$

درنتیجه،

$$\tilde{H} = \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + K^2a^2}.$$

همچنین، برای انحنای گاوسی $\tilde{K}$ سطح موازی، داریم

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = K\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = K/(1 - 2Ha + Ka^2)\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2,$$

که از آنجا

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

۴ . انحنای میانگین سطح

$$z = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$$

را بیابید.

۵ . انحنای میانگین سطح گستردنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{p}'(u^1)$$

را با استفاده‌از نماد معمول برای سه‌وجهی فرنه، انحنا، و تاب منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{p}(s)$ بیابید.

۶ . انحناهای میانگین و گاوسی سطح خط دار تولید شده به وسیلهٔ دوجمله ایهای یک منحنی مانند $\mathbf{r} = \mathbf{p}(s)$ را بیابید .

۷ . انحنای میانگین چنبرهٔ

$$x = (a + b\cos u^1)\cos u^2, \qquad y = (a + b\cos u^1)\sin u^2, \qquad z = b\sin u^2$$

را بیابید . آیا چنبره نقاطی با انحنای میانگین صفر دارد ؟

۶.۲۵ رابطهٔ بین انحناهای H و K

قضیه . *انحنای گاوسی و انحنای میانگین یک سطح در نقطهٔ P در نامساوی*

$$H^2 \geq K \tag{۱۴.۲۵}$$

صدق می‌کنند . تساوی در آن فقط وقتی برقرار است که $b_1^1 = b_2^2$ و $b_1^2 b_2^1 = 0$ ، که در این صورت فرمهای اساسی در P متناسب می‌باشند .

برهان . چون هیچیک از H^2 و K به مختصات منحنی‌الخط بستگی ندارند ، می‌توان آنها را دلخواه گرفت . فرض کنیم مختصات متعامد باشند ؛ یعنی ، $g_{12} = 0$ و $g^{12} = 0$. دراین صورت ، داریم

$$b_1^2 = b_{12}g^{22}, \qquad b_2^1 = b_{21}g^{11}, \qquad g = g_{11}g_{22},$$

که ایجاب می‌کند

$$b_1^2 b_2^1 = (b_{12})^2 g^{11} g^{22} = (b_{12})^2 g \geq 0, \tag{۱۵.۲۵}$$

که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $b_{12} = 0$.

دراین مختصات داریم

$$4(H^2 - K) = (b_1^1 + b_2^2)^2 - 4(b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1) = (b_1^1 - b_2^2)^2 + 4b_1^2 b_2^1.$$

به‌خاطر (۱۵.۲۵) ، طرف راست نامنفی است ، و مساوی صفر است اگر و فقط اگر $b_1^1 - b_2^2 = 0$ و $b_1^2 b_2^1 = 0$. شرایط اخیر معادلند با $b_1^1 = b_{11}g^{11} = b_2^2 = b_{22}g^{22}$ یا $b_{11}g_{22} = b_{22}g_{11}$ و $b_{12} = 0$. اما این یعنی دومین و اولین فرم اساسی در مختصات ما متناسب‌اند ، $b_{ij} = \lambda g_{ij}$. با اعمال یک تبدیل مختصات ، برای ضرایب تبدیل یافتهٔ فرمهای اساسی ، نسبت $b_{i'j'} = \lambda g_{i'j'}$ یا $b_{i'j'} = -\lambda g_{i'j'}$ به‌دست می‌آید ، موید آنکه نسبت فرمها از مختصات منحنی الخط مستقل است ، و قضیه ثابت می‌شود .

۷.۲۵ نقاط نافی

یک نقطه از یک سطح را یک نقطهٔ *نافی* گویند اگر و فقط اگر انحنای قائم در این نقطه در

هر راستا یکی باشد: $k_n(du^1 : du^2) = k$.

از (۱۰۲۵) فوراً" معلوم می‌شود که یک نقطه نافی است اگر، به‌ازای هر راستا،

$$b_{ij}\, du^i\, du^j = kg_{ij}\, du^i\, du^j \cdot$$

یعنی، اگر

$$b_{ij} = kg_{ij} \qquad (۱۶۰۲۵)$$

درنتیجه، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۱. ***نقطهٔ P یک نقطهٔ نافی یک سطح است اگر و فقط اگر دو فرم اساسی در P متناسب باشند؛ یعنی،***

$$b_{11} = \lambda g_{11}, \qquad g_{12} = \lambda g_{12}, \qquad b_{22} = \lambda g_{22}.$$

صفحه و کره فقط از نقاط نافی تشکیل شده‌اند. از تمرین ۳، ۲۰۱۷، معلوم می‌شود که صفحه و کره *تنها سطوحی هستند که هر نقطه شان نافی است*. سطوحی با نقاط نافی تنها نیز وجود دارند.

با استفاده از مفهوم نقطهٔ نافی، می‌توان قسمت دوم قضیهٔ زیر بخش پیش را این طور بیان کرد:

در نقاط نافی و فقط در این نقاط $H^2 = K$. حال خاصیت مشخصهٔ دیگری از نقاط نافی را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. ***در یک نقطهٔ نافی و فقط در آن، نقش کروی هر بردار با آن همخط است؛ یعنی،***

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) = -k\mathbf{a}. \qquad (۱۷۰۲۵)$$

ضریب k در این فرمول به بردار $\mathbf{a}$ بستگی نداشته، و مساوی قرینهٔ انحنای قائم در این نقطه است.

برهان. در نقطهٔ نافی P، انحنا در هر راستا یکی است. اگر آن را با k نشان داده و (۱۶۰۲۵)، به‌ازای $k_n = k$، را در $g^{jl}a^i$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$b_i^l a^i = k\delta_i^l a^i = ka^l, \qquad (۱۸۰۲۵)$$

که، به‌خاطر (۴۰۲۵)، با (۱۷۰۲۵) معادل است. حال فرض کنیم $\mathscr{S}(\mathbf{a})$ و $\mathbf{a}$، به‌ازای هر $\mathbf{a}$، همخط باشند؛ درنتیجه،

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}. \qquad (۱۹۰۲۵)$$

ابتدا ثابت می‌کنیم ضریب λ به $\mathbf{a}$ بستگی ندارد. فرض‌کنیم $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ دو بردار مماس مستقل خطی باشند و

$$\mathscr{S}(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathscr{S}(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2.$$

برای بردار $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ از یک طرف داریم $\mathscr{S}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \lambda(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ و، از طرف دیگر، $\mathscr{S}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathscr{S}(\mathbf{e}_1) + \mathscr{S}(\mathbf{e}_2) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$، که $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ را ایجاب می‌کند. حال، با همان λ، و به‌ازای بردار $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2$، داریم

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) = \alpha \mathscr{S}(\mathbf{e}_1) + \beta \mathscr{S}(\mathbf{e}_2) = \alpha\lambda \mathbf{e}_1 + \beta\lambda \mathbf{e}_2 = \lambda(\alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2) = \lambda \mathbf{a}$$

با فرض $-k = \lambda$ در (۱۹۰۲۵)، معلوم می‌شود که (۱۷۰۲۵)، با k ای مستقل از $\mathbf{a}$، برقرار است.

با ضرب اتحاد (۱۷۰۲۵) در $\mathbf{a}$، به‌دست می‌آوریم

$$\mathscr{S}(\mathbf{a})\mathbf{a} = -k\mathbf{a}^2$$

که، طبق (۶۰۲۵)، ایجاب می‌کند که انحنای قائم در راستای $\mathbf{a}$ مساوی k است؛ درنتیجه، انحنا به‌ازای جمیع راستاها یکی است و نقطه نافی می‌باشد.

امثله و تمرین

۱. هر نقطهٔ نافی یک نقطهٔ بیضوی یا یک‌نقطهٔ سهموی‌است. درحالت دوم یک نقطهٔ تخت است.

۲. بیضی‌گون و هذلولی گون دو پارچه که سطح دوار نباشند چهار نقطهٔ نافی دارند. یک سهمی‌گون بیضوی که سطح دوار نیست دو نقطهٔ نافی دارد. اگر یکی از این سطوح یک سطح دوار باشد، تعداد نقاط نافی دو برابر کمتر است، به استثنای کره، که هر نقطه‌اش نافی‌است. این مطلب را با یافتن نقاط نافی سطوح نظیر ثابت کنید.

۳. نقاط نافی سطح $xyz = a^3$ را بیابید.

۴. ثابت کنید انحنای میانگین یک نقطهٔ نافی با انحنای قائم، و انحنای گاوسی با مربع انحنای قائم یکی است.

۸۰۲۵ سطوح مینیمال

سطوح با انحنای میانگین صفر **سطوح مینیمال** نام دارند. این نام به‌وسیلهٔ قضیهٔ زیر توجیه می‌شود.

قضیه. *هرگاه مساحت هر ناحیه بر سطح $\mathscr{F}$ محدود به منحنی بستهٔ قطعه قطعه هموار*

$\mathscr{C}$ از مساحت قلمرو محدود به $\mathscr{C}$ بر هر سطح دیگر شامل $\mathscr{C}$ کوچکتر باشد، آنگاه $\mathscr{F}$ یک سطح مینیمال است.

برهان. بی‌آنکه کلیت از کف برود، می‌توان خود را به بخش به‌قدر کافی کوچکی از سطح $\mathscr{F}$ محدود کرد که مختصات منحنی الخطی مانند u^1, u^2 را بپذیرد. فرض کنیم معادلهٔ پارامتری سطح $\mathscr{F}$ عبارت باشد از

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2).$$

فرض‌کنیم Ω ناحیه‌ای بر صفحهٔ (u^1, u^2) نظیر به ناحیهٔ کراندار به $\mathscr{C}$ بوده و $\alpha(u^1, u^2)$ تابعی از کلاس C_1 باشد که برکرانهٔ Ω صفر می‌شود. به‌ازای t به‌قدر کافی کوچک، معادلهٔ

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(u^1, u^2) + t\alpha(u^1, u^2)\mathbf{m} \tag{۲۰.۲۵}$$

نمایش سطحی مانند $\mathscr{F}^t$ است که از منحنی $\mathscr{C}$ می‌گذرد. در حالت خاص $t = 0$ سطح $\mathscr{F}$ ما به‌دست می‌آید. مساحت سطح $\mathscr{F}^t$ کراندار به $\mathscr{C}$ مساوی است با

$$S_t = \int_\Omega\int |\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|\, du^1\, du^2.$$

این مساحت، به‌ازای هر تابع ثابت α، تابع مشتقپذیری از t است. ثابت می‌کنیم این مساحت می‌تواند مینیمم خود را در $t = 0$ بگیرد اگر و فقط اگر انحنای میانگین H از $\mathscr{F}$ متحد صفر باشد.

درواقع، داریم

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + t\alpha_1\mathbf{m} + t\alpha\mathbf{m}_1, \qquad \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + t\alpha_2\mathbf{m} + t\alpha\mathbf{m}_2,$$

که از آنجا

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + t\alpha(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{m}_1) + t^2\alpha^2\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \\ &\quad + t(\alpha_1\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2 + \alpha_2\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}) + t^2\alpha(\alpha_1\mathbf{m} \times \mathbf{m}_2 + \alpha_2\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}).\end{aligned}$$

با اعمال فرمولهای (۱۷.۱۶)، (۱۳.۲۵)، و (۸.۱۷)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 &= \sqrt{g}(1 - 2t\alpha H + t^2\alpha^2 K)\mathbf{m} \\ &\quad + t(\alpha_1\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2 + \alpha_2\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}) + t^2\alpha(\alpha_1\mathbf{m} \times \mathbf{m}_2 + \alpha_2\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}).\end{aligned} \tag{۲۱.۲۵}$$

چون مجموع سطر دوم یک بردار عمود بر $\mathbf{m}$ است، مربع $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$ مساوی مجموع مربعات اولین و دومین سطر است.

این مجموع مربعات بوضوح یک چندجمله‌ای از درجهٔ 4 نسبت به t است که ضرایبش توابعی هستند که دربست ناحیهٔ Ω کراندارند.

با محاسبه، درمی‌یابیم که

$$(\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^2 = g - 4t\alpha Hg + t^2\phi_1 + t^3\phi_2 + t^4\phi_3,$$

که‌درآن ϕ_i توابعی‌کرانداراز u^1, u^2 اند . لذا ، به‌ازای $|t|$ به قدر کافی کوچک ، می‌توان ادعا کرد که

$$|\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2| = \sqrt{g} - 2t\alpha H\sqrt{g} - t^2\psi,$$

که درآن ψ یک تابع کراندار از u^1 ، u^2 ، و . است ، و نیز

$$S_t = \int_\Omega\int \sqrt{g}\, du^1\, du^2 - 2t\int_\Omega\int \alpha H\sqrt{g}\, du^1\, du^2 + t^2\int_\Omega\int \psi\, du^1\, du^2.$$

این تابع فقط‌وقتی می‌تواند مینیمم خود را به‌ازای $t = 0$ بگیرد که مشتقش نسبت به t در $t = 0$ صفر باشد ؛ یعنی ، اگر

$$\int_\Omega\int \alpha H\sqrt{g}\, du^1\, du^2 = 0.$$

چون این باید به‌ازای هر α و Ω برقرار باشد ، نتیجه می‌شود که باید $H = 0$.

عکس این قضیه درحالت کلی برقرار نیست ، ولی تحت شرایطی مناسب درست خواهد بود .

امثله و تمرین

۱ . ثابت کنید یک سطح مینیمال است اگر و فقط اگر

$$g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11} = 0.$$

۲ . ثابت کنید زنجیرگون تنها سطح دواری است که یک سطح مینیمال است .

۳ . ثابت کنید تنها سطوح مینیمال خط دار مارپیچ‌گونها هستند .

۴ . هرگاه پارامترهای u^1, u^2 پارامترهای ایزومتریک روی یک سطح مینیمال از کلاس C_3 با معادلهٔ پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

باشد ، آنگاه تابع $\mathbf{r}$ در معادلهٔ لاپلاس

$$\mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{22} = 0$$

صدق می‌کند .

★ برهان . چون $g_{11} = g_{22}$ و $g_{12} = 0$ ، شرط تمرین ۱ به

$$b_{11} + b_{22} = 0$$

بدل می‌شود ، که از آنجا

$$(\mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{22})\mathbf{m} = 0.$$

از آن سو، $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = 0$ ایجاب می‌کند که $\mathbf{r}_{11}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_{12} = 0,\ \mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_{22} = 0$ ، و $\mathbf{r}_1^2 = \mathbf{r}_2^2$ ایجاب می‌کند که

$$\mathbf{r}_{11}\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_2 \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{22}\mathbf{r}_2 .$$

با گذاردن این در فرمولهای قبل، داریم

$$(\mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{22})\mathbf{r}_1 = 0 \quad \text{و} \quad (\mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{22})\mathbf{r}_2 = 0 .$$

لذا،

$$\mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{22} = 0,$$

که برهان را تمام می‌کند. ★

۵ . ثابت کنید اگر سطح $\mathscr{F}$ به معادلهٔ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

یک سطح مینیمال باشد، ناحیهٔ واقع بر سطح موازی $\mathscr{F}_\alpha$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(u^1, u^2) + \alpha\mathbf{m}(u^1, u^2), \qquad \alpha = \text{ثابت} ،$$

که نظیر قلمرو Ω در صفحهٔ پارامتری است مساحتی کوچکتر از ناحیهٔ نظیر بر $\mathscr{F}$ دارد.

۲۶ راستاهای مزدوج و خطوط مجانبی

۱.۲۶ راستاهای مزدوج

نگاشت کروی از بردارهای مماس را درنظر می‌گیریم. ماتریس این نگاشت خطی، طبق (۴.۲۵)، عبارت است از

$$\begin{pmatrix} -b_1^1 & -b_2^1 \\ -b_1^2 & -b_2^2 \end{pmatrix},$$

و دترمینان آن مساوی K است. لذا، در یک نقطهٔ بیضوی یا هذلولوی، نگاشت کروی یک تبدیل خطی نامنفرد است، هر بردار ناصفر به یک بردار ناصفر نگاشته می‌شود، و نقش کروی یک راستای مماس تعریف شده است.

در یک نقطهٔ تخت، همهٔ بردارهای $\mathbf{a}$ به 0 نگاشته می‌شوند و نقش کروی به‌ازای هر راستا تعریف نشده است.

در یک نقطهٔ سهموی که یک نقطهٔ تخت نباشد ماتریس از رتبهٔ یک است، و یک راستا وجود دارد به‌طوری که هر بردار $\mathbf{a}$ از این راستا دارای $\mathscr{S}(\mathbf{a}) = 0$ است. به‌ازای یک بردار مماس $\mathbf{v}$ از راستای دیگر، نقش کروی متعامد به $\mathbf{a}$ است. درواقع،

$$\mathbf{a}\mathscr{S}(\mathbf{v}) = -g_{ij}a^i b_k^j v^k = -b_{ik}a^i v^k = -g_{jk}b_i^j a^i v^k = \mathbf{v}\mathscr{S}(\mathbf{a}) = 0.$$

لذا ، در یک نقطهٔ سهموی ، تبدیل کروی همهٔ راستاها جز یکی را به‌راستای متعامد بر همان مستثنی شده می‌نگارد ، و نقش راستای مستثنی شده نامعین است .

راستای عمود بر نقش کروی یک راستای مفروض بر یک سطح را راستای **مزدوج** راستای داده شده می‌نامند .

از آنچه در بالا بحث شد نتیجه می‌شود که راستای مزدوج با یک راستای معلوم به‌ازای هر راستا، در یک نقطهٔ بیضوی یا هذلولوی ، و به‌ازای هر راستا جز یکی در یک نقطهٔ سهموی تعریف شده است . تا جایی که به‌راستای مستثنی شده مربوط می‌شود ، هر راستا (به انضمام راستای اصلی) را می‌توان راستای مزدوج با خود تلقی کرد . از آن سو ، راستای مستثنی شده در یک نقطهٔ سهموی راستای مزدوج هر راستای دیگر است . در نقاط تخت ، هر راستا مزدوج هر راستای دیگر است .

قضیهٔ ۱ . *راستای* $\delta u^1 : \delta u^2$ بر یک سطح مزدوج *راستای* $du^1 : du^2$ *است اگر و فقط اگر*

$$b_{ij}\, du^i\, \delta u^j = 0. \tag{۱۰۲۶}$$

برهان . نقش کروی بردار $d\mathbf{r} = du^i \mathbf{r}_i$ با راستای $du^1 : du^2$ عبارت است از $\mathscr{S}(d\mathbf{r})$. بردار $\delta\mathbf{r} = \delta u^i \mathbf{r}_i$ متعامد به $\mathscr{S}(d\mathbf{r})$ است اگر و فقط اگر

$$\delta\mathbf{r}\, \mathscr{S}(d\mathbf{r}) = 0.$$

اما

$$\delta\mathbf{r}\, \mathscr{S}(d\mathbf{r}) = g_{ij}\, \delta u^i(-b^i_k\, du^k) = -b_{ik}\, \delta u^i\, du^k = -(b_{ij}\, du^i\, \delta u^j),$$

که (۱۰۲۶) را به‌دست می‌دهد .

یک نتیجهٔ فوری این قضیه عبارت است از

نتیجهٔ ۱ . *راستای* $\delta u^1 : \delta u^2$ مزدوج $du^1 : du^2$ *است اگر و فقط اگر* $du^1 : du^2$ مزدوج $\delta u^1 : \delta u^2$ باشد .

این مطلب از تقارن ضرایب b_{ij} نتیجه می‌شود

به‌خاطر تقابل ازدواج ، می‌توان صرفاً از جفت راستاهای مزدوج سخن گفت . در حالت خاص ، در یک نقطهٔ سهموی ، جفت راستاهای مزدوج آنها و فقط آنهایی هستند که راستای استثنایی را شامل‌اند .

حال به توصیف هندسی ازدواج می‌پردازیم . منحنی $\mathscr{C}$ به معادلهٔ

$$u^i = u^i(t)$$

بر سطح $\mathscr{F}$ به معادلهٔ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2),$$

و سطح گستردنی مماس‌بر $\mathscr{F}$ درامتداد $\mathscr{C}$ را درنظر می‌گیریم (ر.ک. زیر بخش ۱۰۲۳) .

قضیهٔ ۲ . ***راستاهای مولدهای مستقیم الخط سطح گستردنی مماس بر $\mathscr{F}$ درامتداد $\mathscr{C}$ باراستای منحنی $\mathscr{C}$ در هر نقطه از منحنی مزدوج است .***

برهان . سطح گستردنی مورد نظر پوش خانوادهٔ یک پارامتری از صفحات

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))]\mathbf{m}(u^1(t), u^2(t)) = 0$$

به پارامتر t است . اگر مشتق درراستای منحنی را با d نشان دهیم ، معلوم می‌شود که مشخص خانواده‌ای که از نقطهٔ ثابت دلخواه P می‌گذرد در دستگاه معادلات

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\mathbf{m} = 0,$$

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\, d\mathbf{m} = 0$$

صدق مـی‌کند . درنتیجه ، طبق نتایج ۲۰۱۳ ، دارای‌راستای بردار $d\mathbf{m} \times \mathbf{m}$ است (به یاد بیـاورید کـه $\mathbf{m}\, d\mathbf{r} = 0$) . نقش کـروی بردار مماس بر منحنی $d\mathbf{r}$ عبارت است از $\mathscr{S}(d\mathbf{r}) = d\mathbf{m}$. چون

$$(d\mathbf{m} \times \mathbf{m})\mathscr{S}(d\mathbf{r}) = d\mathbf{m}\, \mathbf{m}\, d\mathbf{m} = 0,$$

راستای‌مشخص خانوادهٔ صفحات (یا مولدسطح گستردنی‌مماسی) به $\mathscr{S}(d\mathbf{r})$ متعامدبوده ، و حکم ثابت می‌باشد .

این خاصیت‌راستاهای مزدوج اغلب به عنوان تعریف به‌کار می‌رود .

حال نتیجهٔ سادهٔ زیر از قضیهٔ ۱ را ذکر می‌کنیم .

نتیجهٔ ۲ . ***منحنیهای‌مختصات‌در P راستاهای مزدوج‌دارنداگروفقط‌اگردر P ،*** $b_{12} = 0$.

امثله و تمرین

۱ . برای تکمیل محاسبات این بخش، ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} = K.$$

۲ . ثابت کنید راستاهای نصف النهارات و دوایر عرض جغرافیایی یک سطح دوار در نقاط مشترکشان مزدوجند .

۳ . ثابت کنید راستای هر خط جاری یک سطح گستردنی با هر راستا روی سطح در هر نقطه از خط جاری مزدوج است .

۴ . ثابت کنید که اگر هر جفت راستای مزدوج در نقطهٔ P متعامد باشند، نقطهٔ P یک نقطهٔ نافی است .

۵ . راستاهای مزدوج راستای یک خط جاری مارپیچ گون را در نقطهٔ خط جاری بیابید .

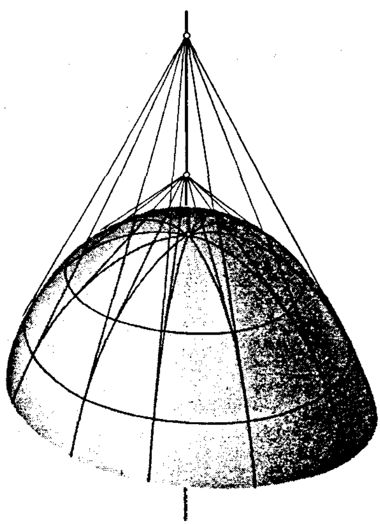
۶ . همین مسئله را برای یک سطح خط دار ناگستردنی دلخواه حل کنید .

۲۰۲۶ تورهای مزدوج

یک تور مرکب از دو خانواده از منحنیها ، هریک وابسته به یک پارامتر ، را یک **تور مزدوج** نامند اگر در هر نقطه راستاهای منحنیهای متعلق به دو خانواده مزدوج باشند .

از تعریف تورهای مزدوج و نتیجهٔ بخش پیش فورا " قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید .

قضیه . *تور خطوط مختصات روی سطح یک تور مزدوج است اگر و فقط اگر در هر نقطهٔ* (u^1, u^2)



شکل ۱۰۲۶

$$b_{12}(u^1, u^2) = 0. \qquad (۲۰۲۶)$$

با استفاده‌از قضیهٔ ۲ زیربخش پیش، ساختن هندسی زیر برای تورهای مزدوج روی یک سطح به‌دست می‌آید (شکل ۱۰۲۶) :

خط مستقیم دلخواه l را درفضا اختیار می‌کنیم. فرض‌کنیم یک خانواده ازمنحنیها از مقاطع عرضی سطح با صفحات ماربر این خط، و خانوادهٔ دیگراز منحنیهای تماس سطح با سطوح مخروطی مماس که رئوسشان بر خط l واقعند تشکیل شده باشد. تور حاصل به‌این طریق واقعاً " یک تور مزدوج است، زیرا مماسهای وارد بر مقاطع عرضی سطح به‌وسیلهٔ صفحات خطوط‌جاری سطح مخروطی نظیر می‌باشند.

امثله و تمرین

۱ . ثابت کنید خطوط مختصات روی سطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}(u^1) + \mathbf{v}(u^2),$$

که در آن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ توابع برداریی‌ازکلاس C_2 و از یک متغیرند، یک تورمزدوج تشکیل می‌دهند.

۲ . بر مخروط‌گون $x = u^1\phi(u^2), y = u^1\psi(u^2), z = u^2$ ، منحنیهایی بیابید که با مسیرهای قائم خطوط‌جاری یک تور مزدوج تشکیل دهند.

حل. با محاسبهٔ اولین فرم اساسی، معلوم می‌شود که

$$g_{11} = [\phi(u^2)]^2 + [\psi(u^2)]^2$$
$$g_{12} = u^1[\phi(u^2)\phi'(u^2) + \psi(u^2)\psi'(u^2)]$$
$$g_{22} = (u^1)^2([\phi'(u^2)]^2 + [\psi'(u^2)]^2) + 1.$$

چون خطوط‌جاری به معادلات ثابت = u^2 اند، می‌توان برای آنها‌راستاهای $\delta u^1 = 1, \delta u^2 = 0$ اختیار کرد و، طبق تمرین ۱ ، ۵۰۱۶ ، معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای قائم زیر را خواهیم داشت :

$$g_{11}\, du^1 + g_{12}\, du^2 = 0$$

یا

$$([\phi(u^2)]^2 + [\psi(u^2)]^2)\, du^1 + u^1[\phi(u^2)\phi'(u^2) + \psi(u^2)\psi'(u^2)]\, du^2 = 0.$$

لذا، می‌توان برای‌راستای‌مسیرهای قائم قرارداد

$$du^1 = u^1[\phi(u^2)\phi'(u^2) + \psi(u^2)\psi'(u^2)]$$
$$du^2 = -([\phi(u^2)]^2 + [\psi(u^2)]^2).$$

اما ضرایب دومین فرم اساسی عبارتند از

$$b_{11} = 0, \qquad b_{12} = [\phi'(u^2)\psi(u^2) - \phi(u^2)\psi'(u^2)]g^{-1/2}$$
$$b_{22} = u^1[\phi''(u^2)\psi(u^2) - \phi(u^2)\psi''(u^2)]g^{-1/2} \ ;$$

درنتیجه ،راستای مزدوج $\delta u^1:\delta u^2$ به $du^1:du^2$ در معادلهٔ

$$(\phi'\psi - \phi\psi')(du^1\,\delta u^2 - du^2\,\delta u^1) + u^1(\phi''\psi - \phi\psi'')\,du^2\,\delta u^2 = 0$$

صدق می‌کند . با گذاردن مقادیر فوق و حذف شناسهٔ u^2 و توجه به اینکه ϕ و ψ توابعی از u^2 اند ، داریم

$$(\phi'\psi - \phi\psi')u^1(\phi\phi' + \psi\psi')\,\delta u^2 - (\phi^1\psi - \phi\psi^1)(\phi^2 + \psi^2)\,\delta u^1$$
$$- u^1(\phi''\psi - \phi\psi'')(\phi^2 + \psi^2)\delta u^2 = 0$$

یا

$$u^1[(\phi'\psi - \phi\psi')(\phi\phi' + \psi\psi') - (\phi''\psi - \phi\psi'')(\phi^2 - \psi^2)]\,\delta u^2$$
$$-(\phi^1\psi - \phi\psi^1)(\phi^2 + \psi^2)\delta u^1 = 0.$$

دیگر آنکه ، داریم

$$\frac{\phi\phi' + \psi\psi'}{\phi^2 + \psi^2}\,\delta u^2 - \frac{\phi''\psi - \phi\psi''}{\phi'\psi - \phi\psi'}\,\delta u^2 - \frac{\delta u^1}{u^1} = 0,$$

که معادلهٔ دیفرانسیل خانوادهٔ مورد سوال است . با انتگرالگیری ، به‌دست می‌آوریم

$$\tfrac{1}{2}\ln(\phi^2 + \psi^2) - \ln(\phi'\psi - \phi\psi') - \ln u^1 = \ln C$$

یا

$$\frac{\sqrt{[\phi(u^2)]^2 + [\psi(u^2)]^2}}{\phi'(u^2)\psi(u^2) - \phi(u^2)\psi'(u^2)} = cu^1,$$

که در آن c پارامتر خانواده است . محاسبات را با یافتن ضرایب فرمهای اساسی کامل کنید .

۳ . نصف‌النهارات و دوایر عرض جغرافیایی یک سطح دوار یک تور مزدوج تشکیل می‌دهند . توجه کنید که این تور به طریقهٔ توصیف شده در این بخش با انتخاب محور دوران به‌عنوان خط زمینهٔ l در ساختن به‌دست می‌آید .

۴ . ساختن توصیف شده را ، با استفاده از یک مماس بر کره به‌عنوان خط l ، انجام می‌دهیم . منحنیهایی که تور مزدوج در این حالت را می‌سازند چیستند ؟

۵ . ثابت کنید منحنیهای ثابت $= x$ و منحنیهای ثابت $= y$ یک تور مزدوج بر سطح

$$z = ax^2 + by^2$$

می‌سازند .

۶ . بر بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

منحنیهایی را بیابید که با بیضیهای ثابت = y یک تور مزدوج تشکیل‌دهند .

۷ . ثابت کنید منحنیهای مختصات روی بیضی‌گون

$$x = a\cos u^1 \cos u^2, \qquad y = b\cos u^1 \sin u^2, \qquad z = c\sin u^1$$

یک تور مزدوج می‌سازند .

۳۰۲۶ راستاهای مجانبی

هر راستای خود مزدوج روی سطح یک *راستای مجانبی* نامیده می‌شود .

بنابراین ، راستای استثنایی در یک نقطهٔ سهموی (که به‌ازای آن $\mathscr{S}(d\mathbf{r}) = 0$ ، و راستای مزدوج دلخواه است) یک‌راستای مجانبی نیز هست .

از قضیهٔ بخش قبل فوراً نتیجه می‌شود که *راستای* $du^1 : du^2$ *یک راستای مجانبی است اگر و فقط اگر*

$$b_{ij}\, du^i\, du^j = 0. \qquad (۳۰۲۶)$$

از مقایسهٔ این با قضایای ۱۰۲۵ و ۲۰۲۵ ، می‌توان گفت که

۱ . یک راستا روی سطح مجانبی است اگر و فقط اگر انحنای قائم در این راستا صفر باشد .

۲ . یک راستا در P روی سطح مجانبی است اگر و فقط اگر صفحهٔ بوسان در P از هر منحنی با این راستا در P که روی سطح بوده و در P انحنای ناصفر داشته باشد بر سطح در P مماس باشد .

قضیه . ***در یک نقطهٔ هذلولوی سطح دو راستای مجانبی حقیقی متمایز وجود دارند ؛ در یک نقطهٔ سهموی که نقطهٔ تخت نباشد یک راستای مجانبی حقیقی وجود دارد ؛ در یک نقطهٔ بیضوی هیچ راستای مجانبی وجود ندارد ؛ در یک نقطهٔ تخت هر راستا مجانبی می‌باشد .***

برهان . این نتیجهٔ فوری معادلهٔ (۳۰۲۶) است ، که معادله‌ای است درجهٔ دو نسبت به $du^1 : du^2$. به شرط صفر نبودن همهٔ ضرایب ، دو جواب حقیقی داریم اگر $b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$ ، یک جواب اگر $b = 0$ ، و هیچ جواب حقیقی اگر $b > 0$. در حالت نقطهٔ تخت ، $b_{ij} = 0$ و (۳۰۲۶) به‌صورت اتحاد درمی‌آید .

