

هندسه فرکتالی

مبانی ریاضی و کاربردها

کنت فلکنر

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	مقدمه مولف
۵	مقدمه مترجمین
۱	دیباچه
۱۵	قسمت اول مبانی ریاضی فرکتال‌ها
۱۷	فصل ۱ پیش زمینه ریاضی
۱۷	۱-۱ نظریه مقدماتی مجموعه‌ها
۲۲	۲-۱ توابع و حدود
۲۷	۳-۱ اندازه‌ها و توزیع‌های جرم
۳۶	۴-۱ نکاتی از نظریه احتمال
۴۳	۵-۱ نکات و منابع
۴۴	تمرین‌ها
۴۶	فصل ۲ بعد و اندازه هائوسدورف
۴۶	۱-۲ اندازه هائوسدورف
۵۰	۲-۲ بعد هائوسدورف
۵۴	۳-۲ محاسبه بعد هائوسدورف — مثال‌های ساده
۵۶	۴-۲ تعاریف معادل با بعد هائوسدورف
۵۸	۵-۲ تعاریف‌های ظریف‌تری از بعد
۵۸	۶-۲ نکات و منابع
۵۹	تمرین‌ها

فصل ۳ تعریف‌های دیگری از بعد

- ۶۱
۶۳ ۱-۳ بعد جعبه شمار
۷۱ ۲-۳ ویژگی‌ها و معایب بعد جعبه شمار
۷۳ ۳-۳ بعد جعبه شمار تعدیل شده
۷۵ ۴-۳ بعد و اندازه بسته بندی
۷۸ ۵-۳ چند تعریف دیگر از بعد
۸۲ ۶-۳ نکات و منابع
۸۲ تمرین‌ها

فصل ۴ شیوه‌هایی برای محاسبه ابعاد

- ۸۴
۸۴ ۱-۴ روش‌های اساسی
۹۵ ۲-۴ زیرمجموعه‌های با اندازه متناهی
۹۸ ۳-۴ روش‌های نظری پتانسیل
۱۰۱ ۴-۴ روش‌های تبدیل فوریه
۱۰۲ ۵-۴ نکات و منابع
۱۰۲ تمرین‌ها

فصل ۵ ساختار موضعی فرکتال‌ها

- ۱۰۴
۱۰۵ ۱-۵ چگالی‌ها
۱۰۹ ۲-۵ ساختار ۱- مجموعه‌ها
۱۱۵ ۳-۵ مماس بر S - مجموعه‌ها
۱۲۰ ۴-۵ نکات و منابع
۱۲۰ تمرین‌ها

فصل ۶ تصاویر فرکتال‌ها

- ۱۲۱
۱۲۱ ۱-۶ تصاویر مجموعه‌های دلخواه
۱۲۵ ۲-۶ تصویر S - مجموعه‌های از بعد صحیح
۱۲۷ ۳-۶ تصاویر مجموعه‌های دلخواه از بعد صحیح
۱۳۰ ۴-۶ نکات و منابع
۱۳۰ تمرین‌ها

۱۳۲	فصل ۷ حاصلضرب‌های فرکتال‌ها
۱۳۲	۱-۷ قواعد حاصلضرب
۱۴۲	۲-۷ نکات و منابع
۱۴۲	تمرین‌ها
۱۴۴	فصل ۸ اشتراک فرکتال‌ها
۱۴۵	۱-۸ فرمول‌های اشتراک برای فرکتال‌ها
۱۴۹	۲-۸ مجموعه‌های با اشتراک بزرگ
۱۵۶	۳-۸ نکات و منابع
۱۵۶	تمرین‌ها
۱۵۹	قسمت دوم کاربردها و مثال‌ها
	فصل ۹ فرکتال‌های تعریف شده بر اساس انتقال‌ها —
۱۶۱	مجموعه‌های خود متشابه و خود آفین
۱۶۱	۱-۹ طرح‌های توابع تکراری
۱۶۷	۲-۹ ابعاد مجموعه‌های خودمتشابه
۱۷۴	۳-۹ چند تغییر
۱۷۷	۴-۹ مجموعه‌های خودآفین
۱۸۲	۵-۹ کاربردها در کدگذاری تصاویر
۱۸۷	۶-۹ نکات و منابع
۱۸۷	تمرین‌ها
۱۹۰	فصل ۱۰ مثال‌هایی از نظریه اعداد
۱۹۰	۱-۱۰ توزیع رقم‌های اعداد
۱۹۲	۲-۱۰ کسرهای مسلسل
۱۹۴	۳-۱۰ تقریب دیوفانتی
۱۹۵	۴-۱۰ نکات و منابع
۱۹۶	تمرین‌ها

فصل ۱۱ نمودارهای توابع

- ۱۹۸
۱۹۸ ۱-۱۱ بعد نمودارها
۲۰۹ ۲-۱۱ خودهمبستگی توابع فرکتالی
۲۱۲ ۳-۱۱ نکات و منابع
۲۱۳ تمرین‌ها

فصل ۱۲ مثال‌هایی از ریاضیات محض

- ۲۱۵
۲۱۵ ۱-۱۲ دوگانی و مسأله کاکیا
۲۱۹ ۲-۱۲ حدس ویتوشکین
۲۲۱ ۳-۱۲ رویه‌های محدب
۲۲۳ ۴-۱۲ گروه‌ها و حلقه‌های با بعد کسری
۲۲۵ ۵-۱۲ نکات و منابع
۲۲۵ تمرین‌ها

فصل ۱۳ سیستم‌های دینامیکی

- ۲۲۷
۲۲۹ ۱-۱۳ دافع‌ها و طرح‌های توابع تکرار شده
۲۳۲ ۲-۱۳ نگاشت پشتیبان (لژستیک)
۲۳۶ ۳-۱۳ تبدیل‌های کشیدن و تا کردن
۲۴۲ ۴-۱۳ سیم لوله
۲۴۵ ۵-۱۳ سیستم‌های دینامیکی پیوسته
۲۵۰ ۶-۱۳ نظریه مقسوم علیه‌های کوچک
۲۵۴ ۷-۱۳ آنترپی‌ها و نماهای لیاپونوف
۲۵۹ ۸-۱۳ نکات و منابع
۲۵۹ تمرین‌ها

فصل ۱۴ تکرار توابع مختلط — مجموعه‌های ژولیا

- ۲۶۳
۲۶۳ ۱-۱۴ نظریه کلی مجموعه‌های ژولیا
۲۷۳ ۲-۱۴ توابع درجه دو - مجموعه مندلبروت
۲۷۹ ۳-۱۴ مجموعه‌های ژولیا از توابع درجه دوم
۲۸۹ ۴-۱۴ تشریح ویژگی‌های شبه دایره‌ها توسط بعد

۲۹۲	۵-۱۴ روش نیوتن برای حل معادلات چند جمله ای
۲۹۶	۶-۱۴ نکات و منابع
۲۹۷	تمرین‌ها
۲۹۹	فصل ۱۵ فرکتال‌های تصادفی
۳۰۱	۱-۱۵ مجموعه کانتور تصادفی
۳۰۷	۲-۱۵ پالایش فرکتالی
۳۱۳	۳-۱۵ نکات و منابع
۳۱۳	تمرین‌ها
۳۱۵	فصل ۱۶ حرکت‌های براونی و سطوح براونی
۳۱۶	۱-۱۶ حرکت‌های براونی
۳۲۶	۲-۱۶ حرکت‌های براونی کسری
۳۲۹	۳-۱۶ فرایندهای پایدار
۳۳۲	۴-۱۶ سطوح براونی
۳۳۵	۵-۱۶ نکات و منابع
۳۳۵	تمرین‌ها
۳۳۷	فصل ۱۷ اندازه‌های چندفرکتالی
۳۳۸	۱-۱۷ تعریف چند فرکتال‌ها
۳۵۱	۲-۱۷ نکات و منابع
۳۵۱	تمرین‌ها
۳۵۳	فصل ۱۸ کاربردهای فیزیکی
۳۵۶	۱-۱۸ رشد فرکتالی
۳۶۳	۲-۱۸ تکینگی‌های الکترواستاتیک و پتانسیل گرانشی
۳۶۴	۳-۱۸ دینامیک سیالات و آشفتگی
۳۶۷	۴-۱۸ نکات و منابع
۳۶۸	تمرین‌ها

مراجع

۳۷۰

نمایه و واژه نامه

۳۷۶

مقدمه

اخیراً سوال‌های بسیاری در مورد فرکتال‌ها از من پرسیده‌اند، از جمله اینکه "فرکتال چیست؟"، "بعد فرکتالی چیست؟"، "چگونه می‌توان بعد یک فرکتال را به دست آورد و این بعد چه معنی می‌دهد؟" یا "فرکتال‌ها چه کاربردی در ریاضیات دارند؟" در این کتاب سعی بر این است که به برخی از این سوال‌ها پاسخ داده شود.

هدف اصلی این کتاب فراهم آوردن زمینه‌ای مرتبط با ریاضیات در زمینه فرکتال‌ها و ابعاد است در حدی که برای کاربران این موضوع در ریاضی و دیگر علوم قابل درک باشد.

کتاب به طور طبیعی به دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمت اول با نظریه کلی فرکتال‌ها و هندسه آنها مرتبط است. ابتدا، نکات مختلفی در مورد ابعاد و شیوه‌هایی برای محاسبه آنها معرفی می‌شوند. سپس ویژگی‌های هندسی فرکتال‌ها را کاملاً به همان شیوه توضیح شکل‌های هندسه کلاسیک مانند دایره یا بیضی، شرح خواهیم داد: یک دایره به طور موضعی با یک پاره خط راست تقریب می‌شود. تصویر یا سایه یک دایره یک بیضی می‌باشد. اگر دایره خطی را قطع کند در دو نقطه قطع می‌کند و به همین ترتیب. مشابه‌های فرکتالی این خاصیت‌ها به علاوه بعد یک نقش اساسی بازی می‌کنند. بنابراین ما به عنوان نمونه شکل موضعی فرکتال‌ها، تصویرها و اشتراک فرکتال‌ها را مطالعه می‌کنیم.

قسمت دوم شامل مثال‌هایی از فرکتال‌ها است که می‌توان نظریه قسمت اول را در مورد آنها به کار برد. این فرکتال‌ها از گستره وسیعی از موضوعات در فیزیک و ریاضی پدید می‌آیند. موضوعاتی شامل مجموعه‌های خودمتشابه و خود آفین، نمودارهای توابع، مثال‌هایی از نظریه اعداد و ریاضیات محض، سیستم‌های دینامیکی، مجموعه‌های ژولیا، فرکتال‌های تصادفی و برخی کاربردهای فیزیکی.

نمودارها و مثال‌های نمونه بسیاری نیز در متن وجود دارد. رسم کامپیوتری فرکتال‌های گوناگون نیز آورده شده و انتظار می‌رود که خواننده آشنا با برنامه‌نویسی با اطلاعات داده شده بتواند رسم‌های کامپیوتری دیگری انجام دهد.

امید است که این کتاب یک مرجع مفید برای محققان باشد و زمینه لازم را برای پیشبرد ریاضیات مربوطه و کاربرد در حالت‌های خاص را فراهم آورده باشد. کتاب ایده‌های بسیاری را که به فرکتال‌ها مربوط می‌شود پوشش می‌دهد و به خصوص در فصل دوم بدون وارد شدن به جزئیات سعی بر بیان دانش موجود می‌کند. انتخاب موضوعات به طور چشم‌گیری به سلیقه نویسنده انجام گردیده و مسلماً بسیاری کاربردهای مهم لحاظ نگردیده‌اند. نکات و منابع در انتهای هر فصل آمده است. همه منابع مربوط ذکر نگردیده‌اند و لیست کامل منابع موضوعات موجود در کتاب خود کتاب قطوری خواهد بود. با این وجود امیدوارم منابع داده شده در هر موضوع برای علاقمندان به ادامه کار راهگشا باشد.

می‌توان از این کتاب به عنوان یک کتاب درسی فرکتال‌ها در فوق لیسانس و احياناً در سال آخر لیسانس استفاده کرد و به این منظور تمریناتی در انتهای هر فصل آورده شده است. بخش‌ها و تمرینات مشکل‌تر با یک ستاره مشخص شده‌اند و می‌توان بدون از دست رفتن پیوستگی مطالب آنها را حذف کرد.

کوشش شده که ریاضیات کتاب طوری باشد که برای یک فارغ‌التحصیل یا یک دانشجوی سال آخر ریاضی یا فیزیک قابل فهم باشد. به خصوص مفاهیم نظریه اندازه تا سر حد امکان خلاصه گردیده و از خواننده خواسته شده است که به "اندازه" به عنوان توزیع جرم روی مجموعه‌ها نگاه کند. اگر بپذیریم که اندازه‌ها واقعاً وجود دارند و خواص دلخواه ما را نیز دارند (خواصی که بدیهی به نظر می‌رسند) آنگاه برای پیشبرد کارمان نیاز اندکی به تکنیک‌های نظریه اندازه خواهیم داشت.

برای پرهیز از خلط مباحث نتایج همواره به صورت صریح بیان گردیده‌اند رهیافت ما کلاً دقیق است اما برخی اثبات‌های مشکل‌تر حذف گردیده و یا تنها به بیان طرحی از آنها اکتفا گردیده است. (با وجود این اثبات‌های مشکلی که مشابه آنها در جای دیگری وجود نداشت آورده شده‌اند، به خصوص آنهایی که مربوط به مجموعه‌های با اشتراک بزرگ و فرکتال‌های تصادفی می‌شود). نمودارهای مناسب می‌توانند کمکی برای درک بهتر اثبات‌ها باشند، اثبات‌هایی که معمولاً خصلت هندسی دارند. تعدادی نمودار در کتاب آمده است و خواننده می‌تواند برای درک بهتر مفاهیم خود نمودارهای دیگری رسم کند.

فصل اول با مرور سریعی بر مفاهیم پایه‌ای ریاضی مانند مجموعه‌ها و توابع و نمادگذاری‌ها آغاز می‌شود. این فصل همچنین بخشی مقدماتی در مورد نظریه اندازه و توزیع جرم دارد که امیدوارم برای مقاصد ما در این کتاب کافی باشد. بخشی نیز در مورد نظریه احتمال است که در فصل‌های فرکتال‌های تصادفی و حرکت براونی به درد می‌خورد. با این گستره وسیع موضوعات نمی‌توان انتظار داشت که نمادگذاری‌های ما با نمادگذاری‌های کتاب‌های استاندارد هر موضوع

سازگار باشد بنابراین گاهی این اختلافات اجتناب ناپذیر بین این کتاب و کتاب‌های دیگر اتفاق می‌افتند.

در چند سال اخیر فرکتال‌ها به عنوان یک شکل هنری در بین مردم جا افتاده‌اند، هم به صورت گرافیک کامپیوتری و هم به عنوان مدلی برای توضیح بسیاری از پدیده‌های فیزیکی. هر چند علاقه به فرکتال‌ها بدون هیچ زمینه ریاضی و علمی هم ممکن است در اشخاصی وجود داشته باشد اما درک ریاضیاتی که می‌تواند در طیف وسیعی از اشیاء به کار برده شود مسلماً علاقه عمیق‌تری را در شخص برخواهد انگیخت. عبارت "زیبایی فرکتال‌ها" زیاد شنیده می‌شود اما به اعتقاد من بیشتر زیبایی آنها در ریاضیات نهفته است.

مایلم از اشخاصی که مرا در تدوین این کتاب یاری نموده‌اند تشکر کنم. آقایان فیلیپ درازین و جو فری گریمت نکات مفیدی را در قسمت‌هایی از نوشته تذکر دادند. پیتیر شیاری در رسم‌های کامپیوتری و طرح روی جلد، و ایدان فوس در رسم برخی اشکال کمک‌های فراوانی نمودند. از شارلوت فارمر، جکی کولینگ و استیوارت گیل از انتشارات جان وایلی و پسران به خاطر بازنگری‌های پیش از چاپ بسیار ممنونم.

تشکر ویژه من از دیوید مارش است، نه فقط به خاطر تذکرات درون متن و رسم بسیاری از تصاویر کامپیوتری بلکه او متن دست‌نویس را با تسلطی فوق‌العاده تایپ کرد. نهایتاً از همسرم ایزوبیل به خاطر حمایت‌ها و تشویق‌هایش سپاسگذاری می‌نمایم.

کِنِث جِی فِالکونِر

مقدمه مترجمین

این ترجمه با هدف ایجاد فرصتی بیشتر برای علاقه‌مندان به نظریه و کاربردهای فرکتال انجام گردیده است هر چند این کتاب در سطحی پیشرفته نوشته شده است اما در حقیقت یکی از بهترین کتاب‌ها در زمینه فرکتال‌ها است که تاکنون در این زمینه به نگارش در آمده است. در بحث فرکتال‌ها پیچیدگی ناگزیر است و فرکتال خود اصلاً از پیچیدگی پدید می‌آید.

در ترجمه اصطلاحات و عبارات تخصصی حتی‌الامکان از واژه‌نامه انجمن ریاضی ایران استفاده شده است و هر جا که برای اولین بار با یک اصطلاح یا تعریف جدید برخورد کرده‌ایم معادل انگلیسی آن را در پی‌نویس آورده‌ایم. در نمایه فارسی نیز معادل انگلیسی کلمات آورده شده است تصور می‌کنیم این کار ارجاعات لازم فارسی - انگلیسی را نسبت به تهیه واژه‌نامه فارسی - انگلیسی یا برعکس برای خواننده آسان‌تر می‌سازد.

همچنین لازم می‌دانیم از شورای محترم پژوهشی دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان و به خصوص آقای دکتر شاهین موسوی معاون پژوهشی آن دانشگاه به خاطر مساعی بزرگوارانه ایشان در طبع این کتاب کمال تشکر و امتنان را بنمائیم.

محمد حسن شیردره حقیقی
دانشگاه شیراز - بخش ریاضی

احمد روزی طلب

دیباچه

در گذشته، ریاضیات بیشتر به مجموعه‌ها و توابعی مربوط می‌شد که بتوان روش‌های حساب کلاسیک را در آنها به کار برد. مجموعه‌ها یا توابعی که به اندازه کافی هموار یا منظم نیستند به عنوان "بیمار"، به فراموشی سپرده شده بودند. به عبارت دقیق‌تر آنها به صورت حالت‌های خاص در نظر گرفته می‌شدند و به ندرت به عنوان رده‌ای که یک نظریه جامع می‌توانست در آن عملی باشد مورد مطالعه قرار می‌گرفتند.

در سال‌های اخیر این نگرش تغییر کرده است. معلوم شده است که درباره ریاضیات مجموعه‌های ناهموار مطالب زیادی می‌توان گفت، و ارزش گفتن هم دارد. به علاوه مجموعه‌های نامنظم نسبت به شکل‌های هندسه کلاسیک نمایش بهتری از بسیاری پدیده‌های طبیعی فراهم می‌کنند. هندسه فرکتالی یک چارچوب کلی برای مطالعه چنین مجموعه‌هایی فراهم می‌کند.

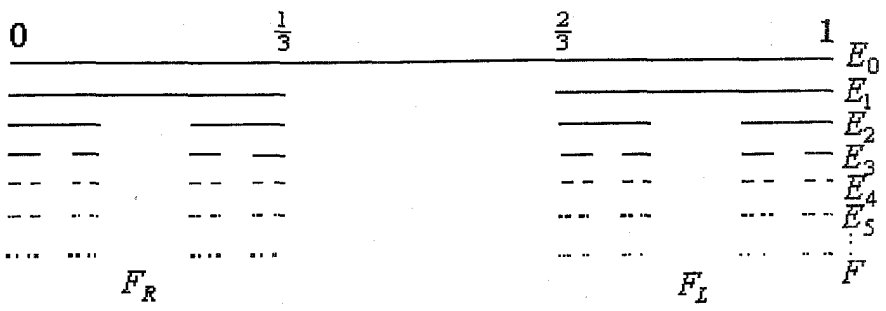
کار خود را با نگاهی مختصر به تعدادی از مثال‌های ساده از فرکتال‌ها، و توجه به بعضی از ویژگی‌های آنها، شروع می‌کنیم.

مجموعه یک سوم میانی کانتور یکی از مشهورترین فرکتال‌ها می‌باشد که روش ساختن ساده‌ای دارد، معهداً بسیاری از خصوصیات کلی فرکتال‌ها را نشان می‌دهد. این مجموعه از یک بازه واحد به وسیله دنباله‌ای از عمل‌های حذفی ساخته می‌شود؛ شکل ۱-۰ را ببینید. فرض کنید E_0 بازه $[0,1]$ باشد. (به یاد آورید که $[a,b]$ نشان دهنده اعداد حقیقی x می‌باشد که $a \leq x \leq b$). فرض کنید E_1 مجموعه به دست آمده از حذف یک سوم میانی E_0 باشد، به طوریکه E_1 شامل دو بازه $[0, \frac{1}{3}]$ و $[\frac{2}{3}, 1]$ می‌باشد. حذف یک سوم میانی‌های این بازه‌ها

E_2 را می‌دهد؛ بنابراین E_2 شامل چهار بازه $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$ می‌باشد. به این روش ادامه می‌دهیم. مجموعه E_k با حذف یک سوم میانی هر یک از بازه‌های E_{k-1} به دست می‌آید. بنابراین E_k شامل 2^k بازه، هر یک به طول 3^{-k} می‌باشد. مجموعه یک سوم میانی کانتور F متشکل از اعدادی است که به ازای هر k در E_k هستند؛ به زبان ریاضی، F برابر با اشتراک $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ می‌باشد. می‌توان مجموعه کانتور F را به عنوان حد دنباله مجموعه‌های E_k هنگامی که k به بی‌نهایت میل می‌کند در نظر گرفت. به وضوح، رسم خود مجموعه F ، با جزئیات بسیار ریز آن، غیر ممکن است، بنابراین انتظار می‌رود که "تصویر F " تقریباً تصویر یکی از E_k ها باشد که وقتی k به اندازه مناسب بزرگ باشد تقریب خوبی برای F می‌باشند.

در نگاه اول ممکن است به نظر برسد که ما هنگام ساختن F آنقدر زیاد از بازه $[0,1]$ برداشته‌ایم که چیزی باقی نمی‌ماند. در حقیقت، F یک مجموعه نامتناهی (و در واقع نامشمارا) است، که هر همسایگی از هر یک از نقاطش تعداد نامتناهی از نقاط F را شامل می‌شود. مجموعه یک سوم میانی کانتور F دقیقاً شامل آن اعدادی در $[0,1]$ است که بسط آنها در مبنای ۳ شامل رقم ۱ نمی‌باشد، یعنی همه اعداد به صورت $a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots$ که به ازای هر i ، $a_i = 0$ یا $a_i = 2$. برای مشاهده این موضوع، توجه کنید که برای رسیدن به E_1 از E_0 اعداد با $a_1 = 1$ را حذف کردیم، برای رسیدن به E_2 از E_1 اعداد با $a_2 = 1$ را حذف کردیم، و به همین ترتیب.

برخی از ویژگی‌های مجموعه یک سوم میانی کانتور F را فهرست می‌کنیم؛ همانطور که خواهیم دید، ویژگی‌های مشابهی در بسیاری فرکتال‌ها یافت می‌شود.



شکل ۱- روش ساخت مجموعه یک سوم میانی کانتور F به وسیله حذف‌های مکرر یک سوم‌های میانی بازه‌ها. توجه کنید که F_R و F_L ، بخش‌های چپ و راست F ، کپی‌هایی از F با مقیاس $\frac{1}{3}$ می‌باشند.

(i) F خود متشابه است. روشن است که آن بخش از F در بازه $[0, \frac{1}{3}]$ و آن بخش از F در بازه $[\frac{2}{3}, 1]$ ، در مقیاس $\frac{1}{3}$ ، به طور هندسی مشابه F می‌باشند. دوباره، آن بخش‌هایی از F که در هر یک از چهار بازه E_2 هستند، مشابه F اما در مقیاس $\frac{1}{9}$ می‌باشند، و به همین ترتیب. مجموعه کانتور شامل کپی‌هایی از خودش در مقیاس‌های متفاوت می‌باشد.

(ii) مجموعه F دارای "ساختاری ظریف" می‌باشد؛ یعنی، در مقیاس‌های به دلخواه کوچک شامل ریزه‌کاری‌های بسیاری می‌باشد. هر چه تصویر مجموعه کانتور را بزرگ کنیم شکاف‌های بیشتری به چشم می‌خورد.

(iii) هر چند F دارای ساختار جزئی پیچیده‌ای می‌باشد، تعریف F بسیار ساده است.

(iv) F به وسیله یک روند بازگشتی به دست می‌آید. روش ساخت ما شامل حذف مکرر یک سوم‌های میانی بازه‌ها می‌باشد. گام‌های متوالی، به طور فزاینده‌ای، تقریب‌های خوب E_k از F را فراهم می‌کند.

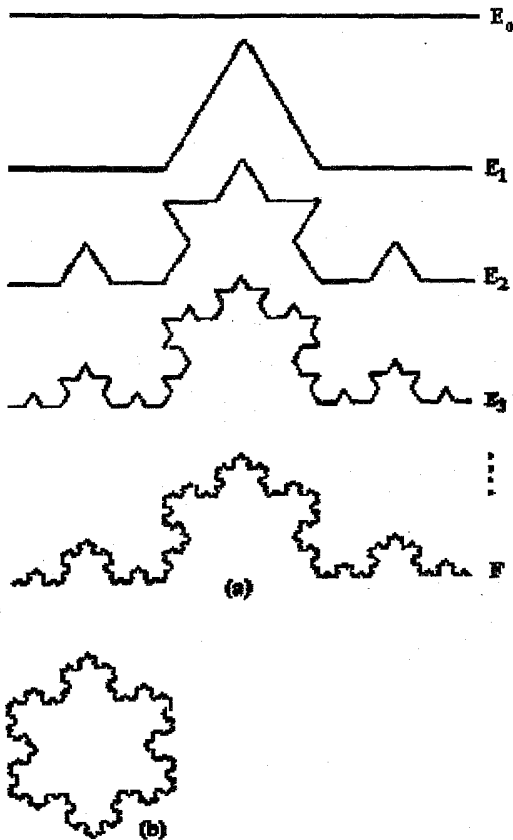
(v) هندسه F در اصطلاحات کلاسیک به سادگی تعریف نمی‌شود: این مجموعه مکان هندسی نقاطی که در بعضی شرایط ساده هندسی صدق کنند نمی‌باشد، و به همین صورت، مجموعه جواب هیچ معادله ساده‌ای هم نمی‌باشد.

(vi) شرح هندسه موضعی F سخت است — نزدیک هر یک از نقاط آن شمار زیادی از نقاط دیگر وجود دارد که به وسیله فاصله‌هایی با طول‌های گوناگون از هم جدا شده‌اند.

(vii) هر چند F از بعضی جهات مجموعه واقعاً بزرگی است (نامتناهی ناشمارا است)، بزرگی آن به وسیله اندازه‌های معمولی مانند طول سنجیده نمی‌شود — با هر تعریف منطقی از طول، F طولی برابر صفر دارد.

مثال دوم ما، منحنی ون کخ^۱، نیز برای بسیاری از خواننده‌ها آشنا است؛ شکل ۰-۲ را ببینید. E_0 را پاره‌خطی با طول واحد می‌گیریم. مجموعه E_1 از چهار قطعه تشکیل می‌شود که با حذف یک سوم میانی E_0 و جایگزینی آن به وسیله دو ضلع دیگر از مثلث متساوی‌الاضلاع با قاعده روی قطعه حذف شده، به دست می‌آید. E_2 را با به کار بردن روندی مشابه برای هر قطعه از E_1 می‌سازیم، و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. بنابراین E_k از جایگزینی یک سوم میانی هر پاره‌خط مستقیم از E_{k-1} با دو ضلع دیگر از مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل می‌شود. وقتی k بزرگ باشد، منحنی‌های E_k و E_{k-1} فقط در جزئیات ریزی تفاوت می‌کنند و وقتی k به بی‌نهایت میل کند، دنباله منحنی‌های چند ضلعی E_k به یک منحنی حدی F میل می‌کند، که منحنی ون کخ نامیده می‌شود.

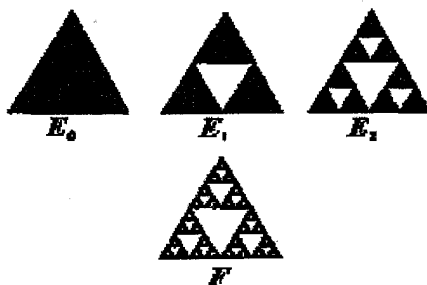
منحنی ون کخ دارای ویژگی‌هایی است که از بسیاری جهات مشابه آنچه برای مجموعه یک سوم میانی کانتور فهرست شد می‌باشد. این منحنی متشکل از چهار "ربع" است که هر کدام مشابه کل است اما در مقیاس $\frac{1}{3}$. ساختار ظریف در بی نظمی‌ها در همه مقیاس‌ها بازتاب گشته است؛ معیناً، این ساختار پیچیده از یک ساختار پایه‌ای ساده سرچشمه می‌گیرد. هر چند که در نظر گرفتن F به عنوان یک منحنی، منطقی به نظر می‌آید، اما این منحنی نامنظم‌تر از آن است که به معنی کلاسیک دارای مماس باشد.



شکل ۲-۰ (a) روش ساخت منحنی ون کخ F در هر مرحله، یک سوم میانی هر بازه توسط دو ضلع دیگر از یک مثلث متساوی الاضلاع جایگزین می‌شود. (b) سه منحنی ون کخ چیده شده در کنار یکدیگر برای تشکیل یک دانه برف.

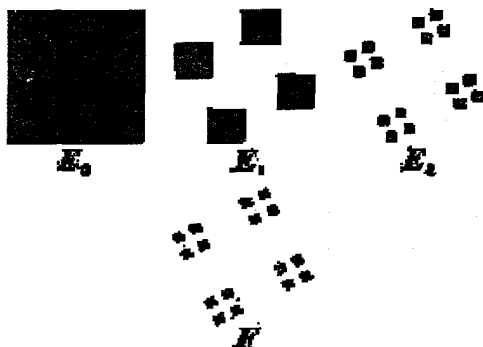
یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که طول E_k برابر $(\frac{4}{3})^k$ است؛ با این فرض که k به بی‌نهایت میل کند، نتیجه می‌گیریم که F دارای طول بی‌نهایت است. از طرف دیگر، F در صفحه هیچ مساحتی اشغال نمی‌کند، بنابراین نه طول و نه مساحت توصیف مفیدی از اندازه F فراهم نمی‌کنند.

مجموعه‌های بسیار دیگری را با استفاده از چنین روند بازگشتی می‌توان ساخت. برای مثال بادبان بند سیرپینسکی^۱ با حذف مکرر مثلث‌های متساوی‌الاضلاع (وارونه) از یک مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه به دست می‌آید، شکل ۳-۰ را ببینید.



شکل ۳-۰ روش ساخت بادبان بند سیرپینسکی ($\dim_H F = \dim_B F = \log 2 / \log 3$)

(برای بسیاری اهداف بهتر است که این روند را به عنوان جایگزین کردن مکرر یک مثلث متساوی‌الاضلاع با سه مثلث با نصف ارتفاع اولیه در نظر گرفت.)
یک نمونه مسطح از مجموعه کانتور، یک "غبار کانتور"^۲، در شکل ۴-۰ نشان داده شده است.

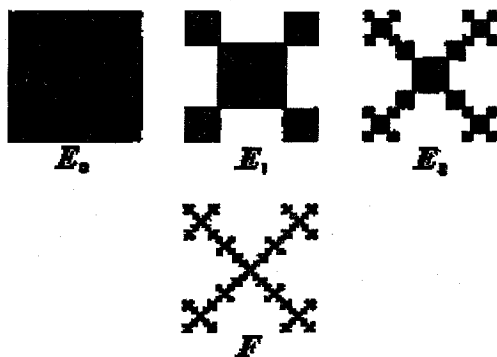


شکل ۴-۰ روش ساخت یک "غبار کانتور" ($\dim_H F = \dim_B F = 1$)

^۱ Sierpinski gasket

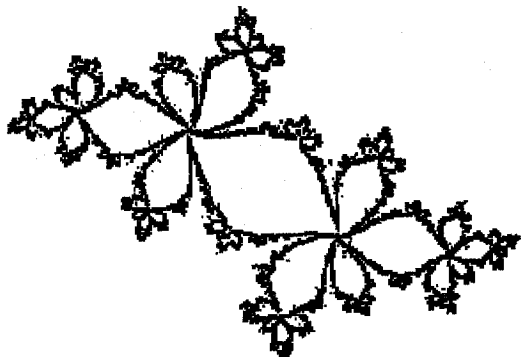
^۲ Cantor dust

در هر مرحله هر مربع باقیمانده به ۱۶ مربع کوچکتر تقسیم می‌شود که چهار تا از آنها نگه داشته و بقیه کنار گذاشته می‌شوند، (البته، از تعداد مربع‌ها و ترتیب‌های دیگر برای رسیدن به مجموعه‌های متفاوتی می‌توان استفاده کرد). باید روشن باشد که چنین مثال‌هایی دارای ویژگی‌هایی مشابه آنچه در مورد مجموعه کانتور و منحنی ون کخ ذکر شد می‌باشند. مثالی که در شکل ۵-۰ نشان داده شده است با استفاده از دو نسبت تشابه متفاوت ساخته می‌شود. انواع بسیار دیگری از روش‌های ساخت وجود دارد، که بعضی از آنها بعداً به تفصیل در کتاب بحث خواهند شد که آنها نیز به مجموعه‌هایی با ویژگی‌های فهرست شده منتهی می‌شوند.



شکل ۵-۰ روش ساخت یک فرکتال خود متشابه با دو نسبت تشابه متفاوت

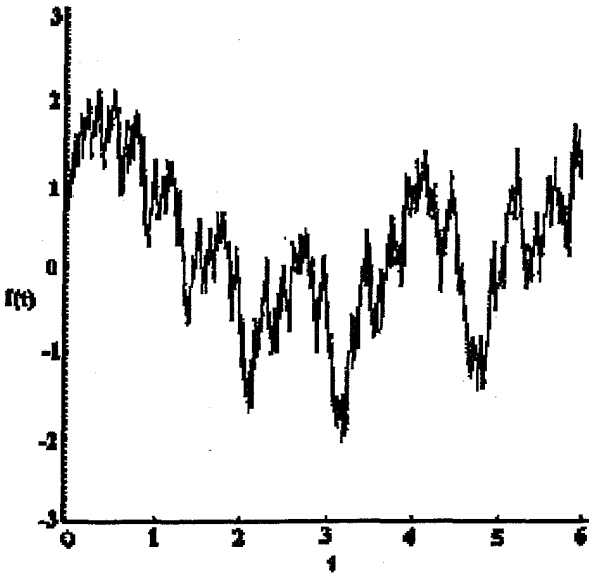
ساختار بسیار پیچیده مجموعه ژولیا که در شکل ۶-۰ نشان داده شده است، از معادله ساده درجه دوم $f(z) = z^2 + c$ به ازای یک ثابت مناسب c ناشی می‌شود.



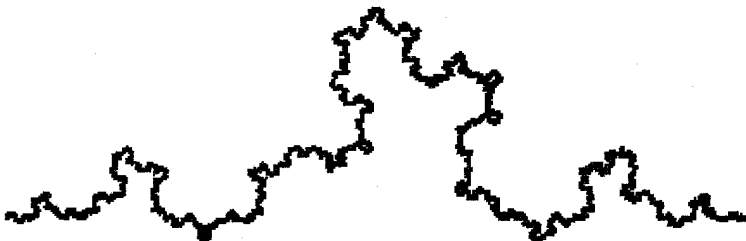
شکل ۶-۰ مجموعه ژولیا

هر چند که این مجموعه به معنایی که مجموعه کانتور و منحنی ون کخ می‌باشند، دقیقاً خود متشابه نیست، اما در آن بخش‌های به دلخواه کوچکی وجود دارد که اگر بزرگ شوند و سپس به طور هموار پیچانده شوند، بر بخش بزرگ‌تری از مجموعه منطبق می‌شوند، و می‌توان گفت که این مجموعه "نیمه خود متشابه" است.

شکل ۷-۰ نمودار تابع $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2} \sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k t\right)$ را نشان می‌دهد؛ مجموع نامتناهی به نموداری منتهی می‌شود که در مقایسه با یک منحنی هموار که حساب کلاسیک برای آن قابل استفاده است، ساختار ظریفی دارد.



شکل ۷-۰ نمودار $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2} \sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k t\right)$



شکل ۸-۰ یک نمونه تصادفی از منحنی ون کخ

بعضی از این روش‌های ساخت ممکن است "تصادفی" باشند. شکل ۸-۰ یک "منحنی ون کخ تصادفی" را نشان می‌دهد — در هر مرحله از ساخت، برای تعیین این که روی کدام طرف از منحنی، جفت پاره خط جدید را قرار دهیم، یک سکه پرتاب می‌کنیم. این منحنی تصادفی مسلماً دارای ساختار ظریفی است، اما خود تشابهی اکید منحنی ون کخ با یک "خود تشابهی آماری" جایگزین شده است.

اینها همه مثال‌هایی از مجموعه‌هایی هستند که به طور مشترک با عنوان *فرکتال* به آنها اشاره می‌شود. (کلمه "فرکتال" توسط مندلبروت در یکی از مقاله‌های اصلی او از کلمه لاتین *fractus* به معنی شکسته شده ساخته شد تا اشیایی را که بسیار نامنظم بودند تشریح کند و آنها را با زمینه‌های هندسی سنتی متناسب سازد.) ویژگی‌هایی همانند آنچه برای مجموعه کانتور فهرست شد ویژگی‌های اختصاصی فرکتال‌ها هستند که در طول کتاب آنها را در نظر خواهیم داشت. مسلماً، هر چه در خور نام فرکتال باشد ساختار ظریفی خواهد داشت، یعنی با جزئیات بسیار در هر مقیاس. بسیاری از فرکتال‌ها درجه‌ای از خود تشابهی دارند — آنها متشکل از بخش‌هایی هستند که از جهتی شبیه کل هستند. گاهی ممکن است تشابه ضعیف‌تر از تشابه مطلق هندسی باشد؛ برای مثال، تشابه ممکن است تقریبی یا آماری باشد.

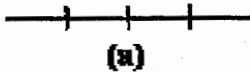
روش‌های حساب و هندسه کلاسیک برای مطالعه فرکتال‌ها نامناسب هستند و به شیوه‌های دیگری نیاز داریم. ابزار اصلی در هندسه فرکتالی مفهوم بعد در شکل‌های گوناگون آن می‌باشد. به اندازه کافی با این ایده آشنا هستیم که یک منحنی (هموار) یک شیء یک بعدی، و یک سطح، یک شیء دو بعدی است. این که باید برای بسیاری اهداف، مجموعه کانتور را دارای بعد $\log 2 / \log 3 = 0.631$ و منحنی ون کخ را دارای بعد $\log 4 / \log 3 = 1.262$ در نظر گرفت، چندان واضح نیست. این عدد اخیر، حداقل به این خاطر با منحنی ون کخ سازگار است که این منحنی باید بعدی "بزرگتر از یک" (چون دارای طول نامتناهی است) و "کوچکتر از دو" (چون دارای مساحت صفر است) داشته باشد.

مبحث زیر توضیحی (نسبتاً ابتدایی) از تعریف این "ابعاد" را، با نشان دادن اینکه چگونه آنها ویژگی‌های مقیاسی و خودتشابهی را منعکس می‌کنند، ارائه می‌دهد. همانطور که شکل ۹-۰ نشان می‌دهد، یک پاره خط از چهار کپی از خودش در مقیاس $\frac{1}{4}$ تشکیل شده است. این قطعه دارای بعد $1 = \log 4 / \log \frac{1}{4}$ است. یک مربع، در هر حال، از چهار کپی از خودش در مقیاس $\frac{1}{2}$ (یعنی با نصف طول ضلع) تشکیل یافته است و دارای بعد $2 = \log 4 / \log \frac{1}{2}$ است. به روشی مشابه، منحنی ون کخ از چهار کپی از خودش در مقیاس $\frac{1}{3}$ تشکیل یافته است، و دارای بعد $\log 4 / \log \frac{1}{3} = \log 4 / \log 3$ می‌باشد و می‌توان مجموعه کانتور را شامل چهار کپی از خودش در مقیاس $\frac{1}{9}$ و دارای بعد $\log 2 / \log 3 = \log 4 / \log \frac{1}{9}$ در

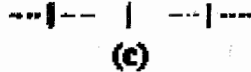
نظر گرفت. به طور کلی، یک مجموعه متشکل از m کپی از خودش در مقیاس r دارای بعد $-\log m / \log r$ در نظر گرفته می‌شود. عددی که به این روش به دست می‌آید با عنوان بعد تشابه مجموعه به آن اشاره می‌شود.

متأسفانه، بعد تشابه تنها برای دسته‌ای کوچک از مجموعه‌های مطلقاً خود متشابه با معنی است. با این وجود، تعاریف دیگری از بعد وجود دارند که به طور بسیار گسترده‌تری قابل استفاده هستند. برای مثال، بعد هاوسدورف و بعد جعبه - شمار می‌توانند برای هر مجموعه‌ای تعریف شوند، و در مورد این چهار مثال می‌توان نشان داد که این ابعاد معادل با بعد تشابه هستند. فصل‌های ابتدایی این کتاب در ارتباط با تعریف و ویژگی‌های بعد هاوسدورف و ابعاد دیگر، همراه با روش‌هایی برای محاسبه آنها می‌باشند. به زبانی ساده و غیر رسمی، بعد، توصیفی از مقدار فضایی که یک مجموعه پر می‌کند را ارائه می‌دهد. بعد ملاکی برای بی‌نظمی‌های یک مجموعه، هنگامی که در مقیاس‌های بسیار کوچک بررسی می‌شود، می‌باشد. بعد، اطلاعات زیادی درباره ویژگی‌های هندسی یک مجموعه را شامل می‌شود.

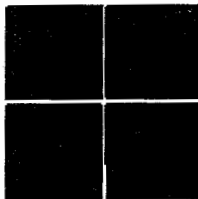
در این لحظه یک تذکر به‌جا است. تعریف "بعد" یک مجموعه به روش‌های متنوعی امکان‌پذیر است، که برخی رضایت‌بخش و مابقی کمتر جالب هستند. لازم است تأکید کنیم که تعریف‌های مختلف بعد ممکن است مقادیر متفاوتی را برای یک مجموعه نتیجه دهند، و همچنین ممکن است ویژگی‌های بسیار متفاوتی داشته باشند.



(a)



(c)



(b)



(d)

شکل ۹-۰ تقسیم مجموعه‌هایی معین به چهار بخش. بخش‌ها مشابه کل هستند با نسبت‌های $\frac{1}{4}$ برای پاره خط (a)؛ $\frac{1}{2}$ برای مربع (b)؛ $\frac{1}{9}$ برای مجموعه یک سوم میانی کانتور (c)؛ $\frac{1}{3}$ برای منحنی ون کخ (b).

کاربردهای مختلف و ناسازگار بعد گاهی به سردرگمی‌های قابل توجهی منجر شده است. به ویژه، هر جا اصطلاح "بعد فرکتال" مطرح می‌شود، چراغ‌های هشدار در ذهن من (همانند ذهن دیگر ریاضیدانان) چشمک می‌زنند. به هر حال بعضی مؤلفین یک معنی دقیق برای آن قائل می‌شوند، چندی دیگر را می‌شناسم که حتی در یک بخش از کار، آن را به صورت‌های ناسازگاری تفسیر کرده‌اند. خواننده باید در هر بحث، از تعریف بعد آگاه باشد.

مندلیبروت در مقاله اصیل پژوهشی خود، فرکتال را به عنوان یک مجموعه که بعد هاوسدورف آن اکیداً بزرگ‌تر از بعد توپولوژیک آن می‌باشد، تعریف کرد، (بعد توپولوژیک یک مجموعه همواره یک عدد صحیح است و اگر مجموعه کلاً ناهمبند باشد، بعد توپولوژیک آن صفر است، و اگر هر نقطه، همسایگی‌های به دلخواه کوچک با مرز دارای بعد صفر داشته باشد، بعد توپولوژیک آن یک است، و به همین ترتیب). معلوم شد که این تعریف نامطلوب می‌باشد چرا که تعدادی از مجموعه‌هایی را که به وضوح باید فرکتال در نظر گرفته شوند از قلم می‌اندازد. تعریف‌های متنوع دیگری پیشنهاد شده است، اما به نظر می‌رسد که همه آنها چنین عیب‌هایی دارند.

احساس شخصی من آن است که تعریف یک "فرکتال" باید به همان صورتی ارائه شود که زیست‌شناسان به تعریف "زندگی" می‌پردازند. تعریف سفت و سختی وجود ندارد، اما فقط فهرستی از ویژگی‌های مشخصه یک موجود زنده، مانند قدرت تولید مثل یا حرکت کردن یا زندگی کردن تا اندازه‌ای مستقل از محیط، وجود دارد. بیشتر موجودات زنده ویژگی‌های فهرست را دارند، هر چند موجودات زنده‌ای نیز هستند که از برخی از آنها مستثنی هستند. به روشی مشابه، به نظر می‌رسد که بهتر است به جای اینکه در جستجوی یک تعریف دقیق باشیم که ممکن است بعضی از حالت‌های جالب را هم در نظر نگیرد، یک فرکتال را به عنوان مجموعه‌ای در نظر بگیریم که دارای ویژگی‌هایی همانند آنچه در زیر فهرست شده‌اند، باشد. از نظر ریاضی‌دانان، این پیشنهاد بدی نیست. از ویژگی‌های توسعه یافته بعد، که متفاوت با روش‌هایی است که به طور یکسان برای مجموعه‌های "غیر فرکتال" و "فرکتال" به کار می‌روند، به سادگی نمی‌توان اجتناب کرد. به هر حال، برای "غیر فرکتال‌ها"، چنین ویژگی‌هایی جذابیت کمتری دارند — آنها در کل تقریباً واضح هستند و به طور ساده‌تر می‌توان آنها را با روش‌های دیگر به دست آورد.

هنگامی که به یک مجموعه F به عنوان یک فرکتال توجه می‌کنیم، معمولاً خواص زیر را در ذهن خواهیم داشت.

(i) F دارای ساختاری ظریف، یعنی دارای ریزه کاری‌هایی در مقیاس‌های به دلخواه کوچک می‌باشد.

(ii) F' نامنظم‌تر از آن است که به زبان هندسی سنتی، هم از لحاظ موضعی و هم کلی توصیف شود.

(iii) اغلب F' دارای حالتی از خودتشابهی است، احیاناً تقریبی یا آماری.

(iv) معمولاً، "بعد فرکتالی" F' (تعریف شده به چند روش) از بعد توپولوژیک آن بزرگ‌تر است.

(v) در بیشتر حالت‌های مطلوب F' به یک روش بسیار ساده، و اغلب بازگشتی، تعریف می‌شود.

در مورد هندسه فرکتال‌ها که دسته‌ای گوناگون از اشیاء هستند، چه می‌توانیم بگوییم؟ هندسه کلاسیک سرنخی به دست ما می‌دهد. در قسمت اول کتاب نمونه‌های مشخصی از ویژگی‌های هندسی آشنا در فرکتال‌ها را مطالعه می‌کنیم. تصویر متعامد یا "سایه" یک دایره در فضا روی یک صفحه، در حالت کلی، یک بیضی است. قضایای تصویر فرکتال در مورد "سایه‌های" یک فرکتال به ما اطلاعاتی می‌دهند. برای بسیاری اهداف، یک مماس، تقریب موضعی خوبی برای یک دایره فراهم می‌کند. هر چند فرکتال‌ها در هیچ حالتی ظرفیت دارا بودن مماس را ندارند، اغلب می‌توان مطالب جالبی درباره شکل موضعی آنها بیان کرد. "در حالت کلی"، دو دایره در صفحه یا در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و یا اصلاً یکدیگر را قطع نمی‌کنند (مماس بودن را به عنوان "استثناء" در نظر می‌گیریم). با استفاده از بعد، می‌توانیم عبارات مشابهی درباره اشتراک فرکتال‌ها بیان کنیم. حرکت دادن یک دایره، عمود بر صفحه آن، یک سیلندر را رو به بیرون جاروب می‌کند با ویژگی‌هایی که به ویژگی‌های دایره مولد مربوط می‌شود. روش‌های ساخت مشابه، و در واقع کلی‌تری، در مورد فرکتال‌ها امکانپذیر است.

با وجود مقبولیت ذاتی هندسه کلاسیک، از این هندسه در زمینه‌های دیگر ریاضیات نیز به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود. برای مثال، دایره‌ها یا سهمی‌ها به عنوان منحنی‌های جواب معادلات دیفرانسیل معینی مطرح می‌شوند، و اطلاع از ویژگی‌های هندسی چنین منحنی‌هایی به فهم ما از معادلات دیفرانسیل کمک می‌کند. به روشی مشابه، نظریه کلی هندسه فرکتالی می‌تواند در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات که فرکتال‌ها در آنها حضور دارند کاربرد یابد. مثال‌های گوناگون از آن کاربردها در قسمت دوم کتاب ارائه می‌شوند.

از لحاظ تاریخی، علاقه به هندسه در اثر کاربردهای آن در طبیعت نمایان شده است. بیضی به عنوان شکل مدار سیاره‌ها با اهمیت بوده است، و به همین ترتیب، کره به خاطر شکل زمین هندسه بیضی و کره در این موقعیت‌های فیزیکی می‌تواند به کار برده شود. البته، مدارها کاملاً

بیضوی نیستند، و زمین در حقیقت کروی نیست، اما برای بسیاری از اهداف، مانند پیشگویی حرکت سیاره‌ای یا مطالعه میدان جاذبه زمین، این تخمین‌ها می‌توانند کاملاً کافی باشند.

وضعیت مشابهی بر فرکتال‌ها حاکم است. اخیراً در بررسی متون فیزیک، تنوع اشیاء طبیعی که به عنوان فرکتال توصیف می‌شوند مشاهده شده است — کرانه‌های ابرها، سطوح مربوط به نقشه‌برداری از پستی و بلندی‌های زمین، خطوط ساحلی، تلاطم سیالات، و غیره. هیچکدام از اینها واقعاً فرکتال نیستند — اگر در مقیاس‌های به اندازه کافی کوچک دیده شوند ویژگی‌های فرکتالی آنها ناپدید می‌شوند. با این وجود، آنها روی بازه‌های معینی از مقیاس، بسیار شبیه فرکتال ظاهر می‌شوند، و در چنین مقیاس‌هایی می‌توان به خوبی آنها را فرکتال در نظر گرفت. فرق بین "فرکتال‌های طبیعی" و "مجموعه‌های فرکتالی" ریاضی که برای توصیف آنها مفید واقع می‌شود در مقاله اصلی مندلبروت ذکر شده است، اما به نظر می‌آید که این تفاوت تا اندازه‌ای محو و نامشخص است. هیچ فرکتال حقیقی در طبیعت وجود ندارد. (هیچ خط راست یا دایره دقیق هم وجود ندارد!)

ریاضیات هندسه فرکتالی زمانی حقیقتاً ارزشمند می‌باشد که بتوان آنها را در وضعیت‌های فیزیکی به کار برد. پیشروی در این جهت به کامیابی رسیده است و مثال‌هایی در اواخر کتاب داده شده است. هر چند پدیده‌هایی طبیعی وجود دارند که برحسب ریاضیات فرکتالی توضیح داده شده‌اند (حرکت براونی مثال خوبی است)، بیشتر کاربردها به توصیف تمایل دارند تا به پیش‌بینی. بیشتر ریاضیاتی که در مطالعه فرکتال‌ها استفاده می‌شوند چیز جدیدی نیستند، اما توجه به آنها، موضوع جدیدی است. برای پیشرفت بیشتر، توسعه و کاربرد ریاضیات مناسب سزاوار توجه بسیاری می‌باشد.

نکات و منابع

برخلاف مابقی کتاب، که شامل ریاضیات درست و حسابی است، این دیباچه شامل عقاید و تعصبات بعضی مؤلفان است که ممکن است توسط دیگر افرادی که روی فرکتال‌ها کار می‌کنند پذیرفته نشده باشند.

اولین رساله در زمینه فرکتال‌ها، که از بسیاری جوانب باید سپاسگذار آن باشیم، مقاله علمی، فلسفی و مصور *Mandelbrot* (۱۹۸۲) می‌باشد (که از ویرایش اصلی ۱۹۷۵ توسعه یافته است)، که شامل بسیاری از مثال‌های ریاضی و طبیعی از فرکتال‌ها می‌باشد. این مقاله، در ویرایش‌های مختلفش، برای بسیاری از کارهایی که روی فرکتال‌ها انجام شده است انگیزه بخش بوده است.

کتاب‌های دیگری که به جنبه‌های گوناگونی از فرکتال‌ها اختصاص داده شده‌اند شامل بررسی ریاضیات از *Falconer* (۱۹۸۵a)، کتاب جامع و زیبای دینامیک مختلط از *Peitgen* و *Richter* (۱۹۸۶)، کتابی از *Feder* (۱۹۸۸) که تا حد زیادی به کاربردهای فیزیکی اختصاص داده شده است، کتاب چاپ شده توسط *Peitgen* و *Saupe* (۱۹۸۸) در جنبه‌های گرافیکی کامپیوتری، و کتاب درسی *Barnsley* (۱۹۸۸) که عمدتاً در ارتباط با طرح‌های توابع تکرار شونده است، می‌باشد. همه اینها شامل مراجع مفید دیگری می‌باشند.

قسمت اول

مبانی ریاضی فرکتال‌ها

فصل ۱ پیش زمینه ریاضی

این فصل برخی مفاهیم ریاضی و نکاتی را که در طول کتاب استفاده خواهند شد، یادآوری می‌کند. بخش ۱-۱ در زمینه نظریه مجموعه‌ها و ۱-۲ در زمینه توابع، نسبتاً مختصر هستند؛ به خواننده‌هایی که با این زمینه مطالب ناآشنا هستند پیشنهاد می‌شود یک متن مفصل‌تر را مورد مطالعه قرار دهند. اندازه‌ها و توزیع جرم در نظریه فرکتال‌ها نقش مهمی را ایفا می‌کنند. در بخش ۱-۳ توضیحات مناسبی داده شده است که برخی از نیازهای آینده ما را رفع می‌کند. از خواننده می‌خواهیم که درستی بعضی از اندازه‌های معین را بپذیرد تا بتوانیم از بسیاری از اشکالات فنی که معمولاً با نظریه اندازه همراه هستند چشم‌پوشی کنیم. در بخش ۱-۴ برخی نکات در مورد نظریه احتمال ارائه می‌شوند که در فصل‌های ۱۵ و ۱۶ مورد نیاز خواهند بود.

۱-۱ نظریه ابتدایی مجموعه‌ها

در این بخش بعضی اطلاعات ابتدایی از نظریه مجموعه‌ها و توپولوژی عمومی را یادآوری می‌کنیم.

به طور کلی در فضای اقلیدسی n -بعدی، R^n ، کار می‌کنیم که $R^1 = R$ دقیقاً مجموعه اعداد حقیقی یا خط حقیقی می‌باشد و R^2 صفحه (اقلیدسی) است. نقاط در R^n به طور کلی با حروف کوچک x و y و غیره نمایش داده می‌شوند و گاهی از شکل مختصاتی $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ استفاده می‌کنیم. جمع و ضرب اسکالر به طور معمولی تعریف می‌شوند، یعنی $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ و $Cx = (Cx_1, \dots, Cx_n)$ که C یک اسکالر حقیقی می‌باشد. از فاصله اقلیدسی معمولی (یا متر) روی R^n استفاده

می‌کنسیم. بنابراین اگر x و y نقاطی در R^n باشند، فاصله بین آنها برابر است با

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

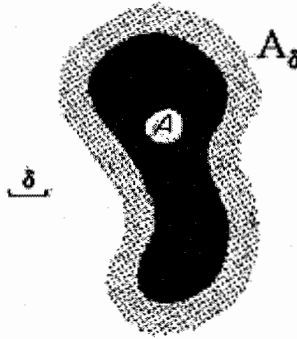
مجموعه‌هایی که به طور کلی زیرمجموعه‌هایی از R^n باشند با حروف بزرگ U, F, E و شیره نمایش داده می‌شوند. به شیوه معمولی، $x \in E$ یعنی که x متعلق به مجموعه E است و $E \subset F$ یعنی که E یک زیرمجموعه از مجموعه F است. می‌نویسیم $\{x: \text{شرط}\}$ ، برای مجموعه‌ای از x که برای آن "شرط" درست است. بعضی مجموعه‌ها دارای نماد خاصی هستند. مجموعه تهی که هیچ عنصری ندارد به صورت \emptyset نوشته می‌شود. اعداد صحیح با Z و اعداد گویا با Q نشان داده می‌شوند. برای نشان دادن عناصر مثبت یک مجموعه، از یک اندیس بالای + استفاده می‌کنسیم؛ بنابراین R^+ اعداد حقیقی مثبت هستند و Z^+ اعداد صحیح مثبت می‌باشند. گاهی اوقات به اعداد مختلط که برای بعضی اهداف با صفحه R^2 معرفی می‌شود، با $x_1 + ix_2$ مطابق با نقطه (x_1, x_2) ، اشاره می‌کنیم.

گوی بسته با مرکز x و شعاع r با $B_r(x) = \{y: |y - x| \leq r\}$ تعریف می‌شود. به طور مشابه $B_r^0(x) = \{y: |y - x| < r\}$ گوی باز می‌باشد. بنابراین گوی بسته کره مرزی خود را شامل می‌شود اما گوی باز اینطور نیست. البته در R^2 یک گوی، یک قرص و در R^1 دقیقاً یک بازه می‌باشد. اگر $a < b$ ، $[a, b]$ را برای بازه بسته $\{x: a \leq x \leq b\}$ و (a, b) را برای بازه باز $\{x: a < x < b\}$ می‌نویسیم. به طور مشابه، $[a, b)$ بازه نیم باز $\{x: a \leq x < b\}$ را نشان می‌دهد و غیره.

مکعب مختصات، به طول ضلع $2r$ و مرکز $x = (x_1, \dots, x_n)$ مجموعه $\{y = (y_1, \dots, y_n): |y_i - x_i| \leq r, i = 1, \dots, n\}$ می‌باشد. (یک مکعب در R^2 ، دقیقاً یک مربع و در R^1 ، یک بازه می‌باشد).

گاهی به بدنه δ -موازی، A_δ ، از یک مجموعه A ، که مجموعه نقاط در فاصله δ از A می‌باشد، اشاره می‌کنیم، بنابراین $\{x: |x - y| \leq \delta, y \in A\}$ را A_δ می‌نامند. شکل ۱-۱ را ببینید.

اجتماع مجموعه‌های A و B را به صورت $A \cup B$ می‌نویسیم؛ یعنی مجموعه نقاط متعلق به A یا B . به طور مشابه، برای اشتراک آنها می‌نویسیم: $A \cap B$ ، مجموعه نقاطی که هم در A و هم در B می‌باشند. نماد $\bigcup_\alpha A_\alpha$ اجتماع گردایه‌ای دلخواه از مجموعه‌ها $\{A_\alpha\}$ را نشان می‌دهد؛ یعنی مجموعه نقاطی که حداقل در یکی از مجموعه‌های A_α می‌باشد، و $\bigcap_\alpha A_\alpha$ اشتراک آنها را نشان می‌دهد که شامل مجموعه نقاطی است که در همه A_α ها مشترک می‌باشند. یک گردایه از مجموعه‌ها،

شکل ۱-۱ مجموعه A و بدنه δ -موازی آن

مجزا است اگر اشتراک هر دو تا از آنها مجموعه تهی باشد. تفاضل $A \setminus B$ از A و B ، شامل نقاطی از A است که در B نیست. مجموعه $R^n \setminus A$ ، مکمل A نامیده می‌شود. مجموعه همه دوتایی‌های مرتب $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ ضرب (دکارتی) A و B نامیده شده و با $A \times B$ نشان داده می‌شود. اگر $A \subset R^n$ و $B \subset R^m$ آنگاه $A \times B \subset R^{n+m}$.

اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از R^n و λ عددی حقیقی باشد، جمع برداری مجموعه‌ها را به صورت $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ و ضرب اسکالر را به صورت $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ تعریف می‌کنیم.

یک مجموعه نامتناهی A شماراست اگر بتوان عناصر آن را به شکل x_1, x_2, \dots مرتب کرد به طوری که هر عنصر A در یک مکان مخصوص از لیست قرار گیرد، در غیر این صورت مجموعه ناشماراست. مجموعه‌های Z و Q شمارا هستند اما R ناشمارا می‌باشد.

اگر A هر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد آنگاه سوپریم A ، $\sup A$ ، کوچکترین عدد m است به طوری که به ازای هر x در A ، $x \leq m$ ، یا ∞ است اگر چنین عددی موجود نباشد. به طور مشابه اینفیم A ، $\inf A$ ، بزرگترین عدد m است به طوری که برای هر $x \in A$ ، $m \leq x$ ، یا $-\infty$ است. به طور مستقیم ملاحظه می‌شود که سوپریم و اینفیم به عنوان ماکزیمم و مینیمم مجموعه در نظر گرفته می‌شوند، به هر حال، باید تأکید کنیم که $\sup A$ و $\inf A$ لزوماً عضوهایی از مجموعه A نمی‌باشند. نماد $\sup_{x \in B}()$ را برای سوپریم مقدار داخل پرانتز می‌نویسیم که به تغییرات x روی مجموعه B ، مربوط می‌باشد.

قطر $|A|$ از یک زیرمجموعه (ناتهی) از R^n را به عنوان بزرگترین فاصله جدا کننده زوج‌های نقاط در A ، تعریف می‌کنیم. بنابراین $|A| = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$. اگر یک

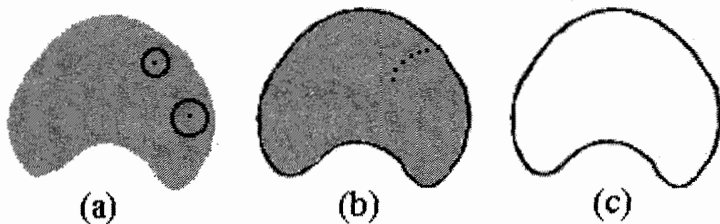
مجموعه A قطر متناهی داشته باشد یا به طور معادل، اگر A در یک گوی (به اندازه کافی بزرگ) مشمول شود، آنگاه کراندار است.

حد دنباله‌ها به روش معمولی تعریف می‌شوند. یک دنباله $\{x_k\}$ در R^n چنانچه $k \rightarrow \infty$ به یک نقطه x همگراست اگر به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، یک عدد K موجود باشد به طوری که هرگاه $k > K$ ، $|x_k - x| < \varepsilon$ ، یعنی اگر $|x_k - x|$ به صفر میل کند. عدد x حد دنباله نامیده می‌شود و می‌نویسیم $x_k \rightarrow x$ یا $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

مفاهیم "باز" و "بسته" که در رابطه با گوی‌ها مطرح شد، برای بسیاری مجموعه‌های کلی‌تر نیز به کار می‌روند. به طور مستقیم معلوم می‌شود که یک مجموعه، بسته است اگر شامل مرز خود باشد و باز است اگر هیچ نقطه‌ای از مرز خود را شامل نباشد. به طور دقیق‌تر یک زیرمجموعه A از R^n باز است اگر به ازای هر نقطه x در A ، یک گوی $B_r(x)$ با مرکز x و با شعاع مثبت موجود باشد که کاملاً در A قرار گیرد. یک مجموعه بسته است اگر، حد هر دنباله همگرای $\{x_k\}$ از نقاط A ، در A باشد. شکل ۱-۲ را ببینید. مجموعه‌های ϕ و R^n هم باز و هم بسته در نظر گرفته می‌شوند.

می‌توان نشان داد که یک مجموعه باز است اگر و فقط اگر مکمل آن بسته باشد. اجتماع هر گردایه‌ای از مجموعه‌های باز، باز است، همچنانکه اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، باز می‌باشد. اشتراک هر گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته، بسته است، و همچنین اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته می‌باشد.

یک مجموعه A همسایه یک نقطه x نامیده می‌شود اگر یک گوی $B_r(x)$ (کوچک) با مرکز x در A وجود داشته باشد.



شکل ۱-۲ (a) یک مجموعه باز — به مرکز هر نقطه از مجموعه، یک گوی با مرکز آن نقطه در داخل مجموعه وجود دارد. (b) یک مجموعه بسته — حد هر دنباله همگرای از نقاط مجموعه، در مجموعه قرار دارد. (c) مرز مجموعه در (a) یا (b).

اشتراک همه مجموعه‌های بسته شامل یک مجموعه A ، بستار A نامیده شده و به صورت \overline{A} نوشته می‌شود. به اجتماع همه مجموعه‌های باز مشمول در A ، درونی A ، $\text{int}(A)$ ، گفته می‌شود. بستار A به عنوان کوچکترین مجموعه بسته شامل A ، و درونی A به عنوان بزرگترین مجموعه باز مشمول در A در نظر گرفته می‌شوند. مرز A ، ∂A ، به صورت $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$ داده می‌شود.

مجموعه B یک زیرمجموعه چگال از A می‌باشد اگر $A \subset \overline{B} \subset A$ ؛ یعنی اگر نقطه‌هایی از B به دلخواه نزدیک هر نقطه از A ، وجود داشته باشند.

یک مجموعه A فشرده است اگر هر گردایه از مجموعه‌های باز که A را می‌پوشانند (یعنی اجتماع آنها شامل A باشد) حاوی زیرگردایه‌ای متناهی که A را بپوشاند نیز باشد. از لحاظ فنی، فشرده‌گی یک ویژگی فوق‌العاده مفید است که می‌تواند مجموعه‌ای نامتناهی از شرایط را به تعدادی متناهی کاهش دهد. یک زیرمجموعه فشرده از R^n ، زیرمجموعه‌ای است که هم بسته و هم کراندار باشد.

اشتراک هر گردایه از مجموعه‌های فشرده، فشرده است. می‌توان نشان داد که اگر $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ یک دنباله نزولی از مجموعه‌های فشرده باشد، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ناتهی است. به علاوه، اگر به ازای مجموعه بازی مانند V ، $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ در V باشد، آنگاه اشتراک متناهی $\bigcap_{i=1}^k A_i$ به ازای k ای، در V قرار دارد.

یک زیرمجموعه A از R^n ، همبند است اگر مجموعه‌های بازی چون U و V به طوریکه $U \cup V$ شامل A باشد، و $A \cap U$ و $A \cap V$ ناتهی و جدا از هم باشند، وجود نداشته باشند. به طور شهودی یک مجموعه A همبند در نظر گرفته می‌شود اگر فقط از یک قطعه تشکیل شده باشد. بزرگ‌ترین زیرمجموعه همبند A شامل یک نقطه x ، مؤلفه همبند x نامیده می‌شود. مجموعه A کلاً ناهمبند است اگر مؤلفه همبند هر نقطه فقط شامل آن نقطه باشد. یک مجموعه کلاً ناهمبند خواهد بود اگر و تنها اگر برای هر جفت نقاط x و y در A بتوانیم مجموعه‌های باز و مجزای U و V را چنان بیابیم که $x \in U$ و $y \in V$ و $A \subset U \cup V$.

یک دسته دیگر از مجموعه‌ها وجود دارد که باید توضیح داده شوند، هر چند که تعریف دقیق مستقیمی ندارند. دسته مجموعه‌های بورل^۱، کوچکترین گردایه از زیرمجموعه‌های R^n با ویژگی‌های زیر است:

(آ) هر مجموعه باز و هر مجموعه بسته، یک مجموعه بورل است.

^۱-Borel

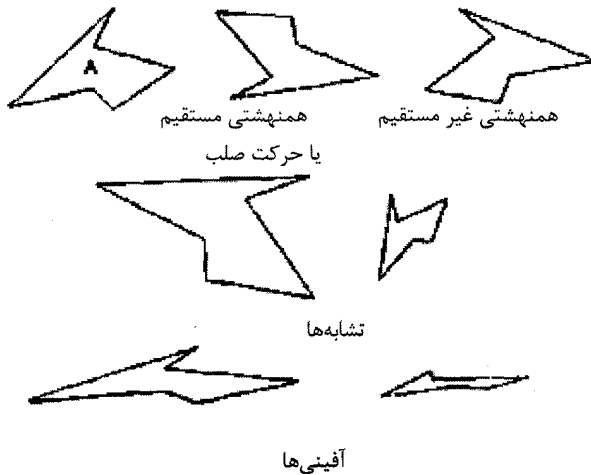
(ب) اجتماع هر گردایه شمارا یا متناهی از مجموعه‌های بورل، یک مجموعه بورل است و اشتراک هر گردایه شمارا یا متناهی از مجموعه‌های بورل، یک مجموعه بورل است.

در طول این کتاب هر زیرمجموعه‌ای از R^n که برای ما مطلوب باشد، در واقع مجموعه‌ای بورل خواهد بود. هر مجموعه‌ای که بتواند با استفاده از دنباله‌ای از اشتراک‌ها یا اجتماع‌های شمارش‌پذیر با شروع از یک مجموعه بسته یا باز ساخته شود، مسلماً یک مجموعه بورل است. با فرض اینکه همه مجموعه‌هایی که خواننده در این کتاب با آنها مواجه می‌شود مجموعه بورل هستند، مشکلی پیش نخواهد آمد.

۱-۲ توابع و حدود

فرض کنید X و Y دو مجموعه دلخواه باشند. یک نگاشت، تابع یا تبدیل f از X به Y یک قاعده یا فرمولی است که یک نقطه $f(x)$ از Y را به هر نقطه x از X ارتباط می‌دهد. برای اینکه این حالت را نشان دهیم، می‌نویسیم $f: X \rightarrow Y$. مجموعه X دامنه f و Y همدامنه نامیده می‌شود. اگر A هر زیرمجموعه‌ای از X باشد $f(A)$ را برای تصویر A ، که به صورت $\{f(x) : x \in A\}$ تعریف می‌شود، به کار می‌بریم. اگر B یک زیرمجموعه Y باشد، $f^{-1}(B)$ را برای تصویر معکوس یا پیش تصویر B به کار می‌بریم؛ یعنی مجموعه $\{x \in X : f(x) \in B\}$ ؛ دقت کنید که در این مورد، تصویر معکوس یک نقطه، می‌تواند چند نقطه را شامل شود.

یک تابع $f: X \rightarrow Y$ یک به یک نامیده می‌شود اگر $f(x) \neq f(y)$ هرگاه $x \neq y$ ؛ یعنی عناصر متفاوتی از X به عناصر متفاوتی از Y نگاشته می‌شوند. تابع، پوشا یا به رو نامیده می‌شود اگر برای هر $y \in Y$ یک عنصر x در X وجود داشته باشد به طوریکه $f(x) = y$ ؛ یعنی هر عنصر از Y تصویر نقطه‌ای از X است. تابعی که هم یک به یک و هم پوشا است، یک دوسویی یا تناظر یک به یک بین X و Y نامیده می‌شود. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک دوسویی باشد آنگاه می‌توانیم تابع معکوس $f^{-1}: Y \rightarrow X$ را با گرفتن $f^{-1}(y)$ به عنوان عنصر یکتایی از X به طوریکه $f(x) = y$ ، تعریف کنیم. در این حالت برای x در X ، $f^{-1}(f(x)) = x$ و برای y در Y داریم $f(f^{-1}(y)) = y$.



شکل ۱-۳ اثر تبدیل‌های مختلف روی یک مجموعه A

ترکیب توابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ تابع $g \circ f: X \rightarrow Z$ به صورت $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ داده می‌شود. این تعریف به وضوح به ترکیب هر تعداد متناهی از توابع تعمیم می‌یابد.

برخی توابع از R^n به R^n اهمیت هندسی خاصی دارند؛ اغلب به آنها با عنوان "تبدیل" اشاره می‌شود و با حروف بزرگ نشان داده می‌شوند. اثر آنها در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. تبدیل $S: R^n \rightarrow R^n$ یک همنهشتی^۱ یا طولپایی^۲ نامیده می‌شود اگر فاصله‌ها را حفظ کند؛ یعنی اگر برای x و y در R^n ، $|S(x) - S(y)| = |x - y|$. همنهشتی‌ها همچنین زوایا را حفظ می‌کنند و مجموعه‌ها را به مجموعه‌های همنهشت هندسی تبدیل می‌کنند. حالات خاص شامل انتقال است که به صورت $S(x) = x + a$ هستند و تأثیر آن، انتقال نقاط به موازات بردار a می‌باشد، و دوران که یک مرکز a دارد به طوریکه برای هر x ، $|S(x) - a| = |x - a|$ (برای راحتی تبدیل همانی داده شده به صورت $I(x) = x$) را به عنوان یک دوران در نظر می‌گیریم، و بازتاب^۳ها نقاط را به تصویرهای آینه‌ای در رویه $(n-1)$ بعدی، رسم می‌کنند. یک همنهشتی که ممکن است از ترکیب یک دوران و یک انتقال بدست آمده باشد، یعنی شامل بازتاب نباشد، حرکت صلب^۴ یا همنهشتی مستقیم نامیده می‌شود. یک

^۱ congruence ^۲ isometry ^۳ reflection ^۴ rigid motion

تبدیل $S: R^n \rightarrow R^n$ یک تشابه^۱ است اگر یک ثابت c وجود داشته باشد به طوری که برای هر x و y در R^n ، $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$. یک تشابه، مجموعه‌ها را به نوع مشابه هندسی تبدیل می‌کند.

یک تبدیل $T: R^n \rightarrow R^n$ خطی است اگر $T(x + y) = T(x) + T(y)$ و $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ ، برای هر $\lambda \in R$ و $x, y \in R^n$ ؛ تبدیل‌های خطی ممکن است به وسیله ماتریس‌ها به شیوه معمولی نمایش داده شوند. یک چنین تبدیل خطی نامنفرد است هرگاه: $x = 0$ اگر و فقط اگر $T(x) = 0$. اگر $S: R^n \rightarrow R^n$ به شکل $S(x) = T(x) + a$ باشد که T یک تبدیل خطی نامنفرد و a نقطه‌ای در R^n می‌باشد، آنگاه S یک تبدیل آفین^۲ یا آفینی نامیده می‌شود. یک آفینی می‌تواند به عنوان یک تبدیل برینشی در نظر گرفته شود؛ نیازی نیست که اثر انبساط یا انقباض آن در هر جهت یکسان باشد.

مهم است خاطر نشان کنیم که چنین دسته‌هایی از تبدیل‌ها، تحت ترکیب نگاشت‌ها، تشکیل گروه می‌دهند. برای مثال، ترکیب دو انتقال یک انتقال است، تبدیل همسانی به وضوح یک انتقال است، و معکوس یک انتقال نیز یک انتقال می‌باشد. بالاخره قانون شرکت‌پذیری $S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U$ ، برای همه تبدیلیهای S ، T و U برقرار است. ویژگی‌های مشابه گروه برای هم‌نهشتی‌ها، حرکت صلب، تشابه‌ها و آفینی‌ها برقرار است. یک تابع $f: X \rightarrow Y$ تابع هولدر^۳ با نمای α نامیده می‌شود اگر برای یک ثابت c ،

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in X)$$

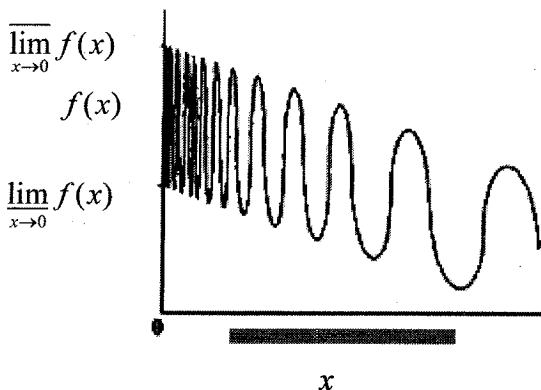
تابع f تابع لیپشیتس^۴ نامیده می‌شود اگر α بتواند مساوی ۱ گرفته شود و یک تابع دو-لیپشیتس نامیده می‌شود اگر برای ثابت‌های $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ ،

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (x, y \in X)$$

اکنون مفاهیم اولیه حدود و پیوستگی توابع را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید X و Y به ترتیب زیرمجموعه‌هایی از R^n و R^m باشند. فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع a نقطه‌ای در \bar{X} باشد. می‌گوییم چنانکه x به a میل کند، $f(x)$ دارای حد y می‌باشد (یا به y میل می‌کند یا به y همگراست)، اگر برای $\varepsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$ که $|x - a| < \delta$ ، $|f(x) - y| < \varepsilon$ باشد. این را با نوشتن $f(x) \rightarrow y$ ، چنانکه $x \rightarrow a$ ، یا به وسیله $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$ نشان می‌دهیم. برای تابع $f: X \rightarrow R$ می‌گوییم چنانکه $x \rightarrow a$ ، $f(x)$ به بینهایت میل می‌کند ($f(x) \rightarrow \infty$) اگر به ازای M

^۱ similarity^۲ affine^۳ Holder^۴ Lipschitz

داده شده، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه هرگاه $|x - a| < \delta$ ، آنگاه $f(x) > M$.
تعریف $f(x) \rightarrow -\infty$ مشابه می‌باشد.



شکل ۴-۱ حد بالا و پایین یک تابع

حال فرض کنید $f: R^+ \rightarrow R$. غالباً طالب مقادیر چنین توابعی به ازای مقادیر مثبت و کوچک x هستیم. اگر چنانچه x کاهش یابد، $f(x)$ صعود کند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ با مقدار متناهی یا ∞ موجود است، و اگر با کاهش x ، $f(x)$ نزولی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود و متناهی یا $-\infty$ است. البته برای x کوچک، $f(x)$ می‌تواند خودسرانه بالا و پایین رود و لازم نیست که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ اصلاً وجود داشته باشد. برای توضیح چنین بالا و پایین رفتن‌ها، از حدود بالا و پایین استفاده می‌کنیم. حد پایین را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} (\inf \{f(x) : 0 < x < r\})$$

از آنجاییکه $\inf \{f(x) : 0 < x < r\}$ برای همه مقادیر مثبت r ، یا $-\infty$ است یا اگر نه، چنانچه r کاهش یابد، صعود می‌کند، پس $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$ همیشه موجود است. به طور مشابه حد

بالایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} (\sup \{f(x) : 0 < x < r\})$$

حدود بالا و پایین برای هر تابع f موجود است (یا به صورت عدد حقیقی یا $-\infty$ یا $+\infty$) و حاکی از گوناگونی مقادیر f برای x در نزدیکی صفر می‌باشد، شکل ۴-۱ را ببینید. اگر $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود و مساوی با این مقدار مشترک می‌باشد.

به روش مشابه می‌توان حدود بالا و پایین را برای حالتی که $x \rightarrow a$ ، برای تابع $f: X \rightarrow R$ که X زیرمجموعه‌ای از R^n و a در \bar{X} می‌باشد، تعریف کرد.

گاهی نیاز داریم که دو تابع $f, g: R^+ \rightarrow R$ را برای مقادیر کوچک مقایسه کنیم. می‌نویسیم $f(x) \sim g(x)$ هرگاه زمانی که $x \rightarrow 0$ ، $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$. گاهی خواهیم داشت که $f(x) \sim x^n$ به عبارت دیگر وقتی x کوچک باشد f تقریباً از "قانون توان با نمای n "، پیروی می‌کند. علامت‌گذاری $f(x) \simeq g(x)$ را به طور نادقیق‌تر به منظور اینکه $f(x)$ و $g(x)$ از برخی جهات تقریباً معادل هستند، به کار می‌بریم.

به یاد آورید که تابع $f: X \rightarrow Y$ در یک نقطه a از X پیوسته است اگر $f(x) \rightarrow f(a)$ ، چنانچه $x \rightarrow a$ ، و بر X پیوسته است اگر در همه نقاط X پیوسته باشد. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک دوسویی پیوسته با معکوس پیوسته $f^{-1}: Y \rightarrow X$ باشد، آنگاه f یک همسانریختی^۱ و مجموعه‌های X و Y همسانریخت نامیده می‌شوند.

تابع $f: R \rightarrow R$ در x مشتق پذیر با مقدار مشتق $f'(x)$ می‌باشد اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

به خصوص قضیه مقدار میانگین به کار می‌رود: اگر $a < b$ و تابع مشتق‌پذیر f روی $[a, b]$ داده شده باشند، یک c که $a < c < b$ وجود دارد به طوریکه

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = f'(c)$$

(به طور شهودی معلوم می‌شود که هر وتر از نمودار f موازی شیب f در نقطه‌ای میانی می‌باشد). تابع f به طور پیوسته مشتق پذیر است اگر $f'(x)$ در X پیوسته باشد.

به طور کلی، اگر $f: R^n \rightarrow R^n$ ، گوئیم f در x مشتق‌پذیر با مشتق نگاشت خطی $f': R^n \rightarrow R^n$ است اگر

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0$$

گاهی علاقه مند هستیم که همگرایی یک دنباله از توابع $f_k: X \rightarrow Y$ که X و Y زیرمجموعه‌هایی از فضاها ی اقلیدسی هستند، را بررسی کنیم. گوئیم توابع f_k نقطه به نقطه همگرا به تابع $f: X \rightarrow Y$ می‌باشند اگر برای هر x در X ، $f_k(x) \rightarrow f(x)$ ، وقتی که $k \rightarrow \infty$. همگرایی یکنواخت است اگر $\sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0$ وقتی که

^۱ homeomorphism

$k \rightarrow \infty$. همگرایی یکنواخت یک ویژگی نسبتاً قوی‌تر از همگرایی نقطه به نقطه می‌باشد؛ آهنگ نزدیک شدن به حد در سرتاسر X یکنواخت است. اگر توابع f_k پیوسته و به طور یکنواخت همگرا به f باشند، آنگاه f پیوسته است. بالأخره تأکید می‌کنیم که لگاریتم‌ها همیشه در مبنای e خواهند بود. اتحاد $a^b = e^{b \log a / \log e}$ نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۳-۱ اندازه‌ها و توزیع‌های جرم

هر شخصی که ریاضیات فرکتال‌ها را مطالعه می‌کند، قبل از درگیر شدن جدی با اندازه‌ها نمی‌تواند چندان به پیش برود. برخی بر اثر خصلت ظاهراً تکنیکی نظریه اندازه^۱ از ادامه مطالعه فرکتال‌ها دلسرد می‌شوند، اما در واقع نباید اینطور باشد، چرا که برای بیشتر کاربردهای فرکتال‌ها تنها مختصری از مفاهیم اساسی نظریه اندازه مورد نیاز است. به علاوه این مفاهیم در شکل توزیع بار یا جرم که در فیزیک پایه مورد مطالعه قرار می‌گیرند، مطرح و آشنا هستند.

ما تنها به اندازه‌های روی زیر مجموعه‌های R^n نیاز داریم. اساساً یک اندازه، تنها روشی برای نسبت دادن یک مقدار عددی به مجموعه‌ها می‌باشد به طوریکه اگر یک مجموعه به روشی مناسب به تعدادی شمارش‌پذیر یا متناهی قطعه تجزیه شود، آنگاه اندازه کل برابر مجموع اندازه‌های همه قطعه‌ها می‌باشد.

μ را یک اندازه روی R^n می‌نامیم هرگاه μ یک عدد نامنفی (احتمالاً ∞)، به هر زیرمجموعه R^n نسبت دهد به طوریکه:

$$(۱-۱) \quad \mu(\emptyset) = 0 \quad (A)$$

$$(۲-۱) \quad \mu(A) \leq \mu(B) \quad \text{اگر } A \subset B \quad (B)$$

(ج) اگر A_1, A_2, \dots دنباله‌ای شمارا (یا متناهی) از مجموعه‌ها باشد آنگاه

$$(۳-۱) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

و اگر A_i ‌ها مجموعه‌های بورل جدا از هم باشند، در (۳-۱) تساوی برقرار است یعنی

$$(۴-۱) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$\mu(A)$ را اندازه A نامیده و از دیدگاهی $\mu(A)$ را به عنوان سایز A در نظر می‌گیریم. شرط (آ) می‌گوید که مجموعه تهی دارای اندازه صفر است و شرط (ب) می‌گوید که هرچه مجموعه بزرگتر باشد اندازه بزرگتری دارد و (ج) می‌گوید که اگر مجموعه‌ای اجتماع تعدادی شمارش‌پذیر از قطعه‌ها (که ممکن است متداخل باشند) باشد، آنگاه مجموع اندازه قطعه‌ها حداقل برابر اندازه کل است. اگر مجموعه‌ای به تعدادی شمارا از مجموعه‌های بورل جدا از هم تجزیه شده باشد، آنگاه مجموع اندازه تکه‌ها برابر اندازه کل است.

نکته فنی. برای اندازه‌هایی که ما با آنها سروکار داریم، رابطه (۴-۱) به طور کلی برای دسته بزرگتری از مجموعه‌ها و نه فقط برای مجموعه‌های بورل، برقرار است، به خصوص برای همه تصاویر مجموعه‌های بورل تحت توابع پیوسته. به هر حال به خاطر دلایلی که در اینجا به بحث ما مربوط نمی‌شوند، در حالت کلی نیازی نداریم که (۴-۱) برای هر گردایه شمارا از مجموعه‌های مجزای A_i برقرار باشد.

خواننده‌ای که با نظریه اندازه‌ها آشنا باشد می‌داند که تعریف ما از اندازه روی R ، تعریفی از "یک اندازه بیرونی روی R " است که برای آن مجموعه‌های بورل اندازه‌پذیر هستند. به هر حال برای پرهیز از رجوع زیاد به اصطلاح مجموعه‌های اندازه‌پذیر مناسب است که $\mu(A)$ برای هر مجموعه A تعریف شده باشد و از آنجاییکه ما بیشتر با اندازه مجموعه‌های بورل سروکار داریم، کفایت که برقراری (۴-۱) را برای مجموعه‌های بورل داشته باشیم تا دسته بزرگتری از مجموعه‌ها. اگر μ تعریف شده باشد و در روابط (۱-۱) - (۴-۱) برای مجموعه‌های بورل صدق کند، تعریف μ می‌تواند به یک "اندازه بیرونی" روی همه مجموعه‌ها به روشی که (۱-۱) - (۳) برقرار باشند تعمیم یابد، بنابراین تعریف ما با تعریف معمول سازگار است. اگر $B \subset A$ آنگاه A می‌تواند به صورت اجتماع جدا از هم $A = B \cup (A \setminus B)$ بیان شود. پس یک نتیجه فوری از (۴-۱) این است که اگر A و B مجموعه‌های بورل باشند و $B \subset A$ ،

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) \quad (۵-۱)$$

به طور مشابه، اگر $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ یک دنباله صعودی از مجموعه‌های بورل باشد آنگاه

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad (۶-۱)$$

برای رسیدن به این تساوی، توجه کنید که $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$ و این روش جدا کردن اجتماع، نتیجه

می‌دهد:

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)\end{aligned}$$

به طور کلی تر، عبارتی مشابه نتیجه می دهد که اگر برای هر $\delta > 0$ ، A_δ ها مجموعه های بورد باشند که با کم شدن δ ، صعود می کنند، یعنی برای $0 < \delta < \delta'$ ، $A_{\delta'} \subset A_\delta$ ، آنگاه

$$(۷-۱) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(A_\delta) = \mu\left(\bigcup_{\delta > 0} A_\delta\right)$$

محمل یک اندازه را به عنوان مجموعه ای که اندازه، روی آن تمرکز یافته است در نظر می گیریم. به طور دقیق، محمل μ کوچک ترین مجموعه بسته X است به طوری که $\mu(R^n \setminus X) = 0$. محمل یک اندازه همواره بسته است و x در محمل است اگر و فقط اگر برای هر شعاع مثبت r ، $\mu(B_r(x)) > 0$. گوئیم μ یک اندازه روی یک مجموعه کراندار از R^n که برای آن $0 < \mu(R^n) < \infty$ یک توزیع جرم نامیده خواهد شد و $\mu(A)$ به عنوان جرم مجموعه A در نظر گرفته می شود. به طور شهودی چنین فکر می کنیم: یک جرم متناهی گرفته و به روشی آن را به روی یک مجموعه X توزیع می کنیم تا به یک توزیع جرم روی X برسیم؛ در این صورت شرایط یک اندازه صدق خواهند کرد. اکنون تعدادی مثال از اندازه ها و توزیع های جرم ارائه می دهیم. به طور کلی اثبات وجود اندازه ها با ویژگی های بیان شده را حذف می کنیم. بیشتر پیچیدگی های تکنیکی نظریه اندازه، مربوط به وجود چنین اندازه هایی می شوند، اما آنجایی که کاربرد آنها اهمیت دارد، دلیل وجود آن اندازه ها به طور شهودی درک می شود.

مثال ۱-۱ اندازه شمارشی^۱

برای هر زیرمجموعه A از R^n ، اگر A متناهی باشد فرض کنید $\mu(A)$ تعداد نقاط در A باشد و در غیر این صورت برابر با ∞ . آنگاه μ یک اندازه روی R^n می باشد.

مثال ۲-۱ جرم نقطه ای^۲

فرض کنید a نقطه ای در R^n باشد و $\mu(A)$ را با مقدار یک، اگر A شامل a باشد، و در غیر این صورت، صفر تعریف کنید. آنگاه μ یک توزیع جرم است که به نام جرم نقطه ای متمرکز روی نقطه a خوانده می شود.

^۱ counting measure

^۲ point mass

مثال ۱-۳ اندازه لبگ روی R

اندازه لبگ ℓ^1 ، معنی طول را به گردایه بزرگی از زیرمجموعه‌های R که شامل مجموعه‌های بورل هستند، تعمیم می‌دهد. برای بازه‌های بسته و باز می‌گیریم $\ell^1(a, b) = \ell^1[a, b] = b - a$. اگر $A = \bigcup_i [a_i, b_i]$ اجتماع شمارا یا متناهی از بازه‌های جدا از هم باشد، فرض می‌کنیم $\ell^1(A) = \sum (b_i - a_i)$ طول A باشد که به عنوان مجموع طول بازه‌ها در نظر گرفته می‌شود. این مطلب ما را به تعریف اندازه لبگ $\ell^1(A)$ از مجموعه دلخواه A راهنمایی می‌کند. تعریف می‌کنیم

$$\ell^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}$$

یعنی به تمام پوشش‌های A با گردایه‌های شمارش‌پذیر از بازه‌ها نگاه می‌کنیم، و کوچک‌ترین مجموع ممکن طول بازه‌ها را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان درست بودن روابط (۱-۱) - (۳-۱) را بررسی کرد. نشان دادن برقراری (۴-۱) برای مجموعه‌های بورل جدا از هم A_i نسبتاً سخت‌تر است، و در اینجا از این کار صرف نظر می‌کنیم (در حقیقت (۴-۱) برای دسته بسیار بزرگتری از مجموعه‌ها به نام مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ، برقرار است، اما برای همه زیرمجموعه‌های R برقرار نیست). اندازه لبگ روی R به طور کلی به عنوان "طول" در نظر گرفته می‌شود، و اغلب هنگامی که بخواهیم بر معنی شهودی آن تأکید کنیم، به جای $\ell^1(A)$ می‌نویسیم $length(A)$.

مثال ۱-۴ اندازه لبگ روی R^n

اگر $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ یک "متوازی‌السطوح مختصاتی" در R^n باشد، حجم n -بعدی A به صورت زیر داده می‌شود

$$vol^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

(البته vol^1 مانند مثال ۱-۳، طول و vol^2 ، مساحت و vol^3 ، حجم سه بعدی معمولی می‌باشد). آنگاه اندازه لبگ n -بعدی ℓ^n را می‌توان به عنوان تعمیم حجم n -بعدی برای دسته بزرگی از مجموعه‌ها در نظر گرفت. دقیقاً مانند مثال ۱-۳، یک اندازه روی R^n با تعریف زیر به دست می‌آوریم

$$\ell^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

که اینفیمم روی تمام پوشش‌های A به وسیله متوازی‌السطوح‌های مختصی A گرفته می‌شود. به این می‌رسیم که $\ell^n(A) = \text{vol}^n(A)$ اگر A یک متوازی‌السطوح مختصاتی، یا در واقع هر مجموعه‌ای باشد که بتوان حجم آن را با قواعد معمولی اندازه‌گیری کرد. دوباره برای درک شهودی، گاهی به جای $\ell^2(A)$ می‌نویسیم $\text{area}(A)$ و برای $\ell^3(A)$ می‌نویسیم $\text{vol}(A)$ و $\text{vol}^n(A)$ برای $\ell^n(A)$.

گاهی به تعریف حجم k -بعدی روی یک رویه k -بعدی X در R^n نیاز داریم؛ با نشانیدن X در R^k و استفاده از ℓ^k روی زیرمجموعه‌های X ، به شیوه واضحی می‌توان این کار را انجام داد.

مثال ۱-۵ توزیع جرم یکنواخت روی یک قطعه خط

فرض کنید L یک پاره‌خط با طول واحد در صفحه باشد. تعریف کنید $\mu(A) = \ell^1(L \cap A)$ ، یعنی "طول" اشتراک A با L . آنگاه μ یک توزیع جرم^۱ با محمل^۲ L است، چرا که $\mu(A) = 0$ اگر $A \cap L = \emptyset$. می‌توان μ را جرم واحد توزیع شده به طور یکنواخت، روی پاره خط L در نظر گرفت.

مثال ۱-۶ تحدید یک اندازه

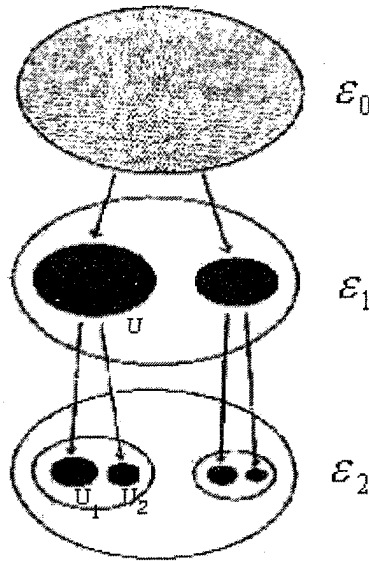
فرض کنید μ اندازه‌ای روی R^n ، و E یک زیرمجموعه بورل از R^n باشد. می‌توان یک اندازه ν روی R^n تعریف کرد، که تحدید μ به E به وسیله $\nu(A) = \mu(E \cap A)$ برای هر مجموعه A ، نامیده می‌شود. آنگاه ν یک اندازه روی R^n با محمل مشمول در \overline{E} می‌باشد.

مهم‌ترین اندازه‌هایی که در این کتاب با آنها مواجه خواهیم بود اندازه‌های هاوسدورف^۳ H^s - بعدی H^s ، که $0 \leq s \leq n$ ، روی زیرمجموعه‌های R^n می‌باشد. این اندازه‌ها که در بخش ۲-۱ معرفی می‌شوند، تعمیمی از اندازه‌های لیگ به ابعادی هستند که این ابعاد لزوماً صحیح نیستند. روش زیر اغلب برای ساختن یک توزیع جرم روی یک زیرمجموعه از R^n به کار می‌رود. این روش، تکرار تقسیم یک جرم بین قسمت‌های یک مجموعه بورل کراندار E می‌باشد. فرض کنید \mathcal{E}_0 شامل تک مجموعه E باشد. برای $k = 1, 2, \dots$ فرض می‌کنیم \mathcal{E}_k گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های بورل جدا از هم E باشد، به طوری که هر مجموعه U در \mathcal{E}_k در یکی از مجموعه‌های \mathcal{E}_{k-1} مشمول باشد، و خود شامل تعدادی متناهی از مجموعه‌های موجود در \mathcal{E}_{k+1} باشد.

^۱ mass distribution

^۲ support

^۳ Hausdorff



شکل ۵-۱ گام‌های ساختن یک توزیع جرم μ به وسیله تکرار تقسیم‌ها. جرم‌های روی مجموعه‌های E_k روی مجموعه‌های E_{k+1} تقسیم می‌شوند، بنابراین برای مثال $\mu(U) = \mu(U_1) + \mu(U_2)$.

فرض کنیم قطر ماکزیمم مجموعه‌های موجود در E_k به صفر میل کند. یک توزیع جرم روی E به وسیله تقسیم‌های تکراری تعریف می‌کنیم. شکل ۵-۱ را ببینید. فرض می‌کنیم $\mu(E)$ در $0 < \mu(E) < \infty$ صدق کند و این جرم را بین مجموعه‌های U_1, \dots, U_m در E_1 با تعریف $\mu(U_i)$ به روشی که $\sum_{i=1}^m \mu(U_i) = \mu(E)$ پخش می‌کنیم. به طور مشابه جرم‌هایی را به مجموعه‌های E_2 نسبت می‌دهیم به طوری‌که اگر U_1, \dots, U_m مجموعه‌هایی از E_2 مشمول در یک مجموعه U_1 از E_1 باشند، آنگاه $\sum_{i=1}^m \mu(U_i) = \mu(U)$ در حالت کلی، جرم‌ها را به گونه‌ای نسبت می‌دهیم که برای هر مجموعه U از E_k ، که $\{U_i\}$ مجموعه‌های جدا از هم در E_{k+1} مشمول در U هستند،

$$(۸-۱) \quad \sum_i \mu(U_i) = \mu(U)$$

برای هر k فرض می‌کنیم E_k اجتماع مجموعه‌های موجود در E_k باشد و فرض می‌کنیم $\mu(R^n \setminus E_k) = 0$.

فرض کنید \mathcal{E} گردایه‌ای متشکل از مجموعه‌های متعلق به \mathcal{E}_k ها به علاوه مجموعه‌های $R^n \setminus E_k$ باشد. روند فوق جرم $\mu(A)$ را برای هر مجموعه A در \mathcal{E} تعریف می‌کند، و عاقلانه است که به وسیله ساختن مجموعه‌ها با مجموعه‌های موجود در \mathcal{E} ، این تعریف را برای تعمیم μ به هر مجموعه بورل A به کار ببریم. این کار همانطور که گزاره زیر بیان می‌کند، واقعاً انجام شدنی است.

گزاره ۷-۱

فرض کنید μ روی گردایه‌ای از مجموعه‌های \mathcal{E} ، همانند بالا تعریف شده باشد. آنگاه تعریف μ می‌تواند به همه زیرمجموعه‌های R^n به عنوان یک اندازه تعمیم یابد. اگر A یک مجموعه بورل باشد، مقدار $\mu(A)$ به طور یکتا بدست می‌آید. محمل μ مشمول در $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{E}_k$ می‌باشد.

نکته‌ای در اثبات. اگر A هر زیرمجموعه از R^n باشد، فرض کنید

$$(9-1) \quad \mu(A) = \inf \left\{ \sum_i \mu(U_i) : A \subset \bigcup_i U_i, U_i \in \mathcal{E} \right\}$$

(بنابراین کوچکترین مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i)$ را که بتوانیم می‌گیریم، که در آن، مجموعه‌های U_i در \mathcal{E} هستند و A را می‌پوشانند؛ قبلاً $\mu(U_i)$ را برای یک چنین U_i تعریف کرده‌ایم.) به سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر A یکی از مجموعه‌های موجود در \mathcal{E} باشد، آنگاه (۹-۱) به همان $\mu(A)$ که از ابتدا مشخص است، کاهش می‌یابد. اثبات اینکه μ در همه شرایط یک اندازه صدق می‌کند و اینکه مقدار آن روی مجموعه‌های \mathcal{E} ، مقدار آن را روی مجموعه‌های بورل تعیین می‌کند، کاملاً پیچیده است و در اینجا به آن نیازی نیست. از آنجائیکه $\mu(R^n \setminus E_k) = 0$ ، برای مجموعه بازی مانند A ، که برای بعضی k ها E_k را قطع نمی‌کند، داریم $\mu(A) = 0$ ، بنابراین محمل μ ، به ازای هر k ، در \bar{E}_k قرار دارد. \square

مثال ۸-۱

فرض کنید \mathcal{E}_k نشان دهنده گردایه "بازه‌های دودویی" با طول 2^{-k} به شکل $(r2^{-k}, (r+1)2^{-k})$ باشد که در آن $0 < r < 2^k - 1$. اگر در ساختار فوق‌الذکر بگیریم $\mu[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}] = 2^{-k}$ ، به این می‌رسیم که μ اندازه لبگ روی $[0,1]$ است.

نکته‌ای در محاسبه. به وضوح اگر I بازه‌ای در \mathcal{E}_k با طول 2^{-k} و I_1 و I_2 دو زیربازه از I در \mathcal{E}_{k+1} با طول 2^{-k-1} باشند، داریم $\mu(I) = \mu(I_1) + \mu(I_2)$ که همان (۸-۱) می‌باشد. با استفاده از قضیه ۷-۱، μ به یک توزیع جرم روی $[0,1]$ توسعه می‌یابد. داریم

$\mu(I) = \text{length}(I)$ به ازای I در \mathcal{E} ، و می‌توان نشان داد که این در ضمن اشاره دارد به این نکته که μ با اندازه لبگ روی هر مجموعه‌ای منطبق است. \square

گفته می‌شود که یک ویژگی برای تقریباً هر x یا تقریباً هر جا^۱، برقرار است، اگر هر مجموعه‌ای که این ویژگی را نداشته باشد، (نسبت به یک اندازه μ) دارای μ - اندازه صفر باشد. برای مثال نسبت به اندازه لبگ می‌توانیم بگوییم که تقریباً همه اعداد حقیقی، گنگ هستند. اعداد گویا، Q ، شمارشپذیر هستند آنها می‌توانند به صورت x_1, x_2, \dots لیست شوند، یعنی که $\mu(Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(x_i) = 0$.

با اینکه معمولاً علاقه‌مند به استفاده از خود اندازه‌ها هستیم، گهگاه به انتگرال‌گیری توابع نسبت به اندازه‌ها، نیاز خواهیم داشت. اشکالاتی فنی مربوط به این که چه توابعی انتگرال‌پذیرند، وجود دارد. با فرض اینکه برای تابع $f: D \rightarrow R$ ، یک تابع تعریف شده روی زیرمجموعه بورل D از R^n ، مجموعه $\{x \in D : f(x) \leq a\}$ $f^{-1}(-\infty, a]$ برای همه اعداد حقیقی a ، یک مجموعه بورل است، می‌توانیم این سختی‌ها را از پیش رو برداریم. دسته وسیعی از توابع در این شرط صدق می‌کنند، که همه توابع پیوسته را شامل می‌شود. (برای توابع پیوسته $f^{-1}(-\infty, a]$ بسته و بنابراین یک مجموعه بورل می‌باشد.) در این کتاب فرض را بر این می‌گذاریم که همه توابعی که نیاز به محاسبه انتگرال آنها داریم، در این شرط صدق می‌کنند. این شرط حتماً برای توابعی که احتمالاً در تمرین‌ها با آنها مواجه خواهیم بود، درست می‌باشد.

برای تعریف انتگرال‌گیری، نخست فرض می‌کنیم که $f: D \rightarrow R$ یک تابع ساده باشد؛ یعنی تابعی که فقط تعدادی متناهی مقدار a_1, \dots, a_k می‌گیرد. انتگرال را نسبت به اندازه μ از یک تابع ساده نامنفی f به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^k a_i \mu\{x : f(x) = a_i\}$$

انتگرال توابع کلی‌تر با تخمین زدن به وسیله توابع ساده، تعریف می‌شوند. اگر $f: D \rightarrow R$ یک تابع نامنفی باشد، انتگرال آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu : 0 \leq g \leq f \text{ و } g \text{ ساده است} \right\}$$

^۱ almost everywhere

برای تکمیل تعریف، اگر f هر دو مقدار مثبت و منفی را بگیرد، می‌گیریم
 $f = f_+ - f_-$ در این صورت $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ و $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$
 و تعریف می‌کنیم

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

مشروط بر اینکه هر دو انتگرال $\int f_+ d\mu$ و $\int f_- d\mu$ متناهی باشند.

همه ویژگی‌های معمولی برای انتگرال‌ها برقرارند، برای مثال،

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

9

$$\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$$

اگر λ یک اسکالر باشد. همچنین قضیه همگرایی یکنواخت را داریم، یعنی اگر $f_k : D \rightarrow R$
 دنباله‌ای صعودی از توابع نامنفی همگرا (نقطه به نقطه) به f باشد، آنگاه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu$$

اگر A یک زیرمجموعه بورل از D باشد، انتگرال‌گیری روی مجموعه A به صورت زیر تعریف
 می‌شود

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu$$

که $\chi_A : R^n \rightarrow R$ "تابع مشخصه" است یعنی $\chi_A(x) = 1$ اگر x در A باشد و در غیر
 اینصورت $\chi_A(x) = 0$.

توجه کنید که اگر $f(x) \geq 0$ و $\int f d\mu = 0$ ، آنگاه برای μ - تقریباً هر x ، $f(x) = 0$.
 طبق معمول، نسبت به تأکیدى که نیاز است، انتگرال‌گیری به روش‌های گوناگونی نشان
 داده می‌شود، مانند $\int f d\mu$ ، $\int f$ یا $\int f(x) d\mu(x)$. وقتی که μ اندازه لیگ n - بعدی ℓ^n
 باشد، معمولاً به جای $\int f d\ell^n$ می‌نویسیم $\int f dx$ یا $\int f(x) dx$.

در دو موقعیت نیاز خواهیم داشت که از قضیه اگوروف استفاده کنیم. فرض کنید D یک
 زیرمجموعه بورل از R^n و μ یک اندازه با $\mu(D) < \infty$ باشد. فرض کنید f_1, f_2, \dots و f
 توابعی از D به R باشند به طوری که برای هر x در D ، $f_k(x) \rightarrow f(x)$. قضیه اگوروف
 می‌گوید که برای هر $\delta > 0$ ، یک زیرمجموعه بورل E از D وجود دارد به طوری که
 $\mu(D \setminus E) < \delta$ و دنباله $\{f_k\}$ به طور یکنواخت روی E به f همگراست، یعنی

چنانکه $k \rightarrow \infty$ ، $\sup_{x \in E} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0$. برای اندازه‌هایی که ما با آنها سر و کار داریم، می‌توان نشان داد که همواره می‌توان مجموعه E را فشرده گرفت.

۴-۱ نکاتی از نظریه احتمال

برای یادگیری بعضی از فصل‌های بعدی، اطلاعاتی مقدماتی از نظریه احتمال لازم می‌باشد. ما خلاصه‌ای از مفاهیم مورد نیاز را ارائه می‌دهیم.

نظریه احتمال با ایده یک آزمایش یا امتحان شروع می‌شود؛ یعنی عملی که برآمد آن، برای هر هدف عملی، از پیش تعیین نشده باشد. از لحاظ ریاضی، یک چنین آزمایشی با فضای احتمال توصیف می‌شود که دارای سه مؤلفه هست: مجموعه همه برآمدهای ممکن در آزمایش، لیست همه رویدادها که ممکن است به عنوان نتیجه آزمایش اتفاق بیفتند و یک ارزیابی احتمال از این رویدادها. برای مثال، اگر یک تاس انداخته شود، برآمدهای ممکن $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ هستند، لیست رویدادها شامل "آمدن ۳"، "عدد زوج بیاید" و "حداقل یک ۴ بیاید" می‌باشد. برای یک "تاس سالم" عقلانی است که ۶ برآمد ممکن، با احتمال برابر ارزیابی شوند.

مجموعه همه برآمدهای ممکن از یک آزمایش فضای نمونه نامیده می‌شود، و با Ω نشان داده می‌شود. سؤالهای مربوط به برآمد یک آزمایش همواره می‌تواند برحسب زیرمجموعه‌هایی از Ω بیان شوند؛ در مثال بالا، سؤال "آیا یک عدد فرد آمده است؟" معادل است با: "آیا برآمد در زیرمجموعه $\{1, 3, 5\}$ می‌باشد؟". برای ارتباط دادن رویدادهای مربوط به برآمدهای آزمایش با زیرمجموعه‌هایی از Ω در این روش، طبیعی است که برای هر رویداد A و B ، به اجتماع $A \cup B$ به عنوان " A یا B روی دهد"، اشتراک $A \cap B$ به عنوان "هر دوی A و B روی دهند" و مکمل $\Omega \setminus A$ به عنوان رویداد A اتفاق نیفتد"، نگاه کنیم. در حالت کلی یک مجموعه F از زیرمجموعه‌های Ω که به طور خاص مورد علاقه ما هستند، وجود دارد که آنها را "رویداد" می‌نامیم. در مثال تاس، F معمولاً گردایه همه زیرمجموعه‌های Ω خواهد بود، اما در حالات پیچیده‌تر یک گردایه نسبتاً کوچک از مجموعه‌ها می‌تواند مناسب باشد. معمولاً F در شرایط معینی صدق می‌کند؛ برای مثال، اگر رویدادن یک حادثه، مورد علاقه ما باشد آنگاه، همانطور روی ندادن آن نیز مورد علاقه می‌باشد، بنابراین اگر A در F باشد، انتظار خواهیم داشت که مکمل $\Omega \setminus A$ نیز در F باشد. یک گردایه (ناهی) F از زیرمجموعه‌های فضای نمونه Ω ، یک "فضای رویداد" نامیده می‌شود اگر

$$(1-1)$$

$$\text{هرگاه } A \in F \text{ آنگاه } \Omega \setminus A \in F$$

$$(11-1) \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F, \quad (1 \leq i < \infty) \quad A_i \in F \text{ هرگاه}$$

از این شرایط بر می آید که ϕ و Ω در F هستند، و هرگاه A و B و A_i ها در F باشند، $A \setminus B$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ در F هستند. تا آنجائیکه به کار ما مربوط می شود، در کل، شکل عناصر F را دقیقاً تعیین نمی کنیم - اینکار، ما را از زحمتهای فنی مربوط به اثبات وجود فضاهای رویداد مناسب خلاص می کند.

سپس به رویدادهای F احتمال $P(A)$ را نسبت می دهیم که به عنوان احتمال اینکه A روی دهد در نظر گرفته می شود. P را یک احتمال یا اندازه احتمال نامیم اگر P یک عدد $P(A)$ به هر A در F نسبت دهد، به طوریکه شرایط زیر برقرار باشند:

$$(12-1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1 : A \in F \text{ برای هر}$$

$$(13-1) \quad P(\phi) = 0, P(\Omega) = 1$$

و اگر A_1, A_2, \dots رویدادهای مجزا در F باشند،

$$(14-1) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

برای هر تعریف احتمال، صدق کردن در این شرایط باید طبیعی به نظر برسد.

یک سه تایی (Ω, F, P) را یک فضای احتمال می نامیم، اگر F یک فضای رویداد از زیرمجموعه های Ω و P یک اندازه احتمال تعریف شده روی مجموعه های F باشد.

برای آزمایش پرتاب تاس، باید داشته باشیم $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ با فضای رویداد متشکل از همه زیرمجموعه های Ω و با احتمال (تعداد عناصر در A) $P(A) = \frac{1}{6} \times |A|$. این حالت یک "تاس سالم" را با احتمال مساوی هر برآمد توضیح می دهد.

شبهات تعریف احتمال با تعریف یک اندازه در (1-1)، (2-1) و (4-1) و استفاده از اصطلاح اندازه احتمال، به هیچ وجه اتفاقی نیست. احتمال ها و اندازه ها می توانند در یک زمینه قرار گیرند، Ω مطابق با R^n ، و فضای رویداد مطابق با مجموعه های بورل.

بعداً در کاربردها، به ویژه علاقه مند به رویدادهایی (روی فضاهای نمونه نسبتاً بزرگ) خواهیم بود که در واقع حتمی الوقوع هستند. گوییم یک رویداد A با احتمال 1 یا تقریباً حتمی روی می دهد اگر $P(A) = 1$.

گاهی ممکن است اطلاعاتی جزئی درباره برآمد یک آزمایش داشته باشیم؛ برای مثال ممکن است به ما گفته شود که عدد نمایان روی تاس زوج است. این ما را به ارزیابی دوباره احتمال رویدادهای گوناگون هدایت می کند. اگر A و B در F باشند با $P(B) > 0$ ، احتمال (شرطی) A با داشتن B ، با $P(A|B)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می شود

$$(۱۵-۱) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

این مقدار به عنوان احتمال A با علم به اینکه B اتفاق می‌افتد، تعبیر می‌شود؛ همانطور که انتظار می‌رود $P(B|B) = 1$. اثبات اینکه (Ω, F, P') با $P'(A) = P(A|B)$ ، یک فضای احتمال است، ساده می‌باشد. همچنین، فرمول افراز را به این صورت داریم: اگر B_1, B_2, \dots رویدادهایی جدا از هم بوده و $\bigcup_i B_i = \Omega$ و $P(B_i) > 0$ برای هر i ، آنگاه برای هر رویداد A

$$(۱۶-۱) \quad P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

در حالت آزمایش "تاس سالم"، اگر B_1 رویداد "یک عدد زوج بیاید"، B_2 رویداد "عدد فرد بیاید"، و A اینکه "حداقل ۴ بیاید" باشند، آنگاه

$$P(A|B_1) = P(4 \text{ یا } 6 \text{ بیاید}) / P(2 \text{ یا } 4 \text{ یا } 6 \text{ بیاید}) = (\frac{2}{6}) / (\frac{3}{6}) = \frac{2}{3}$$

$$P(A|B_2) = P(1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 5 \text{ بیاید}) / P(5 \text{ بیاید}) = (\frac{1}{6}) / (\frac{2}{6}) = \frac{1}{3}$$

که از آن (۱-۱۶) به سادگی اثبات می‌شود.

دو رویداد را مستقل در نظر می‌گیریم اگر اتفاق یکی، روی احتمال اینکه دیگری روی دهد تأثیر نگذارد؛ یعنی اگر $P(A|B) = P(A)$ و $P(B|A) = P(B)$. با استفاده از (۱-۱۵) به این تعریف می‌رسیم که دو رویداد A و B در یک فضای احتمال مستقل هستند اگر

$$(۱۷-۱) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

به طور کلی‌تر، یک گردهایه دلخواه از رویدادها مستقل است اگر برای هر زیرگردهایه متناهی $\{A_k : k \in J\}$ داشته باشیم

$$(۱۸-۱) \quad p\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k)$$

در مثال تاس به سادگی می‌توان دید که "یک پرتاب با حداقل ۵" و "یک عدد زوج بیاید" رویدادهای مستقلی هستند، اما "یک پرتاب با حداقل ۴" و "یک عدد زوج بیاید" مستقل نیستند.

مفاهیم متغیر تصادفی و امید (یا معدل یا میانگین) آن در نظریه احتمال، مفاهیمی اساسی هستند. اصولاً یک متغیر تصادفی X تابعی حقیقی مقدار روی یک فضای نمونه می‌باشد. در مثال تاس، X می‌تواند نشان دهنده شماره روی تاس باشد. یا این که X می‌تواند برای انداختن یک شماره خاص، امتیازی نمایش دهد، برای مثال $X(w) = 0$ اگر $w = 1, 2, 3, 4$ و $X(5) = 1$ و $X(6) = 2$. برآمد یک آزمایش یک مقدار متغیر تصادفی را تعیین می‌کند. امید متغیر تصادفی میانگین این مقدرهاست که مطابق احتمال هر یک از برآمدها مقدردهی شده‌اند.

تعریف دقیق متغیر تصادفی به کمی دقت نیاز دارد. گوییم که X یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال (Ω, F, P) می باشد اگر $X: \Omega \rightarrow R$ تابعی باشد به طوریکه $(-\infty, a]$ برای هر عدد حقیقی a ، یک رویداد در F باشد؛ به عبارت دیگر مجموعه w در Ω با $X(w) \leq a$ در فضای رویداد باشد. این شرط معادل با این است که بگوییم برای هر مجموعه بورل E در $X^{-1}(E)$ در F است. به خصوص برای هر چنین مجموعه E احتمال این که متغیر تصادفی X یک مقدار در E بگیرد، یعنی $P(\{w: X(w) \in E\})$ ، تعریف شده است. می توان نشان داد که با دانستن $P(\{w: X(w) \leq a\})$ برای هر عدد حقیقی a ، $P(\{w: X(w) \in E\})$ برای همه مجموعه های بورل E تعیین می شود. معمول است که عباراتی همچون $P(\{w: X(w) \in E\})$ را به $P(X \in E)$ خلاصه کنیم.

به سادگی می توان نشان داد که اگر X و Y متغیرهایی تصادفی روی (Ω, F, P) و λ یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $X+Y$ ، $X-Y$ ، λX و XY همگی متغیرهای تصادفی هستند (اینها را می توان به روشی واضح تعریف کرد، برای مثال، $(X+Y)(w) = X(w) + Y(w)$ برای هر $w \in \Omega$). به علاوه اگر X_1, X_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی با $X_k(w)$ به ازای هر w صعودی و کراندار باشد، آنگاه $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k$ یک متغیر تصادفی است.

یک گرده از متغیرهای تصادفی $\{X_k\}$ مستقل است اگر برای هر مجموعه بورل E_k ، رویدادهای $\{x \in E_k\}$ به شکل (۱۸-۱) مستقل باشند؛ یعنی اگر برای هر مجموعه متناهی از اندیسهای J ،

$$P(X_k \in E_k \quad \forall k \in J) = \prod_{k \in J} P(X_k \in E_k)$$

به طور شهودی دیده می شود که X و Y مستقل هستند اگر احتمال اینکه Y هر مقدار خاص را بگیرد تحت تأثیر دانستن مقدار X نباشد. فضای احتمال نمایش دهنده دو پرتاب متوالی یک تاس را در نظر بگیرید که دارای فضای نمونه $\{(x, y): x, y = 1, \dots, 6\}$ و اندازه احتمال P می باشد که این اندازه احتمال برای هر جفت (x, y) به صورت $\frac{1}{36}$ تعریف می شود. اگر X و Y متغیرهای تصادفی داده شده به وسیله مقادیر دو پرتاب متوالی باشند آنگاه X و Y مستقل هستند، با فرض اینکه یک پرتاب بر دیگری تأثیر نگذارد. به هر حال X و $X+Y$ مستقل نیستند، این بدان معنی است که امتیاز بالاتر برای پرتاب اول، شانس یک مجموع امتیاز بالا را، افزایش می دهد.

تعریف رسمی امید یک متغیر تصادفی مشابه با تعریف انتگرال یک تابع است؛ در واقع امید، انتگرال متغیر تصادفی نسبت به اندازه احتمال است. فرض کنید X یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال (Ω, F, P) باشد. نخست فرض کنید که برای هر $w \in \Omega$ ، $X(w) \geq 0$ و X

تعدادی متناهی مقدار x_1, \dots, x_k بگیرد. یک چنین متغیر تصادفی را ساده می‌نامیم. امید را معدل یا میانگین $E(X)$ از X به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i). \quad (19-1)$$

امید یک متغیر تصادفی دلخواه با استفاده از تقریب به وسیله متغیرهای تصادفی ساده تعریف می‌شود. بنابراین برای یک متغیر تصادفی نامنفی X ,

$E(X) = \sup \{E(Y) : (\forall w \in \Omega) 0 \leq Y(w) \leq X(w)\}$ که Y یک متغیر تصادفی ساده است
 بالاخره، اگر X هر دو مقدار مثبت و منفی را بگیرد، می‌گیریم $X_+ = \max\{X, 0\}$ و $X_- = \max\{-X, 0\}$ به طوریکه $X = X_+ - X_-$ و تعریف می‌کنیم
 $E(X) = E(X_+) - E(X_-)$

مشروط بر اینکه $E(X_+) < \infty$ و $E(X_-) < \infty$.

چون $X(w)$ فقط مقادیر $1, \dots, 6$ را می‌گیرد، متغیر تصادفی X که نشان دهنده امتیاز یک تاس سالم است، یک متغیر تصادفی ساده می‌باشد. بنابراین

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 i \times \frac{1}{6} = 3 \frac{1}{2}.$$

مشابه روابطی که برای انتگرال‌ها داریم، امید ریاضی در ویژگی‌های ابتدایی معینی صدق می‌کند. اگر X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی باشند، آنگاه

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

و به طور کلی‌تر

$$E\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=1}^k E(X_i).$$

اگر λ یک اسکالر باشد

$$E(\lambda X) = \lambda E(X)$$

و اگر دنباله متغیرهای تصادفی نامنفی X_1, X_2, \dots صعودی، و $X = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k$ یک متغیر

تصادفی (متناهی) باشد، آنگاه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(X_k) = E(X)$$

همچنین هرگاه X_1 و X_2 مستقل باشند، داریم

$$E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$$

بنابراین اگر X_k نشان دهنده k امین پرتاب یک تاس سالم در یک دنباله از پرتاب‌ها باشد،

امید مجموع k پرتاب اول برابر است با

$$E(X_1 + \dots + X_k) = E(X_1) + \dots + E(X_k) = 3\frac{1}{2} \times k.$$

امید شرطی $E(X | B)$ از X به ازای یک رویداد داده شده B با $P(B) > 0$ ، را به روشی مشابه تعریف می‌کنیم، اما به جای (۱۹-۱) به صورت زیر شروع می‌کنیم

$$(۲۰-۱) \quad E(X | B) = \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i | B)$$

به یک فرمول افراز که با (۱۶-۱) شباهت دارد می‌رسیم

$$(۲۱-۱) \quad E(X) = \sum_i E(X | B_i) P(B_i)$$

که B_1, B_2, \dots رویدادهایی جدا از هم می‌باشند که $\bigcup_i B_i = \Omega$ و $P(B_i) > 0$. اغلب مناسب است که نمایشی برای افت و خیز یک متغیر تصادفی در یک فضای نمونه داشته باشیم، بنابراین واریانس یک متغیر تصادفی X را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\text{var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

با یک محاسبه ساده با استفاده از ویژگی‌های امید برای هر عدد حقیقی λ داریم

$$\text{var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{var}(X)$$

9

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

مشروط بر اینکه X و Y مستقل باشند.

اگر توزیع احتمال یک متغیر تصادفی به وسیله یک انتگرال داده شده باشد؛ یعنی

$$(۲۲-۱) \quad P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

تابع f ، تابع چگالی احتمال برای X نامیده می‌شود. می‌توان با استفاده از تعریف امید نشان داد

که

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du$$

9

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du$$

که رابطه اخیر امکان محاسبه واریانس توسط رابطه $\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ را به ما

می‌دهد.

توجه کنید که تابع چگالی بدون مراجعه به فضای احتمال زیربنا، درباره توزیع متغیر تصادفی X ، توضیح می‌دهد. می‌توانیم احتمال متعلق بودن X به هر مجموعه بورل E را، برحسب تابع چگالی به صورت زیر بیان کنیم

$$P(X \in E) = \int_E f(u) du.$$

گوییم یک متغیر تصادفی X روی بازه (a, b) دارای توزیع یکنواخت است اگر

$$(۲۳-۱) \quad P(X \leq x) = \frac{1}{b-a} \int_a^x du \quad (a < x < b).$$

بنابراین احتمال این که X در زیربازه‌ای از (a, b) قرار گیرد متناسب با طول بازه است. در این حالت داریم $E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$ و $\text{var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$.

یک متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال یا گاوس با میانگین m و واریانس σ^2 است اگر

$$(۲۴-۱) \quad P(X \leq x) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \int_{-\infty}^x \exp(-(u-m)^2/2\sigma^2) du$$

با انتگرال‌گیری معلوم می‌شود که در این حالت $E(X) = m$ و $\text{var}(X) = \sigma^2$. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال و به ترتیب دارای میانگین m_1 و m_2 و واریانس σ_1^2 و σ_2^2 باشند، آنگاه $X_1 + X_2$ نرمال با میانگین $m_1 + m_2$ و واریانس $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ و λX_1 هم به ازای هر عدد حقیقی λ ، نرمال با میانگین λm_1 و واریانس $\lambda^2 \sigma_1^2$ می‌باشد. این ویژگی که مجموع و ضرب اسکالر متغیرهای تصادفی نرمال، نرمال هستند، ویژگی اختصاصی توزیع‌های نرمال می‌باشد.

اگر یک تاس سالم را مرتبه زیادی پرتاب کنیم، باید انتظار داشته باشیم که میانگین امتیازهای آمده، بسیار نزدیک به $3\frac{1}{2}$ باشد؛ یعنی برابر با امید یا برآمد میانگین هر پرتاب. به علاوه، هرچه تعداد پرتاب‌ها بیشتر باشد، باید معدل به میانگین نزدیک‌تر باشد. این "قانون معدل‌ها" در قالب قانون قوی اعداد بزرگ بیان می‌گردد.

فرض کنید (Ω, \mathcal{F}, P) یک فضای احتمال باشد. فرض کنید X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی باشند که مستقل هستند و توزیع‌های یکسانی دارند (یعنی، برای هر مجموعه E ، $P(X_i \in E)$ به ازای هر i یکسان باشد) با امید m و واریانس σ^2 که هر دو متناهی فرض می‌شوند. به ازای هر k می‌توانیم متغیر تصادفی $S_k = X_1 + \dots + X_k$ را شکل دهیم، به طوریکه متغیر تصادفی S_k ($\frac{1}{k} S_k$) معدل k آزمون اول است. قانون قوی اعداد بزرگ بیان می‌کند که با احتمال ۱،

$$(۲۵-۱) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k = m$$

همچنین، می‌توانیم مطالب جالب توجهی در مورد توزیع متغیر تصادفی S_k ، وقتی k بزرگ است، بگوییم. می‌توان نشان داد که S_k تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین km و واریانس $k\sigma^2$ می‌باشد. این مضمون قضیه حد مرکزی می‌باشد که می‌گوید برای هر عدد حقیقی x ،

$$(۲۶-۱) \quad P\left(\frac{S_k - km}{\sigma\sqrt{k}} \leq x\right) \rightarrow \int_{-\infty}^x (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}u^2) du, \quad k \rightarrow \infty$$

یک جنبه مهم از توزیع نرمال اکنون روشن می‌شود - توزیع نرمال شکلی از توزیع است که به وسیله مجموع‌های تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی مستقل که به طور یکسان توزیع شده‌اند بدست می‌آید.

می‌توانیم این نتایج را در آزمایش متشکل از یک دنباله نامتناهی از پرتاب‌های تاس به کاربریم. فرض کنید Ω مجموعه همه دنباله‌های نامتناهی به شکل $\{w = (w_1, w_2, \dots) : w_i = 1, \dots, 6\}$ باشد (w_k را به عنوان برآمد k امین پرتاب در نظر می‌گیریم). می‌توان یک فضای رویداد F و اندازه احتمال P تعریف کرد به این روش که برای هر k ی داده شده و دنباله داده شده w_1, \dots, w_k ($w_i = 1, \dots, 6$) رویداد " k پرتاب اول، w_1, \dots, w_k باشند" در F است و دارای احتمال $(\frac{1}{6})^k$ می‌باشد. فرض کنید X_k متغیر تصادفی داده شده به وسیله برآمد k امین پرتاب باشد به طوری که $X_k(w) = w_k$. به سادگی می‌توان دید که X_k ها مستقل هستند و با میانگین $m = 3\frac{1}{2}$ و واریانس $2\frac{11}{12}$ به طور یکسان توزیع شده‌اند. قانون قوی اعداد بزرگ می‌گوید که با احتمال ۱، میانگین k پرتاب اول، $(\frac{1}{k})S_k$ ، به $3\frac{1}{2}$ همگراست، و قضیه حد مرکزی می‌گوید که وقتی k بزرگ باشد، مجموع S_k با میانگین $3\frac{1}{2} \times k$ و واریانس $2\frac{11}{12} \times k$ ، تقریباً به طور نرمال توزیع می‌شود. بنابراین اگر ما آزمایش پرتاب k تاس را دفعات زیادی تکرار کنیم، از منظر رابطه (۲۶-۱)، مجموع k پرتاب، توزیعی نزدیک به توزیع نرمال، خواهد داشت.

۵-۱ نکات و منابع

مطالبی که در این فصل خلاصه شدند در کتاب‌های ریاضی متعددی از دوره کارشناسی در سطوح مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. تقریباً هر کتاب آنالیز ریاضی، برای مثال *Apostol* (۱۹۷۴)، شامل نظریه اساسی مجموعه‌ها و توابع می‌باشد. یک بررسی موشکافانه از نظریه

احتمال و اندازه را می‌توان در *Kingman* و *Taylor* (۱۹۶۶) و در *Billingsley* (۱۹۷۹) یافت. برای نظریه احتمال، کتاب *Grimmett* و *Stirzaker* (۱۹۸۲) می‌تواند مفید واقع شود.

تمرین‌ها

تمرین‌های زیر تنها تأکیدی است بر بعضی از مطالبی که در این فصل مطرح شد.

- ۱-۱ نشان دهید که اجتماع هر گردایه از زیرمجموعه‌های باز R^n ، باز است، و اشتراک هر گردایه متناهی از مجموعه‌های باز، باز است. نشان دهید که یک زیرمجموعه از R^n بسته است اگر و فقط اگر مکمل آن باز باشد و نتیجه متناظر را برای اجتماع و اشتراک مجموعه‌های بسته نتیجه بگیرید.
- ۲-۱ نشان دهید اگر $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های فشرده ناتهی R^n باشد، آنگاه $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ یک مجموعه ناتهی فشرده است.
- ۳-۱ نشان دهید که فاصله نیم باز $\{x \in R : 0 \leq x < 1\}$ یک زیرمجموعه بورل از R است.
- ۴-۱ فرض کنید F مجموعه اعدادی در $[0,1]$ باشد که بسط اعشاری آنها تعداد نامتناهی رقم ۵ داشته باشد. نشان دهید که F یک مجموعه بورل است.
- ۵-۱ نشان دهید که ترکیب دو دوران در صفحه، یا یک دوران است یا یک انتقال.
- ۶-۱ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$ را برای $f(x)$ های داده شده در زیر بیابید: $\sin x$ (i)؛ $\sin(1/x)$ (ii)؛ $x^2 + (3+x)\sin(1/x)$ (iii).
- ۷-۱ فرض کنید $f, g : [0,1] \rightarrow R$ توابع لیپشیتس باشند. ثابت کنید توابع تعریف شده روی $[0,1]$ به وسیله $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز لیپشیتس هستند.
- ۸-۱ فرض کنید $f : R \rightarrow R$ مشتقپذیر و به ازای هر x ، $|f'(x)| \leq c$ باشد. ثابت کنید f یک تابع لیپشیتس است.
- ۹-۱ فرض کنید A_1, A_2, \dots دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های بورل R^n باشد و $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. اگر μ اندازه‌ای روی R^n باشد که $\mu(A_1) < \infty$ ، ثابت کنید $\mu(A_k) \rightarrow \mu(A)$.
- ۱۰-۱ فرض کنید $f : [0,1] \rightarrow R$ تابع پیوسته‌ای باشد. به ازای زیرمجموعه‌ای از R^2 مانند A تعریف کنید $\mu(A) = \ell\{x : (x, f(x)) \in A\}$ ، که ℓ اندازه لبگ است. نشان دهید که μ یک توزیع جرم روی R^2 است که محمل آن نمودار f می‌باشد.

۱۱-۱ فرض کنید D زیرمجموعه‌ای بول از R^n باشد و فرض کنید μ اندازه‌ای روی D باشد که $\mu(D) < \infty$. فرض کنید $f_k: D \rightarrow R$ دنباله‌ای از توابع باشد که به ازای هر x در D ، $f_k(x) \rightarrow f(x)$ قضیه اگوروف^۱ را ثابت کنید: به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده یک زیرمجموعه بول A از D وجود دارد که $\mu(D \setminus A) < \varepsilon$ و $f_k(x)$ به ازای x در A به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست.

۱۲-۱ ثابت کنید که اگر μ یک اندازه روی D باشد و $f: D \rightarrow R$ به ازای هر x در D $f(x) \geq 0$ صدق کند، و $\int_D f d\mu = 0$ آنگاه برای μ - تقریباً هر x ، $f(x) = 0$.

۱۳-۱ اگر X یک متغیر تصادفی باشد، تساوی زیر را که برابر واریانس X می‌باشد اثبات کنید

$$E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

۱۴-۱ تحقیق کنید که اگر X دارای توزیع یکنواخت باشد ((۱-۲۳) را ببینید) آنگاه

$$E(X) = \frac{1}{2}(a+b) \text{ و } \text{var}(X) = (b-a)^2/12$$

۱۵-۱ فرض کنید A_1, A_2, \dots دنباله‌ای از رویدادهای مستقل در یک فضای احتمال باشد به طوری که به ازای هر p ، $P(A_k) = p$ ، $0 < p < 1$ فرض کنید N_k متغیری تصادفی باشد که با معادل گرفتن $N_k(\omega)$ با i که $1 \leq i \leq k$ برای $\omega \in A_i$ ، تعریف می‌شود. از قانون قوی اعداد بزرگ استفاده کنید و نشان دهید که، با احتمال ۱، $N_k/k \rightarrow p$ هنگامی که $k \rightarrow \infty$. نتیجه بگیرید که نسبت رویدادهای یک حادثه در دنباله‌ای از آزمون‌های مستقل به احتمال آن حادثه میل می‌کند.

۱۶-۱ یک تاس ۶۰۰۰ بار انداخته می‌شود. قضیه حد مرکزی را برای تخمین احتمال اینکه حداقل ۱۰۵۰ بار ۶ بیاید به کار برید. (اگر نیاز به برآورد انتگرال به دست آمده باشد، باید از یک روش عددی استفاده کرد).

فصل ۲ بعد و اندازه هاوسدورف

از میان بعدهای فراوان فرکتالی مورد استفاده، تعریف هاوسدورف بر مبنای یک ساختار کارائتودوری^۱، قدیمی‌ترین و احتمالاً مهم‌ترین می‌باشد. بعد هاوسدورف این مزیت را دارد که برای هر مجموعه‌ای تعریف می‌شود و از لحاظ ریاضی مناسب و بی‌زحمت است، چرا که بر مبنای اندازه‌هایی می‌باشد که نسبتاً به آسانی می‌توان بر آنها مسلط شد. یک عیب بزرگ آن این است که در بسیاری حالات محاسبه یا تخمین زدن آن با روش‌های محاسباتی، سخت است. به هر حال برای یادگیری ریاضیات فرکتال‌ها آشنایی با بعد و اندازه هاوسدورف ضروری می‌باشد.

۲-۱ اندازه هاوسدورف

به یادآورید که اگر U هر زیر مجموعه ناتهی از فضای اقلیدسی n -بعدی، R^n ، باشد قطر U به صورت $|U| = \sup\{|x-y|: x, y \in U\}$ تعریف می‌شود یعنی بزرگ‌ترین فاصله هر جفت نقطه در U . اگر $\{U_i\}$ یک گردایه شمارا (یا متناهی) از مجموعه‌هایی با قطر حداکثر δ باشند که F را بپوشانند، یعنی $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ و $0 < |U_i| \leq \delta$ به ازای هر i برقرار باشند، گوئیم $\{U_i\}$ یک δ -پوشش از F می‌باشد.

فرض کنید که F یک زیرمجموعه از R^n و s یک عدد نامنفی باشد. برای هر $\delta > 0$ تعریف می‌کنیم:

$$(۱-۲) \quad H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : F \text{ پوشش } \delta\text{-} \{U_i\} \text{ یک} \right\}.$$

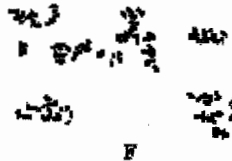
بنابراین به همه پوشش‌های حاوی مجموعه‌هایی با قطر حداکثر δ توجه کرده و درصدد مینیمم کردن مجموع توان‌های s -ام قطرها می‌باشیم (شکل ۱-۲). با کوچک شدن δ ، دسته پوشش‌های مجاز F در (۱-۲) کاهش می‌یابد. بنابراین اینفیمم، $H_\delta^s(F)$ ، افزایش می‌یابد و بنابراین با $\delta \rightarrow 0$ ، به حدی نزدیک می‌شود. می‌نویسیم:

$$(۲-۲) \quad H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

این حد برای هر زیر مجموعه F از R^n موجود است، اگر چه مقدار حد می‌تواند 0 یا ∞ باشد (و معمولاً هست). $H^s(F)$ را اندازه هاوسدورف s -بعدی F می‌نامیم.

با مقداری کوشش می‌توان نشان داد که H^s یک اندازه است. شرایط یک اندازه را در فصل ۱ ببینید. به وضوح اگر $F = \emptyset$ آنگاه $H^s(F)$ برابر صفر و اگر $F' \subset F$ ، از آنجاکه هر پوشش F یک پوشش برای F' نیز هست، بنابراین F' دارای پوشش‌های کوچک‌تری نیز می‌باشد و خواهیم داشت $H^s(F') \leq H^s(F)$ و اگر $\{F_i\}$ هر گردایه شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بورل جدا از هم باشد آنگاه

$$(۳-۲) \quad H^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i).$$



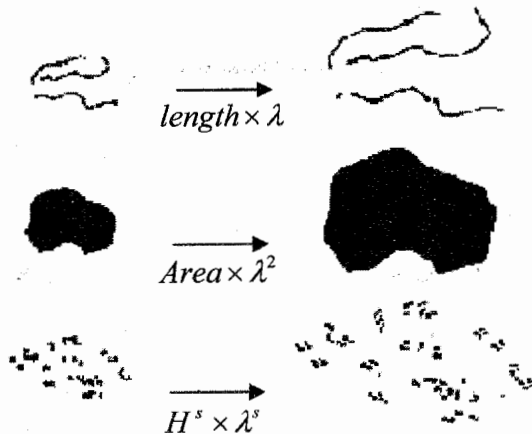
شکل ۱-۲ مجموعه F و دو δ -پوشش ممکن برای F . اینفیمم $\sum |U_i|^s$ روی هر چنین δ -پوشش‌های $\{U_i\}$ ، $H_\delta^s(F)$ را می‌دهد.

اندازه هاوسدورف معانی آشنای طول، مساحت، حجم و غیره را به صورت یک قانون کلی درمی آورد. می توان نشان داد که برای زیرمجموعه های R^n اندازه هاوسدورف n -بعدی با اختلاف یک ضریب ثابت، همان اندازه لبگ n -بعدی، یعنی حجم n -بعدی معمولی، می باشد. به طور دقیق تر اگر F یک زیرمجموعه بول از R^n باشد، آنگاه

$$H^n(F) = c_n \text{vol}^n(F) \quad (۴-۲)$$

که در آن $c_n = \pi^{\frac{1}{2}n} / 2^n (\frac{1}{2}n)!$ حجم گوی n -بعدی با قطر ۱ می باشد. به طور مشابه برای زیرمجموعه های مناسب از R^n با بعد پایین، $H^0(F)$ تعداد نقاط در F است و $H^1(F)$ طول یک منحنی هموار F را می دهد؛ اگر F یک رویه هموار باشد، $H^2(F) = \frac{1}{4}\pi \times \text{area}(F)$ و $H^3(F) = \frac{4}{3}\pi \times \text{vol}(F)$ ؛ و به طور کلی $H^m(F) = c_m \text{vol}^m(F)$ اگر F یک خمینه m -بعدی هموار از R^n باشد (یعنی یک رویه m -بعدی در حالت کلاسیک باشد).

ویژگی های مقیاسی طول، مساحت و حجم به خوبی آشنا هستند. در بزرگنمایی به وسیله یک عامل λ ، طول یک منحنی در λ و مساحت یک ناحیه مسطح در λ^2 و حجم یک شیء λ^3 بعدی در λ^3 ضرب می شود. همانطور که انتظار می رود اندازه هاوسدورف S بعدی بعد از بزرگنمایی به وسیله عامل λ ، در عامل λ^S ضرب می گردد (شکل ۲-۲). این گونه ویژگی های مقیاسی، اساس نظریه فرکتال ها هستند.



شکل ۲-۲ در بزرگنمایی با مقیاس λ ، طول یک منحنی در λ ، مساحت یک ناحیه مسطح در λ^2 و اندازه هاوسدورف S بعدی در λ^S ضرب می گردد.

ویژگی مقیاسی ۱-۲

اگر $F \subset R^n$ و $\lambda > 0$ آنگاه

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F) \quad (۵-۲)$$

به طوریکه $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ یعنی مجموعه F در یک عامل λ ضرب شده است.

برهان. اگر $\{U_i\}$ یک δ -پوشش از F باشد، آنگاه $\{\lambda U_i\}$ یک $\lambda\delta$ -پوشش از λF می باشد. از این رو

$$H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s \leq \lambda^s H_\delta^s(F)$$

پس رابطه فوق برای هر پوشش برقرار است. با فرض $\delta \rightarrow 0$ نتیجه می شود که $H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F)$. جایگزینی λ با $\frac{1}{\lambda}$ و F با $\frac{1}{F}$ ، نامعادله برعکس مورد نیاز را به ما می دهد. \square

استدلال هایی مشابه، تخمین اساسی زیر را از تأثیر تبدیل های کلی تر روی اندازه هاوسدورف مجموعه ها به ما می دهد.

گزاره ۲-۲

فرض کنید $F \subset R^n$ و $f: F \rightarrow R^m$ نگاشتی باشد به طوریکه برای ثابت های $c > 0$ و $\alpha > 0$

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\alpha \quad (x, y \in F) \quad (۶-۲)$$

آنگاه برای هر s

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(F) \quad (۷-۲)$$

برهان. اگر $\{U_i\}$ یک δ -پوشش از F باشد، از آنجاییکه $|f(F \cap U_i)| \leq c |U_i|^\alpha$ نتیجه می گیریم که $\{f(F \cap U_i)\}$ یک ε -پوشش از $f(F)$ است به طوریکه $\varepsilon = c\delta^\alpha$. بنابراین $H_\varepsilon^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H_\delta^s(F)$ به طوریکه $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s$ اگر $\delta \rightarrow 0$ ، پس $\varepsilon \rightarrow 0$ ، و (۷-۲) بدست می آید. \square

شرط (۲-۶) به شرط هولدر با نمای α مشهور است. یک چنین شرطی به طور ضمنی می‌گوید که f پیوسته است. به خصوص، حالت $\alpha = 1$ مهم است؛ یعنی

$$(۸-۲) \quad |f(x) - f(y)| \leq c |x - y| \quad (x, y \in F)$$

در این حالت f یک نگاهت لیپشیتس نامیده می‌شود، و

$$(۹-۲) \quad H^s(f(E)) \leq c^s H^s(F)$$

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه مقدار میانگین، هر تابع مشتق‌پذیر با مشتق کراندار، لزوماً لیپشیتس است. اگر f یک همنهشتی باشد؛ یعنی $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ آنگاه $H^s(f(F)) = H^s(F)$ ، به ویژه همانطور که انتظار می‌رود اندازه هاوسدورف تحت انتقال پایا می‌باشد (یعنی $H^s(F + z) = H^s(F)$ که $F + z = \{x + z : x \in F\}$)، و تحت دوران نیز پایا می‌باشد.

۲-۲ بعد هاوسدورف

از معادله (۲-۱) روشن است که برای هر مجموعه داده شده F و $\delta < 1$ ، $H_\delta^s(F)$ روی s غیر صعودی است، و بنابراین (۲-۲)، $H^s(F)$ نیز غیر صعودی است. در حقیقت، چیز بیشتری هم می‌توانیم بگوییم. اگر $t > s$ و $\{U_i\}$ یک δ -پوشش از F باشد داریم

$$(۱۰-۲) \quad \sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

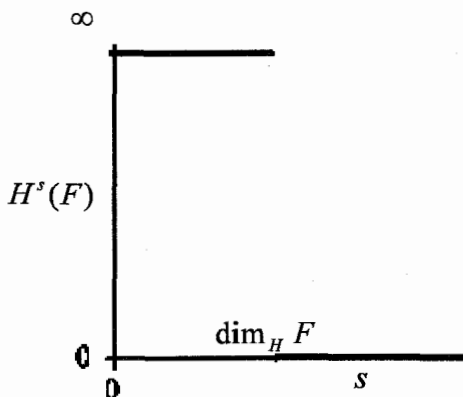
بنابراین با گرفتن اینفیمم، $H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$. با فرض $\delta \rightarrow 0$ می‌بینیم که اگر $H^s(F) < \infty$ آنگاه برای $t > s$ ، $H^t(F) = 0$. بنابراین یک نمودار $H^s(F)$ بر حسب s (شکل ۲-۳) نشان می‌دهد که یک مقدار بحرانی از s وجود دارد که در آن $H^s(F)$ از ∞ به 0 می‌پرد. این مقدار بحرانی بعد هاوسدورف F نامیده می‌شود و با $\dim_H F$ نشان داده می‌شود. (بعضی مؤلفان به بعد هاوسدورف به عنوان بعد بسکوویچ - هاوسدورف اشاره می‌کنند.) به شکل صوری داریم:

$$(۱۱-۲) \quad \dim_H F = \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\}$$

به طوریکه

$$(۱۲-۲) \quad H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{if } s < \dim_H F \\ 0 & \text{if } s > \dim_H F \end{cases}$$

اگر $s = \dim_H F$ ، آنگاه $H^s(F)$ ممکن است صفر یا نامتناهی باشد یا ممکن است در $0 < H^s(F) < \infty$ صدق کند.



شکل ۲-۳ نمودار $H^s(F)$ روی s برای یک مجموعه F . بعد هاوسدورف، آن مقدار از s است که در آن پرش از ∞ به 0 روی می‌دهد.

یک مجموعه بورل که در شرط $0 < H^s(F) < \infty$ صدق کند یک s -مجموعه نامیده می‌شود. از لحاظ ریاضی s -مجموعه‌ها راحت‌ترین مجموعه‌ها برای مطالعه هستند و از خوش اقبالی، اغلب مجموعه‌ها s -مجموعه هستند. به عنوان یک مثال بسیار ساده، فرض کنید F یک قرص مسطح با شعاع واحد در R^3 باشد. از ویژگی‌های آشنای طول و مساحت و حجم می‌بینیم که $H^1(F) = \text{length}(F) = \infty$ ، $0 < H^2(F) = \frac{1}{4}\pi \times \text{area}(F) < \infty$ ، $H^3(F) = \frac{4}{3}\pi \times \text{vol}(F) = 0$ و $H^s(F) = 0$ برای $s > 2$.

بعد هاوسدورف در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند (که طبیعتاً انتظار می‌رود که برای هر تعریف ممکن دیگر برای بعد هم برقرار باشند).

مجموعه‌های باز. اگر $F \subset R^n$ ، باز باشد آنگاه $\dim_H F = n$ ، چون F یک گوی با حجم مثبت n -بعدی را شامل می‌شود.

مجموعه‌های هموار. اگر F یک زیرخمینه m - بعدی هموار از R^n باشد، آنگاه $\dim_H F = m$. به خصوص منحنی‌های هموار بعد ۱ و سطوح هموار بعد ۲ دارند. این واقعیت ممکن است از رابطه بین اندازه‌های هاوسدورف و لبگ نیز استنتاج شود.

یکنوایی. اگر $E \subset F$ آنگاه $\dim_H E \leq \dim_H F$. این نتیجه فوری این ویژگی اندازه است که به ازای هر s ، $H^s(E) \leq H^s(F)$.

پایداری شمارا! اگر F_1, F_2, \dots یک دنباله (شمارا) از مجموعه‌ها باشد آنگاه $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$. مسلماً، به ازای هر j به خاطر ویژگی یکنوایی $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$. از طرف دیگر اگر به ازای هر i ، $\dim_H F_i < s$ ، آنگاه $H^s(F_i) = 0$ ، در نتیجه $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$ و عکس نامعادل به دست می‌آید.

مجموعه‌های شمارا. اگر F شمارا باشد، آنگاه $\dim_H F = 0$. برای اینکه اگر F_i یک نقطه تک باشد، آنگاه $H^0(F_i) = 0$ و $\dim_H F_i = 0$ ، بنابراین از ویژگی پایایی شمارا نتیجه می‌شود که $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$.

ویژگی‌های تبدیل بعد هاوسدورف از مشابه آنها برای اندازه‌های هاوسدورف که در قضیه ۲-۲ داده شده‌اند، پیروی می‌کنند.

گزاره ۲-۳

فرض کنید $F \subset R^n$ و $f: F \rightarrow R^m$ در شرط هولدر صدق کند:

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\alpha \quad (x, y \in F)$$

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F \quad \text{آنگاه}$$

برهان. اگر $s > \dim_H F$ آنگاه براساس قضیه ۲-۲، $H^s(F) = 0$ که $H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{1}{\alpha}} H^s(F) = 0$ ، ایجاب می‌کند $H^{s/\alpha}(f(F)) = 0$ یعنی $H^{s/\alpha}(f(F)) < s$ و به عبارت دیگر $\dim_H f(F) < \frac{1}{\alpha} s$ پس $\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$ □

نتیجه ۲-۴

الف) اگر $f: F \rightarrow R^m$ یک تبدیل لیپشیتس باشد ((۲-۸) را ببینید)، آنگاه $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$

(ب) اگر $f: F \rightarrow R^m$ یک تبدیل دو-لیپشیتیس باشد، یعنی

$$(۱۳-۲) \quad c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y| \quad (x, y \in F)$$

که در آن $\dim_H f(F) = \dim_H F$ آنگاه $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$

برهان. بخش (الف) با گرفتن $\alpha = 1$ از قضیه ۲-۳ نتیجه می شود. با به کار بردن (الف) برای

$$\square \quad f^{-1}: f(F) \rightarrow F, \text{ نامساوی دیگر مورد نیاز برای (ب) به دست می آید.}$$

این نتیجه، یک ویژگی اساسی بعد هاوسدورف را آشکار می کند: بعد هاوسدورف تحت تبدیل دو-لیپشیتیس ثابت است. بنابراین اگر دو مجموعه ابعاد متفاوتی داشته باشند، یک نگاشت دو-لیپشیتیس از یکی به روی دیگری نمی تواند وجود داشته باشد. این یادآور آن حالتی در توپولوژی است که ناوردهای (پایه‌های) مختلف (مانند گروه‌های هموتوبی یا همولوژی) به منظور تشخیص دادن مجموعه‌هایی که همسانریخت نیستند، تولید شده‌اند: اگر ناوردهای توپولوژیکی از دو مجموعه تفاوت داشته باشند آنگاه یک همسانریختی (نگاشت یک به یک پیوسته با معکوس پیوسته) بین دو مجموعه وجود نخواهد داشت.