نتیجهٔ زیر حاصلی است از (۳۰۲۶) .

نتیجه. منحنی مختص u^1 (یعنی، ثابت = u^2) در P راستای مجانبی دارد اگر و فقط اگر در این نقطه

$$b_{11} = 0. \tag{۴.۲۶}$$

به‌همین نحو، خط u^2 دارای راستای مجانبی است اگر و فقط اگر

$$b_{22} = 0. \tag{۴.۲۶'}$$

برهان. درواقع، خط u^1 دارای راستای معین شده به وسیلهٔ دیفرانسیلهای $du^1 = 1,\ du^2 = 0$ است، که‌پس ازگذاردن در (۳.۲۶) رابطهٔ (۴.۲۶) نتیجه می‌شود. برای خط دیگر داریم $du^1 = 0,\ du^2 = 1$ ، و (۴.۲۶') به‌دست می‌آید.

امثله و تمرین

۱. ثابت کنید راستاهای مجانبی بر سطح $F(x, y, z) = 0$ به وسیلهٔ معادلات زیر معین می‌شوند:

$$\begin{gathered} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = 0, \\ F_{xx}\,dx^2 + F_{yy}\,dy^2 + F_{zz}\,dz^2 + 2F_{xy}\,dx\,dy + 2F_{xz}\,dx\,dz + 2F_{yz}\,dy\,dz = 0, \end{gathered} \tag{۵.۲۶}$$

یا، خلاصه‌تر، $dF = 0, d^2F = 0$.

۲. ثابت کنیدراستای مجانبی کره نمای (۱۲.۱۱) در معادلهٔ

$$(du^1)^2 - \sin^2 u^1\, du^2 = 0$$

صدق می‌کند.

۳. راستاهای مجانبی روی زنجیرگون (۱۱.۱۱) را بیابید.

۴. ثابت کنید راستاهای مجانبی بر یک سطح دوار نسبت به نصف‌النهار متقارن‌اند.

۴.۲۶ خطوط مجانبی

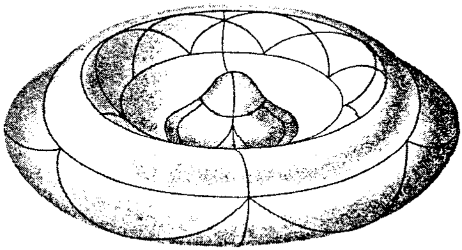
یک منحنی بر یک سطح که در هر نقطه‌راستای مجانبی داشته باشد یک **خط مجانبی** نام دارد.

لذا، معادلات خطوط مجانبی جوابهای معادلهٔ (۳.۲۶) راستاهای مجانبی است که به‌عنوان معادلهٔ دیفرانسیل با متغیرهای u^1, u^2 گرفته شده باشد. با استفاده از قضایای مناسب از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید.

قضیه. از هر نقطهٔ هذلولوی یک سطح از کلاس C_3 دو خط مجانبی می‌گذرد. هیچ خط

مجانبی از یک نقطهٔ بیضوی نمی‌گذرد . یک خط سهموی ، یعنی خطی مرکب از نقاط سهموی ، که یک قلمرو با انحنای گاوسی مثبت را از یک قلمرو با انحنای گاوسی منفی جدا می‌کند خود می‌تواند یک خط مجانبی باشد ؛ و در این صورت ، خطوط واقع در قلمرو با انحنای منفی به خط سهمویی نزدیک شوند که بر آن مماس است (در این صورت ، خط سهموی یک جواب منفرد (۳۰۲۶) است) ، یا ممکن است یک خط مجانبی نباشد ، که در این صورت ، مجموعهٔ نقاط بازگشت خطوط مجانبی است که در قلمرو با انحنای گاوسی منفی قرار دارند .

وضع با سطح دوار حاصل از دوران سینوس گون $z = \cos x$ حول محور z (در شکل ۲۰۲۶) توضیح داده شده است . بخشهای $\frac{1}{2}\pi > x > 0$ و $\frac{3}{2}\pi > x > \pi$ از سینوس گون



شکل ۲۰۲۶

قلمروهایی با انحنای گاوسی مثبت را تولید می‌کنند ؛ بخش $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ قلمرو با انحنای گاوسی منفی را تولید می‌کند . منحنیهای $x = \frac{1}{2}\pi, x = \frac{3}{2}\pi$ خطوط مجانبی نیستند ، زیرا در صفحه‌ای واقعند که بر سطح مماس نیست ؛ و لذا ، راستای منحنی یک راستای مجانبی نمی‌باشد . منحنی $x = \pi$ یک خط مجانبی است .

امثله وتمرین

۱ . یک خط مستقیم بر یک سطح همواره یک خط مجانبی است . زیرا داریم $\kappa = 0$ ؛ و درنتیجه ، $k_n = 0$.

۲ . همانطور که قبلا" دیدیم (مثال ۳ ، ۱۰۲۵) ، مارپیچ واقع بر یک مارپیچ‌گون یک خط مجانبی است .

۳ . ثابت کنید هر منحنی که یک خط مجانبی و یک خط ژئودزیک یک سطح است باید خطی مستقیم باشد .

۴ . ثابت کنید خطوط مجانبی کره‌نمای (۱۲۰۱۱) عبارتند از

$$u^2 - c = \pm \ln \tan (u^1/2).$$

نشان دهید که، وقتی $u^1 \to \infty$ ، خط مجانبی بی‌نهایت بار حول محور کره‌نما می‌چرخد، وراستای مماس بر خط مجانبی به راستای محور میل می‌نماید.

۵ . خطوط مجانبی سطح

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = u + v$$

را بیابید. این یک سطح خط‌دار شبیه یک مارپیچ گون است، ولی خطوط جاری بر محور عمود نیستند (این خطوط زاویهٔ $45°$ می‌سازند).

۶ . خطوط مجانبی سطح

$$z = \frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4}$$

را بیابید. ثابت کنید این خطوط بر استوانه‌های

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{ثابت} \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \text{ثابت}$$

قرار دارند.

۷ . خطوط مجانبی چنبره را بیابید. چه وقت خطوط مجانبی بسته‌اند؟

۸ . خطوط مجانبی سطح

$$z = (y/x) \ln x$$

را یافته، و ثابت کنید این خطوط از یک خانواده خطوطی مستقیم‌اند.

۹ . در نقطهٔ هذلولوی P از سطح، فصل مشترک سطح با صفحهٔ مماس بر سطح در P را درنظر بگیرید. این فصل مشترک موضعا " از دو شاخه تشکیل شده است، هرکدام یک راستای مجانبی ولذا مماس به یکی از خطوط مجانبی ماربر P . ثابت کنید، روی یک سطح ازکلاس C_3 ، انحنای خط مجانب در P ، $\frac{2}{3}$ ضربدر انحنای شاخهٔ مماس این بخش است. (این مطلب را اول بار بلترامی[1] ثابت کرد).

راهنمایی. P را مبداء و صفحهٔ مماس را صفحهٔ xy یک دستگاه مختصات درفضا گرفته، و سطح را موضعا " به شکل $f(x, y) = 0$ نمایش دهید.

۱۰ . یک منحنی در فضا داده شده است. هر نقطه از این منحنی را با خطی مستقیم به مرکز کرهٔ بوسان در این نقطه وصل کنید. این خطوط یک سطح خط‌دار تشکیل می‌دهند. ثابت کنید مکان هندسی مراکز کرات بوسان یک خط مجانبی بر این سطح است. برای

---

1. Beltrami

جلوگیری از تباهی سطح یا منحنی چه فرضهایی باید کرد؟

۵۰۲۶ مختصات مجانبی

مختصات منحنی الخط بریک سطح به‌طوری‌که منحنیهای مختصات خطوط مجانبی سطح‌باشند **مختصات مجانبی** نامیده می‌شوند.

قضیه. *در همسایگی به‌قدرکافی کوچک یک نقطهٔ هذلولوی از یک سطح از کلاس C_3 می‌توان مختصات مجانبی معرفی کرد. مختصات منحنی الخط (u^1, u^2) مختصات مجانبی‌اند اگر و فقط‌اگر دومین فرم اساسی به شکل*

$$\mathrm{II} = 2b_{12}(u^1, u^2)\, du^1\, du^2 \tag{۶۰۲۶}$$

باشد.

برهان. دستگاه مختصات موضعی دلخواه v^1, v^2 را درنظر گرفته، و فرض می‌کنیم نقطهٔ P_0 به مختصات (v_0^1, v_0^2) یک نقطهٔ هذلولوی باشد. دراین صورت، در همسایگی P_0 ، مبین دومین فرم اساسی منفی است، و دومین فرم اساسی خود می‌تواند به حاصل ضربی از دو عامل خطی تجزیه شود:

$$\mathrm{II} = b_{ij}\, dv^i\, dv^j = (\alpha\, dv^1 + \beta\, dv^2)(\gamma\, dv^1 - \delta\, dv^2), \tag{۷۰۲۶}$$

که درآن $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ تابع (v^1, v^2) بوده و $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. با تقلیل همسایگی، درصورت لزوم، می‌توان عاملهای انتگرالگیری $\lambda(v^1, v^2)$ و $\mu(v^1, v^2)$ برای این دو فرم خطی و دوتابع $\phi^1(v^1, v^2)$ و $\phi^2(v^1, v^2)$ را یافت به‌طوری که

$$\lambda(\alpha\, dv^1 + \beta\, dv^2) = d\phi^1, \qquad \mu(\gamma\, dv^1 + \phi\, dv^2) = d\phi^2. \tag{۸۰۲۶}$$

حال مختصات منحنی الخط u^1, u^2 را با فرمولهای

$$u^1 = \phi^1(v^1, v^2), \qquad u^2 = \phi^2(v^1, v^2)$$

معرفی می‌کنیم. ژاکوبی تبدیل

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(v^1, v^2)} = \lambda\mu \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

در P_0 مخالف صفر است؛ و درنتیجه، u^1, u^2 می‌توانند مختصات منحنی الخط منتظمی در همسایگی P_0 باشند.

از رابطهٔ (۷۰۲۶) فوراً نتیجه می‌شود که، در مختصات جدید، دومین فرم‌اساسی عبارت است از

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\lambda\mu} du^1\, du^2;$$

لذا ،به‌شکل (۶۰۲۶) می‌باشد . اما این‌ایجاب می‌کند که ، طبق نتیجهٔ زیر بخش ۳۰۲۶ ، u^1 ــ خطوط و u^2 ــ خطوط خطوطی مجانبی باشند .

تمرین

۱ . ثابت کنید هرگاه یک خط مجانبی از یک سطح خطی مستقیم نباشد ، آنگاه تاب خط مساوی $\pm\sqrt{-K}$ است ،که در آن K انحنای گاوسی در نقطهٔ مفروض است . تابهای دو خط مجانبی ماربر یک نقطه در این نقطه مختلف العلامه‌اند .

راهنمایی . از مختصات مجانبی در همسایگی نقطهٔ مورد نظر استفاده کنید .

۲ . ثابت کنید هرگاه خطوط مجانبی یک سطح در زاویه‌ای ثابت هم را قطع کنند ،آنگاه انحنای گاوسی با مربع انحنای میانگین متناسب است .

۳ . برای انحنای میانگین و انحنای گاوسی در مختصات مجانبی فرمولهایی بیابید .

۴ . از تمرینهای دو زیر بخش پیش کدامها را می‌توان در مختصات مجانبی آسانتر حل کــرد ؟

۲۷ راستاهای اصلی و انحناهای اصلی

۱۰۲۷ راستاهای اصلی

راستای یک بردار مماس در نقطهٔ P از یک سطح که با نقش کروی آن همخط باشد یک *راستای اصلی* در P نام دارد .

از اینرو ، بردار مماس $\mathbf{a}$ دارای راستای اصلی است اگر و فقط اگر

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) \times \mathbf{a} = 0. \qquad (۱۰۲۷)$$

بالاخص ، بــرای راستای $du^1 : du^2$ می‌توان $\mathbf{a} = du^i\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}$ را اختیــار کرد و شرط (۱۰۲۷) خواهد شد

$$\mathscr{S}(d\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = d\mathbf{m} \times d\mathbf{r} = 0. \qquad (۲۰۲۷)$$

قضیه . *راستای اصلی $du^1 : du^2$ در معادلهٔ درجهٔ دو زیر صدق می‌کند :*

$$b^1_2(du^2)^2 + (b^1_1 - b^2_2)\, du^1\, du^2 - b^2_1(du^1)^2 = 0. \qquad (۳۰۲۷)$$

دریک نقطــهٔ نافی ، هر راستا یک راستای اصلی است ؛ دریک نقطهٔ غیر نافی ، درست دو راستای اصلی متمایز وجود دارند .

برهان. با بیان شرط لازم و کافی (۲۰۲۷) برحسب مولفه‌های بردار، داریم

$$\begin{vmatrix} b_j^1\, du^j & du^1 \\ b_j^2\, du^j & du^2 \end{vmatrix} = 0,$$

که با (۳۰۲۷) معادل است.

این حکم که هر راستا در یک نقطهٔ نافی یک‌راستای‌اصلی است‌فورا" از قضیهٔ ۲ در زیربخش ۷۰۲۵ نتیجه می‌شود.

مبین فرم درجهٔ‌دوم سمت چپ معادلهٔ (۳۰۲۷) مساوی است با

$$-4b_2^1b_1^2 - (b_1^1 - b_2^2)^2 = -4(b_2^1b_1^2 - b_1^1b_2^2) - (b_1^1 + b_2^2)^2 = 4(K - H^2) \leq 0.$$

بنابر (۱۴۰۲۵)، این در نقاط غیر نافی یک عدد منفی است. درنتیجه، فرم درجهٔ‌دوم (۳۰۲۷) تجزیهٔ زیر را می‌پذیرد:

$$b_1^1(du^2)^2 + (b_1^1 - b_2^2)\, du^1\, du^2 - b_1^2(du^1)^2 = (\alpha\, du^1 + \beta\, du^2)(\alpha^*\, du^1 + \beta^*\, du^2),$$

که درآن دو عامل فرمهایی خطی و حقیقی و مستقل خطی‌اند. لذا، معادلهٔ (۳۰۲۷) دو جواب متمایز دارد: $du^1 : du^2 = -\beta/\alpha$ و $du^1 : du^2 = -\beta^*/\alpha^*$ که‌راستاهای اصلی را معین می‌کنند. همانطور که بعدا" ثابت می‌شود، این دو راستا متعامدند.

امثله و تمرین

۱. تحقیق کنید که معادلهٔ (۳۰۲۷) را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1\, du^2 & (du^1)^2 \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

۲. نشان دهید که اگر سطح به‌معادلهٔ $z = f(x, y)$ باشد، معادلهٔ‌راستاهای اصلی عبارت است از

$$[pqr - (1 + p^2)s]\, dx^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\, dx\, dy + [(1 + q^2)s - pqt]\, dy^2 = 0,$$

که در آن

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

۳. ثابت‌کنیدراستاهای‌نصف‌النهارات و دوایر عرض جغرافیایی یک‌سطح دوار راستاهای اصلی می‌باشند.

۴. ثابت کنیدراستاهای اصلی بر مارپیچ گون (۱۳۰۱۱) در نقطهٔ معلوم (u^1, u^2) زاویهٔ

بین خط جاری و مارپیچ ثابت = u^1 را نصف می‌کنند .

۵ . ثابت کنیدراستای یک خط جاری یک سطح گستردنی همیشه یک‌راستای اصلی است .

۶ . به‌طورکلی ، ثابت کنید یک‌راستای مجانبی در P یک راستای اصلی است اگر و فقط اگر P یک نقطهٔ سهموی باشد .

۲۰۲۷ انحناهای اصلی

انحناهای قائم راستاهای اصلی یک سطح در یک نقطه *انحناهای اصلی* نام دارند . از اینرو، در یک نقطهٔ غیر نافی دوانحنای اصلی وجود دارند ، هریک مربوط‌به یکی از راستاهای اصلی .

قضیهٔ ۱ (ردریگوز[1]) . *بردار* a *از یک‌راستای اصلی و انحنای اصلی نظیر* k *در معادلهٔ*

$$\mathscr{S}(\mathbf{a}) = -k\mathbf{a} \qquad (۴۰۲۷)$$

صدق می‌کند . بعکس، (۴۰۲۷) شرطی کافی است برای آنکه a *یک بردار از راستای اصلی و* k *انحنای اصلی مربوط‌به این راستا باشد .*

برهان. شرط (۱۰۲۷) معادل وجود ضریبی مانند k است به‌طوری که (۴۰۲۷) برقرار باشد . با ضرب اسکالر (۴۰۲۷) در **a** ، به‌دست می‌آوریم

$$k = -\frac{\mathscr{S}(\mathbf{a})\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2},$$

که ، طبق (۶۰۲۵) ، یعنی k انحنای قائم برای راستای **a** است ، و قضیه ثابت می‌شود .

با جایگذاری $\mathbf{a} = d\mathbf{r}$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\mathscr{S}(d\mathbf{r}) = d\mathbf{m} = -k\, d\mathbf{r} \qquad (۵۰۲۷)$$

یا

$$b^i_j\, du^j = k\, du^i$$

یا ، بالاخره ،

$$(b^i_j - \delta^i_j k)\, du^j = 0. \qquad (۶۰۲۷)$$

رابطهٔ دوم را می‌توان دستگاهی از معادلات خطی گرفت که راستای اصلی $du^1 : du^2$

1. Rodrigues

را معین می‌کند ، مشروط بر اینکه k انحنای اصلی نظیر باشد . چون این دستگاه‌جوابهای ناصفری نسبت بـه du^1 و du^2 دارد (زیرا راستاهای اصلی همیشه وجود دارند) ، باید داشته باشیم

$$\begin{vmatrix} b_1^1 - k & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 - k \end{vmatrix} = 0$$

یا

$$k^2 - (b_1^1 + b_2^2)k + b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 = 0$$

یا ، بالاخره ،

(۷۰۲۷) $$k^2 - 2Hk + K = 0.$$

لذا ، دو انحنای‌اصلی k_1, k_2 جوابهای معـادلهٔ درجـهٔ دو (۷۰۲۷) اند . طبق (۱۴۰۲۵) ، این معادلهٔ درجهٔ دو دو جواب حقیقی متمایز در یک نقطهٔ غیر نافی ، و دو جواب منطبق بـر هـم در یک نقطهٔ نافی دارد . معادلات (۶۰۲۷) و (۷۰۲۷) به‌ما راه دیگری‌برای یافتن‌راستاهای اصلی می‌دهد . ابتدا ، با حل معادلهٔ (۷۰۲۷) ، انحناهای اصلی را پیدا می‌کنیم ؛ سپس ، باگذاردن یکی از انحناهای اصلی به‌جای k در (۶۰۲۷) ، راستای اصلی‌نظیر را به‌عنوان یک جواب دستگاه معادلات خطی می‌یابیم .

با استفاده از خواص معلوم جوابهای معادلات درجهٔ دو ، قضیهٔ زیر فوراً به‌دست می‌آید .

قضیهٔ ۲ . ***انحناهای اصلی یـک‌سطح در یک نقطهٔ نافی برابر ، و در سایر نقاط متمایز هستنــد .***

میانگین حسابی انحنـاهای اصلی در نقطهٔ P از یک سطح مساوی انحنای میانگین سطح در آن نقطه است :

(۸۰۲۷) $$k_1 + k_2 = 2H.$$

حاصل‌ضرب انحناهای اصلی مساوی انحنای گاوسی سطح است :

(۹۰۲۷) $$k_1 k_2 = K.$$

فرمولهای (۸۰۲۷) و (۹۰۲۷) اغلب به‌عنوان تعاریف انحنای میانگین و انحنای گاوسی سطح به‌کار می‌روند .

امثله و تمرین

۱ . معادلهٔ (۶۰۲۷) معادل است با

$$(b_{ij} - kg_{ij})\, du^j = 0. \tag{۱۰.۲۷}$$

۲. انحناهای اصلی سطح گستردنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{t}(u^1)$$

را با این فرض که u^1 پارامتر طبیعی منحنی $\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1)$ است بیابید.

[حل. همانطور که می‌دانیم، دراین حالت داریم

$$\mathbf{m} = \varepsilon\mathbf{b},$$

که در آن $\mathbf{b}$ بردار قائم دوم منحنی است، و $\varepsilon = -\operatorname{sgn} u^2$. بعلاوه،

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{t} + u^2\kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{t}, \qquad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -u^2\kappa\mathbf{b}\cdot$$

و

$$\mathbf{m}_1 = -\varepsilon\tau\mathbf{n}, \qquad \mathbf{m}_2 = 0.$$

درنتیجه،

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2 = -\varepsilon\tau\mathbf{n} \times \mathbf{t} = \varepsilon\tau\mathbf{b} = -\frac{\varepsilon\tau}{u^2\kappa}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2.$$

اما

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{m}_2 = -2H\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2.$$

بنابراین،

$$H = \frac{\varepsilon\tau}{2u^2\kappa} = -\frac{\tau}{2|u^2|\kappa}.$$

همچنین، داریم $K = 0$. لذا، انحناهای اصلی در معادلهٔ

$$k^2 + \frac{\tau}{|u^2|\kappa}k = 0$$

صدق می‌کنند؛ $k_1 = 0, k_2 = -\tau/(|u^2|\kappa)$.]

ثابت کنید انحنای اصلی $k_1 = 0$ به‌راستای خط جاری سطح مربوط است.

۳. انحناهای اصلی سطح

$$x = \cos u^1 - (u^1 + u^2)\sin u^2, \qquad y = \sin u^1 + (u^1 + u^2)\cos u^2, \qquad z = u^1 + 2u^2$$

را بیابید.

۴. انحنای گاوسی و انحنای میانگین سطح

$$x = u^1\cos u^2, \qquad y = u^1 \sin u^2, \qquad z = u^1 + u^2$$

را بیابید.

۵. ثابت کنید قدر مطلق یکی از انحناهای اصلی یک سطح دوار در نقطهٔ P مساوی انحنای نصف النهار در P است، درحالی که قدر مطلق دیگری مساوی عکس تصویر

پاره خط واصل بین P و تصویرش روی محور دوران بر قائم به سطح در P می‌باشد. اگر تحدب نصف‌النهار در P از محور دور شود، هردو انحنای اصلی متحدالعلامه‌اند؛ درغیراین‌صورت، مختلف العلامه می‌باشند.

۶. انحناهای اصلی زنجیرگون (۱۱۰۱۱) را بیابید.

۷. انحناهای گاوسی و میانگین سطح

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3, \qquad y = v^3 - 3v - 3u^2v, \qquad z = 3(u^2 + v^2)$$

را بیابید.

۳۰۲۷ تعامد راستاهای اصلی

قضیهٔ ۱. *در یک نقطهٔ غیر نافی راستاهای اصلی متعامدند.*

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم راستای u^2 ــ منحنی یک‌راستای‌اصلی نباشد. پس، برای هر دوراستای اصلی، $du^1 \neq 0$؛ درنتیجه، $b_2^1 \neq 0$، و معادلهٔ (۳۰۲۷) را می‌توان به

$$b_2^1\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 + (b_1^1 - b_2^2)\frac{du^2}{du^1} - b_1^2 = 0$$

تبدیل کرد. برای یک راستای اصلی دیفرانسیلها را با du^1, du^2، و برای‌راستای‌دیگر با $\delta u^1, \delta u^2$ نشان‌می‌دهیم. دراین‌صورت، نسبتهای du^2/du^1 و $\delta u^2/\delta u^1$ ریشه‌های‌این‌معادله‌اند، و داریم

$$\frac{du^2}{du^1} + \frac{\delta u^2}{\delta u^1} = \frac{b_2^2 - b_1^1}{b_2^1}$$

و

$$\frac{du^2}{du^1}\frac{\delta u^2}{\delta u^1} = -\frac{b_1^2}{b_2^1},$$

که معادلات زیر را نتیجه می‌دهند:

$$b_2^1(\delta u^1\, du^2 + du^1\, \delta u^2) = (b_2^2 - b_1^1)\, du^1\, \delta u^1 \qquad (۱۱۰۲۷)$$

و

$$b_2^1\, du^2\, \delta u^2 = -b_1^2\, du^1\, \delta u^1. \qquad (۱۲۰۲۷)$$

از اینرو،

$$\begin{aligned} b_2^1(g_{ij}\, du^i\, \delta u^j) &= b_2^1[g_{11}\, du^1\, \delta u^1 + g_{12}(du^1\, \delta u^2 + \delta u^1\, du^2) + g_{22}\, du^2\, \delta u^2] \\ &= [g_{11}b_2^1 + g_{12}(b_2^2 - b_1^1) - g_{22}b_1^2]\, du^1\, \delta u^1 \\ &= (b_{12} - b_{21})\, du^1\, \delta u^1 = 0. \end{aligned}$$

لذا ، دراین‌حالت ، دو راستای اصلی متعامدند. اکنون حالتی را که u^2 ـ منحنی یک راستای اصلی است درنظر می‌گیریم . دراین صورت ، راستای $du^1 = 0, du^2 = 1$ باید در معادلهٔ راستاهای اصلی (۳۰۲۷) صدق کند . درنتیجه ، $b_2^1 = 0$ و $\delta u^1, \delta u^2$ در معادلهٔ

$$(b_1^1 - b_2^2)\,\delta u^2 - b_1^2\,\delta u^1 = 0$$

صدق می‌کند . با فرض $\delta u^1 = b_1^1 - b_2^2$ ، داریم $\delta u^2 = b_1^2$ ، و

$$g_{ij}\,du^i\,\delta u^j = g_{21}(b_1^1 - b_2^2) + g_{22}b_1^2 = -g_{11}b_2^1 + g_{21}(b_1^1 - b_2^2) + g_{22}b_1^2,$$

زیرادراینجا $b_2^1 = 0$. اما عبارت اخیر مساوی است با $-b_{12} + b_{21} = 0$. لذا ، راستاهای اصلی دراین‌حالت نیز متعامد می‌باشند .

تعامدراستاهای‌اصلی ایجاب می‌کند که‌راستاهای اصلی مزدوج باشند . درواقع ، طبق تعریف ، نقش‌کروی راستای‌اصلی‌خوداین‌راستای‌اصلی است. لذا، به‌راستای‌دیگرمتعامد می‌باشد.

قضیهٔ ۲ . ***دو منحنی مختصات در یک نقطهٔ غیر نافی راستاهای اصلی‌اند اگر و فقط اگر در P داشته باشیم***

$$g_{12} = b_{12} = 0, \qquad b_{11} = k_1 g_{11}, \qquad b_{22} = k_2 g_{22}.$$

برهان . رابطهٔ $g_{12} = 0$ از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود ؛ طبق نتیجهٔ ۱۰۲۶ ومزدوج بودن راستاهای اصلی ، $b_{12} = 0$. پس از پایین آوردن اندیسها در (۶۰۲۷) و قرار دادن $du^1 = 1, du^2 = 0, k = k_1$ ، به‌دست می‌آوریم $b_{11} = k_1 g_{11}$. با جایگذاری $du^1 = 0, du^2 = 1, k = k_2$ ، خواهیم داشت $b_{22} = k_2 g_{22}$.

بعکس، شرایط (۱۳۰۲۷) ایجاب می‌کنند که دیفرانسیلها در راستای خطوط مختصات در (۶۰۲۷) صدق کنند، بدین معنی که راستاهای منحنیهای مختصات راستاهای اصلی می‌باشند.

تمرین

ثابت کنیدراستاهای اصلی تنها جفت راستاهایی هستند که هم مزدوج و هم متعامدند .

۴۰۲۷ قضیهٔ اویلر

فرض کنیم $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بردارهای یکهٔ دوراستای اصلی سطح در نقطهٔ غیر نافی P باشند . این بردارها ، طبق نتایج بخش قبل ، متعامدند . درحالتی که P یک نقطهٔ نافی است ، $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ را دو بردار یکهٔ مماس متعامد دلخواه می‌گیریم .

طبق قضیهٔ ۱ از ۲۰۲۷ ، داریم

$$\mathscr{S}(\mathbf{e}_1) = -k_1\mathbf{e}_1, \qquad \mathscr{S}(\mathbf{e}_2) = -k_2\mathbf{e}_2.$$

که در آن k_1 و k_2 به ترتیب انحناهای اصلی نظیر راستاهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ اند.

در صفحهٔ مماس در P راستایی اختیار می‌کنیم که با راستای بردار $\mathbf{e}_1$ زاویهٔ α بسازد. بردار یکهٔ $\mathbf{e}$ این راستا از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{e} = \cos\alpha\, \mathbf{e}_1 + \sin\alpha\, \mathbf{e}_2.$$

بعلاوه، از (۵۰۲۵) نتیجه می‌شود که

$$\mathscr{S}(\mathbf{e}) = \cos\alpha \mathscr{S}(\mathbf{e}_1) + \sin\alpha \mathscr{S}(\mathbf{e}_2) = -k_1\cos\alpha\, \mathbf{e}_1 - k_2 \sin\alpha\, \mathbf{e}_2.$$

قضیه (اویلر). *انحنای قائم در راستایی که با راستای اصلی نظیر به انحنای اصلی k_1 زاویهٔ α می‌سازد مساوی است با*

$$k_n = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha. \qquad (۱۴۰۲۷)$$

برهان. طبق (۶۰۲۵)، داریم

$$\begin{aligned} k_n &= -\frac{\mathbf{e}\mathscr{S}(\mathbf{e})}{\mathbf{e}^2} = -\mathbf{e}\mathscr{S}(\mathbf{e}) \\ &= -(\cos\alpha\, \mathbf{e}_1 + \sin\alpha\, \mathbf{e}_2)(-k_1\cos\alpha\, \mathbf{e}_1 - k_2\sin\alpha\, \mathbf{e}_2) \\ &= k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha, \end{aligned}$$

که برهان را تمام می‌کند.

امثله و تمرین

۱. میانگین حسابی انحناهای قائم برای هر دو راستای متعامد مساوی انحنای میانگین در نقطهٔ مفروض است. درواقع، فرض‌کنیم یکی از راستاها باراستای اصلی نظیر به انحنای اصلی k_1 زاویهٔ ϕ بسازد. طبق قضیهٔ اویلر، داریم

$$k_n(\phi) = k_1\cos^2\phi + k_2\sin^2\phi,$$

$$k_n(\phi + \tfrac{1}{2}\pi) = k_1\cos^2(\phi + \tfrac{1}{2}\pi) + k_2\sin^2(\phi + \tfrac{1}{2}\pi) = k_1\sin^2\phi + k_2\cos^2\phi,$$

که از آنجا

$$k_n(\phi) + k_n(\phi + \tfrac{1}{2}\pi) = k_1 + k_2 = 2H.$$

۲. با اثبات اینکه میانگین حسابی انحناهای قائم برای m راستای $\phi, \phi + \pi/m, \phi + 2\pi/m, \ldots, \phi + (m-1)\pi/m$ نیز مساوی انحنای میانگین هست، نتیجهٔ فوق را تعمیم دهید.

۳. ثابت کنید نقاط پایان بردارهای انحنا در P همهٔ منحنیها بر سطح ماربر نقطهٔ P سطحی را جارو می‌کنند که دارای معادلهٔ ضمنی

$$z(x^2 + y^2) = k_1 x^2 + k_2 y^2$$

نسبت به یک دستگاه مختصات در فضا به مبداء P است که محور z آن راستای بردار قائم m در P است، و راستای محورهای x و y راستای اصلی سطح در P به‌ترتیب نظیر به انحناهای اصلی k_1 و k_2 می‌باشند.

راهنمایی. از قضایای اویلر و مونیه استفاده کنید.

۴. ثابت کنید هرگاه نقطهٔ P یک نقطهٔ نافی باشد، سطح تمرین قبل یک صفحه است.

۵. ثابت کنید راستاهایی که با راستای اصلی زوایای α و α' می‌سازند مزدوج‌اند اگر و فقط اگر

$$k_1 \cos\alpha \cos\alpha' + k_2 \sin\alpha \sin\alpha' = 0. \qquad (۱۵.۲۷)$$

به عنوان نتیجه، معادلهٔ راستاهای مجانبی

$$k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha = 0 \qquad (۱۶.۲۷)$$

را به‌دست آورید.

۶. معادلهٔ راستاهای مجانبی به شکل (۱۶.۲۷) نتیجه می‌دهد که

$$\tan^2\alpha = -k_2/k_1.$$

لذا، در یک نقطهٔ هذلولوی دو جواب

$$\alpha_2 = \arc\tan \sqrt{-\frac{k_2}{k_1}} \quad \text{و} \quad \alpha_1 = \arc\tan\sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}$$

داریم، زیرا $k_1k_2 < 0$ ؛ و درنتیجه، $-k_2/k_1 > 0$. این نشان می‌دهد که راستای اصلی زاویهٔ بین راستاهای مجانبی را نصف می‌کند (قس. تمرین ۴، ۱۰.۲۷).