در توپولوژی دو مجموعه "یکسان" در نظر گرفته می شوند اگر یک همسانریختی بین آنها وجود داشته باشد. نمونه مشابه آن برای هندسه فرکتالی این است که دو مجموعه را "یکسان" در نظر بگیریم اگر یک نگاشت دو-لیپشیتیس بین آنها وجود داشته باشد.

درست مانند ناوردهای توپولوژیکی که برای تمیز بین مجموعه‌های غیرهمسانریخت استفاده می شوند، می توانیم در جستجوی پارامترهایی شامل بعد برای تمیز بین مجموعه‌هایی که دو-لیپشیتیس - معادل نیستند، باشیم. از آنجاییکه تبدیلات دو-لیپشیتیس (۱۳-۲) لزوماً پیوسته هستند پارامترهای توپولوژیکی، حرکتی را در این جهت فراهم می کنند، و بعد هاوسدورف و تعریف‌های دیگری از بعد) نشانه‌های خاص بیشتری برای تمیز بین فرکتال‌ها، فراهم می کنند. در حالت کلی، بعد یک مجموعه، به تنهایی، درباره ویژگی‌های توپولوژیکی آن مطالب کمی را به ما می گوید. به هر حال، هر مجموعه با بعد کمتر از ۱، لزوماً آن قدر پراکنده (متفرق) است که کلاً ناهمبند باشد؛ یعنی هیچ دو نقطه‌ای از آن در یک مؤلفه همبند قرار نمی گیرد.

گزاره ۲-۵

یک مجموعه $F \subset R^n$ با $\dim_H F < 1$ کلاً ناهمبند است.

^۱ invariant

(برای زیبایی متن گاهی این کلمه را طبق واژه نامه انجمن ریاضی ناوردا و گاهی پایا ترجمه نموده ایم)

برهان. فرض کنید x و y نقاط جدا از هم در F باشند نگاشت $f: R^n \rightarrow [0, \infty)$ را به صورت $f(z) = |z - x|$ تعریف می‌کنیم. از آنجاییکه f فاصله‌ها را زیاد نمی‌کند یعنی $|f(z) - f(w)| \leq |z - w|$ ، از نتیجه ۴-۲ (آ) داریم که $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$ ، بنابراین $f(F)$ یک زیرمجموعه R از اندازه H^1 یا طول صفر می‌باشد و بنابراین یک مکمل چگال دارد. با انتخاب r که $r \notin f(F)$ و $0 < r < f(y)$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$

بنابراین F مشمول در دو مجموعه باز جدا از هم می‌باشد که x در یک مجموعه و y در دیگری است، و بنابراین x و y در مولفه‌های همبند متفاوتی از F قرار می‌گیرند. \square

۳-۲ محاسبه بعد هاوسدورف - مثال‌های ساده

این بخش چگونگی محاسبه بعد هاوسدورف تعدادی فرکتال‌های ساده را همانند بعضی از آنچه که در مقدمه بحث شده، نشان می‌دهد. در بقیه کتاب با روش‌های دیگری مواجه خواهیم شد.

مثال ۶-۲ فرض کنید F غبار کانتور ساخته شده از مربع واحد، همانند شکل ۴-۰ باشد (در هر مرحله از ساخت، مربع‌ها به ۱۶ مربع با یک چهارم طول ضلع تقسیم می‌شوند که از آن الگوی یکسانی از ۴ مربع باقی نکه داشته می‌شوند). آنگاه $1 \leq H^1(F) \leq \sqrt{2}$ و بنابراین $\dim_H F = 1$.

محاسبه. با گرفتن یک پوشش واضح از F با 4^k مربع با ضلع 4^{-k} (یعنی با قطر $\delta = 4^{-k} \sqrt{2}$) در E_k ، k امین مرحله از ساخت، به یک تخمین $H_\delta^1(F) \leq 4^k 4^{-k} \sqrt{2}$ برای اینفیمم در (۱-۲) می‌رسیم. اگر $k \rightarrow \infty$ و بنابراین $\delta \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌گیریم که $H^1(F) \leq \sqrt{2}$.

برای تخمین پایینی، فرض کنید $proj$ نشان دهنده تصویر قائم روی محور x ها باشد. تصویر قائم فاصله‌ها را زیاد نمی‌کند؛ یعنی $|proj x - proj y| \leq |x - y|$ ، بنابراین $proj$ یک نگاشت لیپشیتس می‌باشد. با استفاده از خاصیت ساختار F ، تصویر یا "سایه" F روی محور x ها، $proj F$ ، بازه $[0, 1]$ می‌باشد. با استفاده از (۲-۹) خواهیم داشت

$$1 = \text{length}[0, 1] = H^1([0, 1]) = H^1(proj F) \leq H^1(F) \quad \square$$

توجه کنید که استدلال و نتیجه یکسانی برای مجموعه بدست آمده از تقسیمات تکراری مربع‌ها به m^2 مربع با طول ضلع $\frac{1}{m}$ که از آن، از هر ستون یک مربع باقی می‌ماند، برقرار است. استفاده از تصویر قائم برای بدست آوردن تخمین پایین‌تر برای اندازه هاوسدورف در شرایط خاصی کارایی دارد و در همه حالت‌ها کاربرد ندارد. معمولاً کار نسبتاً سخت‌تری در پیش داریم.

مثال ۲-۷

فرض کنید F مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد (شکل ۱-۰ را ببینید) آنگاه $\dim_H F = s$ و $\frac{1}{2} \leq H^s(F) \leq 1$ که در اینجا $s = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$.

محاسبه تجربی. مجموعه کانتور F به یک بخش چپ $F_L = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ و یک بخش راست $F_R = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$ تجزیه می‌شود. به وضوح هر دو بخش به طور هندسی با مقیاس نسبت یک سوم، شبیه F هستند و، $F = F_L \cup F_R$ با این اجتماع جدا می‌شود. بنابراین برای هر s با استفاده از ویژگی مقیاسی (۲-۱) از بعد هاوسدورف، خواهیم داشت

$$H^s(F) = H^s(F_L) + H^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F)$$

با فرض اینکه در مقدار بحرانی $s = \dim_H F$ داشته باشیم $0 < H^s(F) < \infty$ (این فرض، فرض بزرگی است اما قابل توجیه می‌باشد) می‌توانیم رابطه فوق را بر $H^s(F)$ تقسیم کنیم، تا $1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$ یا $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ به دست آید.

محاسبه مشکل‌تر. بازه‌های با طول 3^{-k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) که مجموعه‌های E_k در ساختار F را می‌سازند، بازه‌های اصلی می‌نامیم. پوشش $\{U_i\}$ از F مشتمل بر 2^k بازه از E_k با طول 3^{-k} نتیجه می‌دهد که

$$H_{3^{-k}}^s(F) \leq \sum |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} = 1$$

اگر $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ با فرض $k \rightarrow \infty$ داریم $H^s(F) \leq 1$.

برای اثبات اینکه $H^s(F) \geq \frac{1}{2}$ ، نشان می‌دهیم که برای هر پوشش $\{U_i\}$ از F ،

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}. \quad (۱۴-۲)$$

به وضوح، کفایت فرض کنیم که U_i ها بازه باشند، و به وسیله اندکی بزرگ‌تر کردن آنها و استفاده از فشردگی F تنها نیاز داریم که (۲-۱۴) را برای زمانی که $\{U_i\}$ یک گردایه متناهی از زیربازه‌های بسته از $[0, 1]$ می‌باشد اثبات کنیم. به ازای هر U_i فرض کنید k عدد صحیحی باشد به طوری‌که

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k} \quad (۱۵-۲)$$

آنگاه U_i می‌تواند حداکثر یک بازه ابتدایی از E_k را قطع کند چرا که فاصله این بازه‌های ابتدایی حداقل 3^{-k} است. اگر $j, z \geq k$ ، آنگاه با این ساختار داده شده برای $\{U_i\}$ ، با استفاده از (۱۵-۲) U_i حداکثر تعداد $|U_i|^s \leq 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s$ بازه ابتدایی از E_j را قطع می‌کند. اگر j را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم به طوری که برای هر U_i ، $|U_i| \leq 3^{-(j+1)}$ ، آنگاه از آنجایی که $\{U_i\}$ هر 2^j بازه ابتدایی با طول 3^{-j} را قطع می‌کند، با شمارش بازه‌ها نتیجه می‌گیریم: $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ ، که به رابطه (۱۴-۲) می‌رسیم. \square

با تلاش بیشتر، می‌توان محاسبه را برای نشان دادن اینکه $H^s(F) = 1$ ، ترتیب داد. اکنون روشن شد که محاسبه اندازه و بعد هاوسدورف حتی برای مجموعه‌های ساده می‌تواند پیچیده باشد. معمولاً بدست آوردن تقریب پایینی مشکل است.

روش محاسبه تجربی که در مثال ۲-۷ استفاده شد برای بعد بسیاری از مجموعه‌های خودمتمشابه پاسخی درست می‌دهد. برای مثال، منحنی ون کخ از چهار کپی از خودش در مقیاس $\frac{1}{3}$ تشکیل شده است و از این رو دارای بعد $\frac{\log 4}{\log 3}$ می‌باشد. به طور کلیتر اگر $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$ که هر F_i به طور هندسی مشابه F اما در مقیاس c_i است، آنگاه مشروط بر اینکه F_i ها بیش از حد نقطه مشترک نداشته باشد، استدلال تجربی، $\dim_H F$ را برابر عدد s که در $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ صدق می‌کند، به ما می‌دهد. حدود اعتبار این فرمول به طور کامل در فصل ۹ بحث شده است.

* ۲-۴ تعریف‌های معادل با بعد هاوسدورف

ارزشمند است خاطر نشان کنیم که دسته‌های دیگری از مجموعه‌های پوششی وجود دارند که اندازه‌ها را طوری تعریف می‌کنند که به بعد هاوسدورف منجر شود. برای مثال می‌توانیم از پوشش بوسیله گوی‌های کروی استفاده کنیم. با فرض

$$(۱۶-۲) \quad B_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum |B_i|^s : \text{پوششی از } F \text{ به وسیله گوی‌ها} \right\}$$

یک اندازه $B_\delta^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta^s(F)$ و یک بعد به دست می‌آوریم که در آن $B^s(F)$ از ∞

به ۰ جهش دارد. به وضوح $H_\delta^s(F) \leq B_\delta^s(F)$ ، چرا که هر δ -پوشش از F به وسیله گوی‌ها، یک پوشش مجاز در تعریف H_δ^s می‌باشد. همچنین اگر $\{U_i\}$ یک δ -پوشش از F باشد، آنگاه $\{B_i\}$ نیز چنین است، که به ازای هر i ، B_i ها گوی‌هایی شامل U_i و با شعاع $|U_i| < \delta$ انتخاب شده‌اند. بنابراین $\sum |U_i|^s \leq \sum (2|U_i|)^s = 2^s \sum |U_i|^s$ و گرفتن اینفیم نتیجه می‌دهد که $B_{2\delta}^s(F) \leq 2^s H_\delta^s(F)$. با فرض $\delta \rightarrow 0$ نتیجه

می‌شود که $H^s(F) \leq B^s(F) \leq 2^s H^s(F)$ بخصوص، این اشاره دارد به اینکه مقادیر B^s و H^s در آن از ∞ به 0 جهش دارند، برابر هستند، و در نتیجه ابعاد تعریف شده به وسیله دو اندازه، برابر هستند.

به آسانی در می‌یابیم که اگر در (۲-۱) از δ - پوشش‌هایی که فقط از مجموعه‌های باز یا فقط از مجموعه‌های بسته هستند، استفاده کنیم، به مقادیر یکسانی برای بعد و اندازه هاوسدورف می‌رسیم. به علاوه اگر F فشرده باشد، آنگاه با کمی بزرگ کردن مجموعه‌های پوششی و تبدیل آنها به مجموعه‌های باز و با گرفتن یک زیرپوشش متناهی، اگر فقط δ - پوشش‌هایی بوسیله گردایه‌های متناهی از مجموعه‌ها در نظر بگیریم، به مقادیر یکسانی از $H^s(F)$ می‌رسیم.

اندازه‌های مشبک^۱ نسخه مفید دیگری می‌باشند. برای سادگی فرض کنید F یک زیرمجموعه از بازه $[0,1]$ باشد. یک بازه دودویی بازه‌ای به شکل $(r2^{-k}, (r+1)2^{-k})$ می‌باشد که $k = 0,1,2,\dots$ و $r = 0,1,\dots,2^k - 1$. تعریف می‌کنیم:

$$M_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum |U_i| : \{U_i\} \text{ یک } \delta\text{-پوشش از } F \text{ به وسیله بازه‌های دودویی باشد} \right\} \quad (17-2)$$

که به اندازه مشبک زیر منجر می‌شود

$$M^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta^s(F) \quad (18-2)$$

از آنجایی که هر بازه $U \subset [0,1]$ مشمول در دو بازه دودویی متوالی هرکدام با طول حداکثر $|U|/2$ است، با روشی مشابه اندازه‌های B^s به دست می‌آوریم

$$H^s(F) \leq M^s(F) \leq 2^{s+1} H^s(F) \quad (19-2)$$

این نتیجه می‌دهد که مقدار s که در آن $M^s(F)$ از ∞ به 0 جهش دارد، با بعد هاوسدورف F برابر است؛ یعنی دو تعریف از اندازه، بعد یکسانی را می‌دهند.

برای اهداف خاص، اندازه‌های مشبک از اندازه هاوسدورف بسیار راحت‌تر هستند. این به آن خاطر است که هر دو بازه دودویی یا جدا از هم‌اند و یا یکی مشمول در دیگری است و در نتیجه هر پوشش از بازه‌های دودویی در حقیقت اجتماعی مجزا از بازه‌های دودویی می‌باشد.

^۱ net measure

* ۲-۵ تعریف‌های ظریف‌تری از بعد

گاهی مطلوب است که تعیین دقیق‌تری از بعد، نه فقط به عنوان یک عدد، داشته باشیم. برای رسیدن به این ایده، فرض کنید $R^+ \rightarrow R^+$ تابعی پیوسته و صعودی باشد که ما آن را تابع بعد می‌نامیم. مشابه با (۲-۱) برای یک زیرمجموعه F از R^n تعریف می‌کنیم:

$$\{U_i\} \text{ یک } \delta\text{-پوشش از } F \text{ می‌باشد: } H_\delta^h(F) = \inf\{\sum h(|U_i|)\} \quad (2-20)$$

این تعریف با گرفتن $H^h(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^h(F)$ به یک اندازه ختم می‌شود. (اگر $h(t) = t^s$ ، این تعریف معمولی اندازه هاوسدورف s -بعدی است.) اگر h و g توابع بعد باشند به طوری که با $t \rightarrow 0$ ، $\frac{h(t)}{g(t)} \rightarrow 0$ ، آنگاه با بحثی مشابه (۲-۱۰) به این می‌رسیم که هرگاه $H^g(F) < \infty$ آنگاه $H^h(F) = 0$. بنابراین با جداکردن تابع‌های بعد به تابع‌هایی که برای آنها H^h متناهی است و به تابع‌هایی که H^h نامتناهی دارند، تعیین دقیق‌تری از بعد F نسبت به عدد $\dim_H F$ به دست می‌آوریم.

یک مثال مهم از آن، حرکت براونی در R^3 است (برای جزئیات بیشتر فصل ۱۶ را ببینید). می‌توان نشان داد که (با احتمال ۱) یک مسیر براونی دارای بعد هاوسدورف ۲ اما دارای H^2 -اندازه مساوی با صفر می‌باشد.

محاسبات موشکافی‌تر شده نشان می‌دهد که یک چنین مسیری H^h -اندازه متناهی و مثبت دارد که در آن $h(t) = t^2 \log \log(\frac{1}{t})$. هرچند مسیر براونی دارای بعد ۲ است، از دیدگاهی، بعد به طور لگاریتمی کوچکتر از ۲ است.

* ۲-۶ نکات و منابع

اندیشه یافتن اندازه‌ها با استفاده از پوشش‌هایی از مجموعه‌ها توسط *Caratheodory* (۱۹۱۴) معرفی شد. *Hausdorff* (۱۹۱۹) از این روش برای تعریف اندازه‌هایی که اکنون نام او را با خود به همراه دارند استفاده کرد، و نشان داد که مجموعه یک سوم میانی کانتور اندازه مثبت و متناهی با بعد $\log 2 / \log 3$ دارد. ویژگی‌های اندازه‌های هاوسدورف در طی این قرن، به طور گسترده‌ای توسط بسیکوویچ و شاگردانش توسعه یافته است.

جنبه‌های تکنیکی ابعاد و اندازه‌های هاوسدورف، با جزئیات نسبتاً بیشتری در *Falconer* (۱۹۸۵a)، و با عمومیت بیشتری در کتاب‌های *Rogers* (۱۹۷۰) و *Federer* (۱۹۶۹) بحث شده است.

تمرین‌ها

- ۱-۲ تحقیق کنید که اگر در (۱-۲) فقط δ - پوشش‌هایی از مجموعه‌های بسته $\{U_i\}$ را در نظر بگیریم، مقدار $H^s(F)$ تغییر نمی‌کند.
- ۲-۲ نشان دهید که $H^0(F)$ برابر تعداد نقاط در F است.
- ۳-۲ با استفاده از تعریف تحقیق کنید که $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i)$.
- ۴-۲ فرض کنید $f: R \rightarrow R$ یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق‌های پیوسته باشد. نشان دهید که برای هر مجموعه F ، $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$. (نخست حالتی را در نظر بگیرید که F کراندار باشد).
- ۵-۲ فرض کنید $f: R \rightarrow R$ تابع $f(x) = x^2$ باشد، و F هر زیرمجموعه‌ای از R باشد. نشان دهید که $\dim_H f(F) = \dim_H F$.
- ۶-۲ فرض کنید F مجموعه متشکل از اعدادی مابین صفر و ۱ باشد که بسط اعشاری آنها فاقد رقم ۵ باشد. با استفاده از یک استدلال "ابتکاری" نشان دهید که $\dim_H F = \log 9 / \log 10$. آیا می‌توانید این موضوع را با استدلال "موشکافانه" اثبات کنید؟ این نتیجه را تعمیم دهید.
- ۷-۲ فرض کنید F شامل نقاط $(x, y) \in R^2$ باشد به طوری که بسط اعشاری یکی از اعداد x یا y شامل رقم ۵ نباشد. با استفاده از یک استدلال "ابتکاری" نشان دهید که $\dim_H F = 2 \log 9 / \log 10$.
- ۸-۲ با استفاده از یک استدلال "ابتکاری" نشان دهید که بعد هاوسدورف مجموعه نشان داده شده در شکل ۵-۰ از طریق حل معادله $1 = (\frac{1}{2})^s + 4(\frac{1}{4})^s$ به دست می‌آید.
- ۹-۲ فرض کنید F مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد که بسط $a_1 a_2 \dots b_1 b_2 \dots$ آنها در مبنای ۳ به گونه‌ای است که هیچیک از ارقام a_i یا b_i برابر ۱ نیستند. (بنابراین F توسط روند کانتورمانندی ساخته می‌شود). بعد هاوسدورف F چیست؟
- ۱۰-۲ بعد هاوسدورف مجموعه‌ای از اعداد x را به دست آورید که دارای بسط $0.a_1 a_2 \dots$ در مبنای ۳ می‌باشند به گونه‌ای که در آن به ازای یک عدد صحیح مثبت k (که ممکن است مرتبط با x باشد) وجود دارد به طوری که به ازای هر $i \geq k$ ، $a_i \neq 1$.
- ۱۱-۲ نشان دهید که به ازای هر $0 \leq s \leq 2$ یک زیرمجموعه کلاً ناهمبند از صفحه وجود دارد که دارای بعد هاوسدورف s است.

۱۲-۲ فرض کنید S دایره یکه در صفحه باشد، و نقاط روی S به وسیله یک زاویه θ که در مرکز با یک محور ثابت قرار گرفته است پارامتر بندی شده‌اند، و همانند معمول، θ_1 و θ_2 نقاط یکسانی را نشان می‌دهند اگر و فقط اگر θ_1 و θ_2 در یک ضرب 2π تفاوت داشته باشند. فرض کنید $F = \{\theta \in S : 0 \leq 3^k \theta \leq \pi \pmod{2\pi} \forall k = 1, 2, \dots\}$. نشان دهید که $\dim_H F = \log 2 / \log 3$.

۱۳-۲ نشان دهید که اگر g و h توابع بعد باشند به گونه‌ای که هنگامی که $t \rightarrow 0$ ، $h(t)/g(t) \rightarrow 0$ ، آنگاه $H^h(F) = 0$ هرگاه $H^g(F) < \infty$.

فصل ۳ تعریف‌های دیگری از بعد

بعد هاوسدروف که در فصل قبل بحث شد، تعریف اصلی بعد است که ما با آن کار خواهیم کرد. به هر حال تعریف‌های دیگر به طور کاملاً گسترده‌ای استفاده می‌شوند، و شایسته است که بعضی از آنها و رابطه بین آنها را بررسی کنیم. همه تعاریف به طور کلی قابل استفاده نیستند - برخی فقط دسته خاصی از مجموعه‌ها، مانند منحنی‌ها را توصیف می‌کنند.

ایده اساسی اکثر تعریف‌های بعد "اندازه‌گیری در مقیاس δ " می‌باشد. برای هر δ ، مجموعه را به روشی اندازه‌گیری می‌کنیم که از بی‌نظمی‌های سایز کوچک‌تر از δ چشم‌پوشی کند، و بررسی می‌کنیم که این اندازه‌گیری‌ها هنگامی که $\delta \rightarrow 0$ ، چگونه رفتار می‌کنند. برای مثال، اگر F یک منحنی مسطح باشد، آنگاه اندازه‌گیری ما، $M_\delta(F)$ ، می‌تواند تعداد مراحل لازم برای پیمودن F به وسیله یک پرگار باز شده با طول δ باشد. در این صورت اگر $M_\delta(F)$ تابع قانون توان باشد (در صورت وجود)، با $\delta \rightarrow 0$ ، بعد F به دست می‌آید. اگر برای ثابت‌های c و s داشته باشیم

$$(1-3) \quad M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$$

می‌توانیم بگوییم که F دارای بعد s است و c به عنوان "طول s -بعدی" F در نظر گرفته می‌شود. با گرفتن لگاریتم داریم

$$(2-3) \quad \log M_\delta(F) \sim \log c - s \log \delta$$

با این فرض که تفاضل دو طرف با δ به صفر میل کند، و بنابراین

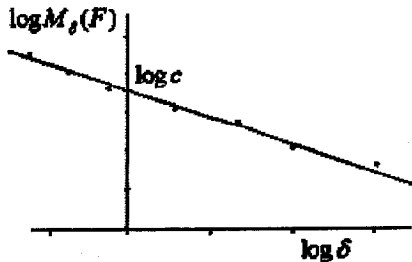
$$(3-3) \quad s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}$$

این فرمول‌ها برای اهداف تجربی یا محاسباتی استفاده می‌شوند، زیرا s می‌تواند به عنوان گرادیان یک نمودار $\log-\log$ تخمین زده شود که برای فاصله مناسبی از δ رسم شده است؛ شکل (۳-۱) را ببینید. (البته برای پدیده‌های واقعی، تنها با فواصل متناهی از δ می‌توانیم کار کنیم؛ نظریه و آزمایش قبل از رسیدن به یک مقیاس اتمی، از هم فاصله می‌گیرند؛ فصل ۱۸ را ببینید.)

ممکن است قانون توان دقیقی برای $M_\delta(F)$ وجود نداشته باشد و در این حالت بهترین راه برای نزدیک شدن به (۳-۳) استفاده از حدود بالا و پایین است.

برای آنکه مقدار s داده شده به وسیله (۳-۱) همانند یک بعد عمل کند، شیوه اندازه‌گیری باید در قیاس با مجموعه باشد، به طوریکه دو برابر کردن سایز F و همزمان دو برابر کردن مقیاسی که اندازه‌گیری در آن انجام می‌شود روی جواب تاثیر نگذارد؛ یعنی، برای هر δ نیاز داریم که $M_\delta(\delta F) = M_1(F)$. اگر مثالمان را بازنگری کنیم و $M_\delta(F)$ را به عنوان مجموع طول گام‌های تقسیم، دوباره تعریف کنیم، آنگاه $M_\delta(F)$ همگن از درجه ۱ است، یعنی $M_\delta(\delta F) = \delta^1 M_1(F)$ برای $\delta > 0$ ، و این موضوع باید هنگام تعریف بعد در نظر گرفته شود. به طور کلی، اگر $M_\delta(F)$ همگن از درجه d باشد، یعنی $M_\delta(\delta F) = \delta^d M_1(F)$ ، آنگاه یک قانون توان به شکل $M_\delta(F) \sim c\delta^{d-s}$ با یک بعد s مطابقت می‌کند.

برای تصمیم‌گیری در مورد اینکه آیا یک کمیت می‌تواند به عنوان یک بعد در نظر گرفته شود، قانون سفت و سخت و سریعی وجود ندارد. تعاریف بسیاری وجود دارند که دقیقاً با وضعیت بالا جور در نمی‌آیند، این وضعیتی است که بسیار ساده شده است. عواملی که پذیرش تعریف یک بعد را تعیین می‌کنند، به طور گسترده‌ای از طریق تجربه و شهود شناخته می‌شوند. به طور کلی به دنبال نوعی قابلیت اندازه‌گیری، طبیعی بودن تعریف در زمینه مورد بحث، و خواص مورد انتظار در ابعاد هستیم تا یک بعد را تعریف کنیم.



شکل ۳-۱ تخمین تجربی ابعاد یک مجموعه F ، بر اساس قانون توان $M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$.

هشدار: همانگونه که خواهیم دید، تعاریف مشابه از ابعاد می‌توانند ویژگی‌های بسیار متفاوت داشته باشند. نباید فرض کرد که تعاریف مختلف مقادیر یکسانی از بعد را می‌دهند، حتی برای مجموعه‌های "خوب و آشنا". چنین فرض‌هایی در گذشته به سردرگمی و آشفتگی‌های بسیاری منتهی شده‌اند. باید ویژگی‌های هر "بعد" را از تعریف آن استنباط کنیم. ویژگی‌های بعد هاوسدورف (که در فصل‌های بعدی کتاب روی آنها بیشتر تمرکز خواهیم کرد) لزوماً همگی برای تعاریف دیگر برقرار نیستند:

ویژگی‌های مطلوب یک "بعد" چیست؟ آنهایی که در فصل قبل برای بعد هاوسدورف استنباط شدند نمونه خوبی هستند.

یکنوایی. اگر $E \subset F$ آنگاه $\dim_H E \leq \dim_H F$.

پایداری. $\dim_H (E \cup F) = \max(\dim_H E, \dim_H F)$.

پایداری شمارا. $\dim_H (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H F_i$.

پایایی هندسی. $\dim_H f(F) = \dim_H F$ هرگاه f یک تبدیل از R^n مانند انتقال، دوران، تشابه یا آفینی باشد.

پایایی لیبشیتس. $\dim_H f(F) = \dim_H F$ اگر f یک تبدیل دو-لیبشیتس باشد.

مجموعه‌های شمارا. $\dim_H F = 0$ اگر F متناهی یا شمارا باشد.

مجموعه‌های باز. اگر F یک زیرمجموعه باز از R^n باشد آنگاه $\dim_H F = n$.

خمینه‌های هموار. $\dim_H F = m$ اگر F یک خمینه m -بعدی هموار باشد.

همه تعاریف بعد، یکنوا و اکثراً پایدار هستند، اما همانطور که خواهیم دید، بعضی تعاریف‌های معمولی، پایداری شمارا نشان نمی‌دهند و ممکن است دارای مجموعه‌های شمارا با بعد مثبت باشند. همه بعدهای معمولی پایای لیبشیتس هستند، و بنابراین، به طور هندسی پایا هستند. ویژگی‌های "مجموعه‌های باز" و "خمینه‌های هموار" تضمین می‌کنند که بعد تعمیمی از تعریف کلاسیک است. توجه کنید که تعاریف‌های مختلف از بعد می‌توانند اطلاعات مختلفی درباره مجموعه‌هایی که هم ارز لیبشیتس هستند ارائه دهند.

۳-۱ بعد جعبه شمارا^۱

بعد جعبه یا جعبه شمار یکی از ابعاد بسیار مفید می‌باشد. معروفیت آن بیشتر به سبب سادگی محاسبات ریاضی و تخمین‌های تجربی آن می‌باشد. تعریف آن حداقل به دهه ۱۹۳۰ برمی‌گردد و بعضاً آنتروپی کولموگوروف، بعد آنتروپی، بعد ظرفیت، بعد متریک، بعد اطلاعات و چگالی

^۱ box counting

لگاریتمی نامیده شده است. برای جلوگیری از سردرگمی همواره آن را به نام بعد جعبه شمار یا جعبه خواهیم شناخت.

فرض کنید F یک زیرمجموعه ناتهی و کراندار از R^n باشد و فرض کنید $N_\delta(F)$ کوچکترین تعداد از مجموعهها با قطر حداکثر δ باشد که می‌توانند F را بپوشانند. بعدهای جعبه شمار پایینی و بالایی F به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(۴-۳) \quad \underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$(۵-۳) \quad \overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

اگر اینها مساوی باشند به مقدار مشترک آنها بعد جعبه شمار یا بعد جعبه F می‌گوییم

$$(۶-۳) \quad \dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

تعریفهای معادل متعددی از بعد جعبه وجود دارند که گاهی در عمل ساده‌تر می‌باشند. بردایه مکعبها در شبکه δ -مختصات از R^n ، یعنی مکعبهای به شکل

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$$

که m_1, \dots, m_n اعداد صحیح هستند را در نظر بگیرید. (به یاد آورید که یک "مکعب" در R^1 یک بازه، و در R^2 یک مربع می‌باشد.) فرض کنید $N'_\delta(F)$ تعداد مکعبهای δ - شبکه باشد که F را قطع می‌کنند. آنها به وضوح بردایه‌ای از $N'_\delta(F)$ مجموعه با قطر $\delta\sqrt{n}$ که F را قطع می‌کنند فراهم می‌کنند، بنابراین

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

اگر $\delta\sqrt{n} < 1$ آنگاه

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta}$$

بنابراین با گرفتن حد با $\delta \rightarrow 0$ به دست می‌آوریم

$$(۷-۳) \quad \underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$(۸-۳) \quad \overline{\dim}_B F \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

از سوی دیگر، هر مجموعه با قطر حداکثر δ در 3^n مکعب شبکه‌ای با ضلع δ جای می‌گیرد (با انتخاب یک مکعب شامل نقطه‌ای از مجموعه همراه با مکعب‌های همسایه آن). از این رو

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$$

و گرفتن لگاریتم به عکس نامعادلات (۷-۳) و (۸-۳) منتهی می‌شود. از این رو برای یافتن بعدهای جعبه (۴-۳) - (۶-۳)، معادلاً می‌توانیم $N_\delta(F)$ را تعداد مکعب‌های شبکه‌ای با ضلع δ بگیریم که F را قطع می‌کنند.

این شکل تعریف عملاً به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود. برای یافتن بعد جعبه یک مجموعه مسطح F می‌توانیم شبکه‌ای از مربع‌ها یا جعبه‌ها با ضلع δ رسم کنیم و تعداد $N_\delta(F)$ را که برای چند δ کوچک مجموعه را می‌پوشاند حساب کنیم (به همین دلیل "جعبه شمار" نامیده می‌شود). بعد، آهنگ لگاریتمی است که در آن با کاهش δ ، $N_\delta(F)$ افزایش می‌یابد، و می‌تواند به وسیله ضریب زاویه نمودار $\log N_\delta(F)$ روی $-\log \delta$ تخمین زده شود.

این تعریف تفسیری از معنی بعد جعبه می‌دهد. تعداد مکعب‌های شبکه‌ای با ضلع δ که یک مجموعه را قطع می‌کنند نمایشی از چگونگی گستردگی یا نامنظم بودن یک مجموعه هنگامی که در مقیاس δ آزمایش می‌شود می‌باشد. بعد بازتاب این است که با $\delta \rightarrow 0$ ، بی‌نظمی‌ها با چه سرعتی گسترش می‌یابند.

تعریف دیگری از بعد جعبه که اغلب استفاده می‌شود با گرفتن $N_\delta(F)$ در (۴-۳) - (۶-۳) به عنوان کم‌ترین تعداد مکعب‌های دلخواه مورد نیاز با ضلع δ برای پوشاندن F می‌باشد. نشان دادن معادل بودن این تعریف مانند حالت مکعب شبکه‌ای است؛ توجه کنید که هر مکعب با ضلع δ دارای قطر $\delta\sqrt{n}$ است، و این که هر مجموعه با قطر حداکثر δ در مکعبی با ضلع δ قرار می‌گیرد.

به طور مشابه، اگر در (۴-۳) - (۶-۳) $N_\delta(F)$ را به عنوان کم‌ترین تعداد از گوی‌های بسته با شعاع δ که F را می‌پوشانند بگیریم، دقیقاً به مقادیر یکسانی می‌رسیم.

یک فرمول بندی کم‌تر واضح از بعد جعبه، استفاده از بیشترین تعداد گوی‌های مجزا با شعاع δ و مرکزهای در F است. فرض کنید این عدد $N'_\delta(F)$ باشد، و فرض کنید $B_1, \dots, B_{N'_\delta(F)}$ گوی‌های مجزا با مرکز در F و با شعاع δ باشند. اگر x متعلق به F باشد آنگاه x باید تا فاصله δ از یکی از B_i ها باشد، در غیر این صورت گوی با مرکز x و با شعاع δ می‌تواند برای تشکیل یک گردایه بزرگ‌تر از گوی‌های مجزا، اضافه شود. بنابراین تعداد $N'_\delta(F)$ گوی هم مرکز با B_i اما با شعاع 2δ (قطر 4δ) F را می‌پوشاند، یعنی

$$(۹-۳) \quad N_{4\delta}(F) \leq N'_\delta(F).$$

از سوی دیگر فرض کنید که $B_1, \dots, B_{N'_\delta(F)}$ گوی‌های مجزا با شعاع δ با مراکز در F باشند. فرض کنید U_1, \dots, U_k هر گردایه‌ای از مجموعه‌ها با قطر حداکثر δ باشد که F را می‌پوشاند. از آنجاییکه U_j باید مراکز B_i را بپوشاند، هر B_i باید شامل حداقل یکی از U_j ها باشد. چون B_i ها مجزا هستند حداقل به تعداد B_i ها، U_j وجود دارد. از این رو

$$(۱۰-۳) \quad N'_\delta(F) \leq N_\delta(F).$$

گرفتن لگاریتم از (۳-۹) و (۳-۱۰) نشان می‌دهد که مقادیر (۳-۴) - (۳-۶) با جایگزینی $N_\delta(F)$ و $N'_\delta(F)$ تغییر نمی‌کنند. این تعریف‌های مختلف در زیر (شکل ۳-۲) خلاصه شده‌اند.

تعریف‌های معادل ۱-۳

ابعاد جعبه شمار بالا و پایین یک زیرمجموعه F از R^n به صورت

$$(۱۱-۳) \quad \underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$(۱۲-۳) \quad \overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

و بعد جعبه شمار به صورت

$$(۱۳-۳) \quad \dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

(اگر این حد موجود باشد) داده می‌شوند، که $N_\delta(F)$ هر یک از موارد زیر می‌تواند باشد:

(i) کم‌ترین تعداد گوی‌های بسته با شعاع δ که F را می‌پوشانند؛

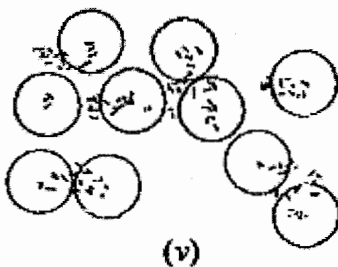
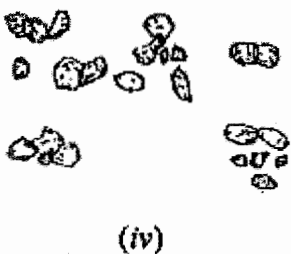
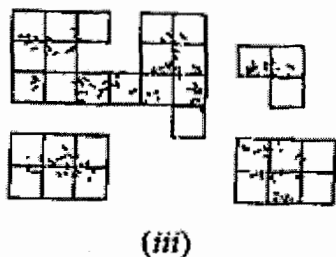
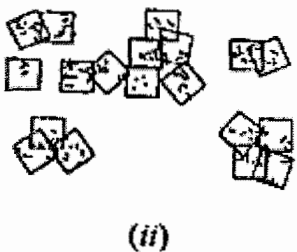
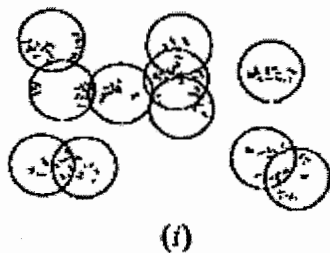
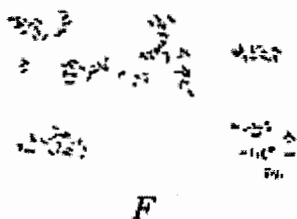
(ii) کم‌ترین تعداد مکعب‌های با ضلع δ که F را می‌پوشانند؛

(iii) تعداد مکعب‌های δ - شبکه که F را قطع می‌کنند؛

(iv) کم‌ترین تعداد مجموعه‌های با قطر حداکثر δ که F را می‌پوشانند؛

(v) بیشترین تعداد گوی‌های مجزا با شعاع δ و با مراکز در F .

این لیست می‌تواند بیشتر توسعه یابد؛ در عمل برای یک کاربرد خاص راحت‌ترین تعریف انتخاب می‌شود.



δ

شکل ۲-۳ پنج راه برای پیدا کردن بعد جعبه F ؛ تعاریف معادل ۱-۳ را ببینید. عدد $N_\delta(F)$ به عنوان: (i) کم‌ترین تعداد گوی‌های بسته با شعاع δ که F را می‌پوشانند؛ (ii) کم‌ترین تعداد مکعب‌های با ضلع δ که F را می‌پوشانند؛ (iii) تعداد مکعب‌های δ - شبکه که F را قطع می‌کنند؛ (iv) کم‌ترین تعداد مجموعه‌های با قطر حداکثر δ که F را می‌پوشانند؛ (v) بیشترین تعداد گوی‌های مجزا با شعاع δ و با مراکز در F ، در نظر گرفته می‌شود.

شایسته است توجه کنیم که در (۳-۱۱) - (۳-۱۳)، کفایت حدود را با هر دنباله نزولی δ_k به طوری که به ازای یک ثابت $0 < c < 1$ ، $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ ، به دست آوریم؛ به ویژه با $\delta_k = c^k$ ، برای اثبات این موضوع، توجه کنید که اگر $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$ ، آنگاه

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log(\delta_{k+1}/\delta_k)} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

و بنابراین

$$(۳-۱۴) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$$

برعکس نامعادله واضح است؛ حدود پایین به روش یکسانی داده می‌شود.

یک تعریف معادل از بعد جعبه با یک شکل نسبتاً متفاوت وجود دارد که ارزش ذکر کردن دارد. به یاد آورید که بدنه δ - موازی F_δ از F عبارت است از

$$(۳-۱۵) \quad F_\delta = \{x \in R^n : |x - y| \leq \delta \quad y \in F\}$$

یعنی مجموعه نقاط تا فاصله δ از F . آهنگی را که در آن حجم n - بعدی F_δ با $\delta \rightarrow 0$ کوچک می‌شود در نظر می‌گیریم. در R^3 ، اگر F یک تک نقطه باشد آنگاه F_δ یک گوی با حجم $\text{vol}(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$ می‌باشد، اگر F قطعه‌ای با طول l باشد آنگاه F_δ "سوسیس مانند" با حجم $\text{vol}(F_\delta) \sim \pi/\delta^2$ است، و اگر F یک مجموعه مسطح با مساحت a باشد آنگاه F_δ یک ضخیم سازی F با حجم $\text{vol}(F_\delta) \sim 2a\delta$ می‌باشد. در هر حالت، $\text{vol}(F_\delta) \sim c\delta^{3-s}$ که عدد صحیح s ، بعد F است، بنابراین نمای δ نشان دهنده بعد است. ضریب c δ^{3-s} ، معروف به محتوی مینکوفسکی^۱ F ، اندازه‌ای از طول، مساحت یا حجم مجموعه به ترتیب مذکور است.

این ایده به بعدها کسری تعمیم می‌یابد. اگر F زیرمجموعه‌ای از R^n باشد و، به ازای یک s ، مقدار $\text{vol}^n(F_\delta)/\delta^{n-s}$ با $\delta \rightarrow 0$ به یک حد متناهی مثبت میل کند، آنگاه عاقلانه است که F را s - بعدی به حساب آوریم. مقدار این حد محتوی s - بعدی F نامیده می‌شود - مفهومی که مختصری محدودیت دارد چراکه لزوماً روی زیرمجموعه‌های مجزا جمعی نیست، یعنی یک اندازه نیست. حتی اگر این حد موجود نباشد، ممکن است قادر به استخراج نمای بحرانی δ باشیم و این کار مرتبط با بعد جعبه از آب در می‌آید.

^۱ Minkowski content

گزاره ۲-۳

اگر F زیرمجموعه‌ای از R^n باشد، آنگاه

$$\underline{\dim}_B F = n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = n - \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

که F_δ بدنه δ - موازی از F است.

برهان. اگر F بتواند به وسیله $N_\delta(F)$ گوی با شعاع δ پوشیده شود آنگاه F_δ می‌تواند با گوی‌های هم مرکز با شعاع 2δ پوشیده شود. از اینرو

$$\text{vol}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) c_n (2\delta)^n$$

که c_n حجم گوی یکه در R^n می‌باشد. با گرفتن لگاریتم،

$$\frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n \log \delta + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

که ایجاب می‌کند

$$(۱۶-۳) \quad \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F$$

نامعادله‌ای مشابه نیز برای حدود بالا به دست می‌آید. از طرف دیگر اگر $N_\delta(F)$ گوی مجزا با شعاع δ و مراکز در F وجود داشته باشند، آنگاه

$$N_\delta(F) c_n (2\delta)^n \leq \text{vol}^n(F_\delta).$$

گرفتن لگاریتم و استفاده از تعریف معادل ۳-۱ (۷) عکس نامعادله (۱۶-۳) را می‌دهد. □

با توجه به گزاره ۲-۳، به بعد جعبه گاهی به عنوان بعد مینکوفسکی اشاره می‌شود.

مهم است که از ارتباط میان بعد جعبه شمار و بعد هاوسدورف آگاه باشیم. اگر F بتواند

بوسیله $N_\delta(F)$ مجموعه با قطر δ پوشیده شود، آنگاه، از تعریف (۱-۲)،

$$H_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s.$$

اگر $1 < H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$ آنگاه $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$ ، اگر δ به اندازه

کافی کوچک باشد. بنابراین $s \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / -\log \delta$ ، پس به ازای

$$F \subset R^n \text{ هر}$$

$$(۱۷-۳) \quad \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

در حالت کلی اینجا تساوی برقرار نیست. هر چند بعدهاهای هاوسدورف و جعبه برای بسیاری مجموعه‌های "به طور منطقی منظم" برابر هستند، بسیاری از مثال‌ها وجود دارند که برای آنها این نامعادله اکید است.

به بیان نادقیق (۳-۶) می‌گویند که به ازای δ ی کوچک $N_\delta(F) \sim \delta^{-s}$ ، که $s = \dim_B F$ به طور دقیق‌تر

$$N_\delta(F)\delta^s \rightarrow \infty \text{ آنگاه } s < \dim_B F$$

و

$$N_\delta(F)\delta^s \rightarrow 0 \text{ آنگاه } s > \dim_B F$$

اما

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \text{است } F \text{ پوشش (متناهی) } \delta \text{ یک } \{U_i\} \right\}$$

که باید با

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \text{است } F \text{ پوشش } \delta \text{ یک } \{U_i\} \right\}$$

مقایسه شود که در تعریف بعد و اندازه هاوسدورف استفاده می‌شود. در محاسبه بعد هاوسدورف، وزن‌های مختلف $|U_i|^s$ را به مجموعه‌های پوششی U_i نسبت می‌دهیم، در حالیکه برای بعدهاهای جعبه وزن یکسان δ^s را برای هر مجموعه پوششی به کار می‌بریم. می‌شود بعد جعبه به عنوان نمایش قابلیت‌هایی که با آن یک مجموعه می‌تواند به وسیله مجموعه‌های کوچک با سایز مساوی پوشیده شود در نظر گرفت، در حالیکه بعد هاوسدورف شامل پوشش‌هایی به وسیله مجموعه‌های کوچک است، با سایزی که احیاناً به طور گسترده‌ای در تغییر است.

انگیزشی برای معرفی کمیت $\nu(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^s$ وجود دارد، اما این یک اندازه روی زیرمجموعه‌های R^n به دست نمی‌دهد. همانطور که خواهیم دید، یک نتیجه از آن این است که بعدهاهای جعبه تعدادی ویژگی‌های ناخوشایند دارد، و ممکن است پرداختن به آن از لحاظ ریاضی سخت باشد.

از آنجاییکه بعد جعبه توسط پوشش به وسیله مجموعه‌های با سایز برابر تعیین می‌شود نسبت به بعد هاوسدورف برای محاسبه ساده‌تر است.

مثال ۳-۳

فرض کنید F مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد. آنگاه

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$$

محاسبه. پوشش معمولی به وسیله 2^k بازه از E_k ها با طول 3^{-k} نتیجه می‌دهد که اگر $3^{-k+1} > \delta \geq 3^{-k}$ ، آنگاه $N_\delta(F) \leq 2^k$. بنابر (۳-۵)

$$\overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

از طرف دیگر، هر بازه با طول δ که $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k-1}$ حداکثر یکی از بازه‌های پایه‌ای با طول 3^{-k} را که برای ساختن F به کار می‌رود قطع می‌کند. تعداد 2^k از چنین مجموعه‌هایی وجود دارد بنابراین حداقل 2^k بازه با طول δ برای پوشیدن F مورد نیاز است. از این رو $N_\delta(F) \geq 2^k$ که به $\overline{\dim}_B F \geq \log 2 / \log 3$ منتهی می‌شود. \square
بنابراین، حداقل برای مجموعه کانتور داریم $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$.

۳-۲ ویژگی‌ها و معایب بعد جعبه شمار

ویژگی‌های ابتدایی زیر از بعد جعبه همان ویژگی‌های بعد هاوسدورف را منعکس می‌کنند، و می‌توانند با روش‌های یکسان اثبات شوند.

(i) یک زیرمجموعه هموار m -بعدی از R^n دارای $\dim_B F = m$ می‌باشد.

(ii) $\overline{\dim}_B$ و $\underline{\dim}_B$ یکنوا هستند.

(iii) $\overline{\dim}_B$ به طور متناهی پایدار است، یعنی

$$\overline{\dim}_B (E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$$

هر چند $\underline{\dim}_B$ این طور نیست.

(iv) $\overline{\dim}_B$ و $\underline{\dim}_B$ پایدار لپیشیتس هستند، به خاطر این که اگر

$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ و F بتواند به وسیله $N_\delta(F)$ مجموعه با قطر حداکثر δ

پوشیده شود، آنگاه تعداد $N_\delta(F)$ تصویر از این مجموعه‌ها تحت f پوششی از مجموعه‌هایی

با قطر حداکثر $c\delta$ تشکیل می‌دهند، پس $\dim_B f(F) \leq \dim_B F$. به طور مشابه، بعد

جعبه تحت تبدیل‌های هولدر و دو-لپیشیتس دقیقاً مانند بعد هاوسدورف رفتار می‌کند.

اکنون وارد بحث نقطه ضعف‌های بعد جعبه شمار می‌شویم. گزاره بعدی در ابتدا جذاب به

نظر می‌رسد، اما نتایج نا مطلوبی دارد.

گزاره ۳-۴

فرض کنید \overline{F} نمایش بستار F باشد (یعنی کوچکترین زیرمجموعه بسته از R^n که شامل F است). آنگاه

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F$$

۹

$$\overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F$$

برهان. فرض کنید B_1, \dots, B_k یک گردابه متناهی از گوی‌های بسته با شعاع δ باشد. اگر مجموعه بسته $\bigcup_{i=1}^k B_i$ شامل F باشد، شامل \overline{F} نیز هست. از این رو کمترین تعداد از گوی‌های بسته با شعاع δ که F را می‌پوشانند برای پوشاندن مجموعه بزرگ‌تر \overline{F} کافی است، و نتیجه به دست می‌آید. \square

یک نتیجه فوری این است که اگر F یک زیرمجموعه چگال از یک ناحیه باز از R^n باشد آنگاه $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$. برای نمونه، فرض کنید F مجموعه (شمارا) از اعداد گویای بین صفر و یک باشند. آنگاه \overline{F} همه بازه $[0,1]$ است، به طوریکه $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 1$. بنابراین مجموعه‌های شمارا می‌توانند بعد جعبه غیر صفر داشته باشند. به علاوه، بعد جعبه شمار هر عدد گویا که به عنوان مجموعه تک نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شود به وضوح صفر است، اما اجتماع شمارا از این مجموعه‌های تک بعد ۱ دارد. در نتیجه، در حالت کلی تساوی $\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_i \dim_B F_i$ برقرار نیست.

این موضوع به میزان زیادی مفید بودن بعد جعبه را محدود می‌کند - معرفی یک مجموعه کوچک از نقاط، یعنی شمارا، می‌تواند کار بعد جعبه را یکسره کند. با محدود کردن دامنه بحث به مجموعه‌های بسته، می‌توان امیدی به نجات داشت، اما مشکلات همچنان باقی می‌مانند.

مثال ۳-۵

مجموعه $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ فشرده بوده و $\underline{\dim}_B F = \frac{1}{2}$ است.

محاسبه. اگر $|U| = \delta < \frac{1}{2}$ و k عددی صحیح با خاصیت $1/(k-1)k > \delta \geq 1/k(k+1)$ باشد آنگاه U می‌تواند حداکثر یکی از نقاط $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\}$ را بپوشاند. بنابراین حداقل k مجموعه با قطر δ برای پوشاندن F مورد نیاز است، در نتیجه

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

با فرض $\delta \rightarrow 0$ نتیجه می‌گیریم که $\underline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$ از سوی دیگر، اگر $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ، k را طوری بگیریم که $\frac{1}{k(k+1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$. آنگاه با جا گذاشتن $(k-1)$ نقطه از F که با $(k-1)$ بازه دیگر می‌توانند پوشیده شوند، $(k+1)$ بازه با طول δ ، $[0, 1/k]$ را می‌پوشانند. از این رو

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(2k)}{\log k(k-1)}$$

که ایجاب می‌کند که

$$\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}. \quad \square$$

هیچ کس به این مجموعه که تمام نقاط آن به جز یکی تنها هستند به عنوان یک فرکتال نگاه نمی‌کند؛ با وجودی که بعد جعبه آن یک عدد کسری است.

با این وجود، به همان میزان راحت بودن در محاسبات، بعد جعبه از لحاظ نظری بسیار مفید است. اگر، همانطور که اغلب اتفاق می‌افتد، بتوانیم نشان دهیم که یک مجموعه بعدهای جعبه و هاوسدورف مساوی دارد، تاثیر متقابل این تعریف‌ها می‌تواند همواره نتیجه‌ای درخور توجه به همراه داشته باشد.

*۳-۳ بعد جعبه شمار تعدیل شده

روش‌هایی برای غلبه بر مشکلات بعد جعبه که در فصل قبل خلاصه شد وجود دارد. به هر حال، این روش‌ها تا زمانی که همه مشکلات محاسبه مربوط به بعد هاوسدورف و دیگر بعدها را از خود نشان می‌دهند برای کاربر جذاب نخواهند بود.

اگر F زیرمجموعه‌ای از R^n باشد، برای تجزیه F به تعدادی شمارا از قطعه‌های F_1, F_2, \dots به روشی که بزرگ‌ترین قطعه کوچک‌ترین بعد ممکن را داشته باشد تلاش می‌کنیم. این اندیشه به بعدهای جعبه شمار تعدیل شده زیر ختم می‌شود:

$$(۱۸-۳) \quad \underline{\dim}_{MB} F = \inf \left\{ \sup_i \underline{\dim}_B F_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}$$

$$(۱۹-۳) \quad \overline{\dim}_{MB} F = \inf \left\{ \sup_i \overline{\dim}_B F_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}.$$

(در هر دو حالت اینفیمم روی همه پوشش‌های شمارش‌پذیر ممکن $\{F_i\}$ از F گرفته می‌شود.) به وضوح $\underline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_B F$ و $\underline{\dim}_{MB} F \leq \underline{\dim}_B F$ و $\underline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_B F$ به هر حال اگر F شمارا باشد داریم $\underline{\dim}_{MB} F = \overline{\dim}_B F = 0$ - کافی است F_i ها را مجموعه‌های تک عنصری بگیرید. به علاوه برای هر زیرمجموعه F از R^n ،

$$(۲۰-۳) \quad 0 \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_B F \leq \underline{\dim}_B F \leq n.$$

به سادگی می‌توان دید که $\underline{\dim}_{MB}$ و $\overline{\dim}_B$ مجدداً همه ویژگی‌های مطلوب یک بعد را از خود نشان می‌دهند، اما در محاسبه می‌توانند مشکل باشند. به هر حال یک آزمون مفید برای مجموعه‌های فشرده وجود دارد که چه موقع بعدهاى جعبه تعدیل شده و جعبه معادل دارند. این آزمون برای مجموعه‌هایی که "به طور ابعادی همگن" توصیف می‌شوند، به کار برده می‌شود.

گزاره ۳-۶

فرض کنید $F \subset R$ فشرده باشد. فرض کنید به ازای هر مجموعه باز V که F را قطع می‌کند

$$(۲۱-۳) \quad \overline{\dim}_B(F \cap V) = \overline{\dim}_B F$$

آنگاه $\overline{\dim}_B F = \underline{\dim}_{MB} F$. نتیجه‌ای مشابه برای بعد جعبه شمار پایینی برقرار است. برهان. فرض کنید $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ که هر F_i بسته است. صورتی از قضیه رسته بئر (که در هر متنی در مورد توپولوژی عمومی یافت می‌شود، و ما آن را بدون برهان بازگو می‌کنیم) بیان می‌کند که یک اندیس i و یک مجموعه باز $V \subset R^n$ وجود دارد به طوری که $F \cap V \subset F_i$. به ازای این i ، $\overline{\dim}_B F_i = \overline{\dim}_B F$ ، با استفاده از (۳-۱۹) و گزاره ۳-۴

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_{MB} F &= \inf \left\{ \sup \overline{\dim}_B F_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \text{ که } F_i \text{ ها مجموعه‌های بسته هستند} \right\} \\ &\geq \overline{\dim}_B F. \end{aligned}$$

عکس نامعادله در (۳-۲۰) گنجیده است. بحثی مشابه برای بعد پایینی برقرار است. □
به عنوان یک کاربرد فرض کنید که F یک مجموعه بسته با درجه‌ای بالا از خود - تشابهی باشد، مثلاً مجموعه یک سوم میانی کانتور یا منحنی ون کخ. اگر V مجموعه‌ای باز باشد که F را قطع می‌کند، آنگاه $F \cap V$ شامل یک کپی مشابه هندسی از F است که باید بعد بالایی جعبه برابر با آنچه برای F است داشته باشد، طوری که (۳-۲۱) برقرار شود.

۳-۴ بعد و اندازه بسته‌بندی^۱

برخلاف بعد هاوسدورف، بعدهای جعبه یا بعدهای جعبه تعدیل شده بر حسب اندازه‌ها تعریف شده‌اند، و این می‌تواند اشکالاتی در توسعه نظری آنها نمایان کند. با این وجود، تدابیر بخش قبلی می‌تواند به روشی کامل شود که حداقل از لحاظ ریاضی زیبا باشد. به یاد آورید که بعد هاوسدورف می‌تواند با استفاده از پوشش‌های صرفه جویانه به وسیله گوی‌های کوچک تعریف شود (۲-۱۶) در حالیکه \dim_B را می‌توان با استفاده از پوشش‌های صرفه جویانه به وسیله گوی‌های کوچک با شعاع برابر تعریف شوند (تعریف معادل ۳-۱۱) از طرف دیگر می‌توان \dim_B را به عنوان یک بعد که به بسته بندی‌ها به وسیله گوی‌های مجزا با شعاع برابر که تا اندازه ممکن چگال هستند مربوط است در نظر گرفت (تعریف معادل ۳-۱۱). بنابراین طبیعی است که به جستجوی یک بعد که بر حسب بسته بندی‌های چگال به وسیله گوی‌های مجزا با شعاع‌های متفاوت کوچک می‌باشد بپردازیم.

سعی می‌کنیم که الگوی تعریف بعد و اندازه هاوسدورف را دنبال کنیم. فرض کنید

$$(۲۲-۳) \quad P_\delta^s(F) = \sup \left\{ \sum_i |B_i|^s : \right.$$

$\left. \{B_i\} \text{ گردایه‌ای از گوی‌های مجزا با شعاع حداکثر } \delta \text{ با مراکز در } F \text{ است} \right\}$

از آنجاییکه $P_\delta^s(F)$ با کاهش δ کاهش می‌یابد حد

$$(۲۳-۳) \quad P_0^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} P_\delta^s(F)$$

وجود دارد. در این نقطه با مسائلی که برای بعد جعبه شمار مواجه شدیم برخورد می‌کنیم. با در نظر گرفتن مجموعه‌های چگال شمارا به سادگی می‌توان دید که $P_0^s(F)$ یک اندازه نیست. بنابراین تعریف را به

$$(۲۴-۳) \quad P^s(F) = \inf \left\{ \sum_i P_0^s(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}.$$

تغییر می‌دهیم. می‌توان نشان داد که $P^s(F)$ یک اندازه روی R^n است، که به اندازه s -بعدی بسته بندی معروف می‌باشد. می‌توانیم بعد بسته بندی را به روشی مشابه تعریف کنیم:

$$(۲۵-۳) \quad \dim_p F = \sup \{s : P^s(F) = \infty\} = \inf \{s : P^s(F) = 0\}.$$

ساختار اساسی اندازه مستلزم آن است که برای یک گردایه شمارا از مجموعه‌های $\{F_i\}$

^۱ packing

$$(۲۶-۳) \quad \dim_p \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_i \dim_p F_i$$

از آنجاییکه اگر به ازای هر i ، $s > \dim_H F_i$ آنگاه $P^s(F_i) = 0$ و $P^s(\bigcup_i F_i) \leq \sum_i P^s(F_i) = 0$ و $\dim_p(\bigcup_i F_i) \leq s$.

اکنون رابطه بعد بسته بندی را با تعاریف دیگر از بعد بررسی می‌کنیم و این حقیقت شگفت آور را اثبات می‌کنیم که بعد بسته بندی دقیقاً با بعد بالایی جعبه تعدیل شده یکسان می‌باشد.

لم ۷-۳

$$(۲۷-۳) \quad \dim_p F \leq \overline{\dim}_B F.$$

برهان. هر t و s را که $t < s < \dim_p F$ انتخاب کنید. آنگاه $P^s(F) = \infty$ ، پس $P_0^s(F) = \infty$. بنابراین، به ازای $0 < \delta \leq 1$ ، گوی‌های مجزای $\{B_i\}$ با شعاع حداکثر δ و با مراکز در F وجود دارند، به طوری که $1 < \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s$. فرض کنید که، به ازای هر k ، تعداد n_k از این گوی‌ها در $2^{-k-1} < |B_i| \leq 2^{-k}$ صدق کنند؛ آنگاه

$$(۲۸-۳) \quad 1 < \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks}$$

باید یک k که $n_k > 2^{kt}(1-2^{t-s})$ وجود داشته باشد، در غیر این صورت (۲۸-۳) به وسیله مجموع یک سری هندسی نقض می‌شود. این n_k گوی همه شامل گوی‌هایی با شعاع $\delta \leq 2^{-k-2}$ با مراکز در F می‌باشند. از این رو اگر $N_{\delta}(F)$ بیشترین تعداد گوی‌های مجزا با شعاع δ با مراکز در F باشد، آنگاه

$$N_{2^{-k-2}}(F)(2^{-k-2})^t \geq n_k (2^{-k-2})^t > 2^{-2t}(1-2^{t-s})$$

که $\delta < 2^{-k-2}$ این نتیجه می‌دهد که $\lim_{\delta \rightarrow 0} N_{\delta}(F)\delta^t > 0$ پس $\overline{\dim}_B F \geq t$. این

برای هر $t < \dim_p F$ درست است، بنابراین (۲۷-۳) نتیجه می‌شود. □

گزاره ۸-۳

اگر $F \subset \mathbb{R}^n$ آنگاه $\dim_p F = \overline{\dim}_{MB} F$.

برهان. اگر $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ ، آنگاه، به واسطه (۲۶-۳) و (۲۷-۳)،

$$\dim_p F \leq \sup_i \dim_p F_i \leq \sup_i \overline{\dim}_B F_i.$$

اکنون تعریف (۳-۱۹) ایجاب می‌کند که $\overline{\dim}_{MB} F \leq \dim_p F$ برعکس، اگر $\dim_p F > s$ آنگاه $P^s(F) = 0$ ، بنابراین از (۳-۲۴) نتیجه می‌شود که $F \subset \bigcup_i F_i$ برای یک گردایه از مجموعه‌های F_i که به ازای هر i ، $P_0^s(F_i) < \infty$ ، از این رو، به ازای هر i ، اگر δ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه $P_\delta^s(F_i) < \infty$ ، پس با توجه به (۳-۲۲)، چنانچه $\delta \rightarrow 0$ ، $N_\delta(F_i)\delta^s$ کراندار است، جاییکه $N_\delta(F_i)$ بیشترین تعداد گوی‌های مجزا با شعاع δ و مراکز در F_i است. بنابراین به ازای هر i ، $\overline{\dim}_B F_i \leq s$ که با توجه به (۳-

۱۹)، آنگونه که می‌خواستیم، نتیجه می‌دهد که $\overline{\dim}_{MB} F \leq s$.
 □ تاکنون روابط زیر را به دست آورده ایم:

$$(۳-۲۹) \quad \dim_H F \leq \underline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_{MB} F = \dim_p F \leq \overline{\dim}_B F.$$

مثال‌های مناسبی نشان می‌دهند که هیچ یک از نا معادله‌ها نمی‌توانند با تساوی عوض شوند. همانند بعد هاوسدورف، بعد بسته بندی استفاده از تکنیک‌های نظری قدرتمند نظریه اندازه را برای مطالعه آن مجاز می‌سازد. معرفی اخیر از اندازه بسته بندی ما را به شناخت بیشتری از نظریه اندازه هندسی فرکتال‌ها رهنمون می‌سازد و اندازه‌های بسته بندی در بسیاری از جنبه‌ها به روشی که "دوگان" اندازه هاوسدورف است رفتار می‌کنند. با وجود این، کسی نمی‌تواند مدعی شود که بعدها و اندازه‌های بسته بندی برای کار کردن یا محاسبه ساده هستند؛ گام اضافی (۳-۲۴) در تعریف آنها، آنها را در استفاده بسیار سخت‌تر از مشابه هاوسدورف آنها می‌سازند.

این وضعیت به وسیله برابری بعد بسته بندی و بعد بالایی تعدیل شده جعبه تا اندازه‌ای بهبود می‌یابد. این موضوع به طور قابل ملاحظه‌ای برای مجموعه‌های فشرده با بعد موضعی ثابت سرتاسری، بهبود می‌یابد - وضعیتی که اغلب در عمل، به ویژه در مجموعه‌هایی با نوعی از خود-تشابهی، روی می‌دهد.

نتیجه ۳-۹

فرض کنید $F \subset R^n$ فشرده باشد به طوریکه برای هر مجموعه باز V که F را قطع می‌کند داشته باشیم،

$$(۳-۳۰) \quad \overline{\dim}_B(F \cap V) = \overline{\dim}_B F$$

آنگاه $\dim_p F = \overline{\dim}_B F$

□ برهان. این نتیجه فوری از گزاره‌های ۳-۶ و ۳-۸ است.

البته بهترین حالت، در مورد فرکتال‌هایی با ابعاد بالایی جعبه و هاوسدورف مساوی اتفاق می‌افتد، و در این حالت تساوی در سرتاسر (۳-۲۹) برقرار است — تعداد زیادی از چنین مثال‌هایی را بعدها خواهیم دید. به هر حال، حتی شرط خیلی ضعیف‌تر $\dim_H F = \dim_p F$ ، هر چند گاهی اثبات آن مشکل است، تحلیل F را ساده می‌کند.

۳-۵ چند تعریف دیگر از بعد

تعاریف متنوع دیگری از بعد مطرح شده‌اند، بسیاری از آنها قابلیت استفاده محدودی دارند، اما به هر حال در زمینه خودشان مفید هستند.

شکل خاص منحنی‌ها به چندین تعریف از بعد منجر می‌گردد. یک منحنی یا منحنی ژوردان C تصویر یک بازه $[a, b]$ تحت یک دوسویی پیوسته $f: [a, b] \rightarrow R^n$ است. (بنابراین، توجه خود را به منحنی‌هایی که خود-قطعی ندارند محدود می‌کنیم.) اگر C یک منحنی باشد و $\delta > 0$ ، $M_\delta(C)$ را ماکزیمم تعداد نقاط x_0, x_1, \dots, x_m روی منحنی C تعریف می‌کنیم، به طوری‌که به ازای $k = 1, 2, \dots, m$ ، $|x_k - x_{k-1}| = \delta$. بنابراین می‌توان $(M_\delta(C) - 1)\delta$ را به عنوان "طول" منحنی C در نظر گرفت که با استفاده از یک خط کش غیرمدرج با طول ثابت δ اندازه‌گیری شده است. بعد خط کش به صورت

$$(۳-۳) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(C)}{-\log \delta}$$

تعریف می‌شود در صورتی که این حد موجود باشد (در غیر این صورت با استفاده از حدود بالایی و پایینی می‌توانیم بعدهای خط کش بالایی و پایینی را تعریف کنیم). به سادگی می‌توان دید که بعد خط کش یک منحنی حداقل برابر بعد جعبه است (با این فرض که هر دو وجود دارند) و در نمونه‌های خود-متشابه ساده، مانند منحنی ون کخ، برابر هستند. این ادعا که خط ساحلی بریتانیا بعد 1.2 دارد ساخته و پرداخته در نظر گرفتن بعد خط کش می‌باشد - این مقدار تجربی از تخمین نسبت موجود در (۳-۳) برای مقادیر δ بین حدود $20m$ و $200km$ به دست می‌آید.

نسخه‌ای از بعد هاوسدورف می‌تواند برای منحنی‌ها با استفاده از بازه‌هایی از خود منحنی‌ها به عنوان مجموعه‌های پوششی تعریف شود. برای این منظور به

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^m |f[t_{i-1} - t_i]|^s \right\}$$

نگاه می‌کنیم که اینفیمم روی همه برش‌های $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ گرفته می‌شود به طوری که قطرهای $|f[t_{i-1} - t_i]|$ حداکثر δ هستند. فرض می‌کنیم δ به صفر میل کند و آن مقدار s را که در آن حد از ∞ به 0 جهش دارد به عنوان بعد در نظر می‌گیریم. برای مثال‌های خود - متشابه مانند منحنی ون کخ، این مقدار برابر بعد هاوسدورف است، اما برای منحنی‌های "مچاله شده"، مانند نمودارهای برخی توابع (فصل ۱۱ را ببینید) می‌توانیم به مقدار نسبتاً بزرگ‌تر برسیم.

گاهی، علاقمند به بعد یک فرکتال F که مرز یک مجموعه A است می‌باشیم. می‌توانیم بعد جعبه F را به روش معمولی تعریف کنیم، اما گاهی مفید است که تفاوت میان A و مکمل آن را مورد توجه خاص قرار دهیم. بنابراین نسخه زیر از "ظرفیت s - بعدی" تعریف بعد جعبه نیز مفید می‌باشد، که در آن حجم مجموعه نقاط داخل δ -بدنه از F که در A هستند را در نظر می‌گیریم. بعد یک طرفه مرز F از یک مجموعه A در R^n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(۳۲-۳) \quad n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta \cap A)}{\log \delta}$$

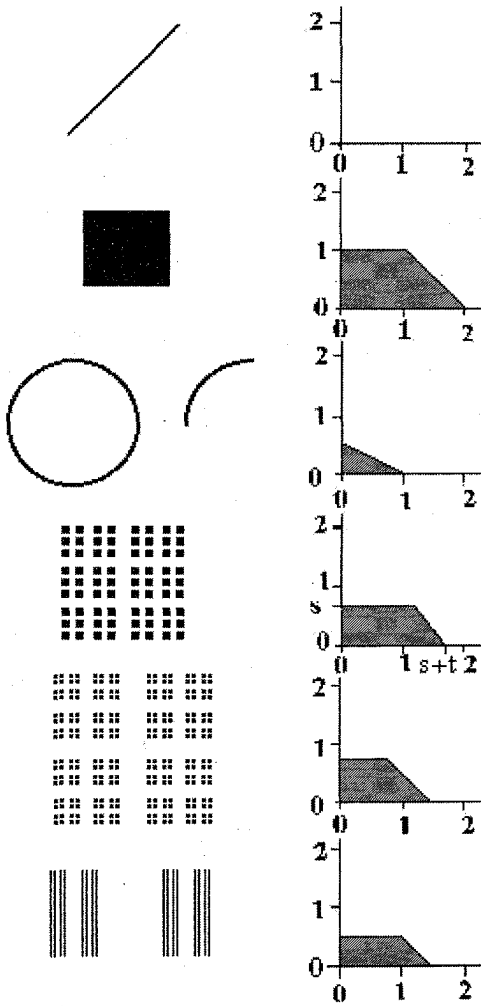
که F_δ بدنه δ -موازی F می‌باشد (گزاره ۳-۲ را مقایسه کنید). این تعریف کاربردهایی در فیزیک رویه جامداتی دارد که مطالعه پوسته سطحی آنها حائز اهمیت است و همچنین در معادلات دیفرانسیل جزئی در دامنه‌هایی با مرز فرکتالی کاربردهایی دارد.

گاهی مناسب است بعد را بر حسب مکمل یک مجموعه تعریف کنیم. فرض کنید F با برداشتن دنباله‌ای از بازه‌های I_1, I_2, \dots ، از، مثلاً، بازه $[0, 1]$ به دست آمده باشد، همچنانکه، برای مثال، در ساختن مجموعه کانتور از این روش استفاده می‌شود. می‌توانیم بعد را عددی مانند s_0 تعریف کنیم به طوری که سری

$$(۳۳-۳) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|^s$$

برای $s < s_0$ همگرا و برای $s > s_0$ واگراست.

برای مجموعه یک سوم میانی کانتور، این سری $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} 3^{-ks}$ می‌باشد، که $s_0 = \log 2 / \log 3$ همان بعدهای جعبه و هاوسدورف را در این حالت می‌دهد. در حالت کلی، s_0 برابر بعد جعبه بالایی F می‌باشد.



پاره خط مستقیم

مربع توپر

محیط دایره یا
کمان دایره‌ای

حاصلضرب مجموعه‌های
کانتور یکنواخت با بعدهای
هاوسدورف s و t که $s \leq t$
(مثال ۴-۴ را ببینید).

مجموعه "غبار مانند" با بعد
هاوسدورف ۱.۵ که از حاصلضرب
دو مجموعه کانتور یکنواخت با
بعدهای $\frac{3}{4}$ به دست آمده است.

مجموعه "لایه لایه" با بعد هاوسدورف
۱.۵ که از حاصلضرب یک مجموعه
کانتور یکنواخت با بعد $\frac{1}{2}$ و یک پاره خط
به دست آمده است

شکل ۳-۳ انتخابی از اثر بعد مجموعه‌های مسطح

اثر بعدها تنوع جالبی روی بعدهای هاوسدورف با ماهیتی نسبتاً متفاوت به وجود می‌آورد. اثر بعد می‌تواند به عنوان نوعی از "اثر انگشت" در نظر گرفته شود که ما را قادر می‌سازد تا مجموعه‌هایی با خصوصیات متفاوت را از هم باز شناسیم، هر چند که بعدهای هاوسدورف یکسانی داشته باشند. به خصوص اثر بعد ویژگی‌های غیر همسانگرد یک مجموعه را منعکس می‌کند.

توجه خود را به زیرمجموعه‌هایی از صفحه محدود می‌کنیم، حالتی که اثر بعد نیز مسطح خواهد بود. تعریف اثر بعد مانند بعد هاوسدورف بسیار ساده است اما در این حالت از پوشش‌های مستطیلی و طول ضلع به جای قطر استفاده می‌شود. فرض کنید U یک مستطیل باشد (نیازی نیست که اضلاع آن موازی محورهای مختصات باشند) و فرض کنید $a(U) \geq b(U)$ طول اضلاع U باشند. s و t را اعدادی نامنفی بگیرید. برای F زیرمجموعه R^n ، قرار می‌دهیم:

$$H_{\delta}^{s,t}(F) = \inf \left\{ \sum_i a(U_i)^s b(U_i)^t : \text{به وسیله مستطیل‌ها می‌باشد} \right\}.$$

مطابق معمول، مانند اندازه‌های از "نوع هاوسدورف"، $H^{s,t}$ را با فرض $\delta \rightarrow 0$ به دست می‌آوریم:

$$H^{s,t}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^{s,t}(F).$$

(توجه کنید که $H^{s,0}$ دقیقاً اندازه هاوسدورف s - بعدی است.) اثر بعد F ، $print F$ ، مجموعه جفت‌های نامنفی (s,t) است که برای آنها $H^{s,t}(F) > 0$ باشد. با استفاده از ویژگی‌های استاندارد اندازه‌ها، به سادگی می‌توان دید که خاصیت‌های یکنوایی

$$(34-3) \quad \text{اگر } F_1 \subset F_2 \text{ آنگاه } print F_1 \subset print F_2$$

و پایداری شمارا

$$(35-3) \quad print \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} print F_i.$$

برقرار می‌باشند. به علاوه، اگر (s,t) نقطه‌ای در $print F$ باشد و در

$$(36-3) \quad \begin{aligned} s' + t' &\leq s + t \\ t' &\leq t \end{aligned}$$

صدق کنند آنگاه (s',t') نیز در $print F$ می‌باشد.