۷. ثابت کنید در یک نقطهٔ سهموی یکی از انحناهای اصلی صفر بوده و راستای اصلی تنها راستای مجانبی می‌باشد.

۸. ثابت کنید هرگاه صفحهٔ (x, y) بر سطح

$$z = f(x, y)$$

در $(0, 0, 0)$ مماس بوده و محورهای x و y دارای راستاهای اصلی باشند، بسط تیلور z عبارت است از

$$z = \tfrac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial k_1}{\partial x}x^3 + 3\frac{\partial k_1}{\partial y}x^2y + 3\frac{\partial k_2}{\partial x}xy^2 + \frac{\partial k_2}{\partial y}y^3\right)$$

که در آن مقادیر انحناهای اصلی k_1, k_2 و مشتقات جزئی آنها در مبداء دستگاه مختصات گرفته می‌شوند.

۵.۲۷ خواص اکسترمال منحنیهای اصلی

قضیه. ***انحناهای اصلی k_1 و k_2 در نقطهٔ P از یک سطح بیشترین و کمترین مقدار***

انحناهای قائم به‌ازای همهٔ راستاها در این نقطه‌اند .

برهان . به‌خاطر قضیهٔ اویلر ، انحنای قائم در یک نقطه برای یک‌راستای‌مفروض یک تابع متناوب مشتقپذیر است با دورهٔ تناوب π از زاویهٔ α بین‌یکی‌از‌راستاهای اصلی‌و راستای مفروض. لـذا ، این تابع باید بیشترین و کمتـرین مقدار خود را در بازهٔ $[0,\pi)$ گیرد . اما این فقط می‌تواند در نقاطی رخ دهد که مشتق این تابع صفر است .

چون طبق (۱۲۰۲۷)

$$k_n(\alpha) = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha ,$$

داریم

$$k_n'(\alpha) = -2k_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2k_2 \sin \alpha \cos \alpha$$
$$= 2(k_2 - k_1) \sin \alpha \cos \alpha.$$

لذا ، مگرآنکه $k_1 = k_2$ ، و نقطه یـک نقطهٔ نافی باشد ، فقط‌دوراستای‌ممکن وجود دارند که بـه‌ازای‌آنـها انحنای قائم می‌تواند یک مقدار اکسترمال بگیرد : یکی ، که درآن $\sin \alpha = 0$ و $\alpha = 0$ ، یک راستای اصلی است ، دیگری ، که در آن $\cos \alpha = 0$ و $\alpha = \pi/2$ ، راستای اصلی دیگـر است . مقادیر نظیر انحنای قائم ، یعنی $k_n(0) = k_1 , k_n(\pi/2) = k_2$ ، انحناهای اصلی بوده ، و برهان تمام است .

این خـاصیت اکسترمال انحناهای اصلی کرارا " به‌عنوان تعریف انحناهای اصلی و راستاهای اصلی درنظر گرفته می‌شود .

تمرین

معادلات راستاهای اصلی را به‌عنوان‌راستاهایی که انحنای قائم بیشترین و کمترین مقدار را می‌گیرد به‌دست آورید .

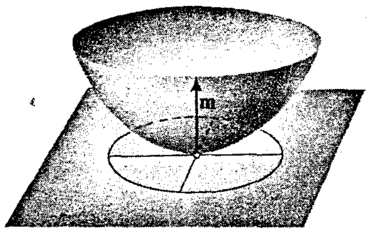
۲۸ شاخص دوپن[1]

۱۰۲۸ تعریف

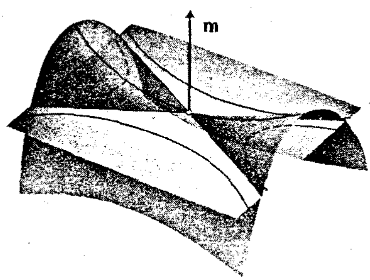
در صفحهٔ مماس بـر سطـح در نقطهٔ P ساختن زیر را انجام می‌دهیم . بر هر خط مماس نقاطی را که در فاصلهٔ $\sqrt{|k_n|^{-1}}$ از P قرار دارند اختیار می‌کنیم ، که در آن k_n انحنای

1. *Dupin*

قائم بـــه راستای این خط است. این نقاط یک منحنی بر صفحهٔ مماس تشکیل می‌دهند (شکلهای ۱۰۲۸ ، ۲۰۲۸) که **شاخص دوپن** سطح در P نام دارد.



شکل ۱۰۲۸



شکل ۲۰۲۸

برای بررسی این شاخص، مختصات دکارتی ξ, η را با اختیار نقطهٔ تماس P به‌عنوان مبداء و بردارهای یکهٔ e_1 و e_2 راستاهای اصلی را به‌عنوان بردارهای یکهٔ محورهای ξ و η معرفی می‌کنیم.

قضیه. *در نقطهٔ بیضوی P ، شاخص دوپن یک بیضی به معادلهٔ*

$$|k_1|\xi^2 + |k_2|\eta^2 = 1 \qquad (۱۰۲۸)$$

است. بخصوص، در یک نقطهٔ نافی، شاخص یک دایره است.

در یک نقطهٔ سهموی که یک نقطهٔ تخت نباشد، شاخص دوپن یک جفت خط به معادلات

$$|k_1|\xi^2 = 1 \quad \text{و} \quad |k_2|\eta^2 = 1 \qquad (۲۰۲۸)$$

است.

در یک نقطهٔ هذلولوی، شاخص دوپن از دو سهمی مزدوج به معادلات

$$k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = 1, \qquad k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = -1 \qquad (۳۰۲۸)$$

تشکیل شده است.

شاخص دوپن در نقاط تخت وجود ندارد.

برهان. طبق تعریف و فرمول اویلر، معادلهٔ شاخص در مختصات قطبی (ρ, α) خواهد بود

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} = \frac{1}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha|}}.$$

درنتیجه، معادلات پارامتری عبارتند از

$$(۴.۲۸) \quad \xi = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha|}}, \qquad \eta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{|k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha|}}$$

با پارامتر α . برای‌حذف α ،دومعادلهٔ (۴.۲۸) را مربع کرده، اولی را در k_1 ،دومی را در k_2 ضرب نموده،وحاصل‌ضربهارا با هم جمع می‌کنیم. با قدر مطلق گرفتن ازنتیجه، به‌دست می‌آوریم

$$(۵.۲۸) \qquad |k_1\xi^2 + k_2\eta^2| = 1,$$

که معادلهٔ ضمنی شاخص می‌باشد.

در یک نقطهٔ بیضوی، k_1 و k_2 متحدالعلامه‌اند؛ ولذا، این با (۱.۲۸) معادل است. این معادلهٔ یک بیضی است با نیم محورهای $|k_1|^{-1/2}, |k_2|^{-1/2}$ ، یا یک دایره اگر $k_1 = k_2$.

در یک نقطهٔ سهموی، یکی از انحناها صفر است، و معادلهٔ (۵.۲۸) به یکی ازدو معادلهٔ (۲.۲۸) تحویل می‌شود.

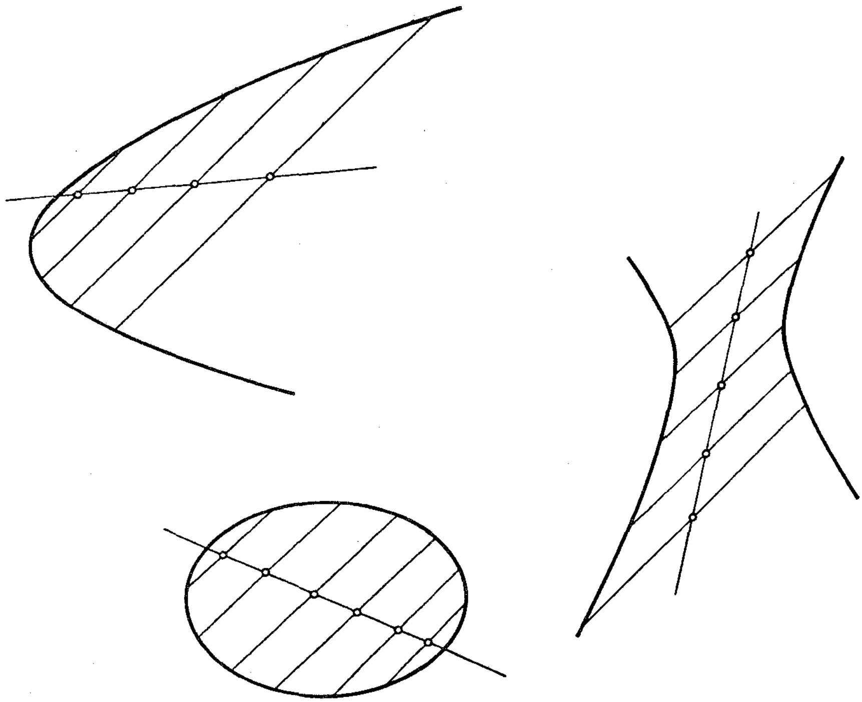
در یک نقطهٔ هذلولوی، k_1 و k_2 مختلف‌العلامه‌بوده و (۵.۲۸) معادل تناوب دو معادلهٔ (۳.۲۸) است. اینها معادلات دو هذلولی مزدوج‌اند، یکی با نیم محورحقیقی $|k_1|^{-1/2}$ و نیم محور موهومی $|k_2|^{-1/2}$ ، و دیگری عکس اینها.

در یک نقطهٔ تخت، همهٔ انحناهای قائم صفر بوده و ساختن غیر ممکن است.

★ ۲.۲۸ شاخص دوپن و راستاهای مزدوج، اصلی، و مجانبی سطح

همانطور که دیدیم، شاخص در هر نقطه که نقطهٔ تخت سطح نباشد وجود دارد، و یک بیضی، یک جفت هذلولی مزدوج یا یک سهمی تباه شده، یعنی یک جفت خط موازی، می‌باشد. حال مفاهیم‌راستاهای مزدوج ،راستاهای اصلی،وراستاهای مجانبی یک مخروطی را مختصرا" یادآور می‌شویم.

یک مخروطی و یک راستا درصفحهٔ مخروطی درنظر می‌گیریم (شکل ۳۰۲۸) ، وهمهٔ وترهای مخروطی باراستای داده شده را اختیار می‌کنیم . نقاط میانی این وترها بر یک خط مستقیم واقعند ؛ این خط در حالت بیضی یا هذلولی ازمرکز مخروطی گذشته‌و، درحالت سهمی یا یک جفت خط موازی، موازی محور است . این‌خط را **قطر مزدوج** راستای مفروض می‌نامند ، و راستای این قطر ***راستای مزدوج*** راستای داده شده نام دارد .ازدواج راستاها درحالت بیضی یا هذلولی متقابل است . درحالت سهمی (یا یک جفت خط موازی) ، راستای مزدوج راستای



شکل ۳۰۲۸

محور نامعین است ، زیرا خطـوط موازی محور فقط یک نقطهٔ مشترک (هیچ نقطهٔ مشترک) با منحنی ندارند ،ولی راستای محور راستای مزدوج هرراستای دیگراست . لذا ، برای حفظ تقابل ، توجه می‌کنیم که هر راستا با راستای محور مزدوج است .

با محاسبه‌ای‌آسان می‌توان دریافت‌که دو راستا به شیبهای m و m' راستاهای مزدوج بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

هستند اگر و فقط اگر

$$mm' = -b^2/a^2, \qquad (۶۰۲۸)$$

و راستاهای مزدوج هذلولیهای

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هستند اگر و فقط اگر

$$mm' = b^2/a^2. \qquad (۷۰۲۸)$$

راستاهای محور اطول و محور اقصر یک مخروطی مرکزی *راستاهای اصلی* مخروطی نام دارند. این راستاها مزدوج و دو بدو بر هم عمودند. درحالت یک سهمی یا یک جفت خط موازی، راستاهای اصلی جهت محور (یا خطوط) و جهت عمود می‌باشند. در همهٔ حالات، جز دایره، راستاهای اصلی تنها جهتهای مزدوج عمود بر هم هستند. درحالت دایره، هر جفت راستای مزدوج برهم عمودند و هر راستا را می‌توان یک راستای اصلی گرفت.

راستای مجانبهای یک هذلولی یا راستای محور یک سهمی (یا خطوط یک جفت خط موازی) را به‌ترتیب *راستای مجانبی* هذلولی یا سهمی (یا سهمی تباه شده) می‌نامند.

دو هذلولی مزدوج

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (۸۰۲۸)$$

مجانبهای مشترک دارند؛ شیبهای راستاهای مجانبی عبارتند از

$$m_1 = b/a, \qquad m_2 = -b/a. \qquad (۹۰۲۸)$$

با استفاده از این مفاهیم نظریهٔ مخروطیها، می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد.

قضیه. *راستاهای اصلی، راستاهای مجانبی، و راستاهای مزدوج بر یک سطح در P بر راستاهای اصلی، راستاهای مجانبی، و راستاهای مزدوج شاخص دوپن در این نقطه منطبق‌اند.*

برهان. محورهای ξ و η بخش پیش بوضوح محورهای اصلی شاخص‌اند. از اینرو، راستاهای آنها راستاهای اصلی شاخص می‌باشند. طبق ساختن مذکور در بخش پیش، اینها راستاهای اصلی سطح می‌باشند. لذا، راستاهای اصلی سطح بر راستاهای اصلی شاخص منطبق می‌شوند. بنابر (۱۶۰۲۷)، راستاهای مجانبی سطح در یک نقطهٔ هذلولی شیبهایی دارند که در شرط

$$m^2 = (\tan\alpha)^2 = -k_1/k_2$$

صدق می‌کنند ، ولی

$$|k_1| = 1/a^2, \qquad |k_2| = 1/b^2,$$

که ایجاب می‌کند

$$m^2 = b^2/a^2,$$

و این ، به‌خاطر (۹.۲۸) ، ثابت می‌کند که‌راستاهای مجانبی سطح برراستاهای یکی از دو هذلولی در شاخص منطبق است . این در یک نقطهٔ سهموی کاملاً واضح است .

بالاخره ، دو راستا به شیبهای $m = \tan\alpha$ و $m' = \tan\alpha'$ راستاهای مزدوج سطح است اگر و فقط اگر

$$mm' = \tan\alpha \tan\alpha' = -k_1/k_2.$$

لذا ، دریک نقطهٔ بیضوی $mm' = -b^2/a^2$ ، و در یک نقطهٔ هذلولوی $mm' = b^2/a^2$ ، که ثابت می‌کند این‌راستاها راستاهای مزدوج شاخص نیز می‌باشند .

حالت نقطهٔ سهموی که شاخص یک سهمی تباه شده است نیز بدیهی می‌باشد .

این قضیه به‌ما توان‌استفاده‌از نظریهٔ مقاطع مخروطی در مطالعه انحنای قائم دریک نقطه از سطح را می‌دهد .

تمرین

۱ . خواننده‌ای کـه‌با نظریهٔ مقاطع مخروطی آشناست احکام مربوط‌به‌راستاهای اصلی ، راستاهای مجانبی ، وراستاهای مـزدوج یک مخروطی بیان شده دراین بخش را ثابت کنـد .

۲ . با استفاده از نتایج این بخش، شـابت کنیدراستاهای اصلـی زوایای بین‌راستاهای مجانبی رانصف می‌کنند . ★

۳.۲۸ شاخص دوپن به‌عنوان حد شکلهای مقاطع مسطح

یک سطح و نقطهٔ P بر آن مفروض است . مقاطع سطح را با دو صفحه موازی صفحهٔ مماس در P و در فاصلهٔ h در دو طرف آن درنظر می‌گیریم . این دو مقطع را بر صفحهٔ مماس تصویر کرده و یک اتساع به مرکز P و نسبت $1/\sqrt{h}$ انجام می‌دهیم . به‌این ترتیب ، یک منحنی به‌دست می‌آید که ممکن است از دو شاخهٔ مجزا تشکیل شده باشد .

قضیه. *اگر P یک‌نقطهٔ تخت نباشد ، حد منحنی حاصل از ساختن فوق ، وقتی $h \to 0$ ، موجود و بر شاخص دوپن سطح در P منطبق است .*

برهان. دستگاه‌مختصات‌رادر فضا طوری می‌گیریم که P مبداء مختصات بوده، محورهای x و y در Pراستاهای‌اصلی‌داشته باشند، و محور z قائم به صفحه باشد. یک همسایگی به قدر کافی کوچک P بر سطح را می‌توان با معادله‌ای به شکل $z = f(x, y)$ نمایش داد. فرض کنیم

$$A = f_{xx}(0, 0), \qquad B = f_{xy}(0, 0), \qquad C = f_{yy}(0, 0).$$

دراین صورت، طبق فرمول تیلور، داریم

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + O(x^2 + y^2).$$

معادلهٔ مقاطع و تصاویر آنها خواهد بود

$$|Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + O(x^2 + y^2)| = h,$$

و نقش‌آن تحت اتساع معادله‌ای‌دارد که با جایگذاری $(x, y) \to (\sqrt{h}x, \sqrt{h}y)$ به‌دست می‌آید؛ یعنی،

$$h|Ax^2 + 2Bxy + Cy^2| + o(h) = h$$

یا

$$|Ax^2 + 2Bxy + Cy^2| + o(h)/h = 1.$$

این، وقتی $h \to 0$ ، به

$$|Ax^2 + 2Bxy + Cy^2| = 1 \qquad (۱۰۰۲۸)$$

میل می‌کند. با انتخاب مختصات ما در فضا، می‌توان x و y را در همسایگی P پارامتر گرفت. پس در P داریم $g_{11} = g_{22} = 1$ ، $g_{12} = 0$ ، و $b_{ij} = f_{ij}(0,0)$. اماراستاهای خطوط‌مختصات در P ، بنابر انتخاب مختصات ما، راستاهای اصلی‌اند. لذا، داریم $A = b_{11} = k_1g_{11} = k_1, B = b_{12} = 0, C = b_{22} = k_2g_{22} = k_2$ ، ومعادلهٔ (۱۰۰۲۸) خواهد شد

$$|k_1x^2 + k_2y^2| = 1,$$

که معادلهٔ شاخص (۵۰۲۸) است. به‌ازای h به‌قدر کافی کوچک، در نقاط بیضوی فقط یکی ازصفحات سطح را قطع می‌کند. در یک نقطهٔ هذلولوی، تصاویر مقاطع به‌وسیلهٔ صفحات در یک طرف صفحهٔ مماس به یکی از دو هذلولی که شاخص را می‌سازند میل می‌کند، و تصاویر مقاطع به وسیلهٔ صفحات درطرف دیگر به هذلولی دیگر میل خواهند کرد.

۴۰۲۸ شاخص تعمیم یافته

در یک نقطهٔ تخت، شاخص دوپن معین نیست. با استفاده از پیرایش روند بخش پیش، می‌توان شاخص تعمیم یافته‌ای دراین نقاط ساخت.

این روند را با زین میمون توضیح می‌دهیم (ر.ک. ۳.۱۷)، که دارای معادلهٔ زیر است :

$$z = x(x^2 - 3y^3).$$

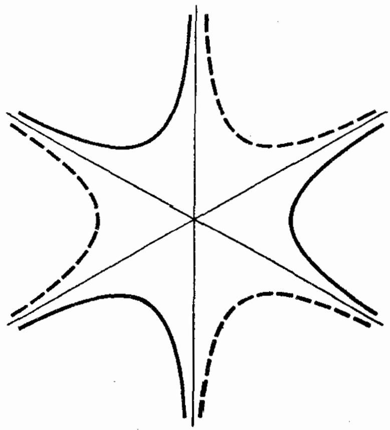
با قطع این سطح به‌وسیلهٔ صفحات $z = \pm h$ و تصویر روی صفحهٔ xy ، یک منحنی به معادلهٔ

$$|x(x^2 - 3y^2)| = h$$

به‌دست می‌آوریم . اگر یک اتساع از مرکز با نسبت $1/\sqrt[3]{h}$ انجام دهیم ، معادلهٔ

$$|x(x^2 - 3y^2)| = 1$$

را به‌دست می‌آوریم که به h بستگی ندارد . لذا ، وقتی $h \to 0$ ، حد همان خواهد بود . منحنی در شکل ۴.۲۸ نموده شده است ، که در آن خط پیوسته نمایش حد تصویر مقاطع



شکل ۴.۲۸

در یک طرف صفحهٔ مماس بوده ، و خط نقطه‌چین از مقاطع به وسیلهٔ صفحات واقع درطرف دیگر ناشی شده است .

درحالت کلی ، به‌همین ترتیب وبا استفاده از $1/\sqrt[n]{h}$ به عنوان نسبت اتساع استفاده می‌کنیم ، که در آن n کوچکترین مرتبهٔ جملات ناصفر بسط تیلور انحراف سطح از صفحهٔ مماس در آن نقطه است .

۲۹ خطوط انحنا و گستردهٔ یک سطح

۱.۲۹ خطوط انحنا

یک منحنی بر یک سطح باراستای اصلی در هر نقطه یک ***خط انحنای*** سطح نامیده می‌شود .

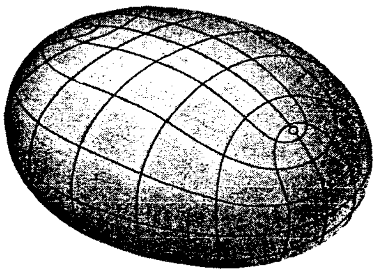
قضیه. ***از هر نقطهٔ غیرنافی یک سطح از کلاس C_3 دوخط انحنای دوبدو متعامد می‌گذرند .***

در یک قلمرو بدون نقاط نافی یا منفرد، خطوط انحنا یک تور منتظم مرکب از دو خانواده از منحنیها را تشکیل می‌دهند.

برهان. اگرمعادلات راستاهای اصلی (۳۰۲۷) را معادلات دیفرانسیل بگیریم، جوابهایشان خطوط انحنا را نمایش می‌دهند. در همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطهٔ غیر نافی، معادله را می‌توان به دو معادلهٔ خطی مستقل با ضرایب از کلاس C_1 تجزیه کرد:

$$\alpha^* du^1 + \beta^* du^2 = 0 \quad \text{و} \quad \alpha\, du^1 + \beta\, du^2 = 0 \tag{۱۰۲۹}$$

(ر.ک. ۱۰۲۷). هریک از اینها یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیها را معین می‌کند، و یک منحنی ازهرخانواده ازهرنقطهٔ یک همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه می‌گذرد. چون راستاهای این دومنحنی راستاهای اصلی‌اند، پس بر هم عمودند. با استفاده ازیکتایی منحنیهادرهرخانواده، می‌توان دو خانواده را به هر قلمرو بدون نقاط نافی توسیع داد. نقاط نافی نقاط منفرد معادلهٔ (۴۰۲۷)اند. در مجاورت یک نقطهٔ نافی، خطوط انحنا در حالات مختلف متفاوت رفتار می‌کنند. مثلاً، شکل ۱۰۲۹ رفتار خطوط انحنا را بر بیضی‌گون نشان می‌دهد. در اینجا خطوط انحنای هر دو خانواده خطوط بسته‌ای هستند



شکل ۱۰۲۹

که هریک دو نقطهٔ نافی را احاطه می‌کند. یک خط انحنا وجود دارد که از هر چهار نقطهٔ نافی می‌گذرد.

خوانندگان علاقه‌مند به تفصیل بیشتر رفتار خطوط انحنا، وقتی نقاط نافی وجود دارند، می‌توانند به بحث منحنیهای انتگرال یک معادلهٔ دیفرانسیل از نوع (۳۰۲۷) (درجهٔ دو از مرتبهٔ اول) در یک درس مبسوطتر در معادلات دیفرانسیل مراجعه نمایند.

امثله و تمرین

۱. نصف النهارات و دوایر عرض جغرافیایی یک سطح دوار خطوط انحنا هستند.

۲ . روی یک سطح گستردنی ، یک خانواده از خطوط انحنا خانوادهٔ خطوط جاری است ، و دیگری خانوادهٔ مسیرهای قائم آنها می‌باشد . درواقع ، چون در سطوح گستردنی داریم $K = k_1k_2 = 0$ ؛ درنتیجه ، یکی از انحناهای اصلی صفر است ؛ مثلاً ، $k_1 = 0$. راستای اصلی نظیر ، راستای یک خط جاری است . راستای اصلی دیگر متعامد به این می‌باشد .

۳ . چون هر راستای روی یک کره یک راستای اصلی است ، هر منحنی روی یک کره را می‌توان یک خط انحنا گرفت .

۴ . خطوط انحنای مارپیچ گون

$$x = u^1 \cos u^2, \qquad y = u^1 \sin u^2, \qquad z = au^2$$

را بیابید .

۵ . ثابت کنید در نگاشت ایزومتریک مارپیچ گون روی زنجیرگون که در مثال ۱ ، ۲۰۲۰ داده شد ، خطوط انحنا به خطوط مجانبی نگاشته می‌شوند . این ثابت می‌کند که مفاهیم خطوط انحنا و خطوط مجانبی مفاهیمی از هندسهٔ ذاتی سطوح نیستند .

۶ . ثابت کنید خطوط مختصات سطح

$$x = \tfrac{1}{2}a(u^1 + u^2), \qquad y = \tfrac{1}{2}b(u^1 - u^2), \qquad z = \tfrac{1}{2}u^1u^2$$

خطوطی مستقیم‌اند . خطوط انحنا را پیدا کنید .

۷ . خط سهموی (مجموعهٔ نقاط سهموی) سطح

$$x = (u^2)^3, \qquad y = (u^1)^2 + u^1, \qquad z = \frac{(u^1)^2}{2a + au^2} \qquad (a > 0)$$

را بیابید . ثابت کنید این یک خط انحنا است .

۸ . ثابت کنید یک خط سهموی همواره یک خط انحنا است .

۹ . ثابت کنید هرگاه یکی از مسیرهای قائم خطوط جاری یک سطح خط دار یک خط انحنا باشد ، سطح گستردنی خواهد بود .

۱۰ . با استفاده از تمرین ۸ ، ثابت کنید اگر یک خط سهموی یک خط مجانبی نباشد ، راستاهای مجانبی در نقاط این خط متعامد به آن هستند . لذا ، اگر این خط قلمرو انحنای گاوسی مثبت را از قلمرو انحنای منفی جدا کند ، خطوط مجانبی که در نقاط خط سهموی بازگشت دارند مماسهایشان در نقاط بازگشت به خط سهموی متعامد می‌باشند .

۱۱ . تصاویر خطوط انحنای بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c,$$

روی صفحهٔ $z = 0$ راپیدا کنید .نشان دهید که این تصاویر بیضیها و هذلولیهایی همکانون‌اند .

۲۰۲۹ یک دستگاه مختصات خاص

اگرهمهٔ منحنیهای مختصات خطوط‌انحنا باشند ، محاسبات با استفاده از اولین و دومین فرم‌اساسی بخصوص ساده خواهند شد . طبق قضیهٔ ۲ از ۳۰۲۶ ، این حالت را درصورتی داریم که $g_{12} \equiv 0$ و $b_{12} \equiv 0$. دراین وضع ، در هر نقطه داریم

$$b_{11} = k_1 g_{11}, \qquad b_{12} = g_{12} = 0, \qquad b_{22} = k_2 g_{22}, \tag{۲۰۲۹}$$

که در آنها k_1 و k_2 انحناهای اصلی می‌باشند .

قضیه . ***در همسایگی نقطهٔ غیر نافی P می‌توان مختصات‌منحنی‌الخط داشت به‌طوری‌که همهٔ منحنیهای مختصات خطوط‌انحنا باشند .***

برهان . معادلهٔ (۱۰۲۹)راستاهای اصلـی را در همسایگی نقطـهٔ غیر نافی P درنظر می‌گیریم .فرض‌کنیم μ و μ^* عاملهای انتگرالگیری معادلات خطی باشند . دراین‌صورت ، داریم

$$\mu(\alpha\, du^1 + \beta\, du^2) = dv^1, \qquad \mu^*(\alpha^*\, du^1 + \beta^*\, du^2) = dv^2,$$

که در آنها $v^1(u^1, u^2)$ و $v^2(u^1, u^2)$ توابعی هستند که درهمسایگی P تعریف‌شده‌اند .ژاکوبی

$$\frac{\partial(v^1, v^2)}{\partial(u^1, u^2)} = \mu\mu^* \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^* & \beta^* \end{vmatrix}$$

در نقطهٔ غیرنافی P وهمسایگیی‌ازآن مخالف صفر است . از اینرو ، u^1 و u^2 را می‌توان به عنوان مختصات منحنی‌الخط در همسایگی P به کاربرد .

در مختصات جدید ، معادلات‌راستاهای اصلی عبارتند از $dv^1 = 0$ یا $dv^2 = 0$ ، که نشان می‌دهد منحنیهای مختصات خطوط‌انحنا می‌باشند .

امثله و تمرین

۱ . مختصات منحنی‌الخطی‌که در مثال ۳، ۳۰۱۱ ،بر سطوح دوار معرفی شدند از نوع مختصاتی هستند که دراین بخش توصیف شدند .

۲ . تبدیل فضای اقلیدسی سه بعدی که با فرمول

$$\mathbf{R} = a^2\mathbf{r}/r^2$$

داده‌می‌شود *انعکاس نسبت به کره* به‌شعاع a و مرکز مبداء مختصات نامیده‌می‌شود. ثابت کنید هر انعکاس خطوط‌انحنای یک سطح را به خطوط‌انحنای نقش سطح می‌نگارد.

۳ . ثابت کنید منحنیهای روی سطح موازی $\mathscr{F}$ (ر.ک. تمرین ۳، ۵۰۲۵) که نظیر خطوط‌انحنای $\mathscr{F}$ اند خود خطوط‌انحنای سطح موازی می‌باشند.

۴ . ثابت کنید هرگاه همهٔ خطوط‌انحنای یک سطح منحنیهای مسطحی باشند، صفحات خطوط‌انحنای یک خانواده همه با خط مستقیمی مانند l_1 در فضا موازی‌اند، و صفحات خطوط‌انحنای خانوادهٔ دیگر با خط دیگری چون l_2 عمود بر l_1 موازی می‌باشند.

۵ . ثابت کنید هرگاه زاویهٔ بین صفحهٔ بوسان یک خط‌انحنا در نقطهٔ P و صفحهٔ مماس بر سطح در P در طول خط ثابت باشد، خط‌انحنا بر یک صفحه قرار خواهد داشت.

۶ . یک سطح را *سطح همگرما* گویند اگر مختصات همگرمایی بر آن وجود داشته باشد به‌طوری که همهٔ منحنیهای مختصات خطوط‌انحنا باشند. ثابت کنید هر سطح مینیمال همگرما می‌باشد.

۷ . ثابت کنید سطوح گستردنی همگرما می‌باشند.

۸ . ثابت کنید بیضی‌گونها سطوحی همگرمایند.

۳.۲۹ قضیهٔ یوشیم اشتال[1]

قضیه. *اگر دو سطح یک منحنی مشترک داشته باشند که خط‌انحنای هردوی آنها باشد، زاویهٔ بین سطوح در طول منحنی ثابت است. بعکس، اگر دو سطح در امتداد یک منحنی که خط‌انحنای یکی از آنهاست با زاویهٔ ثابت متقاطع باشند، این خط خط‌انحنای سطح دیگر نیز خواهد بود.*

برهان. بردار قائم یکی از سطوح را با $\mathbf{m}$ و از آن دیگری را با $\mathbf{m}^*$ نشان می‌دهیم. $\mathbf{m}$ و $\mathbf{m}^*$ در امتداد منحنی توابعی از پارامتر منحنی‌اند. زاویهٔ ϕ بین سطوح در نقاط مختلف منحنی نیز به این پارامتر بستگی دارد و در شرط $\cos\phi = \mathbf{m}\mathbf{m}^*$ صدق می‌کند. با مشتقگیری در راستای منحنی، به‌دست می‌آوریم $d\cos\phi = d\mathbf{m}\,\mathbf{m}^* + \mathbf{m}\,d\mathbf{m}^*$. چون منحنی راستای اصلی روی هر دو سطح است، طبق (۴.۲۷)، داریم $d\mathbf{m} = k\,d\mathbf{r},\ d\mathbf{m}^* = -k^*\,d\mathbf{r}$. اما $d\mathbf{r}$ برمنحنی مماس است؛ لذا، در هر نقطه به هردوی

1. Joachimsthal

$\mathbf{m}$ و $\mathbf{m}^*$ متعامد می‌باشد. بنابراین، ثابت $= d\cos\phi = 0, \phi$.