متأسفانه محاسبه اثر بعد ساده نیست. تعداد اندکی از مثال‌های معروف در شکل ۳-۳ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که بعد هاوسدورف یک مجموعه توسط نقطه‌ای که لبه اثر آن محور x ها را قطع می‌کند داده می‌شود.

اثر بعد تعمیم جذاب و مفیدی از اندیشه بعد هاوسدورف است. توجه کنید که چه طور اثر در دو حالت قبل بین دو مجموعه با بعد هاوسدورف (یا جعبه) $1\frac{1}{2}$ که یکی غبار-مانند است و دیگری لایه لایه شده، تفاوت ایجاد می‌کند.

یک نقطه ضعف اثر بعد که به این روش تعریف شده آن است که پایدار لپیشیتس نیست. پاره خط مستقیم و منحنی محدب هموار هم ارز دو- لپیشیتس هستند، اما اثرهای آنها متفاوت هستند. برای یک منحنی اثر بعد خمیدگی را به حساب می‌آورد. مناسب است که با تعریف دوباره $print F$ به عنوان مجموعه (s, t) هایی که برای هر تصویر دو- لپیشیتس F' از F ، $H^{s,t}(F') > 0$ ، این کار پایداری لپیشیتس اثرها را باز می‌گرداند، اما محاسبه آنها را پیچیده تر می‌کند.

البته، می‌توان اثر بعد را به وسیله مقایسه بعد جعبه نسبت به بعد هاوسدورف، با استفاده از پوشش هایی به وسیله مستطیل‌ها نیز تعریف کرد. محاسبات همچنان سخت باقی می‌مانند.

۳-۶ نکات و منابع

تعاریف متفاوت بسیاری از "بعد فرکتالی" در متون ریاضی ارائه شده‌اند. ردیابی منشأ بعد جعبه مشکل به نظر می‌رسد — مسلم به نظر می‌آید که بعد جعبه باید توسط اکتشاف کنندگان بعد و اندازه هاوسدورف مورد توجه قرار گرفته باشد، و از آنجاکه از نظر ریاضی کم‌تر رضایت‌بخش بوده احتمالاً باید در ابتدا ندیده گرفته شده باشد. *Bouligand* در ۱۹۲۸ مفهوم محتوای مینکوفسکی را به ابعاد ناصحیح تعمیم داد، و تعریف کنونی بعد جعبه توسط *Pontrjagin* و *Schnirelman* در ۱۹۳۲ داده شده است.

اندازه‌ها و ابعاد بسته‌بندی خیلی جدیدتر هستند و توسط *Tricot* (۱۹۸۲) معرفی شدند. تشابه‌ها و تفاوت‌های آنها با ابعاد و اندازه‌های هاوسدورف یک ابزار نظری مهم را ایجاد نموده است.

اثرهای بعد یک ابداع جدید از *Rogers* (۱۹۸۸) می‌باشد.

تمرین‌ها

۱-۳ فرض کنید $f: F \rightarrow R^n$ یک تابع لپیشیتس باشد. نشان دهید که
 $\overline{\dim}_B f(F) \leq \overline{\dim}_B F$ و $\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F$

۲-۳ مستقیماً با استفاده از تعاریف تحقیق کنید که تعاریف معادل ۱-۳ (i) و (iii) برای بعد جعبه مقادیر یکسانی می‌دهند.

۳-۳ فرض کنید F شامل آن اعدادی در $[0,1]$ باشد که بسط اعشاری آنها شامل رقم ۵ نباشد. مقدار $\dim_B F$ را بیابید که نشان می‌دهد این بعد وجود دارد.

- ۴-۳ تحقیق کنید که مجموعه نشان داده شده در شکل ۴-۰ دارای بعد جعبه ۱ است.
- ۵-۳ با استفاده از تعریف معادل ۱-۳ (iv) بررسی کنید که بعد بالایی جعبه برای منحنی ون کخ حداکثر $\log 4 / \log 3$ است و از ۱-۳ (v) برای بررسی اینکه بعد پایینی جعبه حداقل برابر این مقدار است استفاده کنید.
- ۶-۳ از بخش‌های ساده تعریف معادل ۱-۳ برای یافتن بعد جعبه بادبان بند سیرپینسکی استفاده کنید.
- ۷-۳ فرض کنید F مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد. به ازای $0 < \delta < 1$ طول بدنه δ - موازی F_δ از F را بیابید. سپس بعد جعبه F را با استفاده از گزاره ۲-۳ بیابید.
- ۸-۳ یک مجموعه F بسازید که برای آن $\overline{\dim}_B F < \underline{\dim}_B F$. (راهنمایی: تغییری روی ساختار مجموعه یک سوم میانی کانتور را به این صورت در نظر بگیرید که هر بازه در E_{k-1} شامل دو بازه مساوی از E_k باشد. برای این بازه‌ها ترتیبی دهید که به ازای $k = 1, \dots, k_1$ "بلند"، به ازای $k = k_1 + 1, \dots, k_2$ "کوتاه"، به ازای $k = k_2 + 1, \dots, k_3$ "بلند"، و به همین ترتیب، باشند.)
- ۹-۳ زیرمجموعه‌های E و F از R را بیابید به طوری که
- $$\underline{\dim}_B (E \cup F) > \max \{ \underline{\dim}_B E, \underline{\dim}_B F \}$$
- ۱۰-۳ بعد جعبه و هاوسدورف مجموعه $\{0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\}$ چیست؟
- ۱۱-۳ دو زیرمجموعه بورل جدا از هم E و F از R بیابید به طوری که
- $$P_0^s (E \cup F) \neq P_0^s (E) + P_0^s (F)$$
- ۱۲-۳ بعد بسته بندی منحنی ون کخ چیست؟
- ۱۳-۳ نشان دهید که بعد خط کش یک منحنی (۳-۳) بزرگ‌تر یا مساوی بعد جعبه آن است، با فرض آنکه هر دو وجود داشته باشند.
- ۱۴-۳ فرض کنید $0 < \lambda < 1$ و فرض کنید F "مجموعه λ میانی کانتور" باشد که به وسیله حذف‌های مکرر میانی به نسبت λ از بازه‌ها به دست می‌آید. نشان دهید که بعد F که به وسیله (۳-۳) بر حسب بازه‌های حذف شده تعریف شده است برابر با ابعاد جعبه و هاوسدورف F می‌باشد.
- ۱۵-۳ ویژگی‌های (۳-۳) - (۳-۳) از اثر بعد را تحقیق کنید. مثالی از یک مجموعه با اثر بعد نامحدوب ارائه کنید.

فصل ۴ شیوه‌هایی برای محاسبه ابعاد

کوشش برای محاسبه ابعاد، به ویژه بعد هاوسدورف، برای بسیاری مجموعه‌ها، خواننده را از محدودیت‌های عملی کار کردن با تعاریف آگاه می‌کند. این محاسبات سخت اغلب شامل صفحه‌ها تخمین و دستکاری‌های پیچیده می‌باشد که روشن فکری شهودی مختصری نیز لازم دارد.

در این فصل بعضی از روش‌های اساسی را که برای محاسبات بعد در دسترس هستند، می‌آوریم. روش‌های دیگر که بیشتر در حالت‌های خاص قابل استفاده هستند، در جای‌جای کتاب یافت می‌شوند.

۴-۱ روش‌های اساسی

برای بیشتر فرکتال‌ها تخمین بالایی "بدیهی" بعد می‌تواند با استفاده از پوشش‌های معمولی به وسیله مجموعه‌های کوچک به دست آید.

گزاره ۴-۱

فرض کنید بتوانیم F را به وسیله n_k مجموعه با قطر حداکثر δ_k بپوشانیم به طوری که اگر $k \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\delta_k \rightarrow 0$. در این صورت

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

و، اگر $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ برای یک $0 < c < 1$ ، آنگاه

$$\overline{\dim}_B F \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}.$$

به علاوه، اگر $n_k \delta_k^s$ هنگامی که $k \rightarrow \infty$ کراندار بماند، آنگاه $H^s(F) < \infty$ به برهان. نامعادلات برای بعد جعبه شمار نتیجه فوری از تعاریف هستند. برای قسمت آخر، $H_{\delta_k}^s(F) \leq n_k \delta_k^s$ ، بنابراین $H_{\delta_k}^s(F)$ هنگامی که $k \rightarrow \infty$ به یک حد متناهی $H^s(F)$ میل می‌کند. \square

بنابراین، همانطور که قبلاً دیده ایم (مثال ۲-۷)، در حالت مجموعه یک سوم میانی کانتور پوشش‌های معمولی از 2^k بازه با طول 3^{-k} ، تخمین بالایی $\dim_H F \leq \log 2 / \log 3$ را می‌دهد.

شگفت آور است که غالباً کران بالایی "بدیهی" برای بعد هاوسدورف یک مجموعه، مقدار واقعی آن از کار در می‌آید. به هر حال، اثبات کردن این مطلب می‌تواند مشکل باشد. برای به دست آوردن یک کران بالا کفایت که مجموع‌های به شکل $\sum |U_i|^s$ را برای پوشش‌های خاص $\{U_i\}$ از F ، بسنجیم، در صورتیکه برای یک کران پایین باید نشان دهیم که به ازای هر δ - پوشش F ، $\sum |U_i|^s$ از یک ثابت مثبت بزرگتر است. به وضوح شمار زیادی از چنین پوشش‌هایی موجود است. به ویژه، هنگام کار کردن با بعد هاوسدورف بر خلاف بعد جعبه، باید به پوشش‌هایی که بعضی از U_i ها قطر بسیار کوچک و بقیه قطر نسبتاً بزرگی دارند نگاه کنیم - این جست و جو تخمین پایینی برای $\sum |U_i|^s$ را از یافتن کران‌های بالا بسیار مشکل تر می‌کند.

یک راه رهایی از این مشکلات این است که نشان دهیم هیچ مجموعه U به تنهایی نمی‌تواند آنقدر از F را بپوشاند که با $|U|^s$ قابل مقایسه باشد. پس اگر $\{U_i\}$ همه F را بپوشاند مجموع $\sum |U_i|^s$ نمی‌تواند خیلی کوچک باشد. روش معمول برای انجام این کار، توزیع جرم مناسب μ روی F و مقایسه جرم $\mu(U)$ در بر گرفته شده به وسیله U با مقدار $|U|^s$ برای هر U می‌باشد. (یادآوری می‌شود که یک توزیع جرم روی F یک اندازه با محمل در F است به طوریکه $0 < \mu(F) < \infty$ ، بخش ۱-۳ را ببینید.)

قاعده توزیع جرم ۲-۴

فرض کنید μ یک توزیع جرم روی F باشد. همچنین فرض کنید که به ازای یک s اعداد $c > 0$ و $\delta > 0$ وجود دارند به طوریکه برای هر مجموعه U با $|U| \leq \delta$ ،

$$\mu(U) \leq c |U|^s \quad (۱-۴)$$

آنگاه $H^s(F) \geq \mu(F)/c$ و

$$s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

برهان. اگر $\{U_i\}$ پوششی از F باشد آنگاه

$$(۲-۴) \quad 0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$$

با گرفتن اینفیمم به دست می‌آوریم $H_\delta^s(F) \geq \mu(F)/c$. پس اگر δ به اندازه کافی کوچک باشد، داریم $H^s(F) \geq \mu(F)/c$. \square

توجه کنید که اگر μ یک توزیع جرم روی R^n و F زیرمجموعه‌ای از آن باشد نامساوی $H^s(F) \geq \mu(F)/c$ برقرار می‌ماند.

قاعده توزیع جرم ۲-۴ یک تخمین پایینی سهل‌الوصول برای بعد هاوسدورف مجموعه یک سوم میانی کانتور F به دست می‌دهد (شکل ۱-۰). فرض کنید μ توزیع جرم معمولی روی F باشد، به طوریکه هر کدام از 2^k بازه‌های پایه‌ای با طول 3^{-k} در E_k که برای ساختن F به کار می‌روند دارای جرم 2^{-k} می‌باشند. (ما تصور می‌کنیم که با جرم واحد روی E_0 شروع کرده و مکرراً جرم را روی هر بازه از E_k بین دو زیر بازه آن در E_{k+1} تقسیم می‌کنیم؛ گزاره ۷-۱ را ببینید.) فرض کنید U مجموعه‌ای با $|U| < 1$ باشد و فرض کنید k عدد صحیحی باشد به طوریکه $3^{-k} < |U| \leq 3^{-(k+1)}$. آنگاه U می‌تواند حداکثر یکی از بازه‌های E_k را قطع کند، بنابراین

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = (3^{-k})^{\log 2 / \log 3} \leq (3 |U|)^{\log 2 / \log 3}$$

و از این رو به واسطه قاعده توزیع جرم به دست می‌آوریم $H^{\log 2 / \log 3}(F) > 0$ که نتیجه می‌دهد $\dim_H F \geq \log 2 / \log 3$.

مثال ۳-۴

فرض کنید $F_1 = F \times [0,1] \subset R^2$ حاصل ضرب مجموعه یک سوم میانی کانتور F و بازه واحد $[0,1]$ باشد. آنگاه $\dim_B F_1 = \dim_H F_1 = 1 + \log 2 / \log 3 = s$ و $0 < H^s(F_1) < \infty$.

محاسبه. به ازای هر k یک پوشش از F به وسیله 2^k بازه با طول 3^{-k} وجود دارد. یک ستون از 3^k مربع با طول ضلع 3^{-k} (قطر $\sqrt{2} \cdot 3^{-k}$) بخش F_1 در بالای هر چنین بازه‌ای را می‌پوشاند. بنابراین با گرفتن همه این‌ها با هم، F_1 می‌تواند به وسیله $2^k 3^k$ مربع با ضلع 3^{-k}

پوشانده شود. در نتیجه $H_{3^{-k}\sqrt{2}}^s(F_1) \leq 3^k 2^k (3^{-k}\sqrt{2})^s = 2^{s/2}$ ، پس

$$\dim_H F_1 \leq \underline{\dim}_B F_1 \leq \overline{\dim}_B F_1 \leq s \text{ و } H^s(F_1) \leq 2^{s/2}$$

یک توزیع جرم μ روی F_1 با گرفتن توزیع جرم معمولی روی F که در بالا بحث شد (هر بازه پایه‌ای از F با ضلع 3^{-k} و جرم 2^{-k}) و "پخش کردن یکنواخت آن" در سرتاسر بازه‌های روی F ، را در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر U یک مستطیل با اضلاع موازی با محورهای مختصات، با ارتفاع h ، بالای یک بازه ابتدایی از F با ضلع 3^{-k} ، باشد، آنگاه $\mu(U) = h2^{-k}$. هر مجموعه U در یک مربع با ضلع $|U|$ با اضلاع موازی با محورهای مختصات قرار دارد. اگر $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$ آنگاه U بالای حداکثر یک بازه پایه‌ای از F با ضلع 3^{-k} قرار می‌گیرد، بنابراین

$$\mu(U) \leq |U| 2^{-k} \leq |U| 3^{-k \log 2 / \log 3} \leq |U| (3|U|)^{\log 2 / \log 3} \leq 3^{\log 2 / \log 3} |U|^s .$$

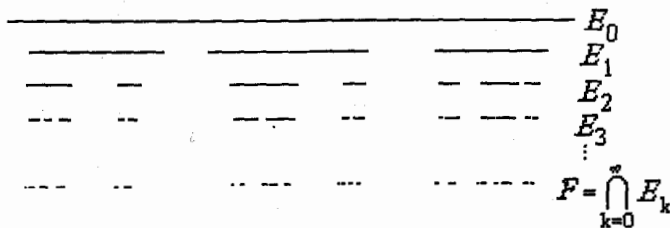
□ پس به واسطه قاعده توزیع جرم ۴-۲، داریم $H^s(F_1) > 0$.

توجه کنید که در این مثال بعد حاصل ضرب دو مجموعه برابر مجموع بعد مجموعه‌ها است. در فصل ۷ به طور عمیق‌تری این مطلب را مطالعه می‌کنیم.

روش ساختن زیر می‌تواند به عنوان یک تعمیم از روش ساختن مجموعه کانتور در نظر گرفته شود. فرض کنید $[0,1] = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ یک دنباله نزولی از مجموعه‌ها باشد، به طوری که هر E_k اجتماعی از تعدادی متناهی بازه‌های بسته جدا از هم (که بازه‌های پایه‌ای نامیده می‌شوند) و هر بازه از E_k شامل حداقل دو بازه از E_{k+1} باشد. با فرض اینکه ماکزیمم طول بازه‌ها در E_k با افزایش k به سمت صفر میل کند، مجموعه

$$(۳-۴) \quad F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$$

یک زیرمجموعه کلاً ناهمبند از $[0,1]$ است که در حالت کلی یک فرکتال است (شکل ۴-۱).



شکل ۴-۱ مثالی از ساختار کلی یک زیرمجموعه از R

کران‌های بالایی بدیهی برای بعد F با گرفتن بازه‌هایی از E_k به عنوان بازه‌های پوششی، برای هر k در دسترس هستند، اما طبق معمول یافتن کران‌های پایینی مشکل‌تر است. توجه کنید که در مثال‌های زیر، تخمین‌های بالایی برای $\dim_H F$ بستگی به تعداد و اندازه بازه‌های پایه‌ای دارد، در حالیکه تخمین‌های پایینی به فاصله بین آنها بستگی دارد. برای اینکه یکی از این تخمین‌های بالایی با یکی از این تخمین‌های پایینی برابر باشد، باید بازه‌های E_{k+1} درون بازه‌های E_k "به طور تقریباً یکنواخت" توزیع شده باشند.

مثال ۴-۴

فرض کنید s عددی اکیداً بین صفر و یک باشد. فرض کنید که E_k در ساختار کلی (۴-۳) دارای این ویژگی باشد: به ازای هر بازه پایه‌ای I از E_k ، بازه‌های I_1, \dots, I_m ($m \geq 2$) از E_{k+1} که در I هستند با طول‌های مساوی

$$(۴-۴) \quad |I_i|^s = \frac{1}{m} |I|^s \quad (1 \leq i \leq m)$$

و فاصله‌های برابر باشند. همچنین کران‌های سمت چپ I_1 و I بر هم منطبق، و نیز کران‌های سمت راست از I_m و I بر هم منطبق باشند. آنگاه $\dim_H F = s$ و $0 < H^s(F) < \infty$. (توجه کنید که m می‌تواند برای بازه‌های متفاوت I در این ساختار متفاوت باشد، در این وضعیت بازه‌های E_k نیز می‌توانند اختلاف طول فراوانی داشته باشند). محاسبه. با I و I_i به صورت فوق داریم

$$(۵-۴) \quad |I|^s = \sum_{i=1}^m |I_i|^s.$$

با به کار بردن این تساوی به طور استقرایی برای بازه‌های E_k به ازای k ‌های متوالی، نتیجه می‌گیریم که برای هر k ، $1 = \sum |I_i|^s$ ، که مجموع روی همه بازه‌های موجود در E_k گرفته می‌شود. بازه‌های E_k ، F را می‌پوشانند؛ از آنجاییکه ماکزیمم طول بازه‌ها هنگامی که $k \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند، داریم $H_\delta^s(F) \leq 1$ که برای δ به اندازه کافی کوچک نتیجه می‌دهد $H^s(F) \leq 1$.

اکنون یک جرم μ را روی F توزیع می‌کنیم طوری که هر گاه I یک بازه پایه‌ای باشد، $\mu(I) = |I|^s$. در این صورت با شروع با جرم واحد روی $[0, 1]$ و تقسیم آن به طور مساوی روی هر بازه از E_1 ، جرم روی هر یک از این بازه‌ها به طور مساوی بین هر زیربازه از E_2 تقسیم می‌شود و به همین ترتیب؛ گزاره ۷-۱ را ببینید. معادله (۵-۴) تضمین می‌کند که به یک توزیع جرم روی F می‌رسیم که برای هر بازه پایه‌ای I مقدار $\mu(I) = |I|^s$ مقدار $\mu(U)$ را برای هر

بازه U با نقاط انتهایی در F تخمین می‌زنیم. فرض کنید I کوچک ترین بازه پایه‌ای باشد که شامل U است؛ همچنین فرض کنید I یک بازه از E_k باشد و I_m, \dots, I_i بازه‌های E_{k+1} شامل در I باشند. آنگاه U تعداد $2 \leq j$ از بازه‌های I_i را قطع می‌کند، در غیر این صورت در یک بازه پایه‌ای کوچک تر قرار خواهد گرفت. فاصله گذاری میان I_i های متوالی با استفاده از (۴-۴) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} (|I| - m |I_i|) / (m - 1) &= |I| (1 - m |I_i| / |I|) / (m - 1) \\ &= |I| (1 - m^{1-1/s}) / (m - 1) \\ &\geq c_s |I| / m \end{aligned}$$

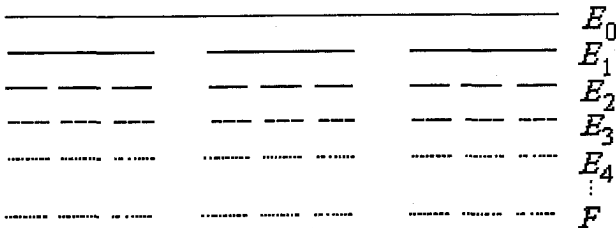
که $c_s = (1 - 2^{1-1/s})$ بنابراین

$$|U| \geq \frac{j-1}{m} c_s |I| \geq \frac{j}{2m} c_s |I|.$$

حال با توجه به (۴-۵) داریم

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq j \mu(I_i) = \frac{j}{m} |I|^s \\ (۴-۶) \quad &\leq 2^s c_s^{-s} \left(\frac{j}{m}\right)^{1-s} |U|^s \leq 2^s c_s^{-s} |U|^s. \end{aligned}$$

این نامساوی برای هر بازه U با نقاط انتهایی در F برقرار است، و بنابراین برای هر مجموعه U (با به کار بردن (۴-۶) برای کوچکترین بازه شامل $U \cap F$) برقرار است. پس به واسطه قاعده توزیع جرم ۴-۲، $H^s(F) > 0$. □



شکل ۴-۲ یک مجموعه کانتور یکنواخت (مثال ۴-۵) با $\lambda = \frac{4}{15}$ ، $m = 3$ و $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / -\log \frac{4}{15} = 0.831$

یک تخمین دقیق‌تر $\mu(U)$ در مثال ۴-۴ به $H^s(F) = 1$ منتهی می‌شود. هنگامی که m در سرتاسر روش ساختن مثال ۴-۴ ثابت گرفته شود، به مجموعه‌های به دست آمده مجموعه‌های کانتور یکنواخت می‌گوییم؛ شکل ۲-۴ را ببینید. اینها یک تعمیم معمولی از مجموعه یک سوم میانی کانتور فراهم می‌کنند.

مثال ۴-۵ مجموعه‌های کانتور یکنواخت

فرض کنید $m \geq 2$ یک عدد صحیح باشد و $0 < \lambda < 1/m$. فرض کنید مجموعه F به این روش ساخته شده باشد که هر بازه پایه‌ای I با m زیربازه با فواصل مساوی و با طول‌های برابر $\lambda |I|$ جایگزین گردد و کران‌های I منطبق بر کران‌های زیربازه‌های انتهایی باشد. آنگاه $0 < H^{\log m / -\log \lambda}(F) < \infty$ و $\dim_H F = \dim_B F = \log m / -\log \lambda$ محاسبه. مجموعه F با ثابت گرفتن m و $s = \log m / (-\log \lambda)$ در مثال ۴-۴، به دست می‌آید. در این حالت معادله (۴-۴) به صورت $(\lambda |I|)^s = (1/m) |U|^s$ در می‌آید که برای همه I ها برقرار است، بنابراین $\dim_H F = s$. برای بعد جعبه، توجه کنید که F به ازای هر k ، به وسیله m^k بازه پایه‌ای با طول λ^{-k} در E_k پوشیده می‌شود، که با محاسبه سرراست به $\dim_B F \leq \log m / -\log \lambda$ منتج می‌شود. \square

مثال بعد حالت دیگری از روش ساختن کلی می‌باشد.

مثال ۴-۶

فرض کنید که در روش ساختن کلی (۴-۳) هر بازه از E_{k-1} حداقل m_k بازه از E_k ($k = 1, 2, \dots$) را شامل شود که با بریدگی‌های با طول حداقل ε_k از هم جدا شده‌اند، و به ازای هر k ، $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$. آنگاه

$$(۷-۴) \quad \dim_H F \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \varepsilon_k)}$$

محاسبه. می‌توانیم فرض کنیم که هر مجموعه E_{k-1} دقیقاً شامل m_k بازه از E_k باشد؛ وگرنه، می‌توانیم بازه‌های اضافه را حذف کنیم تا به مجموعه‌های کوچکتر E_k و F برسیم که برای آنها چنین باشد. با اختصاص دادن یک جرم $(m_1 \dots m_k)^{-1}$ به هر یک از $m_1 \dots m_k$ بازه‌های پایه‌ای E_k از، می‌توانیم یک توزیع جرم μ روی F تعریف کنیم.

اگر U بازه‌ای باشد که $0 < |U| < \varepsilon_1$ ؛ $\mu(U)$ را تخمین می‌زنیم. فرض کنید k عدد صحیحی باشد به طوری که $\varepsilon_k \leq |U| < \varepsilon_{k-1}$. تعداد بازه‌هایی از E_k که U را قطع می‌کنند عبارتند از

(آ) حداکثر m_k چون U حداکثر یک بازه از E_{k-1} را قطع می‌کند
 (ب) حداکثر $|U|/\varepsilon_k + 1 \leq 2|U|/\varepsilon_k$ چون بین بازه‌های E_k بریدگی‌هایی با طول حداقل ε_k موجود می‌باشد. هر بازه از E_k جرم $(m_1 \dots m_k)^{-1}$ را حمل می‌کند به طوری که برای هر $0 \leq s \leq 1$ ،

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq (m_1 \dots m_k)^{-1} \min\{2|U|/\varepsilon_k, m_k\} \\ &\leq (m_1 \dots m_k)^{-1} (2|U|/\varepsilon_k)^s m_k^{1-s} \end{aligned}$$

از این رو

$$\frac{\mu(U)}{|U|^s} \leq \frac{2^s}{(m_1 \dots m_{k-1}) m_k^s \varepsilon_k^s}$$

که از بالا کراندار است مشروط بر آنکه

$$s < \lim_{k \rightarrow \infty} \log(m_1 \dots m_{k-1}) / -\log(m_k \varepsilon_k).$$

نتیجه به وسیله قاعده ۴-۲ به دست می‌آید. □

اکنون فرض کنید که در مثال ۴-۶ بازه‌های موجود در E_k همه با طول δ_k هستند، و آنکه هر بازه از E_{k-1} دقیقاً شامل m_k بازه از E_k می‌باشد، که "کم و بیش به طور مساوی فاصله گذاری شده‌اند" به این معنا که $m_k \varepsilon_k \geq c \delta_{k-1}$ ، که $c > 0$ یک ثابت است. آنگاه (۴-۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\dim_H F \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log c - \log \delta_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log \delta_{k-1}}.$$

اما E_{k-1} شامل $m_1 \dots m_{k-1}$ بازه با طول δ_{k-1} می‌باشد، بنابراین، این عبارت برابر با یک کران بالا برای $\dim_H F$ است که به وسیله گزاره ۴-۱ داده شده است. در وضعیتی که بازه‌ها به خوبی فاصله گذاری شده‌اند، در (۴-۷) به تساوی می‌رسیم.

مثال‌هایی به شکل زیر در نظریه اعداد اتفاق می‌افتند؛ بخش ۳-۱۰ را ببینید.

مثال ۴-۷

فرض کنید $0 < s < 1$ ثابت باشد و n_1, n_2, \dots یک دنباله به سرعت صعودی از اعداد صحیح باشد، یعنی برای هر k ، $n_{k+1} \geq \max\{n_k^k, 3n_k^{1/s}\}$. برای هر k فرض کنید $H_k \subset R$ شامل

بازه‌های با طول‌های یکسان $n_k^{-1/s}$ باشد به طوری که فاصله نقاط میانی بازه‌های متوالی (که) جدا از هم هستند) برابر n_k^{-1} باشد. آنگاه $\dim_H F = \dim_B F = s$ ، که $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_k$.

محاسبه. از آنجاییکه برای هر k ، $F \subset H_k$ ، مجموعه $F \cap [0,1]$ در حداکثر $n_k + 1$ بازه با طول $n_k^{-1/s}$ قرار می‌گیرد، گزاره ۴-۱ نتیجه می‌دهد

$$\overline{\dim}_B(F \cap [0,1]) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \log(n_k + 1) / -\log n_k^{-1/s} = s$$

به طور مشابه، برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، $\overline{\dim}_B(F \cap [n, n+1]) \leq s$ ، بنابراین F ، به عنوان یک اجتماع شمارا از چنین مجموعه‌هایی، دارای $\overline{\dim}_B F \leq s$ می‌باشد.

حال فرض کنید $E_0 = [0,1]$ و به ازای $k \geq 1$ ، فرض کنید E_k شامل بازه‌هایی از H_k باشد که کاملاً در E_{k-1} قرار می‌گیرند. آنگاه هر بازه I از E_{k-1} شامل حداقل تعداد $2 \geq 1 - n_k n_{k-1}^{-1/s} - 1 \geq 2$ بازه n_k از E_k می‌باشد، که به وسیله بریدگی‌هایی با حداقل طول $n_k^{-1/s} - n_{k-1}^{-1/s} \geq \frac{1}{2} n_k^{-1}$ از هم جدا می‌شوند به شرطی که k به اندازه کافی بزرگ باشد. با استفاده از مثال ۴-۶ و با توجه به اینکه عوض کردن $1 - n_k n_{k-1}^{-1/s}$ با $n_k n_{k-1}^{-1/s}$ روی حد تاثیر نمی‌گذارد، داریم

$$\begin{aligned} \dim_H F &\geq \dim_H \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log((n_1 \dots n_{k-2})^{1-1/s} n_{k-1})}{-\log(n_k n_{k-1}^{-1/s} \frac{1}{2} n_k^{-1})} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(n_1 \dots n_{k-2})^{1-1/s} + \log n_{k-1}}{\log 2 + (\log n_{k-1})/s} \end{aligned}$$

مشروط بر آنکه n_k با سرعت کافی صعودی باشد، جملات در $\log n_{k-1}$ در صورت و مخرج این عبارت غالب هستند، در نتیجه $\dim_H F \geq s$ ، و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

□

هر چند که قاعده توزیع جرم ۴-۲ بر اساس یک ایده ساده بیان شده است، دیدیم که می‌تواند در یافتن ابعاد جعبه و هاوسدورف بسیار مفید باشد. اکنون چند نسخه مهم دیگر از این روش را توسعه می‌دهیم.

برای برقراری شرط (۴-۱) کافی است که تمام گوی‌های به اندازه کافی کوچک را در نظر بگیریم که مراکز آنها در مجموعه F می‌باشند. این موضوع در گزاره ۴-۹ (آ) بیان شده است. هر چند شیوه‌های توزیع جرم برای کران‌های بالا کمتر لازم می‌شوند، قسمت (ب) را به حساب می‌آوریم زیرا از دیدگاهی، دوگان قسمت (آ) می‌باشد. توجه کنید که عبارات بیان شده بر

حسب چگالی‌ها مانند $\lim_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^s$ نقش عمده‌ای را در مطالعه ویژگی‌های موضعی فرکتالها بازی می‌کنند - فصل ۵ را ببینید. (به یاد آورید که $B_r(x)$ گوی بسته با مرکز x و با شعاع r است.)

لم پوششی زیر را در برهان گزاره ۴-۹ (ب) نیاز داریم.

لم پوششی ۴-۸

فرض کنید C یک گردایه از گوی‌ها باشد که در ناحیه کرانداری از R^n قرار دارد. آنگاه یک زیرگردایه جدا از هم (متناهی یا شمارا) $\{B_i\}$ وجود دارد به طوری که

$$(۸-۴) \quad \bigcup_{B \in C} B \subset \bigcup_i \tilde{B}_i$$

که \tilde{B}_i گوی بسته هم مرکز با B_i و با شعاع چهار برابر آن می‌باشد.

برهان. برای راحتی، برهان را برای هنگامی که C یک گردایه متناهی است ارائه می‌کنیم؛ ایده اساسی در حالت کلی نیز همین است. $\{B_i\}$ را به طور استقرایی انتخاب می‌کنیم. فرض کنید B_1 یک گوی در C با شعاع ماکزیمم باشد. فرض کنید که B_1, \dots, B_{k-1} انتخاب شده اند. B_k را بزرگ‌ترین گوی (یا یکی از بزرگ‌ترین گوی‌ها) در C می‌گیریم که B_1, \dots, B_{k-1} را قطع نمی‌کند. این روند هنگامی که چنین گویی باقی نماند خاتمه می‌یابد. به وضوح گوی‌های انتخاب شده جدا از هم هستند؛ باید برقراری (۸-۴) را آزمایش کنیم. اگر $B \in C$ ، آنگاه یا به ازای i $B = B_i$ ، یا B یکی از B_i ها را که $|B| \geq |B_i|$ قطع می‌کند؛ اگر این طور نبود، آنگاه B باید به جای نخستین گوی B_k با $|B| < |B_k|$ انتخاب شده باشد. به هر حال، $B \subset \tilde{B}_i$ ، پس (۸-۴) برقرار است. (به سادگی می‌توان دید که با گرفتن \tilde{B}_i به عنوان گوی هم مرکز با B_i و با شعاع $3 + \varepsilon$ برابر، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، نتیجه درست باقی می‌ماند؛ اگر C متناهی باشد حتی می‌توانیم بگیریم $\varepsilon = 0$.) □

گزاره ۴-۹

فرض کنید μ یک توزیع جرم روی R^n باشد، فرض کنید $F \subset R^n$ یک مجموعه بورد و $0 < c < \infty$ ثابت باشد.

$$(أ) \quad \text{آنگاه به ازای هر } x \in F \text{، } \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^s < c$$

$$(ب) \quad \text{اگر به ازای هر } x \in F \text{، } \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^s > c$$

$$\text{آنگاه } H^s(F) \leq 2^s \mu(R^n)/c$$

برهان.

(آ) به ازای هر $\delta > 0$ قرار دهید

$F_\delta = \{x \in F : \mu(B_r(x)) < (c - \varepsilon)r^s, \varepsilon > 0 \text{ و } 0 < r \leq \delta\}$

فرض کنید $\{U_i\}$ یک δ -پوشش از F باشد که بنابراین یک δ -پوشش از F_δ نیز خواهد بود. به ازای هر U_i شامل یک نقطه x از F_δ ، گوی B با مرکز x و شعاع $|U_i|$ قطعاً شامل U_i است. بنابر تعریف F_δ ،

$$\mu(U_i) \leq \mu(B) < c|U_i|^s$$

به طوریکه

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_i \{\mu(U_i) : F_\delta, U_i \text{ را قطع کند}\} \leq c \sum_i |U_i|^s.$$

از آنجاییکه $\{U_i\}$ هر δ -پوشش از F است، نتیجه می‌گیریم که

$$\mu(F_\delta) \leq cH_\delta^s(F) \leq cH^s(F).$$

اما با کاهش δ به سمت صفر، F_δ به طور صعودی به F نزدیک می‌شود، پس بنابر (۷-۱)

$$\mu(F) \leq cH^s(F)$$

(ب) برای سادگی، صورت ضعیف تری از (ب) را با جایگزینی 2^s با 8^s ثابت می‌کنیم، اما ایده اصلی یکی است. ابتدا فرض کنید F کراندار باشد و $\delta > 0$ را ثابت نگه دارید. فرض کنید C گردایه گوی‌های زیر باشد

$$\{B_r(x) : x \in F, 0 < r \leq \delta, \mu(B_r(x)) > cr^s\}.$$

آنگاه طبق فرضیات قسمت (ب) $F \subset \bigcup_{B \in C} B$. با به کار بردن لم پوششی ۴-۸ برای گردایه C ، دنباله‌ای از گوی‌های جدا از هم $B_i \in C$ وجود دارند به طوریکه $\bigcup_{B \in C} B \subset \bigcup_i \tilde{B}_i$ که \tilde{B}_i گوی هم مرکز با B_i با شعاع چهار برابر می‌باشد. بنابراین $\{\tilde{B}_i\}$ یک 8δ -پوشش از F است، پس

$$\begin{aligned} H_{8\delta}^s(F) &\leq \sum_i |\tilde{B}_i|^s \leq 4^s \sum_i |B_i|^s \\ &\leq 8^s c^{-1} \sum_i \mu(B_i) \leq 8^s c^{-1} \mu(R^n). \end{aligned}$$

با فرض $\delta \rightarrow 0$ ، به نامساوی $H^s(F) \leq 8^s c^{-1} \mu(R^n) < \infty$ می‌رسیم. سرانجام، اگر F

بی کران باشد و $H^s(F) > 8^s c^{-1} \mu(R^n)$ ، آنگاه H^s -اندازه از زیرمجموعه کراندار F از

از این مقدار تجاوز خواهد کرد که نامساوی بالا را نقض می‌کند. □

توجه کنید که یک نتیجه فوری از گزاره ۴-۹ این است که

$$\dim_H F = \lim_{r \rightarrow 0} \log \mu(B_r(x)) / \log r$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

با کاربرد گزاره ۴-۹ در طول کتاب مواجه می‌شویم.

چگالی‌های $\mu(B_r(x))/r^s$ در گزاره ۴-۹ وجود دارند گاهی برای تعریف بعد یک مجموعه استفاده می‌شوند (نسبتاً نادقیق). یک فرکتال F اغلب به یک توزیع جرم μ مجهز است، برای مثال، یک اندازه پایدار روی جاذب یک سیستم دینامیکی؛ بخش ۱۳-۷ را ببینید. اگر جرم گوی‌های کوچک به ازای هر x در F از قاعده $s \rightarrow \log \mu(F \cap B_r(x)) / \log r$ هنگامی که $r \rightarrow 0$ پیروی کند، آنگاه بعد هاوسدورف F برابر s است. این واقعیت گاهی به عنوان یک روش عملی برای تخمین زدن "بعد" یک مجموعه که دارای یک توزیع جرم معمولی است به کار می‌رود. برای یک نقطه "نوعی" x ، مقادیر $\mu(F \cap B_r(x))$ را به ازای مقادیر کوچک r تخمین زده و بعد را به عنوان ضریب زاویه نمودار $\log \mu(F \cap B_r(x))$ نسبت به $\log r$ به دست می‌آوریم.

۴-۲ زیرمجموعه‌های با اندازه متناهی

ممکن است وجود این بخش در فصلی پیرامون یافتن ابعاد نا بجا به نظر بیاید. با این وجود، قضیه ۴-۱۰ برای روش‌های نظری مهم پتانسیل که در بخش بعدی توسعه داده شده است، لازم می‌باشد. این بخش همچنین به ما امکان می‌دهد که از یک نوع ساده سازی که در تحلیل فرکتال‌ها می‌تواند بسیار مفید باشد استفاده کنیم.

قضیه ۴-۱۰ تضمین می‌کند که هر مجموعه (بورل) F با $H^s(F) = \infty$ شامل یک زیرمجموعه E با $0 < H^s(E) < \infty$ است (یعنی با یک s - مجموعه E). در ابتدا، این مطلب ممکن است واضح به نظر بیاید - کافیست تکه‌هایی از F را حذف کنید تا آنجا که آنچه باقی می‌ماند اندازه مثبت متناهی داشته باشد. متأسفانه در واقع کار به این سادگی نیست - می‌توان بدون عبور از مقادیر میانی، از اندازه بی‌نهایت به اندازه صفر پرید. به زبان ریاضی، می‌توان یک دنباله نزولی از مجموعه‌های $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ یافت که به ازای هر k ، $H^s(E_k) = \infty$ و $H^s(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$. (به عنوان یک مثال ساده، فرض کنید $E_k = [0, 1/k] \subset R$ و $0 < s < 1$). برای اثبات قضیه نیاز داریم که به ساختار اندازه هاوسدورف عمیق‌تر نگاه کنیم. خواننده‌ای که بیشتر به دنبال کاربردهای نظریه است می‌تواند برهان‌ها را حذف کند!

قضیه ۱۰-۴

فرض کنید F یک زیرمجموعه بورل از R^n با $H^s(F) = \infty$ باشد. آنگاه یک مجموعه فشرده $E \subset F$ وجود دارد به طوری که $0 < H^s(E) < \infty$.

خلاصه برهان. برهان کامل این قضیه پیچیده است. ایده‌هایی را برای حالتی که F یک زیرمجموعه فشرده از $R \subset [0,1]$ است و $0 < s < 1$ بیان می‌کنیم.

با جرم‌های خالص M^s ((۱۷-۲) و ((۱۸-۲)) که با استفاده از بازه‌های دودویی $[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}]$ تعریف می‌شوند و به واسطه ((۱۹-۲)) به اندازه هاوسدورف مربوط می‌شوند، کار می‌کنیم. به طور استقرایی یک دنباله نزولی $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ از زیرمجموعه‌های فشرده F تعریف می‌کنیم. قرار دهید $E_0 = F$. به ازای $k \geq 0$ ، E_{k+1} را با مشخص کردن اشتراک آن با هر بازه دودویی I با طول 2^{-k} تعریف می‌کنیم. اگر $M_{2^{-(k+1)}}^s(E_k \cap I) \leq 2^{-sk}$ فرض می‌کنیم $E_{k+1} \cap I = E_k \cap I$. آنگاه

$$(9-4) \quad M_{2^{-(k+1)}}^s(E_{k+1} \cap I) = M_{2^{-k}}^s(E_k \cap I)$$

چرا که استفاده از خود I به عنوان یک بازه پوششی در محاسبه $M_{2^{-k}}^s$ یک تخمین حداقل به بزرگی استفاده از بازه‌های دودویی کوچکتر به دست می‌دهد. از طرف دیگر، اگر $M_{2^{-(k+1)}}^s(E_{k+1} \cap I) > 2^{-sk}$ ، $E_{k+1} \cap I$ را طوری می‌گیریم که یک زیرمجموعه فشرده از $E_k \cap I$ باشد و $M_{2^{-(k+1)}}^s(E_{k+1} \cap I) = 2^{-sk}$ از آنجاییکه در نقطه u پیوسته و متناهی است یک چنین مجموعه‌ای وجود دارد. (به خاطر همین است که نیاز داریم بیشتر با M_δ^s کار کنیم تا M^s). چون $M_{2^{-k}}^s(E_k \cap I) = 2^{-sk}$ ، رابطه (۹-۴) مجدداً برقرار است. با جمع کردن (۹-۴) روی همه بازه‌های دودویی با طول 2^{-k} به دست می‌آوریم

$$(10-4) \quad M_{2^{-(k+1)}}^s(E_{k+1}) = M_{2^{-k}}^s(E_k).$$

استفاده مکرر از (۱۰-۴) به ازای هر k می‌دهد $M_{2^{-k}}^s(E_k) = M_1^s(E_0)$. فرض کنید E مجموعه فشرده $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ باشد. گرفتن حد هنگامی که $k \rightarrow \infty$ نتیجه می‌دهد $M^s(E) = M_1^s(E_0)$ (این گام به کمی توجیه نیاز دارد). پوشش $E_0 = F$ به وسیله بازه واحد $[0,1]$ نتیجه می‌دهد $1 \leq M_1^s(E_0)$ از آنجایی که $M^s(E_0) \geq H^s(E_0) = \infty$. اگر k به اندازه کافی بزرگ باشد داریم $M_{2^{-k}}^s(E_0) > 0$ بنابراین

$M_1^s(E_0) \geq \min\{M_{2^{-k}}^s(E_0), 2^{-ks}\} > 0$. از این رو $0 < M^s(E) < \infty$ ، و قضیه از (۱۹-۲) نتیجه می‌شود. \square

برخی از نتایج، مثلاً آنهایی که در فصل ۵ هستند، فقط برای s -مجموعه‌ها، یعنی مجموعه‌هایی با $0 < H^s(F) < \infty$ ، به کار می‌روند. یک راه نزدیک شدن به مجموعه‌های s -بعدی با $H^s(F) = \infty$ استفاده از قضیه ۴-۱۰ برای بیرون کشیدن یک زیرمجموعه با اندازه متناهی مثبت، مطالعه ویژگی‌های آن به عنوان یک s -مجموعه، و سپس تفسیر این ویژگی‌ها برای مجموعه بزرگتر F می‌باشد. به طور مشابه، هر مجموعه F با بعد هاوسدورف $t > 0$ دارای $H^s(F) = \infty$ است اگر $0 < s < t$ و بنابراین شامل یک s -مجموعه است. گزاره زیر که در واقع یک نتیجه از گزاره ۴-۹ است به ما اجازه می‌دهد که قضیه ۴-۱۰ را حتی قوی‌تر سازیم.

گزاره ۴-۱۱

فرض کنید F یک مجموعه بورل باشد که در $0 < H^s(F) < \infty$ صدق می‌کند. آنگاه یک ثابت b و یک مجموعه فشرده $E \subset F$ با $H^s(E) > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in R^n$ و $r > 0$ ،

$$H^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s \quad (۱۱-۴)$$

برهان. در گزاره ۴-۹ (ب) μ را به عنوان تحدید H^s به F در نظر بگیرید، یعنی $\mu(A) = H^s(F \cap A)$ بنابراین اگر

$$F_1 = \left\{ x \in R^n : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} H^s(F \cap B_r(x)) / r^s > 2^{1+s} \right\}$$

نتیجه می‌شود که

$$H^s(F_1) \leq 2^s 2^{-(1+s)} H^s(F) \leq \frac{1}{2} H^s(F)$$

پس $H^s(F \setminus F_1) \geq \frac{1}{2} H^s(F) > 0$ و اگر $E_1 = F \setminus F_1$ آنگاه $H^s(E_1) > 0$ و $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} H^s(F \cap B_r(x)) / r^s \leq 2^{1+s}$ به ازای $x \in E_1$. از قضیه ایگوروف (بخش ۱-۳) نتیجه می‌شود که یک مجموعه فشرده $E \subset E_1$ با $H^s(E) > 0$ و یک عدد $r_0 > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in E$ و هر $0 < r \leq r_0$ ، $H^s(F \cap B_r(x)) / r^s \leq 2^{2+s}$. اما اگر $r \geq r_0$ ، آنگاه $H^s(F \cap B_r(x)) / r^s \leq H^s(F) / r_0^s$ و (۱۱-۴) نتیجه می‌شود. \square

نتیجه ۴-۱۲

فرض کنید F یک زیرمجموعه بورل از R^n باشد که $H^s(F) = \infty$. آنگاه یک مجموعه فشرده $E \subset F$ وجود دارد به طوری که $0 < H^s(E) < \infty$ و به ازای یک ثابت b ,

$$H^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s$$

برای هر $x \in R^n$ و $r \geq 0$.

پرهان. قضیه ۴-۱۰ یک زیرمجموعه از F با اندازه متناهی مثبت برای ما فراهم می‌کند، و به کار بردن گزاره ۴-۱۱ برای این مجموعه، نتیجه را می‌دهد. □

۴-۳ روش‌های نظری پتانسیل^۱

در این بخش روشی برای محاسبه بعد هاوسدورف که هم در نظریه و هم در عمل مهم است معرفی می‌کنیم. در این روش به جای تخمین جرم تعداد زیادی از مجموعه‌های کوچک، تنها از یک آزمون برای همگرایی یک انتگرال معین استفاده می‌شود.

مفاهیم پتانسیل و انرژی برای خوانندگانی که اطلاعاتی از نیروی جاذبه و الکترواستاتیک ندارند آشنا هستند. برای $s, s \geq 0$ - پتانسیل در یک نقطه x از R^n وابسته به توزیع جرم μ روی R^n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(4-12) \quad \phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}.$$

(اگر در R^3 کار کنیم و $s=1$ آنگاه این فرمول همان نیروی جاذبه پتانسیل نیوتونی خودمان است.) s -انرژی μ عبارت است از

$$(4-13) \quad I_s(\mu) = \iint \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s}.$$

قضیه زیر بعد هاوسدورف را به مفاهیم نظریه پتانسیل ظاهراً ناهمبند مربوط می‌سازد. به ویژه، اگر یک توزیع جرم روی یک مجموعه F که دارای s -انرژی متناهی است وجود داشته باشد، آنگاه F دارای بعد حداقل s است.

قضیه ۴-۱۳

فرض کنید F یک زیرمجموعه از R^n باشد.

(آ) اگر یک توزیع جرم μ روی F وجود داشته باشد که $I_s(\mu) < \infty$ ، آنگاه $\dim_H F \geq s$ و $H^s(F) = \infty$.

(ب) اگر F یک مجموعه بورل باشد که $H^s(F) > 0$ ، آنگاه یک توزیع جرم μ روی F وجود دارد که برای هر $t < s$ ، $I_t(\mu) < \infty$.

برهان.

(آ) فرض کنید به ازای یک توزیع جرم μ با محمل واقع در F ، $I_s(\mu) < \infty$ ، تعریف می‌کنیم

$$F_1 = \left\{ x \in F : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x)) / r^s > 0 \right\}$$

اگر $x \in F_1$ می‌توانیم $\varepsilon > 0$ و یک دنباله $\{r_i\}$ از اعداد نزولی به سمت صفر را بیابیم به طوری که $\mu(B_{r_i}(x)) \geq \varepsilon r_i^s$. اگر $\mu(\{x\}) > 0$ روشن است که $I_s(\mu) = \infty$ در غیر این صورت از پیوستگی μ و با گرفتن q_i ($0 < q_i < r_i$) به اندازه کافی کوچک، به صورت $\mu(A_i) \geq \frac{1}{4} \varepsilon r_i^s$ ($i = 1, 2, \dots$) می‌رسیم، که A_i طوقه $B_{r_i}(x) \setminus B_{q_i}(x)$ می‌باشد. در صورت لزوم با گرفتن زیردنباله‌ها، می‌توانیم فرض کنیم که به ازای هر i ، $r_{i+1} < q_i$ ، طوری که A_i ها طوقه‌های مجزا با مراکز در x می‌باشند. از این رو برای هر $x \in F_1$

$$\begin{aligned} \phi_s(x) &= \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4} \varepsilon r_i^s r_i^{-s} = \infty \end{aligned}$$

از آنجایی که روی A_i ، $|x-y|^{-s} \geq r_i^{-s}$ ، اما $I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) < \infty$ پس برای μ تقریباً هر x ، $\phi_s(x) < \infty$. نتیجه می‌گیریم که $\mu(F_1) = 0$. از آنجا که $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x)) / r^s = 0$ ، اگر $x \in F \setminus F_1$ ، گزاره ۴-۹ (آ) بیان می‌کند که برای هر $c > 0$ داریم

$$H^s(F) \geq H^s(F \setminus F_1) \geq \mu(F \setminus F_1) / c \geq (\mu(F) - \mu(F_1)) / c = \mu(F) / c$$

از این رو $H^s(F) = \infty$.

(ب) فرض کنید $H^s(F) > 0$. از H^s برای ساختن یک توزیع جرم μ روی F با خاصیت $I_t(\mu) < \infty$ به ازای هر $t < s$ استفاده می‌کنیم.

به واسطه نتیجه ۴-۱۲ یک مجموعه فشرده $E \subset F$ با $0 < H^s(E) < \infty$ وجود دارد به طوری که به ازای یک ثابت b ،

$$H^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s \quad (x \in R^n)$$

فرض کنید μ تحدید H^s به E باشد، یعنی $\mu(A) = H^s(E \cap A)$ ؛ آنگاه μ یک توزیع جرم روی F است. نقطه $x \in R^n$ را ثابت نگه می‌داریم و می‌نویسیم

$$(۱۴-۴) \quad m(r) = \mu(B_r(x)) = H^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s.$$

حال اگر $0 \leq t < s$ ، بعد از انتگرالگیری جزء به جزء و استفاده از (۴-۱۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= \int_{|x-y| \leq 1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} + \int_{|x-y| > 1} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^t} \\ &\leq \int_0^1 r^{-t} dm(r) + \mu(R^n) \\ &= [r^{-t} m(r)]_{0^+}^1 + t \int_0^1 r^{-(t+1)} m(r) dr + \mu(R^n) \\ &\leq b + bt \int_0^1 r^{s-t-1} dr + \mu(R^n) \\ &= b \left(1 + \frac{t}{s-t} \right) + H^s(F) \end{aligned}$$

بنابراین $\phi_t(x) \leq c$ ، به عبارتی $I_t(\mu) = \int \phi_t(x) d\mu(x) \leq c\mu(R^n) < \infty$ □

کاربردهای مهم قضیه ۴-۱۳ بعداً داده خواهد شد؛ برای مثال، در برهان قضایای تصویر در فصل ۶ و در تعیین بعد مسیره‌های براونی در فصل ۱۶. این قضیه غالباً برای یافتن بعد فرکتال‌های F_θ که وابسته به یک پارامتر θ است به کار می‌رود. ممکن است به ازای هر θ یک روش طبیعی برای تعریف یک توزیع جرم μ_θ روی F_θ وجود داشته باشد. اگر بتوانیم نشان دهیم که به ازای یک s ،

$$\int I_s(\mu_\theta) d\theta = \iiint \frac{d\mu_\theta(x) d\mu_\theta(y) d\theta}{|x-y|^s} < \infty$$

آنگاه برای تقریباً هر θ ، $I_s(\mu_\theta) < \infty$ ، یعنی برای تقریباً هر θ ، $\dim_H F_\theta \geq s$. خوانندگان آشنا با نظریه پتانسیل بالاخره با تعریف s -ظرفیت یک مجموعه F مواجه می‌شوند:

$$C_s(F) = \sup_{\mu} \{1/I_s(\mu) : \mu(F) = 1 \text{ است که } F \text{ روی جرم } \mu\}$$

(با این قرارداد که $1/\infty = 0$). بنابراین راه دیگری برای بیان قضیه ۴-۱۳ به صورت زیر است

$$\dim_H F = \inf \{s : C_s(F) = 0\} = \sup \{s : C_s(F) > 0\}.$$

در حالیکه این یادآور تعریف (۲-۱۱) از بعد هاوسدورف بر حسب اندازه هاوسدورف است، باید توجه کرد که ظرفیت‌ها بسیار متفاوت با اندازه‌ها رفتار می‌کنند. به خصوص ظرفیت‌ها در حالت کلی جمع پذیر نیستند.

۴-۴ روش‌های تبدیل فوریه

در این بخش نشان می‌دهیم که تبدیل‌های فوریه می‌توانند یک ابزار قوی برای تحلیل بعدها باشند.

تبدیل‌های فوریه n - بعدی از یک تابع انتگرالپذیر f و یک توزیع جرم μ روی R^n به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(۴-۱۵) \quad \hat{f}(u) = \int_{R^n} f(x) \exp(ix \cdot u) dx \quad (u \in R^n)$$

$$(۴-۱۶) \quad \hat{\mu}(u) = \int_{R^n} \exp(ix \cdot u) d\mu(x) \quad (u \in R^n)$$

که $x \cdot u$ ضرب اسکالر معمولی را نشان می‌دهد. (تبدیل فوریه با استفاده از نظریه توزیع‌ها به دسته بسیار وسیع‌تری از توابع توسعه می‌یابد.)

S - پتانسیل (۴-۱۲) از یک توزیع جرم μ دقیقاً پیچش

$$\phi_s(x) = (|\cdot|^{-s} * \mu)(x) \equiv \int |x-y|^{-s} d\mu(y).$$

می‌باشد. دقیقاً می‌توان ثابت کرد که تبدیل $|x|^{-s}$ به صورت $|u|^{s-n}$ است، که C وابسته به n و s است. بنابراین قضیه پیچش، که بیان می‌کند که تبدیل پیچش دو تابع، معادل حاصل ضرب تبدیل‌های توابع می‌باشد، نتیجه می‌دهد که

$$\hat{\phi}_s(u) = c |u|^{s-n} \hat{\mu}(u).$$

قضیه پارسوال به ما می‌گوید

$$\int \phi_s(x) d\mu(x) = (2\pi)^n \int \hat{\phi}_s(u) \overline{\hat{\mu}(u)} du$$

بنابراین

$$(۴-۱۷) \quad I_s(\mu) = (2\pi)^n c \int |u|^{s-n} |\hat{\mu}(u)|^2 du.$$

این عبارت برای $I_s(\mu)$ ، که می‌تواند از راه‌های مشکل‌تری نیز به دست آید، گاهی طریقی مناسب برای بیان انرژی (۴-۱۳) می‌باشد که در قضیه ۴-۱۳ مورد نیاز بود. بنابراین اگر یک توزیع جرم μ روی یک مجموعه F که برای آن انتگرال (۴-۱۷) متناهی است، وجود داشته باشد، آنگاه $\dim_H F \geq s$. به ویژه، اگر به ازای یک ثابت b ،

(۱۸-۴)

$$|\hat{\mu}(u)| \leq b |u|^{-t/2}$$

آنگاه، با توجه به اینکه، به واسطه (۴-۱۶)، برای هر u ، $|\hat{\mu}(u)| \leq \mu(R^n)$ داریم

$$I_s(\mu) \leq c_1 \int_{|u| \leq 1} |u|^{s-n} du + c_2 \int_{|u| > 1} |u|^{s-n} |u|^{-t} du$$

که برای $s < t$ همگرا می‌شود. از این رو اگر (۴-۱۸) برقرار باشد، هر مجموعه F که محمل μ است دارای بعد حداقل t می‌باشد. بزرگترین مقدار t که برای آن یک توزیع جرم μ روی F وجود دارد که در (۴-۱۸) صدق می‌کند، بعضاً بعد فوریه F نامیده می‌شود.

۴-۵ نکات و منابع

من از فقدان یک روش سازمان یافته برای محاسبه ابعاد اطلاع دارم، هر چند عده‌ای از نویسندگان حالت‌های خاص را به طور مفصل مورد بحث قرار می‌دهند. از میان آنها به *Eggleston* (۱۹۵۲)، *Beardon* (۱۹۶۵) و *Peyriere* (۱۹۷۷) اشاره می‌کنم. رهیافت نظریه پتانسیل اساساً مربوط به *Frostman* (۱۹۳۵) می‌شود؛ *Taylor* (۱۹۶۱)، *Hayman* و *Kennedy* (۱۹۷۴)، یا *Carleson* (۱۹۶۷) را برای توضیحات جدیدتر ببینید. برای آشنایی با تبدیلات فوریه *Papoulis* (۱۹۶۲) را مطالعه کنید. کار بر روی زیرمجموعه‌های با اندازه متناهی از *Besicovitch* (۱۹۵۲) آغاز گردیده و یک بررسی جامع آن در *Rogers* (۱۹۷۰) داده شده است. برهان کاملی از قضیه ۴-۱۰ را می‌توان در *Falconer* (۱۹۸۵ا) یافت.

تمرین‌ها

۱-۴ بعد هاوسدورف مجموعه شطرنجی کانتور

$$\{(x, y) \in R^2 : y \in F \text{ یا } x \in F\}$$

هنگامی که F مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد، چیست؟

۲-۴ $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ را ثابت بگیرید و فرض کنید F مجموعه اعداد حقیقی

$$F = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k : a_k = 0 \text{ یا } 1, k = 1, 2, \dots \right\}$$

باشد. بعد جعبه و هاسدورف F را بیابید.

۳-۴ فرض کنید F مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد. بعد هاسدورف مجموعه مسطح

داده شده با $\{(x, y) \in R^2 : x \in F \text{ و } 0 \leq y \leq x^2\}$ چیست؟

۴-۴ از روش توزیع جرم استفاده کنید و نشان دهید "غبار کانتور" که در شکل ۴-۰ نشان

داده شده است بعد هاسدورف ۱ دارد. (راهنمایی: توجه کنید که هر دو مربع در

مجموعه E_k با فاصله حداقل 4^{-k} از هم جدا شده‌اند).

۵-۴ از روش توزیع جرم استفاده کنید و نتیجه مثال ۴-۵ را مستقیماً بدون استفاده از

مثال ۴-۴ به دست آورید.

۶-۴ نشان دهید که هر عدد $x \geq 0$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$x = m + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \dots$$

که $m \geq 0$ یک عدد صحیح و a_k یک عدد صحیح است که به ازای هر k ,

$$0 \leq a_k \leq k-1$$

$F = \{x \geq 0 : \text{زوج می‌باشد: } k = 2, 3, \dots \text{ ازای } a_k \text{ و } m = 0\}$

$\dim_H F$ را بیابید.

۷-۴ نشان دهید که یک زیرمجموعه فشرده F از $[0, 1]$ با بعد هاسدورف ۱ اما با

$H^1(F) = 0$ وجود دارد. (راهنمایی: روش ساختن مجموعه کانتور را به کار

بگیرید اما نسبت بازه‌های حذف شده در هر مرحله را کاهش دهید).

۸-۴ از قضیه ۴-۱۰ نتیجه بگیرید که اگر F یک زیرمجموعه بول از R^n با

$H^s(F) = \infty$ و c عددی مثبت باشد، آنگاه یک زیرمجموعه بول E از F وجود

دارد که $H^s(E) = c$.

۹-۴ فرض کنید μ توزیع جرم معمولی روی مجموعه یک سوم میانی کانتور F باشد

(بعد از قاعده ۴-۲ را ببینید). s -انرژی μ را برای $s < \log 2 / \log 3$ تخمین

بزنید و از قضیه ۴-۱۳ نتیجه بگیرید که $\dim_H F \geq \log 2 / \log 3$.

فصل ۵ ساختار موضعی فرکتال‌ها

حساب کلاسیک شامل یافتن تقریب‌های موضعی برای منحنی‌ها و سطوح به وسیله خطوط و صفحه‌های مماس، می‌باشد. در یک مقیاس بزرگ، همسایگی یک نقطه روی یک منحنی هموار، شبیه یک قطعه خط به نظر می‌آید. آیا می‌توانیم در مورد ساختار موضعی فرکتال‌ها چیزهایی مشابه بگوییم؟ به طور شگفت‌انگیزی در بسیاری حالات جواب این سوال مثبت است. می‌توانیم به طریقی شکل یک فرکتال را در یک همسایگی یک نقطه دلخواه مشخص کنیم. به ویژه می‌توانیم انباشتگی فرکتال را اطراف یک نقطه نوعی، مطالعه کنیم؛ به عبارت دیگر، چگالی موضعی آنها و توزیع جهتی فرکتال‌ها اطراف نقاط، همراه با این سوال که آیا مماس‌ها وجود دارند. اطلاعات در مورد شکل موضعی فرکتال‌ها هم در گسترش نظریه و هم در کاربردها، مفید می‌باشد.

به منظور پی بردن به توانایی اندازه‌هاوسدورف، لازم است که توجه خود را به S - مجموعه‌ها؛ یعنی مجموعه‌های بول با بعد هاوسدورف S ، با اندازه هاوسدورف S - بعدی متناهی مثبت، محدود کنیم. (به طور کلی کار کردن با S - مجموعه‌ها از H^h - اندازه متناهی مثبت برای یک تابع بعد h ، امکان پذیر است؛ بخش ۲-۵ را ببینید - ما در این جا این تعمیم را در نظر نخواهیم گرفت.) این کار آنچنان هم که ابتدا به نظر می‌آید، محدود کننده نیست. بسیاری از فرکتال‌ها که در عمل با آنها مواجه می‌شویم، S - مجموعه هستند، و حتی اگر $H^s(F) = \infty$ ، آنگاه با استفاده از قضیه ۴-۱۰، F زیرمجموعه‌هایی دارد که S - مجموعه بوده و این نظریه می‌تواند برای آنها به کار رود. یا این اتفاق می‌افتد که مجموعه F از بعد S یک اجتماع شمارا از S - مجموعه‌ها می‌باشد، و ویژگی‌های این اجزاء اغلب می‌توانند به F منتقل شوند.

مطالبی که در این فصل مطرح می‌شوند بر اساس نظریه اندازه هندسی بنا گردیده‌اند، موضوعی که در آن اثبات‌ها اغلب پیچیده و مشکل هستند. در اینجا اثبات‌های سخت‌تر را حذف می‌کنیم؛ امید است آن اثبات‌هایی که بیان شده‌اند مفید واقع شوند. به طور کلی توجه خود را به زیرمجموعه‌های صفحه محدود می‌کنیم - برای بعدها بالاتر، هر چند مطالب مذکور معتبر می‌مانند، نیاز به استدلال و محاسبه بیشتری دارند.

۱-۵ چگالی‌ها

فرض کنید F زیر مجموعه‌ای از صفحه باشد. چگالی F در x به صورت زیر است

$$(۱-۵) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(F \cap B_r(x))}{\text{area}(B_r(x))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(F \cap B_r(x))}{\pi r^2}$$

که $B_r(x)$ قرص بسته با شعاع r و مرکز x است. قضیه کلاسیک چگالی لبگ می‌گوید که برای هر مجموعه بورل F این حد موجود و برابر ۱ است اگر $x \in F$ و صفر است وقتی $x \notin F$ ، به جز برای مجموعه‌ای از x ها با مساحت صفر. به عبارت دیگر، برای یک نقطه نوعی از F ، قرص‌های کوچک متمرکز در x تقریباً به کلی توسط F پر می‌شوند؛ اما اگر x بیرون F باشد، آنگاه قرص‌های کوچک متمرکز در x ، به طور کلی مقدار بسیار کوچکی از F را شامل می‌شود؛ شکل ۱-۵ را ببینید.



شکل ۱-۵ قضیه چگالی لبگ. نقطه x در F قرار دارد و اگر r کوچک باشد $\frac{\text{area}(F \cap B_r(x))}{\text{area}(B_r(x))}$ نزدیک ۱ است. نقطه y در خارج از F است و اگر r کوچک باشد، $\frac{\text{area}(F \cap B_r(y))}{\text{area}(B_r(y))}$ نزدیک صفر است.

به طور مشابه، اگر F یک منحنی هموار در صفحه و x نقطه‌ای از F باشد (غیر از نقطه انتهایی)، آنگاه $F \cap B_r(x)$ برای r کوچک، نزدیک به یک وتر قطری F می‌باشد و

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{length}(F \cap B_r(x))}{2r} = 1$$

اگر $x \notin F$ ، آنگاه این حد به وضوح صفر است.

قضایای چگالی امثال این، به ما می‌گویند که چقدر از جرم مجموعه F یعنی مساحت یا طول آن، در نزدیکی x انباشته شده است. به روشی مشابه طبیعی است که چگالی‌های فرکتال‌ها را مورد بررسی قرار دهیم. اگر F دارای بعد s باشد، اندازه هاوسدورف s -بعدی مجموعه $F \cap B_r(x)$ هنگامی که $r \rightarrow 0$ ، چگونه رفتار می‌کند؟ ما به این سوال هنگامی که F یک s -مجموعه در R^2 با $0 < s < 2$ می‌باشد، می‌پردازیم. (0 -مجموعه‌ها دقیقاً مجموعه‌های متناهی از نقاط هستند و حرف زیادی برای گفتن ندارد، و H^2 نیز همان مساحت است، بنابراین اگر $s = 2$ در موقعیت چگالی لبگ (۱-۵) هستیم).

چگالی‌های پایین و بالای یک s -مجموعه F را در یک نقطه $x \in R^n$ ، به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\underline{D}^s(F, x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{H^s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s} \quad (۲-۵)$$

9

$$\overline{D}^s(F, x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{H^s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s} \quad (۳-۵)$$

(توجه کنید که $|B_r(x)| = 2r$). اگر $\underline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(F, x)$ گوییم که چگالی F در x وجود دارد و $D^s(F, x)$ را برای مقدار مشترک آنها می‌نویسیم.

یک نقطه x که در آن $\underline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(F, x)$ ، یک نقطه منظم نامیده می‌شود، در غیر این صورت x یک نقطه نامنظم است. یک s -مجموعه، منظم نامیده می‌شود اگر H^s -تقریباً همه نقاط آن منظم باشد (یعنی همه نقاط آن به جز برای مجموعه‌ای از H^s -اندازه صفر)، و نامنظم است اگر H^s -تقریباً همه نقاط آن نامنظم باشند. همانطور که خواهیم دید هر s -مجموعه F نامنظم است مگر این که s عددی صحیح باشد. به هر حال، اگر s صحیح باشد یک s -مجموعه به یک بخش منظم و یک بخش نامنظم تجزیه می‌شود. به بیان نادقیق،

یک ۱- مجموعه منظم متشکل از منحنی‌های طولپذیر با طول متناهی می‌باشد، و حال آنکه یک ۱- مجموعه نامنظم ناهمبند کلی و غبار مانند و نوعاً فرکتال است.

بنابر تعریف، یک مجموعه منظم آن است که نمونه سرراست قضیه چگالی لبگ برای آن برقرار باشد. به هر حال، حتی چگالی مجموعه‌های نامنظم نیز نمی‌توانند خیلی نامنظم رفتار کنند.

گزاره ۵-۱

فرض کنید F یک s -مجموعه در R^n باشد. آنگاه

$$(A) \quad \text{برای } H^s\text{-تقریباً همه } x \notin F, \quad \overline{D}^s(F, x) = 0$$

$$(B) \quad \text{برای } H^s\text{-تقریباً همه } x \in F, \quad 2^{-s} \leq \overline{D}^s(F, x) \leq 1$$

برهان ناقص.

(A) اگر F بسته بوده و $x \notin F$ آنگاه $B_r(x) \cap F = \emptyset$ ، به شرطی که r به اندازه کافی کوچک باشد. از این رو $\lim_{r \rightarrow 0} H^s(F \cap B_r(x)) / (2r)^s = 0$. اگر F بسته نباشد برهان کمی پیچیده‌تر است و در اینجا آن را حذف می‌کنیم.

(B) این قسمت، فوراً از گزاره ۴-۹ (A) با گرفتن μ به عنوان تحدید H^s به F ، یعنی $\mu(A) = H^s(F \cap A)$ ، نتیجه می‌شود: اگر

$$F_1 = \{x \in F : \overline{D}^s(F, x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{H^s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s} < 2^{-s} c\}$$

آنگاه $H^s(F_1) \geq H^s(F)/c$. اگر $c < 1$ ، این فقط زمانی امکان پذیر است که $H^s(F_1) = 0$ ؛ بنابراین برای تقریباً هر $x \in F$ داریم $\overline{D}^s(F, x) \geq 2^{-s}$. کران بالا اساساً به روشی مشابه، با استفاده از گزاره ۴-۹ (B) نتیجه می‌شود. □

توجه کنید که یک نتیجه فوری از گزاره ۵-۱ (B) این است که یک مجموعه نامنظم یک چگالی پایین دارد که تقریباً همه جا اکیداً کوچکتر از یک است.

گاهی نیاز خواهیم داشت که چگالی‌های یک مجموعه را به چگالی‌های زیر مجموعه‌های مشخص آن مربوط کنیم. فرض کنید F یک s -مجموعه و E یک زیرمجموعه بزرگ آن باشد. آنگاه

$$\frac{H^s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s} = \frac{H^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s} + \frac{H^s((F \setminus E) \cap B_r(x))}{(2r)^s}$$

به وسیله گزاره ۵-۱(ا)، برای تقریباً هر x در E داریم

$$\frac{H^s((F \setminus E) \cap B_r(x))}{(2r)^s} \rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow 0$$

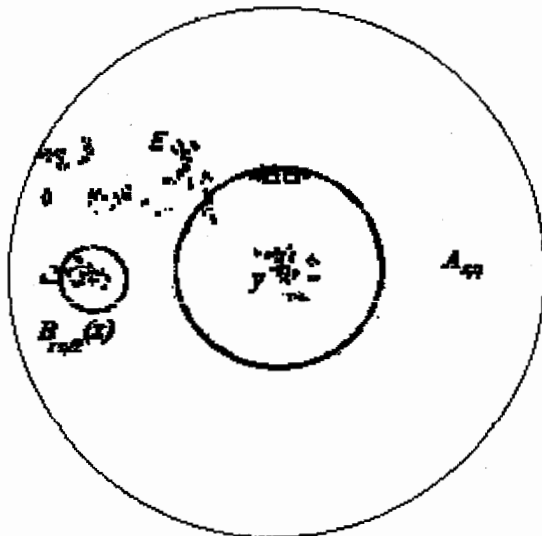
بنابراین فرض $r \rightarrow 0$ می‌دهد

$$(۴-۵) \quad \overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x) \quad \underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$$

برای H^s - تقریباً هر x در E بنابر تعریف منظم بودن، اگر E یک زیرمجموعه از یک s - مجموعه F باشد، $H^s(E) > 0$ باشد، آنگاه E منظم است اگر F منظم باشد و نامنظم است اگر F نامنظم باشد. به ویژه، اشتراک یک مجموعه منظم و یک مجموعه نامنظم، که زیرمجموعه هر دو است، دارای اندازه صفر است.

روی هم رفته به دست آوردن تخمین‌ها برای چگالی‌های پایین سخت‌تر می‌باشند و در اینجا این کار را ادامه نمی‌دهیم.

به طور کلی نشان دادن اینکه s - مجموعه‌ها از بعد نا صحیح نامنظم هستند، کاملاً مشکل می‌باشد، اما برای $0 < s < 1$ اثبات "طوقی" زیر ارائه می‌شود.



شکل ۲-۵ برهان "طوقی" قضیه ۲-۵

قضیه ۵-۲

فرض کنید F یک s - مجموعه در R^2 باشد. آنگاه F نامنظم است مگر آنکه s یک عدد صحیح باشد.