بعکس، اگر ثابت $= \phi$ ، داریم

$$d\cos\phi = d\mathbf{m}\ \mathbf{m}^* + \mathbf{m}\, d\mathbf{m}^* = 0.$$

بعلاوه، اگرخط مشترک یک خط انحنا روی سطح اول باشد، خواهیم داشت $d\mathbf{m} = -k\, d\mathbf{r}$ ؛ درنتیجه، $d\mathbf{m}\,\mathbf{m}^* = 0$ ، که $\mathbf{m}\, d\mathbf{m}^* = 0$ راایجاب خواهد کرد. چون $d\mathbf{m}^*$ بوضوح متعامد به $\mathbf{m}^*$ نیزهست، $d\mathbf{m}^*$ بایدبا $d\mathbf{r}$ همخط باشد، که به معنی آن است که راستای منحنی یک راستای اصلی سطح دیگر نیز می‌باشد، و قضیه ثابت می‌شود.

۴۰۲۹ یک خاصیت مشخصهٔ خطوط انحنا

منحنی $\mathscr{C}: u^i = u^i(t)$ واقع بر یک سطح به نمایش پارامتری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

را درنظر می‌گیریم. قائمهای به این سطح در نقاط منحنی یک سطح خط دار را جارو می‌کنند که معادلهٔ پارامتری آن عبارت است از

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t)) + v\mathbf{m}(u^1(t), u^2(t)), \qquad (۳۰۲۹)$$

که درآن t و v پارامتر هستند. این سطح را سطح خط دار قائم به $\mathscr{F}$ درامتداد $\mathscr{C}$ خواهیم نامید.

قضیه. ***منحنی $\mathscr{C}$ بر سطح $\mathscr{F}$ از کلاس C_3 یک خط انحناست اگر و فقط اگر سطح خط دار قائم به $\mathscr{F}$ درامتداد $\mathscr{C}$ گستردنی باشد.***

برهان. طبق (۹۰۱۴)، سطح (۳۰۲۹) گستردنی است اگر و فقط اگر

$$d\mathbf{r}\ \mathbf{m}\ d\mathbf{m} = 0.$$

چون هر دو بردار $d\mathbf{m}$ و $d\mathbf{r}$ متعامد به $\mathbf{m}$ اند، این می‌تواند رخ دهد اگر و فقط اگر $d\mathbf{m} \times d\mathbf{r} = 0$. اما، طبق (۲۰۲۷)، این شرط لازم وکافی برای یک راستای اصلی است. لذا، سطح قائم گستردنی است اگر و فقط اگر $\mathscr{C}$ یک خط انحنا باشد، وقضیه ثابت می‌شود.

امثله و تمرین

۱. با توجه به اینکه منحنی یک مسیر قائم خانوادهٔ خطوط جاری است، می‌توان این‌را حالت خاصی از قضیهٔ یوشیم اشتال تلقی کرد. قضیه را به این طریق ثابت کنید.

۲. اگر یک دستگاه از سطوح مرکب از سه خانوادهٔ یک پارامتری

$$f(x, y, z, u) = 0, \qquad g(x, y, z, v) = 0, \qquad h(x, y, z, w) = 0$$

که از هر نقطهٔ P از قلمروی مانند D در فضا دقیقاً "یک سطح از هر خانوادهٔ گذشته، و سطوح خانواده‌های مختلف در زاویهٔ قائمه یکدیگر را قطع کنند یک **دستگاه سه‌متعامد** از سطوح در D نامیده می‌شود. طبق قضیهٔ یوشیم اشتال، هر دو سطح از این دستگاه در امتداد یک خط انحنا برای هردو سطح متقاطعند. ثابت کنید، در قلمرو D، فصل مشترکهای هر سطح ثابت دستگاه با سطوح دو خانوادهٔ دیگر همهٔ خطوط انحنای سطح را می‌دهند.

۳ . صفحات موازی صفحات مختصات یک دستگاه مختصات متعامد دکارتی در فضا یک دستگاه سه متعامد از صفحات را تشکیل می‌دهد.

۴ . دستگاه

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1$$

ازبیضی‌گونهای هم‌کانون $(-\infty < \lambda < c^2)$، هذلولی‌گونهای یکپارچه $(c^2 < \lambda < b^2)$، و هذلولی‌گونهای دوپارچه $(b^2 < \lambda < a^2)$ یک دستگاه سه متعامد از سطوح در فضا که مبداء مختصات حذف شده است را تشکیل می‌دهند.

۵ . ثابت کنید به‌ازای هر سطح $\mathscr{F}$ از کلاس C_3، خانوادهٔ سطوح موازی و دوخانواده از سطوح گستردنی قائم به $\mathscr{F}$ در امتداد خطوط انحنای $\mathscr{F}$ یک دستگاه سه‌متعامد در همسایگی به قدر کافی کوچک هر نقطه از $\mathscr{F}$ تشکیل می‌دهند.

۵۰۲۹ گستردهٔ یک سطح

حال یال بازگشت سطح گستردنی قائم به سطح مفروض $\mathscr{F}$ در امتداد خط انحنای $\mathscr{C}$ را پیدا می‌کنیم. برای این‌کار، معادلهٔ سطح گستردنی را به شکل

$$\mathbf{R} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t)) + \lambda(t)\mathbf{m}(u^1(t), u^2(t))$$

نوشته و λ را از شرط $d\mathbf{p} \times \mathbf{m} = 0$ معین می‌کنیم.

برای دیفرانسیلها در راستای منحنی، داریم

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{r} + d\lambda\, \mathbf{m} + \lambda\, d\mathbf{m},$$

اما، چون منحنی خط انحناست، در شرط $d\mathbf{m} = -k_i\, d\mathbf{r}$ صدق می‌کند، که در آن k_i انحنای اصلی نظیر است. لذا، داریم

$$d\mathbf{p} = (1 - \lambda k_i)\, d\mathbf{r} + d\lambda\, \mathbf{m}.$$

شرط توازی برای $d\mathbf{p}$ و $\mathbf{m}$ نتیجه می‌دهد که

$$\lambda = 1/k_i,$$

که از آنجا

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} + (1/k_i)\mathbf{m}. \qquad (۴۰۲۹)$$

به‌ازای نقطهٔ ثابت P از سطح $\mathscr{F}$ ، این بردار موضع مرکز انحنای قائم این نقطه به‌ازای راستای داده شده است. چون راستای منحنی یک راستای اصلی است و انحنای نظیر انحنای اصلی ،این مرکز را **مرکز انحنای اصلی** می‌نامیم .دراین باب قضیهٔ زیر را داریم .

قضیه. ***قائم به سطح $\mathscr{F}$ درنقطهٔ P بریال‌بازگشت‌سطح‌خط‌دار قائم به $\mathscr{F}$ درامتداد یک‌خط‌انحنا از $\mathscr{F}$ مار بر P در مرکز انحنای اصلی که نظیر خط‌انحنای داده شده‌است مماس می‌باشد .***

درحالت کلی ، بر هر قائم دو مرکز انحنای اصلی با بردارهای موضع

$$\mathbf{r} = \frac{1}{k_2}\mathbf{m} \quad \text{و} \quad \mathbf{r} + \frac{1}{k_1}\mathbf{m}$$

وجود دارند . این مراکزانحنای قائم را **کانونهای قائم** به سطح نیز می‌نامند . در یک نقطهٔ بیضوی ،که نافی نباشد ،هردومرکز انحنای اصلی یک طرف صفحهٔ مماس بر سطح قراردارند . در نقاط غیر نافی هردو بر هم منطبق اند . در نقاط هذلولوی ، در طرفین صفحهٔ مماس بر سطح واقعند . درنقاط سهموی که نقاط تخت نباشند فقط یک مرکز وجود دارد (دیگری " دربی‌نهایت" است) ؛ در نقاط تخت هیچ مرکزی وجود ندارد .

به‌طورکلی ، مراکز انحنای اصلی یک‌سطح‌مانند $\mathscr{F}$ یک سطح می‌سازند که از دوپارچه ، به‌نام **گستردهٔ سطح** $\mathscr{F}$ یا **سطح‌کانونی** $\mathscr{F}$ ، تشکیل شده است . شکل ۲۰۲۹ این سطح را در حالت نقاط‌بیضوی‌نشان می‌دهد ؛ شکل ۳۰۲۹ برای نقاط‌هذلولوی است . این سطح می‌تواند به خطوط یا حتی یک‌نقطهٔ تنها‌مثل حالت کره ،که هر دو پارچهٔ گسترده‌به مرکز کره بدل شده ، تباه گردد . سطوح گستردنی فقط یک پارچه از گسترده را دارند .

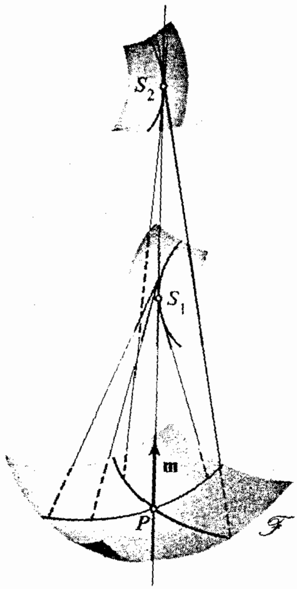
اگر نمایش پارامتری سطح $\mathscr{F}$ به صورت

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

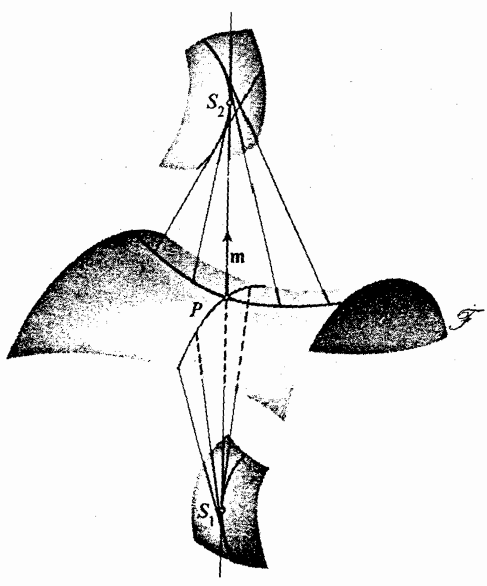
باشد ، معادلات دو پارچهٔ گسترده خواهند بود

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(u^1, u^2) + \frac{1}{k_i(u^1, u^2)}\mathbf{m}(u^1, u^2), \qquad i = 1, 2. \qquad (۵۰۲۹)$$

از قضیه معلوم می‌شود که هر پارچه از سطح مراکز انحنا به وسیلهٔ یالهای بازگشت سطوح



شکل ۲۰۲۹



شکل ۳۰۲۹

گستردنی قائم به $\mathscr{F}$ در امتداد منحنیهای یک خانواده از خطوط انحنا جارو می‌شود. لذا، قائمهای به سطح بر هر دو پارچهٔ گسترده در مراکز انحنای اصلی مماسند.

معادلات (۵۰۲۹) یک نگاشت از سطح $\mathscr{F}$ روی هر پارچه از گسترده نیز تعریف می‌کنند. نقش P در این نگاشت نقطهٔ تماس قائم به $\mathscr{F}$ در P با پارچهٔ نظیر از سطح است یا، به عبارت دیگر، یکی از کانونهای این قائم می‌باشد.

حال بردار قائم به گسترده را در نظر می‌گیریم. برای ساده کردن محاسبات، از مختصات منحنی‌الخط بر $\mathscr{F}$ استفاده می‌کنیم، به‌طوری که منحنیهای مختصات خطوط انحنا باشند. دراین صورت، داریم

$$\mathbf{m}_1 = -k_1\mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{m}_2 = -k_2\mathbf{r}_2, \qquad \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = 0.$$

اما

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{k_i}\right)\mathbf{m} + \frac{1}{k_i}\mathbf{m}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{k_i}\right)\mathbf{m} + \left(1 - \frac{k_1}{k_i}\right)\mathbf{r}_1,$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{k_i}\right)\mathbf{m} + \frac{1}{k_i}\mathbf{m}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{k_i}\right)\mathbf{m} + \left(1 - \frac{k_2}{k_i}\right)\mathbf{r}_2,$$

که

$$\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{k_1}\right)\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)(\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2)$$

را برای یک پارچه، و

$$\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right)(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{m})$$

را برای دیگری به‌دست می‌دهد.

اگر قائم به سطح $\mathscr{F}$ از یک نقطهٔ نافی نگذرد و انحنای اصلی در امتداد خط انحنای نظیر در همسایگی نقطه ثابت نباشد، $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \neq 0$. دراین حالت، چون بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ دو بدو متعامدند، بردار قائم به پارچهٔ اول گسترده، بدلیل همخط بودن با $\mathbf{r}_1$، به بردار قائم به پارچهٔ دوم متعامد است، که با $\mathbf{r}_2$ همخط می‌باشد. لذا، صفحات مماس به دو پارچهٔ گستردهٔ سطح $\mathscr{F}$ در نقاط تماس با یک قائم به $\mathscr{F}$ در P متعامدند، مشروط براینکه P نه یک نقطهٔ نافی و نه یک نقطهٔ ایستای یکی از انحناهای اصلی باشد.

اگر یکی از انحناهای اصلی در امتداد خط انحنایش ثابت باشد، بر پارچهٔ نظیر از گسترده داریم $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = 0$. دراین حالت، پارچه ممکن است تباه شده باشد. به‌همین

ترتیب ، اگر نقطه نافی باشد ، در نقطهٔ نظیر از گسترده بر هر دو پارچه $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = 0$ ، و نقطه می‌تواند یک نقطهٔ منفرد یکی از پارچه‌ها یا هردوی آنها باشد . توجه کنید که مراکز انحنای اصلی در یک نقطهٔ نافی بر هم منطبق‌اند . لذا ، هر دو پارچهٔ گسترده بر هر قائم ماربر یک نقطهٔ نافی از سطح دارای نقطهٔ مشترک می‌باشند .

امثله و تمرین

۱ . یکی از پارچه‌های گستردهٔ یک سطح دوار مانند $\mathscr{F}$ سطحی است که با دوران حول محور گستردهٔ نصف النهار به‌دست می‌آید . این پارچه نظیر است به انحنای اصلی مربوط به نصف النهار . سطوح گستردنی قائم در امتداد دوایر عرض جغرافیایی مخروطهایی هستند که رئوسشان بر محور قرار دارند ؛ و لذا ، پارچهٔ دیگر گسترده به محور یا بخشی از آن تباه می‌شود .

۲ . ثابت کنید سطوح موازی (ر.ک. مثال ۳ ، ۵.۲۵) دارای سطح مراکز انحنای مشترک‌اند.

۳ . نقاط میانی پاره‌خطهای واصل بین مراکز انحنای اصلی یک نقطه از سطح $\mathscr{F}$ یک سطح مانند $\mathscr{F}'$ را می‌سازند . انحنای میانگین این سطح چیست ؟ این سطح چه‌وقت تباه می‌شود ؟

۴ . ثابت کنید سطح گستردنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(u^1) + u^2\mathbf{t}(u^1),$$

که در آن u^1 طول قوس یال بازگشت است ، $\mathbf{t}(u^1) = \mathbf{p}'(u^1)$ ، و تاب τ مخالف صفر است ، فقط یک پارچه گسترده دارد که معادله‌اش

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + u^2\mathbf{t} + \frac{u^2\kappa}{\tau}\mathbf{b}$$

می‌باشد (قس. مثال ۲ ، ۲.۲۷) .

۵ . ضرایب اولین و دومین فرم اساسی سطح کانونی سطح مفروض $\mathscr{F}$ را برحسب ضرایب فرمهای اساسی $\mathscr{F}$ و انحناهای اصلی نظیر پیدا کنید .

۶.۲۹ تاب ژئودزیک و راستاهای اصلی

همانطورکه در ۷.۲۱ دیدیم ، تاب ژئودزیک در یک نقطه فقط به راستا بستگی دارد . لذا ، می‌توان آن را برحسب زاویهٔ α از راستای اصلی به‌راستای مفروض بیان‌کرد . برای یافتن فرمول نظیر ، از مختصات منحنی‌الخطی استفاده می‌کنیم که در آن منحنیهای مختصات خطوط انحنا می‌باشند . دراین صورت ، داریم

$$b_{11} = k_1 g_{11}, \qquad b_{12} = g_{12} = 0, \qquad b_{22} = k_2 g_{22};$$
$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \qquad g^{12} = 0, \qquad g^{22} = \frac{1}{g_{22}},$$

که از آنجا

$$b_1^1 = b_{11} g^{11} = k_1, \qquad b_1^2 = 0, \qquad b_2^2 = b_{22} g^{22} = k_2.$$

با گذاردن این در (۲۸۰۲۱)، خواهیم داشت

$$\tau_g = \sqrt{g_{11} g_{22}} \left(k_2 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} - k_1 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} \right)$$

یا

$$\tau_g = (k_2 - k_1) \sqrt{g_{11} g_{22}} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds}. \qquad (۶۰۲۹)$$

زاویهٔ α از راستای اصلی (راستای خط u^1) با مولفه‌های δ_1^i به‌راستای منحنی داده شده با مولفه‌های du^i/ds از فرمول

$$\cos\alpha = \frac{g_{ij}\, \delta_1^i\, du^j/ds}{\sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}} \sqrt{g_{ij}\, \delta_1^i\, \delta_1^j}}$$

یا

$$\cos\alpha = \sqrt{g_{11}}\, du^1/ds$$

به‌دست می‌آید، زیرا برای پارامتر طبیعی داریم

$$g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1.$$

به‌همین نحو ،برای زاویهٔ $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ باراستای اصلی دیگر، فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{g_{22}}\, du^2/ds.$$

از تلفیق این دو فرمول، خواهیم داشت

$$\sqrt{g_{11} g_{22}} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} = \sin\alpha \cos\alpha = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

بالاخره، با گذاردن در (۶۰۲۹)، نتیجه می‌شود که

$$\tau_g = \tfrac{1}{2}(k_2 - k_1) \sin 2\alpha. \qquad (۷۰۲۹)$$

فرمول (۷۰۲۹) نتایج زیر را ایجاب می‌کند:

۱ . تاب ژئودزیک برای یک‌راستای اصلی صفراست؛

۲ . بالاخص، تاب ژئودزیک یک خط انحنا در هر نقطه صفر است ؛

۳ . در یک نقطهٔ نافی، تاب ژئودزیک در هر راستا صفر می‌باشد .

روی سطوح از کلاس C_2 ، این خواص راستاهای اصلی ،خطوط انحنا ، و نقاط نافی را به‌ترتیب توصیف می‌کنند ، و می‌توان آنها را به عنوان تعاریف مفاهیم متناظر به‌کار برد.

امثله و تمرین

۱ . ثابت کنید تابهای ژئودزیک دردوراستای متقارن نسبت به‌یک راستای اصلی قدر مطلقهای مساوی و علامات مخالف دارند .

۲ . ثابت کنید تابهای ژئودزیک در دو راستای متعامد قدرمطلقهای مساوی و علامات مخالف دارند .

۳ . ثابت کنید تاب ژئودزیک بیشترین و کمترین مقدار خود را در یک نقطه به‌ازای راستاهایی که زوایای بین راستاهای اصلی را نصف می‌کنند می‌گیرد .

۸
روشهای جدیدتر در هندسه دیفرانسیل

۳۰ نماد پایا

۱.۳۰ مقدمه

همانطورکه قبلاً دیدیم ، نماد بردار در فضای اقلیدسی سه بعدی ما را از دستگاه مختصات در فضا و امتحان پایایی نتایج تحت تغییر دستگاه مختصات بی‌نیاز می‌کند . از آن سو ، در نظریهٔ سطوح ، از مختصات منحنی‌الخط موضعی خیلی استفاده کرده و حتی بردارهای مماس را برحسب مولفه‌هایشان نسبت به یک پایه که به وسیلهٔ مختصات منحنی‌الخط معرفی می‌شود بیان می‌کنیم . در سالهای اخیر در تحقیقات هندسهٔ دیفرانسیل ، راه و رسم این بوده که بستگی به مختصات موضعی را با معرفی نمادی پایا که برای بردارهای مماس بر یک سطح یا ،به طور کلی ، بر یک چندگونا ، کارساز است ، حتی‌الامکان حذف نمایند . این به معنی تحریم کامل مختصات نیست ، زیرا در مسائل هندسی ملموس شخص باید مآلاً از دستگاه مختصاتی استفاده کند . اما مسائلی نظری نیز وجود دارند که در آنها استفاده از مختصات از نماد پایا راحتتر است . برای احتراز از مسائل انتظام ، در بخش ۳۰ و اکثر بخش ۳۱ به سطوح و چندگوناها از کلاس C_∞ محدود می‌شویم . همچنین ، فرض می‌کنیم همهٔ توابع ، نگاشتها ، میدانهای برداری ، و غیره از کلاس C_∞ باشند .

۲.۳۰ بردارهای مماس به‌عنوان اشتقاقها

یک روش مناسب برای بحث در بردارهای مماس بر یک سطح که هم پایا باشد (یعنی ، مستقل از مختصات موضعی) و هم ذاتی (یعنی ، مستقل از نحوهٔ نشاندن سطح در فضا) در تمرینهای ۵، ۶، ۷ از ۱.۱۶ توصیف شد . یعنی ، یک بردار مماس بر یک سطح در نقطه‌ای مانند P به عنوان یک *اشتقاق* گرفته شد ؛ یعنی، یک تابعی خطی مانند X_P که به هر تابع حقیقی از کلاس C_∞ عدد $X_P f$ را نسبت می‌دهد که در همسایگی P تعریف‌شده و در شرایط زیر صدق می‌کند :

$$X_P(af + bg) = aX_P f + bX_P g; \qquad (۱.۳۰)$$

$$X_P(fg) = (Xf)g(P) + f(P)X_Pg, \tag{۲۰۳۰}$$

که در آنها f, g تابع و a, b ثابت می‌باشند. ایـن ایجاب می‌کند که اگر تابع ثابت c بـاشـد،

$$X_Pc = 0. \tag{۳۰۳۰}$$

درواقع، فرض‌کنیم g تابعی‌باشد به‌طوری‌که $g(P) \neq 0$. بنابر (۱۰۳۰)، $X_P(cg) = cX_Pg$. از آن‌سو، بنابر (۲۰۳۰)، داریم $X_P(cg) = (X_Pc)g(P) + cX_Pg$. از مقایسهٔ دوفرمول با هم، نتیجه می‌شودکه $(X_Pc)g(P) = 0$، که (۳۰۳۰) را ایجاب می‌کند.

همانطور کـه در تمـرین ۵، ۶، ۷ در ۱۰۱۶ دیـدیم، بردار مماس بر یک منحنی پارامتری مـانـند $P = P(t)$ بر یک سطح در نقطهٔ P_0 نظیر به مقدار t_0 از پارامتر اشتقاق T_{P_0} است که با فرمول

$$T_{P_0}f = \frac{d}{dt}f(P(t_0)) \tag{۴۰۳۰}$$

داده می‌شود. برای این بردار مماس نماد $(dP/dt)_{P_0}$ را به‌کار خواهیم برد.

تحقیق اینکه مجموعهٔ *تمام اشتقاقها در نقطهٔ* P *یک فضای برداری دوبعدی تشکیل می‌دهند* نسبتاً "آسان است. برای این‌کار، مختصات موضعی مجاز (u^1, u^2) را درهمسایگی نقطهٔ P معرفی مـی‌کنیم. بـدون لطمه به کلیت، می‌توان فرض کرد P نظیر به مقادیر $u^1 = u^2 = 0$ از مختصات‌است. فرض کنیم f یک تابع حقیقی از کلاس C_∞ در همسایگی P بوده، و X_P اشتقاقی‌در P باشد. تابع f رامی‌توان‌تابعی از مختصات u^1, u^2 گرفت. طبق فرمول تیلور، در نقطهٔ متغیر $Q = (u^1, u^2)$ داریم

$$f(Q) = f(u^1, u^2) = f(0,0) = u^1f_1(0,0) + u^2f_2(0,0) + u^1R_1(u^1, u^2) + u^2R_2(u^1, u^2),$$

که در آن $\lim_{Q\to P} R_1(u^1, u^2) = 0$ و $\lim_{Q\to P} R_2(u^1, u^2) = 0$، و $f_1 = \partial f/\partial u^1,\ f_2 = \partial f/\partial u^2$. اگرمقادیر R_1 و R_2 رادر $P = (0,0)$، 0 تعریف کنیم، به توابعی از کلاس C_∞ در تمام همسایگی تبدیل می‌شوند. حال دو اشتقاق

$$\partial_{1,P}f = f_1(0,0), \qquad \partial_{2,P}f = f_2(0,0), \tag{۵۰۳۰}$$

را نیز در P معرفی مـی‌کنیم، که صرفاً " مشتقات‌جزئی در P اند. دراین صورت، داریم

$$f(Q) = f(P) + (\partial_{1,P}f)u^1(Q) + (\partial_{2,P}f)u^2(Q) + u^1(Q)R_1(Q) + u^2(Q)R_2(Q),$$

که در آن $u^1(Q), u^2(Q)$ مختصـات Q می‌باشند. بـا اعمال X_P بر تابع f و استفاده از (۱۰۳۰)، (۲۰۳۰)، و (۳۰۳۰) (توجه کنیدکه $f(P)$، ثابت است)، ودرنتیجه P، به‌دست می‌آوریم

$$X_Pf = (\partial_{1,P}f)X_Pu^1 + (\partial_{2,P}f)X_Pu^2 + (X_Pu^1)R_1(P)$$

$$+ u^1(P)X_P R_1 + (X_P u^2)R_2(P) + u^2(P)X_P R_2$$
$$= (X_P u^1)\partial_{1,P} f + (X_P u^2)\partial_{2,P} f,$$

زیرا $R_1(P) = R_2(P) = u^1(P) = u^2(P) = 0$. درنتیجه،

$$X_P = (X_P u^1)\partial_{1,P} + (X_P u^2)\partial_{2,P}. \qquad (۶۰۳۰)$$

لذا، هر اشتقاق ترکیبی خطی از $\partial_{1,P}, \partial_{2,P}$ است. فقط مانده استقلال $\partial_{1,P}, \partial_{2,P}$ را ثابت کنیم. فرض کنیم

$$a\,\partial_{1,P} + b\,\partial_{2,P} = 0.$$

چون $\partial_{i,P} u^j = \delta_i^j$ ، با اعمال اشتقاق طرف چپ بر u^1 به‌دست می‌آوریم $a = 0$ ، و با اعمال بر u^2 خواهیم داشت $b = 0$.

در جریان اثبات، پایهٔ (۵۰۳۰) مربوط به مختصات منحنی‌الخط (u^1, u^2) را معرفی کردیم. به آسانی معلوم می‌شود که این پایه با $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ در P با نماد گذاری قبلی ما یکی است، اگربردارهای نظیردرهر دو جهت را مثل تمرین ۵، ۱۰۱۶ ، یکی کنیم. همچنین، ثابت کردیم که مولفه‌های بردار X_P نسبت به این پایهٔ طبیعی $X_P u^i$ می‌باشند.

امثله و تمرین

۱ . ثابت کنید ∂_{1,P_0} و ∂_{2,P_0} به‌ترتیب بردارهایی مماس بر منحنیهای $u^1 = t, u^2 = u_0^2$ و $u^1 = u_0^1, u^2 = s$ در نقطهٔ $P_0 = (u_0^1, u_0^2)$ اند.

۲ . ثابت کنید T_{P_0} تعریف شده با فرمول (۴۰۳۰) درواقع یک اشتقاق در P_0 است.

۳۰۳۰ میدانهای برداری مماس

حال فرض کنیم P در قلمروی مانند $\mathscr{D}$ تغییر کرده، و X_P یک اشتقاق در P به‌ازای هر P در $\mathscr{D}$ باشد. به‌این‌ترتیب، یک میدان برداری مماس بر سطح به‌دست می‌آید. X_P ، وقتی بر تابع f تعریف شده در $\mathscr{D}$ اعمال می‌شود، به نقطهٔ P از $\mathscr{D}$ یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد. لذا، با حذف اندیس P ، می‌توان یک میدان برداری را یک عملگر X گرفت که تابع f را به تابع Xf می‌نگارد. این عملگر در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$X(af + bg) = aXf + bXg, \qquad a, b = \text{ثابت}; \qquad (۷۰۳۰)$$

$$X(fg) = (Xf)g + fXg. \qquad (۸۰۳۰)$$

عملگر X صادق در این شرایط یک **میدان برداری** یا یک **تبدیل بی‌نهایت کوچک** نامیده می‌شود. میدان برداری را از ***کلاس*** C_r گویند اگر Xf به‌ازای هر تابع از کلاس C_{r+1} از کلاس C_r باشد، البته مشروط بر اینکه $r + 1$ از کلاس سطح بزرگتر نباشد. در

حالت سطوح و توابع از کلاس C_∞ ، لازم نیست مواظب تقلیل کلاس توابع تحت یک تبدیل بی‌نهایت کوچک باشیم .

تبدیلات بی‌نهایت کوچک تعریف شده در قلمرو $\mathscr{D}$ بر یک سطح را می‌توان به‌طرز روشنی بهم افزود و یا در توابع ضرب کرد :

$$(X + Y)f = Xf + Yf;$$
$$(\alpha X)f = \alpha Xf.$$

جمع دارای‌خواص گروه‌است‌با $Xf \equiv 0$ به‌عنوان‌صفر جمع (که با 0 نموده‌می‌شود) ، و ضرب شرکتپذیر بوده و در قانون پخشپذیری صدق می‌کند . از دیدگاه جبری ، میدانهای برداری یک مدول روی حلقهٔ تعویضپذیر توابع تشکیل می‌دهند .

به‌طورموضعی ، در یک همسایگی با مختصات منحنی‌الخط (u^1, u^2) ، می‌توان میدان برداری X را ترکیبی خطی با ضرایب تابعی از دو میدان برداری مستقل ∂_1, ∂_2 گرفت به‌طوری که

$$\partial_i f = \partial f/\partial u^i;$$

یعنی ،

$$X = \xi^i \partial_i. \tag{۹۰۳۰}$$

۴۰۳۰ کروشهٔ دو میدان برداری

همانطور که پیشتر گفتیم ، ما خود را به میدانهای برداری و توابع از کلاس C_∞ محدود می‌کنیم . دو میدان برداری X, Y را در قلمرو $\mathscr{D}$ در نظر می‌گیریم . با اعمال متوالی Y و X بر تابعی از کلاس C_∞ ، تابع جدید XYf از کلاس C_∞ به‌دست می‌آید . لذا ، XY نیز یک عملگر بر توابع است . عملگر

$$[X, Y] = XY - YX \tag{۱۰۰۳۰}$$

کروشهٔ پواسن[1] (یا تعویضگر) میدانهای برداری X, Y نام دارد . کروشه خود یک میدان برداری است . درواقع ، (۷۰۳۰) بوضوح برقرار است . همانند (۸۰۳۰) ، داریم

$$XY(fg) = X[(Yf)g + f(Yg)] = (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + fXYg,$$

و ، از تعویض X و Y باهم ، خواهیم داشت

$$YX(fg) = (YXf)g + (Xf)(Yg) + (Yf)(Xg) + fYXg,$$

که از آنجا

---

1. *Poisson*

$$\begin{aligned}[X, Y](fg) &= XY(fg) - YX(fg) \\ &= (XYf)g - (YXf)g + fXYg - fYXg \\ &= ([X, Y]f)g + f[X, Y]g,\end{aligned}$$

که برقراری (۸۰۳۰) را ثابت می‌کند.

امثله و تمرین

۱ . ثابت کنید در یک همسایگی مختصات به مختصات (u^1, u^2) ، میدانهای برداری ∂_1, ∂_2 در خاصیت

$$[\partial_1, \partial_2] = 0$$

صدق می‌کنند.

۲ . ثابت کنید هرگاه $X = \xi^i\partial_i,\ Y = \eta^j\partial_j$ ، آنگاه

$$[X, Y] = \left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial u^i} - \eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial u^i}\right)\partial_j. \qquad (۱۱۰۳۰)$$

۳ . ثابت کنید تعویضگر در شرایط زیر صدق می‌کند :

$$[X, Y] = -[Y, X], \qquad [X, X] = 0, \qquad (۱۲۰۳۰)$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0. \qquad (۱۳۰۳۰)$$

همچنین ، ثابت کنید که

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X. \qquad (۱۴۰۳۰)$$

$$[X, gY] = g[X, Y] + (Xg)Y. \qquad (۱۵۰۳۰)$$

اتحاد (۱۳۰۳۰) *اتحاد ژاکوبی*[1] نام دارد.

۵۰۳۰ ضرب اسکالر بردارهای مماس

همانطور که در بخش ۱۶ و بعدا" در فصل ۶ دیدیم ، اولین فرم اساسی نقش مهمی در نظریهٔ سطوح دارد . اولین فرم اساسی به صورت مربع اسکالر بردارهای مماس به‌دست‌آمده است . در نماد پایای ما ، حاصل ضرب اسکالر میدانهای برداری جای اولین فرم اساسی را می‌گیرد . به‌ازای دو میدان برداری مماس X, Y ، حاصل ضرب اسکالر آنها را با (X, Y) نشان می‌دهیم ؛ یعنی ، تابعی که در هر نقطهٔ P مساوی حاصل ضرب اسکالر بردارهای X_P, Y_P در P است . این ضرب اسکالر از خواص زیر بهره‌مند است (α, β توابعی

---

1. *Jacobi*

دلخواهند) :

$$(X, Y) = (Y, X); \tag{۱۶.۳۰}$$

$$(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha(X, Z) + \beta(X, Z); \tag{۱۷.۳۰}$$

در هر نقطه که $X \neq 0$ ، $(X, X) > 0$. (۱۸.۳۰)

با استفاده‌ازاین ضرب اسکالر، می‌توان طول یک مسیر مانند $P = P(t), a \leq t \leq b$ را ، همساز با (۱۰.۱۶) ، از انتگرال

$$\int_a^b \sqrt{(dP/dt, dP/dt)}\, ds$$

به‌دست‌آورد . ضرایب اولین فرم اساسی در مختصات منحنی الخط (u^1, u^2) مساوی است با

$$g_{ij} = (\partial_i, \partial_j).$$

۶.۳۰ مشتق مطلق

تعاریف دیفرانسیل مطلق و مشتق مطلق یک میدان در امتداد یک منحنی که در زیربخش ۲.۲۳ شد را به‌یاد می‌آوریم . اینها به ترتیب تصویر دیفرانسیل و مشتق میدان بر صفحهٔ مماس‌برسطح بودند . فرمول (۶.۲۳) نشان می‌دهد که مشتق مطلق در یک نقطه به بردار مماس بر منحنی بستگی دارد تا خود منحنی . لذا ، می‌توان مشتق مطلق میدان برداری X را در جهت بردار Y_P در P تعریف کرد ، و ما این مشتق را با $\nabla_{Y_P}X$ نشان خواهیم داد . با متغیر P و میدان برداری Y ، میدان مشتقات مطلق یک میدان برداری مانند $\nabla_Y X$ می‌شود . به‌ازای میدان ثابت Y ، ∇_Y یک عملگر است که میدانهای برداری را بتوی میدانهای برداری می‌نگارد .

برای دستیابی به‌خواص عملگر مشتقگیری مطلق ،مختصات منحنی الخط را معرفی و از فرمول (۶.۲۳) استفاده می‌کنیم . فرض کنیم $X = \xi^i \partial_i, Y = \eta^j \partial_j$. ξ^i نقش a^i ، و η^j نقش du^j/dt در (۶.۲۳) را دارد . لذا ، خواهیم داشت

$$\nabla_Y X = \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \Gamma^k_{ij}\xi^i\right)\eta^j, \tag{۱۹.۳۰}$$

زیرا

$$\frac{d\xi^k}{dt} = \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt}.$$

از این فرمول به‌آسانی خواص زیر از ∇_Y به‌دست می‌آیند :

$$\nabla_Z(X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y; \tag{۲۰.۳۰}$$

(۲۱۰۳۰) $$\nabla_Y(fX) = f\nabla_Y X + (Yf)X;$$

(۲۲۰۳۰) $$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

که در آنها X, Y, Z میدان برداری و f, g تابع می‌باشند.

یک کلاس از مشتقهای مطلق ∇_Y صادق در (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰)، که Y همهٔ میدانهای مماس را می‌گیرد، یک همبندی نامیده می‌شود.

می‌توان ثابت کرد که هر همبندی ∇_Y صادق در شرایط (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰) را می‌شود، به‌مختصات، به‌شکل (۱۹۰۳۰) بیان کرد، که در آن Γ_{ij}^k توابعی از یک‌نقطه‌اند. درواقع، فرض کنیم $X = \xi^i\partial_i, Y = \eta^j\partial_j$. دراین صورت، طبق (۲۲۰۳۰)، داریم

$$\nabla_Y X = \nabla_{\eta^j\partial_j} = \eta^j(\nabla_{\partial_j}X).$$

همچنین، طبق (۲۰۰۳۰) و (۲۱۰۳۰)،

$$\nabla_{\partial_j}X = \nabla_{\partial_j}(\xi^i\partial_i) = \xi^i\nabla_{\partial_j}\partial_i + (\partial_j\xi^k)\partial_i = \xi^i\nabla_{\partial_j}\partial_i + \frac{\partial\xi^k}{\partial u^j}\partial_k;$$

درنتیجه،

$$\nabla_Y X = \left(\frac{\partial\xi^k}{du^j}\partial_k + (\nabla_{\partial_j}\partial_i)\xi^i\right)\eta^j.$$

چون $\nabla_{\partial_j}\partial_i$ یک میدان برداری مماس است، باید داشته باشیم

(۲۳۰۳۰) $$\nabla_{\partial_j}\partial_i = \Gamma_{ij}^k\partial_k,$$

زیرا ∂_k در هر نقطه یک پایه برای بردارهای مماس تشکیل می‌دهد. با گذاردن این در فرمول قبل، فرمولی به شکل (۱۹۰۳۰) به‌دست می‌آید.

بااینحال، این‌خواص همهٔ خواص مشتقگیری مطلق بر سطح ۲۰۲۳ نیستند. بخصوص، ایجاب نمی‌کنند که $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. داریم

$$\nabla_Y X = \left(\frac{\partial\xi^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k\xi^i\right)\eta^j\partial_k = \left(\frac{\partial\xi^k}{\partial u^j}\eta^j + \Gamma_{ij}^k\xi^i\eta^j\right)\partial_k,$$

$$\nabla_X Y = \left(\frac{\partial\eta^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k\eta^i\right)\xi^j\partial_k = \left(\frac{\partial\eta^k}{\partial u^j}\xi^j + \Gamma_{ji}^k\xi^i\eta^j\right)\partial_k.$$

اگر $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$، خواهیم داشت

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y = \left(\frac{\partial\xi^k}{\partial u^j}\eta^j - \frac{\partial\eta^k}{\partial u^j}\xi^j\right)\partial_k = [Y, X].$$

لذا، تقارن علایم کریستوفل شرط زیر را ایجاب می‌کند:

(۲۴۰۳۰) $$\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X].$$

حال خاصیت (۷۰۲۳) دیفرانسیل مطلق بیان شده برحسب عملگرهای مشتقات مطلق $\nabla_Y X$ شکل زیر را خواهد یافت:

$$Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y), \qquad (۲۵۰۳۰)$$

که در آن (,) حاصل ضرب اسکالر درایه‌ها را نشان می‌دهد.

خواص (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰) همراه با (۲۴۰۳۰) و (۲۵۰۳۰) عملگرهای $\nabla_Y X$ را به‌طور منحصر بفرد معین می‌کنند. برهان اساساً" همان برهان زیربخش ۲۰۱۸ است.

در بسیاری حالات، میدانهای X ی را درنظر می‌گیریم که فقط در امتداد منحنی $\mathscr{C}$ تعریف شده‌اند، و مشتق مطلق چنین میدان را در راستای یک بردار مماس بر منحنی به کار می‌بریم. برای توجیه استفاده از چنین مشتق، ثابت می‌کنیم که با آنکه میدان X را به مجموعهٔ بازی شامل منحنی وسعت می‌دهیم، مشتق $\nabla_Z X$ در راستای یک بردار مماس مانند Z برمنحنی به‌توسیع میدانهای X و Z بستگی ندارد. فرض کنیم $P = P(t)$ معادلهٔ منحنی $\mathscr{C}$ بوده و X, Y دو میدان برداری باشند که بر این منحنی منطبق‌اند و در قلمروی شامل $\mathscr{C}$ تعریف شده‌اند. همچنین، Z_0 یک بردار مماس بر منحنی در نقطهٔ P_0 بوده و Z توسیع دلخواه Z_0 به یک میدان برداری در همسایگی P_0 باشد. آنچه باید ثابت شود این است که $\nabla_Z(X - Y)$ در P_0 مساوی صفر است.

مختصات موضعی (u^1, u^2) را در همسایگی P_0 طوری معرفی می‌کنیم که منحنی داده شده منحنی ثابت = $u^2 = u_0^2$ باشد. لذا، $Z_{P_0} = \lambda \partial_{1,P_0}$، و به‌ازای هر تابع $f(P)$، که در امتداد منحنی ثابت و جاهای دیگر دلخواه است، داریم $Z_{P_0} f = 0$. البته،

$$X - Y = \alpha \partial_1 + \beta \partial_2.$$

چون در امتداد منحنی $X - Y = 0$، در نقاط منحنی ما $\alpha = \beta = 0$؛ و درنتیجه، $Z_{P_0}\alpha = Z_{P_0}\beta = 0$. بنابراین،

$$\begin{aligned}\nabla_{Z_{P_0}}(X - Y) = \nabla_{Z_{P_0}}(\alpha\partial_1 + \beta\partial_2) &= \alpha(P_0)\nabla_{Z_{P_0}}\partial_1 + (Z_{P_0}\alpha)\partial_1 \\ &+ \beta(P_0)\nabla_{Z_{P_0}}\partial_2 + (Z_{P_0}\beta)\partial_2 = 0.\end{aligned}$$

تمرین

۱. ثابت کنید (۲۴۰۳۰) ایجاب می‌کند که $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

۲. ثابت کنید هرگاه ∇_X و $\tilde{\nabla}_X$ دو همبندی مختلف باشند، یعنی هر دو در شرایط (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰) صدق کنند، آنگاه میدان برداری $T(X, Y) = \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$ به هردوی X و Y به‌طورخطی وابسته است؛ یعنی، به‌ازای میدانهای برداری X, Y, Z و توابع f, g،

$$T(fX+gY,Z)=fT(X,Z)+gT(Y,Z),$$
$$T(X,fY+gZ)=fT(X,Y)+gT(X,Z).$$

۳ . ثابت کنید به‌ازای هر ∇_X صادق در (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰) ،

$$S(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

نسبت بــه X و Y خطی بــوده و متقارن اریب است ، یعنی در همان شرایط T در تمرین قبل صدق می‌کند ؛ و ، بعلاوه ،

$$S(X,Y)=-S(Y,X).$$

S **تاب** همبندی ∇_Z نام دارد . فرمول (۲۴۰۳۰) معادل $S=0$ می‌باشد .

۷۰۳۰ کاربردهای هندسهٔ ذاتی سطوح

نماد بخش پیش را می‌توان در نظریهٔ سطوح به‌کار برد . با استفاده از مشتق مطلق $\nabla_Y X$ صادق در شرایط (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰) ، (۲۴۰۳۰) ، و (۲۵۰۳۰) ، شرط توازی میدان برداری X در امتداد $P=P(t)$ را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم :

$$\nabla_{dP/dt}X=0. \tag{۲۶۰۳۰}$$

همان‌طورکه‌دیدیم ، X فقط باید در امتداد منحنی تعریف شود تا (۲۶۰۳۰) معنی‌داشته باشــد .

یک خط ژئودزیک با این امر که بردار مماس بر آن در امتداد آن موازی است توصیف می‌شود .لذا ، $P=P(t)$ نمایش یک‌خط‌ژئودزیک‌است‌اگرو فقط‌اگر ، در هر نقطه ازمنحنی ،

$$\nabla_{dP/dt}\frac{dP}{dt}=0. \tag{۲۷۰۳۰}$$

خط ژئــودزیک $P=P(t)$ به‌طور منحصر بفــرد به‌وسیلهٔ نقطهٔ شروع $P_0=P(0)$ و بردار مماس شروع $X_{P_0}=(dP/dt)_{t=0}$ معین مــی‌شود . بــه‌ازای بردار مماس مفروض X_{P_0} ، تابع نمایــی

$$P(t)=\exp(tX_{P_0})$$

را تعریف می‌کنیم ، که در آن $P(t)$ خط‌ژئودزیک با بردار مماس شروع X_{P_0} است .

۸۰۳۰ توسیع نگاشتها به میدانهای برداری

در زیــربخش ۱۰۲۰ توضیح دادیم که چگونه نگاشت $\phi:\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}_2$ از یک سطح به دیگری را می‌تــوان بــه نــگاشتی از بردارهای مماس بر $\mathscr{F}_1$ بتوی بردارهای مماس بر $\mathscr{F}_2$ توسیع داد . ایــن توسیع با نماد فعلی ما خیلی ساده می‌شود . به‌ازای تابع f در $\mathscr{F}_2$ ،ترکیب

$f\circ\phi$ تابع f با نگاشت ϕ ، یعنی $(f\circ\phi)P = f(\phi P)$ ، یک‌تابع بر $\mathscr{F}_1$ است. اگر هر دوی f و ϕ از کلاس C_∞ باشند؛ ترکیب $f\circ\phi$ نیز چنین است.

حال میدان برداری مماس X بر $\mathscr{F}_1$ را درنظر می‌گیریم. نقش میدان برداری X تحت نگاشت توسیع یافته‌ی $X^* = \phi X$ را با

$$X^*f = Xf\circ\phi \qquad (۲۸.۳۰)$$

به‌ازای تابع f تعریف‌شده در $\mathscr{F}_2$ ، یا در نقش $\phi\mathscr{F}_1$ از $\mathscr{F}_1$ در $\mathscr{F}_2$ ،تعریف‌می‌کنیم.

تمرین

۱. تحقیق کنید X^* تعریف شده با (۲۸.۳۰) واقعاً" یک میدان برداری مماس بر $\mathscr{F}_1$ است.

۲. ثابت کنید $[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$.

۳. با استفاده‌از مختصات منحنی الخط موضعی، ثابت کنید توسیع نگاشت توصیف‌شده دراین بخش بر آنکه در ۱.۲۰ شد منطبق است.

۹.۳۰ عملگر انحنا

به‌ازای‌دومیدان برداری X, Y بر یک سطح، عملگر $R(X, Y)$ بر میدانهای‌برداری تعریف شده با فرمول

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad (۲۹.۳۰)$$

را درنظر می‌گیریم. این عملگر **عملگر انحنا** نامیده می‌شود. عملگر انحنا یک عملگرخطی است، و در X, Y متقارن اریب است؛ یعنی،

$$R(X, Y) = -R(Y, X), \qquad (۳۰.۳۰)$$

$$R(X, Y)(fU + gV) = fR(X, Y)U + gR(X, Y)V, \qquad (۳۱.۳۰)$$

که درآن X, Y, U, V میدان و f, g تابع می‌باشند.

خاصیت اول واضح است. برای اثبات (۳۱.۳۰)، ابتدا توجه می‌کنیم که (۲۰.۳۰) فوراً" ایجاب می‌کند که $R(X, Y)(U + V) = R(X, Y)U + R(X, Y)V$. لذا، کافی است‌ثابت‌کنیم ،به‌ازای‌هرتابع α و هرمیدان برداری Z ، $R(X, Y)(\alpha Z) = \alpha R(X, Y)Z$. بنابر (۲۱.۳۰)، داریم

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y(\alpha Z) &= \nabla_X[\alpha\nabla_Y Z + (Y\alpha)Z] \\ &= \alpha\nabla_X\nabla_Y Z + (X\alpha)\nabla_Y Z + (Y\alpha)\nabla_X Z + (XY\alpha)Z,\end{aligned}$$

که از آنجا

$$\nabla_X\nabla_Y(\alpha Z) - \nabla_Y\nabla_X(\alpha Z) = \alpha(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z) + (XY\alpha - YX\alpha)Z.$$

بعلاوه ،

$$\nabla_{[X,Y]}(\alpha Z) = \alpha\nabla_{[X,Y]}Z + [X, Y]Z = \alpha\nabla_{[X,Y]}Z + (XY\alpha - YX\alpha)Z.$$

با تفریق ، معلوم می‌شود که $R(X, Y)(\alpha Z) = \alpha R(X, Y)Z$ ، و نتیجه حاصل است .

اثبات اینکه $R(X, Y)Z$ به‌طور خطی به X و به Y وابسته است ، یعنی

$$R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z),$$
$$R(X, fY + gZ) = fR(X, Y) + gR(X, Z), \tag{۳۲۰۳۰}$$

را به‌خواننده وامی‌گذاریم .

این خواص $R(X, Y)Z$ ایجاب می‌کند که این میدان برداری‌در نقطهٔ‌مفروض P فقط به مقادیر میدانهای X, Y, Z در P بستگی دارد . به‌عبارت دیگر ، اگر در P ، $X_1 = X_2,\ Y_1 = Y_2,\ Z_1 = Z_2$ ، هرچه در جاهای دیگر باشند ، در P خواهیم داشت $R(X_1, Y_1)Z_1 = R_2(X_2, Y_2)Z_2$ ، اگرچه این‌معادله‌ممکن‌است در نقاط دیگر برقرارنباشد .

بالاخره ، عملگر انحنا بر یک سطح با متر یا ضرب اسکالر معین می‌شود ، زیرا متر مشتق مطلق $\nabla_Y X$ را معین می‌کند . با استفاده از خواص مشتق مطلق (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰) و (۲۴۰۳۰) ، می‌توان اتحادهای زیر را ثابت کرد :

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \tag{۳۳۰۳۰}$$

$$\begin{aligned}\nabla_X(R(X, Y)U) &+ \nabla_Y(R(Z, X)U) + \nabla_Z(R(X, Y)U)\\ &= R(X, Y)\nabla_Z U + R(Y, Z)\nabla_X U + R(Z, X)\nabla_Y U\\ &+ R([X, Y], Z)U + R([Y, Z]X)U + R([Z, X], Y)U.\end{aligned} \tag{۳۴۰۳۰}$$

اتحاد اول *اتحاد ریچی*[1] ، و اتحاد دوم *اتحاد بیانچی*[2] نام دارد . بعدا" ، در ۱۳۰۳۰ ، به (۳۴۰۳۰) شکل ساده‌تری خواهیم داد .

برای نشان دادن نوع محاسبات ، (۳۳۰۳۰) را ثابت کرده ، اثبات (۳۴۰۳۰) را به خواننده وامی‌گذاریم . طبق (۲۴۰۳۰) ، داریم

$$\nabla_Y Z = [Y, Z] + \nabla_Z Y \quad \text{و} \quad \nabla_X Z = [X, Z] + \nabla_Z X .$$

درنتیجه ،

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\\ &= \nabla_X[Y, Z] + \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Y[X, Z] - \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_{[X,Y]}Z\\ &= \nabla_X[Y, Z] + \nabla_Y[Z, X] + \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_{[X,Y]}Z\end{aligned}$$

---

1. Ricci
2. Bianchi

بعلاوه،

$$R(Y,Z)X=\nabla_Y\nabla_Z X-\nabla_Z\nabla_Y X-\nabla_{[Y,Z]}X,$$
$$R(Z,X)Y=\nabla_Z\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_Z Y-\nabla_{[Z,X]}Y.$$

لذا، طبق اتحاد ژاکوبی،

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y\\ &=\nabla_X[Y,Z]-\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_Y[Z,X]-\nabla_{[Z,X]}Y\\ &\quad+\nabla_Z(\nabla_X Y-\nabla_Y X)-\nabla_{[X,Y]}Z\\ &=[X,[Y,Z]]+[Y[Z,X]]+\nabla_Z[X,Y]-\nabla_{[X,Y]}Z\\ &=[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.\end{aligned}$$

تمرین

۱. فرمولهای (۳۲۰۳۰) و (۳۴۰۳۰) را ثابت کنید.

۲. عملگر $R^*(X,Y)$ را با فرمول

$$R^*(X,Y)Z=(X,Z)Y-(Z,Y)X$$

تعریف کنید، که در آن (X,Z) حاصل ضرب اسکالر X و Z، و (Z,Y) حاصل ضرب اسکالر Z و Y است. ثابت کنید عملگر $R^*(X,Y)$، مثل $R(X,Y)$، در همان‌شرایط (۳۰۰۳۰) تا (۳۴۰۳۰) صدق می‌کند. از این تمرین استفاده خواهیم کرد.

۱۰۰۳۰ عملگر انحنا و انحنای گاوسی

با استفاده از ضرب اسکالر، می‌توان عبارت

$$(R(X,Y)U,V)$$

را بـه‌ازای هـر چهـار میـدان برداری X, Y, U, V تشکیل داد، که نسبت به هر متغیر X, Y, U, V خطی با ضرایب تابعی است. همچنین است عبارت

$$(R^*(X,Y)U,V)=(X,U)(Y,V)-(U,Y)(X,V). \qquad (۳۵۰۳۰)$$

عبارت $(R(X,Y)U,V)$ در شرایط تقارن زیر صدق می‌کند:

$$(R(X,Y)U,V)=(R(U,V)X,Y), \qquad (۳۶۰۳۰)$$

$$(R(X,Y)U,V)=-(R(Y,X)U,V)=-(R(X,Y)V,U), \qquad (۳۷۰۳۰)$$

و شرطی که از (۳۳۰۳۰) نتیجه می‌شود:

$$(R(X,Y)U,V)+(R(Y,U)X,V)+(R(U,X)Y,V)=0. \qquad (۳۸۰۳۰)$$

اتحادهای مشابهی به‌وسیلهٔ $(R^*(X,Y)U,V)$ برقرار می‌شوند.

نسبت

$$\frac{(R(X, Y)X, Y)}{(R^*(X, Y)X, Y)} = \frac{(R(X, Y)X, Y)}{(X, X)(Y, Y) - (X, Y)^2}$$

را به‌ازای دو میدان برداری مستقل X, Y بر یک سطح درنظر می‌گیریم . این نسبت ، با آنکه ظاهرا" تابع X و Y است ، فقط به نقطهٔ سطح بستگی دارد . درواقع ، فرض کنیم

$$U = \alpha X + \beta Y, \qquad V = \gamma X + \delta Y$$

جفت دیگری از میدانهای مستقل باشد ؛ لذا ، $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. دراین صورت ، بنابر خاصیت خطی ، داریم

$$\begin{aligned}(R(U, V)U, V) &= (R(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)(\alpha X + \beta Y), \gamma X + \delta Y) \\ &= (\alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta)(R(X, Y)X, Y) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(R(X, Y)X, Y).\end{aligned}$$

به همین نحو ،

$$(R^*(U, V)U, V) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(R^*(X, Y)X, Y),$$

که از آنجا

$$\frac{(R(U, V)U, Y)}{(R^*(U, V)U, V)} = \frac{(R(X, Y)X, Y)}{(R^*(U, V)U, V)}.$$

برای یافتن معنی هندسی این نسبت ، مختصات موضعی (u^1, u^2) را معرفی کرده و قرار می‌دهیم $X = \partial_1, Y = \partial_2$. دراین صورت ، طبق (۲۳.۳۰) ، داریم

$$\begin{aligned}R(\partial_1, \partial_2)\partial_1 &= \nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2}\partial_1 - \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1}\partial_1 \\ &= \nabla_{\partial_1}(\Gamma^s_{12}\partial_s) - \nabla_{\partial_2}(\Gamma^s_{11}\partial_s) \\ &= \frac{\partial\Gamma^s_{12}}{\partial u^1}\partial_s + \Gamma^s_{12}\nabla_{\partial_1}\partial_s - \frac{\partial\Gamma^s_{12}}{\partial u^2}\partial_s - \Gamma^s_{11}\nabla_{\partial_2}\partial_s \\ &= \frac{\partial\Gamma^s_{12}}{\partial u^1}\partial_s + \Gamma^s_{12}\Gamma^r_{s1}\partial_r - \frac{\partial\Gamma^s_{11}}{\partial u^2}\partial_s - \Gamma^s_{11}\Gamma^r_{s2}\partial_r \\ &= \left(\frac{\partial\Gamma^s_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial\Gamma^s_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^r_{12}\Gamma^s_{r1} - \Gamma^r_{11}\Gamma^s_{r2}\right)\partial_s.\end{aligned}$$

چون $(\partial_s, \partial_2) = g_{2s}$ ، از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$(R(\partial_1\partial_2)\partial_1\, \partial_2) = \left(\frac{\partial\Gamma^s_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial\Gamma^s_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^r_{12}\Gamma^s_{r1} - \Gamma^r_{11}\Gamma^s_{r2}\right)g_{2s},$$

که از مقایسه با یکی از فرمولها برای انحنای گاوسی K در ۳۰.۱۸ نتیجه می‌دهد که

$$(R(\partial_1\partial_2)\partial_1\partial_2) = -Kg.$$

از آن سو،

$$(R^*(\partial_1\partial_2)\partial_1, \partial_2) = (\partial_1, \partial_1)(\partial_2, \partial_2) - (\partial_1, \partial_2)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = g.$$

با توجه به استقلال میدانهای برداری X, Y که در بالا ثابت شد، بهازای هر X, Y داریم

$$(R(X, Y)X, Y) = -K(R^*(X, Y)X, Y). \qquad (۳۹ \cdot ۳۰)$$

از این فرمول می‌توان برای تعیین انحنای گاوسی یک سطح برحسب عملگر انحنا استفاده کرد.

تمرین

۱. (۳۶ · ۳۰) تا (۳۸ · ۳۰) را ثابت کنید.

۲. ثابت کنید $(R^*(X, Y)U, V)$ در (۳۶ · ۳۰) تا (۳۸ · ۳۰) صدق می‌کند.

۱۱ · ۳۰ دومین فرم اساسی

دومین فرم اساسی یک فرم درجهٔ دوم نسبت به مولفه‌های du^1, du^2 بردارهای مماس بود. با نماد پایای ما، راحتتر آن است که از فرم دو خطی مربوطه استفاده کنیم. این به‌ما یک فرم دوخطی متقارن مانند $B(X, Y)$ می‌دهد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$B(X, Y) = B(Y, X); \qquad (۴۰ \cdot ۳۰)$$

$$B(\alpha X_1 + \beta X_2, Y) = \alpha B(X_1, Y) + \beta B(X_2, Y);$$

$$B(X, \alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha B(X, Y_1) + \beta B(X, Y_2), \qquad (۴۱ \cdot ۳۰)$$

که در آن α, β توابعی از نقطه‌اند.

در فصل ۷ از نگاشت کروی $\mathscr{S}$ در صفحهٔ مماس استفاده کردیم، که با دومین‌فرم اساسی معادل است به این معنی که دومین فرم اساسی را می‌توان با فرمول ساده‌ای از $\mathscr{S}$ به‌دست آورد و بالعکس. نگاشت کروی $\mathscr{S}$ قبلا" یک عملگر برداری بر میدانهای برداری است‌که X را به $\mathscr{S}X$ می‌برد. فرمولهای (۲ · ۱۸) و (۳ · ۱۸) که بین دومین فرم اساسی و نگاشت کروی رابطه برقرار می‌کنند در نماد فعلی معنی زیر را دارد:

$$B(X, Y) = -(\mathscr{S}X, Y) = -(\mathscr{S}Y, X).$$

مطالب فصل ۷، که در آن عملگر $\mathscr{S}$ بسیار به‌کار رفت، قبلا" در بیشتر قسمتها پایاست. خواننده می‌تواند بدون اشکال همهٔ آنها را به زبان نماد جدید انتقال دهد.

فقط متذکر می‌شویم که معادلهٔ گاوس (۱۵ · ۱۸) معادل

$$B(X, X)B(Y, Y) - [B(X, Y)]^2 = -(R(X, Y)X, Y), \qquad (۴۲ \cdot ۳۰)$$

و فرمول کودازی (۱۶۰۱۸) معادل

$$\nabla_X(\mathscr{S}Y) - \nabla_Y(\mathscr{S}X) = [X, Y] \qquad (۴۳۰۳۰)$$

می‌باشد.

تمرین

۱ . (۴۲۰۳۰) و (۴۳۰۳۰) را ثابت کنید.

۲ . معادله‌ای معادل (۴۲۰۳۰) بیابید که فقط برحسب عملگرهای $\mathscr{S}$ و $R(X, Y)$، بدون استفاده از ضرب اسکالر، بیان شده باشد.

★ ۱۲۰۳۰ تعمیم به چندگوناهای ریمانی

بحث میدانهای برداری به‌عنوان عملگرهایی بر توابع و صادق در (۷۰۳۰) و (۸۰۳۰) را می‌توان بی‌هیچ پیرایش برای چندگوناهای دیفرانسیل با بعد دلخواه مطرح کرد. یک چندگونای ریمانی، مضافا " ، یک ضرب اسکالر دارد که در هر نقطه از چندگونای (X, Y) تعریف شده است که در شرایط (۱۶۰۳۰) تا (۱۸۰۳۰) صدق می‌کند.

در همهٔ بحثهای ما، جز دریافتن (۳۹۰۳۰)، از این امر که سطح یک چندگونای دوبعدی است استفاده نکرده‌ایم. لذا، همهٔ نتایج تا فرمول (۳۸۰۳۰) درچندگوناهای n بعدی معتبر می‌مانند فقط با یک اختلاف که وقتی مختصات موضعی به‌کار می‌روند، اندیسها به‌جای $1, 2$ مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را می‌گیرند. مثلا " ، در اینجا پایه برای میدانهای برداری مربوط به مختصات منحنی‌الخط از n میدان برداری تشکیل شده است.

یک همبندی در یک چندگونا مجددا " یک عملگر مانند ∇_Y است که در شرایط (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰) صدق می‌کند. بعلاوه، اگر شرایط (۲۴۰۳۰) و (۲۵۰۳۰) رانیز بگذاریم، همبندی کاملا " به وسیلهٔ متر یا ضرب اسکالر (X, Y) معین می‌شود. با همبندی وضرب اسکالردردست، می‌توان عملگرانحنای $R(X, Y)$ رااز فرمول (۲۹۰۳۰)و $R^*(X, Y)$، مثل تمرین ۲، ۹۰۳۰، تعریف کرد. به‌همین نحو، $(R(X, Y)U, V)$ و $(R^*(X, Y)U, V)$ در (۳۵۰۳۰) تا (۳۸۰۳۰) صدق می‌کنند.

استدلال ۱۰۰۳۰ را نمی‌توان به خاطر بعد کاملا " به‌کار برد. اما، اگر میدانهای برداری X, Y را با دو میدان برداری که ترکیباتی خطی از X, Y اند عوض کنیم، نسبت $(R^*(X, Y)X, Y)$ $(R(X, Y)X, Y)$ تغییرنخواهدکرد. لذا، این نسبت به میدانهای‌صفحات σ پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای X, Y در هر نقطه به‌جای خود بردارها بستگی‌دارد. قرینهٔ این نسبت در نقطهٔ مفروض P به‌ازای صفحهٔ مفروض σ در فضای مماس در P را

انحنای مقطعی در P نسبت به σ دو بعدی نامیده و آن را با $K(P, \sigma)$ نشان می‌دهیم . درنتیجه ، داریم

$$(R(X, Y)X, Y) = -K(P, \sigma)(R^*(X, Y)X, Y), \tag{۴۴.۳۰}$$

که در آن ، در هر نقطهٔ P ، σ صفحهٔ پیموده شده به‌وسیلهٔ X, Y است .

درچندگوناهای‌ریمانی با بعد $n \geqslant 3$ ، قضیهٔ زیر ، منسوب به شور[1] ، برقرار است .

قضیه. ***اگر در یک چندگونای ریمانی با بعد $n \geqslant 3$ انحنای مقطعی در هر نقطه به دو راستا بستگی نداشته باشد ، این انحنا ثابت است : یعنی ، به نقطه نیز بستگی ندارد .***

قبل از اثبات قضیه ، ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم .

لم . ***اگر $K(P, \sigma)$ در (۴۴.۳۰) به σ بستگی نداشته‌باشد ، به‌ازای‌هر سه میدان X, Y, Z***

$$R(X, Y)Z = -K(R^*(X, Y)Z, \tag{۴۵.۳۰}$$

که در آن K انحنای مقطعی به‌عنوان تابعی از نقطه است .