برهان ناقص. اگر $0 < s < 1$ ، با نشان دادن اینکه چگالی $D(F, x)$ تقریباً همه جا در F وجود ندارد ثابت می‌کنیم که F نامنظم است. فرض کنید چنین نباشد: آنگاه یک مجموعه $F_1 \subset F$ با اندازه مثبت وجود دارد که دارای چگالی است و بنابر گزاره ۵-۱ (ب)، $\frac{1}{2} < 2^{-s} \leq D^s(F, x)$ ، با استفاده از قضیه ایگوروف می‌توانیم $r_0 > 0$ و یک مجموعه بورل $E \subset F_1 \subset F$ با $H^s(E) > 0$ بیابیم به طوری که برای هر $x \in E$ و $r < r_0$

$$(5-5) \quad H^s(F \cap B_r(x)) > \frac{1}{2}(2r)^s$$

فرض کنید $y \in E$ یک نقطه حدی E باشد (یعنی یک نقطه y که به دلخواه نزدیک دیگر نقاط E باشد). فرض کنید $0 < \eta < 1$ و $A_{r, \eta}$ و $B_{r(1+\eta)}(y) \setminus B_{r(1-\eta)}(y)$ طوق $A_{r, \eta}$ را ببینید. آنگاه هنگامی که $r \rightarrow 0$ داریم،

$$(6-5) \quad \begin{aligned} & (2r)^{-s} H^s(F \cap A_{r, \eta}) \\ &= (2r)^{-s} H^s(F \cap B_{r(1+\eta)}(y)) - (2r)^{-s} H^s(F \cap B_{r(1-\eta)}(y)) \\ & \rightarrow D^s(F, y)((1+\eta)^s - (1-\eta)^s) \end{aligned}$$

برای یک دنباله از مقادیر r میل کننده به صفر، می‌توانیم $x \in E$ که $|x - y| = r$ بیابیم. آنگاه $B_{\frac{1}{2}r\eta}(x) \subset A_{r, \eta}$ و بنابر (۵-۵)،

$$\frac{1}{2}r^s \eta^s < H^s(F \cap B_{\frac{1}{2}r\eta}(x)) \leq H^s(F \cap A_{r, \eta}).$$

با در نظر گرفتن (۶-۵)، نامساوی فوق ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} 2^{-s-1} \eta^s &\leq D^s(F, y)((1+\eta)^s - (1-\eta)^s) \\ &= D^s(F, y)(2s\eta + \text{terms in } \eta^2 \text{ or higher}). \end{aligned}$$

با فرض $\eta \rightarrow 0$ می‌بینیم که وقتی $s < 1$ ، این تساوی غیر ممکن و تناقض است. □

۵-۲ ساختار ۱- مجموعه‌ها

همانطور که نشان داده‌ایم، مجموعه‌های از بعد نامنظم باشند. وضعیت برای مجموعه‌های از بعد صحیح پیچیده‌تر است. قضیه تجزیه زیر، نمایش داده شده در شکل ۵-۳،

ما را قادر می‌سازد که یک ۱- مجموعه را به دو بخش منظم و نامنظم تجزیه نموده و هر یک را جداگانه تشریح کنیم؛ و بدون تاثیر بر ویژگی‌های چگالی، آنها را دوباره به هم الحاق کنیم.

قضیه تجزیه ۳-۵

فرض کنید F یک ۱- مجموعه باشد. مجموعه نقاط منظم F یک مجموعه منظم، و مجموعه نقاط نامنظم آن، یک مجموعه نامنظم شکل می‌دهند.

برهان. این نتیجه، با گرفتن E به ترتیب به عنوان مجموعه نقاط منظم و نامنظم F ، از ۴-۵ به دست می‌آید. \square



شکل ۳-۵ تجزیه یک ۱- مجموعه به یک بخش "منحنی مانند" منظم و یک بخش "پوچ منحنی" نامنظم

مثال‌های ۱- مجموعه‌های منظم و نامنظم فراوان هستند. منحنی‌های هموار منظم هستند و با شکل‌هایی از هندسه کلاسیک مانند دایره یا بیضی برای ما قابل تصورند. از طرف دیگر ساختار تکراری شکل ۴-۰ یک ۱- مجموعه نامنظم را که یک فرکتال ناهمبند کلی می‌باشد، به ما می‌دهد. این طبقه‌بندی کلی است- همانطور که خواهیم دید، ۱- مجموعه‌های منظم از قطعه‌های منحنی ساخته می‌شوند و حال آنکه ۱- مجموعه‌های نامنظم غبار مانند و "پوچ-منحنی" هستند؛ یعنی هر منحنی (با طول متناهی) را در طول صفر قطع می‌کنند.

برای مطالعه ۱- مجموعه‌ها به حقایق اندکی از منحنی‌ها نیاز داریم. برای اهداف ما یک منحنی یا منحنی ژوردان C تصویر یک تابع یک به یک $\psi: [a, b] \rightarrow R^2$ می‌باشد. بنابر

تعریف ما، منحنی‌ها خود-قطعی ندارند، دو انتها دارند و زیر مجموعه‌های همبند فشرده‌ای از صفحه هستند. طول $\ell(C)$ از منحنی C به وسیله تقریب چند ضلعی داده می‌شود:

$$\ell(c) = \sup \sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}|$$

که سوپریمم روی همه افرازهای C به وسیله نقاط x_0, x_1, \dots, x_m ، به ترتیب در طول C ، گرفته می‌شود. اگر طول $\ell(C)$ متناهی باشد گوئیم C یک منحنی طولپذیر است.

همانطور که انتظار می‌رود، طول یک منحنی برابر اندازه هاوسدورف ۱- بعدی آن می‌باشد.

لم ۴-۵

اگر C یک منحنی طولپذیر باشد، آنگاه $H^1(C) = \ell(C)$.

برهان. برای $x, y \in C$ ، فرض کنید $C_{x,y}$ آن بخش از C را نمایش دهد که بین x و y قرار دارد. از آنجاییکه تصویر قائم روی خط مار بر x و y ، فاصله‌ها را زیاد نمی‌کند، رابطه (۲-۹) نتیجه می‌دهد $H^1(C_{x,y}) \geq H^1[x, y] = |x - y|$ که $[x, y]$ پاره خط مستقیم متصل کننده x و y می‌باشد. بنابراین برای هر افراز x_0, x_1, \dots, x_m از C داریم،

$$\sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| \leq \sum_{i=1}^m H^1(C_{x_i, x_{i-1}}) \leq H^1(C)$$

یعنی $\ell(C) \leq H^1(C)$. از طرف دیگر، فرض کنید $f: [0, \ell(C)] \rightarrow C$ نگاشتی باشد که t را به نقطه‌ای روی C در فاصله t از یک نقطه انتهائی آن می‌برد. به روشنی برای $u \leq \ell(C)$ و $0 \leq t$ داریم $|f(t) - f(u)| \leq |t - u|$ ، بنابراین با استفاده از (۲-۹)، آنگونه که می‌خواستیم $H^1(C) \leq \ell(C)$. □

نشان دادن این که منحنی‌های طولپذیر منظم هستند، ساده است.

لم ۵-۵

یک منحنی طولپذیر، یک ۱- مجموعه منظم است.

برهان. اگر C طول پذیر باشد، $\ell(C) < \infty$ ، و از آنجاییکه C نقاط انتهائی مجزای p و q دارد، به دست می‌آوریم $\ell(C) \geq |p - q| > 0$. به وسیله لم ۴-۵، $0 < H^1(C) < \infty$ ، بنابراین C یک ۱- مجموعه می‌باشد.

یک نقطه x از C که نقطه انتهایی نباشد، C را به دو بخش $C_{p,x}$ و $C_{q,x}$ تقسیم می‌کند. اگر r به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه با دور شدن از x در امتداد منحنی $C_{q,x}$ ، به یک نخستین نقطه y روی C می‌رسیم که $|x-y|=r$. آنگاه $C_{x,y} \subset B_r(x)$ و

$$r = |x-y| \leq \ell(C_{x,y}) = H^1(C_{x,y}) \leq H^1(C_{x,q} \cap B_r(x))$$

بطور مشابه، $r \leq H^1(C_{p,x} \cap B_r(x))$ ، بنابراین، پس از جمع دو نامساوی به دست می‌آوریم، $2r \leq H^1(C \cap B_r(x))$ ، به شرطی که r به اندازه کافی کوچک باشد. بنابراین

$$\underline{D}^1(C, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{H^1(C \cap B_r(x))}{2r} \geq 1.$$

بنابر گزاره ۵-۱ (ب)، $\underline{D}^1(C, x) \leq \overline{D}^1(C, x) \leq 1$ ، بنابراین $D^1(C, x)$ موجود و برای هر $x \in C$ غیر از دو نقطه انتهایی، برابر ۱ می‌باشد، در نتیجه C منظم است. \square

مجموعه‌های منظم دیگر به سادگی ساخته می‌شوند. بنابر (۴-۵)، زیرمجموعه‌های مجموعه‌های منظم و اجتماع مجموعه‌های منظم نیز باید منظم باشند. با در نظر گرفتن این موضوع، یک ۱- مجموعه را "منحنی-مانند" تعریف می‌کنیم اگر در یک اجتماع شمارا از منحنی‌های طولپذیر قرار گیرد.

گزاره ۵-۶

یک مجموعه منحنی-مانند یک ۱- مجموعه منظم است.

برهان. اگر F منحنی-مانند باشد، آنگاه $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ که C_i ها منحنی‌های طول پذیر هستند. برای هر i و H^1 - تقریباً هر $x \in F \cap C_i$ با استفاده از لم ۵-۵ و معادله (۴-۵) داریم

$$1 = \underline{D}^1(C_i, x) = \underline{D}^1(F \cap C_i, x) \leq \underline{D}^1(F, x)$$

و از این رو، برای تقریباً هر $x \in F$ ، $1 \leq \underline{D}^1(F, x)$. اما برای تقریباً هر $x \in F$ ، داریم

$$\underline{D}^1(F, x) \leq \overline{D}^1(F, x) \leq 1$$

طبیعی است که یک تعریف مکمل مطرح کنیم: یک ۱- مجموعه "پوچ-منحنی" نامیده می‌شود اگر اشتراک آن با هر منحنی طولپذیر دارای H^1 - اندازه صفر باشد.

گزاره ۵-۷

یک ۱- مجموعه نامنظم، پوچ-منحنی است.

برهان. اگر F نامنظم و C یک منحنی طولپذیر باشد، آنگاه $F \cap C$ زیرمجموعه‌ای از هر دو، یکی منظم و دیگری نامنظم، می‌باشد، بنابراین دارای H^1 -اندازه صفر است. \square

این دو گزاره پیشنهاد می‌کنند که مجموعه‌های منظم و نامنظم به ترتیب منحنی-مانند و پوچ-منحنی هستند. این سخن درست است، اما اثبات آن ساده نیست و آن را حذف می‌کنیم. مسأله دشوار در این رابطه تخمین چگالی پایین ذیل می‌باشد که به بررسی دقیق ویژگی‌های منحنی‌ها و مجموعه‌های همبند و بعضی مباحث استادانه هندسی مربوط می‌شود.

گزاره ۵-۸

فرض کنید F یک ۱-مجموعه پوچ-منحنی در R^2 باشد. آنگاه تقریباً در هر $x \in E$ ،

$$\underline{D}^1(F, x) \leq \frac{3}{4}$$
 برهان. حذف می‌گردد. \square

با در نظر گرفتن گزاره بالا، توصیف کامل مجموعه‌های منظم و نامنظم، نسبتاً آسان است.

قضیه ۵-۹

(آ) یک ۱-مجموعه در R^2 نامنظم است اگر و فقط اگر پوچ-منحنی باشد.
 (ب) یک ۱-مجموعه در R^2 منظم است اگر و فقط اگر اجتماع یک مجموعه منحنی-مانند و یک مجموعه از H^1 -اندازه صفر باشد.

برهان.

(آ) یک مجموعه پوچ-منحنی بنابر گزاره ۵-۸، باید نامنظم باشد. گزاره ۵-۷ استنتاج عکس قضیه را فراهم می‌کند.

(ب) بنابر گزاره ۵-۶، یک مجموعه منحنی-مانند منظم است، و جمع کردن با یک مجموعه از اندازه صفر، بر چگالی و بنابراین بر منظم بودن اثر نمی‌گذارد.

اگر F منظم باشد، آنگاه هر زیرمجموعه بورل E از اندازه مثبت منظم است با $\underline{D}^1(E, x) = 1$ برای تقریباً هر $x \in E$. بنابر گزاره ۵-۸ مجموعه E نمی‌تواند پوچ-منحنی باشد، بنابراین چند منحنی طولپذیر، E را در یک مجموعه با طول مثبت قطع می‌کنند. ما از این حقیقت برای تعریف یک دنباله از منحنی‌های طولپذیر $\{C_i\}$ ، به طور استقرایی، استفاده می‌کنیم. ابتدا منحنی C_1 را برای پوشاندن یک قسمت عمده از F انتخاب می‌کنیم، مثلاً

$$\{C\} > 0 \text{ یک منحنی طولپذیر است : } H^1(F \cap C) \geq \frac{1}{2} \sup H^1(F \cap C_1)$$

اگر C_1, \dots, C_k انتخاب شده باشند و $F_k = F \setminus \bigcup_{i=1}^k C_i$ دارای اندازه مثبت باشد، فرض کنید C_{k+1} یک منحنی طولپذیر باشد که برای آن

$$(V-5) \quad H^1(F_k \cap C_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \sup \{H^1(F_k \cap C) : C \text{ طولپذیر است}\} > 0$$

اگر این روند خاتمه یابد آنگاه به ازای یک k منحنی‌های C_1, \dots, C_k تقریباً همه F را می‌پوشانند و F منحنی-مانند است. در غیر این صورت،

$$\infty > H^1(F) \geq \sum_k H^1(F_k \cap C_{k+1})$$

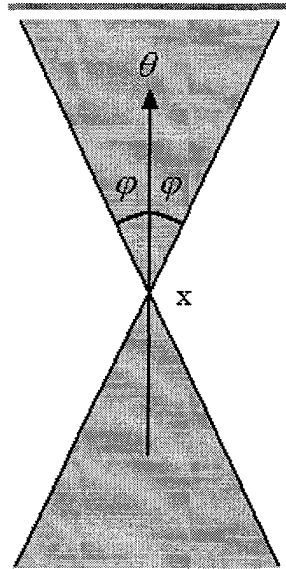
از آنجاییکه $F_k \cap C_{k+1}$ ها از هم جدا هستند، پس هنگامی که $k \rightarrow \infty$ ، $H^1(F_k \cap C_{k+1}) \rightarrow 0$. اگر $H^1(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) > 0$ یک منحنی طولپذیر C وجود دارد به طوری که برای یک $d > 0$ ، $H^1((F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \cap C) = d$ ، اما به ازای یک k $H^1(F_k \cap C_{k+1}) < \frac{1}{2}d$ ، بنابراین بر طبق (V-5)، C باید زودتر از C_{k+1} انتخاب شده باشد. از این رو $H^1(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = 0$ ، و F شامل مجموعه منحنی-مانند $F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ همراه با $F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ ، که از اندازه صفر است، می‌باشد. \square

بنابراین ۱- مجموعه‌های منظم اساساً اجتماع زیر مجموعه‌هایی از منحنی‌های طولپذیر هستند، اما ۱- مجموعه‌های نامنظم به هیچ وجه قطعه‌هایی از منحنی‌های طولپذیر را شامل نمی‌شوند. این دو حالتی بودن، جالب توجه است، چراکه تعریف منظم بودن صرفاً بر حسب چگالی‌ها بیان گردیده و اشاره‌ای به منحنی‌ها ندارد. گزاره‌های ۵-۶ و ۵-۸ فرق آشکارتری را فراهم می‌کنند. تقریباً در همه جا، یک مجموعه منظم چگالی پایین ۱ دارد، در حالیکه یک مجموعه نامنظم چگالی پایین حداکثر $\frac{3}{4}$ دارد. بنابراین در هر ۱- مجموعه F ، مجموعه نقاطی که برای آنها $1 < \underline{D}^1(F, x) < \frac{3}{4}$ ، دارای H^1 -اندازه صفر است.

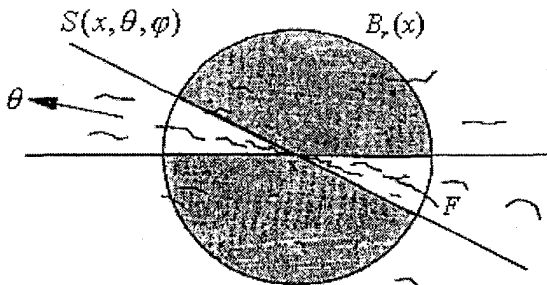
ممکن است ۱- مجموعه‌های منظم همبند باشند اما، مانند مجموعه‌های با بعد کم‌تر از یک، ۱- مجموعه‌های نامنظم باید ناهمبند کلی باشند. حداقل می‌دانیم که نقاط جدا از هم نمی‌توانند توسط یک منحنی طولپذیر در یک مجموعه نامنظم، به هم متصل شوند، و بررسی پیشتر نشان می‌دهد که هیچ دو نقطه‌ای نمی‌توانند در یک مولفه همبند قرار گیرند. تفاوت‌های دیگر بین مجموعه‌های منظم و نامنظم وجود تماس‌ها (بخش ۵-۳) و ویژگی‌های تصویر (فصل ۶) می‌باشند. در همه این حالات، دسته‌های ۱- مجموعه‌های منظم و نامنظم با هم تفاوت دارند، برای حالت خاص ۱- مجموعه‌ها، این احساس در ما به وجود می‌آید که فرکتال‌ها را به عنوان مجموعه‌هایی تعریف کنیم که نامنظم هستند.

۳-۵ مماس بر S - مجموعه‌ها

فرض کنید که یک منحنی هموار C یک مماس (معمولی) در x دارد. این بدین معنی است که نزدیک به x ، مجموعه C در دو طرف مخالف، انباشته شده است. درباره توزیع جهتی یک S -مجموعه اطراف یک نقطه چه می‌توان گفت؟ آیا می‌توان برای S -مجموعه‌ها مماس تعریف کرد و چه وقت چنین مماس‌هایی وجود دارند؟



شکل ۴-۵ قطاع دوگانه $S(x, \theta, \varphi)$



شکل ۵-۵ برای اینکه F در نقطه x یک مماس در جهت θ داشته باشد باید به ازای r کوچک، یک بخش جزئی از F در $B_r(x) \setminus S(x, \theta, \varphi)$ (بخش هاشورخورده) باشد.

هر تعمیم از تعریف مماس باید توزیع جهتی مجموعه‌ها با اندازه مثبت را منعکس کند- برای مجموعه‌های به هم ریخته‌ای که در ذهن داریم، امیدی برای یک تعریف فراگیر برای همه نقاط وجود ندارد؛ باید به یک شرط روی تقریباً همه نقاط قناعت کنیم. گوییم که یک s -مجموعه F در R^n یک مماس در x در جهت θ (θ یک بردار واحد) دارد، اگر

$$(۸-۵) \quad \overline{D}^s(F, x) > 0$$

و برای هر زاویه $\varphi > 0$,

$$(۹-۵) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{-s} H^s(F \cap (B_r(x) \setminus S(x, \theta, \varphi))) = 0$$

که $S(x, \theta, \varphi)$ قطاع دوگانه با رأس x ، و شامل آن γ ‌هایی است که پاره خط $[x, \gamma]$ یک زاویه حداکثر φ با θ یا $-\theta$ می‌سازد؛ شکل ۴-۵ را ببینید. بنابراین برای یک مماس، (۵-۸) مستلزم آن است که قسمت قابل توجهی از F نزدیک x قرار گیرد، که از این قسمت بنابر (۵-۹)، یک مقدار ناچیز خارج از هر قطاع متقابل به رأس $S(x, \theta, \varphi)$ قرار می‌گیرد؛ شکل ۵-۵ را ببینید.

ابتدا مماس بر ۱- مجموعه‌های منظم در صفحه را مطرح می‌کنیم، حالتی که با حساب کلاسیک منحنی‌ها تفاوت زیادی ندارد.

گزاره ۵-۱۰

یک منحنی طولپذیر C تقریباً در همه نقاطش مماس دارد.

برهان. بنابر لم ۵-۵ برای تقریباً هر $x \in C$ برای چگالی بالا، $\overline{D}^1(C, x) = 1 > 0$ می‌توانیم منحنی C را به وسیله پارامتر طول قوس تعریف کنیم، به طوری که $\psi: [0, \ell(C)] \rightarrow R^2$ ، $\psi(t)$ را به عنوان فاصله نقطه t در امتداد C از نقطه انتهایی $\psi(0)$ می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که توابع با تغییر کراندار تقریباً در همه جا مشتق‌پذیر هستند، بنابراین $\psi'(t)$ به عنوان یک بردار برای تقریباً هر t وجود دارد. به خاطر پارامتربندی طول قوس، برای چنین t ، $|\psi'(t)| = 1$. از این رو در تقریباً همه نقاط $\psi(t)$ روی C ، یک بردار واحد θ وجود دارد به طوری که $\lim_{u \rightarrow t} (\psi(u) - \psi(t)) / (u - t) = \theta$. بنابراین برای $\varphi > 0$ داده شده یک عدد $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که $\psi(u) \in S(\psi(t), \theta, \varphi)$ هرگاه $|u - t| < \varepsilon$. از آنجاییکه C هیچ نقطه خودقطعی ندارد می‌توانیم r را بیابیم به طوری که اگر $\psi(u) \notin B_r(\psi(t))$ ، بنابراین $\psi(u) \notin S(\psi(t), \theta, \varphi)$ ، $C \cap (B_r(\psi(t)) \setminus S(\psi(t), \theta, \varphi))$ تهی

است. بنابر (۸-۵) و (۹-۵)، منحنی C یک مماس در $\psi(t)$ دارد. این واقعیت برای تقریباً هر نقطه روی C درست است. \square

عیناً مانند چگالی‌ها، می‌توانیم ویژگی‌های مماس‌ها را از منحنی‌ها به مجموعه‌های منحنی-مانند انتقال دهیم.

گزاره ۵-۱۱

یک ۱- مجموعه منظم F در R^2 ، تقریباً در همه نقاطش دارای مماس است.

برهان. بنابر تعریف منظم بودن، $\bar{D}^1(F, x) = 1 > 0$ در تقریباً هر $x \in F$.

اگر C هر منحنی طولپذیر باشد، آنگاه برای تقریباً هر $x \in C$ ، θ ای وجود دارد به طوریکه اگر $\varphi > 0$ ، بنابر گزاره ۵-۱۰ داریم،

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} H^1((F \cap C) \cap (B_r(x) \setminus S(x, \theta, \varphi)))$$

$$\leq \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} H^1(C \cap (B_r(x) \setminus S(x, \theta, \varphi))) = 0.$$

به علاوه برای تقریباً هر $x \in C$ ، بنابر ویژگی ۵-۱ (آ) داریم

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} H^1((F \setminus C) \cap (B_r(x) \setminus S(x, \theta, \varphi)))$$

$$\leq \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} H^1((F \setminus C) \cap (B_r(x))) = 0$$

با جمع کردن این نامعادله‌ها، برای تقریباً هر $x \in C$ و بنابراین برای تقریباً هر $x \in F \cap C$ خواهیم داشت

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} H^1(F \cap (B_r(x) \setminus S(x, \theta, \varphi))) = 0.$$

از آنجاییکه یک گردایه شمارا از چنین منحنی‌هایی تقریباً همه F را می‌پوشاند، نتیجه حاصل می‌شود. \square

بر خلاف مجموعه‌های منظم، ۱- مجموعه‌های نامنظم عموماً دارای مماس نمی‌باشند.

گزاره ۵-۱۲

تقریباً در هیچ نقطه‌ای از یک ۱- مجموعه نامنظم، مماس وجود ندارد.

برهان. از آنجا که برهان به بیان ویژگی‌های خاص مجموعه‌های نامنظم به عنوان مجموعه‌های پوچ-منحنی، مربوط می‌شود، پیچیده بوده و لذا حذف می‌شود. \square

اکنون به بحث S -مجموعه‌های در R^2 ، برای گهای ناصحیح، باز می‌گردیم، این مجموعه‌ها همانطور که دیدیم، نامنظم هستند. به ازای $0 < s < 1$ سوالاتی که مربوط به مماس هستند،

جالب توجه نمی‌باشند، چرا که هر مجموعه مشمول در یک منحنی هموار به ازای θ به عنوان جهت مماس بر منحنی در نقطه x خود به خود در $(5-9)$ صدق می‌کند. برای مثال، مجموعه یک سوم میانی کانتور F ، که به عنوان زیرمجموعه‌ای از صفحه در نظر گرفته می‌شود، یک $-\log 2 / \log 3$ - مجموعه است که برای هر x در F و $\varphi > 0$ ، در $5-8$ و $5-9$ صدق می‌کند، که θ یک بردار در جهت امتداد مجموعه می‌باشد. از سوی دیگر اگر F ، مثلاً، ضرب دکارتی دو مجموعه یکنواخت کانتور باشد که هر یک به وسیله حذف‌های مکرر با نسبت $\alpha > \frac{1}{2}$ از وسط بازه‌ها، ساخته شده‌اند، آنگاه یک محاسبه مختصر (فصل ۷ را ببینید) نشان می‌دهد که F یک s - مجموعه با $s = 2 \log 2 / \log(2/(1-\alpha)) < 1$ می‌باشد که در هیچ نقطه‌ای مماس ندارد.

اکنون باید قابل فهم باشد که وقتی $1 < s < 2$ ، s - مجموعه‌ها در R^2 نیز دارای مماس نمی‌باشند - چنین مجموعه‌هایی آنقدر بزرگ هستند که در چندین جهت از یک نقطه نوعی منشعب می‌شوند، به طوریکه $(5-9)$ نمی‌تواند برقرار باشد. این مطلب دقیقاً در گزاره زیر بیان شده است.

گزاره ۵-۱۳

اگر F یک s - مجموعه در R^2 با $1 < s < 2$ باشد، آنگاه تقریباً در هیچ نقطه‌ای از F مماس وجود ندارد.

برهان. برای $r_0 > 0$ فرض کنید

$$(5-10) \quad E = \left\{ y \in F : H^s(F \cap B_r(y)) < 2(2r)^s, \forall r < r_0 \right\}.$$

برای هر $x \in F$ هر بردار واحد θ و هر زاویه φ که $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ ، مساحت قسمتی از مجموعه E را که در $B_r(x) \cap S(x, \theta, \varphi)$ قرار می‌گیرد، تخمین می‌زنیم. برای $r < r_0/20$ و $i = 1, 2, \dots$ فرض کنید A_i اشتراک طوق و قطاع متقابل به رأس داده شده در زیر باشد

$$A_i = (B_{ir\varphi}(x) \setminus B_{(i-1)r\varphi}(x)) \cap S(x, \theta, \varphi).$$

آنگاه برای عدد صحیح $m < 2/\varphi$ داریم، $B_r(x) \cap S(x, \theta, \varphi) \subset \bigcup_{i=1}^m A_i \cup \{x\}$ ، هر A_i شامل دو بخش، هر دو با قطر حداکثر $10r\varphi < r_0$ می‌باشد، بنابراین با به کار بردن $(5-10)$ در بخش‌هایی که شامل نقاط E هستند، و جمع آنها داریم،

$$H^s(E \cap B_r(x) \cap S(x, \theta, \varphi)) \leq (4\varphi^{-1})2(20r\varphi)^s$$

$$(11-5) \quad (2r)^{-s} H^s(E \cap B_r(x) \cap S(x, \theta, \varphi)) \leq 8 \cdot 10^s \varphi^{s-1}$$

به شرطی که $r < r_0/20$.

اکنون بنابر گزاره ۵-۱(آ)، تقریباً هر $x \in E$ در $\bar{D}^s(F \setminus E, x) = 0$ صدق می‌کند. با تجزیه $F \cap B_r(x)$ به سه بخش، به دست می‌آوریم

$$H^s(F \cap B_r(x)) = H^s((F \setminus E) \cap B_r(x)) + H^s(E \cap B_r(x) \cap S(x, \theta, \varphi)) + H^s(E \cap (B_r(x) \setminus S(x, \theta, \varphi))).$$

با تقسیم بر $(2r)^s$ و گرفتن حد بالایی هنگامی که $r \rightarrow 0$ ، با استفاده از (۵-۱۱)، برای تقریباً هر $x \in E$ داریم،

$$\bar{D}^s(F, x) \leq 0 + 8 \cdot 10^s \varphi^{s-1} + \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} (2r)^{-s} H^s(F \cap (B_r(x) \setminus S(x, \theta, \varphi)))$$

با انتخاب φ به اندازه کافی کوچک، نتیجه می‌شود که (۵-۸) و (۵-۹) هر دو نمی‌توانند برای هر θ برقرار باشند، بنابراین هیچ مماسی در x وجود ندارد. برای کامل کردن برهان، توجه می‌کنیم که تقریباً هر $x \in F$ بنابر گزاره ۵-۱(ب) متعلق به مجموعه E تعریف شده در (۵-۱۰) برای یک $r_0 > 0$ می‌باشد. \square

نتایج این فصل سرآغازی برای فراهم آوردن تصویری موضعی از فرکتال‌هایی که s -مجموعه هستند، می‌باشد. اگر این تکنیک‌ها را بیشتر به کار بگیریم، به دست آوردن تخمین‌های دقیق‌تر چگالی‌ها و نیز توزیع‌های جهتی s -مجموعه‌ها در اطراف نقاط نوعی، امکان‌پذیر می‌باشد. برای مثال می‌توان نشان داد که اگر $s > 1$ ، تقریباً هر خطی که سرتاسر H^s -تقریباً هر نقطه از یک s -مجموعه F را طی می‌کند، آن را در یک مجموعه $s-1$ بعدی قطع می‌کند. اخیراً، اندازه بسته‌بندی (بخش ۳-۴) در مطالعه ویژگی‌های موضعی به کار رفته و نشان داده شده است که منظم بودن یک مجموعه بستگی زیادی به برابری اندازه بسته‌بندی و اندازه هاوسدورف آن (با اندکی تغییر) دارد.

این نظریه را می‌توان با کوشش بسیار، به ابعاد بالاتر توسعه داد. s -مجموعه‌های منظم در R^2 را می‌توان با استفاده از چگالی‌ها تعریف کرد، دوباره تأکید می‌کنیم که s -مجموعه‌ها می‌توانند منظم باشند فقط اگر s یک عدد صحیح باشد. s -مجموعه‌های منظم تقریباً در همه جا دارای مماس هستند و در حالتی که به وسیله یک گردایه شمارا از تصاویر لپیشیتس زیرمجموعه‌های R^2 پوشانده شوند، "رویه-مانند s -بعدی" هستند، به جز آن که دارای H^s -اندازه صفر باشند.

۴-۵ نکات و منابع

این فصل به زمینه‌های عمیق از ریاضیات معروف به نظریه هندسی اندازه مربوط می‌شود. منابع آن مقاله‌های اصلی *Besicovitch* (۱۹۲۸، ۱۹۳۸) می‌باشد که شامل تحلیل بسیار کاملی از ۱- مجموعه‌ها در صفحه است. نتایج روی S -مجموعه‌ها در صفحه به ازای S های ناصحیح به واسطه *Marstrand* (۱۹۴۵ا) می‌باشد. تعدادی از نویسندگان این نتایج را به زیرمجموعه‌های فضاهایی با ابعاد بالاتر تعمیم داده‌اند، که در مقاله *Priess* (۱۹۸۷) به اوج می‌رسد و در آن به بسیاری از مسائل مطرح پاسخ داده شده است. بحث مفصل‌تری از S -مجموعه‌ها در صفحه در *Falconer* (۱۹۸۵ا) یافت می‌شود، *Federer* (۱۹۶۹) را نیز ببینید.

تمرین‌ها

- ۱-۵ با به کار بردن گزاره ۱-۵ برای $n = 2$ ، قضیه چگالی لبگ (۱-۵) را نتیجه بگیرید.
- ۲-۵ فرض کنید $f: R \rightarrow R$ یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد به طوریکه به ازای هر x ، $0 < c_1 \leq f'(x) \leq c_2$. نشان دهید که اگر F یک S -مجموعه در R باشد، آنگاه به ازای هر x در R ، $\underline{D}^s(f(F), f(x)) = \underline{D}^s(F, x)$ ، نتیجه مشابهی هم برای چگالی‌های بالا برقرار است.
- ۳-۵ فرض کنید F مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد. نشان دهید که به ازای هر x ، $\underline{D}^s(F, x) \leq 2^{-s}$ که $s = \log 2 / \log 3$. نتیجه بگیرید که F نامنظم است.
- ۴-۵ چگالی‌های بالایی و پایینی را در نقاط ۱- مجموعه نشان داده شده در شکل ۴-۰ تخمین بزنید و نشان دهید که این مجموعه نامنظم است.
- ۵-۵ برهان قضیه ۲-۵ را تغییر دهید و ثابت کنید اگر F یک S -مجموعه با $0 < s < 1$ باشد، آنگاه به ازای تقریباً هر x ، $\underline{D}^s(F, x) \leq (1 + 2^{s/(s-1)})^{s-1}$.
- ۶-۵ یک ۱-مجموعه منظم بسازید که کلاً ناهمبند باشد. (راهنمایی: از یک منحنی طول‌پذیر شروع کنید.)
- ۷-۵ فرض کنید E و F دو S -مجموعه در R^2 باشند به طوریکه برای هر قرص $B_r(x)$ داشته باشیم $H^s(B_r(x) \cap E) \leq H^s(B_r(x) \cap F)$. نشان دهید که $H^s(E \setminus F) = 0$. آیا شرط $E \subset F$ لازم است؟
- ۸-۵ فرض کنید F_1, F_2, \dots, F_k ۱-مجموعه‌هایی در صفحه باشند به طوریکه $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ یک ۱-مجموعه باشد. نشان دهید اگر F_k به ازای هر k منظم باشد آنگاه F منظم است، و اگر F_k به ازای هر k نامنظم باشد آنگاه F نیز نامنظم است.

فصل ۶ تصاویر فرکتال‌ها

در این فصل تصویر قائم یا سایه فرکتال‌ها در R^n روی زیرفضاهای با بعد پایین‌تر را مطالعه می‌کنیم. همچنانکه در بخش بالایی شکل ۶-۱ آمده است، سایه یک منحنی (۱- بعدی) هموار در R^3 به طور کلی یک منحنی (۱- بعدی) روی یک صفحه می‌باشد، اما یک رویه (۲- بعدی) یا جسم توپر (۳- بعدی) به طور کلی یک سایه ۲- بعدی دارند. این وضعیت را برای فرکتال‌ها آزمایش می‌کنیم. به طور شهودی انتظار می‌رود که یک مجموعه F در R^3 ، تصویر مسطح با بعد ۲ داشته باشد هر گاه $\dim_H F > 2$ ، و دارای بعد $\dim_H F$ است اگر $\dim_H F < 2$ ، همچنانکه در بخش پایین شکل ۶-۱ مشاهده می‌شود. به طور نادقیق این گفته درست است، اما برای یک فرمول بندی دقیق از ویژگی‌های تصویر به بررسی بیشتری نیازمندیم.

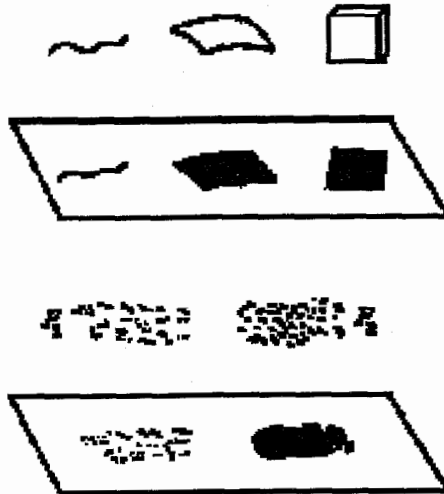
قضایای تصویر را در ساده‌ترین حالت یعنی برای تصویر زیرمجموعه‌های صفحه روی خطوط ثابت می‌کنیم، و سپس آنها را برای بعدهای بالاتر بیان می‌کنیم.

۱.۶ تصاویر مجموعه‌های دلخواه

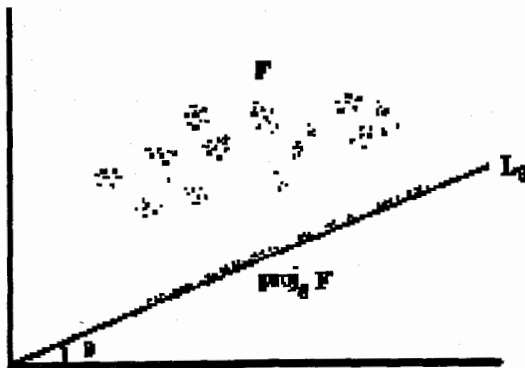
فرض کنید L_θ خط گذرنده از مبدأ در R^2 باشد که با محور افقی زاویه θ می‌سازد. تصویر قائم روی L_θ را با $proj_\theta$ نشان می‌دهیم، یعنی اگر F یک زیر مجموعه از R^2 باشد، آنگاه $proj_\theta F$ تصویر F روی L_θ می‌باشد؛ شکل ۶-۲ را ببینید. به وضوح هر گاه $x, y \in R^2$ ، $|proj_\theta x - proj_\theta y| \leq |x - y|$ ، یعنی $proj_\theta$ یک تابع لیبیشیتس می‌باشد. بنابراین بنابر نتیجه ۴-۲ (آ) برای هر F و θ ،

$$\dim_H(proj_\theta F) \leq \min\{\dim_H F, 1\} \quad (۱-۶)$$

(چون $proj_{\theta} F$ زیرمجموعه‌ای از خط L_{θ} است، بعد آن نمی‌تواند بیشتر از ۱ باشد.) سوال جالب توجه این است که آیا عکس این نامعادله صحیح است یا نه. قضایای تصویر می‌گویند که تقریباً برای هر $\theta \in [0, \pi)$ ، چنین است؛ یعنی مقادیر استثنایی از θ که برای آنها نامعادله (۱-۶) اکید است، مجموعه‌ای با طول صفر (اندازه لبگ -۱ بعدی) تشکیل می‌دهند.



شکل ۱-۶ بالا: تصویر مجموعه‌های کلاسیک روی یک صفحه - یک منحنی نوعاً دارای تصویری از بعد ۱ است، اما رویه و مکعب تصویری از بعد ۲ و یا مساحت مثبت دارند. پایین: تصاویر مجموعه‌های فرکتالی روی یک صفحه. اگر $\dim_H F_1 < 1$ و $\dim_H F_2 > 1$ آنگاه نوعاً تصویر F_1 دارای بعد مساوی با $\dim_H F_1$ (و مساحت صفر) و تصویر F_2 بعد ۲ و مساحت مثبت دارد.



شکل ۲-۶ تصویر یک مجموعه F روی خط L_{θ}

قضیه تصویر ۶-۱

فرض کنید $F \subset R^2$ یک زیرمجموعه بورد باشد.

- (آ) اگر $\dim_H F \leq 1$ آنگاه $\dim_H (proj_\theta F) = \dim_H F$ برای تقریباً هر $\theta \in [0, \pi)$.
- (ب) اگر $\dim_H F > 1$ آنگاه $proj_\theta F$ (به عنوان زیرمجموعه‌ای از L_θ) طول مثبت دارد و بنابراین برای تقریباً هر $\theta \in [0, \pi)$ دارای بعد ۱ است.

برهان. اثباتی ارائه می‌دهیم که از توصیف نظریه پتانسیلی بعد هاوسدورف به طور موثری استفاده می‌کند. اگر $s < \dim F \leq 1$ آنگاه بنابر قضیه ۴-۱۳ (ب) یک توزیع جرم μ روی (یک زیرمجموعه فشرده از) F با $0 < \mu(F) < \infty$ وجود دارد و

$$(۲-۶) \quad \int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} < \infty.$$

برای هر θ ، توزیع جرم μ را روی خط L_θ تصویر می‌کنیم تا به یک توزیع جرم μ_θ روی $proj_\theta F$ برسیم. بنابراین μ_θ با این قید که برای هر بازه $[a, b]$ ،

$$\mu_\theta([a, b]) = \mu\{x : a \leq x.\theta \leq b\}$$

تعریف می‌شود، یا به طور معادل، برای هر تابع نامنفی f

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\mu_\theta(t) = \int_F f(x.\theta) d\mu(x)$$

(در اینجا θ بردار واحد در جهت θ است، x با بردار مکانش شناخته می‌شود و $x.\theta$ ضرب اسکالر معمولی است.) در این صورت برای هر بردار واحد τ داریم،

$$(۳-۶) \quad \begin{aligned} \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_\theta(u)d\mu_\theta(v)}{|u-v|^s} \right] d\theta &= \int_0^\pi \left[\int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x.\theta - y.\theta|^s} \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|(x-y).\theta|^s} \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\tau.\theta|^s} \int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} \end{aligned}$$

(توجه کنید که انتگرال $|(x-y).\theta|^s$ نسبت به θ فقط به $|x-y|$ بستگی دارد.) اگر $s < 1$ آنگاه مقدار عبارت (۳-۶) بنابر نامساوی (۲-۶) و اینک

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{|\tau.\theta|^s} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\cos(\tau-\theta)|^s} < \infty$$

مستثنای است. از این رو برای تقریباً هر $\theta \in [0, \pi)$

$$\int_F \int_F \frac{d\mu_\theta(u)d\mu_\theta(v)}{|u-v|^s} < \infty$$

بنابر قضیه ۴-۱۳ (آ) وجود یک چنین توزیع جرم μ_θ روی $proj_\theta F$ ایجاب می‌کند که $\dim_H(proj_\theta F) > s$. این نامساوی برای هر $s < \dim_H(F)$ درست است، بنابراین بخش (آ) قضیه، حاصل می‌شود.

برهان (ب) مشابه (الف) می‌باشد، هر چند برای این که نشان دهیم که تصاویر طول مثبت دارند، نیاز به معرفی کردن تبدیل‌های فوریه می‌باشد. □

این قضایای تصویر، به طور طبیعی به ابعاد بالاتر تعمیم می‌یابند. فرض کنید $G_{n,k}$ مجموعه زیرفضاهای k -بعدی یا " k - صفحه‌های گذرنده از مبدا" در R^n باشد. این زیرفضاها به طور طبیعی با $k(n-k)$ مختصات ("کسینوس‌های جهتی تعمیم یافته") پارامتری می‌شوند، به طوری که می‌توانیم به "تقریباً همه" زیرفضاها به روشی منطقی بر حسب اندازه لبگ $k(n-k)$ -بعدی، رجوع کرد. عبارت $proj_\Pi$ را برای تصویر قائم روی k -وجهی Π ، به کار می‌بریم.

قضیه ۶-۲. قضایای تصویر در ابعاد بالاتر

فرض کنید $F \subset R^n$ یک مجموعه بورل باشد.

(آ) اگر $\dim_H F \leq k$ ، آنگاه $\dim_H(proj_\Pi F) = \dim_H F$ برای تقریباً هر $\Pi \in G_{n,k}$.

(ب) اگر $\dim_H F > k$ ، آنگاه $proj_\Pi F$ دارای اندازه k -بعدی مثبت است و بنابراین برای تقریباً هر $\Pi \in G_{n,k}$ ، دارای بعد k می‌باشد.

برهان. برهان قضیه ۶-۱ به راحتی به ابعاد بالاتر تعمیم می‌یابد. □

بنابراین اگر F زیرمجموعه‌ای از R^3 باشد تصویر مسطح F در حالت کلی، از بعد $\min\{2, \dim_H F\}$ می‌باشد. این نتیجه نتایج عملی مهمی دارد. ما می‌توانیم بعد یک جسم در فضا را با تخمین بعد یک عکس گرفته شده از مجموعه از یک جهت تصادفی، تخمین بزنیم. اگر بعد جسم کمتر از ۲ باشد می‌توان بعد تصویر را مساوی بعد جسم در نظر گرفت. یک چنین کاهش در بعد می‌تواند تخمین بعد اجسام فضایی را آسان‌تر سازد. روش‌های جعبه - شمار برای استفاده در فضای ۳ بعد مشکل هستند، اما به نحو معقولانه‌ای در صفحه می‌توانند مفید واقع شوند.

۲-۶ تصویر s - مجموعه‌های از بعد صحیح

اگر یک زیرمجموعه F از R^2 دقیقاً دارای بعد هاوسدورف ۱ باشد، قضیه ۱-۶ می‌گوید که تصاویر F روی تقریباً هر L_θ ، دارای بعد ۱ است. به هر حال در این حالت، هیچ اطلاعاتی مانند این که آیا این تصاویر دارای طول مثبت یا صفر هستند، داده نمی‌شود. در حالت خاص، وقتی که F یک ۱- مجموعه است، یعنی $0 < H^s(F) < \infty$ ، یک تحلیل امکانپذیر است. از قضیه ۳-۵ به یاد آورید که یک ۱- مجموعه را می‌توان به یک بخش منحنی - مانند منظم و یک بخش پوچ - منحنی نامنظم، تجزیه کرد. دو قضیه زیر یک تباین دقیق دیگر بین این نوع مجموعه‌ها را بیان می‌کنند.

قضیه ۳-۶

فرض کنید F یک ۱- مجموعه منظم در R^2 باشد. آنگاه $proj_\theta F$ جز برای حداکثر یک $\theta \in [0, \pi)$ ، طول مثبت دارد.

شرح خلاصه برهان. بنابر قضیه ۹-۵ (ب) کافی است نتیجه را برای حالتی ثابت کنیم که F زیرمجموعه‌ای با طول مثبت از یک منحنی طولپذیر C باشد. با استفاده از قضیه چگالی لبگ برای تقریب یک چنین F ی با زیرمنحنی‌های پیوسته کوچک از C ، آنچه که نیاز به بررسی دارد، حالتی است که F خود یک منحنی طولپذیر C_1 است که متصل کننده نقاط جدا از هم x و y می‌باشد. اما به وضوح تصویر یک چنین منحنی روی L_θ یک بازه با طول مثبت است، به جز احتمالاً برای یک مقدار از θ که به ازای آن L_θ بر خط مستقیم مار بر x و y ، عمود باشد. \square

(در حالت کلی $proj_\theta F$ برای هر θ طول مثبت خواهد دارد؛ فقط اگر F در یک مجموعه از پاره خط‌های موازی قرار داشته باشد یک مقدار استثنایی از θ وجود دارد)

قضیه ۴-۶

فرض کنید F یک ۱- مجموعه نامنظم در R^2 باشد. آنگاه $proj_\theta F$ برای تقریباً هر $\theta \in [0, \pi)$ ، دارای طول صفر است.

برهان. برهان پیچیده است و به چگالی‌های گوشه‌ای و زاویه‌ای ربط دارد. ما آن را حذف می‌کنیم! \square

این قضایا می‌توانند به چندین روش به هم پیوندند.

نتیجه ۵-۶

فرض کنید F یک ۱- مجموعه در R^2 باشد. اگر بخش منظم F دارای H^1 -اندازه صفر باشد، آنگاه $proj_{\theta} F$ برای تقریباً هر θ دارای طول صفر است؛ در غیر این صورت جز برای حداکثر یک مقدار از θ ، دارای مقدار مثبت است.

بیان ویژگی اختصاصی زیر از مجموعه‌های نامنظم نیز مفید است.

نتیجه ۶-۶

یک ۱- مجموعه در R^2 نامنظم است اگر و فقط اگر در حداقل دو جهت دارای تصاویر با طول صفر باشد.

مثال ۶-۷

مجموعه F از شکل ۴-۰ یک ۱- مجموعه نامنظم است.

محاسبه. در مثال ۶-۲ نشان دادیم که F یک ۱- مجموعه است. به سادگی می‌توان دید که تصویر F روی خطوط L_{θ} با $\tan \theta = \frac{1}{2}$ و $\tan \theta = -2$ ، دارای طول صفر است (به چند تکرار اول نگاه کنید)، بنابراین بر اساس نتیجه ۶-۶، F نامنظم است. \square

نتایج این بخش برای مجموعه‌هایی بیان شده است که دارای ویژگی $0 < H^1(F) < \infty$ می‌باشند، که یک شرط نسبتاً قوی برای مجموعه‌های ۱- بعدی می‌باشد، هر چند به طور شگفت‌انگیزی اغلب این اتفاق می‌افتد. به هر حال، قضایا می‌توانند نسبتاً به طور گسترده‌تری به کار روند. اگر F هر مجموعه‌ای باشد که منحنی طول‌پذیری را در مجموعه‌ای از طول مثبت قطع می‌کند، به طوری که F شامل یک زیرمجموعه منظم باشد، آنگاه $proj_{\theta} F$ برای تقریباً هر θ دارای طول مثبت است. دوباره، اگر F یک مجموعه نامنظم σ -متناهی باشد؛ یعنی مجموعه‌ای که می‌تواند به عنوان اجتماع شمارایی از ۱- مجموعه‌های نامنظم هر کدام با اندازه متناهی، بیان شود، آنگاه $proj_{\theta} F$ برای تقریباً هر θ دارای طول صفر است؛ این مطلب با گرفتن اجتماع‌های شمارا از تصاویر این ۱- مجموعه‌های مولفه‌ای، نتیجه می‌شود.

برای تکمیل موضوع، نظیر قضایای ۶-۳ و ۶-۴ را برای ابعاد بالاتر بیان می‌کنیم، هر چند اثبات‌ها هم پیچیده تر از حالت مسطح می‌باشند.

قضیه ۸-۶

فرض کنید F یک k -مجموعه در R^n باشد، که k یک عدد صحیح است.

(آ) اگر F منظم باشد آنگاه $proj_{\Pi} F$ برای تقریباً هر $\Pi \in G_{n,k}$ ، دارای اندازه k -بعدی مثبت است.

(ب) اگر F نامنظم باشد آنگاه $proj_{\Pi} F$ برای تقریباً هر $\Pi \in G_{n,k}$ ، دارای اندازه k -بعدی صفر است.

۶-۳ تصاویر مجموعه‌های دلخواه از بعد صحیح

قضایای بخش قبل، هر چند که از لحاظ ریاضی زیبا و در سطح بالایی هستند، جواب کاملی را برای این سوال فراهم نمی‌کنند که آیا تصاویر مجموعه‌های مسطح روی خطوط دارای طول صفر هستند یا مثبت. وقتی آنالیز زیرمجموعه F از R^2 با بعد هاوسدورف ۱ پیچیده است، F لزوماً یک ۱-مجموعه یا حتی از H^1 - اندازه σ -متناهی (یعنی، یک اجتماع شمارا از مجموعه‌هایی با H^1 -اندازه متناهی) نیست. به علاوه لزومی ندارد یک تابع بعد مانند h موجود باشد که برای آن $0 < H^h(F) < \infty$ ، بخش ۲-۵ را ببینید. در مورد تصاویر چنین مجموعه‌هایی چه می‌توان گفت؟ پاسخ شگفت‌انگیز این است که با کار کردن در محدوده نسبتاً ظریف مجموعه‌های با بعد هاوسدورف ۱ اما نه با H^1 - اندازه σ -متناهی، می‌توانیم مجموعه‌هایی با تصاویری کم و بیش مطلوب بسازیم. برای مثال یک مجموعه F در R^2 وجود دارد به طوری که $proj_{\theta} F$ برای تقریباً هر θ که $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ ، شامل یک بازه با طول ۱ است، اما برای $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ ، $proj_{\theta} F$ با طول صفر است. به طور کلی‌تر نتیجه زیر را داریم که می‌گوید: مجموعه‌هایی وجود دارند که تصاویر آنها تقریباً در همه جهتها هر آنچه که ما علاقمندیم باشند. شرط اندازه‌پذیری در گروه برای کامل شدن فرضیات آورده شده، اما بهتر است که غیر متخصص‌ها از آن چشم‌پوشی کنند.

قضیه ۹-۶

فرض کنید G_{θ} برای هر $\theta \in [0, \pi)$ زیرمجموعه‌ای از L_{θ} باشد (به طوری که مجموعه مسطح $\bigcup_{0 \leq \theta < \pi} G_{\theta}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد). آنگاه یک مجموعه بورل $F \subset R^2$ وجود دارد به طوری که

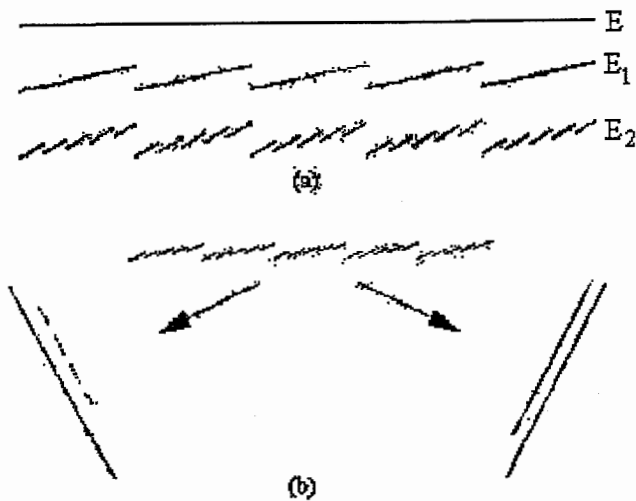
(آ) برای تقریباً هر θ ، $proj_{\theta} F \supset G_{\theta}$ و

(ب) برای تقریباً هر θ ، $length(proj_{\theta}F \setminus G_{\theta}) = 0$.

به ویژه، برای تقریباً هر θ ، مجموعه نقاط L_{θ} که دقیقاً به یکی از مجموعه‌های G_{θ} یا $proj_{\theta}F$ متعلق می‌باشند، طول صفر دارد.

طرح برهان.

بدون درگیری با جزئیات، قالب سازنده اصلی را برای چنین مجموعه‌هایی معرفی می‌کنیم که ساختار "درز کردن تکراری ون" نامیده شده است. این ساختار در شکل ۶-۳ نشان داده شده است. فرض کنید E یک پاره خط با طول λ باشد. فرض کنید ε زاویه‌ای کوچک و k عددی بزرگ باشد. E را با k پاره خط به طول تقریبی λ/k و هر کدام با زاویه ε نسبت به E و با نقاط انتهایی که به طور مساوی در امتداد E از هم فاصله داده شده اند، جایگزین می‌کنیم تا یک مجموعه جدید E_1 تشکیل شود. این روند را با هر قطعه از E_1 تکرار می‌کنیم، تا یک مجموعه E_2 شامل k^2 پاره خط، همه با طول تقریباً λ/k^2 و تحت زاویه 2ε با E ، تشکیل شود. این روند را ادامه می‌دهیم تا به E_r ، مجموعه‌ای از k^r پاره خط، همه با طول تقریباً λ/k^r و تحت زاویه $r\varepsilon$ با E برسیم. هنگامی که r به گونه‌ای باشد که $r\varepsilon$ ، مثلاً، حدود $\frac{1}{4}\pi$ شود، توقف می‌کنیم. با مقایسه تصاویر E_r با تصویر پاره خط اصلی E می‌بینیم که اگر $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ آنگاه $proj_{\theta}E$ و $proj_{\theta}E_r$ تقریباً یکسان هستند (از آنجاییکه خطوط عمود بر L_{θ} که E را قطع می‌کنند، E_r را نیز قطع می‌کنند). به هر حال اگر $-\frac{1}{4}\pi < \theta < 0$ آنگاه $proj_{\theta}E_r$ طول بسیار کوچکی خواهد داشت، چرا که بیشتر خطوط عمود بر L_{θ} ، به طور مستقیم از میان میله‌های ساختار که به طور مناسب زاویه دار شده‌اند عبور خواهند کرد. بنابراین تصاویر E_r بسیار مشابه تصویر E در برخی جهت‌های خاص می‌باشد، اما در جهت‌های دیگر تقریباً قابل اغماض هستند. این طرز کار می‌تواند برای به دست آوردن مجموعه‌هایی با تصاویر بسیار نزدیک به G_{θ} در یک دسته باریک از جهت‌ها اما با تصاویر تقریباً تهی در جهت‌های دیگر، به کار گرفته شود. گرفتن اجتماع از چنین مجموعه‌هایی برای دسته‌های کوچک گوناگون از جهت‌ها، مجموعه‌ای با ویژگی‌های تقریباً مطلوب می‌دهد. گرفتن حد از دنباله‌ای از مجموعه‌ها که به طور صعودی تقریب‌های درست می‌دهد، به مجموعه‌ای با ویژگی‌های بیان شده منجر می‌شود. \square



شکل ۳-۶ (آ) ساختار "درز کردن تکراری ون". (ب) تصاویر در دسته‌های مشخصی از جهت‌ها طول‌های بزرگی دارند، در حالیکه در دسته‌های دیگر از جهت‌ها طول‌های بسیار کوچکی دارند.



شکل ۴-۶ یک شاخص آفتاب دیجیتال

این ساختار می‌تواند به ابعاد بالاتر تعمیم یابد: یک مجموعه F در R^n وجود دارد به طوریکه تقریباً همه تصاویر F روی زیرفضاهای k - بعدی صفر اختلاف دارند. به ویژه یک مجموعه در فضای ۳- بعدی وجود دارد که تقریباً همه سایه‌های مسطح آن هر آنچه که ما می‌خواهیم هست، احیاناً با اختلاف مجموعه‌ای با مساحت صفر. اگر بخواهیم هنگامی که خورشید از یک زاویه قائم می‌تابد، سایه‌ها ارقام نشانگر زمان باشند یک ساعت آفتابی دیجیتالی، حداقل از لحاظ نظری، به دست می‌آوریم؛ شکل ۶-۴ را ببینید. هنگامی که خورشید در آسمان حرکت می‌کند تصاویر متفاوتی از مجموعه به دست می‌آوریم. بهتر است این را به عنوان یک مثال جالب از نتیجه فوق در نظر بگیرید تا یک روش عملی برای زمان سنجی!

۶-۴ نکات و منابع

یک اثبات هندسی از قضایای تصویر به ازای زیرمجموعه‌های دلخواه از صفحه، در کتاب *Marstrand* (۱۹۵۴a) آورده شده است؛ برهان نظریه پتانسیل به کتاب *Kaufman* (۱۹۶۸) مربوط می‌شود. *Mattila* (۱۹۷۵) در تعمیم به بعدهای بالاتر، به پیشرفت‌های چشمگیری رسیده است. نتایج تصویر برای ۱- مجموعه‌های منظم و نامنظم در صفحه، با کمال تعجب، به زمان‌های عقب‌تر یعنی به زمان *Besicovitch* (۱۹۳۹) برمی‌گردد و نتایج متناظر برای S - مجموعه‌ها در R^n ، در آثار *Federer* (۱۹۴۷) آمده است. شکل دوگان قضیه ۶-۹ توسط *Davies* (۱۹۵۲)، و برهان مستقیمی با تعمیم به ابعاد بالاتر توسط *Falconer* (۱۹۸۶) ارائه شده است.

تمرین‌ها

- ۱-۶ به ازای $0 < s < 1$ ، مثالی از یک S - مجموعه F در R^2 بیاورید به طوریکه $proj_\theta F$ به ازای هر θ یک S - مجموعه باشد.
- ۲-۶ فرض کنید E و F زیرمجموعه‌هایی از R باشند. نشان دهید که به ازای تقریباً هر عدد حقیقی λ ،

$$\dim_H(E + \lambda F) = \min\{1, \dim_H(E \times F)\}$$

که در آن $E + \lambda F$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی به صورت $\{x + \lambda y : x \in E, y \in F\}$ می‌باشد.

- ۳-۶ فرض کنید E و F زیرمجموعه‌هایی از R با بعد هاوسدورف اکیداً بین 0 و 1 باشند. خواهیم دید که زیرمجموعه $E \times F$ از R^2 دارای بعد هاوسدورف حداقل $\dim_H E + \dim_H F$ می باشد (فصل ۷ را ببینید). نشان دهید که تصویرهای $E \times F$ به روی محورهای مختصات همواره برای قضیه تصویر ۶-۱ استثنا هستند.
- ۴-۶ فرض کنید F زیرمجموعه‌ای همبند از R^2 و شامل بیش از یک نقطه باشد. نشان دهید که $\text{proj}_\theta F$ به ازای همه مقادیر θ استثنای احتمالاً یک مقدار از θ دارای طول مثبت است. (بنابراین برای مجموعه‌هایی که همبند نیستند، در حقیقت تنها قضایای تصویر در صفحه مطلوب می‌باشند).
- ۵-۶ نشان دهید که نتایج قضیه ۶-۴ برای حالتی که F اجتماع شمارایی از 1 -مجموعه‌های نامنظم باشد، برقرار می‌ماند.
- ۶-۶ فرض کنید E و F زیرمجموعه‌های دلخواهی از R با طول (اندازه ۱- بعدی لیگ) 0 باشند. نشان دهید که هر منحنی طول‌پذیر در R^2 با حاصلضرب $E \times F$ دارای اشتراکی به طول 0 می‌باشد.
- ۷-۶ اگر F یک مجموعه و x نقطه‌ای در R^2 باشد، تصویر F در x ، که با $\text{proj}_x F$ نشان داده می‌شود، به عنوان مجموعه‌ای از اعداد θ در $(0, 2\pi)$ تعریف می‌شود به طوری که نیم‌خط با راس x و زاویه θ ، F را قطع کند. فرض کنید L یک خط باشد. نشان دهید که اگر $\dim_H F \leq 1$ آنگاه به ازای تقریباً هر x روی L (در معنای اندازه لیگ)، $\dim_H \text{proj}_x F = \dim_H F$ ، و اگر $\dim_H F > 1$ آنگاه $\text{proj}_x F$ به ازای تقریباً هر x روی L دارای طول مثبت است. (توجه: یک کره مماسی بر صفحه، و یک تبدیل که نقطه x از صفحه را به نقطه اشتراک کره با خط واصل x و مرکز کره می‌نگارد، در نظر بگیرید.)

فصل ۷ حاصلضرب‌های فرکتال‌ها

یک روش ساخت فرکتال‌های جدید از فرکتال‌های موجود تشکیل حاصل ضرب‌های دکارتی می‌باشد. در واقع بسیاری از فرکتال‌هایی که در عمل ظاهر می‌شوند حاصل ضرب هستند یا حداقل به طور موضعی حاصل ضرب - مانند هستند. در این فصل قواعد بُعد را برای حاصل ضرب‌ها توسعه می‌دهیم.

۷-۱ قواعد حاصل ضرب

به یاد آورید که اگر E زیرمجموعه‌ای از R^n و F زیرمجموعه‌ای از R^m باشد، حاصل ضرب دکارتی، یا به اختصار حاصل ضرب، $E \times F$ به عنوان مجموعه‌ای از نقاط با مختص اول در E و مختص دوم در F تعریف می‌شود؛ یعنی

$$(۷-۱) \quad E \times F = \{(x, y) \in R^{n+m} : x \in E, y \in F\}$$

بنابراین اگر E یک بازه واحد در R و F یک بازه واحد در R^2 باشد، آنگاه $E \times F$ یک مربع واحد در R^3 می‌باشد و اگر F مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد، آنگاه $F \times F$ "حاصلضرب کانتور" شامل نقاطی در صفحه با هر دو مختص در F می‌باشد.

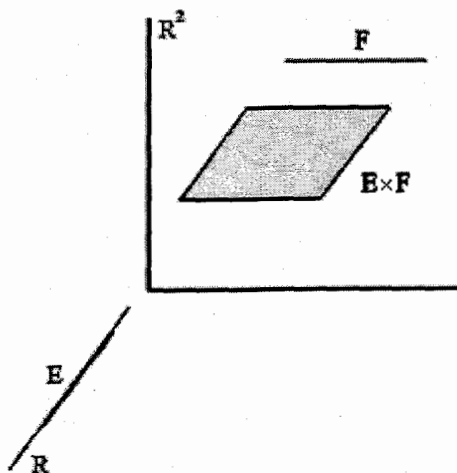
در نخستین مثال بالا با استفاده از تعریف کلاسیک بعد، واضح است که

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

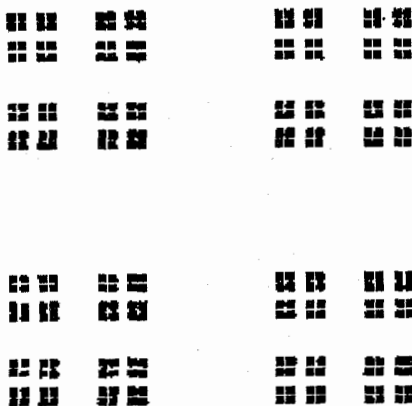
این تساوی به طور کلی‌تر، در وضعیت هموار، جایی که E و F منحنی‌ها، رویه‌ها یا خمینه‌های هموار با ابعاد بزرگ‌تر باشند، برقرار است. متأسفانه، این برابری برای ابعاد فرکتالی

همیشه معتبر نیست. برای ابعاد هاوسدورف، بهترین نتیجه کلی موجود، نامعادله $\dim_H(E \times F) \leq \dim_H E + \dim_H F$ می‌باشد. با وجود این، آنچنانکه خواهیم دید، در بسیاری حالات برابری برقرار است.

برهان قاعده حاصل ضرب بر اساس تعریف یک توزیع جرم μ روی $E \times F$ ، با استفاده از اندازه‌های هاوسدورف روی E و F بنا گردیده است. کران‌های چگالی روی E و F به تخمین‌هایی برای μ ، مناسب برای یک روش توزیع جرم، منجر می‌شود.



شکل ۷-۱ حاصل ضرب دکارتی یک بازه واحد در R و یک بازه واحد در R^2



شکل ۷-۲ حاصل ضرب $F \times F$ که مجموعه یک سوم میانی کانتور است. در این حالت

$$\dim_{\mu} F \times F = 2 \dim_{\mu} F = 2 \log 2 / \log 3$$

گزاره ۱-۷

اگر $E \subset R^n$ ، $F \subset R^m$ مجموعه‌های بورل با $H^s(E), H^t(F) < \infty$ باشند، آنگاه

$$(۲-۷) \quad H^{s+t}(E \times F) \geq c H^s(E) H^t(F)$$

که c فقط به s و t بستگی دارد.

برهان. برای سادگی فرض می‌کنیم که $E, F \subset R$ ، یعنی $E \times F \subset R^2$ ؛ برهان کلی، تقریباً مانند این حالت می‌باشد.

اگر $H^s(E)$ یا $H^t(F)$ صفر باشد، آنگاه برقراری (۲-۷) واضح است، بنابراین فرض کنید E یک s -مجموعه و F یک t -مجموعه باشد؛ یعنی $0 < H^s(E), H^t(F) < \infty$. می‌توانیم با به کار گرفتن "اندازه حاصل ضرب" H^s و H^t ، یک توزیع جرم μ روی $E \times F$ تعریف کنیم. بنابراین اگر $I, J \subset R$ ، μ را روی مستطیل $I \times J$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(۳-۷) \quad \mu(I \times J) = H^s(E \cap I) H^t(F \cap J)$$

می‌توان نشان داد که این، یک توزیع جرم μ روی $E \times F$ با $\mu(R^2) = H^s(E) H^t(F)$ تعریف می‌کند.

بنابر گزاره تخمین چگالی ۱-۵ (ب) داریم که

$$(۴-۷) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} H^s(E \cap B_r(x)) (2r)^{-s} \leq 1$$

برای H^s -تقریباً هر $x \in E$ ، و

$$(۵-۷) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} H^t(F \cap B_r(y)) (2r)^{-t} \leq 1$$

برای H^t -تقریباً هر $y \in F$. (البته، از آنجاییکه ما با زیرمجموعه‌های R کار می‌کنیم، $B_r(x)$ دقیقاً بازه‌ای به طول $2r$ با نقطه میانی x می‌باشد.) بنابر تعریف μ ، هر دو رابطه (۷-۴) و (۵-۷) برای μ -تقریباً هر (x, y) در $E \times F$ ، برقرارند. از آنجاییکه قرص $B_r(x, y)$ در مربع $B_r(x) \times B_r(y)$ قرار می‌گیرد، داریم که

$$\mu(B_r(x, y)) \leq \mu(B_r(x) \times B_r(y)) = H^s(E \cap B_r(x)) H^t(F \cap B_r(y))$$

بنابراین

$$\frac{\mu(B_r(x, y))}{(2r)^{s+t}} \leq \frac{H^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s} \frac{H^t(F \cap B_r(y))}{(2r)^t}$$

با استفاده از (۴-۷) و (۵-۷) نتیجه می‌شود که برای μ - تقریباً هر (x, y) در $E \times F$ ،

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \mu(B_r(x, y)) (2r)^{-(s+t)} \leq 1 \quad (\text{آ})$$

بنابر گزاره ۴-۹،

$$H^s(E \times F) \geq 2^{-(s+t)} \mu(E \times F) = 2^{-(s+t)} H^s(E) H^t(F). \quad \square$$

فرمول حاصلضرب ۲-۷

اگر $E \subset R^n, F \subset R^m$ هر مجموعه بورل باشند، آنگاه

$$\dim_H(E \times F) \geq \dim_H E + \dim_H F$$

(۶-۷)

برهان. اگر s و t اعدادی باشند که $s < \dim_H E$ و $t < \dim_H F$ ، آنگاه $H^s(E) = H^t(F) = \infty$. قضیه ۴-۱۰ ایجاب می‌کند که مجموعه‌های بورل $E_0 \subset E$ و $F_0 \subset F$ وجود دارند که $0 < H^s(E_0), H^t(F_0) < \infty$. بنابر گزاره ۷-۱،

$$H^{s+t}(E \times F) \geq H^{s+t}(E_0 \times F_0) \geq c H^s(E_0) H^t(F_0) > 0$$

از این رو $\dim_H(E \times F) \geq s + t$. با انتخاب s و t به دلخواه نزدیک به $\dim_H E$ و $\dim_H F$ ، رابطه (۶-۷) نتیجه می‌شود. \square

در حقیقت گزاره ۷-۱ و فرمول ۲-۷ برای مجموعه‌های دلخواه (غیر بورل) معتبر هستند. از رابطه (۶-۷) فوراً نتیجه می‌شود که "حاصلضرب کانتور" $F \times F$ که F مجموعه یک سوم میانی کانتور می‌باشد، دارای بعد هاوسدورف حداقل $2 \log 2 / \log 3$ می‌باشد (شکل ۷-۲ را ببینید).

در کل، نامعادله (۶-۷) نمی‌تواند معکوس شود؛ مثال ۷-۸ را ببینید. به هر حال، اگر همچنانکه اغلب اتفاق می‌افتد، E یا F "معقولانه منظم" باشند در حالتیکه ابعاد بالایی جعبه و هاوسدورف معادل داشته باشد، حتماً به تساوی می‌رسیم.

فرمول حاصلضرب ۳-۷

برای هر مجموعه $E \subset R^n$ و $F \subset R^m$ داریم

$$\dim_H(E \times F) \leq \dim_H E + \dim_B F \quad (\text{۷-۷})$$

برهان. برای سادگی فرض کنید $E \subset R$ و $F \subset R$. اعداد $s > \dim_H E$ و $t > \dim_B F$ را انتخاب کنید. آنگاه عدد $\delta_0 > 0$ وجود دارد به طوری که F می‌تواند برای هر $\delta \leq \delta_0$ ، با تعداد $N_\delta(F)$ بازه به طول δ پوشیده شود که $N_\delta(F) \leq \delta^{-t}$. فرض کنید

$\{U_i\}$ ، δ - پوششی از E به وسیله بازه‌هایی با $\sum_i |U_i|^s < 1$ باشد. برای هر i فرض کنید $U_{i,j}$ پوششی از F به وسیله بازه‌های $N_{|U_i|}(F)$ با طول $|U_i|$ باشد. آنگاه $U_i \times F$ به وسیله $N_{|U_i|}(F)$ مربع $\{U_i \times U_{i,j}\}$ با ضلع $|U_i|$ پوشیده می‌شود. بنابراین

$$E \times F \subset \bigcup_i \bigcup_j (U_i \times U_{i,j})$$

به طوریکه

$$\begin{aligned} H_{\delta\sqrt{2}}^{s+t}(E \times F) &\leq \sum_i \sum_j |U_i \times U_{i,j}|^{s+t} \leq \sum_i N_{|U_i|}(F) 2^{\frac{1}{2}(s+t)} |U_i|^{s+t} \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}(s+t)} \sum_i |U_i|^t |U_i|^{s+t} < 2^{\frac{1}{2}(s+t)} \end{aligned}$$

از این رو، هرگاه $s > \dim_{\mathbb{H}} E$ و $t > \overline{\dim}_B F$ داریم $H^{s+t}(E \times F) < \infty$ که نابرابری $\dim_{\mathbb{H}}(E \times F) \leq s + t$ را می‌دهد. \square

نتیجه ۴-۷

اگر $\dim_{\mathbb{H}} F = \overline{\dim}_B F$ آنگاه

$$\dim_{\mathbb{H}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{H}} E + \dim_{\mathbb{H}} F$$

برهان. توجه کنید که پیوند فرمول‌های حاصل ضرب ۲-۷ و ۳-۷ می‌دهد

$$(۸-۷) \quad \dim_{\mathbb{H}} E + \dim_{\mathbb{H}} F \leq \dim_{\mathbb{H}}(E \times F) \leq \dim_{\mathbb{H}} E + \overline{\dim}_B F. \quad \square$$

جالب است اشاره کنیم که نامعادله اصلی حاصل ضرب برای ابعاد بالایی جعبه، معکوس آنچه برای ابعاد هاوسدورف است، می‌باشد.

فرمول حاصل ضرب ۵-۷

برای هر مجموعه $E \subset R^n$ و $F \subset R^m$ داریم

$$(۹-۷) \quad \overline{\dim}_B(E \times F) \leq \overline{\dim}_B E + \overline{\dim}_B F$$

برهان. برهان به عنوان تمرین واگذار می‌شود. طرز کار دقیقاً مانند به دست آوردن فرمول ۳-۷ می‌باشد. توجه کنید که اگر E و F بتوانند به وسیله تعداد $N_{\delta}(E)$ و $N_{\delta}(F)$ بازه با ضلع δ پوشیده شوند، آنگاه $E \times F$ به وسیله تعداد $N_{\delta}(E)N_{\delta}(F)$ مربع، که توسط حاصل ضرب این بازه‌ها تشکیل شده‌اند، پوشیده می‌شود. \square

مثال ۶-۷ حاصل ضرب با مجموعه‌های کانتور یکنواخت

فرض کنید E و F زیرمجموعه‌هایی از R باشند که F یک مجموعه کانتور یکنواخت است (مثال ۴-۵ را ببینید). آنگاه $\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F$.

محاسبه. مثال ۴-۵ نشان می‌دهد که مجموعه‌های کانتور یکنواخت دارای ابعاد بالایی جعبه و هاوسدورف معادل می‌باشند، بنابراین از نتیجه ۷-۴، تساوی به دست می‌آید. \square

بنابراین "حاصل ضرب کانتور" از مجموعه یک سوم میانی کانتور در خودش دارای بعد دقیقاً $2 \log 2 / \log 3$ می‌باشد. به طور مشابه، اگر E زیرمجموعه‌ای از R و F یک پاره خط راست باشد، آنگاه $\dim_H(E \times F) = \dim_H E + 1$.

بسیاری از فرکتال‌ها که در تمرین با آنها مواجه می‌شویم، در حقیقت حاصل ضرب نیستند، اما به طور موضعی حاصل ضرب - مانند هستند. برای مثال، جاذب هنون ((۱۳-۵) را ببینید) به طور موضعی مانند حاصل ضرب یک پاره خط و یک مجموعه کانتور- مانند F ، به نظر می‌آید. به طور دقیق‌تر، دوسوی‌های همواری از $[0,1] \times F$ به همسایگی‌های کوچکی از جاذب وجود دارد. چنین مجموعه‌هایی می‌توانند به عنوان تصویر حاصل ضرب، تحت یک تبدیل لپیشیتس مناسب، تجزیه و تحلیل شوند.