برهان. باگذاردن $Y + V$ به‌جای Y در (۴۴.۳۰) واستفاده از اینکه $K(P, \sigma) = K(P)$ به σ بستگی ندارد ، به‌دست می‌آوریم

$$(R(X, Y + V)X, Y + V) = -K(R^*(X, Y + V)X, Y + \alpha V),$$

یا

$$(R(X, Y)X, Y) + (R(X, Y)X, V) + (R(X, V)X, Y) + (R(X, V)X, V)$$
$$= -K[(R^*(X, Y)X, Y) + (R^*(X, Y)X, V) + (R^*(X, V)X, Y) + (R^*(X, V)X, V),$$

و با اعمال مجدد (۴۴.۳۰) بر X, Y و X, V ، خواهیم داشت

$$(R(X, Y)X, V) + (R(X, V)X, Y) = -K[(R^*(X, Y)X, V) - (R^*(X, V)X, Y)]$$

یا ، بنابر (۳۶.۳۰) (به‌وسیلهٔ هردوی R و R^* برقرار می‌شود) ، به‌ازای هر V ،

$$(R(X, Y)X, V) = -K(R^*(X, Y)X, V),$$

که نتیجه می‌دهد

$$R(X, Y)X = -KR^*(X, Y)X. \tag{۴۶.۳۰}$$

حال با گذاردن $X + Z$ به‌جای X ، به‌دست می‌آوریم

$$R(X + Z, Y)(X + Z) = -KR^*(X + Z, Y)(X + Z),$$

---

1. Schur

$$R(X, Y)X + R(Z, Y)X + R(X, Y)Z + R(Z, Y)Z$$
$$= -K[R^*(X, Y)X + R^*(Z, Y)X + R^*(X, Y)Z + R^*(Z, Y)Z].$$

اگر مجدداً (۴۶.۳۰) را دوبار به‌کار بریم، درمی‌یابیم که

$$R(X, Y)Z + R(Z, Y)X = -K[R^*(X, Y)Z + R^*(Z, Y)X].$$

پس از یک جایگشت دوری $X \to Z \to Y \to X$، خواهیم داشت

$$R(Z, X)Y + R(Y, X)Z = -K[R^*(Z, X)Y + R^*(Y, X)Z]\cdot$$

اگر رابطهٔ دوم را از اول کم کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$2R(X, Y)Z + R(Z, Y)X - R(Z, X)Y = -K[2R^*(X, Y)Z + R^*(Z,Y)X - R^*(Z, X)Y].$$

بنابر اتحاد ریچی (۳۳.۳۰)،

$$R(Z, Y)X - R(Z, X)Y = -R(Y, Z)X - R(Z, X)Y = R(X, Y)Z$$

و، به‌همین نحو،

$$R^*(Z, Y)X - R^*(Z, X)Y = R^*(X, Y)Z.$$

بنابراین، $3R(X, Y)Z = -3KR^*(X, Y)Z$، و قضیه اثبات می‌شود.

حال می‌توان به اثبات قضیهٔ شور پرداخت. با گرفتن مشتق مطلق ∇_Z از طرفین (۴۶.۳۰)، که در آن Z با U عوض شده است، خواهیم داشت

$$(۴۷.۳۰)\quad \nabla_Z(R(X, Y)U) = -(ZK)R^*(X, Y)U - K\nabla_Z(R^*(X, Y)U).$$

$\mathfrak{S}\{\quad\}$ یعنی عملی که مرکب است از گرفتن مجموع عبارت داخل دو ابرو با دو عبارت حاصل از آن به‌وسیلهٔ دو جایگشت دوری متوالی $X \to Y \to Z \to X$. با این نماد، اتحاد بیانچی (۳۴.۳۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathfrak{S}\{\nabla_Z(R(X, Y)U)\} = \mathfrak{S}\{R(X, Y)\nabla_Z U\} + \mathfrak{S}\{R([X, Y], Z)U\}.$$

با اعمال $\mathfrak{S}$ بر طرفین (۴۷.۳۰)، داریم

$$\mathfrak{S}\{\nabla_Z(R(X, Y)U)\} = -\mathfrak{S}\{(ZK)R^*(X, Y)U\} - K\mathfrak{S}\{\nabla_Z(R^*(X, Y)U)\}.$$

و با اعمال اتحاد بیانچی، که برای R همانند R^* برقرار است، به‌دست می‌آوریم

$$\mathfrak{S}\{R(X, Y)\nabla_Z U\} + \mathfrak{S}\{R([X, Y], Z)U\}$$
$$= -\mathfrak{S}\{(ZK)R^*(X, Y)U\} - K\mathfrak{S}\{R^*(X, Y)\nabla_Z U\}$$
$$- K\mathfrak{S}\{R^*([X, Y], Z)U\}.$$

اما، طبق اتحاد (۴۵.۳۰)،

$R(X, Y)\nabla_Z U = -KR^*(X, Y)\nabla_Z U$ و $R([X, Y], Z)U = -KR^*([X, Y], Z)U$.

لذا ، اتحاد بالا با $\mathfrak{S}\{(ZK)R^*(X, Y)U\} = 0$ یا ، به شکل گسترده ، با

$$(ZK)R^*(X, Y)U + (XK)R^*(Y, Z)U + (YK)R^*(Z, X)U = 0$$

معادل است . حال فرض کنیم X یک میدان برداری ناصفر ، Y یک میدان برداری ناصفر متعامد به X ، و $Z = U$ یک میدان از بردارهای یکهٔ عمود بر X و Y باشد . چنین میدانهای برداری در همسایگی به‌قدر کافی کوچکی از هر نقطه وجود دارند ، زیرا بعد فضاهای برداری مماس ، طبق فرض ، دست کم 3 است . حال داریم

$$R^*(X, Y)U = (X, U)Y - (U, Y)X = 0 \qquad (\text{چون } (U, X) = (U, Y) = 0),$$
$$R^*(Z, X)U = (Z, U)X - (U, X)Z = X \qquad (\text{چون } (Z, U) = 1),$$
$$R^*(Y, Z)U = (Y, U)Z - (U, Z)Y = -Y.$$

بنابراین ،

$$(YK)X - (XK)Y = 0.$$

چون میدانهای X, Y ، بدلیل متعامد و ناصفر بودن ، مستقل‌اند ، این ایجاب می‌کند که $XK = 0$ و $YK = 0$. این ، چون میدانهای X, Y دلخواه و ناصفرند ، یعنی $K =$ ثابت ، و قضیه اثبات می‌شود .

۱۳.۳۰ مشتقگیری مطلق از تانسورها

در زیربخش ۳.۱۹ نشان دادیم که چگونه تانسورها را می‌توان مستقل از دستگاه‌مختصات ، به‌عنوان توابعی چند خطی از بردارها و همبردارها ، تعریف کرد . در ۱.۲۴ دیفرانسیل مطلق میدانهای تانسوری فقط برحسب مولفه‌های تانسور تعریف شدند . با نمادهای پایا ، راحتتر آن است که مشتق مطلق را مستقل از دستگاه مختصات تعریف کنیم .

با میدانهای *همبردارها* ، یعنی فرمهای خطی بر بردارها در هر نقطه ، آغاز می‌کنیم . یک میدان همبرداری ω ، که در بخش ۳۱ فرم دیفرانسیل خطی نامیده شد ، میدان‌برداری X را به‌تابع $\omega(X)$ می‌نگارد . گوییم میدان ω از کلاس C_∞ است اگر $\omega(X)$ ، به‌ازای هر میدان برداری X از کلاس C_∞ ، تابعی از کلاس C_∞ باشد . به‌ازای میدان برداری Y ، $\nabla_Y\omega$ را یک میدان همبرداری تعریف می‌کنیم به‌طوری که

$$Y\omega(X) = (\nabla_Y\omega)(X) + \omega(\nabla_Y(X)), \qquad (۴۸.۳۰)$$

که از آنجا

$$(\nabla_Y\omega)(X) = Y\omega(X) - \omega(\nabla_Y(X)).$$

اثبات خطی بودن $(\nabla_Y\omega)(X)$ با ضرایب تابعی نسبت به X و Y ، به این معنی که $T(X, Y) = (\nabla_Y\omega)(X)$ یک تانسور از نوع $(0, 2)$ است ، را به خواننده محول می‌کنیم .

درحالت‌کلی ، اگر T یک میدان تانسوری از نوع (k, l) بوده و Y یک میدان‌برداری باشد ، مشتق مطلق $\nabla_Y T$ را طوری تعریف می‌کنیم که

$$YT(\omega^1, \ldots, \omega^k; X_1, \ldots, X_l) = (\nabla_Y T)(\omega^1, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l)$$
$$+T(\nabla_Y\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l) + T(\omega_1, \nabla_Y\omega_2, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l) + \cdots$$
$$+ T(\omega^1, \ldots, \omega^{k-1}, \nabla_Y\omega^k, X_1, \ldots, X_l) + T(\omega^1, \ldots, \omega^k, \nabla_Y X_1, \ldots, X_l) + \cdots$$
$$+ T(\omega^1, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_{l-1}, \nabla_Y X_l). \quad (۴۹\cdot۳۰)$$

می‌توان ثابت کرد که $\tilde{T}(\omega^1, \ldots, \omega^k; X_1, \ldots, X_{l+1}) = (\nabla_{X_{l+1}} T)(\omega^1, \ldots \omega^k, X_1, \ldots, X_l)$ یک تانسور از نوع $(k, l+1)$ است .

گاهی انواع دیگر عملگر (علاوه بر علمگرهای چندخطی اسکالر بر همبردارها و بردارها) را می‌توان به‌عنوان تانسور تعبیر کرد . مثلاً ، یک عملگر خطی برداری T بر بردارها که میدان برداری X را به میدان برداری TX می‌نگارد را می‌توان به عنوان یک تانسور از نوع $(1, 1)$ تلقی کرد . درواقع ،

$$T(\omega, X) = \omega(T(X))$$

یک تانسور از نوع $(1, 1)$ است ، و تناظری یک به یک بین توابع دو خطی $T(\omega, X)$ و عملگرهای برداری T وجود دارد .

به همین نحو ، با قرار دادن

$$R(\omega, X, Y, Z) = \omega(R(X, Y)Z),$$

می‌توان عملگر انحنای R را به عنوان یک تانسور از نوع $(1,3)$ تعبیر کرد . مشتق مطلق این تانسور $\nabla_U R$ به‌ازای U معلوم باز یک تانسور از نوع $(1, 3)$ است و می‌تواند به‌عنوان یک عملگر برداری بر یک میدان برداری تعبیر مجدد شود که به‌طور خطی به دو میدان برداری $(\nabla_U R)(X, Y)$ با قرار دادن میدانهای برداری X, Y, Z و میدان همبرداری ω :

$$\omega((\nabla_U R)(X, Y)Z) = (\nabla_U R)(\omega, X, Y, Z)$$

بستگی دارد .این تعبیر مشتق مطلق تانسور انحنا خیلی به‌کار می‌رود . مثلاً ، با استفاده از این مفهوم ، می‌توان اتحاد بیانچی (۳۴۰۳۰) را ساده کرد ، و اتحاد معادل آن

$$(\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) = 0 \quad (۵۰\cdot۳۰)$$

را به‌دست آورد .

تمرین

۱ . با معرفی مختصات منحنی الخط موضعی و پایهٔ ∂_i و پایهٔ دوگان ∂^i (که در بخش ۳۱ با du^i نموده‌خواهدشد)،واستفاده از (۱۹۰۳۰)، ثابت کنید که‌تعریف‌مشتقگیری

مطلق از تانسورها دراین بخش بر تعریف شده در ۱۰۲۴ منطبق است .

۲ . حکم بیان شده بعد از فرمول (۴۸۰۳۰) ، و نیز حکم بعد از (۴۹۰۳۰) ، راثابت کنیـد .

۳ . ثابت کنید که

$$(\nabla_Z R)(X, Y)U = \nabla_Z(R(X, Y)U) - R(\nabla_Z X, Y)U - R(X, \nabla_Z Y)U - R(X, Y)\nabla_Z U.$$

۴ . با استفاده از فرمول اخیر و خواص (۲۰۰۳۰) تا (۲۲۰۳۰) و (۲۴۰۳۰) ، اتحاد بیانچی به شکل (۵۰۰۳۰) را ثابت کنید .★

۱۴۰۳۰ جادهنده‌ها از چندگوناها دریک چندگونای ریمانی

فرض کنیم ϕ یک نگاشت منتظم یا جادهنده‌ای از چندگونای $\mathscr{M}$ بتوی چندگونای ریمانی $\tilde{\mathscr{M}}$ باشد . چندگونای ریمانی دارای متر یا ضرب اسکالر میدانهای برداری مانند (X, Y) و همبندی ∇_Y القا شده‌به وسیلهٔ ضرب اسکالر است . فرض کنیم X, Y میدانهای‌برداری مماس بر $\mathscr{M}$ باشند. جادهنده را می‌توان به‌بردارهای مماس به‌همان نحو یک‌نگاشت از سطوح در ۸۰۳۰ توسیع داد . در $\mathscr{M}$ یک ضرب اسکالر تعریف می‌کنیم به این نحو که قرار می‌دهیم

$$(X, Y) = (\phi X, \phi Y),$$

که در آن طرف راست ضرب اسکالردر $\tilde{\mathscr{M}}$ است .واضح‌است‌که (X, Y) در شرایط(۱۶۰۳۰) و (۱۷۰۳۰) صـدق می‌کند . بـرای اثبات اینکه در (۱۸۰۳۰) نیز صدق می‌کند ، توجه می‌کنیم که نگاشت ϕ منتظم نام دارد (ر.ک. ۵۰۱۱) اگر توسیع آن در هر نقطه فضای برداری ممـاس را بـه یک فضای برداری با همان بعد ، و درنتیجه بردارهای ناصفر را به بـردارهـای نـاصفـر ، بنـگارد . لـذا ، اگـر $X \neq 0$ ، ϕX نیـز چنیـن اسـت و $(X, X) = (\phi X, \phi X) \neq 0$. درنتیجه ، (X, Y) چندگونارا به یک چندگونای ریمانی‌بدل می‌کند . متر (X, Y) را *متر القا* شده به‌وسیلهٔ جادهنده می‌نامیم .

همچنین ، اگر به‌ازای دو میدان برداری X, Y قرار دهیم

$$\nabla_Y X = \operatorname{proj} \tilde{\nabla}_{\phi(Y)} \phi X,$$

که در آن ''proj'' در هـر نقطهٔ $\phi(P)$ تصویر متعامد بردار روی صفحهٔ مماس بر جادهنده در P است ، می‌توانیم یک همبندی به $\mathscr{M}$ القا کنیم . این همبندی بر همبندی القا شده به‌وسیلهٔ متر القایی منطبق است .

اگر بعد $\tilde{\mathscr{M}}$ یکی بیشتر از بعد $\mathscr{M}$ باشد (که در این صورت ، می‌گوییم جادهنده از متمم بعـد یک است) ، می‌تـوان ، در نقاط $\phi(\mathscr{V})$ ، که $\mathscr{V}$ یک همسایگی به قدر کافی کوچکی در $\mathscr{M}$ است ، اقـلا " موضعی ، میدان N از بردارهای یکهٔ قائم به جادهنده را

تعریف کرد. این میدان را می‌توان در همسایگی نقش $\phi(\mathscr{V})$ به یک میدان توسیع داد. طبق استدلالی شبیه دو بند نهایی ۶.۳۰، می‌توان ثابت کرد که، به‌ازای بردار ϕX_P مماس برجادهنده درنقطهٔ $\phi(P)$، مشتق $\nabla_{\phi X_P} N$ از میدان X مستقل بوده و فقط به مقدار X_P در P بستگی دارد. چون $(N, N) = 0$، و درنتیجه $(\tilde{\nabla}_{\phi X_P} N, N_P) = 0$، بردار $\tilde{\nabla}_{\phi X_P} N$متعامد به N_P است و، لذا، مماس بر جادهنده بوده، و می‌توانیم تعریف کنیم

$$\mathscr{S}(X_P) = \phi^{-1}(\nabla_{\phi(X_P)} N).$$

$\mathscr{S}$ یک تبدیل خطی از فضای مماس است.

بخصوص، نظریهٔ سطوح را می‌توان، با گرفتن فضای اقلیدسی سه بعدی به عنوان $\mathscr{M}$، و سطح به عنوان یک نشاننده (یا، به‌طور کلیتر، جادهنده) از یک چندگونای دو بعدی، مطرح کرد.

از خواننده می‌خواهیم قسمتهایی از فصول ۵ تا ۷ را با این نمادها تنظیم نماید.

۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی

۱.۳۱ فرمهای دیفرانسیل خطی بریک سطح

فضای بردارهای مماس بر یک سطح در نقطه‌ای مانند P و مجموعهٔ تمام فرمهای خطی، یعنی توابع‌حقیقی ω_P از بردار مماس در P که در شرایط‌زیر صدق می‌کنند:

$$\omega_P(X_P + Y_P) = \omega_P(X_P) + \omega_P(Y_P),$$
$$\omega_P(aX_P) = a\omega_P(X_P),$$

را درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ تمام فرمهای خطی در نقطهٔ P یک فضای‌برداری‌دوبعدی ــ فضای دوگان فضای‌بردارهای مماس ــ را تشکیل می‌دهد. هر دو فرم خطی مستقل ω_P^1, ω_P^2 یک پایه برای این فضا می‌سازند؛ درنتیجه، هر فرم دیگر ω_P را می‌توان به شکل

$$\omega_P = a_i \omega_P^i$$

نمایش داد، که در آن a_i عدد می‌باشند.

فرض‌کنیم P در قلمرویی مانند $\mathscr{D}$ تغییر کند، و یک میدان از فرمهای خطی، یعنی فرمی خطی در هر نقطه، درنظر می‌گیریم. چنین میدانی از فرمها، به نام **فرم دیفرانسیل خطی**، تابعی‌است مانند ω که به میدان برداری X در $\mathscr{D}$ تابع حقیقی $\omega(X)$ رانسبت می‌دهد. ω، در تحدید به بردارهای مماس در نقطهٔ معلوم P، یک فرم‌خطی در P می‌شود. فرم دیفرانسیل خطی ω رامشتقپذیر از کلاس C_r نامیم اگر مقدارش $\omega(X)$ بر میدان برداری X از کلاس C_r یک تابع مشتقپذیر از کلاس C_r باشد. فرم دیفرانسیل خطی ω در خواص زیر صدق می‌کند:

$$\omega(X+Y)=\omega(X)+\omega(Y); \quad (۱۰۳۱)$$

$$\omega(aX)=a\omega(X), \quad (۲۰۳۱)$$

که در آن X, Y میدانهایی برداری بوده و a تابعی در قلمرو $\mathscr{D}$ می‌باشد. این خواص ایجاب مـی‌کنند کـه، بـه‌ازای هر مجموعه از توابع $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و میدانهای برداری $X_1, X_2, \ldots, X_n$، داشته باشیم

$$\omega(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=a_1\omega(X_1)+a_2\omega(X_2)+\cdots+a_n\omega(X_n). \quad (۳۰۳۱)$$

فرمهای دیفرانسیل خطی $\omega^1, \ldots, \omega^k$ را در قلمرو $\mathscr{D}$ مستقل گوییم اگر، در تحدید به هر نقطهٔ P از $\mathscr{D}$، فرمهای مستقلی در P شوند. درحالت سطح نمی‌تواند بیش از دو فرم مستقل در P وجود داشتـه بـاشد. اگـر فرمهای ω^1, ω^2 در $\mathscr{D}$ مستقل باشند، هر فرم دیفرانسیل خطی دیگر ω در $\mathscr{D}$ را می‌توان به شکل

$$\omega=a_i\omega^i \quad (۴۰۳۱)$$

نمایش داد، که در آن a_i تابعی از نقطه در $\mathscr{D}$ است.

فرض کنیم f یک تابع مشتقپذیر از کـلاس C_r برسطحی از کـلاس C_r باشد. فرم دیفرانسیل خطی df را با

$$df(X)=Xf \quad (۵۰۳۱)$$

تعریف می‌کنیم. اثبـات اینکه ایـن یک فرم دیفرانسیل خطی از کلاس C_{r-1} است را به خواننده وامی‌گذاریم. این فرم خطی **دیفرانسیل تابع** f نام دارد.

اگر مختصات منحنی الخط موضعی (u^1, u^2) را در همسایگیی معرفی کنیم، توابع u^1 و u^2 که‌به‌هرنقطهٔ P مختصاتش رانسبت می‌دهندتوابعی از کلاس C_r اند. دیفرانسیلهای du^i این توابع به هر میدان برداری مولفه‌های آن نسبت به پایهٔ طبیعی (∂_1, ∂_2) نظیر به مختصات موضعی را نسبت می‌دهد؛ یعنی، اگر $X=\xi^i\partial_i$،

$$du^i(X)=du^i(\xi^j\partial_j)=\xi^i. \quad (۶۰۳۱)$$

درواقع، داریم $du^i(\partial_j)=\partial_ju^i=\partial u^i/\partial u^j=\delta^i_j$، و $du^i(\xi^j\partial_j)=\xi^j\,du^i(\partial_j)=\xi^j\delta^i_j=\xi^i$.

فرمهای دیفـرانسیل خطی du^1, du^2 مستقل‌اند؛ ولذا، هر فرم دیفرانسیل خطی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\omega=a_i\,du^i,$$

که در آن a_i تابعی از (u^1, u^2) در همسایگیی که مختصات (u^1, u^2) معتبرند می‌باشد.

فرمول (۶۰۳۱) کاملا "برطبق تعبیر ما از علامات du^i به عنوان مولفه‌های بردار مماس در قسمت اصلی کتاب رفتار می‌کند.

توجه کنیـد کـه اگر تابع f را بر سطح به‌عنوان تابعی از مختصات u^1, u^2 درنظر

بگیریم ، خواهیم داشت

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i. \qquad (۷.۳۱)$$

درواقع ، طبق (۵.۳۱) و (۶.۳۱) ،

$$df(X) = df(\xi^i \partial_i) = \xi^i df(\partial_i) = \xi^i \partial f/\partial u^i = \partial f/\partial u^i\, du^i(X).$$

برای احتراز از محاسبات بیشتر کلاس فرمهای مورد بحث ، فرض می‌کنیم درآینده همهٔ سطوح ، چندگوناها ، نگاشتها ، فرمهای دیفرانسیل ، و میدانهای برداری مورد نظر از کلاس C_∞ باشند .

امثله و تمرین

۱ . تحقیق کنید که در نمایش $\omega = a_i du^i$ داریم

$$a_i = \omega(\partial_i). \qquad (۸.۳۱)$$

۲ . با استفاده از این نتیجه ، ثابت کنید فرم

$$\omega = a_i du^i$$

بر یک سطح از کلاس C_{r+1} از کلاس C_r است اگر و فقط اگر توابع a_i از کلاس C_r باشند .

۲.۳۱ فرمهای دیفرانسیل خطی در ابعاد بالاتر

اساسا" ، همان تعاریف و فرمولها را می‌توان در چندگوناهای n بعدی ــ بویژه ، در فضای اقلیدسی سه بعدی ــ به‌کار برد . تنها تفاوتها عبارتند از اینکه اندیسها و جمعبندیها ، به جای $1, 2$ ، روی مقادیر $1, 2, \ldots, n$ گرفته می‌شوند ، حداکثر n فرم مستقل وجود دارند ، و هر مجموعه از n فرم مستقل را می‌توان یک پایه برای تمام فرمهای دیفرانسیل خطی گرفت .

۳.۳۱ نگاشتها و فرمهای دیفرانسیل

به‌ازای دو چندگونای $\mathscr{M}$ ازبعد n و $\tilde{\mathscr{M}}$ ازبعد m ، فرض‌کنیم $\phi: \mathscr{M} \to \tilde{\mathscr{M}}$ یک نگاشت از کلاس C_∞ باشد . دراین صورت ، اگر فرم دیفرانسیل خطی $\tilde{\omega}$ در چندگونای $\tilde{\mathscr{M}}$ ، یا دست‌کم در نقش $\phi(\mathscr{M})$ ، داده شده باشد ، می‌توان فرم دیفرانسیل خطی $\omega = \phi^* \tilde{\omega}$ را در $\mathscr{M}$ به صورت زیر تعریف کرد . فرض کنیم X یک میدان برداری مماس بر $\mathscr{M}$ بوده ، و $\tilde{X} = \phi X$ نقش میدان X تحت توسیع ϕ به بردارهای مماس باشد . $\tilde{X}$ یک میدان مماس بر $\tilde{\mathscr{M}}$ است . قرار می‌دهیم

$$\phi^* \tilde{\omega}(X) = \tilde{\omega}(\tilde{X}) = \tilde{\omega}(\phi X). \qquad (۹.۳۱)$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که $\phi^*\tilde{\omega}$ یک فرم دیفرانسیل خطی در $\mathcal{M}$ است.

با استفاده از مختصات موضعی $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ در قلمروی مانند $\mathcal{D}$ بر $\mathcal{M}$ و $(v^1, v^2, \ldots, v^m)$ درقلمروی‌بر $\tilde{\mathcal{M}}$ که شامل‌نقش $\mathcal{D}$ است، می‌توان نگاشت را، درتحدید به $\mathcal{D}$، با دستگاهی از m تابع از n متغیر

$$v^\kappa = \phi^\kappa(u^1, \ldots, u^n), \qquad \kappa = 1, 2, \ldots, m \qquad (۱۰.۳۱)$$

نمایش داد.

چون سر و کار ما با چندگوناها با ابعاد مختلف است، قرار داد جمعبندی خود را با گذاشتن اینکه اندیسهایی که با حروف لاتینی i, j, k و غیره نموده می‌شوند مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را گرفته و اندیسهایی که با حروف یونانی κ, λ, μ و غیره نموده می‌شوند مقادیر $1, 2, \ldots, m$ را بگیرند پیرایش می‌کنیم.

میدان‌برداری مماس $X = \xi^i\partial_i$ به $\mathcal{M}$ به‌وسیلهٔ ϕ به میدان برداری $\tilde{X}$ با مولفه‌های

$$\eta^\kappa = \frac{\partial\phi^\kappa}{\partial u^i}\xi^i$$

نگاشته می‌شود. درنتیجه، طبق (۸.۳۱)،

$$\phi^*\tilde{\omega}(\xi^i\partial_i) = \tilde{\omega}\left(\frac{\partial\phi^\kappa}{\partial u^i}\xi^i\partial_\kappa\right).$$

اگر قرار دهیم $\phi^*\tilde{\omega}(\partial_i) = a_i$ و $\tilde{\omega}(\partial_\kappa) = b_\kappa$، بنابر (۸.۳۱) می‌توانیم بنویسیم

$\phi^*\tilde{\omega} = a_i\, du^i$ و $\tilde{\omega} = b_\kappa\, dv^\kappa$،

و، بنابر (۶.۳۱)، $\xi^i = du^i(X)$. لذا،

$$a_i\, du^i(X) = b_\kappa \frac{\partial\phi^\kappa}{\partial u^i}\, du^i(X)$$

یا، چون X دلخواه است،

$$a_i\, du^i = b_\kappa \frac{\partial\phi^\kappa}{\partial u^i}\, du^i. \qquad (۱۱.۳۱)$$

این یعنی فرم القایی $\phi^*\tilde{\omega}$ بیان شده با مختصات،از فرم $\tilde{\omega}$ در مختصات به وسیلهٔ تعویض صوری dv^κ با دیفرانسیل تابع نظیر v^κ از متغیرهای u^i به‌دست آمده است. این روند صوری در محاسبات خیلی مفید است.

امثله وتمرین

۱. فرض کنید $\tilde{\mathcal{M}}$ فضای اقلیدسی سه‌بعدی با مختصات دکارتی متعامد x^1, x^2, x^3، $\mathcal{M}$ صفحهٔ (x^1, x^2) بوده، و ϕ نشانندهٔ صفحه در فضا باشد. همچنین،

$\tilde{\omega} = dx^1 + dx^2 + dx^3$ ؛ یعنی ، فرم $\tilde{\omega}$ به هر بردار در هرنقطه مجموع سه‌مولفه‌اش را نسبت دهد . فرم القایی در صفحه خواهد بود $\phi^*\tilde{\omega} = dx^1 + dx^2$ که به هر بردار درصفحه مجموع‌دو مولفه‌اش (که مجموع هر سه مولفهٔ این بردار در فضا نیزهست ، زیرا مولفهٔ سوم مساوی صفر است) را نسبت می‌دهد .

۲ . فرض‌کنید $\mathscr{U}$ مجددا " فضای اقلیدسی سه بعدی ، $\mathscr{M}$ مارپیچ گون

$$x^1 = u^1 \cos u^2, \qquad x^2 = u^1 \sin u^2, \qquad x^3 = au^2,$$

و ϕ باز نگاشت شمول باشد . فرم $\tilde{\omega} = dx^1 + dx^2 + dx^3$ یک فرم دیفرانسیل خطی بر سطح القا می‌کند . برای یافتن فرم القایی برحسب du^1 و du^2 ، کافی‌است جایگذاری صوری

$$dx^1 = \cos u^2\, du^1 - u^1 \sin u^2\, du^2,$$

$$dx^2 = \sin u^2\, du^1 + u^1 \cos u^2\, du^2,$$

$$dx^3 = a\, du^1$$

را انجام داده ، بدین ترتیب به‌دست آورد که

$$\phi^*\tilde{\omega} = (\cos u^2 + \sin u^2 + a)\, du^1 + (u^1 \cos u^2 - u^1 \sin u^2)\, du^2.$$

۳ . فرض‌کنید $\Phi: \mathscr{Q} = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathscr{M}$ ، که در آن $\mathscr{M}$ یک چندگونای دیفرانسیل بوده ، و مختصات نقطهٔ $\mathscr{Q}$ ، (t, s) باشند . همچنین ، Φ مستقل از s ، دارای خواص زیر باشد :

$$\Phi(0, s) = P_0, \qquad \Phi(1, s) = P_1$$

و نیز ، $\tilde{\omega}$ یک فرم دیفرانسیل خطی در $\mathscr{M}$ باشد . دراین صورت ، $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$ یک فرم دیفرانسیل خطی در $\mathscr{Q}$ است ؛ و درنتیجه ،

$$\omega = a(t, s)\, dt + b(t, s)\, ds.$$

ثابت کنید $b(0, s)$ و $b(1, s)$ بستگی به s ندارند .

۴ . از تمرین قبل نتیجه بگیرید که اگر $\partial a/\partial s = \partial b/\partial t$ ،

$$I(s) = \int_0^1 a(t, s)\, dt$$

بستگی به s ندارد ؛ و درنتیجه ،

$$\int_0^1 a(t, 0)\, dt = \int_0^1 a(t, 1)\, dt.$$

۴.۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم و ضرب برونی فرمهای خطی

یک فرم دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم Ω به هر جفت مرتب از میدانهای برداری (X, Y)

تابع $\Omega(X, Y)$ را نسبت میدهدو در شرایطزیر صدق میکند : بهازای میدانهای برداری دلخواه X, Y, X_1, X_2 و تابع دلخواه f ،

$$\Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X) \quad (\text{متقارن اریب}), \tag{۱۲۰۳۱}$$

$$\Omega(X_1 + X_2, Y) = \Omega(X_1, Y) + \Omega(X_2, Y), \tag{۱۳۰۳۱}$$

$$\Omega(fX, Y) = f\Omega(X, Y). \tag{۱۴۰۳۱}$$

این خواص ایجاب میکنند که

$$\Omega(X, X) = 0, \tag{۱۵۰۳۱}$$

و، بعلاوه، قانون پخشپذیری در هر دو جا برقرار است؛ یعنی،

$$\Omega(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n, Y) = a_1\Omega(X_1, Y) + \cdots + a_n\Omega(X_n, Y)$$

و

$$\Omega(X, b_1Y_1 + \cdots + b_nY_n) = b_1\Omega(X, Y_1) + \cdots + b_n\Omega(X, Y_n),$$

که در آنها ضرایب $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ توابعی از یک نقطهاند.