مثال ۷-۷

"هدف کانتور" مجموعه‌ای مسطح است که در مختصات قطبی به صورت $F' = \{(r, \theta) : r \in F, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ داده می‌شود، که F مجموعه یک سوم میانی کانتور است؛ شکل ۷-۳ را ببینید. داریم $\dim_H F' = 1 + \log 2 / \log 3$.

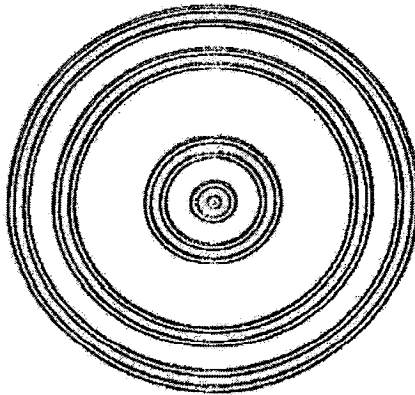
محاسبه. فرض کنید $f: R^2 \rightarrow R^2$ به صورت $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$ داده شده باشد. به سادگی می‌توان دید که f یک نگاشت لپیشیتس است و $F' = f(F \times [0, 2\pi])$. پس بنابر نتیجه ۲-۴ (ا) و مثال ۷-۶،

$$\begin{aligned} \dim_H F' &= \dim_H f(F \times [0, 2\pi]) \leq \dim_H (F \times [0, 2\pi]) \\ &= \dim_H F + \dim_H [0, 2\pi] = (\log 2 / \log 3) + 1 \end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر f را به $[0, \pi] \times [\frac{2}{3}, 1]$ محدود کنیم، آنگاه f یک تابع دو- لپیشیتس روی این دامنه می‌باشد. از آنجاییکه $F' \supset f((F \cap [\frac{2}{3}, 1]) \times [0, \pi])$ ، بنابر نتیجه ۲-۴ (ب) و مثال ۷-۶، داریم

$$\begin{aligned}
 \dim_H F' &\geq \dim_H f((F \cap [\frac{2}{3}, 1]) \times [0, \pi]) \\
 &= \dim_H ((F \cap [\frac{2}{3}, 1]) \times [0, \pi]) \\
 &= \dim_H (F \cap [\frac{2}{3}, 1]) + \dim_H [0, \pi] \\
 &= (\log 2 / \log 3) + 1
 \end{aligned}$$

این استدلال تنها به تغییری جزئی نیاز دارد تا نشان دهیم که F' برای این مقدار از s یک s -مجموعه است. \square



شکل ۷-۳ "هدف کانتور" - مجموعه جارو شده به وسیله چرخاندن مجموعه یک سوم میانی کانتور حول یک نقطه انتهایی

مثال زیر نشان می‌دهد که به طور کلی برای اندازه‌های هاوسدورف در فرمول حاصل ضرب (۶-۷) به تساوی نمی‌رسیم.

مثال ۷-۸

مجموعه‌های $E, F \subset \mathbb{R}$ وجود دارند که $\dim_H E = \dim_H F = 0$ و $\dim_H (E \times F) \geq 1$.

محاسبه. فرض کنید $0 = m_0 < m_1 < \dots$ یک دنباله به سرعت صعودی از اعداد صحیح باشند که در شرطی که به زودی تعیین می‌کنیم صدق می‌کنند. فرض کنید E شامل آن نقاطی در $[0, 1]$ با یک صفر در r امین مکان اعشار باشد هرگاه $m_k + 1 \leq r \leq m_{k+1}$ و k زوج باشد، و F شامل آن نقاطی با یک صفر در r امین مکان اعشار باشد هرگاه

به وضوح یک پوشش از E به وسیله 10^{j_k} بازه با طول $10^{-m_{k+1}}$ وجود دارد، که

$$j_k = (m_2 - m_1) + (m_4 - m_3) + \dots + (m_k - m_{k-2})$$

آنگاه $j_k / m_{k+1} = \log 10^{j_k} / -\log 10^{-m_{k+1}}$ که چنانچه $k \rightarrow \infty$ ، به 0 میل می‌کند مشروط بر آنکه m_k ها طوری انتخاب شوند که با سرعت کافی افزایش یابند. بنابراین

$$\dim_H E \leq \underline{\dim}_B E = 0$$

به طور مشابه $\dim_H F = 0$.

اگر $0 < w < 1$ ، آنگاه می‌توانیم بنویسیم $w = x + y$ که $x \in E$ و $y \in F$ ؛ فقط کافیست r امین رقم اعشاری w را از E بگیرید اگر $m_k + 1 \leq r \leq m_{k+1}$ و k فرد باشد، و از F بگیرید اگر k زوج باشد. به سادگی می‌توان دید که نگاشت $f: R^2 \rightarrow R$ با ضابطه $f(x, y) = x + y$ ، لپشیتس است، پس بنابر نتیجه ۲-۴(ا)،

$$\dim_H(E \times F) \geq \dim_H f(E \times F) \geq \dim_H(0,1) = 1 \quad \square$$

یک تعمیم مفید از فرمول حاصل ضرب، بعد یک مجموعه را به ابعاد مقطع‌های موازی مربوط می‌کند. در صفحه (x, y) فرض کنید L_x خط موازی با محور y ها، مار برنقطه $(x, 0)$ باشد.

گزاره ۷-۹

فرض کنید که F یک زیرمجموعه بول از R^2 باشد. اگر $1 \leq s \leq 2$ آنگاه

$$(10-7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} H^{s-1}(F \cap L_x) dx \leq H^s(F)$$

برهان. برای $\varepsilon > 0$ داده شده، فرض کنید $\{U_i\}$ یک δ -پوشش از F باشد به طوری که

$$\sum_i |U_i|^s \leq H_\delta^s(F) + \varepsilon.$$

هر U_i در یک مربع S_i با ضلع $|U_i|$ ، با اضلاع موازی با محورهای مختصات، قرار می‌گیرد. فرض کنید χ_i تابع مشخصه S_i باشد (یعنی $\chi_i(x, y) = 1$ اگر $(x, y) \in S_i$ و $\chi_i(x, y) = 0$ اگر $(x, y) \notin S_i$). برای هر x ، مجموعه‌های $\{S_i \cap L_x\}$ یک δ -پوشش برای $F \cap L_x$ تشکیل می‌دهند، بنابراین

$$\begin{aligned}
 H_\delta^{s-1}(F \cap L_x) &\leq \sum_i |S_i \cap L_x|^{s-1} \\
 &= \sum_i |U_i|^{s-2} |S_i \cap L_x| \\
 &= \sum_i |U_i|^{s-2} \int \chi_i(x, y) dy
 \end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned}
 \int H_\delta^{s-1}(F \cap L_x) dx &\leq \sum_i |U_i|^{s-2} \iint \chi_i(x, y) dx dy \\
 &= \sum_i |U_i|^s \\
 &\leq H_\delta^s(F) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

از آنجاییکه $\varepsilon > 0$ دلخواه است داریم $\int H_\delta^{s-1}(F \cap L_x) dx \leq H_\delta^s(F)$ هنگامی که $\delta \rightarrow 0$ ، (۷-۱۰) نتیجه می‌شود.

نتیجه ۷-۱۰

فرض کنید F یک زیرمجموعه بورد از R^2 باشد. آنگاه برای تقریباً هر x (با اندازه لبگ ۱- بعدی) داریم $\dim_H(F \cap L_x) \leq \max\{0, \dim_H F - 1\}$.

برهان. فرض کنید $s > \dim_H F$ ، آنگاه $H^s(F) = 0$. اگر $s > 1$ ، فرمول (۷-۱۰)، نتیجه می‌دهد $H^{s-1}(F \cap L_x) = 0$ و بنابراین برای تقریباً هر x ، $\dim_H(F \cap L_x) \leq s - 1$. □

یک تعمیم مفید دیگر را، بدون برهان، بیان می‌کنیم.

گزاره ۷-۱۱

فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از R^2 و E زیرمجموعه‌ای از محور x ها باشد. اگر یک ثابت c وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in E$ ، $H^t(F \cap L_x) \geq c$ ، آنگاه

$$H^{s+t}(F) \geq bcH^s(E) \quad (۷-۱۱)$$

(۱۱)

ته b فقط به s و t وابسته است.

این نتیجه می‌تواند بر حسب ابعاد بیان شود.

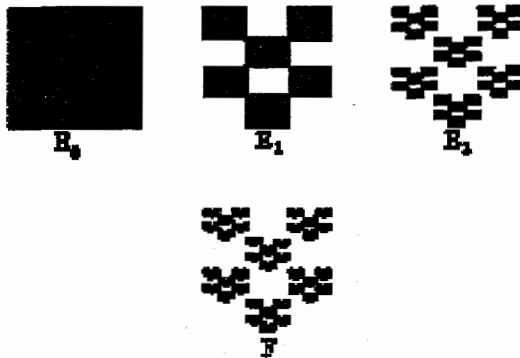
نتیجه ۷-۱۲

فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از R^2 و E زیرمجموعه‌ای از محور x ها باشد. اگر برای هر $x \in E$ ، $\dim_H(F \cap L_x) \geq t$ ، آنگاه $\dim_H F \geq t + \dim_H E$. مشابه این نتایج، برای ابعاد بالاتر معتبر هستند.

مثال زیر از گزاره ۷-۹، مثالی از یک مجموعه خود-آفین می‌باشد، یک دسته از مجموعه‌ها که به تفصیل در بخش ۹-۴ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

مثال ۷-۱۳ یک مجموعه خود-آفین

فرض کنید F مجموعه‌ای با ساختار تکراری باشد که در شکل ۷-۴ نشان داده شده است. در k امین مرحله هر مستطیل از E_k با یک کپی آفین از مستطیل‌های E_1 جایگزین می‌شوند. بنابراین انقباض در جهت y بیشتر است تا در جهت x ، و نسبت پهنا به ارتفاع مستطیل‌ها در E_k به بینهایت میل می‌کند. آنگاه $\dim_H F = \dim_B F = 1\frac{1}{2}$.



شکل ۷-۴ روش ساخت یک مجموعه خود آفین، $\dim_H F = 1\frac{1}{2}$

محاسبه E_k متشکل از 6^k مستطیل با مساحت $3^{-k} \times 4^{-k}$ می‌باشد. با تقسیم مستطیل‌ها با استفاده از برش‌های عمودی، هر یک از این مستطیل‌ها می‌تواند به وسیله حداکثر $(4/3)^k + 1$ مربع با ضلع 4^{-k} پوشیده شود. از این رو E_k می‌تواند با $6^k \times 2 \times 4^k \times 3^{-k} = 2 \times 8^k$ مربع با قطر $4^{-k} \sqrt{2}$ پوشیده شود. مطابق معمول به دست می‌آوریم $\dim_H F \leq \overline{\dim_B F} \leq 1\frac{1}{2}$.

از سوی دیگر، به جز برای x هایی که به شکل $j3^{-k}$ برای j و k صحیح هستند، داریم $E_k \cap L_x$ شامل 2^k بازه با طول 4^{-k} است. استفاده همیشگی از روش توزیع جرم نشان می‌دهد که برای هر چنین x هایی، $H^{\frac{1}{2}}(E_k \cap L_x) \geq \frac{1}{2}$ (تمرین). بنابر گزاره ۷-۹،

$$\square \quad \dim_H F = \dim_B F = 1\frac{1}{2}. H^{\frac{1}{2}}(F) \geq \frac{1}{2}$$

۷-۲ نکات و منابع

اقسامی از فرمول‌های حاصلضرب، به *Moran* و *Besicovitch* (۱۹۴۵) بر می‌گردد. یک نتیجه بسیار کلی که فقط با استفاده از اندازه اثبات شده است، توسط *Marstrand* (۱۹۵۴b) ارائه شده است.

تمرین‌ها

۱-۷ نشان دهید که یک زیرمجموعه F از R^2 با بعد هاوسدورف ۲ وجود دارد که تصویر آن روی هر دو محور مختصات دارای طول صفر است. (تمرین ۴-۷ را نیز ببینید.) نتیجه بگیرید که هر ۱- مجموعه مشمول در F نامنظم است، و اشتراک هر منحنی طول پذیر با F یک مجموعه با طول صفر است.

۲-۷ فرمول حاصلضرب ۷-۵ را به دست آورید.

۳-۷ ابعاد جعبه و هاوسدورف مجموعه مسطح $\{(x, y) \in R^2 : x + y \in F, x - y \in F\}$ را که در آن F مجموعه یک سوم میانی کانتور است، به دست آورید.

۴-۷ فرض کنید $F \subset R$ دارای ابعاد بالایی جعبه و هاوسدورف مساوی باشد و D مجموعه $\{x - y : x, y \in F\}$ باشد که به مجموعه تفاضلی مجموعه F معروف است. نشان دهید که $\dim_H D \leq \min\{1, 2 \dim_H F\}$. (توجه: مجموعه $F \times F$ را در نظر بگیرید.)

۵-۷ فرض کنید F زیرمجموعه دلخواهی از $[0, \infty)$ و F' یک "سیل" در R^2 باشد که در مختصات قطبی به صورت $\{(r, \theta) : r \in F, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ داده شده است. نشان دهید که $\dim_H F' = 1 + \dim_H F$.

۶-۷ ابعاد جعبه و هاوسدورف مجموعه مسطح $\{(x, y) : y - x^2 \in F\}$ را که در آن F مجموعه یک سوم میانی کانتور است، به دست آورید.

۷-۷ فرض کنید L_x به همان معنی گزاره ۹-۷ باشد. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از R^2 باشد و به ازای $0 \leq s \leq 1$ ، $E_s = \{x \in R : \dim_H(F \cap L_x) \geq s\}$ نشان دهید که

$$\dim_H F \geq \sup\{s + \dim_H E_s\}$$

۸-۷ مربع واحد E_0 را به سه ستون، و پنج آرایه سطری از مستطیل‌ها با اضلاع $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ تقسیم کنید، و فرض کنید E_1 مجموعه به دست آمده از انتخاب چهار مستطیل از پنج مستطیل هر سطر باشد. فرض کنید F مجموعه‌ای خود-آفین باشد که از جایگزینی مکرر مستطیل‌ها با کپی‌های آفین E_1 به دست می‌آید (با مثال ۷-۱۳ مقایسه کنید). با تنظیم روش مثال ۷-۱۳ نشان دهید که

$$\dim_H F = 1 + \log 4 / \log 5$$

۹-۷ فرض کنید روش ساخت در تمرین قبل را تغییر دهیم به گونه‌ای که E_1 شامل چهار مستطیل از هر یک از سطرهاى اول و سوم باشد و از دیگر سطرها چیزی را شامل نشود. نشان دهید که

$$\dim_H F = \log 2 / \log 3 + \log 4 / \log 5$$

فصل ۸ اشتراک فرکتال‌ها

اشتراک دو فرکتال اغلب یک فرکتال است؛ طبیعی است که سعی کنیم بعد این اشتراک را به بعد مجموعه‌های اصلی ربط دهیم. پیداست که تقریباً نمی‌توانیم در حالت کلی چیزی بگوییم. چون اگر F کراندار باشد، یک کپی هم‌نهشت F_1 از F وجود دارد به طوریکه $\dim_H(F \cap F_1) = \dim_H F$ (بگیرید $F_1 = F$) و یک کپی هم‌نهشت دیگر وجود دارد که $\dim_H(F \cap F_1) = \phi$ (F و F_1 را جدا از هم در نظر بگیرید). به هر حال، اگر اشتراک F و یک کپی هم‌نهشت را در یک وضعیت مناسب در نظر بگیریم، آنگاه امکان قدری پیشرفت وجود دارد.

برای روشن ساختن این وضعیت، فرض کنید F یک پاره خط واحد در صفحه باشد. اگر F_1 یک کپی هم‌نهشت از F باشد، آنگاه $F \cap F_1$ می‌تواند یک پاره خط باشد، اما فقط در یک حالت استثنایی که F و F_1 هم‌خط باشند. اگر F و F_1 یکدیگر را قطع کنند، آنگاه $F \cap F_1$ یک تک نقطه می‌باشد، اما در این حالت برای همه کپی‌های هم‌نهشت F_2 از F که به اندازه کافی نزدیک به F_1 هستند، مجموعه $F \cap F_2$ نیز یک نقطه است. بنابراین "به طور کلی" $F \cap F_1$ حداکثر شامل یک نقطه می‌باشد، این حالت به کرات اتفاق می‌افتد.

می‌توانیم این موضوع را نسبتاً دقیق‌تر بیان کنیم. به یاد آورید که یک حرکت صلب یا تبدیل هم‌نهشت مستقیم σ از صفحه، هر مجموعه E را به یک کپی هم‌نهشت $\sigma(E)$ بدون بازتاب تبدیل می‌کند. حرکت صلب می‌تواند با سه مختص (x, y, θ) که مبدأ به (x, y) تبدیل می‌شود و θ زاویه دوران است بیان گردد. یک چنین پارامتری سازی یک اندازه طبیعی روی فضای حرکت‌های صلب فراهم می‌کند، که اندازه یک مجموعه A از حرکت‌های

صلب برابر اندازه لبگ ۳- بعدی از مجموعه (x, y, θ) است که پارامتری سازی حرکت‌ها در A را مشخص می‌کنند. برای مثال، مجموعه همه حرکت‌های صلب که مبدأ را به یک نقطه از مستطیل $[0, 3] \times [1, 2]$ می‌نگارند، دارای اندازه $1 \times 3 \times 2\pi$ است.

مثلاً برای یک پاره خط واحد F ، مجموعه تبدیل‌های σ که برای آنها $F \cap \sigma(F)$ یک پاره‌خط می‌باشد، دارای اندازه صفر است. به هر حال، $F \cap \sigma(F)$ برای یک مجموعه از تبدیل‌ها با اندازه مثبت، در حقیقت یک مجموعه با اندازه ۴، یک تک نقطه است.

نتایج یکسانی برای ابعاد بالاتر برقرارند. بیشتر مواقع، در R^3 ، دو رویه یکدیگر را در یک منحنی قطع می‌کنند، یک رویه و یک منحنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و دو منحنی مجزا هستند. در R^n ، اگر خمینه‌های هموار E و F چیزی مشترک داشته باشند، آنگاه معمولاً در یک زیرخمینه با بعد $\max\{0, \dim E + \dim F - n\}$ یکدیگر را قطع می‌کنند. به طور دقیقتر، اگر $\dim E + \dim F - n > 0$ ، آنگاه $\dim(E \cap \sigma(F)) = \dim E + \dim F - n$ برای یک مجموعه از حرکت‌های صلب σ با اندازه مثبت، و تقریباً برای هر σ دیگر، $\dim(E \cap \sigma(F)) = 0$. (البته، در حالت کلی σ با استفاده از $\frac{1}{2}n(n+1)$ پارامتر لازم برای تشخیص یک تبدیل صلب از R^n ، اندازه‌گیری می‌شود.)

۸-۱ فرمول‌های اشتراک برای فرکتال‌ها

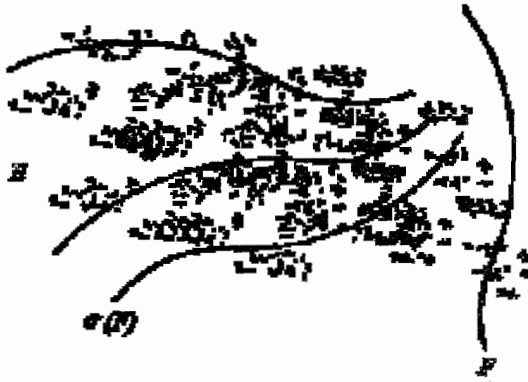
اگر E و F فرکتال باشند و از بعد هاوسدورف استفاده کنیم، آیا مشابه فرمول‌های مذکور وجود دارند؟ به خصوص، "به طور کلی" آیا درست است که

$$(۸-۱) \quad \dim_H(E \cap \sigma(F)) \leq \max\{0, \dim_H E + \dim_H F - n\}$$

و "اغلب"

$$(۸-۲) \quad \dim_H(E \cap \sigma(F)) \geq \dim_H E + \dim_H F - n$$

چنانچه σ روی یک گروه G از تبدیل‌ها، مانند گروه انتقال‌ها، همنهشتی‌ها یا تشابه‌ها (شکل ۸-۱ را ببینید) تغییر کند؟ البته "به طور کلی" یعنی "برای تقریباً هر σ " و "اغلب" یعنی "برای یک مجموعه از σ ‌ها با اندازه مثبت" نسبت به یک اندازه طبیعی روی تبدیل‌های موجود در G . معمولاً به ازای یک m صحیح، G می‌تواند به وسیله m پارامتر با یک روش سراسر پارامتر بندی شود و سپس می‌توانیم از اندازه لبگ روی فضای پارامتر R^m استفاده کنیم.



شکل ۸-۱ اشتراک یک مجموعه "غبار مانند" E با کپی‌های همبسته گوناگون $\sigma(F)$ از یک منحنی F بعد $E \cap \sigma(F)$ به ازای σ "نوعی" مطلوب ما می‌باشد.

همگامی که F گروه انتقال‌ها باشد، کران‌های بالا برای $\dim_H(E \cap \sigma(F))$ به دست می‌آوریم؛ این کران‌ها برای گروه‌های بزرگ‌تر از همبستگی‌ها و تشابه‌ها نیز برقرار است. ما قبلاً نابرابری (۸-۱) را در حالت خاص در صفحه وقتی که یکی از مجموعه‌ها یک خط راست است اثبات کرده‌ایم؛ این در واقع نتیجه‌ی ۷-۱۰ است. نتیجه کلی از این حالت خاص به سادگی نتیجه می‌شود. یادآوری می‌کنیم که $F + x = \{x + y : y \in F\}$ انتقال F با بردار x را نشان می‌دهد.

قضیه ۸-۱

اگر E و F زیرمجموعه‌های بوردل از R^n باشند آنگاه برای تقریباً هر $x \in R^n$

$$(۳-۸) \quad \dim_H(E \cap (F + x)) \leq \max\{0, \dim_H(E \times F) - n\}$$

برهان. ما برهان را برای $n = 1$ بیان می‌کنیم؛ برهان برای $n > 1$ ، با استفاده از مشابه نتیجه ۷-۱۰ برای ابعاد بالاتر، یکسان است. فرض کنید L_c خط با معادله $x = y + c$ در (x, y) -صفحه باشد. با فرض اینکه $\dim_H(E \times F) > 1$ ، از نتیجه ۷-۱۰ (با چرخاندن خطوط با زاویه 45° و با اندکی تغییر علامت‌ها) نتیجه می‌شود که برای تقریباً هر $c \in R$

$$(۴-۸) \quad \dim_H((E \times F) \cap L_c) \leq \dim_H(E \times F) - 1$$

اما $(x, x-c) \in (E \times F) \cap L_c$ اگر و فقط اگر $x \in E \cap (F+c)$. بنابراین، برای هر c ، تصویر $(E \times F) \cap L_c$ روی محور x ‌ها مجموعه $E \cap (F+c)$ است. به خصوص، $\dim_H((E \times F) \cap L_c) = \dim_H(E \cap (F+c))$. بنابراین نتیجه از (۴-۸) به دست می‌آید. \square

قضیه ۱-۸ حالتی از رابطه کلی (۱-۸) است، اما مثال‌ها نشان می‌دهند که این بهترین چیزی است که به دست می‌آید، حتی اگر گروه انتقال‌ها با گروه همه حرکت‌های صلب جایگزین شود. متأسفانه، نامعادله (۶-۷) برعکس آن چیزی است که برای نتیجه گرفتن (۱-۸) از (۳-۸) مورد نیاز می‌باشد. این وجود، در بسیاری اوقات، داریم $\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F$ ؛ برای مثال، وقتی که $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$ ؛ نتیجه ۴-۷ را ببینید. در چنین شرایطی رابطه (۱-۸) را با $\sigma(F)$ به عنوان انتقال $F+x$ به دست می‌آوریم.

به دست آوردن کران‌های پایین برای $\dim_H(E \cap \sigma(F))$ به صورت رابطه (۲-۸) نسبتاً سخت‌تر است. نتایج شناخته شده عمده در قضیه زیر بیان گردیده‌اند.

قضیه ۲-۸

فرض کنید $E, F \subset R^n$ مجموعه‌های بورل باشند، و G گروهی از تبدیل‌ها روی R^n باشند. آنگاه

$$(۵-۸) \quad \dim_H(E \cap \sigma(F)) \geq \dim_H E + \dim_H F - n$$

برای یک مجموعه از حرکت‌های $\sigma \in G$ با اندازه مثبت در هر یک حالت‌های زیر:

(ا) G گروه تشابه‌ها می‌باشد و E و F مجموعه‌های دلخواه هستند.

(ب) G گروه حرکت‌های صلب است، E دلخواه و F یک منحنی طول‌پذیر، رویه، یا خمینه می‌باشد.

(پ) G گروه حرکت‌های صلب است و E و F دلخواه هستند، به علاوه اینکه یا $\dim_H E > \frac{1}{2}(n+1)$ یا $\dim_H F > \frac{1}{2}(n+1)$.

طرح کلی اثبات. برهان از روش‌های نظریه پتانسیل بخش ۴-۳ استفاده می‌کند. از بسیاری جهات، استدلال مانند استدلال قضیه تصویر ۶-۱ است، اما برخی دشواری‌های تکنیکی آن را پیچیده‌تر می‌کند.

به طور خلاصه، اگر $s < \dim_H F$ و $t < \dim_H E$ ، توزیع‌های جرم μ روی E ، و ν روی F با انرژی‌های متناهی $I_s(\mu)$ و $I_t(\nu)$ وجود دارند. اگر این اتفاق افتاد که ν نسبت به اندازه لبگ n -بعدی به طور مطلق پیوسته باشد، یعنی اگر یک تابع f وجود داشت به طوری که برای هر مجموعه A ، $\nu(A) = \int_A f(x) dx$ ، آنگاه طبیعی خواهد بود که یک توزیع

جرم η_σ روی $E \cap \sigma(F)$ با ضابطه $\eta_\sigma(A) = \int_A f(\sigma^{-1}(x)) d\mu(x)$ تعریف کنیم. اگر می‌توانستیم نشان دهیم که برای تقریباً هر σ ، $I_{s+t-n}(\eta_\sigma) < \infty$ ، قضیه ۴-۱۳ (آ) ایجاب خواهد کرد که $\dim(E \cap \sigma(F)) \geq s+t-n$ هنگامی که $\eta_\sigma(R^n) > 0$.

متأسفانه، هنگامی که F یک فرکتال است، محل ν روی یک مجموعه با حجم n -بعدی صفر قرار دارد ولی پیوسته یکنواخت نیست. برای فرار از این مشکل، می‌توانیم ν را به وسیله توزیع‌های جرم به طور مطلق پیوسته ν_δ که محل آنها بر روی بدنه δ -موازی F قرار دارد،

تخمین زد. در این صورت، اگر $\nu_\delta(A) = \int_A f_\delta(x) dx$ و

$\eta_{\sigma,\delta} = \int_A f_\delta(\sigma^{-1}(x)) d\mu(x)$ ، می‌توانیم $I_{s+t-n}(\eta_{\sigma,\delta})$ را تقریب بزینم و سپس

هنگامی که $\delta \rightarrow 0$ حد بگیریم. ساده کردن انتگرال $\int I_{s+t-n}(\eta_{\sigma,\delta}) d\sigma$ یک جمله

$$\varphi_\delta(w) = \int_{G_0} \int_{R^n} \nu_\delta(y) \nu_\delta(y + \sigma(w)) dy dr$$

را جدا می‌کند که انتگرال‌گیری نسبت به σ اکنون روی زیرگروه G_0 از F است که مبدا را ثابت نگه می‌دارد. به شرط آنکه برای هر w و δ ،

$$(۶-۸) \quad \varphi_\delta(w) \leq \text{constant} |w|^{t-n}$$

می‌توان نشان داد که $\int I_{s+t-n}(\nu_{\sigma,\delta}) d\sigma < c < \infty$ ، که c مستقل از δ است. با فرض

$\delta \rightarrow 0$ اندازه‌های $\eta_{\sigma,\delta}$ به اندازه‌های η_σ روی $E \cap \sigma(F)$ همگرا هستند، که

$\int I_{s+t-n}(\eta_\sigma) d\sigma < c$. از این رو برای تقریباً هر σ ، $I_{s+t-n}(\eta_\sigma) < \infty$ ، بنابراین، بنابر

قضیه ۴-۱۳ (آ)، $\dim_H(E \cap \sigma(F)) \geq s+t-n$ ، هرگاه $\eta_\sigma(E \cap \sigma(F)) > 0$ ، که

روی یک مجموعه از اندازه مثبت این اتفاق می‌افتد.

اگر در حالت‌های لیست شده (آ)، (ب) و (پ)، $I_t(\nu) < \infty$ می‌توان نشان داد که (۶-۸)

برقرار است. اثبات برای (آ) و (ب) نسبتاً آسان است. حالت (پ) فنی‌تر می‌باشد؛ تنها روش

شناخته شده استفاده از نظریه تبدیلات فوریه است. \square

شرط آنکه $\dim_H E > \frac{1}{2}(n+1)$ یا $\dim_H F > \frac{1}{2}(n+1)$ در حالت (پ) یک نتیجه دور از ذهن استفاده از تبدیلات فوریه می‌باشد. اینکه آیا قضیه برای گروه همنهشتی‌ها برای $n \geq 2$ و $\frac{1}{2}n < \dim_H E, \dim_H F \leq \frac{1}{2}(n+1)$ معتبر می‌ماند مشخص نیست.

مثال ۳-۸

فرض کنید $F \subset R$ مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد. برای $\lambda, x \in R$ قرار می‌دهیم $\lambda F + x = \{\lambda y + x : y \in F\}$ آنگاه برای تقریباً هر $x \in R$ داریم

$$\dim_H (F \cap (F + x)) \leq 2(\log 2 / \log 3) - 1$$

و برای یک مجموعه از $(x, \lambda) \in R^2$ با اندازه لیگ مسطح مثبت،

$$\dim_H (F \cap (\lambda F + x)) = 2(\log 2 / \log 3) - 1$$

محاسبه. در مثال ۶-۷ نشان دادیم که $\dim_H (F \times F) = 2(\log 2 / \log 3)$ ، بنابراین ابعاد بیان شده با استفاده از قضایای ۱-۸ و ۲-۸ (آ) محاسبه می‌گردند. \square

* ۲-۸ مجموعه‌های با اشتراک بزرگ

دیدیم که لزومی ندارد (۱-۸) همواره برقرار باشد؛ در این بخش یک دسته از مجموعه‌ها که برای آن، این رابطه به نحو بدی نقض می‌شود را بررسی می‌کنیم. یک دسته بزرگ C^s از زیرمجموعه‌های R با بعد هاوسدورف حداقل s می‌سازیم با این ویژگی که اجتماع هر گردایه شمارا از مجموعه‌های C^s هنوز دارای بعد حداقل s باشند. مجموعه‌هایی از این نوع طبیعتاً در نظریه اعداد ظاهر می‌شوند، بخش ۲-۱۰ را ببینید.

دسته C^s بر حسب مجموع‌های (۱-۲) که در تعریف اندازه‌های هاوسدورف استفاده شد، تعریف می‌شود. برای هر زیرمجموعه F از R تعریف می‌کنیم

$$H_\infty^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : F \text{ است از } \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right\}.$$

بنابراین $H_\infty^s(F)$ با استفاده از پوشش‌های F بدون محدودیت قطر تعریف می‌شود. این تضمین می‌کند که اگر I بازه‌ای کراندار باشد، $H_\infty^s(I)$ متناهی است در حالیکه اگر از H^s استفاده می‌کردیم، چنین نمی‌بود. به آسانی می‌توان دید که

هنگامی که $H_{\infty}^s(F_1) \leq H_{\infty}^s(F_2)$ و اینکه $H_{\infty}^s(F_1 \cup F_2) \leq H_{\infty}^s(F_1) + H_{\infty}^s(F_2)$ $F_1 \subset F_2$.

به یاد آورید که $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$ مجموعه‌ای از نقاط است که به تعدادی نامتناهی E_k متعلق است. فرض کنید $0 < s < 1$ و فرض کنید $[a, b] \subset R$ یک بازه بسته سره باشد. گوییم که یک زیرمجموعه F از $[a, b]$ عضوی از دسته $C^s[a, b]$ است اگر

$$(Y-8) \quad F \supset \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$$

که در آن $\{E_k\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $[a, b]$ است، به طوری که (آ) هر E_k اجتماعی متناهی از بازه‌های بسته مجزا است،

و برای هر بازه بسته کراندار I ,

$$(8-8) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H_{\infty}^s(I \cap E_k) = |I|^s. \quad (ب)$$

(البته، همیشه داریم $H_{\infty}^s(I \cap E_k) \leq |I|^s$)، دسته $C^s(-\infty, \infty)$ را با بیان این که F در $C^s(-\infty, \infty)$ است اگر برای هر بازه کراندار $[a, b]$ ، $F \cap I \in C^s[a, b]$ ، تعریف می‌کنیم. نتایج زیر به سادگی از $C^s[a, b]$ به $C^s(-\infty, \infty)$ تعمیم می‌یابند.

به عنوان مثال فرض کنید $\{E_k\}$ به ازای یک p صحیح $k^{-3} < |x - p/k| < k^{-3}$ ، $E_k = \{x\}$ در این صورت $F = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$ شامل اعدادی است که در نامعادله $k^{-3} < |x - p/k| < k^{-3}$ برای تعداد نامتناهی اعداد صحیح مثبت k صدق می‌کنند. همانگونه که خواهیم دید، $F \in C^{1/3}(-\infty, \infty)$.

هر مجموعه در $C^s[a, b]$ باید در $[a, b]$ چگال باشد. برای این که اگر F در $C^s[a, b]$ باشد و I بازه‌ای بسته باشد، آنگاه بنا بر (8-8) به شرطی که k_1 به اندازه کافی بزرگ باشد، $I \cap E_{k_1}$ شامل یک بازه بسته I_1 است. به طور مشابه، برای $k_2 > k_1$ مجموعه $I_1 \cap E_{k_2}$ شامل یک بازه بسته I_2 است. با پیش رفتن به این روش، به یک دنباله $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ از بازه‌های بسته می‌رسیم که به ازای هر r ، $I_r \subset E_{k_r}$. بنابراین مجموعه ناتهی $\bigcap_{r=1}^{\infty} I_r$ در تعداد نامحدود E_k قرار می‌گیرد، از این رو در $F \cap I$ قرار می‌گیرد.

بنابر گزاره ۳-۴ هر مجموعه در $C^s[a, b]$ دارای بعد جعبه شمار ۱ می‌باشد. اکنون نشان می‌دهیم که این مجموعه‌ها دارای بعد هاوسدورف حداقل s می‌باشند. به علاوه اشتراک هر گردایه شمارا از مجموعه‌ها در $C^s[a, b]$ همچنان در $C^s[a, b]$ است و بنابراین دارای بعد

حداقل s است. به علاوه برای دسته بزرگی از توابع f ، $f(F)$ در $C^s[f(a), f(b)]$ است اگر F در $C^s[a, b]$ باشد. برهان‌های زیر در اولین مطالعه می‌توانند حذف شوند. به لم زیر که (۸-۸) را به اجتماع بازه‌های بسته تعمیم می‌دهد، نیاز داریم.

لم ۴-۸

فرض کنید $\{E_k\}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های R باشد بطوریکه برای هر بازه بسته کراندار I ،

$$(۹-۸) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H_{\infty}^s(I \cap E_k) = |I|^s$$

در این صورت، اگر A یک مجموعه کراندار ساخته شده از یک اجتماع متناهی از بازه‌های بسته باشد،

$$(۱۰-۸) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H_{\infty}^s(A \cap E_k) = H_{\infty}^s(A).$$

برهان. فرض کنید که A متشکل از m بازه جدا از هم با مینیمم فاصله $d > 0$ باشد. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده می‌توانیم، با استفاده از (۹-۸)، k_{ε} را طوری انتخاب کنیم که اگر $k \geq k_{\varepsilon}$ ،

$$(۱۱-۸) \quad H_{\infty}^s(I \cap E_k) > (1 - \varepsilon) |I|^s$$

هرگاه $|I| \geq \varepsilon d$ و $I \subset A$. (از آنجاییکه $H_{\infty}^s(E_k \cap I)$ به وضوح به طور پیوسته با I تغییر می‌کند، می‌توانیم یک k_{ε} را بیابیم به طوریکه (۱۱-۸) به طور همزمان برای هر چنین I برقرار باشد.) برای تخمین زدن $H_{\infty}^s(A \cap E_k)$ فرض کنید $\{U_i\}$ یک پوشش $A \cap E_k$ باشد. از آنجاییکه $A \cap E_k$ فشرده است (بخش ۲-۴ را ببینید) و همچنین U_i ها بازه‌های بسته با نقاط انتهایی در A هستند که جز احتمالاً در نقاط انتهایی جدا از هم‌اند، می‌توانیم فرض کنیم که این پوشش متناهی است. مجموعه‌های U_i را بر حسب اینکه یا $|U_i| \geq d$ یا $|U_i| < d$ به دو دسته تقسیم می‌کنیم. مجموعه $A \setminus \bigcup_{|U_i| \geq d} U_i$ متشکل از بازه‌های مجزای V_1, \dots, V_r است که $r \leq m$ ، و

$$(۱۲-۸) \quad A \subset \bigcup_{|U_i| \geq d} U_i \cup \bigcup_j \bar{V}_j.$$

توجه کنید که هر U_i با $|U_i| < d$ در یک بازه از A ، و بنابراین در یکی از \bar{V}_j ها قرار می‌گیرد. به ازای هر j مجموعه‌های U_i مشمول در \bar{V}_j ، $\bar{V}_j \cap E_k$ را می‌پوشانند، پس بنابر (۱۱-۸)، اگر $|V_j| \geq \varepsilon d$ داریم

$$\sum_{\{U_i \subset \bar{V}_j\}} |U_i|^s \geq H_\infty^s(\bar{V}_j \cap E_k) > (1-\varepsilon) |V_j|^s.$$

ازاین رو

$$\sum_i |U_i|^s \geq \sum_{|U_i| \geq d} |U_i|^s + \sum_{|V_j| \geq \varepsilon d} \sum_{U_i \subset \bar{V}_j} |U_i|^s \geq \sum_{|U_i| \geq d} |U_i|^s + \sum_{|V_j| \geq \varepsilon d} (1-\varepsilon) |V_j|^s$$

(۱۳-۸)

بنابراین (۱۲-۸) داریم

$$\begin{aligned} H_\infty^s(A) &\leq \sum_{|U_i| \geq d} |U_i|^s + \sum_{|V_j| \geq \varepsilon d} |V_j|^s + \sum_{|V_j| < \varepsilon d} |V_j|^s \\ &\leq \sum_{|U_i| \geq d} |U_i|^s + \sum_{|V_j| \geq \varepsilon d} |V_j|^s + (\varepsilon d)^s r \end{aligned}$$

حال با ترکیب این رابطه و (۱۳-۸) می‌بینیم که برای هر پوشش $\{U_i\}$ از $A \cap E_k$

$$H_\infty^s(A) \leq (1-\varepsilon)^{-1} \sum_i |U_i|^s + (\varepsilon d)^s m$$

بنابراین

$$H_\infty^s(A) \leq (1-\varepsilon)^{-1} H_\infty^s(A \cap E_k) + (\varepsilon d)^s m$$

هر گاه $k \geq k_\varepsilon$ ، که (۱۰-۸) را ایجاب می‌کند. \square

گزاره ۵-۸

اگر $F \in C^s[a, b]$ آنگاه $H^s(F) > 0$ ، و به ویژه $\dim_H F \geq s$.برهان. برای سادگی در نمادگذاری فرض کنید که $[a, b] = [0, 1]$. فرض کنید $I = [0, 1]$ با گرفتن $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k \subset F \subset \bigcup_i U_i$ که U_i ها مجموعه‌های بازی هستند.در (۸-۸) می‌توانیم یک عدد k_1 بیابیم به طوری که $H_\infty^s(E_{k_1}) > \frac{1}{2}$. از آنجاییکهاجتماعی متناهی از بازه‌های بسته است، لم ۴-۸ ایجاب می‌کند که یک عدد $k_2 > k_1$ وجوددارد به طوری که $H_\infty^s(E_{k_1} \cap E_{k_2}) > \frac{1}{2}$. با پیش رفتن به این روش، به یک دنباله $k_1 < k_2 < \dots$ می‌رسیم به طوری که برای هر r ، $H_\infty^s(E_{k_1} \cap \dots \cap E_{k_r}) > \frac{1}{2}$. داریماز آنجاییکه $E_{k_1} \cap \dots \cap E_{k_r} \subset F \subset \bigcup_i U_i$ ؛ از آنجاییکه $E_{k_1} \cap \dots \cap E_{k_r}$ یک دنباله نزولی ازمجموعه‌های فشرده (یعنی بسته و کراندار)، است $\bigcup_i U_i$ باز می‌باشد، یک عدد صحیح r وجود دارد به طوری که $E_{k_1} \cap \dots \cap E_{k_r} \subset \bigcup_i U_i$ نتیجه می‌شود که برای هر پوشش F

به وسیله مجموعه‌های باز، $\sum_i |U_i|^s \geq H_\infty^s(E_{k_1} \cap \dots \cap E_{k_r}) > \frac{1}{2}$ ، بنابراین $H^s(F) \geq \frac{1}{2}$. \square

گزاره ۸-۶

فرض کنید $F_j \in C^s[a, b]$ برای $j = 1, 2, \dots$ ، آنگاه $\bigcap_{j=1}^\infty F_j \in C^s[a, b]$

برهان. برای هر j یک دنباله از مجموعه‌های $E_{j,k}$ که هر کدام اجتماعی متناهی از بازه‌های بسته هستند وجود دارد به طوری که $F_j \supset \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} E_{j,k}}$ و برای هر بازه I ، $\lim_{k \rightarrow \infty} H_\infty^s(I \cap E_{j,k}) = H^s(I)$. بنابر لم ۸-۴ برای هر اجتماع متناهی از بازه‌های بسته A ،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_\infty^s(A \cap E_{j,k}) = H_\infty^s(A). \quad (۱۴-۸)$$

تعدادی شمارش‌پذیر بازه $[c, d] \subset [a, b]$ وجود دارند که c و d گویا هستند: فرض کنید I_1, I_2, \dots شمارشی از این مجموعه‌ها باشد.

به ازای هر r یک مجموعه G_r به صورت زیر تعریف می‌کنیم. با استفاده از (۱۴-۸) می‌توانیم $k_1 \geq r$ را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم تا رابطه زیر برای $m = 1, \dots, r$ برقرار باشد:

$$H_\infty^s(I_m \cap E_{1,k_1}) > H_\infty^s(I_m) - 1/r.$$

با استفاده دوباره از (۱۴-۸)، و قرار دادن $A = I_m \cap E_{1,k_1}$ ، می‌توانیم $k_2 \geq r$ را بیابیم به طوری‌که برای $m = 1, \dots, r$

$$H_\infty^s(I_m \cap E_{1,k_1} \cap E_{2,k_2}) > H_\infty^s(I_m) - 1/r$$

به ادامه دادن این روش، به $k_1, \dots, k_r \geq r$ می‌رسیم به طوری‌که برای هر $m = 1, \dots, r$

$$H_\infty^s\left(I_m \cap \bigcap_{j=1}^r E_{j,k_j}\right) > H_\infty^s(I_m) - 1/r. \quad (۱۵-۸)$$

به ازای هر r ، فرض کنید G_r اجتماع متناهی از بازه‌های بسته باشد:

$$G_r = \bigcap_{j=1}^r E_{j,k_j} \quad (۱۶-۸)$$

فرض کنید $I \subset [a, b]$ مجموعه بسته‌ای باشد. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، یک بازه $I_m \subset I$ وجود دارد به طوری که $H_\infty^s(I) - \varepsilon/2 > H_\infty^s(I_m)$ اگر $r \geq m$ و $r > 2/\varepsilon$ (۱۵-۸) ایجاب می‌کند که

$$H_\infty^s(I \cap G_r) \geq H_\infty^s(I_m \cap G_r) > H_\infty^s(I_m) - 1/r > H_\infty^s(I) - \varepsilon,$$

بنابراین

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_\infty^s(I \cap G_r) = H_\infty^s(I).$$

فرض کنید j عدد صحیح مثبتی باشد. اگر $r > j$ و $x \in G_r$ آنگاه بنابر (۸-۱۶)،

$x \in E_{j,k_j}$ بنابرین اگر $x \in \overline{\lim_{r \rightarrow \infty} G_r}$ ، آنگاه برای تعدادی متناهی k_j ، $x \in E_{j,k_j}$ ،

بنابرین $x \in \overline{\lim_{i \rightarrow \infty} E_{j,i}} \subset F_j$ ، از این رو، برای هر j ، $\overline{\lim_{r \rightarrow \infty} G_r} \subset F_j$ ، در نتیجه

$$\square \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \in C^s[a, b]$$

نتیجه ۷-۸

فرض کنید برای $F_j \in C^s[a, b]$ ، $j = 1, 2, \dots$ ، آنگاه $\dim_H \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j \geq s$

برهان. این یک نتیجه فوری از گزاره‌های ۸-۵ و ۸-۶ است. \square

واضح است که، اگر F' در $C^s(-\infty, \infty)$ باشد آنگاه انتقال $F' + x$ نیز همین طور است. از این رو، به ازای یک مجموعه F' داده شده در $C^s(-\infty, \infty)$ و یک دنباله از اعداد x_1, x_2, \dots ، $\bigcap_{i=1}^{\infty} (F' + x_i)$ یک عضو از $C^s(-\infty, \infty)$ می‌باشد و این اشتراک بعد حداقل s دارد. برای تبدیل‌های کلی‌تر F' ، ایده‌های یکسانی می‌توانند به کار برده شود.

گزاره ۸-۸

فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow R$ یک نگاشت با یک مشتق پیوسته باشد به طوریکه برای یک ثابت $c > 0$ ، $|f'(x)| > c$ ، اگر $F \in C^s[a, b]$ ، آنگاه $f(F) \in C^s[f(a), f(b)]$

برهان. این گزاره با استفاده از روش اثبات گزاره ۸-۴، می‌تواند اثبات شود. ما جزئیات (نسبتاً

خسته کننده) را حذف می‌کنیم. \square

در یک مجموعه نوعی C^s ، E_k ها از بازه‌هایی که طول‌ها و فاصله‌هایشان به سمت صفر

می‌رود ساخته می‌شوند.

مثال ۸-۹

$\alpha > 2$ را ثابت نگه دارید. فرض کنید $\{E_k\}$ به ازای یک p صحیح $k^{-\alpha}$ $E_k = \{x : |x - p/k| \leq k^{-\alpha}\}$ در این صورت $\overline{E_k}$ اجتماعی از بازه‌های با فاصله‌های مساوی به طول $2k^{-\alpha}$ است. آنگاه مجموعه $F = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} E_k}$ برای هر $s < 1/\alpha$ یک عضو از $C^s(-\infty, \infty)$ است.

برهان. $0 < s < 1/\alpha$ و یک بازه بسته کراندار I را در نظر بگیرید. باید نشان دهیم که

$$(17-8) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H_{\infty}^s(I \cap E_k) = |I|^s.$$

بازه I شامل m بازه کامل از E_k هر کدام به طول $2k^{-\alpha}$ است به طوری که $m \geq k|I| - 2$. فرض کنید μ توزیع جرم روی $I \cap E_k$ باشد که به وسیله توزیع یک جرم $1/m$ به طور یکنواخت سراسر هر بازه کامل از E_k که در I قرار دارد، به دست آمده باشد. برای برآورد $H_{\infty}^s(I \cap E_k)$ فرض کنید U یک مجموعه از یک پوشش $I \cap E_k$ باشد؛ می‌توانیم فرض کنیم که U یک بازه بسته باشد و اینکه انتهای U نقاطی از $I \cap E_k$ باشند. آنگاه $k|U| + 2$ حداکثر $I \cap E_k$ را قطع می‌کند. اگر $|U| \leq 1/2k \leq |I|$ آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq (k|U| + 2)/m \leq (k|U| + 2)/(k|I| - 2) \leq (|U| + 2k^{-1})/(|I| - 2k^{-1}) \\ &\leq |U|^s (|U|^{1-s} + 2k^{-1}|U|^{-s})/(|I| - 2k^{-1}) \\ &\leq |U|^s (|U|^{1-s} + 2^{s+1}k^{s-1})/(|I| - 2k^{-1}) \\ &\leq \frac{|U|^s (|U|^{1-s}|I|^{s-1} + 2^{s+1}k^{s-1}|I|^{s-1})}{(1 - 2k^{-1}|I|^{-1})} \\ &\leq \frac{|U|^s (1 + 2^{s+1}k^{s-1}|I|^{s-1})}{|I|^s (1 - 2k^{-1}|I|^{-1})} \end{aligned}$$

(18-8)

اگر k به اندازه کافی بزرگ باشد و $|U| < 2k$ ، آنگاه U می‌تواند فقط یک بازه از E_k را قطع کند، بنابراین $|U| \leq 2k^{-\alpha}$ ، چون نقاط انتهایی U در E_k هستند. جرم $1/m$ به طور هموار سراسر این بازه با طول $2k^{-\alpha}$ توزیع شده است، بنابراین

$$\mu(U) \leq |U|/2k^{-\alpha} m \leq |U|^s |U|^{1-s}/2k^{-\alpha} m$$

(19-8)

$$\begin{aligned} &\leq |U|^s (2k^{-\alpha})^{1-s}/2k^{-\alpha} (k|I| - 2) \\ &\leq |U|^s 2^{-s} k^{s\alpha-1}/(|I| - 2k^{-1}). \end{aligned}$$

با I و $\varepsilon > 0$ داده شده، مشروط بر آنکه k به اندازه کافی بزرگ باشد، برای هر بازه پوششی U با استفاده از (۸-۱۸) و (۸-۱۹) داریم

$$\mu(U) \leq (1 + \varepsilon) |U|^s / |I|^s$$

از این رو اگر $I \cap E_k \subset \bigcup_i U_i$ آنگاه

$$1 = \mu(I \cap E_k) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq (1 + \varepsilon) |I|^s \sum_i |U_i|^s$$

بنابراین $H_\infty^s(I \cap E_k) \geq |I|^s / (1 + \varepsilon)$ ، که از آن (۸-۱۷) نتیجه می‌شود. \square

در این مثال، اگر $s < 1/\alpha$ ، F متعلق به $C^s(-\infty, \infty)$ است، بنابراین بنابر گزاره (۸-۵)، $\dim_H F \geq 1/\alpha$. به علاوه، واضح است که انتقال $F + x$ برای هر عدد حقیقی x در

$C^s(-\infty, \infty)$ است، بنابراین بنابر گزاره ۸-۶، $\bigcap_{i=1}^{\infty} (F + x_i)$ برای هر مجموعه شمارای x_1, x_2, \dots متعلق به $C^s(-\infty, \infty)$ است، که ایجاب می‌کند

$\dim_H \bigcap_{i=1}^{\infty} (F + x_i) \geq 1/\alpha$. به طور کلی‌تر، بنابر گزاره ۸-۸، به ازای هر تابع

خوشرفتار f ، $f(F)$ در $C^s(-\infty, \infty)$ است، و این یک دسته بزرگ از مجموعه‌های C^s تولید می‌کند که اشتراک‌های شمارش‌پذیر آنها حداقل بعد $1/\alpha$ دارد.

در بخش ۱۰-۳ نشان خواهیم داد که چگونه مثال ۸-۹ می‌تواند با در نظر گرفتن ابعاد طوری بسط داده شود که برای هر $s < 2/\alpha$ ، F در $C^s(-\infty, \infty)$ قرار گیرد.

۳-۸ نکات و منابع

مطالعه اشتراک مجموعه‌ها هنگامی که نسبت به یکدیگر در حرکت باشند، یکی از موضوعات هندسه انتگرالی می‌باشد. بررسی کلاسیک کاملی توسط *Santalo* (۱۹۷۶) ارائه شده است. مراجع اصلی فرمول‌های اشتراک فرکتال‌ها، که در بخش ۸-۱ آمده اند، عبارتند از *Kahane* (۱۹۸۶) و *Mattila* (۱۹۸۴، ۱۹۸۵). تعاریف متنوعی برای رده‌های مجموعه‌های با اشتراک‌های بزرگ، وجود دارد مانند آنچه توسط *Baker* و *Schmidt* (۱۹۷۰)، *Falconer* (۱۹۸۵b) و *Rynne Dodson* و *Vickers* ارائه شده است.

تمرین‌ها

۱-۸ فرض کنید E و F منحنی‌هایی طول‌پذیر در R^2 باشند و فرض کنید σ یک حرکت صلب باشد. فرمول پوانکاره از هندسه کلاسیک انتگرال را که به صورت زیر می‌باشد، اثبات کنید

$$4 \times \text{length}(E)\text{length}(F) = \int ((E \cap \sigma(F)) \text{ در } d\sigma$$

که در آن انتگرال‌گیری نسبت به اندازه طبیعی روی مجموعه با حرکت‌های صلب می‌باشد. (توجه: ابتدا تمرین را برای حالتی که E و F پاره خط می‌باشند، و سپس برای چند ضلعی‌ها حل کنید، آنگاه نتیجه کلی را با تقریب به دست آورید.)

۲-۸ نشان دهید که اگر یک منحنی C یک مجموعه محدب (چگال) را در صفحه در بر بگیرد، آنگاه طول C به صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{length}(\text{proj}_\theta C) d\theta.$$

(توجه: در تمرین ۱-۸، E را همان C ، و F را یک پاره خط طولانی بگیرید.)

۳-۸ در صفحه، فرض کنید E حاصلضرب دو مجموعه یک سوم میانی کانتور باشد، و فرض کنید F ، (i) یک دایره و (ii) منحنی ون کخ باشد. در هر یک از این دو حالت، در مورد بعد هاوسدورف $E \cap \sigma(F)$ به ازای تبدیلات همبند σ ، چه می‌توان گفت؟

۴-۸ نشان دهید که نتیجه قضیه ۱-۸ را می‌توان قوی‌تر کرد و گفت که $\dim_H(E \times F) < n$ اگر x تهی است

۵-۸ با گرفتن E به عنوان یک مجموعه مناسب چگال در یک ناحیه از R^2 و مجموعه F به عنوان یک پاره‌خط واحد، نشان دهید که اگر به جای بعد هاوسدورف بعد جعبه به کار ببریم، رابطه (۵-۸) حتی به ازای گروه تشابه‌ها، برقرار نخواهد بود.

۶-۸ فرض کنید $1 < s < 2$. یک s -مجموعه مسطح F در قرص واحد B بسازید به گونه‌ای که اگر E هر پاره‌خط راستی با طول ۲ باشد که درون F را قطع کند، آنگاه $E \cap F$ یک $(s-1)$ -مجموعه است.

۷-۸ فرض کنید E_k مجموعه‌ای از اعداد حقیقی با بسط در مبنای ۳ به صورت $m.a_1a_2 \dots$ باشد به گونه‌ای که a_k برابر ۰ یا ۲ باشد. نشان دهید که $F = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} E_k}$ به ازای هر $1 < s < 2$ در کلاس $C^s(-\infty, \infty)$ می‌باشد. (توجه کنید که F مجموعه اعدادی است که تعداد نامتناهی از ارقام آنها در مبنای ۳ مخالف ۱ می‌باشد.) نتیجه بگیرید که $\dim_H F = 1$ و به ازای هر

$$\dim_H(\bigcap_{i=1}^{\infty} (F + x_i)) = 1, \dots, x_2, x_1$$

قسمت دوم

کاربردها و مثال‌ها

فصل ۹ فرکتال‌های تعریف شده بر اساس انتقال‌ها — مجموعه‌های خودمتشابه و خودآفین

۹-۱ طرح‌های توابع تکراری^۱

این فصل را با شرح یک ساختار جامع برای فرکتال‌ها شروع می‌کنیم که مجموعه کانتور، منحنی کخ و مثال‌های استاندارد دیگر حالت‌های خاصی از آن می‌باشند.

بسیاری از فرکتال‌ها از بخش‌هایی تشکیل شده‌اند که به گونه‌ای شبیه کل می‌باشند. برای مثال مجموعه یک سوم میانی کانتور اجتماع دو کپی مشابه با خودش می‌باشد و منحنی ون کخ متشکل از چهار کپی مشابه می‌باشد. این خودتشابهی‌ها تنها ویژگی‌های فرکتال‌ها نیستند، در واقع می‌توان آنها را برای تعریف فرکتال‌ها به کار برد — رهیافتی که بسیار مفید می‌باشد.

فرض کنید D زیرمجموعه بسته‌ای از R^n باشد. یک نگاشت $S: D \rightarrow D$ یک انقباض روی D نامیده می‌شود اگر یک عدد c ، $0 < c < 1$ ، وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر x و y در D ، $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$. به وضوح هر انقباض یک نگاشت پیوسته است. اگر تساوی برقرار باشد، یعنی اگر $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$ ، آنگاه S مجموعه‌ها را به نوع‌های مشابه هندسی آنها تبدیل می‌کند و آن را یک تشابه می‌نامیم.

^۱ iterated function schemes

فرض کنید S_1, \dots, S_m انقباض باشند. یک زیرمجموعه F از D را به ازای تبدیل‌های S_i ناوردا نامیم اگر

$$(1-9) \quad F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

همانگونه که خواهیم دید، چنین مجموعه‌های ناوردایی اغلب فرکتال هستند.

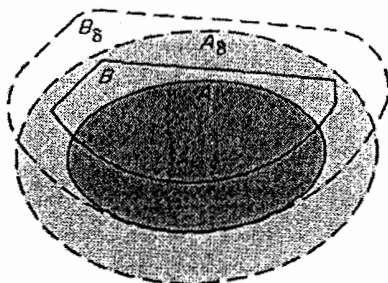
هنگامی که F مجموعه یک سوم میانی کانتور است، این مطلب به سادگی قابل توضیح است. فرض کنید $S_1, S_2: R \rightarrow R$ به صورت $S_1(x) = \frac{1}{3}x$ و $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ داده شده باشند. در این صورت S_1 و S_2 دقیقاً نیمه‌های چپ و راست F می‌باشند، به طوریکه $F = S_1(F) \cup S_2(F)$. بنابراین F برای نگاشت‌های S_1 و S_2 ، که دو نگاشت نمایش دهنده خودتشابهی بنیادی مجموعه کانتور هستند، ناوردا می‌باشد.

نشان می‌دهیم که خانواده انقباض‌ها، یا طرح‌های توابع تکراری، که قبلاً آنها را شناختیم، مجموعه‌های فشرده (ناتهی) یکتایی تعریف می‌کنند. این بدان معنی است که برای مثال مجموعه یک سوم میانی کانتور به عنوان مجموعه ناوردای فشرده از نگاشت‌های S_1 و S_2 ، که در بالا داده شدند، به طور کامل تعیین می‌شود. یک متر یا تابع فاصله بین زیرمجموعه‌های D تعریف می‌کنیم. فرض کنید ℓ نشان دهنده رده همه زیرمجموعه‌های فشرده ناتهی از D باشد. به یاد آورید که بدنه δ -موازی از $A \in \ell$ مجموعه نقاط مابین فاصله δ از A می‌باشد، یعنی

$$A_\delta = \{x \in D : |x - a| \leq \delta, a \in A\}.$$

با تعریف فاصله $d(A, B)$ بین دو مجموعه A و B ، به عنوان کوچک‌ترین δ که بدنه δ -موازی A شامل B باشد و برعکس بدنه δ -موازی B هم شامل A باشد، یعنی:

$$(2-9) \quad d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ و } B \subset A_\delta\}$$



شکل ۹-۱ فاصله هاوسدورف بین مجموعه‌های A و B برابر با کوچک‌ترین $\delta > 0$ می‌باشد به طوری که بدنه δ -موازی A شامل B ، و بدنه δ -موازی B شامل A باشد.

مجموعه ℓ به یک فضای متریک تبدیل می‌شود (شکل ۹-۱ را ببینید). با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد که d یک متر یا تابع فاصله می‌باشد، و به متر هاوسدورف روی ℓ مشهور می‌باشد. بنابراین (i) $d(A, B) \geq 0$ که تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $A = B$ ، (ii) $d(A, B) = d(B, A)$ و (iii) به ازای هر A, B, C در ℓ ،
 $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

به ویژه اگر $d(A, B)$ کوچک باشد، آنگاه به عبارتی، A و B نزدیک به یکدیگر می‌باشند.

قضیه ۹-۱

فرض کنید S_1, \dots, S_m انقباض‌هایی روی $D \subset R^n$ باشند، به طوری که

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y \in D)$$

که به ازای هر i ، $c_i < 1$. آنگاه یک مجموعه ناتهی فشرده یکتای F وجود دارد که به ازای S_i ناورداست، یعنی در رابطه زیر صدق می‌کند

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

به علاوه، اگر یک تبدیل S روی رده ℓ از مجموعه‌های فشرده ناتهی به صورت

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E) \quad (۹-۳)$$

تعریف کنیم و S^k را به عنوان k امین تکرار بنویسیم که به صورت $S^0(E) = E$ ،
 $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ برای $k \geq 1$ داده می‌شود، آنگاه

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E) \quad (۹-۴)$$

به ازای هر مجموعه E در ℓ به طوری که به ازای هر i ، $S_i(E) \subset E$.

برهان. توجه کنید که مجموعه‌های موجود در ℓ توسط S به مجموعه‌های دیگری در ℓ تبدیل می‌شوند. فرض کنید E مجموعه‌ای در ℓ باشد به طوری که به ازای هر i ، $S_i(E) \subset E$ ، برای نمونه $D \cap B_r(0)$ کفایت خواهد کرد، مشروط بر آنکه r به اندازه کافی بزرگ باشد. آنگاه $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$ به طوری که $S^k(E)$ یک دنباله نزولی از مجموعه‌های فشرده ناتهی است که لزوماً دارای اشتراک فشرده ناتهی $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$ می‌باشد. از آنجایی که $S^k(E)$ یک دنباله نزولی است، نتیجه می‌شود که $S(F) = F$ ، پس F ناورداست.

برای اثبات اینکه مجموعه ناوردا یکتاست، توجه کنید که اگر $A, B \in \ell$ آنگاه

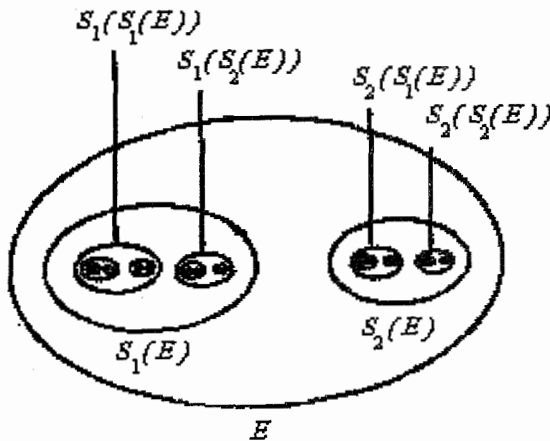
$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B))$$

از آنجاییکه اگر δ طوری باشد که بدنه δ -موازی $(S_i(A))_\delta$ به ازای هر i ، شامل $S_i(B)$ باشد، آنگاه $(\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta$ شامل $\bigcup_{i=1}^m S_i(B)$ است. بنابراین

$$d(S(A), S(B)) \leq (\max_{1 \leq i \leq m} c_i) d(A, B). \quad (۵-۹)$$

این نتیجه می‌دهد که اگر $S(A) = A$ و $S(B) = B$ هر دو مجموعه‌هایی ناوردا باشند، آنگاه $d(A, B) = 0$ که مستلزم آن است که $A = B$. □

در حقیقت، دنباله تکرارهای $S^k(E)$ به ازای هر مجموعه آغازین E در ℓ به F همگراست، به این خاطر که $d(S^k(E), F) \rightarrow 0$. این، از آنجایی نتیجه می‌شود که (۵-۹) دلالت بر این دارد که $d(S(E), F) = d(S(E), S(F)) \leq cd(E, F)$ ، و نتیجتاً $d(S^k(E), F) \leq c^k d(E, F)$ که $c = \max_{1 \leq i \leq m} c_i < 1$. پس $S^k(E)$ به طور افزایشی تقریب خوبی برای F فراهم می‌کند.



شکل ۹-۲ روش ساخت مجموعه پایای F به ازای تبدیل‌های S_1 و S_2 که بیضی بزرگ E را به روی بیضی‌های $S_1(E)$ و $S_2(E)$ می‌نگارند. مجموعه‌های $S^k(E) = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ تقریب صعودی خوبی برای F به ما می‌دهند.

اگر F یک فرکتال باشد این تقریب‌ها گاهی پیش فرکتال برای F نامیده می‌شوند. به ازای هر k

$$(۶-۹) \quad S^k(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E))))$$

که اجتماع روی مجموعه J_k شامل همه دنباله‌های k جمله‌ای (i_1, \dots, i_k) با شرط $1 \leq i_j \leq m$ می‌باشد؛ شکل ۹-۲ را ببینید. (به یاد آورید که $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ نمایش ترکیب نگاشت‌ها می‌باشد، به طوری که $(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})(x) = S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(x))))$.) اگر $S_i(E)$ به ازای هر i ، در E قرار گیرد و x نقطه‌ای از F باشد، از (۹-۴) نتیجه می‌شود که یک دنباله (i_1, i_2, \dots) (نه لزوماً یکتا) وجود دارد که به ازای هر k ، $x \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ ،

$$F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}$$

بنابراین
که در آن

$$(۷-۹) \quad x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E).$$

این عبارت برای $x_{i_1, i_2, \dots}$ مستقل از E می‌باشد، مشروط بر اینکه $S_i(E)$ به ازای هر i در E باشد.

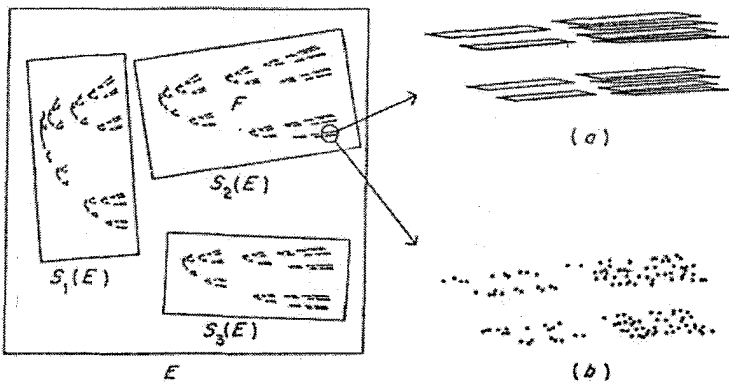
توجه کنید که اگر اجتماع در (۹-۱) مجزاً باشد، آنگاه F باید کلاً ناهمبند باشد، از آن جایی که اگر $x_{i_1, i_2, \dots} \neq x_{i'_1, i'_2, \dots}$ ، می‌توانیم k را چنان بیابیم که $(i_1, \dots, i_k) \neq (i'_1, \dots, i'_k)$ به طوری که مجموعه‌های بسته مجزای $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ و $S_{i'_1} \circ \dots \circ S_{i'_k}(F)$ دو نقطه را جدا کنند.

می‌توان بار دیگر این مطلب را به وسیله نگاشت‌های $S_1(x) = \frac{1}{3}x$ و $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ و مجموعه کانتور F توضیح داد. اگر $E = [0, 1]$ آنگاه $S^k(E) = E_k$ مجموعه‌ای متشکل از 2^k بازه ابتدایی با طول 3^{-k} می‌باشد که در k امین مرحله از روش ساخت معمولی مجموعه کانتور به دست می‌آید؛ شکل ۱۰-۱ را ببینید. به علاوه $x_{i_1, i_2, \dots}$ نقطه‌ای از مجموعه کانتور با بسط $0.a_1a_2\dots$ در مبنای ۳ می‌باشد که در این بسط اگر $a_k = 0$ و $i_k = 1$ اگر $a_k = 2$ اگر $i_k = 2$. پیش فرکتال‌های $S^k(E)$ ساختار معمولی بسیاری از فرکتال‌ها را برای یک مجموعه اولیه E که به طور مناسب انتخاب شده است، فراهم می‌کنند. ترکیب‌های $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ مجموعه‌های ابتدایی ساختار نامیده می‌شوند.

این نظریه دو روش برای ترسیم کامپیوتری مجموعه‌های ناوردا در صفحه فراهم می‌کند، همانطور که در شکل ۹-۳ نشان داده شده است. در روش اول، مجموعه اولیه دلخواه E را در

نظر بگیرید و تقریب k ام F یعنی $S^k(E)$ را که به ازای مقدار مناسبی از k توسط (۹-۶) داده می‌شود رسم کنید. مجموعه $S^k(E)$ از m^k مجموعه کوچکتر تشکیل می‌شود. — اینها را می‌توان کامل رسم کرد یا می‌توان یک نقطه نمایش دهنده از هر کدام را رسم کرد. اگر بتوان E را یک پاره‌خط انتخاب کرد به طوری که وقتی $S_1(E), \dots, S_m(E)$ به هم متصل شوند یک منحنی چند ضلعی با نقاط انتهایی یکسان با نقاط انتهایی E تشکیل دهند، آنگاه دنباله منحنی‌های چندضلعی $S^k(E)$ به طور افزایشی تقریب خوبی برای منحنی فرکتالی F ایجاد می‌کند. گرفتن E به عنوان بازه ابتدایی در ساختار منحنی ون کخ مثالی از این روش می‌باشد، که $S^k(E)$ دقیقاً k امین مرحله از ساختار می‌باشد. در هنگام استفاده از این روش، برنامه‌های بازگشتی دقیق مفید هستند.

برای روش دوم، فرض کنید x_0 هر نقطه اولیه باشد، یک انقباض S_{i_1} از S_1, \dots, S_m به طور تصادفی انتخاب کنید و فرض کنید $x_1 = S_{i_1}(x_0)$. با انتخاب S_{i_2} از S_1, \dots, S_m به طور تصادفی (با احتمال مساوی) و با فرض اینکه $x_k = S_{i_k}(x_{k-1})$ به ازای $k = 1, 2, \dots$ به این روش ادامه دهید. به ازای k به اندازه کافی بزرگ، نقاط x_k از مجموعه F قابل تشخیص نخواهند بود، با x_k نزدیک به $S_{i_1}(F) \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ ، بنابراین دنباله $\{x_k\}$ به طور تصادفی توزیع شده در سرتاسر F ظاهر خواهد شد. یک طرح از دنباله $\{x_k\}$ از، مثلاً، جمله صدم به بعد، می‌تواند اثر خوبی از F را ارائه کند.



شکل ۹-۳ دو روش ترسیم کامپیوتری فرکتال F ، که تحت سه تبدیل آفین S_1, S_2 و S_3 که مربع را به مستطیل‌ها می‌نگارد پایا می‌باشد، در روش (a)، 3^k متوازی‌الاضلاع $(S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E))\dots)))$ به ازای $i_j = 1, 2, 3$ رسم می‌شوند (در اینجا $k = 6$). در روش (b)، دنباله نقاط x_k با انتخاب S_{i_k} به طور تصادفی از میان S_1, S_2 و S_3 به ازای k های متوالی و با فرض $x_k = S_{i_k}(x_{k-1})$ رسم می‌شود.

۹-۲ ابعاد مجموعه‌های خود متشابه

يکي از مزايای استفاده از طرح توابع تکراری این است که بعد مجموعه‌های پایا اغلب برحسب انقباض‌های تعريف شده به آسانی محاسبه يا تخمين زده می‌شوند. در این بخش ما حالتی را توضیح می‌دهیم که $R^n \rightarrow R^n : S_1, \dots, S_k$ نگاشت‌های تشابه هستند به عبارتی دیگر

$$(۸-۹) \quad |S_i(x) - S_i(y)| = c_i |x - y| \quad (x, y \in R^n)$$

که در آن $0 < c_i < 1$ (نسبت تشابه S_i نامیده می‌شود) بنابراین هر S_i زیرمجموعه‌های R^n را به زیرمجموعه‌هایی که از لحاظ هندسی مشابه آن هستند تبدیل می‌کند. مجموعه‌ای تحت هر یک از اعضای این گردایه پایا می‌ماند یک مجموعه (اکیداً) - خود-متشابه نامیده می‌شود که اجتماعی از کپی‌های کوچکتر خود می‌باشد. از جمله مثال‌های استاندارد، مجموعه یک سوم میانی کانتور، بادبان بند سیرپینسکی و منحنی ون کنخ می‌باشند. شکل‌های (۱-۰) تا (۵-۰) را ببینید. تحت شرایط معینی نشان می‌دهیم که یک مجموعه خود متشابه F ابعاد هاسدورف و جعبه یکسان و برابر s دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$(۹-۹) \quad \sum_{i=1}^m c_i^s = 1$$

و به علاوه F اندازه H^s مثبت و متناهی دارد. محاسبه‌ای مشابه محاسبه تجربی مثال ۲-۷ ایجاب می‌کند که مقدار داده شده در فرمول (۹-۹) مقداری موجه است. اگر $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ و این اجتماع متشکل از مجموعه‌های "تقریباً مجزا" باشد با به کار بردن (۸-۹) و ویژگی مقیاسی (۱-۲) داریم

$$(۱۰-۹) \quad H^s(F) = \sum_{i=1}^m H^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s H^s(F)$$

با فرض این که $0 < H^s(F) < \infty$ در مقدار جهشی $s = \dim_H F$ در می‌یابیم که s در فرمول (۹-۹) صدق می‌کند.

اکنون برای اثبات یکسان بودن ابعاد هاسدورف و جعبه به شرطی نیاز داریم که ما را مطمئن کند که تکه‌های $S_i(F)$ از F خیلی با هم همپوشانی ندارند. گوییم S_i در شرط مجموعه باز صدق می‌کند اگر یک مجموعه باز کراندار V موجود باشد به طوری که

$$(۱۱-۹) \quad V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V)$$

که اجتماع متشکل از مجموعه‌های مجزا است (در مجموعه یک سوم میانی کانتور شرط مجموعه باز برای S_1 و S_2 برقرار است جایی که V برابر بازه باز $(0,1)$ است) اگر S_i ها در شرط مجموعه باز صدق کنند نشان می‌دهیم که بعد هاسدورف با $(9-9)$ داده می‌شود. به نتیجه هندسی زیر نیاز داریم.

لم ۲-۹

فرض کنیم $\{V_i\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز و مجزای R^n باشد به طوری‌که هر V_i شامل یک گوی به شعاع $a_1 r$ و مشمول در یک گوی به شعاع $a_2 r$ باشد. آنگاه هر گوی B به شعاع r حداکثر $a_1^{-n} (1+2a_2)^n$ از بستارهای $\overline{V_i}$ را قطع می‌کند.