یک طریقهٔ مهم برای بهدست آوردن فرمهای دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم ضرب برونیفرمهای خطی است. بهازای دوفرم دیفرانسیل خطی ω, θ ، **حاصل ضرب برونی** $\omega \wedge \theta$ را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$(\omega \wedge \theta)(X, Y) = \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X). \tag{۱۶۰۳۱}$$

از این تعریف فوراً نتیجه میشود که ضرب برونی فرمهای خطی متقارن اریب است :

$$\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega, \tag{۱۷۰۳۱}$$

و نسبت به هرعامل خطی است؛ یعنی، برای فرمهای $\omega^1, \ldots, \omega^n$ و توابع $a_1, \ldots, a_n$ ، داریم

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\omega^i\right) \wedge \theta = \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega^i \wedge \theta),$$

و، به همین نحو،

$$\omega \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\theta^k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k(\omega \wedge \theta^k).$$

همچنین، میتوان نتیجه گرفت که

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\omega^i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\omega^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\omega^i \wedge \omega^j.$$

مجموع دوم نیز مساوی است با

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_jb_i\omega^j \wedge \omega^i = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_jb_i\omega^i \wedge \omega^j.$$

از اینرو، نیز داریم

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\omega^i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\omega^j\right) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_ib_j - a_jb_i)\omega^i \wedge \omega^j.$$

حال قلمرو $\mathscr{D}$ به مختصات موضعی u^i را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $X = \xi^k\partial_k,\ Y = \eta^l\partial_l$ دو میدان برداری باشند. دراین صورت،

$$\begin{aligned} du^i \wedge du^j(X, Y) &= \xi^k\eta^l\, du^i \wedge du^j(\partial_k, \partial_l) \\ &= \xi^k\eta^l[du^i(\partial_k)\, du^j(\partial_l) - du^i(\partial_l)\, du^j(\partial_k)] \\ &= \xi^k\eta^l[\delta^i_k\, \delta^j_l - \delta^i_l\, \delta^j_k] = \xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i. \end{aligned}$$

اینک فرض کنیم Ω یک فرم دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم بوده، و قرار می‌دهیم

$$\Omega(\partial_i, \partial_j) = a_{ij}.$$

بنابراین،

$$\Omega = \tfrac{1}{2}a_{ij}\, du^i \wedge du^j. \qquad (۱۸۰۳۱)$$

ضرایب متقارن اریب $a_{ij} = -a_{ji}$ به‌طور منحصر بفرد به‌وسیلهٔ فرم و محتصات موضعی معین می‌شوند.

درواقع،

$$\Omega(X, Y) = \Omega(\xi^i\partial_i, \eta^j\partial_j) = \xi^i\eta^j\Omega(\partial_i\partial_j).$$

لذا،

$$\Omega(X, Y) = a_{ij}\xi^i\eta^j = a_{ji}\xi^j\eta^i = -a_{ij}\xi^j\eta^i,$$

زیرا

$$a_{ij} = \Omega(\partial_i, \partial_j) = -\Omega(\partial_j, \partial_i) = -a_{ji}.$$

درنتیجه،

$$\Omega(X, Y) = \tfrac{1}{2}a_{ij}(\xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i) = \tfrac{1}{2}a_{ij}\, du^i \wedge du^j(X, Y).$$

از آن‌سو، هرگاه $a_{ij} = -a_{ji}$ و $\Omega = \tfrac{1}{2}a_{ij}\, du^i \wedge du^j = 0$، آنگاه، با اختیار دو اندیس ثابت متمایز i_0, j_0 و فرض $X = \partial_{i_0},\ Y = \partial_{j_0}$، برای $\Omega(X, Y)$ فقط دو جملهٔ مجموع احتمالا" مخالف صفرند و

$$\begin{aligned} \Omega &= \tfrac{1}{2}a_{i_0j_0}\, du^{i_0} \wedge du^{j_0}(X, Y) + \tfrac{1}{2}a_{j_0i_0}\, du^{j_0} \wedge du^{j_0}(X, Y) \\ &= \tfrac{1}{2}a_{i_0j_0} - \tfrac{1}{2}a_{j_0i_0} = \tfrac{1}{2}a_{i_0j_0} + \tfrac{1}{2}a_{i_0j_0} = a_{i_0j_0} = 0, \end{aligned}$$

که صفر بودن همهٔ ضرایب را نشان می‌دهد.

حال می‌توان ثابت کرد که در نقطهٔ P، $\omega \wedge \theta \neq 0$ اگر و فقط اگر ω و θ دراین نقطه مستقل باشند.

با معرفی مختصات موضعی در همسایگی P ، می‌توان نوشت

$$\omega = a_i\, du^i, \qquad \theta = b_j\, du^j.$$

لذا ،

$$\omega \wedge \theta = a_i b_j\, du^i \wedge du^j = \tfrac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i)\, du^i \wedge du^j.$$

چون ضرایب $a_i b_j - a_j b_i$ متقارن اریب‌اند ، در P ، $\omega \wedge \theta = 0$ اگر و فقط اگر در P به‌ازای هر جفت i, j ، $a_i b_j - a_j b_i = 0$ ، کـه رخ می‌دهد اگر و فقط اگر در P ، $a_i = \lambda b_i$ یا $b_i = \mu a_i$.

درحالت یک سطح ، فقط دو فرم مستقل du^1, du^2 وجود دارند ؛ و درنتیجه ، فقط یک حاصل ضرب ناصفر du^1, du^2 وجود خواهد داشت . لذا ، فقط یک حاصل ضرب ناصفر $du^1 \wedge du^2 = -du^2 \wedge du^1$ وجود دارد و هرفرم دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم مساوی است با

$$\Omega = a\, du^1 \wedge du^2.$$

ما عمدا" همهٔ استدلالهای این بخش را بی‌استفاده از اینکه بعد 2 است بیان می‌کنیم ؛ درنتیجه ، همهٔ نتایج درحالت کلی چندگوناها با بعد دلخواه برقرارند .

امثله و تمرین

۱ . فرض کنید $U = aX + bY, V = cX + dY$. ثابت کنید به‌ازای هر فرم دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم Ω ، داریم

$$\Omega(U, V) = (ad - bc)\Omega(X, Y).$$

۲ . با استفاده از نتیجهٔ بخش پیش ، توجه کنید که اگر دترمینان جایگذاری در تمرین پیش 1 باشد ،

$$\Omega(U, V) = \Omega(X, Y).$$

۳ . یک جفت مرتب از بردارها در فضای مماس یک صفحهٔ جهتدار ــ صفحهٔ پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهاــ ، و یک مساحت ــ مساحت متوازی الاضلاح پیموده شده به‌وسیلهٔ دوبردار ــ معین می‌کند . یک جایگذاری با دترمینان 1 دو بردار را با جفت دیگری در همان صفحه عوض می‌کند ، و به صفحه همان جهت را داده و متوازی الاضلاعی با همان مساحت را می‌پیماید . دراین حالت گوییم دو جفت بردار یک **عنصر مسطح** معین می‌کنند . مسئلهٔ قبل را می‌توان این‌طور تعبیر هندسی کرد که بگوییم یک فرم دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم ، به‌جای خود جفت بردارها ، به عنصرهای مسطح که به وسیلهٔ جفت بردارها نمایش داده شده بستگی دارد .

۵۰۳۱ لم کارتان[1]

قضیهٔ زیر، به‌نام *لم کارتان*، ابزار سودمندی است.

قضیه. *فرض کنیم $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^k$ فرمهای خطی مستقلی در قلمرو $\mathscr{D}$ از یک چندگونای دیفرانسیل n بعدی بوده، و $k \le n$. هرگاه*

$$\theta^1 \wedge \omega^1 + \theta^2 \wedge \omega^2 + \cdots + \theta^k \wedge \omega^k = 0, \qquad (۱۹۰۳۱)$$

آنگاه

$$\theta^j = \sum_{i=1}^{k} a_i^j \omega^i \text{ ، که درآن } a_i^j = a_j^i. \qquad (۲۰۰۳۱)$$

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که کافی‌است قضیه در همسایگی بدلخواه کوچک هر نقطه از $\mathscr{D}$ ثابت‌شود. در همسایگی به‌قدر کافی کوچک یک نقطهٔ دلخواه، می‌توان‌مجموعهٔ‌فرمهای مستقل $\omega^1, \ldots, \omega^k$ را به یک پایه مانند $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^k, \omega^{k+1}, \ldots, \omega^n$ کامل کرد. دراین صورت، داریم

$$\theta^j = \sum_{i=1}^{k} a_i^j \omega^i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i^j \omega^i, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

درنتیجه،

$$\sum_{j=1}^{k} \theta^j \wedge \omega^j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} a_i^j \omega^i \wedge \omega^j + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=k+1}^{n} a_i^j \omega^i \wedge \omega^j$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} (a_i^j - a_j^i) \omega^i \wedge \omega^j + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=k+1}^{n} a_i^j \omega^i \wedge \omega^j = 0\cdot$$

این ایجاب می‌کند که به‌ازای $i,j = 1, \ldots, k$ ، $a_i^j - a_j^i = 0$ یا $a_i^j = a_j^i$ ؛ و به‌ازای $i = k+1, \ldots, n$ ، $a_i^j = 0$ ، و قضیه اثبات می‌شود.

۶۰۳۱ فرمهای دیفرانسیل برونی از درجهٔ دلخواه

یک فرم دیفرانسیل برونی ω از درجهٔ p ، در هر نقطهٔ P از چندگونا، یک فرم چند خطی از p بردار مماس است که متقارن اریب می‌باشد؛ یعنی، وقتی بر p بردار یک جایگشت زوج اعمال شود، مقدارش حفظ می‌شود؛ و وقتی جایگشت فرد باشد، علامتش

---

1. Cartan

تغییر می‌یابد. با نقطهٔ متغیر P ، ω به یک p تایی مرتب از میدانهای برداری $X_1, X_2, \ldots, X_p$ تابع $\omega(X_1, \ldots, X_p)$ را نسبت می‌دهد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\omega(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \ldots, X_{\pi(p)}) = \operatorname{sgn} \pi\, \omega(X_1, X_2, \ldots, X_p), \qquad (۲۱.۳۱)$$

که در آن π یک جایگشت‌از اعداد $1, 2, \ldots, p$ است و $\operatorname{sgn} \pi = 1$ اگرجایگشت زوج باشد ، و -1 است اگر فرد باشد:

$$\omega(X_1, \ldots, X_{k-1}, X + Y, X_{k+1}, \ldots, X_p) = \omega(X_1, \ldots, X_{k-1}, X, X_{k+1}, \ldots, X_p) + \omega(X_1, \ldots, X_{k-1}, Y, X_{k+1}, \ldots, X_p), \qquad (۲۲.۳۱)$$

$$\omega(X_1, \ldots, X_{k-1}, aX_k, X_{k+1}, \ldots, X_p) = a\omega(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_p). \qquad (۲۳.۳۱)$$

دو شرط اخیر خطی بودن نسبت به هر متغیر با ضرایب تابعی را ایجاب می‌کنند.

به‌ازای دو فرم دیفرانسیل برونی ω از درجهٔ p و θ از درجهٔ q ، **حاصل ضرب برونی** $\omega \wedge \theta$ را یک فرم دیفرانسیل برونی از درجهٔ $p + q$ تعریف می‌کنیم به‌طوری که

$$\omega \wedge \theta(X_1, X_2, \ldots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi\, \omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(p)}) \theta(X_{\pi(p+1)}, \ldots, X_{\pi(p+q)}), \qquad (۲۴.۳۱)$$

که در آن جمعبندی روی تمام جایگشتهای اعداد $1, 2, \ldots, p + q$ گرفته شده است. درحالت خاص دو فرم خطی ، این تعریف بر تعریف داده شده در ۴.۳۱ منطبق است.

ضرب برونی فرمهای دیفرانسیل برونی شرکتپذیر است؛ یعنی ، اگر ω, θ, σ فرمهای دیفرانسیل برونی به‌ترتیب از درجات p, q, r باشند ،

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \sigma = \omega \wedge (\theta \wedge \sigma). \qquad (۲۵.۳۱)$$

اثبات این امر ، با آنکه دراصل سر راست است ، در قسمت جایگشتها به دقت نیاز دارد.

همهٔ جایگشتهای π از اعداد $1, 2, \ldots, p + q + r$ را درنظر گرفته ، و آنها را به کلاسهای هم‌ارزی تقسیم می‌کنیم به این نحو که دو جایگشت π و π' را هم‌ارز گیریم اگر r عدد آخر را در همان مواضع قرار دهند؛ یعنی ، به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, r$ ، $\pi(p + q + i) = \pi'(p + q + i)$. هر کلاس هم‌ارزی شامل یک جایگشت π^* است ، که ما آن را **نمایش یکنوای** کلاس می‌نامیم، به طوری که $\pi^*(1) < \pi^*(2) < \cdots < \pi^*(p + q)$. حال جایگشتهای ρ ازاعداد $1, 2, \ldots, p + q$ را درنظر می‌گیریم. ρ را می‌توان با جایگشتی‌از اعداد $1, 2, \ldots, p + q + r$ یکی کرد که اعداد $p + q + 1, \ldots, p + q + r$ را بی‌تغییر

می‌گذارد.

اگر ترکیبات $\pi^*\rho$ یک نمایش یکنوای π^* از یک کلاس هم‌ارزی جایگشتها را با همهٔ جایگشتهای ρ که فقط بر $p+q$ اعداد اول اثر دارند اختیار کنیم، همهٔ جایگشتهای هم‌ارز با π^* به‌دست می‌آیند. لذا، هر جایگشت π را می‌توان به‌صورت ترکیبی از جایگشت یکنوای هم‌ارز π^* با جایگشت مناسبی چون ρ نمایش داد. واضح است که داریم $\operatorname{sgn}\pi = \operatorname{sgn}\pi^* \operatorname{sgn}\rho$.

به‌خاطر تقارن اریب حاصل ضرب $\omega \wedge \theta$، برای $\pi = \pi^*\rho$، و به‌ازای میدانهای دلخواه $X_1, \ldots, X_{p+q+r}$، داریم

$$\omega \wedge \theta(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(p+q)}) = \operatorname{sgn}\rho\, \omega \wedge \theta(X_{\pi^*(1)}, \ldots, X_{\pi^*(p+q)}). \tag{۲۶.۳۱}$$

اما، طبق تعریف، داریم

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \sigma(X_1, \ldots, X_{p+q+r}) = \frac{1}{(p+q)!r!}\sum_{\pi} \operatorname{sgn}\pi\, \omega \wedge \theta(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(p+q)})$$
$$\cdot\, \sigma(X_{\pi(p+q+1)}, \ldots, X_{\pi(p+q+r)}).$$

جمعبندی را می‌توان ابتدا در هر کلاس هم‌ارزی جداگانه، و سپس روی همهٔ کلاسهای هم‌ارزی انجام داد. دراین صورت، مجموع روی کلاس هم‌ارزی با نمایش یکنوای π^* مساوی است با

$$\sum_{\rho} \operatorname{sgn}\pi^* \operatorname{sgn}\rho\, \omega \wedge \theta(X_{\pi^*\rho(1)}, \ldots, X_{\pi^*\rho(k+q)})\sigma(X_{\pi^*(p+q+1)}, \ldots, X_{\pi^*(p+q+r)})$$

که، طبق (۲۶.۳۱)، مساوی است با

$$(p+q)! \operatorname{sgn}\pi^*\, \omega \wedge \theta(X_{\pi^*(1)}, \ldots, X_{\pi^*(p+q)})\sigma(X_{\pi^*(p+q+1)}, \ldots, X_{\pi(p+q+r)}).$$

درنتیجه،

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \sigma(X_1, \ldots, X_{p+q+r}) = \frac{1}{r!}\sum_{\pi^*} \operatorname{sgn}\pi^*\, \omega \wedge \theta(X_{\pi^*(1)}, \ldots, X_{\pi^*(p+r)})$$
$$\cdot\, \sigma(X_{\pi^*(p+q+1)}, \ldots, X_{\pi^*(p+q+r)}),$$

که در آن جمعبندی فقط روی نماینده‌های یکنوای π^* ازکلاسهای هم‌ارزی گرفته شده است.

اما، طبق تعریف $\omega \wedge \theta$، داریم

$$\omega \wedge \theta(X_{\pi^*(1)}, \ldots, X_{\pi^*(p+q)}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{\rho} \operatorname{sgn}\rho\, \omega(X_{\pi^*\rho(1)}, \ldots, X_{\pi^*\rho(p)})$$
$$\cdot\, \theta(X_{\pi^*\rho(p+1)}, \ldots, X_{\pi^*\rho(p+q)}),$$

که در آن ρ همهٔ جایگشتهای $1, 2, \ldots, p+q$ را می‌گیرد. با جایگذاری این در بالا، به‌دست می‌آید

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \sigma(X_1, \ldots, X_{p+q+r})$$
$$= \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\rho} \sum_{\pi^*} \operatorname{sgn} \pi^* \operatorname{sgn} \rho\, \omega(X_{\pi^*\rho(1)}, \ldots, X_{\pi^*\rho(p)})$$
$$\cdot \theta(X_{\pi^*\rho(p+1)}, \ldots, X_{\pi^*\rho(p+q)})\sigma(X_{\pi^*\rho(p+q+1)}, \ldots, X_{\pi^*\rho(p+q+r)}).$$

اما مجموعهٔ تمام ترکیبات $\pi^*\rho$ درست بر مجموعهٔ تمام ترکیبات π از اعداد $1, 2, \ldots, p+q+r$ منطبق است؛ درنتیجه،

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \sigma(X_1, \ldots, X_{p+q+r})$$
$$= \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi\, \omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(p)})\theta(X_{\pi(p+1)}, \ldots, X_{\pi(p+q)})$$
$$\cdot \sigma(X_{\pi(p+q+1)}, \ldots, X_{\pi(p+q+r)}).$$

استدلالی مشابه با تقسیم دیگری به‌کلاسهای‌هم‌ارزی، معلوم می‌سازد که همان فرمول‌برای $\omega \wedge (\theta \wedge \sigma)(X_1, \ldots, X_{p+q+r})$ برقرار است.

از تعریف ضرب برونی معلوم می‌شود که ضرب برونی نسبت به هر عاملش خطی است و در قانون تعویضپذیری زیر صدق می‌کند:

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{pq}\theta \wedge \omega, \tag{۲۷.۳۱}$$

که در آن p درجهٔ ω، و q درجهٔ θ است.

در یک‌همسایگی مختصات‌به‌مختصات موضعی u^i، می‌توان یک فرم برونی ازدرجهٔ p را به‌شکل

$$\omega = \frac{1}{p!} a_{i_1 \cdots i_p}\, du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p} \tag{۲۸.۳۱}$$

نمایش داد، که در آن ضرایب، اگر در اندیسهایشان متقارن اریب باشند، مساوی‌اند با

$$a_{i_1 \cdots i_p} = \omega(\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \ldots, \partial_{i_p}).$$

به‌همین نحو، اگر فرمهای دیفرانسیل خطی $\omega^i (i = 1, \ldots, n)$ یک پایه برای فرمهای دیفرانسیل خطی تشکیل دهند،

$$\omega = \frac{1}{p!} b_{i_1 \cdots i_p}\, \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}, \tag{۲۹.۳۱}$$

که در آن $b_{i_1 \cdots i_p} = \omega(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p})$، وبردارهای $X_1, \ldots, X_n$ پایهٔ دوگان را می‌سازند؛ یعنی، $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$.

از قانون تعویضپذیری برای ضرب برونی نتیجه می‌شود که، اگر دوعامل یکی باشند،

$$du^{i_1} \wedge du^{i_2} \wedge \cdots \wedge du^{i_p} = 0.$$

در پرتو نمایش (۲۸.۲۱)، هر فرم دیفرانسیل برونی از درجهٔ بالاتر از بعد چندگونا

صفر است. یک فرم از درجهٔ مساوی بعد n برابر است با $a\, du^1 \wedge du^2 \wedge \cdots \wedge du^n$.

می‌توان ثابت کرد که فرمهای دیفرانسیل خطی $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^k$ تابع نقطهٔ P اند اگر و فقط اگر در آن نقطه $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k = 0$.

در واقع، اگر فرمها وابسته باشند، یکی از آنها، مثلا" ω^k ، ترکیبی خطی از دیگران (دست کم در P) است: $\omega^k = a_1\omega^1 + \cdots + a_{k-1}\omega^{k-1}$. لذا،

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k = a_1\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{k-1} \wedge \omega^1 + a_2\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{k-1} \wedge \omega^2 + \cdots$$
$$+ a_{k-1}\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{k-1} \wedge \omega^{k-1} = 0.$$

برای اثبات عکس، در همسایگی P مختصات موضعی u^i را معرفی کرده و فرمها را به‌صورت ترکیبی خطی از فرمهای $du^1, \ldots, du^n$ نمایش می‌دهیم:

$$\omega^\kappa = a_i^\kappa\, du^i, \qquad \kappa = 1, 2, \ldots, k; \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

دراین صورت،

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = a_{i_1}^1\, du^{i_1} \wedge a_{i_2}^2\, du^{i_2} \wedge \cdots \wedge a_{i_k}^k\, du^{i_k},$$

که درآن $i_1, \ldots, i_k$ اندیسهای جمعبندی مستقل‌اند. درنتیجه،

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_k}^k\, du^{i_1} \wedge du^{i_2} \wedge \cdots \wedge du^{i_k}.$$

چون‌ضرایب متقارن‌اریب نیستند، نمی‌توان از $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = 0$ نتیجه گرفت که‌ضرایب صفرند.

بهرحال، اگر π جایگشتی از اعداد $1, \ldots, k$ باشد،

$$du^{i_{\pi(1)}} \wedge \cdots \wedge du^{i_{\pi(k)}} = \operatorname{sgn} \pi\, du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k},$$

و نیز داریم

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = \operatorname{sgn} \pi\, a_{i_{\pi(1)}}^1 \cdots a_{i_{\pi(k)}}^k\, du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k}.$$

درنتیجه،

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = \frac{1}{k!}\left(\sum_\pi \operatorname{sgn} \pi\, a_{i_{\pi(1)}}^1 \cdots a_{i_{\pi(k)}}^k\right) du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k},$$

که درآن جمعبندی $\sum$ روی تمام جایگشتهای π از $1, 2, \ldots, p$ گرفته شده است. این ضرایب‌جدیداز قبل متقارن اریب‌اند؛ درنتیجه، همه مساوی صفر می‌باشند، ولی مجموع داخل پرانتز مساوی دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1}^1 & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_k}^1 \\ a_{i_1}^2 & a_{i_2}^2 & \cdots & a_{i_k}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_1}^k & a_{i_2}^k & \cdots & a_{i_k}^k \end{vmatrix}$$

لذا، $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = 0$ ایجاب می‌کند که همهٔ این دترمینانها صفرند، که خود به‌معنی این است که سطرهای ماتریس

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \end{pmatrix}$$

وابسته‌اند یا که فرمهای $\omega^1, \ldots, \omega^k$ وابسته‌اند، و حکم ثابت است.

برای تکمیل تعریف ضرب برونی فرمهای دیفرانسیل برونی از درجات مختلف، یک تابع را یک‌فرم از درجهٔ 0 گرفته و **ضرب برونی تابع** f و فرم ω را مساوی فرم $f\omega$ تعریف می‌کنیم، که $f \wedge \omega = \omega \wedge f = f\omega$.

۷۰۳۱ دیفرانسیل برونی یک فرم دیفرانسیل خطی

به‌ازای فرم دیفرانسیل خطی ω، ***دیفرانسیل برونی*** فرم ω فرم دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم $d\omega$ است به‌طوری‌که، به‌ازای هر دو میدان برداری X, Y،

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]). \qquad (۳۰۰۳۱)$$

اثبات اینکه این یک فرم دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم است به خواننده محول می‌شود.

اگر $\omega = df$ دیفرانسیل یک تابع باشد،

$$d\omega = 0. \qquad (۳۱۰۳۱)$$

درواقع،

$$(ddf)(X, Y) = X\,df(Y) - Y\,df(X) - df([X, Y])$$
$$= XYf - YXf - [X, Y]f = 0.$$

یک فرم دیفرانسیل خطی که در قلمروی چون $\mathscr{D}$ در شرط (۳۱۰۳۱) صدق کند، در قلمرو $\mathscr{D}$ **بسته** نامیده‌می‌شود. اگر در $\mathscr{D}$، $\omega = df$، ω را در $\mathscr{D}$ ***کامل*** می‌گوییم. نتیجهٔ قبلی ما یعنی هر فرم کامل بسته است. عکس این فقط موضعی درست است؛ یعنی، در همسایگی به‌قدر کافی کوچک هر نقطه. در تمرینات به این مبحث بازخواهیم گشت.

از تعریف دیفرانسیل برونی فرم دیفرانسیل خطی ω، معلوم می‌شود که

$$d(\omega^1 + \omega^2) = d\omega^1 + d\omega^2,$$

و (۳۱۰۳۱)

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f\,d\omega.$$

معادلهٔ اول را می‌توان به مجموع تعدادی دلخواه فرم تعمیم داد.

در یک قلمرو به مختصات موضعی u^i داریم

$$\omega = a_i\, du^i,$$

که از آنجا

$$d\omega = da_i \wedge du^i + a_i\, ddu^i = da_i \wedge du^i. \qquad (۳۳۰۳۱)$$

چون

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} du^j,$$

داریم

$$d\omega = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} du^j \wedge du^i = \frac{\partial a_j}{\partial u^i} du^i \wedge du^j,$$

اما ، از آن سو ،

$$d\omega = -\frac{\partial a_i}{\partial u^j} du^i \wedge du^j,$$

زیرا $du^j \wedge du^i = -du^i \wedge du^j$. لذا ، خواهیم داشت

$$d\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial u^i} - \frac{\partial a_i}{\partial u^j}\right) du^i \wedge du^j \qquad (۳۴۰۳۱)$$

با ضریب متقارن اریب

$$\frac{\partial a_j}{\partial u^i} - \frac{\partial a_i}{\partial u^j}.$$

فرمولهای (۳۳۰۳۱) و (۳۴۰۳۱) فرمولهایی عملی‌اند که برای تعیین دیفرانسیل برونی یک فرم خطی داده شده است .

امثله و تمرین

۱ . دیفرانسیل برونی فرمهای دیفرانسیل خطی زیر در صفحه و فضای اقلیدسی سه‌بعدی زیر را پیدا کنید :

(آ) $x\,dx - y\,dy$ ؛

(ب) $x\,dy - y\,dx$ ؛

(پ) $z\,dx + x\,dy + y\,dz$.

۲ . ثابت کنید فرم $x\,dx + y\,dy + z\,dz$ در فضای اقلیدسی سه بعدی هم بسته و هم کامل است .

۳ . به‌ازای فرم دیفرانسیل خطی ω در چندگونای $\mathscr{M}$ ، نقطهٔ ثابت P_0 و نقطهٔ متغیر

P را در $\mathscr{M}$ درنظر بگیرید . فرض کنید $Q = \phi(t), 0 \leq t \leq 1$ مسیری بین نقاط P_0 و P باشد .فرم $\phi^*\omega$ یک‌فرم‌دیفرانسیل‌خطی در $[0, 1]$ است ؛ لذا ، $\phi^*\omega = a(t)\,dt$. تابع a به انتخاب مسیر بستگی دارد . ثابت کنید هرگاه

$$I_\phi(P) = \int_0^1 a(t)\,dt$$

فقط تابع P بوده ولی از مسیر بین P_0 و P مستقل باشد ، آنگاه

$$\omega = dI.$$

۴ . فرض کنید $\phi: \mathscr{M} \to \tilde{\mathscr{M}}$ یک نگاشت مشتق‌پذیر ازچندگونای دیفرانسیل $\mathscr{M}$ بتوی $\tilde{\mathscr{M}}$ بوده، و نیز ، $\tilde{\omega}$ یک فرم دیفرانسیل برونی از درجه‌ٔ p در $\tilde{\mathscr{M}}$ باشد . دراین صورت ، فرم القایی $\phi^*\tilde{\omega}$ ، شبیه حالت $p = 1$ ، با

$$\phi^*\tilde{\omega}(X_1, \ldots, X_p) = \tilde{\omega}(\phi X_1, \ldots, \phi X_p)$$

تعریف می‌شود . صحت این تعریف را ثابت کنید .

۵ . ثابت کنید ،تحت شرایط تمرین‌قبل ،اگر $\tilde{\omega}$ یک فرم دیفرانسیل خطی در $\tilde{\mathscr{M}}$ باشد ،

$$d(\phi^*\tilde{\omega}) = \phi^*(d\tilde{\omega}). \qquad (۳۵\cdot۳۱)$$

۶ . فرض کنید $\mathscr{D}$ یک قلمرو همبند و همبند ساده در چندگونای M بوده، و ϕ, ψ دو مسیر واصل دو نقطه‌ٔ P_0, P_1 باشند . طبق تعریف همبندی ساده، یک تغییر شکل پیوسته از مسیر ϕ به ψ ، یعنی‌تابعی مانند $\Phi:[0, 1] \times [0, 1] \to \mathscr{D}$ ،هست به‌طوری‌که

$$\Phi(t, 0) = \phi(t), \qquad \Phi(t, 1) = \psi(t),$$
$$\Phi(0, s) = P_0, \qquad \Phi(0, s) = P_1.$$

می‌دانیم که اگر چندگونا و مسیرهای ϕ, ψ از کلاس C_∞ باشند ، Φ ای می‌توان یافت که آن نیز از کلاس C_∞ باشد .

حال فرض‌کنید ω یک فرم دیفرانسیل خطی بسته در $\mathscr{D}$ باشد . فرم $\Phi^*\omega = a(t, s)\,dt + b(t, s)\,ds$ نیز یک‌فرم بسته است ، زیرا $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega) = 0$.لذا ،

$$d\phi^*\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial s}\right) dt \wedge ds = 0,$$

که از آنجا $\partial b/\partial t - \partial a/\partial s = 0$. با استفاده از تمرین ۳ ، ۳۰۳۱ ، و تمرین ۳ زیر بخش فعلی ، ثابت کنید ω یک فرم کامل در $\mathscr{D}$ است .

۷ . فرم

$$\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$$

نمونه‌ای است از یک فرم بسته در صفحه بدون مبداء (لذا ،در قلمروی تعریف شده که همبند ساده نیست) که در تمام قلمرو خود کامل نیست .

۸۰۳۱ دیفرانسیلهای برونی فرمها از درجهٔ بالاتر

مشتقگیری برونی را می‌توان به فرمهای دیفرانسیل برونی از درجات دلخواه تعمیم داد به نحوی که دیفرانسیل $d\omega$ فرم ω از درجهٔ p یک فرم درجهٔ $p+1$ بوده، و شرایط زیر برقرار باشند :

$$d\,d\omega = 0; \qquad (۳۶۰۳۱)$$

$$d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta; \qquad (۳۷۰۳۱)$$

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta, \qquad (۳۸۰۳۱)$$

که در آن p درجهٔ فرم ω است .

این شرطها مشتقگیری برونی را بـه‌طور منحصر بفرد معین می‌کنند . می‌توان برای دیفرانسیل برونی یک فرم از درجهٔ p فرمولهایی مشابه (۳۰۰۳۱) به‌دست آورد ، ولی ما خود را به یافتن عبارتی برای دیفرانسیل برحسب مختصات محدود می‌کنیم .

ابتدا توجه می‌کنیم که

$$d(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p}) = 0.$$

درواقع ، $d(du^i \wedge du^j) = d\,du^i \wedge du^j - du^i \wedge d\,du^j = 0$ ، و ، بنابر استقرا ، $d(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k}) = 0$ ایجاب می‌کند که

$$d(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_{k+1}}) = d(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k}) \wedge du^{i_{k+1}} + (-1)^k du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k} \wedge d\,du^{i_{k+1}} = 0.$$

درنتیجه ، هرگاه

$$\omega = \frac{1}{p!} a_{i_1 i_2 \cdots i_p} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p},$$

آنگاه

$$d\omega = \frac{1}{p!} da_{i_1 i_2 \cdots i_p} \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p}.$$

مثل‌حالت $p = 1$ ،فرم ω را **بسته**نامنداگر $d\omega = 0$ ،و**کامل** نامند اگر $\omega = d\theta$ ، که در آن θ یک فرم از درجهٔ $p - 1$ است . همچنین ، در اینجا هر فرم کامل بسته‌است ولی‌عکس آن فقط موضعی‌و درهمسایگیهای به‌قدر کافی‌کوچک درست است .بررسی فرمهای دیفرانسیل برونی کامل و بسته بریک چندگونا کلا " اطلاعاتی از نهاد توپولوژیک چندگونا

به‌ما می‌دهد ، ولی این بررسی از حوصلهٔ این کتاب خارج است .

۹۰۳۱ کاربردهای فرمهای دیفرانسیل برونی

ما در اینجا خود را به‌کاربرد فرمهای دیفرانسیل برونی در نظریهٔ سطوح محدودمی‌کنیم . به خوانندگانی‌که به‌کاربردهای دیگر فرمهای دیفرانسیل برونی علاقه‌مندند ، کتاب هارلی فلاندرز[1] را توصیه می‌کنیم .