برهان. اگر $\overline{V_i}$ ، B را قطع کند آنگاه $\overline{V_i}$ در گویی هم مرکز با B و شعاع $(1+2a_2)r$ قرار می‌گیرد. فرض کنیم تعداد q از $\overline{V_i}$ ها B را قطع کند. آنگاه از جمع حجم‌های گوی‌های داخلی به شعاع $a_1 r$ نتیجه می‌شود که $q(a_1 r)^n \leq (1+2a_2)^n r^n$ ، و این کران گفته شده برای q است. \square

به دست آوردن کران پایین در قضیه زیر کمی مشکل است. استفاده از مجموعه یک سوم میانی کانتور یا مثال کلی شکل ۲-۹ به فهم اثبات برای خواننده کمک می‌کند. در ضمن اثبات گزاره ۷-۹ حالتی را که مجموعه‌های $S_1(F), \dots, S_m(F)$ مجزا هستند را در بر می‌گیرد و ساده‌تر است.

قضیه ۳-۹

فرض کنید که شرط مجموعه باز (۹-۱۱) برای تشابه‌های S_i از R^n با نسبت‌های c_i ($1 \leq i \leq m$) برقرار است. اگر F مجموعه‌ای پایا باشد به طوری‌که

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \quad (9-12)$$

آنگاه $\dim_H F = \dim_B F = s$ ، که در آن s با رابطه زیر داده می‌شود

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1 \quad (9-13)$$

به علاوه برای این مقدار s ، $0 < H^s(F) < \infty$.

برهان. فرض کنید s در (۹-۱۳) صدق کند. برای هر مجموعه A می‌نویسیم $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$. فرض کنید J_k نشان دهنده تمام دنباله‌های k -

جمله‌ای (i_1, \dots, i_k) باشد به طوری که $1 \leq i_j \leq m$. با به کار بردن مکرر (۹-۱۲) به دست می‌آوریم

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}$$

اکنون نشان می‌دهیم که این پوشش F تخمین بالایی مناسبی برای اندازه هاسدورف است. از آنجاییکه نگاشت $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ یک تشابه با نسبت c_{i_1}, \dots, c_{i_k} است بنابراین با استفاده از (۹-۱۳) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{J_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s &= \sum_{J_k} (c_{i_1}, \dots, c_{i_k})^s |F|^s \\ (۹-۱۴) \quad &= \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \dots \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s \end{aligned}$$

برای هر $\delta > 0$ ، k را می‌توانیم چنان انتخاب کنیم که $|\sum_{i_1} c_{i_1}^s| \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta$ ، پس $H^s(F) \leq |F|^s$ و در نتیجه $H^s(F) \leq |F|^s$.

کران پایین مشکل‌تر است. فرض کنید I مجموعه‌ای از دنباله‌های نامتناهی به صورت $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ باشد و قرار دهید

$$I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$$

استوانه‌ای شامل آن دنباله‌ها در I باشد که جملات آغازین آن (i_1, \dots, i_k) است. می‌توانیم یک توزیع جرم μ روی زیرمجموعه‌های I چنان قرار دهیم که $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$ از

آنجاییکه $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i})$ ، یعنی $(c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s$

نتیجه می‌شود که μ واقعاً یک توزیع جرم روی زیرمجموعه‌های I با خاصیت $\mu(I) = 1$ می‌باشد. همچنین می‌توانیم μ را به کل F به طور طبیعی با ضابطه $\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$ برای زیرمجموعه A از F توسعه دهیم. (یادآوری

می‌کنیم که $\tilde{\mu}(F) = 1$ به راحتی دیده می‌شود که $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, \dots, i_k}$

نشان می‌دهیم که $\tilde{\mu}$ در اصل توزیع جرم ۴-۲ صدق می‌کند. فرض کنید V همان مجموعه باز (۹-۱۱) باشد. از آنجا که $\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V})$ دنباله نزولی از تکرارهای

$S^k(\bar{V})$ به F میل می‌کند؛ (۹-۴) را ببینید. به خصوص $\bar{V} \supset F$ شامل F است و

$\bar{V}_{i_1, \dots, i_k} \supset F_{i_1, \dots, i_k}$ برای هر دنباله متناهی (i_1, \dots, i_k) . یک گوی B با شعاع

$r < 1$ را در نظر بگیرید. با استفاده از مجموعه‌های V_{i_1, \dots, i_k} با قطرهایی قابل مقایسه با B و

بستارهایی که مجموعه $F \cap B$ را قطع می‌کنند تخمینی از $\tilde{\mu}(B)$ به دست می‌آوریم.

هر دنباله $(i_1, i_2, \dots) \in I$ را از اولین جمله i_k با خاصیت

$$(15-9) \quad (\min_i c_i)^r \leq c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \leq r$$

بریده و Q را مجموعه همه دنباله‌هایی قرار می‌دهیم که بدین ترتیب به دست می‌آیند. در این صورت برای هر دنباله نامتناهی $(i_1, i_2, \dots) \in I$ دقیقاً یک مقدار k وجود دارد که $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ چون V_m, \dots, V_1 مجزا هستند، برای هر (i_1, \dots, i_k) ، مجموعه‌های $V_{i_1, \dots, i_k, m}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, 1}$ هم مجزا هستند. با به کار بردن این روش به صورت آشیانه‌ای نتیجه می‌شود که گردایه $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$ از مجموعه‌های باز مجزا می‌باشند. به طریق مشابه $F \subset \bigcup_Q F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$.

حال a_1 و a_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که V شامل گویی با شعاع a_1 و مشمول در گویی با شعاع a_2 باشد. آنگاه به ازای $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ ، مجموعه V_{i_1, \dots, i_k} شامل یک گوی با شعاع $a_1 \dots c_{i_k} c_i$ است و بنابراین یکی با شعاع $a_1 r (\min_i c_i)$ و مشمول در یک گوی با شعاع $a_2 c_{i_1} \dots c_{i_k} a_2$ و از اینرو در یک گوی با شعاع $a_2 r$ می‌باشد. فرض کنید Q_1 متشکل از دنباله‌های (i_1, \dots, i_k) در Q باشد که $B, \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ را قطع می‌کند. بنابر لم ۹-۲ حداکثر

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) \leq \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\}$$

$$\leq \mu\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right\}$$

چراکه اگر $x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ آنگاه یک عدد صحیح k وجود دارد به طوری که $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$ بنابراین با استفاده از (۹-۱۵)

$$\tilde{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q$$

از آنجاییکه هر مجموعه U مشمول در یک گوی با شعاع $|U|$ است، داریم $q |U|^s \leq \tilde{\mu}(U)$ ، بنابراین قاعده توزیع جرم ۴-۲ نتیجه می‌دهد $\dim_H F = s$ و $H^s(F) \geq q^{-1} > 0$.

اگر مجموعه دلخواهی از دنباله‌های نامتناهی باشد به طوری که به ازای هر $(i_1, i_2, \dots) \in I$ دقیقاً یک عدد صحیح k وجود داشته باشد که $(i_1, i_2, \dots) \in Q$ ، به طور استقرایی از (۹-۱۳) نتیجه می‌شود که $\sum_Q (c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})^s = 1$. بنابراین اگر Q را همانگونه که در (۹-۱۵) انتخاب شد، برگزینیم، آنگاه Q حداکثر شامل $r^{-s} (\min_i c_i)^{-s}$ دنباله است. به

فرکتال‌های تعریف شده بر اساس انتقال‌ها — مجموعه‌های خودمتشابه و خودآفین — ۱۷۱

ازای هر دنباله (i_1, \dots, i_k) در Q داریم $|\bar{V}| \leq r |\bar{V}|$ ، بنابراین به ازای $r < 1$ می‌توان F را با $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ مجموعه با قطر $r |\bar{V}|$ پوشاند. از تعریف معادل ۳-۱ (iv) نتیجه می‌شود که $\dim_B F \leq s$ از آنجاییکه بعد هاوسدورف هم برابر s است، برهان کامل می‌شود. \square

می‌توان نشان داد که اگر در قضیه ۳-۹ شرط مجموعه باز مفروض نباشد، هنوز داریم $\dim_H F = \dim_B F$ هر چند ممکن است این مقدار کمتر از s باشد. قضیه ۹-۱۳ ما را قادر می‌سازد تا بعد بسیاری از فرکتال‌های خود متشابه را بیابیم.

مثال ۹-۴ بادبان بند سیرپینسکی

بادبان بند سیرپینسکی F از یک مثلث متساوی‌الاضلاع با حذف مکرر مثلث‌های متساوی‌الاضلاع وارونه ساخته می‌شود، شکل ۳-۰ را ببینید. داریم $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$.

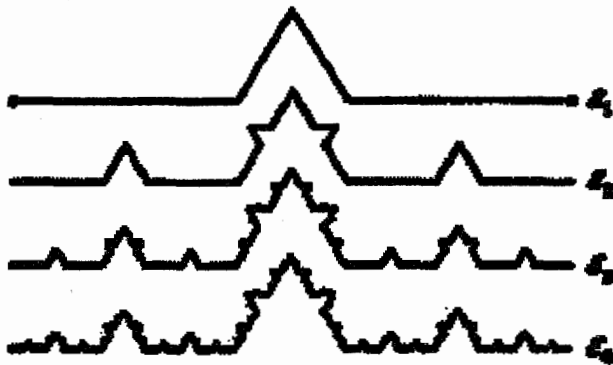
محاسبه. بادبان بند F تحت سه تشابه با نسبت $\frac{1}{2}$ که مثلث E_0 را به مثلث‌های E_1 می‌نگارد پایا (ناوردا) است. با گرفتن V به عنوان درون E_0 ، شرط مجموعه باز برقرار است. بنابراین براساس قضیه ۹-۳، $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$ که جواب $\sum_1^3 (\frac{1}{2})^s = 1$ می‌باشد. \square

مثال بعد شامل تبدیل‌های تشابه با بیشتر از یک نسبت می‌باشد.

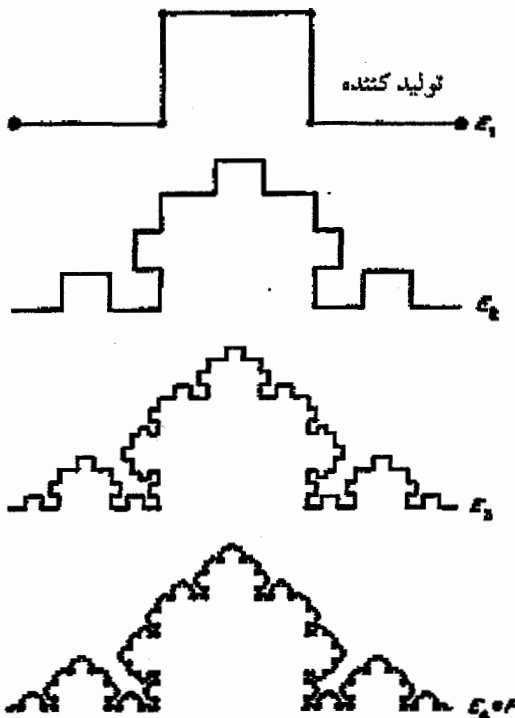
مثال ۹-۵ منحنی ون کخ تعدیل شده

عدد $0 < a \leq \frac{1}{3}$ را ثابت نگه دارید و منحنی F را با جایگزینی مکرر نسبت میانی a از هر بازه با دو ضلع دیگر از یک مثلث متساوی‌الاضلاع بسازید، شکل ۹-۴ را ببینید. آنگاه $\dim_H F = \dim_B F$ پاسخ معادله $2a^2 + 2(\frac{1}{2}(1-a))^s = 1$ است.

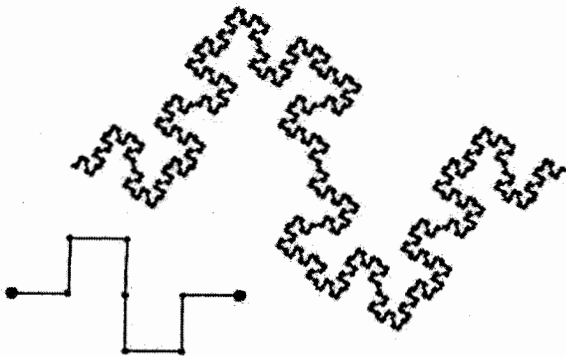
محاسبه. منحنی F تحت تشابه‌هایی که بازه واحد را به هر یک از چهار بازه در E_1 می‌نگارد، پایدار است. با گرفتن V به عنوان یک مثلث متساوی‌الساقین با قاعده به طول ۱ و ارتفاع $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ، شرط مجموعه باز برقرار است، بنابراین قضیه ۳-۹، بعد مذکور را می‌دهد. \square



شکل ۹-۴ روش ساخت یک منحنی ون کخ تعدیل شده - مثال ۹-۵ را ببینید (E_1 یک تولید کننده برای منحنی است).

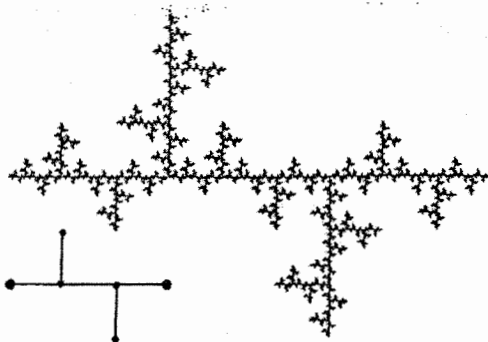


شکل ۹-۵ مراحل ساخت یک منحنی فرکتالی از یک تولید کننده. طول های مولفه ها در تولید کننده برابر می باشند و ابعاد جعبه و هاسدورف F به صورت $1 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^s + 2\left(\frac{1}{4}\right)^s$ داده می شود، یا به عبارتی $s = 1.34$.



شکل ۶-۹ یک منحنی فرکتالی و تولید کننده آن. ابعاد جعبه و هاسدورف منحنی برابر $\log 8 / \log 4 = 1\frac{1}{2}$ می‌باشند.

یک روش ترسیمی ساده برای تشخیص برخی مجموعه‌های خود متشابه، به ویژه منحنی‌های خودمتشابه مانند مثال ۵-۹ وجود دارد. هر مولد از تعدادی پاره خط مستقیم و دو نقطه خاص تشکیل شده است. به هر پاره خط یک تشابه که دو نقطه خاص را به روی نقاط انتهایی پاره خط می‌نگارد نسبت می‌دهیم. یک دنباله از مجموعه‌های شبیه به مجموعه ناوردای خودمتشابه را می‌توان با تکرار روند جایگزین کردن هر پاره خط با یک کپی مشابه از مولد به دست آورد. به عنوان چند مثال شکل‌های ۵-۹ تا ۷-۹ را ببینید. توجه کنید که تشابه‌ها به وسیله مولدها فقط در طی یک انعکاس تعریف می‌شوند، اما جهت‌دهی را می‌توان با نمایش نخستین گام از روش ساخت مشخص کرد.



شکل ۷-۹ یک فرکتال درخت مانند و تولید کننده آن. ابعاد جعبه و هاسدورف برابر $\log 5 / \log 3 = 1.465$ می‌باشند.

۳-۹ چند تغییر

محاسبات بر اساس قضیه ۳-۹ را می توان برای تخمین بعد مجموعه ناوردای F متشکل از گردابه‌ای از انقباض‌ها که تشابه نیستند تنظیم کرد.

گزاره ۶-۹

فرض کنید S_m, \dots, S_1 انقباض‌هایی روی یک زیرمجموعه بسته D از R^n باشد به طوری که

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y \in D)$$

که به ازای هر i ، $c_i < 1$. آنگاه $\dim_H F \leq s$ و $\overline{\dim}_B F \leq s$ که $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$

برهان. با توجه به اینکه به ازای هر A نابرابری $|A| \leq c_{i_1} \dots c_{i_k} |A_{i_1, \dots, i_k}|$ را به جای تساوی

داریم، این تخمین‌ها اساساً همان پاراگراف‌های اول و آخر برهان قضیه ۳-۹ می‌باشند. \square

در ادامه یک کران پایین برای بعد در حالتی که مولفه‌های $S_i(F)$ از F مجزا هستند و F

کلاً ناهمبند است، به دست می‌آوریم. توجه کنید که اگر مجموعه فشرده E که به ازای هر i ،

$$S_i(E) \subset E \quad \text{و} \quad S_i(E) \text{ها مجزا باشند دقیقاً همین حالت اتفاق می‌افتد.}$$

گزاره ۷-۹

فرض کنید S_m, \dots, S_1 انقباض‌هایی روی یک زیرمجموعه بسته D از R^n باشد به طوری که

$$b_i |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \quad (x, y \in D) \quad (۱۶-۹)$$

که به ازای هر i ، $0 < b_i < 1$. فرض کنید که F به ازای S_i ناورد است و

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \quad (۱۷-۹)$$

که این اجتماع مجزا می‌باشد. آنگاه $\dim_H F \geq s$ که

$$\sum_{i=1}^m b_i^s = 1 \quad (۱۸-۹)$$

برهان. فرض کنید $d > 0$ کمترین فاصله بین هر جفت از مجموعه‌های فشرده مجزای

$$S_m(F), \dots, S_1(F)$$

یعنی

$$d = \min_{i \neq j} \inf \{ |x - y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F) \}$$

فرض کنید $F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ و μ را به صورت $(b_{i_1} \dots b_{i_k})^s = \mu(F_{i_1, \dots, i_k})$

تعریف کنید. از آنجایی که

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) &= \sum_{i=1}^m (b_{i_1} \dots b_{i_k} b_i)^s \\ &= (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s = \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_{i_1, \dots, i_k, i}\right) \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که μ یک توزیع جرم روی F بوده و $\mu(F) = 1$.

اگر $x \in F$ ، یک دنباله نامتناهی یکتای i_1, i_2, \dots وجود دارد به طوری که به ازای هر k ، $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$ ، به ازای $0 < r < d$ ، فرض کنید k کوچکترین عدد صحیح باشد به طوری که

$$b_{i_1} \dots b_{i_k} d \leq r < b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d$$

اگر i'_1, \dots, i'_k متفاوت با i_1, \dots, i_k باشد، مجموعه‌های F_{i_1, \dots, i_k} و $F_{i'_1, \dots, i'_k}$ مجزا هستند و با یک شکاف حداقل $r > b_{i_1} \dots b_{i_{k-1}} d$ از هم جدا شده‌اند. (برای پی بردن به این توجه کنید که اگر j کوچکترین عدد صحیح باشد که $i_j \neq i'_j$ آنگاه $F_{i_1, \dots, i_k} \subset F_{i'_1, \dots, i'_k}$ و $F_{i_1, \dots, i_k} \subset F_{i_j}$ با فاصله d از هم جدا شده‌اند. بنابراین F_{i_1, \dots, i_k} و $F_{i'_1, \dots, i'_k}$ با حداقل فاصله $b_{i_1} \dots b_{i_{j-1}} d$ از هم جدا شده‌اند.) این نتیجه می‌دهد که $F \cap B_r(x) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$ بنابراین

$$\mu(F \cap B_r(x)) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \dots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s$$

اگر U مجموعه F را قطع کند، آنگاه به ازای یک $x \in F$ ، $U \subset B_r(x)$ که $r = |U|$ بنابراین $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$ ، از این رو بنا بر قاعده توزیع جرم ۴-۲، $H^s(F) > 0$ و $\dim_H F \geq s$. \square

مثال ۸-۹ مجموعه "غیر خطی" کانتور

فرض کنید $D = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3})]$ و همچنین $D \rightarrow D : S_1, S_2$ به صورت

$$S_2(x) = 2 + 1/x \text{ و } S_1(x) = 1 + 1/x$$

داده شده باشند. آنگاه $0.44 < \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F < 0.66$ که F مجموعه ناوردا برای S_1 و S_2 می‌باشد. (این مثال در ارتباط با نظریه اعداد ظاهر می‌شود، بخش ۱۰-۲ را ببینید.)

محاسسه. توجه می‌کنیم که $S_1(D) = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), \sqrt{3}]$ و $S_2(D) = [\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}), 1 + \sqrt{3}]$ ، بنابراین می‌توانیم از گزاره ۹-۶ و ۹-۷ برای تخمین $\dim_H F$ استفاده کنیم. براساس قضیه مقدار میانگین اگر $x \neq y \in D$ آنگاه به ازای

یک $c_i \in D$ برای $i = 1, 2$ ، بنابراین به ازای $i = 1, 2$

$$\inf_{x \in D} |S'_i(x)| \leq \frac{|S_i(x) - S_i(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{x \in D} |S'_i(x)|.$$

از آنجاییکه $S'_1(x) = S'_2(x) = -1/x^2$ نتیجه می‌شود که به ازای هر دو مقدار $i = 1$ و $i = 2$

$$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \leq 2(2 - \sqrt{3}) |x - y|$$

بنابر گزاره‌های ۹-۶ و ۹-۷ کران‌های بالایی و پایینی برای بعدها با حل معادلات $2(\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}))^s = 1$ و $2(2(2 - \sqrt{3}))^s = 1$ داده می‌شود که جواب‌ها به ترتیب

$$\text{ عبارتند از } s = \log 2 / \log \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}) = 1.11 \text{ و } s = \log 2 / \log 2(2 + \sqrt{3}) = 0.34.$$

به ازای زیرمجموعه‌ای از خط حقیقی، کران بالایی بزرگتر از ۱ استفاده چندان ندارد. یک راه برای رسیدن به تخمین بهتر این است که توجه کنیم که F همچنین مجموعه ناوردای چهار نگاشت

$$S_i \circ S_j = i + 1/(j + 1/x) = i + x/(jx + 1) \quad (i, j = 1, 2)$$

روی $[0, 1]$ است. با محاسبه مشتق‌ها و استفاده از قضیه مقدار میانگین همانند گذشته، به دست می‌آوریم که

$$(S_i \circ S_j)'(x) = (jx + 1)^{-2}$$

بنابراین

$$(j(1 + \sqrt{3}) + 1)^{-2} |x - y| \leq |S_i \circ S_j(x) - S_i \circ S_j(y)| \leq (\frac{1}{2}j(1 + \sqrt{3}) + 1)^{-2} |x - y|.$$

کران‌های بالایی و پایینی برای بعدها اکنون به وسیله جواب‌های $2(\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}))^{-2s} + 2(2 + \sqrt{3})^{-2s} = 1$ و $2(2 + \sqrt{3})^{-2s} + 2(3 + 2\sqrt{3})^{-2s} = 1$ به صورت $0.44 < \dim_H F < 0.66$ داده می‌شوند که نسبت به تخمین‌های قبلی بهبود قابل توجهی دارد. در واقع $\dim_H F = 0.531$ که با تکرارهای S_i از مراتب بالاتر قابل دستیابی است. \square

قضیه ۹-۹

فرض کنید $V \subset \mathbb{R}$ بازه‌ای باز باشد و S_1, \dots, S_m انقباض‌هایی روی \bar{V} باشند که روی V دو بار مشتق‌پذیر هستند و به ازای هر i و $w \in V$ که $0 < a \leq |S'_i(w)| \leq c$ و $0 < a$

$c < 1$ ثابت هستند. فرض کنید که S_i با مجموعه باز V در شرط مجموعه باز (۹-۱۱) صدق می‌کند. آنگاه حد

$$(9-19) \quad \lim \left[\sum_{J_k} |(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})'(w)|^s \right]^{1/k} = \varphi(s)$$

به ازای هر $s > 0$ وجود دارد و مستقل از $w \in V$ می‌باشد، و نسبت به S نزولی است. اگر F مجموعه ناوردا برای S_i باشد آنگاه $\dim_B F = \dim_H F$ جواب $\varphi(s) = 1$ است، و F یک S -مجموعه است، یعنی به ازای این مقدار از s ، $0 < H^s(F) < \infty$.

قیاس‌هایی از قضیه ۹-۹ از ابعاد بالاتر وجود دارد. فرض کنید که انقباض‌های S_1, \dots, S_m روی یک دامنه D در صفحه مختلط نگاشت‌های تحلیلی مختلفی هستند. آنگاه S_i ها همدیس (همشکل)، یا به عبارتی تبدیلی‌هایی موضعاً تشابه‌مانند هستند، که به مقدار یکسانی در هر جهت منقبض می‌شوند. داریم

$$S_i(z) = S_i(z_0) + S_i'(z_0)(z - z_0) + \text{جملات } (z - z_0)^2 \text{ و از توان‌های بالاتر}$$

به طوری‌که اگر $z - z_0$ کوچک باشد

$$(9-20) \quad S_i(z) \approx S_i(z_0) + S_i'(z_0)(z - z_0)$$

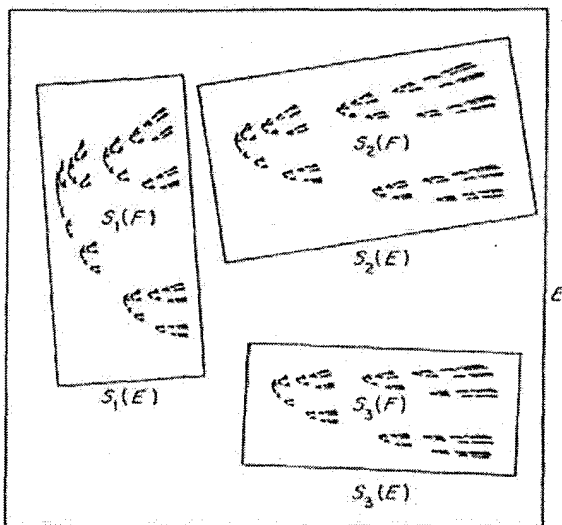
که $S_i'(z_0)$ یک عدد مختلط با خاصیت $|S_i'(z_0)| < 1$ می‌باشد. اما طرف راست (۹-۲۱) دقیقاً یک تشابه است که در مطالب مربوط به اعداد مختلط بیان شد. در این زمینه، به ترتیبی مشابه بحث در مورد حالت ۱- بعدی، قضیه ۹-۹ برقرار می‌ماند.

۹-۴ مجموعه‌های خودآفین

مجموعه‌های خود آفین دسته مهمی از مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهند که مجموعه‌های خود متشابه را به عنوان حالتی خاص در بر می‌گیرند. یک تبدیل آفین $S: R^n \rightarrow R^n$ تبدیلی به شکل

$$S(x) = T(x) + b$$

است که b یک بردار در R^n و T یک تبدیل خطی روی R^n (و قابل نمایش به صورت یک ماتریس $(n \times n)$ می‌باشد. بنابراین یک تبدیل آفین S ترکیبی از انتقال، دوران، اتساع، و احتمالاً انعکاس می‌باشد. به ویژه S کره را به بیضی‌گون می‌نگارد، مربع را به متوازی‌الاضلاع و غیره. برخلاف تشابه‌ها، تبدیلی‌های آفین شکل‌ها را در جهت‌های مختلف با نسبت‌های متفاوتی منقبض و منبسط می‌کنند.



شکل ۹-۸ یک مجموعه خود آفین که تحت تبدیلات آفین S_1, S_2 و S_3 که مربع E را به روی مستطیل‌های نشان داده شده می‌نگارند، پایا می‌باشد.

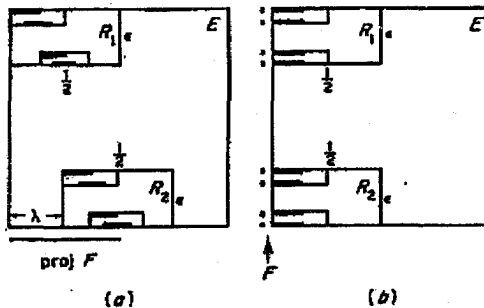
اگر S_1, \dots, S_m انقباض‌های آفینی روی R^p باشند، مجموعه یکتای فشرده ناوردای F برای S_i که توسط قضیه ۹-۱ تضمین شد یک مجموعه خود آفین نامیده می‌شود. یک مثال در شکل ۹-۸ داده شده است: S_1, S_2 و S_3 را تبدیل‌هایی تعریف می‌کنیم که به طور بدیهی مربع E را به سه مستطیل می‌نگارند. (در شکل مجموعه ناوردای F به صورت تجمع $S_1(E) \circ \dots \circ S_k(E)$ روی همه دنباله‌های (i_1, \dots, i_k) که $i_j = 1, 2, 3$ ، نشان داده شده که k به اندازه کافی بزرگ می‌باشد. به وضوح F متشکل از سه کپی آفین از خودش می‌باشد: $S_1(F), S_2(F)$ و $S_3(F)$.) طبیعی است که به دنبال فرمولی برای بعد مجموعه‌های خود آفین باشیم که تعمیمی از فرمول (۹-۱۳) برای مجموعه‌های خودمتشابه باشد. انتظار خواهیم داشت که بعد مربوط به تبدیل‌های آفین به روش ساده مناسبی، برحسب ماتریس‌ها و بردارهایی که تبدیل آفین را نمایش می‌دهند به سادگی قابل بیان باشد. متأسفانه، وضعیت بسیار پیچیده‌تر از این است — مثال زیر نشان می‌دهد که اگر تبدیل‌های آفین به طور پیوسته‌ای تغییر کنند، لزومی ندارد که بعد مجموعه خود آفین نیز به طور پیوسته تغییر کند.

مثال ۱۰-۹

فرض کنید S_1 و S_2 انقباض‌های آفین روی R^2 باشند که مربع یک‌ه را به مستطیل‌های R_1 و R_2 با اضلاع $\frac{1}{2}$ و ε که $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ می‌نگارند، همانند شکل ۹-۹. مستطیل R_1 مماس بر محور y است، اما انتهای R_2 از محور y به اندازه λ فاصله دارد. اگر F مجموعه ناوردا برای S_1 و S_2 باشد، داریم $\dim_H F \geq 1$ برای $\lambda > 0$ ، اما $\dim_H F = \log 2 / -\log \varepsilon < 1$ برای $\lambda = 0$.

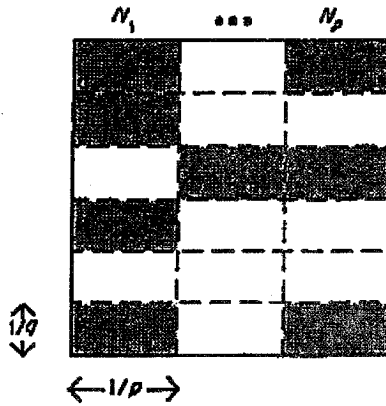
محاسبه. فرض کنید $\lambda > 0$ (شکل ۹-۹ (الف)). آنگاه k امین مرحله ساخت $E_k = \cup S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ شامل 2^k مستطیل با اضلاع 2^{-k} و ε^k است که تصویر E_k روی بردار x ، $\text{proj } E_k$ ، شامل بازه $[0, 2\lambda]$ می‌باشد. از آنجاییکه $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_k$ نتیجه می‌شود که $\text{proj } F$ شامل بازه $[0, 2\lambda]$ است. (برای بررسی این مطلب به روش دیگر، کفایت توجه کنیم که $\text{proj } F$ تحت تبدیل‌های $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2 : R \rightarrow R$ که $\tilde{S}_1 = \frac{1}{2}x$ و $\tilde{S}_2 = \frac{1}{2}x + \lambda$ باید ناوردا باشد، چرا که مجموعه ناوردا یکتا بازه $[0, 2\lambda]$ می‌باشد.) بنابراین $\dim_H F \geq \dim_H \text{proj } F = \dim_H [0, 2\lambda] = 1$.

اگر $\lambda = 0$ ، وضعیت تغییر می‌کند (شکل ۹-۹ (ب)). E_k متشکل از 2^k مستطیل به اضلاع 2^{-k} و ε^k می‌باشد که انتهای سمت چپ همه آنها مماس بر محور y است، و E_k در نوار $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2^{-k}\}$ قرار دارد. با فرض $k \rightarrow \infty$ می‌بینیم که F مجموعه کانتور یکنواخت مشمول در محور y می‌باشد، که با حذف مکرر به نسبت $1 - 2\varepsilon$ از وسط هر بازه به دست می‌آید. بنابراین $\dim_H F = \log 2 / -\log \varepsilon < 1$ (مثال ۴-۵ را ببینید). □



شکل ۹-۹ ناپیوستگی بعد مجموعه‌های خود آفین. تبدیلات آفین S_1 و S_2 مربع واحد E را به روی R_1 و R_2 می‌نگارند. در (a) $\lambda > 0$ و $\dim_H F \geq \dim_H \text{proj } F = 1$ ، اما در (b) $\lambda = 0$ و $\dim_H F = \log 2 / -\log \varepsilon < 1$.

با چنین رفتار ناپیوسته‌ای، که در حقیقت برای مجموعه‌های پیچیده‌تر تبدیل‌های آفین از این هم بدتر می‌شود، به احتمال زیاد بدست آوردن یک عبارت کلی برای بعد مجموعه‌های خودآفین مشکل خواهد بود. به هر حال، یک حالت که به طور کامل تجزیه و تحلیل شده است مجموعه خودآفینی است که از روش ساختن بازگشتی زیر به دست می‌آید؛ یک حالت خاص در شکل‌های ۹-۱۰ و ۹-۱۱ توضیح داده شده است.

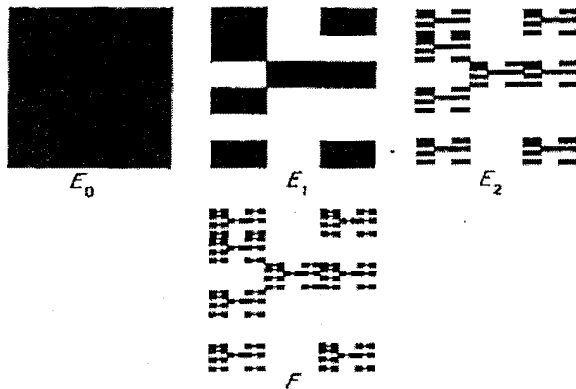


شکل ۹-۱۰ داده‌های مجموعه خود آفین مثال ۹-۱۱. تبدیلات آفین، مربع را به روی مستطیل‌های $1/p \times 1/q$ انتخاب شده از جدول $p \times q$ می‌نگارند.

مثال ۹-۱۱

فرض کنید مربع واحد E_0 به یک آرایه $p \times q$ از مستطیل‌ها به اضلاع $1/p$ و $1/q$ تقسیم شده باشد که p و q اعداد صحیح مثبتی هستند و $p < q$. یک زیرمجموعه از این مستطیل‌ها که E_1 را شکل می‌دهد انتخاب کنید، و فرض کنید N_j تعداد مستطیل‌های انتخاب شده از j آیین ستون ($1 \leq j \leq p$) باشد؛ شکل ۹-۹ را ببینید. این ساختار را به روش معمول تکرار کنید، که هر مستطیل به وسیله یک کپی آفین از E_1 جایگزین می‌شود، و فرض کنید F مجموعه حدی به دست آمده باشد. آنگاه

$$\dim_H F = \log \left(\sum_{j=1}^p N_j^{\log p / \log q} \right) \frac{1}{\log p}$$



شکل ۹-۱۱ روش ساخت یک مجموعه خود آفین از نوعی که در مثال ۹-۱۱ توضیح داده شد. ممکن است چنین مجموعه‌هایی دارای ابعاد جعبه و هاوسدورف متفاوت باشند.

$$\dim_B F = \frac{\log p_1}{\log p} + \log \left(\frac{1}{p_1} \sum_{j=1}^p N_j \right) \frac{1}{\log q}$$

که p_1 تعداد ستون‌هایی است که شامل حداقل یک مستطیل از E_1 می‌باشند. محاسبه حذف شده است.

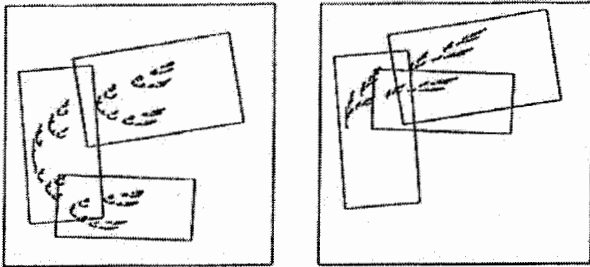
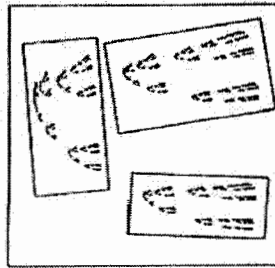
توجه کنید که در این مثال، بعد تنها مرتبط با تعداد مستطیل‌های انتخاب شده در هر مرحله نیست، بلکه به موقعیت نسبی آنها نیز مربوط می‌شود. به علاوه $\dim_H F$ و $\dim_B F$ در حالت کلی، برابر نیستند.

قضیه ۹-۱۲

فرض کنید T_1, \dots, T_m انقباض‌های خطی و $b_1, \dots, b_m \in R^n$ بردار باشند. اگر F مجموعه ناوردای آفین صادق در

$$F = \bigcup_{i=1}^m (T_i(F) + b_i)$$

باشد، آنگاه به ازای تقریباً هر $(b_1, \dots, b_m) \in R^{nm}$ با اندازه لیگ nm -بعدی،
 $\dim_H F = \dim_B F = d(T_1, \dots, T_m)$



شکل ۹-۱۲ هر یک از فرکتال هایی که در بالا نشان داده شده اند تحت مجموعه تبدیلاتی که مربع را به روی سه مستطیل می نگارند، پایا هستند. تبدیلات آفین به ازای هر فرکتال تنها در انتقال ها تفاوت دارند، پس بنابراین قضیه ۹-۱۲ هر سه فرکتال دارای بعد یکسانی هستند (مگر اینکه در کارمان بسیار بدشانس باشیم). در محاسبه مقدار مشترک 1.42 برای ابعاد جعبه و هاوسدورف به دست می آید.

به عنوان یک نتیجه از این قضیه می توان گفت تا زمانی که شانس کشف کردن یک مجموعه استثنایی از پارامترها را نداشته باشیم، همه فرکتال های شکل ۹-۱۲ بعد یکسان تخمینی در حدود 1.42 دارند.

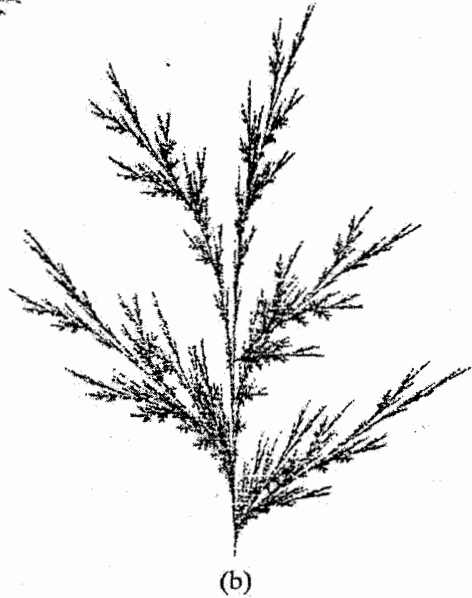
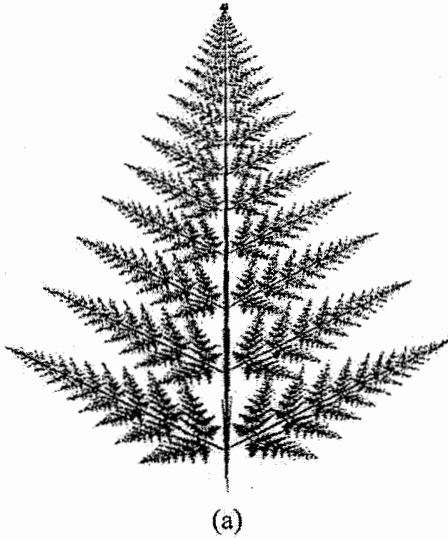
۹-۵ کاربردها در کدگذاری تصاویر

در این بخش خواهیم دید که چگونه تعداد کمی از انقباضها می توانند تعیین کننده اشیائی با ساختار فرکتالی بسیار پیچیده باشند. این موضوع در فشردگی داده ها کاربرد دارد — اگر یک عکس پیچیده و تودرتو را بتوانیم با مقدار کمی از اطلاعات کدگذاری کنیم، آنگاه آن عکس را می توان به طور مقرون به صرفه ای نگهداری یا منتقل کرد.

می خواهیم بدانیم که چه اشیائی را می توان به صورت مجموعه های ناوردای یک طرح تابع تکرار شونده یا تقریبی از آنها نمایش داد، و همچنین چگونه می توان توابعی را پیدا کرد که

فرکتال‌های تعریف شده بر اساس انتقال‌ها — مجموعه‌های خودمتشابه و خودآفین — ۱۸۳

نمایش خوبی از شیء داده شده را به وجود آورند. چنین مجموعه‌هایی همچنین به احتمال زیاد دارای ساختاری با تکرار زیاد می‌باشند.



شکل ۹-۱۳ سرخس (a) و علف (b) به ترتیب مجموعه‌های پایای حاصل از فقط ۴ و ۶ تبدیل آفین می‌باشند.

به هر حال، ترسیم مختصر مجموعه‌های خودآفین با کامپیوتر (پایان بخش ۹-۱ را ببینید) می‌تواند به طور شگفت‌انگیزی تصاویر خوبی از آشیایی که به طور طبیعی وجود دارند، مانند سرخس‌ها، علف درختی، درخت‌ها، ابرها و غیره پدید آورند. سرخس و علف درختی نشان داده شده در شکل ۹-۱۳ به ترتیب برای دقیقاً چهار و شش تبدیل آفین، ناوردا هستند. خودتشابهی و خودآفینی واقعاً در طبیعت وجود دارند.

قضیه زیر، که مشهور به قضیه کولاژ (تکه چسبانی) می‌باشد، برای میزان کیفیت تقریب یک مجموعه با مجموعه ناوردای گردایه‌ای از انقباض‌ها، ایده‌ای به دست می‌دهد.

قضیه ۹-۱۳

فرض کنید S_1, \dots, S_m انقباض‌هایی روی R^n باشند و همچنین به ازای هر $x, y \in R^n$ و هر i ، $|S_i(x) - S_i(y)| \leq c|x - y|$ که $c < 1$. فرض کنید $E \subset R^n$ هر مجموعه فشرده ناتهی باشد. آنگاه

$$(۹-۲۴) \quad d(E, F) \leq d\left(E, \bigcup_{i=1}^m S_i(E)\right) \frac{1}{(1-c)}$$

که F مجموعه ناوردا برای S_i است، و d متریک هاوسدورف (۹-۲) می‌باشد. **برهان.** با استفاده از نامساوی مثلثی برای متریک هاوسدورف منتج از ناوردایی d^F با استفاده از (۹-۵) داریم

$$\begin{aligned} d(E, F) &\leq d\left(E, \bigcup_{i=1}^m S_i(E)\right) + d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(E), F\right) \\ &= d\left(E, \bigcup_{i=1}^m S_i(E)\right) + d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(E), \bigcup_{i=1}^m S_i(F)\right) \\ &\leq d\left(E, \bigcup_{i=1}^m S_i(E)\right) + cd(E, F) \end{aligned}$$

□ که همان چیزی است که لازم داشتیم.

یک نتیجه از قضیه ۹-۱۳ این است که هر زیرمجموعه فشرده از R^n را می‌توان به اندازه دلخواه با یک مجموعه خود متشابه تقریب زد.

نتیجه ۹-۱۴

فرض کنید E یک زیرمجموعه ناتهی فشرده از R^n باشد. به ازای $\delta > 0$ داده شده، تشابه‌های انقباضی S_1, \dots, S_m با مجموعه ناوردای F وجود دارند به طوری که

$$d(E, F) < \delta$$

برهان. فرض کنید B_1, \dots, B_m گردایه‌ای از گوی‌ها با مراکز در E و با شعاع حداکثر $\frac{1}{4}\delta$ باشند که E را می‌پوشانند. آنگاه $E \subset \bigcup_{i=1}^m B_i \subset E_{\frac{1}{4}\delta}$ ، که $E_{\frac{1}{4}\delta}$ بدنه $\frac{1}{4}\delta$ -موازی E می‌باشد. به ازای هر i ، فرض کنید S_i تشابه انقباضی با نسبت کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد که E را به B_i می‌نگارد. آنگاه $(S_i(E))_{\frac{1}{2}\delta} \subset B_i \subset (S_i(E))_{\frac{1}{2}\delta}$ ، بنابراین $(\bigcup_{i=1}^m S_i(E)) \subset E_{\frac{1}{4}\delta}$ و $E \subset \bigcup_{i=1}^m (S_i(E))_{\frac{1}{2}\delta}$. بنابر تعریف متریک هاوسدورف، $d(E, \bigcup_{i=1}^m S_i(E)) < \frac{1}{2}\delta$.

(۹-۲۴) نتیجه می‌شود که $d(E, F) < \delta$ ، که F مجموعه ناوردا برای S_i می‌باشد. \square

روش تخمین توسط مجموعه‌های ناوردا که در برهان بالا استفاده شد، نسبتاً نادقیق است — این احتمال وجود دارد که این روش به تعداد بسیار زیادی از تبدیل‌ها منتهی شود که مقدار کمی از تصویر کامل و دقیق F را برساند. یک روش عمیق‌تر برای به دست آوردن تصاویری قابل قبول با تعداد کمی از تبدیلات لازم است. یک روش که اغلب نتایج خوبی می‌دهد این است که یک طرح کلی تقریبی از شیء کشیده و سپس تا آنجا که ممکن است توسط تعدادی کپی‌های کوچکتر آفین یا مشابه، آن را بپوشانیم. تشابه‌هایی که اینطور تعیین شدند را می‌توان برای محاسبه یک مجموعه ناوردا که قابل مقایسه با شیء مدل‌سازی شده است به کار برد. اگر اجتماع کپی‌های کوچکتر به شیء نزدیک باشد، قضیه ۹-۱۳ تضمین می‌کند که مجموعه ناوردا تخمین خوبی خواهد بود. آزمایش و خطا به اصلاح و بهبود شکل کمک می‌کند.

اشیای پیچیده‌تر را می‌توان با قرار دادن مجموعه‌های ناوردای چندین مجموعه متفاوت از تبدیل‌ها به وجود آورد.

به طور آرمانی، باید یک "دوربین" داشته و آن را به روی یک شی تنظیم کنیم و یک عکس از آن بگیریم که شامل تعدادی خاص از تبدیل‌های آفین باشد که مجموعه ناوردای آن تبدیلات تخمین خوبی برای شی است. به وضوح، مسائل تکنیکی پیچیده فراوان هستند، و فعلاً یک چنین کاری دور از واقعیت است. یک روش پیشنهادی، اسکن کردن شی برای تخمین زدن پارامترهای مختلف است، و سپس استفاده از این پارامترها برای تحمیل محدودیت‌ها بر تبدیل‌ها.

برای مثال، برای یک "فرکتال طبیعی" مانند یک سرخس، باید بعد را توسط یکی از روش‌های بعد جعبه تخمین بزنیم. این فرض که تشابه‌ها یا آفینی‌های مطلوب باید یک مجموعه ناوردا با این بعد فراهم کنند، با استفاده از نتایجی مانند قضیه ۹-۳ یا ۹-۱۲، حداقل از لحاظ نظری، محدودیت‌هایی روی مجموعه ممکن از تبدیل‌ها ایجاد می‌کند. با وجود این، در عمل به کار بردن چنین اطلاعاتی نسبتاً مشکل است، و مسلماً برای اینکه این روش کارایی بهتری داشته باشد به پارامترهای بیشتری نیاز داریم.

بسیاری اوقات، مجموعه‌های ناوردا در صفحه که تصاویر خوبی از اشیای فیزیکی فراهم می‌کنند، مساحت مثبت خواهند داشت، بنابراین در حالت کلی فرکتال نخواهند بود. با وجود این، ممکن است چنین مجموعه‌هایی به خوبی به منحنی‌های فرکتالی محدود شده باشند، یک ویژگی که به تصاویر اشیای طبیعی واقعیت می‌بخشد. به هر حال، بررسی ویژگی‌های فرکتالی مرزهای مجموعه‌های ناوردا مشکل به نظر می‌رسد.

با نسبت دادن یک احتمال P_i به هر یک از تبدیلات S_i ، که $0 \leq P_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^m P_i = 1$ ، این ایده‌ها را می‌توان برای تهیه کردن تصاویر سایه‌دار و رنگی توسعه داد. بدون وارد شدن به جزئیات، این اطلاعات یک توزیع جرم μ روی مجموعه ناوردا F تعریف می‌کند به طوریکه $\mu(A) = \sum_{i=1}^m P_i \mu(S_i^{-1}(A))$ ، و مجموعه را می‌توان برحسب چگالی موضعی μ ، سایه زد، یا حتی رنگ کرد.

این کار به تعدیل زیر از روش دوم رسم مجموعه‌های ناوردا که در پایان بخش ۹-۱ توضیح داده شد منتهی می‌شود. فرض کنید x_0 یک نقطه آغازین دلخواه باشد. $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_m}$ را از S_1, S_2, \dots, S_m به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که احتمال انتخاب S_i ، برابر P_i باشد، و فرض کنید $x_1 = S_{r_1}(x_0)$. به همین روش ادامه می‌دهیم، به طوریکه $x_k = S_{r_k}(x_{k-1})$ ، که S_{r_k} با احتمال P_i برابر S_i می‌باشد، با رسم دنباله $\{x_k\}$ (مثلاً، پس از حذف صد جمله اول) طرحی از مجموعه F به دست می‌آوریم، اما به این روش که یک نسبت $P_{i_1} \dots P_{i_q}$ از نقاط، به ازای هر i_1, i_2, \dots, i_q ، به قرار گرفتن در بخش $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_q}(F)$ میل می‌کند. این چگالی نقطه متغیر، یک سایه‌زنی F است. به طور مشابه، رنگ یک نقطه F به یک قاعده که با تعداد جملات از $\{x_k\}$ که به نقاط دیگر نزدیک می‌شوند، مرتبط می‌باشد. بهتر است کاردان کامپیوتر در مورد آزمایش کردن پیشامدهای بی‌پایانی که این روش ایجاد می‌کند، احتیاط کند. مشخصاً بسیاری از عکس‌های تحسین برانگیز رنگی با استفاده از تعداد نسبتاً کمی تبدیل تهیه شده‌اند.

شاید مناسب باشد که این بخش را با بعضی از "جنبه‌های مثبت و منفی" نمایش تصاویر با استفاده از طرح تابع تکرار شونده، به پایان ببریم. با به کار گرفتن خودتشابهی و تکرار در

طبیعت، و در واقع، در اشیای ساخت بشر، این شیوه اغلب صحنه را آماده می‌سازد تا با تعداد کمی (شاید کمتر از ۱۰۰) تبدیلات و احتمالات به طور موثری توصیف شود. این فشرده‌سازی بسیار بالای اطلاعات در مقایسه با آنچه که مثلاً برای گذاردن رنگها در هر مربع از شبکه‌های به اندازه کافی ریز لازم است را نشان می‌دهد. نقطه ضعف متقابل این است که ارتباط زیادی بین بخش‌های متفاوت از تصویر وجود دارد — این روش روی هم رفته برای ارائه دادن تصویری از یک درخت عالی است، اما اگر ترتیب دقیق برگ‌های شاخه‌های متفاوت مهم باشد استفاده‌ای ندارد. به ازای یک مجموعه از تبدیلات آفین، محاسبات بازسازی تصویر سر راست است، با محاسبات مشابه به خوبی جور در می‌آید و پایدار است — تغییرات کوچک در تبدیلات به تغییرات کوچکی در مجموعه ناوردا منتهی می‌شود. تبدیلات، تصویر را در مقیاس‌های به دلخواه کوچک تعریف می‌کنند، و به سادگی می‌توان درشتنمایی‌هایی از یک ناحیه کوچک به وجود آورد. در حال حاضر، نقطه ضعف عمده این روش، مشکل به دست آوردن یک مجموعه از تبدیلات برای نمایش یک شی یا تصویر داده شده می‌باشد.

نکات و منابع

به نظر می‌رسد که طرح‌های تابع تکرار شونده برای نخستین بار توسط *Hutchinson* (۱۹۸۱) به طور سازمان یافته مورد توجه قرار گرفته است، هر چند که قبل از آن، ایده‌های مشابهی وجود داشته است. مشتق‌گیری از فرمول برای به دست آوردن بعد مجموعه‌های خود متشابه به طور اساسی در کتاب *Moran* (۱۹۴۶) آورده شده است. تصاویر کامپیوتری از مجموعه‌های خود متشابه و دیگر مجموعه‌های پایا بسیار فراوان می‌باشد، آثار *Mandelbrot* (۱۹۸۲)، *Dekking* (۱۹۸۲)، *Barnsley* و *Demko* (۱۹۸۵) و *Barnsley* (۱۹۸۸) شامل مثال‌های جالب و زیبایی متعددی می‌باشند. برای دیدن مطالب مرتبط با قضیه ۹-۹ به کتاب *Ruelle* (۱۹۸۳) رجوع کنید. جزئیات کاملی از مثال ۹-۱۱ در کتاب *McMullen* (۱۹۸۴) و جزئیات کاملی از قضیه ۹-۱۲ در کتاب *Falconer* (۱۹۸۸) آمده است. توضیحی در مورد مجموعه‌های خود آفین هم توسط *Mandelbrot* (۱۹۸۶) داده شده است. کاربردهایی در پردازش تصاویر در کتاب *Barnsley* (۱۹۸۸) و در کتاب *Barnsley* و *Sloan* (۱۹۸۸) توضیح داده شده است.

تمرین‌ها

۱-۹ تحقیق کنید که متریک هاوسدورف (۹-۲) در شرایط یک متریک صدق می‌کند.

- ۲-۹ دو تبدیل تشابه روی R بیابید که بازه $[0,1]$ مجموعه پایای (فشرده ناتهی یکتای) آنها باشد. حال تعداد نامتناهی از این گونه جفت تبدیلات بیابید.
- ۳-۹ مجموعه‌هایی از (i) چهار و (ii) سه تبدیل تشابه روی R بیابید که مجموعه یک سوم میانی کانتور، مجموعه پایای آن تبدیل‌ها باشد.
- ۴-۹ یک مجموعه باز بیابید که در شرط مجموعه باز برای چهار تبدیل تشابه پایه‌ای که منحنی ون کخ (شکل ۲-۰) را تعیین می‌کنند، صدق کند. از قضیه ۳-۹ نتیجه بگیرید که منحنی ون کخ واقعاً دارای ابعاد جعبه و هاوسدورف مساوی با $\log 4 / \log 3$ می‌باشد.
- ۵-۹ تحقیق کنید که مجموعه نشان داده شده در شکل ۵-۰ دارای ابعاد جعبه و هاوسدورف مساوی می‌باشد که از رابطه $1 = (\frac{1}{2})^s + 4(\frac{1}{4})^s$ به دست می‌آید.
- ۶-۹ طرح کلی چند گام اول ساخت یک مجموعه خود متشابه با تولید کننده --- ، را رسم کنید. ابعاد جعبه و هاوسدورف این فرکتال چند می‌باشد؟ (در تولید کننده داده شده، پایه --- یک چهارم طول قسمت بالایی می‌باشد.)
- ۷-۹ فرض کنید F مجموعه به دست آمده با روش ساختی مشابه روش ساخت مجموعه کانتور باشد که در آن هر بازه با دو بازه جایگزین می‌شود که یکی از آن دو در انتهای چپ با طول یک چهارم طول بازه اولیه و دیگری در انتهای راست و با طول یک دوم طول بازه اولیه می‌باشد. بنابراین E_0 بازه $[0,1]$ می‌باشد، E_1 متشکل از بازه‌های $[0, \frac{1}{4}]$ و $[\frac{1}{2}, 1]$ می‌باشد، و غیره. بعد جعبه و هاوسدورف F را به دست آورید.
- ۸-۹ نشان دهید که هر مجموعه خود متشابه F که در شرایط قضیه ۳-۹ صدق می‌کند، به ازای هر $x \in F$ در رابطه $c_1 \leq \underline{D}(F, x) \leq \overline{D}(F, x) \leq c_2$ صدق می‌کند که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های مثبتی هستند. (برای تعریف چگالی‌ها به تعاریف (۵)-۲) و (۳-۵) مراجعه کنید.)
- ۹-۹ فرض کنید $S_1, S_2: [0,1] \rightarrow [0,1]$ به صورت $S_1(x) = x/(2+x)$ و $S_2(x) = 2/(2+x)$ داده شده باشند. نشان دهید که مجموعه پایای F مربوط به این تبدیل‌ها در $0.53 < \dim_H F < 0.80$ صدق می‌کند.
- ۱۰-۹ فرض کنید S_1, \dots, S_m انقباض‌های دولیپشیتس روی یک زیرمجموعه D از R^n باشند و F مجموعه پایای فشرده‌ای باشد که در (۹-۱) صدق می‌کند. نشان دهید که به ازای هر مجموعه باز V که F را قطع می‌کند، F و $F \cap V$ دارای بعد

هاوسدورف مساوی، بعد جعبه بالایی مساوی و بعد جعبه پایینی مساوی می‌باشند. از

$$\text{نتیجه ۳-۹} \quad \dim_p F = \overline{\dim_B F} \text{ که بگیرد}$$

۱۱-۹ درستی فرمول بعد هاوسدورف در مثال ۹-۱۱ را برای حالتی که (آ) به ازای

۱۳-۹ $N_j = N, 1 \leq j \leq p$ و (ب) به ازای $N_j = N, 1 \leq j \leq p$ یا 0 ، تحقیق

کنید، که $1 < N < q$ یک عدد صحیح می‌باشد. (توجه: مثال ۷-۱۳ را ببینید).

۱۲-۹ بعد جعبه و هاوسدورف مجموعه نشان داده شده در شکل ۹-۱۱ را به دست آورید.

۱۳-۹ یک برنامه کامپیوتری بنویسید که با گرفتن تولید کننده مجموعه، مجموعه خود

متشابه را در صفحه رسم کند.

۱۴-۹ یک برنامه کامپیوتری بنویسید که مجموعه پایای یک مجموعه داده شده از تبدیلات

یک ناحیه مسطح را رسم کند (پایان بخش ۹-۱ را ببینید). مجموعه‌های پایای

تشابه‌ها، آفینی‌ها و چند تبدیل غیرخطی دیگر را امتحان کنید. اگر شما واقعاً مستعد

و با پشت کار هستید، می‌توانید برنامه‌ای بنویسید که بعد این مجموعه‌ها را با استفاده

از یک روش جعبه - شماری تخمین بزند.

فصل ۱۰ مثال‌هایی از نظریه اعداد

از مفاهیم نظریه اعداد می‌توان در تعریف فرکتال‌ها بهره جست. برای نمونه مجموعه یک سوم میانی کانتور شامل اعدادی بین صفر و ۱ است که در مبنای ۳ بسط آنها تنها شامل ارقام ۰ و ۲ است. ما سه دسته از فرکتال‌ها را بررسی می‌کنیم که در نظریه اعداد کلاسیک ظاهر می‌شوند. این مثال‌ها برخی از ایده‌هایی را که قبلاً در این کتاب با آنها مواجه شدیم منعکس می‌سازند.

۱۰-۱ توزیع رقم‌های اعداد

در این بخش بسط اعداد حقیقی را در مبنای ثابت $m \geq 2$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم p_0, p_1, \dots, p_{m-1} نسبت‌هایی با مجموع ۱ باشند، یعنی $0 \leq p_i \leq 1$ و $\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1$. فرض کنید $F(p_0, \dots, p_{m-1})$ مجموعه اعداد x در $[0, 1]$ باشد که بسط آنها در مبنای m ارقام $0, 1, \dots, m-1$ را به ترتیب متناسب با p_0, p_1, \dots, p_{m-1} دارا باشد. به طور دقیق‌تر اگر $n_j(x |_k)$ نشان دهنده تعداد دفعاتی باشد که رقم j در k رقم اول بسط x در مبنای m تکرار می‌شود، آنگاه

$$(10-1) \quad F(p_0, \dots, p_{m-1}) = \{x \in [0, 1] : \lim_{k \rightarrow \infty} n_j(x |_k) / k = p_j, \forall j = 0, 1, \dots, m-1\}.$$

بنابراین $F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ شامل اعدادی است که دو سوم ارقام آنها در مبنای ۲، یک و بقیه صفر می‌باشند.

ثابت شده است که تقریباً همه اعداد (با اندازه لبگ) در تمام مبنایها نرمال هستند؛ یعنی بسط آنها در مبنای m ، برای هر m ، دارای نسبت‌های مساوی از ارقام $0, 1, \dots, m-1$

می‌باشند. با نمادگذاری که ما اختیار کرده‌ایم، $F(m^{-1}, \dots, m^{-1})$ دارای اندازه لبگ ۱ است و بنابراین بعد آن نیز برای هر m برابر با ۱ است. علی‌رغم این، تاکنون هیچ مثال خاصی که در تمام مبنایها نرمال باشد یافت نشده است. از اندازه هاوزدورف برای توصیف سائز مجموعه‌های $F(p_0, \dots, p_{m-1})$ استفاده می‌کنیم که در آن p_j ها همه با هم مساوی نیستند (چنین مجموعه‌هایی در $[0,1]$ چگال می‌باشند و بنابراین بعد جعبه آنها برابر ۱ است).
 یک تکنیک توزیع جرم در اثبات زیر به کار می‌رود — توزیع جرم به طور طبیعی به عنوان یک اندازه احتمال ظاهر می‌شود. توجه کنید که از قرارداد $0 \times \log 0 = 0$ استفاده می‌کنیم.

گزاره ۱-۱۰

اگر $F = F(p_0, \dots, p_{m-1})$ همانند بالا تعریف شده باشد آنگاه

$$\dim_H F = -\frac{1}{\log m} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i.$$

برهان. روح اثبات بر اساس احتمالات است. برای خود مجسم می‌کنیم که عدد $x = 0.i_1i_2\dots$ در مبنای m به طور اتفاقی چنان انتخاب شده که k امین رقم آن i_k ، به طور مستقل برای هر k ، با احتمال p_j رقم j را اختیار می‌کند. مجموعه $[0,1]$ را به عنوان فضای نمونه در نظر گرفته و اندازه احتمال P را بر زیرمجموعه‌های آن چنان تعریف می‌کنیم که اگر I_{i_1, \dots, i_k} "بازه اصلی" از اعدادی باشد که بسط آنها در مبنای m با $0.i_1\dots i_k$ آغاز شود، آنگاه احتمال اینکه عددی در این بازه باشد برابر باشد با

$$P(I_{i_1, \dots, i_k}) = p_{i_1} \dots p_{i_k}. \quad (2-10)$$

برای z داده شده رویدادهای " k امین رقم x برابر z است" برای $k = 1, 2, \dots$ مستقل می‌باشند. نتیجه‌ای از قانون قوی اعداد بزرگ (تمرین ۱-۱۵ را نگاه کنید) این است که با احتمال ۱ نسبت اتفاق افتادن یک رویداد در تعدادی آزمون مستقل به سمت احتمال اتفاق افتادن آن رویداد میل می‌کند. بنابراین با احتمال ۱ داریم

$$n_j(x | k) / k = (\text{تعداد تکرار } j \text{ در } k \text{ رقم اول}) / k \rightarrow p_j$$

هنگامی که $k \rightarrow \infty$ برای هر z از این رو $P(F) = 1$. بازه اصلی به طول m^{-k} که x به آن تعلق دارد را با $I_k(x) = I_{i_1, \dots, i_k}$ نشان می‌دهیم. با گرفتن لگاریتم از رابطه ۲-۱۰ در می‌یابیم

که برای یک عدد ثابت y احتمال اینکه $x \in I_k(y)$ ، با فرمول زیر داده می‌شود

$$\log P(I_k(y)) = n_0(y | k) \log p_0 + \dots + n_{m-1}(y | k) \log p_{m-1}.$$

اگر $y \in F$ آنگاه برای هر j ، $n_j(y | k) / k \rightarrow p_j$ ، هنگامی که $k \rightarrow \infty$. بنابراین

$$\frac{1}{k} \log \frac{P(I_k(y))}{|I_k(y)|^s} = \frac{1}{k} \log P(I_k(y)) - \frac{1}{k} \log m^{-ks}$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i + s \log m.$$

در نتیجه برای هر y در F فرمول "چگالی بازه‌ای" زیر را داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(I_k(y))}{|I_k(y)|^s} = \begin{cases} 0 & \text{if } s < \theta \\ \infty & \text{if } s > \theta \end{cases}$$

که در آن

$$\theta = -\frac{1}{\log m} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i.$$

اکنون کم و بیش در همان وضعیت گزاره ۴-۹ قرار داریم. نتایج مشابهی برقرارند و اثبات به روش مشابهی به پایان می‌رسد. کافی است که "چگالی کروی" $\lim_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^s$ را با این چگالی‌های بازه‌ای جانشین کنیم. بنابراین اگر $s < \theta$ ، $H^s(F) = \infty$ و اگر $s > \theta$ ، $H^s(F) = 0$ همانطور که می‌خواستیم. \square

۱۰-۲ کسرهای مسلسل

به جای تعریف مجموعه‌های اعداد بر حسب بسط‌های آنها در مبنای m می‌توانیم از بسط کسر مسلسل استفاده کنیم. هر عدد x ی که صحیح نباشد می‌تواند به صورت

$$x = a_0 + 1/x_1$$

نوشته شود که در آن a_0 عددی صحیح است و $x_1 > 1$. به همین ترتیب اگر x_1 صحیح نباشد آنگاه

$$x_1 = a_1 + 1/x_2$$

که $x_2 > 1$ ، پس

$$x = a_0 + 1/(a_1 + 1/x_2)$$

با ادامه دادن این روش برای هر k ، x را به صورت زیر داریم

$$x = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(... + 1/a_{k-1} + 1/x_k)))$$

به شرط آنکه در هیچ مرحله‌ای x_j یک عدد صحیح نباشد. دنباله a_0, a_1, a_2, \dots از اعداد صحیح، خارج قسمت‌های جزئی x نامیده می‌شود و عبارت

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

را به عنوان بسط کسر مسلسل x به کار می‌بریم. این بسط فقط و فقط زمانی پایان‌پذیر است که x گویا باشد در غیر این صورت با در نظر گرفتن تعدادی متناهی از جملات، دنباله

$$a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(... + 1/a_k)))$$

تقریب‌هایی گویا برای x فراهم می‌کند که وقتی $k \rightarrow \infty$ به x همگرا هستند. (کسرهای مسلسل در حقیقت رابطه تنگاتنگی با تقریب دیوفانتی دارند؛ بخش ۱۰-۳ را ببینید).

مثال‌هایی از کسرهای مسلسل عبارتند از

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

به طور کلی ریشه‌های معادلات درجه دوم با ضرایب صحیح نهایتاً دارای خارج قسمت‌های جزئی متناوب می‌باشند.

مجموعه‌هایی از اعداد که به وسیله شرایطی بر روی خارج قسمت‌های جزئی‌شان تعریف می‌شوند، همانطوریکه مثال زیر نشان می‌دهد، اغلب فرکتال از کار در می‌آیند.

مثال ۱۰-۲

فرض کنید F مجموعه اعداد حقیقی مثبتی مانند x باشد که دارای عبارتی نامتناهی از کسرهای جزئی می‌باشند و تمام خارج قسمت‌های جزئی آنها برابر ۱ یا ۲ است. آنگاه F یک فرکتال با $0.44 < \dim_H F < 0.66$ خواهد بود.

برهان. به سادگی دیده می‌شود که F بسته و کراندار است. به علاوه $x \in F$ دقیقاً زمانی اتفاق می‌افتد که $x = 1 + 1/y$ یا $x = 2 + 1/y$ برای $y \in F$. با قرار دادن $S_1(x) = 1 + 1/x$ و $S_2(x) = 2 + 1/x$ ، نتیجه می‌شود که $F = S_1(F) \cup S_2(F)$ ؛ به عبارت دیگر F تحت هر S_i با تعریف (۹-۱) پایا می‌باشد. در حقیقت F همان مجموعه‌ای است که در مثال ۹-۸ توضیح داده شده و در آنجا نشان دادیم که این مجموعه دارای بعد هاسدورف بین ۰.۴۴ و ۰.۶۶ می‌باشد. □

روشن است که تغییر شرایط بر روی خارج قسمت‌های جزئی به فرکتال‌های دیگری منجر می‌شود که مجموعه‌های پایای تبدیل‌های معینی می‌باشند.

۳-۱۰ تقریب دیوفانتی

یک عدد گنگ x تا چه دقتی می‌تواند به وسیله اعداد گویای p/q تقریب شود که مخرج q از q_0 بزرگتر نباشد؟ مبحث تقریب دیوفانتی مطالعه چنین مسائلی است که ممکن است در وضعیت‌های عملی با آنها مواجه شویم (بخش ۱۳-۶ را ببینید). قضیه کلاسیکی از دیریکله (تمرین ۷-۱۰) بیان می‌کند که برای هر عدد حقیقی x تعداد نامتناهی از اعداد صحیح و مثبت q وجود دارد به طوری که

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

برای اعداد صحیح مناسب p . این p/q ها تقریب‌های گویای خوبی برای x هستند. به طور معادل

$$\|qx\| \leq q^{-1}$$

برای تعداد نامتناهی q که در آن $\|y\| = \min_{m \in \mathbb{Z}} |m - y|$ نشان دهنده فاصله y به نزدیکترین عدد صحیح است.

صورت‌های دیگری از قضیه دیریکله قابل استفاده برای تقریباً همه اعداد x می‌باشند. می‌شود ثابت کرد که اگر $\psi(q)$ یک تابع نزولی از q با $0 \leq \psi(q) \leq \frac{1}{2}$ باشد آنگاه

$$\|qx\| \leq \psi(q) \quad (۳-۱۰)$$

برای تعداد نامتناهی q ، یا برای تقریباً همه x ها برقرار است و یا تقریباً برای هیچ x ی برقرار نیست (نسبت به اندازه لبگ ۱- بعدی) بسته به اینکه $\sum_1^\infty \psi(q)$ واگرا یا همگرا باشد. در حالت اخیر مجموعه x هایی که برای آنها رابطه ۳-۱۰ به ازای تعداد نامتناهی q برقرار است، یک فرکتال است.

هر عدد x ی که در رابطه

$$\|qx\| \leq q^{1-\alpha} \quad (۴-۱۰)$$

برای تعداد نامتناهی عدد صحیح و مثبت q صدق کند α - خوب - تخمین‌پذیر نامیده می‌شود. طبیعی است که برای $\alpha > 2$ بپرسیم مجموعه چنین اعدادی چقدر بزرگ است و آیا علی‌الاصول چنین اعداد غیر گویایی وجود دارند یا نه. قضیه یارنیک را ثابت می‌کنیم که می‌گوید بعد هاوسدورف مجموعه اعداد α - خوب - تخمین‌پذیر برابر $2/\alpha$ است.

فوراً از مثال ۴-۷ می‌شود دریافت که بعد مجموعه اعداد α - خوب - تخمین‌پذیر حداقل برابر $1/\alpha$ است (بررسی کنید). برای به دست آوردن مقدار $2/\alpha$ باید ظرافت بیشتری به خرج

دهیم. ایده کار چنین است. فرض کنید مجموعه G_q متشکل از اعداد $x \in [0,1]$ باشد که در رابطه $(4-10)$ صدق می‌کنند. تجزیه اعداد نشان می‌دهد که اگر n بزرگ باشد و p_1 و p_2 اعداد اولی باشند که $n < p_1$ ، $p_2 \leq 2n$ ، آنگاه G_{p_1} و G_{p_2} مجزا خواهند بود (به جز نقاطی که خیلی نزدیک به صفر یا ۱ هستند). بنابراین مجموعه

$$H_n = \bigcup_{\substack{p \text{ prime} \\ n < p \leq 2n}} G_p$$

به طور نادقیق شامل $\sum_{n < p \leq 2n} 1/p \approx n^2 / \log n$ بازه با طول حداقل $2(2n)^{-\alpha}$ می‌باشد که به شکل معقولی قرار گرفته‌اند. سپس نشان می‌دهیم که اگر n_k دنباله‌ای سریعاً صعودی باشد، آنگاه اشتراک $\bigcap_{k=1}^{\infty} H_{n_k}$ دارای حداقل بعدی برابر $2/\alpha$ است، و توجه می‌کنیم که هر عددی در این اشتراک در تعداد نامتناهی از G_p ها قرار می‌گیرد و بنابراین α خوب - تخمین‌پذیر است.

قضیه یارنیک^۱ ۳-۱۰

فرض کنید $\alpha > 2$. اگر مجموعه F متشکل از اعداد حقیقی $x \in [0,1]$ باشد به طوری که برای آنها نامساوی زیر برای تعداد نامتناهی عدد طبیعی q برقرار باشد

$$\|qx\| \leq q^{1-\alpha} \quad (5-10)$$

در این صورت $\dim_H F = 2/\alpha$.

برهان. حذف می‌شود. \square

۴-۱۰ نکات و منابع

تعداد بسیار زیادی کتاب مقدماتی در مورد نظریه اعداد موجود است که از آن میان کتاب کلاسیک *Hardy* و *Wright* (۱۹۶۰) قابل ذکر است. تحلیل ابعادی توزیع ارقام در مبنای m در کتاب *Billingsley* (۱۹۶۵) آورده شده است. کسرهای مسلسل در اکثر کتاب‌های نظریه اعداد توضیح داده شده‌اند، *Rogers* (۱۹۷۰) و *Bumby* (۱۹۸۵) از دیدگاه ابعادی به این موضوع پرداخته‌اند. تقریب دیوفانتی با تمام جزئیات در کتاب‌های *Schmidt* (۱۹۸۰) و *Cassels* (۱۹۵۷) یافت می‌شود. اثبات‌هایی برای قضیه *Jarnik* به وسیله خود *Jarnik* (۱۹۳۱)، *Besicovitch* (۱۹۳۴)، *Eggleston* (۱۹۵۲) و *Kaufman* (۱۹۸۱) داده

^۱ Jarnik

شده است. برای مطالب مرتبط با مجموعه‌های با اشتراک بزرگ به مقاله‌های *Dodson* و *Rynne* و *Vickers* مراجعه کنید.

تمرین‌ها

۱-۱۰ نشان دهید که مجموعه $F(p_0, \dots, p_{m-1})$ در $(1-10)$ به ازای مجموعه‌ای از m

تبدیل تشابه، پایا به معنای $(1-9)$ می‌باشد. (البته این مجموعه فشرده نیست).

۲-۱۰ بعد هاوسدورف مجموعه اعدادی که بسط آنها در مبنای ۳ به همان تعداد که شامل

۱ می‌باشد دارای ۲ نیز باشد را به دست آورید (یعنی، آن x هایی که

$$2 \lim_{k \rightarrow \infty} n_1(x|_k)/k = \lim_{k \rightarrow \infty} n_2(x|_k)/k$$

داشته باشند).

۳-۱۰ نمایش کسر نامختوم (الف) $\sqrt{5}$ و (ب) $41/9$ را بیابید.