توجه کنید که در نظریهٔ منحنیها و نظریهٔ سطوح از کنجهایی وابسته به منحنی یا سطح استفاده کردیم . درحالت منحنیها ، این سه وجهی فرنهٔ متعامد یکهٔ جهتدار باجهت مثبت بود . درحالت سطوح ، کنج به وسیلهٔ پارامتری سازی القا شده و از بردارهای $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ تشکیل شده بود و بالاجبار تناسب کنجهای متعامد یکه را فدا کردیم . فرمهای دیفرانسیل برونی به‌ما توان استفاده از کنجهای متعامد دراین حالت را نیز می‌دهد . سه بخش بعد فقط مثالی از این استفاده به‌دست می‌دهد که منجر به تشکیل راستاهای اصلی می‌شود . این یک توضیح نسبتا "مصنوعی و ناقص بوده ، و از نشان‌دادن قدرت و سودمندی کامل روش فرمهای دیفرانسیل برونی در هندسه بدور است .

۱۰۰۳۱ میدان کنجهای موضعی بریک سطح

یک سطح و در هر نقطهٔ P آن کنجی مرکب از سه بردار مستقل $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ درنظر می‌گیریم . فرض‌کنیم $\mathbf{v}$ یک بردار مماس بر سطح در P باشد . دراین صورت ، سه مولفهٔ $\mathbf{v}$ نسبت‌به $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ فرمهایی‌خطی‌برسطح‌در P می‌باشند . این فرمها را با $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ نشان می‌دهیم . درنتیجه ،

$$\mathbf{v} = \omega^1(\mathbf{v})\mathbf{e}_1 + \omega^2(\mathbf{v})\mathbf{e}_2 + \omega^3(\mathbf{v})\mathbf{e}_3 = \omega^\kappa(\mathbf{v})\mathbf{e}_\kappa, \qquad \kappa = 1, 2, 3.$$

خود بردار $\mathbf{v}$ را می‌توان مقدار دیفرانسیل تابع برداری $\mathbf{r}(P)$ به‌ازای $\mathbf{v}$ تصور کرد که به هر نقطهٔ P بردار موضع آن را نسبت می‌دهد ، $\mathbf{v} = d\mathbf{r}(\mathbf{v})$. لذا ، می‌توان نوشت

$$d\mathbf{r} = \omega^\kappa \mathbf{e}_\kappa. \qquad (۳۹۰۳۱)$$

آنچه داریم یک فرم دیفرانسیل خطی برداری است . با اینحال ، می‌توان ، با استفاده از یک دستگاه‌مختصات ثابت در فضای اقلیدسی سه بعدی و گرفتن معادلهٔ برداری به‌عنوان تلخیص یک دستگاه از سه معادلهٔ اسکالر برای مولفه‌ها ، از گسترش نظریهٔ این نوع فرمها

---

1. Harley Flanders, *Differential Forms with Applications to Physical Sciences*, Academic Press, New York (1963).

پرهیز کرد. به عبارت دیگر،

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$
$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_\kappa = a_\kappa\mathbf{i} + b_\kappa\mathbf{j} + c_\kappa\mathbf{k}$$

و (۳۹.۳۱) به‌جای دستگاه معادلات

$$dx = \omega^\kappa a_\kappa, \qquad dy = \omega^\kappa b_\kappa, \qquad dz = \omega^\kappa c_\kappa$$

می‌باشد.

مقدار دیفرانسیل $d\mathbf{e}_\kappa$ به‌ازای بردار مماس $\mathbf{v}$ مجدداً "یک بردار در فضاست"؛ درنتیجه، می‌توان مولفه‌های آن را نسبت به پایهٔ $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ درنظر گرفت، و اگر این مولفه‌ها را با ω_κ^λ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$d\mathbf{e}_\kappa = \omega_\kappa^\lambda \mathbf{e}_\lambda, \qquad \kappa, \lambda = 1, 2, 3, \tag{۴۰.۳۱}$$

که‌درآن ω_κ^λ ها فرمهای دیفرانسیل‌خطی می‌باشند. دیفرانسیل برونی فرم کامل $d\mathbf{r}$ مساوی صفر است؛ درنتیجه، بنابر (۳۹.۳۱)، داریم

$$d\omega^\kappa \mathbf{e}_\kappa - \omega^\kappa \wedge d\mathbf{e}_\kappa = 0;$$

و، بنابر (۴۰.۳۱)،

$$d\omega^\kappa \mathbf{e}_\kappa - \omega^\kappa \wedge \omega_\kappa^\lambda \mathbf{e}_\lambda = d\omega^\lambda \mathbf{e}_\lambda - \omega^\kappa \wedge \omega_\kappa^\lambda \mathbf{e}_\lambda = 0,$$

که از آنجا

$$d\omega^\lambda - \omega^\kappa \wedge \omega_\kappa^\lambda = 0. \tag{۴۱.۳۱}$$

به‌همین‌نحو، $d\,d\mathbf{e}_\kappa = 0$؛ و درنتیجه،

$$d\omega_\kappa^\lambda \mathbf{e}_\lambda - \omega_\kappa^\lambda \wedge d\mathbf{e}_\lambda = d\omega_\kappa^\mu \mathbf{e}_\mu - \omega_\kappa^\lambda \wedge \omega_\lambda^\mu \mathbf{e}_\mu = 0,$$

که از آنجا

$$d\omega_\kappa^\mu - \omega_\kappa^\lambda \wedge \omega_\lambda^\mu = 0. \tag{۴۲.۳۱}$$

معادلات (۴۱.۳۱) و (۴۲.۳۱) شرایطی هستند که باید به‌وسیلهٔ فرمهای $\omega^\kappa, \omega_\lambda^\kappa$ برقرار شوند. این شرطها را **معادلات نهادی** فضا می‌نامند.

۱۱.۳۱ کنجهای موضعی با دو بردار مماس بر سطح و یک بردار قائم بر آن

حال کنجهای خاصی اختیار می‌کنیم. ابتدا برای $\mathbf{e}_3$ بردار یکهٔ قائم مثبت به سطح را برمی‌گزینیم، و $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ را مماس برسطح می‌گیریم. دراین صورت، مولفهٔ سوم ω^3 به‌ازای هر بردار مماس بر سطح صفر است، و داریم

$$d\mathbf{r} = \omega^i \mathbf{e}_i \ (i = 1, 2), \qquad \omega^3 = 0,$$

و معادلات نهادی (۴۱۰۳۱) برای سطح خواهند شد

$$d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = 0, \qquad i, j = 1, 2,$$
$$-\omega^j \wedge \omega_j^3 = 0. \qquad (۴۳۰۳۱)$$

خط دوم (به‌ازای $\kappa = 3$) ، طبق لم کارتان ، ایجاب می‌کند که

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2,$$
$$\omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2, \qquad (۴۴۰۳۱)$$

که در آنها a, b, c توابعی از نقطه می‌باشند .

بعلاوه ، چون $\mathbf{e}_3$ بردار یکهٔ قائم است ، $d\mathbf{e}_3$ یک برداز مماس بوده ، و $\omega_3^3 = 0$. درنتیجه ، داریم (i, j مقادیر $1, 2$ را می‌گیرند)

$$d\mathbf{r} = \omega^i \mathbf{e}_i,$$
$$d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j + \omega_i^3 \mathbf{e}_3, \qquad (۴۵۰۳۱)$$
$$d\mathbf{e}_3 = \omega_3^i \mathbf{e}_i.$$

چون بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ بردارهای مماس بوده و $\mathbf{e}_3$ یک بردار قائم است ، فرمهای ω^i, ω_i^j تنها فرمهایی هستند که خواص ذاتی سطح را نمایش می‌دهند ، حال آنکه ω_i^3 و ω_3^i مسئول هندسهٔ غیرذاتی می‌باشند .

باقی معادلات نهادی را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = \omega_j^3 \wedge \omega_3^i,$$
$$d\omega_j^3 - \omega_j^k \wedge \omega_k^3 = 0,$$

زیرا $\omega_3^3 = 0$. فرمهای دیفرانسیل برونی درجهٔ دوم مساوی طرف چپ یا طرف راست خط بالایی ***فرمهای انحنای*** Ω_j^i نام دارند . با استفاده از این نماد ، می‌توان معادلات نهادی برای فرمها را بدون اندیس 3 نوشت :

$$d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = 0,$$
$$d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = \Omega_j^i. \qquad (۴۶۰۳۱)$$

توجه کنید که Ω_j^i در اینجا برحسب فرمهای ω^i, ω_j^i فقط با معنی ذاتی بیان شده است ، ولی می‌توان آنها را به‌طور غیر ذاتی نیز بیان کرد :

$$\Omega_j^i = \omega_j^3 \wedge \omega_3^i. \qquad (۴۷۰۳۱)$$

فرمول اخیر ایجاب می‌کند که Ω_j^i نسبت به اندیسهایش متقارن اریب است ؛ یعنی ، $\Omega_j^i = \Omega_i^j$ ؛ و درنتیجه ، $\Omega_1^1 = \Omega_2^2 = 0$.

برای خاص سازی بیشتر کنجها ، حالتی را درنظر می‌گیریم که بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ به جفت دیگر $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ در هر صفحهٔ مماس تغییر کرده و $\mathbf{e}_3$ ثابت می‌ماند . دراین صورت ،

خواهیم داشت

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \bar{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3,$$

که در آن A_i^j توابعی از نقطهٔ P اند. بـرای کنجهـای جدید، فرمهای خطـی جدید $\bar{\omega}^i, \bar{\omega}_\lambda^\kappa\ (i = 1, 2; \kappa = 1, 2, 3)$ را داریم. امـا $d\mathbf{r}$ به انتخاب کنجها بستگی ندارد؛ در نتیجه، $d\mathbf{r} = \bar{\omega}^i \bar{\mathbf{e}}_i = \omega^j \mathbf{e}_j = \omega^j A_j^i \bar{\mathbf{e}}_i$، که از آنجا

$$\bar{\omega}^i = A_j^i \omega^j. \tag{۴۸.۳۱}$$

حال فرض کنیم B_i^j عنصرهای ماتریس معکوس (A_j^i) باشند؛ یعنی،

$$A_j^i B_k^j = \delta_k^i, \qquad A_i^j B_j^k = \delta_k^i.$$

دراین صورت،

$$\bar{\mathbf{e}}_i = B_i^j \mathbf{e}_j, \qquad \bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e},$$

و

$$d\bar{\mathbf{e}}_i = dB_i^j \mathbf{e}_j + B_i^j\, d\mathbf{e}_j = dB_i^j A_j^k \bar{\mathbf{e}}_k + B_i^j \omega_j^l \mathbf{e}_l$$
$$= A_j^k dB_i^j \bar{\mathbf{e}}_k + B_i^j \omega_j^l A_l^k \bar{\mathbf{e}}_k = (A_j^k\, dB_i^j + A_l^k B_i^j \omega_j^l) \bar{\mathbf{e}}_k.$$

از آن سو،

$$d\bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\omega}_i^k \bar{\mathbf{e}}_k.$$

لذا،

$$\bar{\omega}_i^k = A_j^k dB_i^j + A_l^k B_i^j \omega_j^l \tag{۴۹.۳۱}$$

بعلاوه،

$$d\bar{\mathbf{e}}_3 = d\mathbf{e}_3 = \omega_3^i \mathbf{e}_i = \omega_3^i A_i^j \bar{\mathbf{e}}_j,$$

که از آنجا

$$\bar{\omega}_3^i = A_j^i \omega_3^j. \tag{۵۰.۳۱}$$

۱۲.۳۱ کنجهای متعامد یکه و راستاهای اصلی

با خاص سازی بیشتر، فـرض کنیم کنجها متعامد یکه باشند. دراین صورت، حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{e}_\kappa \mathbf{e}_\lambda = \delta_{\kappa\lambda}$ ثابت بوده و

$$d(\mathbf{e}_\kappa \mathbf{e}_\lambda) = (d\mathbf{e}_\kappa)\mathbf{e}_\lambda + \mathbf{e}_\kappa d\mathbf{e}_\lambda = 0$$

یا

$$\omega_\kappa^\mu \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\lambda + \omega_\lambda^\mu \mathbf{e}_\kappa \mathbf{e}_\mu = \omega_\kappa^\mu \delta_{\mu\lambda} + \omega_\lambda^\mu \delta_{\kappa\mu} = \omega_\kappa^\lambda + \omega_\lambda^\kappa = 0,$$

که از آنجا

$$\omega_\kappa^\lambda = -\omega_\lambda^\kappa. \tag{۵۱.۳۱}$$

این فورا " ایجاب می‌کند که $\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0$ و $\omega_1^3 = -\omega_3^1,\ \omega_2^3 = -\omega_3^2$ و $\omega_2^1 = -\omega_1^2$. بالاخص، اگر $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ کنج متعامد یکهٔ دیگر $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$ باشد، خواهیم داشت

$$\bar{\omega}_i^3 = -\bar{\omega}_3^i = -A_j^i \omega_3^j = \sum_{j=1}^{2} A_j^i \omega_j^3.$$

اگر یک کنج متعامد یکه را به‌دیگری با همان جهت تغییر دهیم، باید داشته باشیم

$$\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1 \cos\alpha - \bar{\mathbf{e}}_2 \sin\alpha, \qquad \mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{e}}_1 \sin\alpha + \bar{\mathbf{e}}_2 \cos\alpha,$$

و

$$A_1^1 = A_2^2 = \cos\alpha, \qquad A_2^1 = -A_1^2 = \sin\alpha.$$

بنابر این،

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}^1 &= \cos\alpha\omega^1 + \sin\alpha\omega^2,\\
\bar{\omega}^2 &= -\sin\alpha\omega^1 + \cos\alpha\omega^2,\\
\bar{\omega}_1^3 &= \cos\alpha\omega_1^3 + \sin\alpha\omega_2^3,\\
\bar{\omega}_2^3 &= -\sin\alpha\omega_1^3 + \cos\alpha\omega_2^3,
\end{aligned}$$

که از آنجا

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \bar{\omega}^1 \cos\alpha - \bar{\omega}^2 \sin\alpha,\\
\omega^2 &= \bar{\omega}^1 \sin\alpha + \bar{\omega}^2 \cos\alpha.
\end{aligned}$$

درنتیجه، بنابر (۴۴۰۳۱) ، داریم

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1^3 &= \cos\alpha(a\omega^1 + b\omega^2) + \sin\alpha(b\omega^1 + c\omega^2)\\
&= (a\cos\alpha + b\sin\alpha)\omega^1 + (b\cos\alpha + c\sin\alpha)\omega^2\\
&= (a\cos\alpha + b\sin\alpha)(\bar{\omega}^1\cos\alpha - \bar{\omega}^2\sin\alpha)\\
&\quad + (b\cos\alpha + c\sin\alpha)(\bar{\omega}^1\sin\alpha + \bar{\omega}^2\cos\alpha)\\
&= (a\cos^2\alpha + 2b\cos\alpha\sin\alpha + c\sin^2\alpha)\bar{\omega}^1\\
&\quad + (-b\sin^2\alpha - a\cos\alpha\sin\alpha + b\cos^2\alpha + c\sin\alpha\cos\alpha)\bar{\omega}^2\\
&= (a\cos^2\alpha + c\sin^2\alpha + 2b\cos\alpha\sin\alpha)\bar{\omega}^1\\
&\quad + (b\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(a-c)\sin 2\alpha)\bar{\omega}^2.
\end{aligned}$$

همچنین، بنابر (۴۴۰۳۱) ،

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1^3 &= \bar{a}\bar{\omega}_1 + \bar{b}\bar{\omega}_2,\\
\bar{\omega}_2^3 &= \bar{b}\bar{\omega}_2 + \bar{c}\omega_3.
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\bar{b} = b\cos 2\alpha - \frac{a-c}{2}\sin 2\alpha,$$

و برای $\bar{a}, \bar{c}$ می‌توان عبارات نظیری برحسب a, b, α به‌دست آورد. درواقع، قبلاً دریافتیم که

$$\bar{a} = a\cos^2\alpha + c\sin^2\alpha + 2b\sin\alpha\cos\alpha.$$

حال با اختیار α طوری‌که $\bar{b}=0$، که ممکن است α با تقریب مضربی از $\pi/2$ معین شود، و نشان دادن ضرایب نظیر $\bar{a}, \bar{c}$ با k_1, k_2، معلوم می‌شود که

$$\omega_1^3 = -\omega_3^1 = k_1\omega^1, \qquad \omega_2^3 = -\omega_3^2 = k_2\omega^1. \qquad (۵۲\cdot۳۱)$$

چون $\Omega_j^i = \omega_j^3 \wedge \omega_3^i$، فقط برای فرمهای انحنای ناصفر به‌دست می‌آوریم

$$\Omega_2^1 = -k_1k_2\omega^2 \wedge \omega^1 = k_1k_2\omega^1 \wedge \omega^2,$$
$$\Omega_1^2 = -k_1k_2\omega^1 \wedge \omega^2.$$

همچنین، داریم

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\\
d\mathbf{e}_1 &= \qquad\quad \omega_1^2\mathbf{e}_2 + k_1\omega^1\mathbf{e}_3\\
d\mathbf{e}_2 &= -\omega_1^2\mathbf{e}_1 \qquad\quad + k_2\omega^2\mathbf{e}_3\\
d\mathbf{e}_3 &= -k_1\omega^1\mathbf{e}_1 - k_2\omega^2\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه مقدار فرم ω^i بر بردار $\mathbf{e}_j$ مولفهٔ i ام $\mathbf{e}_j$ نسبت به پایهٔ $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$، یعنی δ_{ij}، است، معلوم می‌شود که دیفرانسیلهای $d\mathbf{e}_3$ درراستای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ عبارتند از $(d\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1) = k_1\omega^1(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + k_2\omega^2(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = -k_1\mathbf{e}_1$ و $(d\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2) = -k_2\mathbf{e}_2$. از مقایسهٔ این با نتایج فصل ۷، با $\mathbf{e}_3$ به‌جای $\mathbf{m}$، نتیجه می‌گیریم که‌راستاهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ راستاهای اصلی، و k_1, k_2 انحناهای اصلی می‌باشند.

۱۳۰۳۱ رابطه با فرمهای اساسی

اگر سطح با معادلهٔ پارامتری داده شده باشد، همهٔ فرمهای دیفرانسیل $\omega^i, \omega_\lambda^\kappa$ را می‌توان به صورت ترکیباتی خطی از du^1, du^2 بیان کرد. پس، درحالت کنجهای متعامد یکه، خواهیم داشت

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = (d\mathbf{r})^2 = g_{ij}\,du^i\,du^j,$$
$$-(\omega_1^3\omega^1) - (\omega_2^3\omega^2) = -d\mathbf{e}_3\,d\mathbf{r} = b_{ij}\,du^i\,du^j,$$

که در آن حاصل ضرب حاصل ضرب معمولی فرمهای دیفرانسیل خطی می‌باشد.

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

identity	اتحاد
curvature	انحنا
principal	اصلی
integral	انتگرال
circle of	دایرهٔ
geodesic	ژئودزیک
radius of	شعاع
normal	قائم
sectional	مقطعی
mean	میانگین
index	اندیس
summation	جمعبندی
first fundamental form	اولین فرم اساسی
vector	بردار
free	آزاد
curvature	انحنا
binormal	قائم دوم
contravariant	کنتراواریان
covariant	کوواریان
localized	مقید
parameter	پارامتر
natural (arc)	طبیعی (قوس)
envelope	پوش
torsion	تاب
geodesic	ژئودزیک
tensor	تانسور

انحنا	*curvature*
کنتراواریان	*contravariant*
کوواریان	*covariant*
متری	*metric*
تصویر	*projection*
گنجنگار	*stereographic*
تعویضگر	*commutator*
تغییرمکان	*displacement*
موازی	*parallel*
تماس	*contact*
توازی	*parallelism*
تور	*net*
مزدوج	*conjugate*
جادهنده	*immersion*
جمع	*addition*
جهت	*orientation*
چرخزاد	*cycloid*
چندگونا	*manifold*
تحلیلی	*analytic*
جهت پذیر	*orientable*
دیفرانسیل	*differential*
خاصیت	*property*
ذاتی	*intrinsic*
خط	*line*
انحنا	*of curvature*
ژئودزیک	*geodesic*
قطبی	*polar*
مایل	*loxodrome*
مجانبی	*asymptotic*
محض	*of striction*
مختص	*coordinate*

دایره	*circle*
انحنا	*of curvature*
عرض جغرافیایی	*of latitude*
بوسان	*osculating*
دستگاه	*system*
سه متعامد	*triply orthogonal*
دومین فرم اساسی	*second fundamental form*
دیفرانسیل	*differential*
برونی	*exterior*
مطلق	*absolute*
راستا	*direction*
اصلی	*principal*
مجانبی	*asymptotic*
مزدوج	*conjugate*
زاویه	*angle*
زنجیرگون	*catenoid*
ژئودزیک	*geodesic*
ساختمان	*structure*
دیفرانسیل	*differential*
سطح	*surface*
استوانه‌ای	*cylindrical*
جهت پذیر	*orientable*
جهت ناپذیر	*non-orientable*
خط‌دار	*ruled*
دوار	*of revolution*
کانال	*canal*
کانونی	*focal*
معمولی	*ordinary*
منتظم	*regular*
مینیمال	*minimal*
سهمی	*parabola*

semicubical	نیمه مکعبی
indicatrix	شاخص
radius	شعاع
of curvature	انحنا
of normal curvature	انحنای قائم
plane	صفحه
rectifying	اصلاحی
osculating	بوسان
normal	قائم
product	ضرب
scalar (dot)	اسکالر (نقطه‌ای)
vector	برداری
exterior	برونی
tensor	تانسوری
cross (vector)	خارجی (برداری)
mixed	مختلط
longitude	طول جغرافیایی
arc length	طول قوس
latitude	عرض جغرافیایی
form	فرم
metric	متری
exterior differential form	فرم دیفرانسیل برونی
closed	بسته
linear	خطی
quadratic	درجهٔ دوّم
exact	کامل
normal	قائم

اصلی	*principal*
ژئودزیک	*geodesic*
قائم دوّم	*binormal*
قطر	*diameter*
مزدوج	*conjugate*
قوس	*arc*
ساده	*simple*
کروی	*spherical*
منحنی	*curve*
نگاشت	*mapping*
کره	*sphere*
بوسان	*osculating*
کره نما	*pseudosphere*
کشاننده	*tractrix*
کنج	*frame*
موضعی	*local*
گره	*node*
گسترده	*evolute*
مسطح	*planar*
گسترش	*development*
گسترنده	*involute*
مارپیچ	*helix*
تعمیم یافته	*generalized*
مستدیر	*circular*
مارپیچ گون	*helicoid*
مبین	*discriminant*
مجانب	*asymptote*
محض	*striction*
خط	*line*
نقطهٔ	*point*
مختصات	*coordinates*

geodesic polar	ژئودزیک قطبی
asymptotic	مجانبی
curvilinear	منحنی الخط
semigeodesic	نیمه ژئودزیک
isothermic	همگرمایی
conoid	مخروط گون
order	مرتبه
of contact	تماس
of smallness	کوچکی
center	مرکز
of curvature	انحنا
area	مساحت
path	مسیر
equivalence	هم ارزی
trajectories	مسیرها
orthogonal	قائم
isogonal	همزاویه
derivative	مشتق
covariant	کوواریان
characteristic	مشخص
equation	معادله
parametric	پارامتری
implicit	ضمنی
natural	طبیعی
structural	نهادی
tangent	مماس
vector	بردار
curve	منحنی
rectifiable	با طول متناهی
parametric	پارامتری
parabolic	سهموی
piecewise regular	قطعه قطعه منتظم
asymptotic	مجانبی
regular	منتظم

منحنی زنجیری	*catenary*
مؤلفه	*component*
مولد	*generator*
مستقیم الخط	*rectilinear*
میدان	*field*
برداری	*vector*
نشاننده	*imbedding*
نصف النهار	*meridian*
نقطه	*point*
اصلاح	*rectification*
بیضوی	*elliptic*
تخت	*flat*
سهموی	*parabolic*
محض	*striction*
منفرد	*singular*
نافن	*umbilical*
هذلولوی	*hyperbolic*
نقطهٔ بازگشت (بازگشت)	*cusp*
نگاشت	*mapping*
ایزومتریک	*isometric*
کروی	*spherical*
همزاویه	*isogonal*
همشکل	*conformal*
هم مساحت	*isoareal*
نمایش	*representation*
پارامتری	*parametric*
نوار	*band*
موبیوس	*möbius*
همبندی	*connection*
هندسه	*geometry*
ذاتی	*intrinsic*
یال بازگشت	*edge of regression*

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

absolute	مطلق
derivative	مشتق
differential	دیفرانسیل
addition	جمع
angle	زاویه
arc	قوس
length	طول
parameter	پارامتر
area	مساحت
of a surface	یک سطح
preserving mapping	نگاشت ... نگهدار
asymptote	مجانب
asymptotic	مجانبی
coordinates	مختصات
direction	راستای
line	خط
binomial	دو جمله‌ای
vector	بردار
canal	کانال
surfaces	سطوح
catenary	منحنی زنجیری
catenoid	زنجیرگون
center	مرکز
of curvature	انحنا
of normal curvature	انحنای قائم
of osculating sphere	کرهٔ بوسان
of principal curvalure	انحنای اصلی

characteristic	مشخص
circle	دایره
of curvature	انحنا
of latitude	عرض جغرافیایی
circular	مستدیر
helix	مارپیچ
collinear	همخط
vectors	بردارهای
commutator	تعویضگر
of vector fields	میدانهای برداری
component	مؤلفه
of a tensor	یک تانسور
of a vector	یک بردار
conformal	همشکل
mapping	نگاشت
conjugate	مزدوج
diameter	قطر
directions	راستاهای
net	تور
connection	همبندی
conoid	مخروط گون
contact	تماس
contraction	انقباض
of a tensor	یک تانسور
contravariant	کنتراواریان
tensor	تانسور
vector	بردار
coordinate	مختص
line	خط
coordinates	مختصات
asymptotic	مجانبی
curvilinear	منحنی الخط
isothermic	همگرمایی
semigeodesic	نیمه ژئودزیک

covariant	کوواریان
derivative	مشتق
vector	بردار
cross product	ضرب خارجی
curvature	انحنا
gaussian	گاوسی
geodesic	ژئودزیک
integral	انتگرال
mean	میانگین
normal	قائم
sectional	مقطعی
tensor	تانسور
vector	بردار
curve	منحنی
asymptotic	مجانبی
parabolic	سهموی
parametric	پارامتری
piecewise regular	قطعه قطعه منتظم
rectifiable	با طول متناهی
curvilinear	منحنی الخط
coordinates	مختصات
cusp	نقطهٔ بازگشت (بازگشت)
cycloid	چرخزاد
cylindrical	استوانه ای
surface	سطح
developable	گستردنی
development	گسترش
differential	دیفرانسیل
absolute	مطلق
exterior	برونی
manifold	چندگونا
structure	ساختمان
direction (s)	راستا(های)

asymptotic	مجانبی
conjugate	مزدوج
principal	اصلی
discriminant	مبین
dot product	ضرب نقطه ای
edge of regression	یال بازگشت
elliptic	بیضوی
point	نقطهٔ
envelope	پوش
equation	معادله
implicit	ضمنی
natural	طبیعی
parametric	پارامتری
evolute	گسترده
exterior	برونی
differential	دیفرانسیل
differential form	فرم دیفرانسیل
closed	بسته
exact	کامل
linear	خطی
quadratic	درجهٔ دوّم
first fundamental form	اولین فرم اساسی
flat	تخت
point	نقطهٔ
focal	کانونی
surface	سطح
form	فرم
exterior differential	دیفرانسیل برونی
first fundamental	اولین... اساسی
second fundamental	دومین... اساسی
formula	فرمول
free	آزاد
vector	بردار

fundamental form	فرم اساسی
first	اولین
second	دومین
generator	مولد
rectilinear	مستقیم الخط
generalized	تعمیم یافته
indicatrix	شاخص
helix	مارپیچ
geodesic	ژئودزیک
curvature	انحنای
line	خط
normal	قائم
polar coordinates	مختصات قطبی
torsion	تاب
helicoid	مارپیچ گون
helix	مارپیچ
generalized	تعمیم یافته
hyperbolic	هذلولوی
point	نقطهٔ
identity	اتحاد
imbedding	نشاننده
immersion	جادهنده
implicit	ضمنی
equation	معادلهٔ
indicatrix	شاخص
generalized	تعمیم یافته
integral	انتگرال
curvature	انحنا
intrinsic	ذاتی
geometry	هندسهٔ

property	خاصیت
involute	گسترنده
isoareal	هم‌مساحت
mapping	نگاشت
isogonal	همزاویه
mapping	نگاشت
trajectory	مسیر
isometric	ایزومتریک
mapping	نگاشت
isothermic	همگرمایی
coordinates	مختصات
latitude	عرض جغرافیایی
line	خط
asymptotic	مجانبی
coordinate	مختص
of curvature	انحنا
of striction	محض
local	موضعی
frame	کنج
localized	مقید
vector	بردار
longitude	طول جغرافیایی
loxodrome	خط مایل
manifold	چندگونا
analytic	تحلیلی
differential	دیفرانسیل
mapping	نگاشت
conformal	همشکل
gaussian	گاوسی
isoareal	هم‌مساحت
isogonal	همزاویه
isometric	ایزومتریک

spherical	کروی
mean curvature	انحنای میانگین
meridian	نصف النهار
metric	متری
form	فرم
tensor	تانسور
minimal	مینیمال
surface	سطح
mixed product	ضرب مختلط
natural	طبیعی
equation	معادلهٔ
parameter	پارامتر
node	گره
non-orientable	جهت ناپذیر
surface	سطح
normal	قائم
curvature	انحنای
principal	اصلی
plane	صفحهٔ
to a surface	به یک سطح
order	مرتبه
of contact	تماس
of smallness	کوچکی
orientable	جهت پذیر
manifold	چند گونای
surface	سطح
orientation	جهت
osculating	بوسان
circle	دایرهٔ
plane	صفحهٔ
sphere	کرهٔ

parabola	سهمی
semicubical	نیمه مکعبی
parabolic	سهموی
curve	منحنی
point	نقطهٔ
parallel	موازی
displacement	تغییر مکان
surfaces	سطوح
parallelism	توازی
parameter	پارامتر
natural	طبیعی
parametric	پارامتری
curve	منحنی
representation	نمایش
path	مسیر
point	نقطه
elliptic	بیضوی
flat	تخت
hyperbolic	هذلولوی
of rectification	اصلاح
of striction	محض
parabolic	سهموی
singular	منفرد
polar	قطبی
line	خط
principal	اصلی
curvature	انحنای
direction	راستای
normal	قائم
projection	تصویر
stereographic	گنجنگار
product	ضرب
exterior	برونی
mixed	مختلط

scalar	اسکالر
pseudo sphere	کره نما
radius	شعاع
of curvature	انحنا
rectification	اصلاح
point	نقطهٔ
rectifying	اصلاحی
plane	صفحهٔ
rectilinear	مستقیم الخط
generator	مولد
ruled surface	سطح خط دار
ruling	خط جاری
second fundamental form	دومین فرم اساسی
sectional	مقطعی
curvature	انحنای
semicubical	نیمه مکعبی
parabola	سهمی
semigeodesic	نیمه ژئودزیک
coordinates	مختصات
simple	ساده
arc	قوس
singular	منفرد
point	نقطهٔ
sphere	کره
osculating	بوسان
spherical	کروی
curve	منحنی
mapping	نگاشت
stereographic	گنجنگار
projection	تصویر
striction	محض
line	خط

point	نقطهٔ
structural	نهادی
equation	معادلهٔ
summation	جمعبندی
convention	نماد
index	اندیس
surface	سطح
canal	کانال
developable	گستردنی
minimal	مینیمال
of revolution	دوار
ordinary	معمولی
regular	منتظم
ruled	خط دار
tangent	مماس (ی)
developable surface	سطح گستردنی
vector	بردار
tensor	تانسور
contravariant	کنترا واریان
covariant	کوواریان
metric	متری
torsion	تاب
geodesic	ژئودزیک
tractrix	کشاننده
trajectories	مسیرهای
isogonal	همزاویه
orthogonal	قائم
triply orthogonal	سه متعامد
system	دستگاه
umbilical	نافن
point	نقطهٔ

vector	**بردار(ی)**
covariant	**کوواریان**
field	**میدان**
free	**آزاد**
localized	**مقید**
mixed product	**ضرب مختلط**

فهرست راهنما