۴-۱۰ چه عددی دارای نمایش کسری نامختوم زیر می‌باشد؟

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

۵-۱۰ از نمایش کسری نامختوم $\sqrt{2}$ (با خارج قسمت‌های جزئی $1, 2, 2, 2, \dots$) استفاده

کنید و تقریب‌های گویای خوبی برای $\sqrt{2}$ به دست آورید. (در حقیقت، عددی که

با زدن یک کسر جزئی در k امین خارج قسمت جزئی، به دست می‌آید، بهترین

تقریب گویا نسبت به هر عدد با مخرج مساوی یا کوچک‌تر می‌باشد).

۶-۱۰ تقریب‌هایی برای ابعاد جعبه و هاوسدورف مجموعه متشکل از اعداد مثبتی که خارج

قسمت‌های جزئی بسط کسری نامختوم آنها فقط دارای ارقام ۲ و ۳ باشد را به دست

آورید.

۷-۱۰ فرض کنید x یک عدد حقیقی و Q یک عدد صحیح مثبت باشد. با در نظر گرفتن

مجموعه اعداد $\{rx \pmod{1} : r = 0, 1, \dots, Q\}$ ، قضیه دیریکله را ثابت کنید: یک

عدد صحیح q که $0 \leq q \leq Q$ وجود دارد به طوری که $\|qx\| \leq Q^{-1}$. نتیجه

بگیرید که تعداد نامتناهی عدد صحیح مثبت q وجود دارد به طوری که

$$\|qx\| \leq q^{-1}$$

۸-۱۰ فرض کنید n و d اعداد صحیح مثبتی باشند. نشان دهید که اگر معادله دیوفانتی $x^n - dy^n = 1$ دارای تعداد نامتناهی جواب (x, y) باشد که در آن x و y اعداد صحیح مثبتی هستند، آنگاه $d^{1/n}$ باید n - خوب - تخمین پذیر باشد.

۹-۱۰ $\alpha > 3$ را ثابت بگیرید و فرض کنید F مجموعه آن (x, y) هایی در R^2 باشد به طوری که نامساوی‌های $\|qx\| \leq q^{1-\alpha}$ و $\|qy\| \leq q^{1-\alpha}$ همزمان به ازای تعداد نامتناهی عدد صحیح مثبت q برقرار باشند. به روشی مشابه قسمت اول برهان قضیه ۱۰-۳، نشان دهید که $\dim_H F \leq 3/\alpha$. (در حقیقت، با استفاده از تعمیم باقیمانده برهان، می‌توان نشان داد که $\dim_H F = 3/\alpha$).

۱۰-۱۰ نشان دهید مجموعه اعداد حقیقی x که $(x+m)^2$ به ازای هر عدد صحیح m α - خوب - تخمین پذیر است، دارای بعد هاوسدورف $2/\alpha$ می‌باشد.

فصل ۱۱ نمودارهای توابع

بسیاری از فرکتال‌های جالب و مهم، چه از دیدگاه عملی و چه از دیدگاه نظری، به عنوان نمودار توابع ظاهر می‌شوند. در حقیقت بسیاری از پدیده‌ها هنگامی که به عنوان توابعی از زمان در نظر گرفته می‌شوند خصلت‌های فرکتالی از خود بروز می‌دهند. به عنوان مثال می‌توان به فشار هوا، سطوح خازن‌ها و قیمت‌های بازار سهام اشاره کرد، هنگامی که این پدیده‌ها را در فواصل زمانی به اندازه کافی بزرگ در نظر بگیریم.

۱-۱۱ بعد نمودارها

توابع $f: [a, b] \rightarrow R$ را در نظر می‌گیریم. تحت شرایطی نمودار

$$\text{graph } f = \{(t, f(t)) : a \leq t \leq b\}$$

به عنوان زیرمجموعه‌ای از صفحه (t, x) ممکن است یک فرکتال باشد. (به این دلیل از صفحه مختصات (t, x) به جای (x, y) استفاده می‌کنیم که با نمادگذاری ما در بقیه کتاب سازگار باشد، همچنین در اغلب موارد متغیر مستقل ما زمان خواهد بود.) اگر f دارای مشتق پیوسته باشد، چندان مشکل نیست که ببینیم بعد نمودار f برابر ۱ است، و در حقیقت یک ۱-مجموعه منظم می‌باشد. حتی اگر f با تغییر کراندار باشد یعنی برای هر افزایش $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ ، $\sum_{i=0}^{m-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})| \leq \text{constant}$ ، آنگاه این گزاره برای آن برقرار خواهد بود. با این وجود برای یک تابع پیوسته که به اندازه کافی نامنظم است ممکن است که نموداری با بعد بیشتر از یک داشته باشیم. شاید بهترین مثال شناخته شده تابع

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$$

باشد که در آن $1 < s < 2$ و $\lambda > 1$. این تابع که در اصل همان مثال وایرشتراس از تابع پیوسته‌ای است که هیچ جا مستقیماً نیست، دارای بعد جعبه s بوده و به نظر می‌رسد که بعد هاوسدورف آن نیز برابر s باشد.

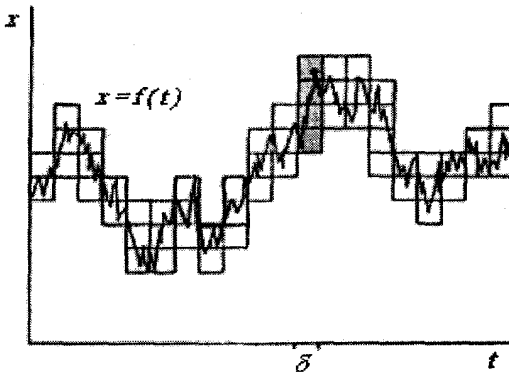
ابتدا چند تخمین مناسب ساده ولی به درد بخور برای بعد جعبه نمودارها ارائه می‌کنیم. برای تابع f و بازه بسته $[t_1, t_2]$ حداکثر تغییرات f ، R_f ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_f[t_1, t_2] = \sup_{t_1 < t, u < t_2} |f(t) - f(u)|$$

گزاره ۱-۱۱

فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow R$ پیوسته باشد. همچنین فرض کنید $0 < \delta < 1$ و m کوچکترین عدد صحیح باشد که از $1/\delta$ بیشتر یا مساوی با آن است. در این صورت، اگر N_δ تعداد مربع‌های δ - شبکه‌ای باشد که نمودار f را قطع می‌کنند، آنگاه

$$(1-11) \quad \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta] \leq N_\delta \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta].$$



شکل ۱-۱۱ تعداد مربع‌های δ - شبکه در یک ستون بالای یک بازه به طول δ ، که نمودار f را قطع می‌کنند، تقریباً برابر با برد f روی آن بازه حاصل از δ می‌باشد. مجموع این اعداد، تخمین‌هایی از بعد جعبه نمودار f به ما می‌دهد.

برهان. تعداد مربع‌های شبکه به طول ضلع δ در ستون بالای بازه $[i\delta, (i+1)\delta]$ که نمودار f را قطع می‌کنند حداقل $R_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta$ و حداکثر $2 + R_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta$ است، چون f پیوسته است. با گرفتن مجموع روی تمام چنین بازه‌هایی ۱-۱۱ به دست می‌آید. این موضوع در شکل ۱-۱۱ توضیح داده شده است. \square

نتیجه ۲-۱۱

فرض کنید $f: [0,1] \rightarrow R$ پیوسته باشد.

(آ) فرض کنید

$$(۲-۱۱) \quad |f(t) - f(u)| \leq c |t - u|^{2-s} \quad (0 \leq t, u \leq 1)$$

که در آن $c > 0$ و $1 \leq s \leq 2$. آنگاه $H^s(F) < \infty$ و $\dim_H \text{graph } f \leq \dim_B \text{graph } f \leq s$. این نتیجه همچنین هنگامی که ۲-۱۱ برای $\delta > 0$ درست باشد، برقرار است.

(ب) فرض کنید اعداد $c > 0$ ، $\delta_0 > 0$ و $1 \leq s < 2$ موجود باشند به طوری که برای هر $0 < \delta \leq \delta_0$ و $t \in [0,1]$ عدد u موجود باشد به طوری که $|t - u| \leq \delta$ و

$$(۳-۱۱) \quad |f(t) - f(u)| \geq c\delta^{2-s}$$

آنگاه $s \leq \underline{\dim}_B \text{graph } f$.

برهان.

(آ) از (۲-۱۱) فوراً نتیجه می‌شود که برای $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ ، $R_f[t_1, t_2] \leq c |t_1 - t_2|^{2-s}$.

با نمادگذاری مشابه گزاره ۱-۱۱ داریم $m < (1 + \delta^{-1})$ ، و از این رو

$$N_\delta \leq (1 + \delta^{-1})(2 + c\delta^{-1}\delta^{2-s}) \leq c_1\delta^{-s}$$

که در آن c_1 مستقل از δ می‌باشد. اکنون نتیجه از گزاره ۱-۴ به دست می‌آید.

(ب) مانند قبل، (۳-۱۱) ایجاب می‌کند که $R_f[t_1, t_2] \geq c |t_1 - t_2|^{2-s}$ از آنجا که

$m \leq \delta^{-1}$ ، از (۱-۱۱) به دست می‌آوریم

$$N_\delta \geq \delta^{-1}\delta^{-1}c\delta^{2-s} = c\delta^{-s}$$

تعریف معادل ۳-۱(ii) نتیجه می‌دهد که $s \leq \underline{\dim}_B \text{graph } f$. \square

متأسفانه یافتن کران‌های پایین برای بعد هاوسدورف نمودارها به طور کلی بسیار مشکل‌تر از یافتن بعد جعبه می‌باشد.

مثال ۱۱-۳. تابع واپرستراس

فرض کنید $\lambda > 1$ و $1 < s < 2$. تابع $f: [0,1] \rightarrow R$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$(۴-۱۱) \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$$

آنگاه، به شرط آنکه λ به اندازه کافی بزرگ باشد، $\dim_B \text{graph } f = s$.

محاسبه. به ازای مقدار داده شده $0 < h < 1$ ، فرض کنید N عدد صحیحی باشد که

$$(۵-۱۱) \quad \lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$$

آنگاه با استفاده از قضیه مقدار میانگین روی N جمله اول از مجموع، و تخمین روی باقیمانده داریم

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-2)k} |\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)| \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} |\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k t)| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-2)k} \lambda^k h + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2\lambda^{(s-2)k} \end{aligned}$$

با جمع این سری‌های هندسی با استفاده از ۵-۱۱ داریم

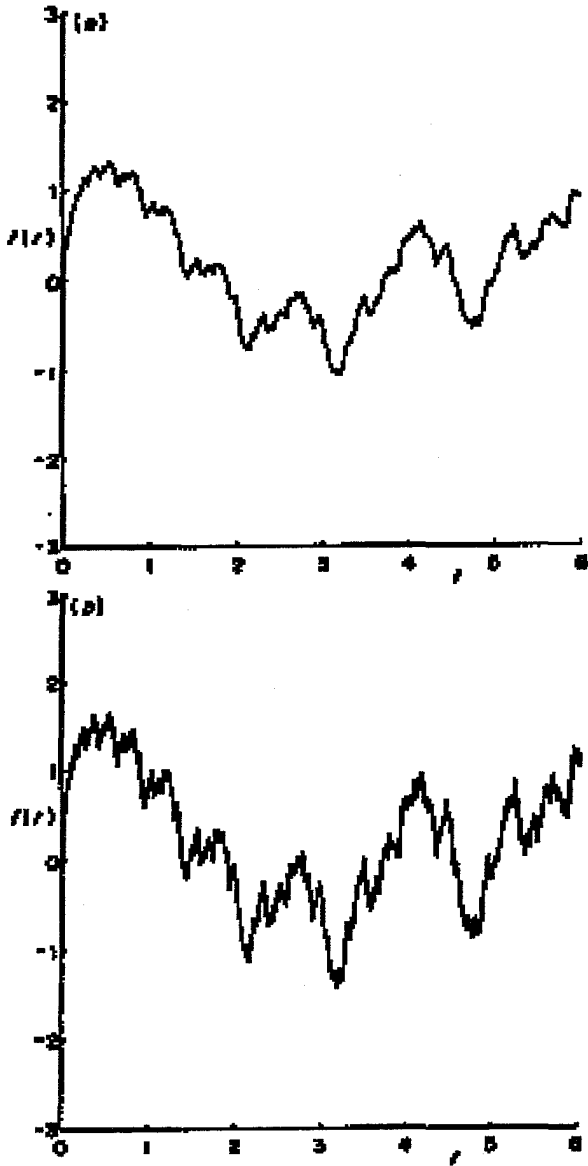
$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\leq \frac{h\lambda^{(s-1)N}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \\ &\leq ch^{2-s} \end{aligned}$$

که c مستقل از h می‌باشد. حال فرع ۱۱-۲ (آ) نتیجه می‌دهد که $\overline{\dim}_B \text{graph } f \leq s$.
به روشی مشابه، اما با تقسیم مجموع به سه بخش $N-1$ جمله اول، N امین جمله، و مابقی جملات، داریم

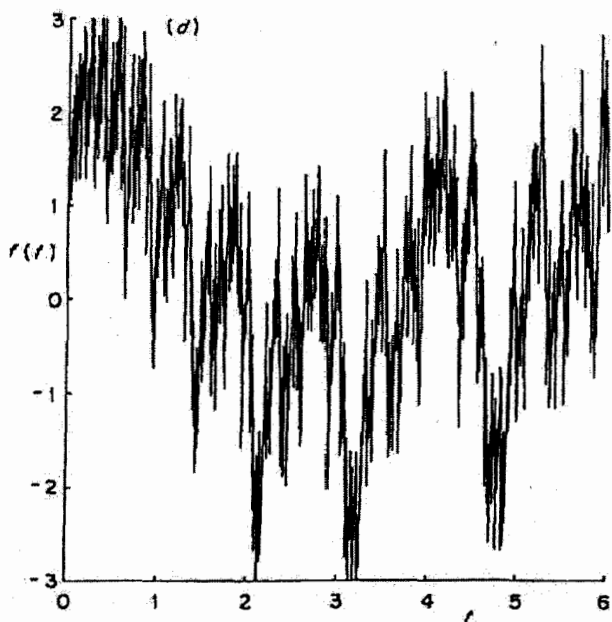
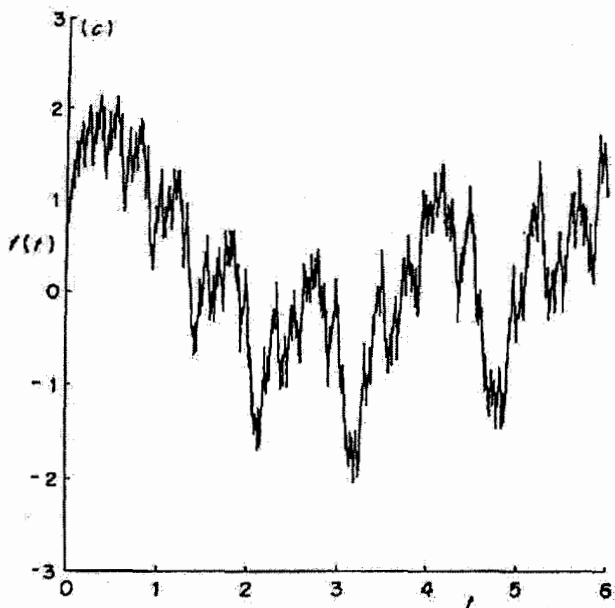
$$(۶-۱۱) \quad \begin{aligned} |f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)N}(\sin \lambda^N(t+h) - \sin \lambda^N t)| \\ \leq \frac{\lambda^{(s-2)N-s+1}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \end{aligned}$$

مشروط بر آنکه $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$.

فرض کنید $\lambda > 2$ آنقدر بزرگ باشد که سمت راست (۶-۱۱) به ازای هر N کمتر از $\frac{1}{20} \lambda^{(s-2)N}$ شود. برای $\delta < \lambda^{-1}$ ، N را طوری بگیرید که $\lambda^{-N} \leq \delta < \lambda^{-(N-1)}$. به ازای هر t ، می‌توانیم h را با شرط $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ طوری انتخاب کنیم که



شکل ۲-۱۱ تابع وایرشتراس $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$ با $\lambda = 1.5$ (a) $s = 1.1$ (b) $s = 1.3$ (c) $s = 1.5$ (d) $s = 1.7$



ادامه شکل ۲-۱۱

$$, |\sin \lambda^N(t+h) - \sin \lambda^N t| > \frac{1}{10}$$

پس با استفاده از (۶-۱۱)

$$|f(t+h) - f(t)| \geq \frac{1}{20} \lambda^{(s-2)N} \geq \frac{1}{20} \lambda^{s-2} \delta^{2-s}$$

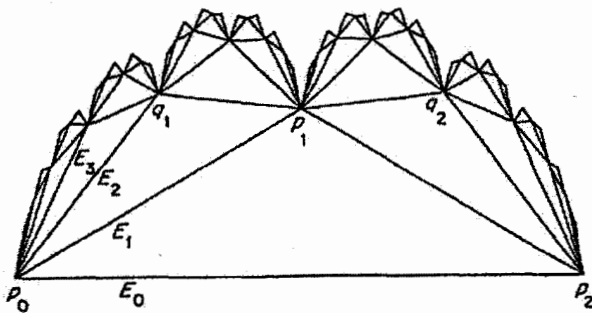
از نتیجه ۲-۱۱ (ب) نتیجه می‌شود که $\dim_B \text{graph } f \geq s$

حالت‌های مختلفی از تابع و ایرشتراس در شکل ۲-۱۱ نمایش داده شده است.

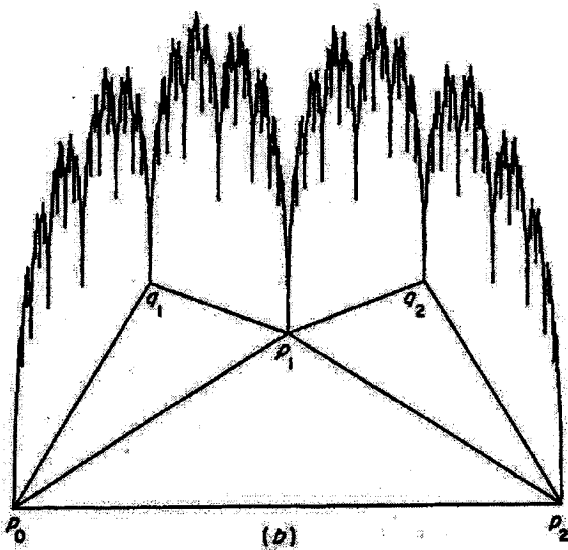
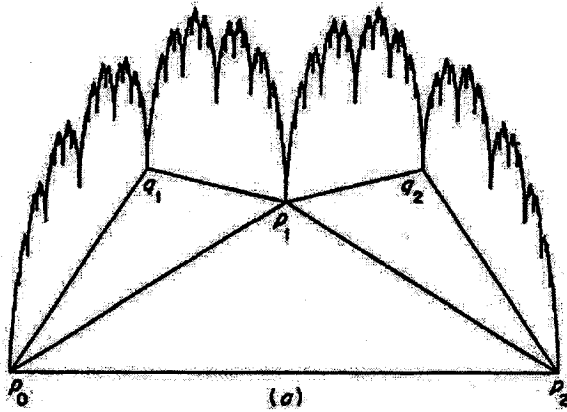
از تخمین بالا فوراً نتیجه می‌شود که بعد هاوسدورف نمودار تابع و ایرشتراس (۴-۱۱) حداکثر برابر s می‌باشد. اطمینان زیادی داریم که حداقل به ازای "اکثر" مقادیر λ این بعد برابر با s می‌باشد. این مطلب هنوز به طور دقیق اثبات نشده است — شاید پوشش‌هایی از مجموعه‌هایی با اندازه‌های بسیار متنوع که مقادیر کوچکتری می‌دهند برای نمودار تابع وجود داشته باشند. حتی نشان دادن اینکه $\dim_H \text{graph } f > 1$ نیز ساده و پیش پا افتاده نیست. کران‌های پایینی معلوم از روش‌های توزیع جرم مربوط به تخمین‌های $\{t : (t, f(t)) \in B\}$ به دست می‌آیند که B یک قرص و ℓ اندازه لیگ است. نوسانات سریع f در مقیاس کوچک تضمین می‌کند که نمودار به ندرت درون B قرار می‌گیرد، پس این اندازه کوچک است. در این صورت می‌توان نشان داد که یک ثابت c وجود دارد به طوری که

$$s \geq \dim_H \text{graph } f \geq s - c/\log \lambda$$

بنابراین هنگامی که λ بزرگ باشد بعد هاوسدورف نمی‌تواند خیلی کمتر از مقدار حدس زده شده باشد.



شکل ۳-۱۱ مراحل ساخت یک منحنی خود آفین F . تبدیلات آفین S_1 و S_2 مثلث $p_0 p_1 p_2$ را به ترتیب به مثلث‌های $p_0 q_1 p_1$ و $p_1 q_2 p_2$ و خطوط قائم را به خطوط قائم می‌نگارند. دنباله برآمده از منحنی‌های چندضلعی E_0, E_1, \dots از رابطه $E_{k+1} = S_1(E_k) \cup S_2(E_k)$ به دست می‌آید که تقریب صعودی خوبی برای F (که در شکل ۴-۱۱ (a) نشان داده شده است) به ما می‌دهد.



شکل ۴-۱۱ منحنی‌های خودآفین تعریف شده توسط دو تبدیل آفین که مثلث $P_0P_1P_2$ را به ترتیب به روی مثلث‌های $P_0q_1P_1$ و $P_1q_2P_2$ می‌نگارند. در شکل (a) انقباض عمودی هر دو تبدیل برابر ۰.۷ می‌باشد که نتیجه می‌دهد $\dim_B \text{graph } f = 1.49$ ، و در (b) انقباض عمودی هر دو تبدیل برابر ۰.۸ می‌باشد که نتیجه می‌دهد $\dim_B \text{graph } f = 1.68$.

تابع وایرشراس (۴-۱۱) یک نمونه از دسته وسیعی از توابع است که می‌شود این شیوه‌ها را برای آنها به کار برد. اگر g یک تابع متناوب مناسب باشد، یک روش مشابه می‌تواند نشان دهد که تابع

$$(۷-۱۱) \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} g(\lambda^k t)$$

دارای $\dim_B \text{graph } f = s$ می‌باشد. چنین توابعی در ابتدا ساختگی به نظر می‌رسند، اما وجود آنها به عنوان دافع در سیستم‌های دینامیکی اهمیت آنها را نشان می‌دهد (تمرین ۱۳-۷ را ببینید).

در بخش ۹-۴ دیدیم که مجموعه‌های خود آفین اغلب فرکتال هستند؛ آنها همچنین با انتخاب مناسبی از تبدیل‌های آفین، می‌توانند نمودار توابع باشند. فرض کنید S_i ها $(1 \leq i \leq m)$ تبدیل‌های آفین باشند که با در نظر گرفتن مختصات (t, x) با نماد ماتریسی به صورت زیر نمایش داده شده‌اند

$$(۸-۱۱) \quad S_i \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ a_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i-1/m \\ b_i \end{bmatrix}$$

بنابراین S_i خطوط عمودی را به خطوط عمودی تبدیل می‌کند، و نوار عمودی $0 \leq t \leq 1$ به نوار $i-1/m \leq t \leq i/m$ تبدیل می‌شود. فرض می‌کنیم که

$$(۹-۱۱) \quad 1/m < c_i \leq 1$$

در این صورت، انقباض در جهت t از انقباض در جهت x بیشتر است.

فرض کنید $p_1 = (0, b_1/(1-c_1))$ و $p_m = (1, (a_m + b_m)/(1-c_m))$ نقاط ثابت S_1 و S_m باشند. فرض کنیم درایه‌های ماتریس چنان انتخاب شده‌اند که

$$(۱۰-۱۱) \quad S_i(p_m) = S_{i+1}(p_1) \quad (1 \leq i \leq m-1)$$

در نتیجه پاره‌خط‌های $[S_i(p_1), S_i(p_m)]$ با اتصال به یکدیگر یک منحنی چند ضلعی E_1 تشکیل می‌دهند. برای اجتناب از حالت‌های بدیهی، فرض می‌کنیم که نقاط $S_1(p_1)$ ، \dots ، $S_m(p_1)$ و p_m همگی هم‌خط نیستند. مجموعه پایدار F از S_i (۹-۱۰ را ببینید) را می‌توان با جایگزینی مکرر پاره خط‌ها با تصویرهای آفینی از E_1 رسم کرد؛ شکل‌های ۱۱-۳ و ۱۱-۴ را ببینید. شرط (۱۰-۱۱) ایجاب می‌کند که این پاره‌خط‌ها به هم متصل می‌شوند و نتیجه این که F نمودار یک تابع پیوسته $f: [0,1] \rightarrow R$ خواهد بود.

مثال ۱۱-۴ منحنی‌های خود آفین

فرض کنید $F = \text{graph } f$ منحنی خود آفینی باشد که در بالا توضیح داده شد. آنگاه $\dim_B F = 1 + \log(c_1 + \dots + c_m) / \log m$.

محاسبه. فرض کنید T_i "بخش خطی" S_i باشد که با ماتریس زیر نمایش داده می‌شود

$$\begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ a_i & c_i \end{bmatrix}$$

فرض کنید I_{i_1, \dots, i_k} بازه‌ای از محور t باشد که شامل آن t هایی است که شروع بسط آنها در مبنای m به صورت $0, i'_1, \dots, i'_k$ است که در آن $i'_j = i_j - 1$. آنگاه آن بخش F که در بالای بازه I_{i_1, \dots, i_k} قرار گرفته تصویر آفین $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ است که انتقالی از $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(F)$ می‌باشد. از طریق استقرا به سادگی می‌توان دید که ماتریس نمایش $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}$ به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} m^{-k} & 0 \\ m^{1-k} a_{i_1} + m^{2-k} c_{i_1} a_{i_2} + \dots + c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_{k-1}} a_{i_k} & c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \end{bmatrix}$$

این یک تبدیل برشی است که خطوط عمودی را با ضریب $c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}$ منقبض می‌کند. توجه کنید که درایه سمت چپ پایین با کران زیر محدود است

$$\begin{aligned} & |m^{1-k} a + m^{2-k} c_{i_1} a + \dots + c_{i_1} \dots c_{i_{k-1}} a| \\ & \leq ((mc)^{1-k} + (mc)^{2-k} + \dots + 1) c_{i_1} \dots c_{i_{k-1}} a \\ & \leq r c_{i_1} \dots c_{i_{k-1}} \end{aligned}$$

که در آن $c = \min\{c_i\} > 1/m$ ، $a = \max |a_i|$ و $r = a/(1 - (mc)^{-1})$. بنابراین تصویر $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(F)$ در یک مستطیل به طول $(r+h)c_{i_1} \dots c_{i_k}$ قرار می‌گیرد که h ارتفاع F است. از طرف دیگر، اگر q_1, q_2, q_3 سه نقطه غیر هم‌خط باشند که از $S_1(p_1), \dots, S_m(p_m)$ انتخاب شده‌اند، آنگاه $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(F)$ شامل نقاط $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k}(q_j)$ است. ارتفاع یک مثلث با این سه راس حداقل برابر $c_{i_1} \dots c_{i_k} d$ است که در آن d فاصله عمودی q_2 تا پاره‌خط $[q_1, q_3]$ است. بنابراین برد تابع f روی بازه I_{i_1, \dots, i_k} در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$dc_{i_1} \dots c_{i_k} \leq R_f [I_{i_1, \dots, i_k}] \leq r_1 c_{i_1} \dots c_{i_k}$$

که در آن $r_1 = r + h$

به ازای k ی ثابت، عبارت بالا را روی m^k بازه I_{i_1, \dots, i_k} با طول m^{-k} جمع می‌کنیم و با استفاده از گزاره ۱۱-۱ به نامساوی‌های زیر می‌رسیم

$$m^k d \sum c_{i_1} \dots c_{i_k} \leq N_{m^{-k}}(F) \leq 2m^k + m^k r_1 \sum c_{i_1} \dots c_{i_k}$$

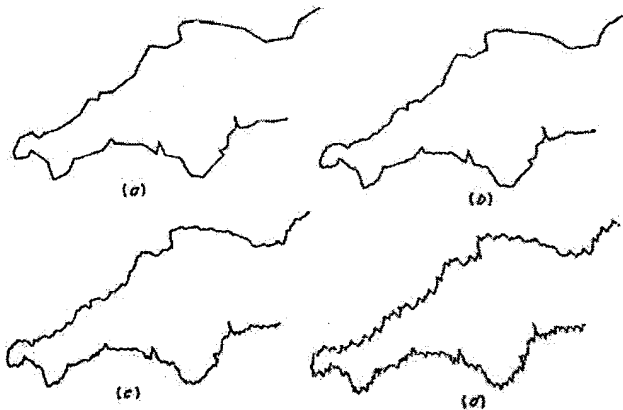
که در آن $N_{m^{-k}}$ تعداد مربع‌های شبکه‌ای با ضلع m^{-k} می‌باشد که F را قطع می‌کنند. به ازای هر j عدد c_{i_j} در میان مقادیر c_1, \dots, c_m تغییر می‌کند به گونه‌ای که

$$\sum c_{i_1} \dots c_{i_k} = (c_1 + \dots + c_m)^k$$

بنابراین

$$dm^k (c_1 + \dots + c_m)^k \leq N_{m^{-k}}(F) \leq 2m^k + r_1 m^k (c_1 + \dots + c_m)^k$$

با گرفتن لگاریتم و استفاده از تعریف بعد جعبه ۳-۱ (iii)، مقدار مورد نیاز به دست می‌آید. □
توابع خود آفین برای درونیایی در فرکتال‌ها مفید می‌باشند. فرض کنید که می‌خواهیم یک منحنی فرکتالی با بعد داده شده که از نقاط $(i/m, x_i)$ ، $i = 0, 1, \dots, m$ ، می‌گذرد را بیابیم. با انتخاب تبدیل (۱۱-۸) به گونه‌ای که به ازای هر i ، S_i پاره خط $[p_1, p_m]$ را به روی قطعه $\{(i/m, x_i), ((i-1)/m, x_{i-1})\}$ تصویر کند، روش ساختی که در بالا توضیح داده شد یک تابع خود آفین که نمودار آن از نقاط داده شده می‌گذرد، به ما می‌دهد. با تنظیم درایه‌های ماتریس می‌توانیم بعد مورد نیاز را برای منحنی مورد نظر تضمین کنیم؛ همچنین برای تغییر ظاهر منحنی به روش‌های دیگر مقداری آزادی عمل داریم. درونیایی فرکتالی به طور موثری در تصویر کردن مرز کوه‌ها با آسمان استفاده شده است.



شکل ۱۱-۵ درونیایی فرکتالی روی نیمه‌های شمالی و جنوبی نقشه‌ای از جنوب غرب انگلیس، با استفاده از رئوس چند ضلعی شکل (a) به عنوان نقاط داده، بعد منحنی‌های خود آفین (b)، (c) و (d) که در قالب این نقاط داده در آمده‌اند به ترتیب عبارتند از 1.1، 1.2 و 1.3

البته، توابع خود آفین را می‌توان تعمیم داد به گونه‌ای که S_t ها در جهت t نسبت انقباض ثابتی نداشته باشد. این به درون‌یابی فرکتالی نقاطی که فاصله‌های مساوی ندارند منجر می‌شود. با تلاش بیشتر می‌توان بعد جعبه چنین منحنی‌هایی را یافت. یک مثال از درون‌یابی فرکتالی در شکل ۱۱-۵ توضیح داده شده است.

* ۱۱-۲ خود همبستگی توابع فرکتالی

همانگونه که بیان شد، مقادیری که با زمان تغییر می‌کنند معمولاً به نمودارهای فرکتالی منجر می‌شوند. رفتار قانون توان همبستگی بین اندازه‌گیری‌هایی با فاصله زمانی h ، یک روش برای آشکار کردن طبیعت فرکتالی آنها می‌باشد. در این بخش تنها موارد مرتبط با این ایده را به طور خلاصه مطرح می‌کنیم و در مطالب زیاد دقیق نمی‌شویم. به ویژه فرض می‌کنیم که همه حدود استفاده شده موجودند.

برای راحتی فرض می‌کنیم که تابع $f: (-\infty, \infty) \rightarrow R$ پیوسته و کراندار باشد، همچنین میانگین رفتارهای f را در دوره‌های طولانی $[-T, T]$ در نظر می‌گیریم. (اگر f تنها بر بازه $[0, \infty)$ یا بر یک بازه متناهی تعریف شده باشد، با تعمیم f به R باز هم می‌توان این موارد را در نظر گرفت). نماد \bar{f} را برای مقدار میانگین f به کار می‌بریم؛ یعنی

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$$

یک اندازه همبستگی میان f در فواصل زمانی به طول h به وسیله تابع خودهمبستگی

$$(11-11) \quad C(h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (f(t+h) - \bar{f})(f(t) - \bar{f}) dt$$

$$(12-11) \quad = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t+h)f(t) dt - (\bar{f})^2. \quad C(h) = 0$$

به دست می‌آید. از (۱۱-۱۱) می‌بینیم که $C(h)$ مثبت است اگر $f(t+h) - \bar{f}$ و $f(t) - \bar{f}$ نهایتاً دارای علامت یکسانی باشند، و منفی است اگر علامتشان نهایتاً متفاوت باشند. اگر هیچ همبستگی وجود نداشته باشد، $C(h) = 0$. از آنجاییکه

$$\int (f(t+h) - f(t))^2 dt = \int f(t+h)^2 dt + \int f(t)^2 dt - 2 \int f(t+h)f(t) dt$$

داریم

$$\begin{aligned}
 C(h) &= (\bar{f})^2 - \overline{f^2} - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (f(t+h) - f(t))^2 dt \\
 (13-11) \quad &= C(0) - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (f(t+h) - f(t))^2 dt
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\overline{f^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)^2 dt$$

میانگین مربع f است و فرض می‌کنیم که مثبت و متناهی باشد. با $C(h)$ به صورت (۱۳-۱۱) می‌توانیم یک رابطه توجیه شدنی بین تابع خود همبستگی مربوط به f و بعد نمودار f استنباط کنیم. کلید این کار در نتیجه ۱۱-۲ آمده است. فرض کنید f تابعی باشد که در (۲-۱۱) و همچنین "به طور قابل قبولی" در (۳-۱۱) صدق کند. آنگاه ثابت‌های c_1 و c_2 وجود دارند به طوری که به ازای h کوچک

$$(14-11) \quad c_1 h^{4-2s} \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (f(t+h) - f(t))^2 dt \leq c_2 h^{4-2s}$$

به وضوح، این شرایط مستقیماً معادل با (۲-۱۱) و (۳-۱۱) نمی‌باشد، اما در بسیاری شرایط مناسب "زمان-همگن" شرایط واقعاً منطبق هستند. بنابراین اگر تابع خودهمبستگی مربوط به f

$$C(0) - C(h) \sim ch^{4-2s}$$

صدق کند، انتظار اینکه بعد جعبه نمودار f برابر با s باشد غیر منطقی نیست.

تابع خود همبستگی ارتباط نزدیکی با طیف توانی f دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(15-11) \quad S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T f(t) e^{it\omega} dt \right|^2$$

برای توابع با هر درجه از نظم بلند مدت، $S(\omega)$ تقریباً همیشه وجود دارد. طیف توانی قدرت بسامد در تجزیه همساز f را منعکس می‌سازد.

نشان می‌دهیم که طیف توانی تبدیل فوریه تابع خود همبستگی است. برای کار کردن با $f(t) - \bar{f}$ می‌توانیم فرض کنیم که f دارای میانگین صفر است. فرض کنید $f_T(t)$ برابر $f(t)$ باشد اگر $|t| \leq T$ و در غیر اینصورت برابر با صفر باشد، و تعریف کنید

$$\begin{aligned}
 C_T(h) &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t+h) f_T(t) dt \\
 &= \frac{1}{2T} f_T^- * f_T(-h)
 \end{aligned}$$

که در آن $f_T^-(t) = f_T(-t)$ و $*$ پیچش را نشان می‌دهد. با استفاده از قضیه پیچش برای تبدیل‌های فوریه (بخش ۴-۴ را ببینید) این معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}\hat{C}_T(\omega) &= \frac{1}{2T} \hat{f}_T^-(\omega) \hat{f}_T(\omega) \\ &= \frac{1}{2T} |\hat{f}_T(\omega)|^2\end{aligned}$$

که در آن $\hat{f}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) e^{i\omega t} dt$ و $\hat{C}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_T(t) e^{i\omega t} dt$ تبدیل‌های فوریه معمولی هستند. (توجه کنید که ما نمی‌توانیم با خود تبدیل f کار کنیم، چرا که انتگرال واگرا می‌شود.) با فرض $T \rightarrow \infty$ می‌بینیم که به ازای هر h $C_T(h) \rightarrow C(h)$ و به ازای هر ω ، $\hat{C}_T(\omega) \rightarrow S(\omega)$. می‌توان نشان داد که این ایجاب می‌کند که

$$\hat{C}(\omega) = S(\omega)$$

به وضوح S و C هر دو توابعی حقیقی و زوج هستند، در نتیجه تبدیل‌ها، تبدیل‌های کسینوس هستند. بنابراین

$$(16-11) \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} C(t) \cos(\omega t) dt$$

و، با استفاده از فرمول انعکاس برای تبدیلات فوریه،

$$(17-11) \quad C(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-ih\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega h) d\omega$$

در این تحلیل ما همگرا بودن انتگرال‌ها را با دقت زیاد بررسی نکردیم، اما در بیشتر مسائل عملی این موضوع را می‌توان توجیه کرد.

خود همبستگی‌ها ما را به روش‌های متعددی برای تخمین زدن بعد نمودار یک تابع یا "سیگنال" f مجهز می‌کند. می‌توانیم تابع خود همبستگی $C(h)$ یا به طور معادل، تغییر علامت میانگین مربع در زمان h طی یک دوره طولانی را حساب کنیم، بنابراین از (11-13) نتیجه می‌شود

$$(18-11) \quad 2[C(0) - C(h)] \sim \frac{1}{2T} \int_T^{T+h} (f(t+h) - f(t))^2 dt$$

اگر رفتار قاعده توان،

$$(19-11) \quad C(0) - C(h) \sim ch^{4-2s}$$

به ازای h های کوچک در نظر گرفته شود، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که بعد جعبه برابر با s باشد. به عبارت دیگر

$$(۲۰-۱۱) \quad \dim_B \text{graph } f = 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(C(0) - C(h))}{2 \log h}$$

اگر این حد موجود باشد. سپس باید به دنبال یک تابع باشیم که نمودار آن دارای این بعد باشد، همانند مثال‌های ۳-۱۱ و ۴-۱۱ یا توابع براونی کسری در بخش ۱۶-۲ برای فراهم کردن شبیه سازی‌هایی از سیگنال‌ها با ویژگی‌های مشابه.

به روش دیگر، می‌توانیم با طیف توانی $S(\omega)$ کار کنیم و از (۱۱-۱۷) برای یافتن تابع خودهمبستگی استفاده کنیم. لازم است که به ازای h ‌های کوچک اطلاعاتی درباره $C(0) - C(h)$ داشته باشیم؛ معمولاً این به رفتار تبدیل آن، $S(\omega)$ ، هنگامی که ω بزرگ است مربوط می‌شود. حالت جذاب‌تر هنگامی است که طیف توانی از یک قاعده توان $S(\omega) \sim c/\omega^\alpha$ به ازای ω ‌های بزرگ پیروی کند، که در این حالت به ازای h کوچک و یک ثابت b .

$$(۲۱-۱۱) \quad C(0) - C(h) \sim bh^{\alpha-1}$$

برای بررسی رسمی این مطلب، توجه کنید که بنابر (۱۱-۱۷)،

$$\pi(C(0) - C(h)) = \int_0^\infty S(\omega)(1 - \cos(\omega h))d\omega = 2 \int_0^\infty S(\omega) \sin^2(\frac{1}{2}\omega h)d\omega$$

و با گرفتن $S(\omega) = \omega^{-\alpha}$ و جانشینی $u = \omega h$ ، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}\pi(C(0) - C(h)) = \int_0^\infty \omega^{-\alpha} \sin^2(\frac{1}{2}\omega h) d\omega = h^{\alpha-1} \int_0^\infty u^{-\alpha} \sin^2 \frac{1}{2}u du$$

می‌توان نشان داد که اگر S یک تابع به اندازه کافی هموار باشد به طوریکه $S(\omega) \sim c\omega^{-\alpha}$ هنگامیکه $\omega \rightarrow \infty$ ، آنگاه (۲۱-۱۱) همچنان برقرار است. مقایسه (۱۱-۱۹) با (۲۱-۱۱) نتیجه می‌دهد که نمودار f دارای بعد جعبه s می‌باشد که $4 - 2s = \alpha - 1$ ، یا $s = \frac{1}{2}(5 - \alpha)$. بنابراین انتظار اینکه یک سیگنال با طیف توانی $1/\omega^\alpha$ دارای نموداری با بعد $\frac{1}{2}(5 - \alpha)$ باشد، غیر منطقی نیست.

در عمل، منحنی‌های با بعد $\frac{1}{2}(5 - \alpha)$ اغلب شبیه‌سازی‌های خوبی فراهم می‌کنند و ویژگی‌های مشابهی برای سیگنال‌هایی که طیف توانی برابر با $1/\omega^\alpha$ دارند بروز می‌دهند.

۱۱-۳ نکات و منابع

بعد نمودار فرکتال‌ها ابتدا توسط *Ursell* و *Besicovitch* (۱۹۳۷) مورد مطالعه قرار گرفت. جهت اطلاع از آخرین آثار در مورد منحنی‌های وایرستراس گونه، به کتاب *Berry* و *Lewis* (۱۹۸۰) (شامل بسیاری از ترسیمات کامپیوتری) و کتاب *Mauldin* و *Williams* b)

(۱۹۸۶) مراجعه کنید. منحنی‌های خودآفین در کتاب *Bedford* (۱۹۸۹) بررسی شده است. نظریه توابع خودهمبستگی در بسیاری از کتاب‌های آنالیز سری‌های زمانی، مثلاً در کتاب *Papoulis* (۱۹۶۲) آمده است.

تمرین‌ها

۱-۱۱ تحقیق کنید که اگر $f: [0,1] \rightarrow R$ دارای مشتق پیوسته باشد، آنگاه نمودار f یک ۱- مجموعه منظم است.

۲-۱۱ فرض کنید $f, g: [0,1] \rightarrow R$ توابع پیوسته‌ای باشند و تابع مجموع $f + g$ را به صورت معمول $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ تعریف کنید. فرض کنید f یک تابع لیپشیتس باشد. با ساختن یک نگاشت لیپشیتس بین نمودار $(f + g)$ و نمودار g نشان دهید که $\dim_H \text{graph}(f + g) = \dim_H \text{graph } g$ ، و نتیجه مشابهی برای ابعاد جعبه برقرار است.

۳-۱۱ فرض کنید $f, g: [0,1] \rightarrow R$ توابع پیوسته‌ای باشند به طوری که بعد جعبه نمودار آنها وجود داشته باشد. با استفاده از گزاره ۱-۱۱ نشان دهید که $\dim_B \text{graph}(f + g)$ برابر مقدار بزرگتر $\dim_B \text{graph } f$ و $\dim_B \text{graph } g$ می‌باشد مشروط بر اینکه این دو بعد مساوی نباشند. مثالی بیاورید که نشان دهد این شرط، لازم می‌باشد.

۴-۱۱ نشان دهید هر تابعی که در شرایط نتیجه ۲-۱۱(b) صدق کند، باید در هیچ نقطه‌ای دیفرانسیل پذیر نباشد. نتیجه بگیرید که تابع وایرستراس مثال ۳-۱۱ و منحنی‌های خودآفین مثال ۴-۱۱، در هیچ جا دیفرانسیل پذیر نیستند.

۵-۱۱ به ازای $\lambda > 1$ و $1 < s < 2$ فرض کنید $f: [0,1] \rightarrow R$ یک تابع وایرستراس باشد و این تابع به گونه‌ای تعدیل شده باشد که شامل "فازهای" θ_k باشد:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t + \theta_k).$$

نشان دهید که $\dim_B \text{graph } f = s$ ، مشروط بر اینکه λ به اندازه کافی بزرگ باشد.

۶-۱۱ فرض کنید $g: R \rightarrow R$ تابع "زیگ زاگ" با دوره ۴ باشد که به صورت زیر داده می‌شود:

$$g(4k+t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < 1) \\ 2-t & (1 \leq t < 3) \\ t-4 & (3 \leq t < 4) \end{cases}$$

که در آن k یک عدد صحیح است و $0 \leq t < 4$ فرض کنید $1 < s < 2$ و $\lambda > 1$ و همچنین فرض کنید $f: R \rightarrow R$ به صورت زیر داده شده باشد

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} g(\lambda^k t).$$

نشان دهید که $\dim_B \text{graph } f = s$ ، مشروط بر اینکه λ به اندازه کافی بزرگ باشد.

۷-۱۱ فرض کنید که تابع $f: [0,1] \rightarrow R$ در شرط هولدر (۲-۱۱) صدق کند. و F زیرمجموعه‌ای از $[0,1]$ باشد. تخمینی برای $\dim_H f(F)$ بر حسب $\dim_H F$ به دست آورید.

۸-۱۱ فرض کنید $f: [0,1] \rightarrow R$ یک تابع باشد. همچنین فرض کنید

$$\int_0^1 \int_0^1 [|f(t) - f(u)|^2 + |t - u|^2]^{-s/2} dt du < \infty$$

به ازای یک s که $1 < s < 2$. با استفاده از قضیه ۴-۱۳ نشان دهید که $\dim_H \text{graph } f \geq s$.

۹-۱۱ فرض کنید D مربع واحد $[0,1] \times [0,1]$ باشد و $f: D \rightarrow R$ یک تابع پیوسته باشد به گونه‌ای که

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^{3-s} \quad (x, y \in D).$$

نشان دهید که رویه $\{(x, f(x)): x \in D\}$ دارای بعد جعبه حداکثر s می‌باشد. به طور مشابه رویه‌ای مشابه با بخش (ب) از نتیجه ۲-۱۱ بیابید.

۱۰-۱۱ نمودارهای توابع وایرستراس - گونه (۷-۱۱) را با استفاده از کامپیوتر بررسی کنید. اثرات تغییر s و λ و همچنین توابع مختلف g را امتحان کنید.

۱۱-۱۱ برنامه‌های کامپیوتری بنویسید که متحنی‌های خودآفین داده شده به وسیله (۸-۱۱) را رسم کند. اثر تغییرات مقدار c_i را بررسی کنید.

فصل ۱۲ مثال‌هایی از ریاضیات محض

ساخت فرکتال‌ها، برای بسیاری از مسائل که شیوه‌های ساخت منظم در مقابل آنها ناکام مانده‌اند، مثال‌های نقض و گاهی راه‌حلهایی را فراهم می‌کنند. در این بخش به مثال‌هایی در زمینه‌های متفاوت ریاضیات محض توجه می‌کنیم.

۱۲-۱ دوگانگی^۱ و مسأله کاکیا^۲

روش دوگانی مجموعه نقاط در صفحه را به مجموعه خطوط تبدیل می‌کند و ممکن است فرکتال‌ها را به فرکتال‌های جدیدی تبدیل کند. این تکنیک‌ها را می‌توان برای ساخت مجموعه‌هایی با ویژگی‌های خاص به کار برد؛ برای مثال برای ساخت یک مجموعه مسطح با مساحت صفر شامل یک خط که به هر جهتی می‌رود می‌توان از این تکنیک‌ها استفاده کرد.

به ازای هر نقطه (a, b) از R^2 ، فرض می‌کنیم $L(a, b)$ نشان دهنده مجموعه نقاط خط $y = a + bx$ باشد، شکل ۱۲-۱ را ببینید. اگر F زیرمجموعه‌ای از R^2 باشد مجموعه خط $L(F)$ را اجتماع خطوط متناظر با نقاط F تعریف می‌کنیم؛ یعنی $L(F) = \bigcup \{L(a, b) : (a, b) \in F\}$. با به کار بردن نماد L_c برای خط عمودی $x=c$ داریم

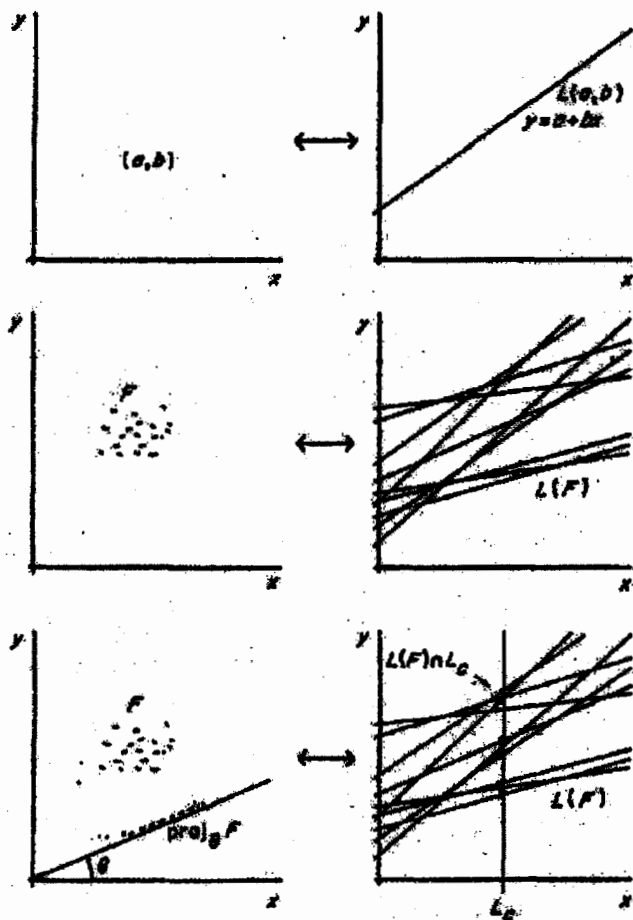
$$L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, (a, b) \cdot (1, c))$$

که در آن "·" ضرب اسکالر معمولی در R^2 می‌باشد؛ بنابراین به ازای یک زیرمجموعه F از R^2 ،

$$L(F) \cap L_c = \{(c, (a, b) \cdot (1, c)) : (a, b) \in F\}.$$

^۱ duality

^۲ Kakeya



شکل ۱-۱۲ قاعده دوگانی: نقطه (a, b) متناظر با خط $y = a + bx$ است؛ (b) مجموعه F متناظر با مجموعه خطوط $L(F)$ می‌باشد؛ (c) تصویر $proj_{\theta} F$ از لحاظ هندسی مشابه با $L(F) \cap L_c$ می‌باشد که در آن $c = \tan \theta$

ضرب اسکالر در بردار $(1, c)$ را از لحاظ هندسی می‌توان به عنوان تصویر روی خطی در امتداد $(1, c)$ و اتساع با عامل $(1 + c^2)^{1/2}$ تفسیر کرد. بنابراین مجموعه $L(F) \cap L_c$ به طور هندسی با $proj_{\theta} F$ مشابه است، که در آن $proj_{\theta}$ ، تصویر عمودی روی خط مار بر مبدأ تحت زاویه θ که $c = \tan \theta$ می‌باشد. به ویژه

$$(1-12) \quad \dim_H(L(F) \cap L_c) = \dim_H(proj_{\theta} F)$$

$$(۲-۱۲) \quad \ell(L(F) \cap L_c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell(\text{proj}_\theta F) = 0$$

که در آن ℓ طول را نشان می‌دهد. به این ترتیب، دوگانی، تصویرهای F را (که برای آنها نظریه فصل ۶ را داریم) با اشتراک مجموعه خطوط $L(F)$ و خطوط عمودی، مربوط می‌کند.

تصویر کردن به روی محور l ها هم دارای تفسیری می‌باشد. شیب خط $L(a, b)$ دقیقاً برابر $b = \text{proj}_{\pi/2}(a, b)$ می‌باشد، بنابراین، به ازای هر F ، مجموعه شیب‌های خطوط در مجموعه خطوط $L(F)$ به وسیله $\text{proj}_{\pi/2} F$ داده می‌شود.

اگر F یک فرکتال باشد مجموعه خطوط آن، $L(F)$ ، اغلب دارای ساختار فرکتالی می‌باشد، و معمولاً بسیار رشته رشته است. (در حقیقت، اگر F یک مجموعه بورل باشد لازم نیست که $L(F)$ یک مجموعه بورل باشد، هر چند که اگر F فشرده باشد، $L(F)$ بورل خواهد بود. ما از مشکلات مختصر تکنیکی که پیش می‌آید چشم پوشی می‌کنیم.) رابطه بعدی زیر را داریم.

گزاره ۱۲-۱

فرض کنید $L(F)$ مجموعه خطوط یک مجموعه بورل $F \subset R^2$ باشد. آنگاه

$$(۱) \quad \dim_H L(F) \geq \min\{2, 1 + \dim_H F\} \quad \text{و}$$

(ب) اگر F یک ۱-مجموعه باشد، آنگاه $\text{area}(L(F)) = 0$ اگر و فقط اگر F نامنظم باشد.

برهان.

(آ) بنابر قضیه تصویر ۶-۱ به ازای تقریباً هر $\theta \in [0, \pi)$

$$\dim_H(\text{proj}_\theta F) = \min\{1, \dim_H F\}$$

پس بنابر (۱-۱۲) به ازای تقریباً هر $-\infty < c < \infty$

$$\dim_H(L(F) \cap L_c) = \min\{1, \dim_H F\}. \quad \text{حال قسمت (آ) از نتیجه ۱۰-۷ نتیجه می‌شود.}$$

(ب) فرض کنید F یک ۱-مجموعه باشد. نتیجه ۶-۵ می‌گوید که اگر F نامنظم باشد، آنگاه به

ازای تقریباً هر θ ، $\ell(\text{proj}_\theta F) = 0$ ، در غیر این صورت به ازای تقریباً هر θ ،

$$\ell(\text{proj}_\theta F) > 0. \quad \text{با استفاده از (۲-۱۲) به عبارت دوگانی می‌رسیم که اگر } F \text{ نامنظم باشد}$$

آنگاه به ازای تقریباً هر c ، $\ell(L(F) \cap L_c) = 0$ ، در غیر این صورت به ازای تقریباً هر c ،

$$\ell(L(F) \cap L_c) > 0. \quad \text{از آنجا که } \text{area}(L(F)) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(L(F) \cap L_c) dc, \quad \text{(ب) نتیجه}$$

می‌شود. \square

در ۱۹۱۷ کاکیا مسأله‌ای را مطرح کرد که آن، یافتن مجموعه‌ای مسطح با کمترین مساحت

است به طوریکه یک پاره خط واحد در آن بتواند معکوس شود یعنی پاره خط بتواند در آن به

طور پیوسته و بدون خارج شدن از مجموعه گرداننده شود تا به مکان اولش برسد در حالیکه ۱۸۰ درجه چرخیده باشد. اساساً، این مساله به یافتن کوچک‌ترین ناحیه که در هر جهت شامل یک پاره خط واحد باشد، کاهش می‌یابد؛ مسلماً هر مجموعه‌ای که یک پاره خط بتواند در آن دور بزند باید دارای این ویژگی باشد. بسیکوویچ روش ساخت عجیبی برای یک مجموعه پیدا کرد به طوری که مساحت درون آن به دلخواه کوچک باشد و یک مولفه واحد بتواند در آن معکوس شود. تنها چند سال بعد، او واقعاً پی برد که روش دوگانی جوابی کوتاه و عالی برای مسأله می‌دهد.

گزاره ۱۲-۲

یک مجموعه مسطح با مساحت صفر وجود دارد به طوریکه در هر جهت شامل خطی می‌باشد. هر مجموعه بورل با این خاصیت باید دارای بعد ۲ باشد.

برهان. فرض کنید F -۱ مجموعه نامنظمی باشد به طوریکه تصویر F به روی محور y ها، $proj_{\pi/2} F$ ، شامل بازه $[0,1]$ باشد. (مجموعه‌ای که در مثال‌های ۲-۶ و ۶-۷ بررسی شد مشخصاً دارای این شرط می‌باشد.) از آنجاییکه F نامنظم است، بنابر گزاره ۱۲-۱(ب)، $L(F)$ مساحت صفر دارد. با وجود این، از آنجاییکه $proj_{\pi/2} F \subset [0,1]$ ، مجموعه $L(F)$ شامل خطوطی است که محور x ها را با هر زاویه‌ای بین 0 و $\pi/4$ قطع می‌کنند. با گرفتن $L(F)$ همراه با کپی‌هایی که تحت زوایای $\pi/4$ ، $\pi/2$ و $3\pi/4$ دوران داده شده‌اند، مجموعه‌ای با مساحت صفر که در هر جهتی شامل یک خط می‌باشد به دست می‌آید.

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید E در هر جهتی شامل یک خط باشد. اگر

$$F = \{(a,b) : L(a,b) \subset E\}$$

آنگاه $proj_{\pi/2} F$ تمام محور y ها می‌باشد. تصویر کردن، بعد را افزایش نمی‌دهد ($۶-۱$) را ببینید)، بنابراین $\dim_H F \geq 1$. با استفاده از گزاره ۱۲-۱(آ)، $\dim_H L(F) = 2$ ؛ از آنجاییکه $L(F) \subset E$ نتیجه می‌شود که $\dim_H E = 2$. \square

این نوع مجموعه‌ها مثال‌های مهمی در آنالیز تابعی را ارائه می‌دهند. به ازای یک تابع داده شده $R \rightarrow R^2$ ، g ، انتگرال g در طول خطی که با محور x ها زاویه θ می‌سازد و تا مبدأ دارای فاصله قائم t است را با $G(\theta, t)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید F مجموعه‌ای با مساحت صفر باشد که در هر جهتی شامل یک خط می‌باشد، و فرض کنید $g(x, y) = 1$ هر گاه (x, y) نقطه‌ای از F باشد و در غیر این صورت $g(x, y) = 0$. واضح است که $G(\theta, t)$ در t به ازای هر مقدار ثابت θ پیوسته نیست. این مثال هنگامی بااهمیت می‌شود که با حالت‌های

۳- بعدی مقایسه می‌گردد. اگر $g: D \rightarrow R$ یک تابع کراندار روی یک دامنه کراندار D از R^3 باشد، و $G(\theta, t)$ انتگرال f روی صفحه‌ای با فاصله قائم t از مبدأ و عمود بر بردار واحد θ باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که $G(\theta, t)$ به ازای تقریباً هر بردار واحد θ ، باید در t پیوسته باشد.

روش ساخت کاکیا را می‌توان به عنوان بسته بندی کردن خطوط در هر جهت، در یک مجموعه با مساحت صفر در نظر گرفت. مسائل مشابهی را می‌توان برای بسته بندی‌هایی از خانواده‌های دیگر از منحنی‌ها در نظر گرفت. برای مثال، مجموعه‌هایی با مساحت صفر وجود دارند که محیط دایره‌ها با هر شعاعی را شامل می‌شوند. با این وجود، اخیراً اثبات شده است که اگر مجموعه‌ای شامل محیط دایره‌ای باشد که مرکز آن دایره در هر نقطه‌ای از صفحه قرار دارد آنگاه آن مجموعه لزوماً دارای مساحت مثبت است.

۱۲-۲ حدس ویتوشکین^۱

یک حدس دیرینه ویتوشکین در نظریه پتانسیل مختلط، اخیراً با استفاده از یک ساختار فرکتالی نقض شد.

فرض کنید F یک زیرمجموعه فشرده از صفحه مختلط باشد. می‌گوییم F یک مجموعه برداشتنی است هر گاه، به ازای هر دامنه باز کراندار داده شده V شامل F و هر تابع کراندار تحلیلی f روی متمم $V \setminus F$ ، f دارای یک توسیع تحلیلی به کل V باشد. بنابراین توابعی که روی V تحلیلی و کراندار هستند لزوماً با توابعی که روی $V \setminus F$ تحلیلی و کراندار هستند یکسان می‌باشند؛ برداشتن F تفاوتی ایجاد نمی‌کند.

مسئله بدست آوردن ویژگی‌های هندسی مجموعه‌های برداشتنی به سال‌ها قبل بر می‌گردد. برداشتنی بودن یا نبودن F به صورت زیر اثبات گردیده است:

برداشتنی: نا برداشتنی:

$$\dim_H F < 1 \qquad \dim_H F > 1$$

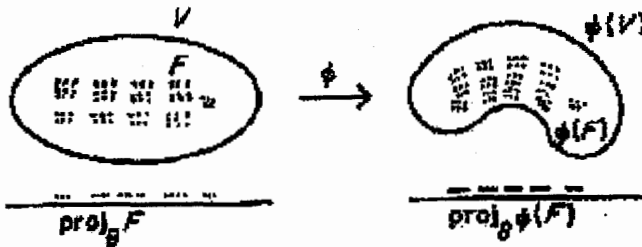
$0 < H^1(F) < \infty$ و F نامنظم باشد. $0 < H^1(F) < \infty$ و F منظم باشد.

این جدول باید قضیه تصویر از فصل ۶ را به یاد خواننده بیاورد. بنابر قضیه ۶-۱ و نتیجه ۶-۵، اگر $\dim_H F < 1$ یا اگر F یک ۱- مجموعه نامنظم باشد آنگاه تصویر $proj_\theta F$ به ازای تقریباً هر θ دارای طول صفر خواهد بود. از طرف دیگر، اگر $\dim_H F > 1$ یا اگر F یک ۱-

^۱ Vitushkin

مجموعه منظم باشد آنگاه $proj_{\theta} F$ به ازای تقریباً هر θ طول مثبت دارد. مطابقت آشکار میان برداشتنی بودن مجموعه و اینکه تقریباً هر تصویری از آن مجموعه دارای طول صفر باشد همراه با تعداد قابل توجهی شواهد دیگر در حالت‌های ظریف که در آنها $\dim_{\mathbb{H}} F = 1$ و $H^1(F) = \infty$ ، به حدس ویتوشکین منتهی شدند: F برداشتنی است اگر و فقط اگر به ازای تقریباً هر $\theta \in [0, \pi)$ ، $proj_{\theta} F = 0$.

یک ساختار فرکتالی نشان می‌دهد که حدس ویتوشکین نمی‌تواند درست باشد. فرض کنید V یک دامنه باز در \mathbb{C} باشد و فرض کنید $\phi: V \rightarrow \phi(V)$ یک نگاشت هم‌مدیس غیرخطی روی V باشد، یعنی خطوط مستقیم نوعاً به روی منحنی‌هایی (غیر مستقیم) نگاشته می‌شوند؛ مثلاً V برابر قرص واحد و $\phi(z) = (z+2)^2$ انتخاب‌های مناسبی خواهند بود. می‌توان یک زیرمجموعه فشرده F از V ساخت به طوری که $proj_{\theta} F$ به ازای تقریباً هر θ دارای طول صفر باشد اما $proj_{\theta} \phi(F)$ به ازای تقریباً هر θ دارای طول مثبت باشد. با استفاده از نوعی از ساختار "روش تکراری وینزی نابینا" که در اثبات قضیه ۶-۹ مطرح شد، می‌توان این کار را انجام داد — می‌توان نشان داد که "پره‌ها" را می‌توان تغییر داد به گونه‌ای که کاملاً از حالت خطوط راست در V خارج شوند، اما به حالتی میل کنند که تصاویر معکوس از خطوط راست در $\phi(V)$ تحت ϕ را قطع کنند (شکل ۱۲-۲ را ببینید). این کار نتیجه می‌دهد که ویژگی " $proj_{\theta} F$ به ازای تقریباً هر θ دارای طول صفر است"، تحت تبدیل‌های هم‌مدیس^۱ ناوردا نیست، چرا که این ویژگی برای F می‌تواند درست باشد اما برای $\phi(F)$ اینطور نیست. به هر حال، برداشتنی بودن به طور هم‌مدیس ناوردا است، چرا که تابع $f(z)$ روی $\phi(V)$ تحلیلی است (به ترتیب روی $\phi(V \setminus F)$) اگر و فقط اگر $f(\phi(z))$ روی V (به ترتیب روی $V \setminus F$) تحلیلی باشد.



شکل ۱۲-۲ ϕ یک تابع تحلیلی است به طوری که $proj_{\theta} F$ به ازای تقریباً هر θ دارای طول صفر است اما $proj_{\theta} \phi(F)$ به ازای تقریباً هر θ دارای طول مثبت است.

^۱ conformal

بنابراین، این ویژگی که تقریباً تمام تصویرهای یک مجموعه دارای طول صفر باشند، نمی‌تواند با برداشتنی بودن مجموعه معادل باشد.

یکی از معماهای این بحث این است که آیا مجموعه‌هایی که تقریباً تمام تصاویر آنها طول صفر دارند برداشتنی هستند یا نه. چیزی که می‌توانیم بگوییم این است که هر دو نمی‌توانند درست باشند.

اخیراً، یک مجموعه نابرداشتنی که تقریباً همه تصاویر آن طول صفر دارند با استفاده از یک ساختار تکراری به دست آمده است. عکس مطلب هنوز حل نشده است.

۱۲-۳ رویه‌های محدب

یک تابع پیوسته $f: R^2 \rightarrow R$ محدب است اگر به ازای هر $x, y \in R^2$ و $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

از لحاظ هندسی، اگر نمودار f ، $S = \{(x, f(x)) : x \in R^2\}$ ، رویه‌ای در R^3 باشد، آنگاه f محدب است اگر پاره خط واصل هر دو نقطه در S زیر یا درون S قرار گیرد.

لزومی ندارد که یک تابع محدب f هموار باشد — ممکن است نقاطی وجود داشته باشد که f در آنها مشتق‌پذیر نیست. برای توصیف اندازه مجموعه چنین نقاط "تکین" می‌توان از بعد استفاده کرد. اگر f در نقطه x مشتق‌پذیر نباشد، آنگاه رویه S شامل بیش از یک صفحه مماس در نقطه $(x, f(x))$ خواهد بود. توجه کنید که اگر p_1 و p_2 صفحات مماس متفاوتی در نقطه $(x, f(x))$ باشند، آنگاه پیوستاری از صفحات مماس بر این نقطه وجود دارد، یعنی آن صفحات "بین p_1 و p_2 " که شامل خط $p_1 \cap p_2$ می‌باشند.

قضیه ۱۲-۳

فرض کنید $f: R^2 \rightarrow R$ یک تابع محدب باشد. آنگاه مجموعه نقاطی که f در آنها مشتق‌پذیر نیست در اجتماع شمارایی از منحنی‌های طول‌پذیر قرار می‌گیرد، بنابراین، به خصوص، مجموعه این نقاط حداکثر دارای بعد هائوسدورف ۱ می‌باشد.

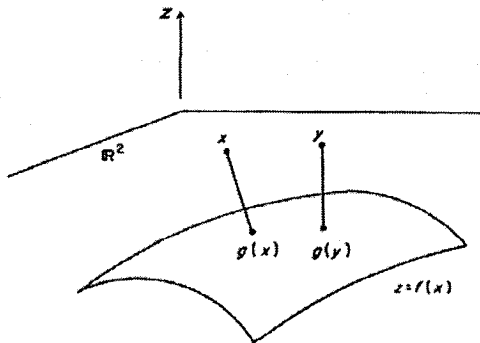
برهان. بدون کاستن از کلیت مسأله، می‌توانیم فرض کنیم که ماکزیمم مقدار f اکیداً منفی است. فرض کنید S رویه‌ای باشد که توسط نمودار f داده می‌شود و همچنین $g: R^2 \rightarrow R$ نگاشت "نزدیک‌ترین نقطه" باشد، یعنی اگر $x \in R^2$ ، آنگاه $g(x)$ آن نقطه‌ای از S است که

به ازای آن فاصله $|g(x) - x|$ حداقل باشد. تحدب f تضمین می‌کند که این نقطه یکتاست. اگر $x, y \in R^2$ آنگاه زوایای چهاروجهی (احتمالاً نامتقارن) $x, g(x), g(y), y$ در رئوس $g(x)$ و $g(y)$ هر دو باید حداقل برابر $\pi/2$ باشند؛ در غیر این صورت پاره‌خط $[g(x), g(y)]$ شامل نقطه‌ای تحت و یا روی S خواهد بود که به x یا y نزدیک‌تر می‌باشد. این نتیجه می‌دهد که g فاصله‌ها را کمتر می‌کند، یعنی

$$(3-12) \quad |g(x) - g(y)| \leq |x - y| \quad (x, y \in R^2).$$

اگر f در x مشتق‌پذیر نباشد آنگاه S بیش از یک صفحه مماس در $(x, f(x))$ خواهد داشت. بنابراین $(x, f(x))^{-1}g$ ، اشتراک R^2 با خطوط قائم صفحه‌های مماس بر S در $(x, f(x))$ می‌باشد، و بنابراین شامل یک پاره‌خط مستقیم می‌باشد. فرض کنید $\{L_1, L_2, \dots\}$ گردایه (شمارا) از پاره‌خط‌های موجود در R^2 باشد که نقاط انتهایی آنها دارای مختصات گویا هستند. اگر f در نقطه x مشتق‌پذیر نباشد آنگاه $(x, f(x))^{-1}g$ شامل پاره‌خطی است که باید حداقل یکی از L_i ها را قطع کند. بنابراین اگر $\{f \text{ در } x \text{ مشتق‌پذیر نیست} : (x, f(x))\} = F$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} g(L_i) \supset F$. با استفاده از (3-12) این نتیجه می‌دهد که $g(L_i)$ یا یک نقطه است یا یک منحنی طول‌پذیر با خاصیت $H^1(g(L_i)) \leq \text{length}(L_i) < \infty$ ؛ (2-9) را ببینید. پس $\bigcup_{i=1}^{\infty} g(L_i)$ یک اجتماع شمارا از منحنی‌های طول‌پذیر شامل F خواهد بود، که خصوصاً دارای بعد حداکثر ۱ می‌باشد.

از آنجاییکه به ازای $x, y \in R^2$ ، $|x - y| \leq |(x, f(x)) - (y, f(y))|$ ، مجموعه نقاط x که f در آنها مشتق‌پذیر نیست نیز دارای بعد حداکثر ۱ می‌باشد و مشمول در یک گردایه شمارا از منحنی‌های طول‌پذیر می‌باشد؛ (2-9) را بار دیگر ببینید. \square



شکل ۳-۱۲ "نگاشت نزدیک‌ترین نقطه" g از R^2 به یک رویه محدب $z = f(x)$ کاهش دهنده فاصله است.

بعد هاوسدورف در جنبه‌های بسیار دیگری برای سنجیدن میزان بی‌نظمی رویه‌ها به کار برده می‌شود. برای مثال، یک رویه محدب می‌تواند شامل پاره‌خط‌هایی باشد، در عین حال می‌توان نشان داد که مجموعه جهت‌های چنین پاره‌خط‌هایی دارای بعد حداکثر ۱ است.

۴-۱۲ گروه‌ها و حلقه‌های با بعد کسری

یک زیرمجموعه F از R یک زیرگروه از اعداد حقیقی تحت عمل جمع می‌باشد اگر

$$0 \in F \quad (i)$$

(ii) هر گاه $x \in F$ و $y \in F$ آنگاه $x + y \in F$ و

(iii) هر گاه $x \in F$ هر گاه $-x \in F$.

مجموعه F یک زیرحلقه از R تحت عملگرهای جمع و ضرب می‌باشد اگر همچنین

$$xy \in F \quad \text{هر گاه } x \in F \text{ و } y \in F \quad (iv)$$

مثال‌های ساده بسیاری از چنین ساختاری وجود دارد: مجموعه اعداد صحیح، اعداد گویا و مجموعه اعداد $\{r + s\sqrt{2} : r, s \in \mathbb{Z}\}$ همگی زیرحلقه (و بنابراین زیرگروه) از R هستند. این مثال‌ها مجموعه‌هایی شمارا هستند و بنابراین دارای بعد هاوسدورف صفر هستند. آیا زیرگروه‌ها و زیرحلقه‌هایی از R با بعد هاوسدورف s با شرط $0 < s < 1$ وجود دارند؟ نسبتاً به سادگی می‌توان مثال پیشین $4-7$ را برای به دست آوردن یک زیرگروه با هر بعد داده شده، تغییر داد.

مثال ۴-۱۲

$0 < s < 1$ را ثابت بگیرید. فرض کنید n_1, n_2, \dots یک دنباله سریعاً صعودی از اعداد صحیح باشد. یعنی با ویژگی $n_{k+1} \geq \max\{n_k^k, 3n_k^{1/s}\}$. به ازای $r = 1, 2, \dots$ فرض کنید

$$F_r = \{x \in R : |x - p/n_k| \leq rn_k^{-1/s}, \text{ و به ازای هر } k, p, \text{ و به ازای هر } k\}$$

و قرار دهید $F = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_r$. آنگاه $\dim_H F = s$ و F تحت عمل جمع زیرگروهی از R می‌باشد.

محاسبه. F همان مجموعه مثال $4-7$ می‌باشد، بنابراین به ازای هر r ، $\dim_H F_r = s$ (به سادگی می‌توان نشان داد که مقدار r روی بعد تاثیر نمی‌گذارد). با گرفتن اجتماع شمارا داریم

$$\dim_H F = s$$

به وضوح $0 \in F_1 \subset F$. با توجه به اینکه $F_{r'} \subset F_r$ برای $r \geq r'$ ، پس اگر $x, y \in F$ آنگاه به ازای یک r ، $x, y \in F_r$. بنابراین، به ازای هر k ، اعداد صحیح p و q وجود دارند به طوری که

$$|x - p/n_k| \leq rn_k^{-1/s} \quad \text{و} \quad |y - q/n_k| \leq rn_k^{-1/s}.$$

با جمع دو رابطه فوق داریم

$$|x + y - (p + q)/n_k| \leq 2rn_k^{-1/s}$$

پس $x + y \in F_{2r} \subset F$. به وضوح، اگر $x \in F_r$ آنگاه $-x \in F_r$ ، بنابراین F در شرایط (iii) - (i) بالا صدق می‌کند. \square

تجزیه و تحلیل زیرحلقه‌ها نسبتاً سخت‌تر است. رهیافت هندسی به تخمین بعد مجموعه فاصله‌ها که توسط یک مجموعه مسطح به دست می‌آید، مربوط می‌شود. اگر E زیرمجموعه‌ای از R^2 باشد، مجموعه فاصله‌های E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(E) = \{ |x - y| : x, y \in E \} \subset R$$

قضیه ۱۲-۵

فرض کنید $E \subset R^2$ یک مجموعه بورل باشد. آنگاه

$$\dim_H D(E) \geq \min \left\{ 1, \dim_H E - \frac{1}{2} \right\}. \quad (۴-۱۲)$$

نکته‌ای در اثبات. برهان نظریه پتانسیلی برای این قضیه کمی پیچیده می‌باشد. تبدیل‌های فوریه و قضیه پیچش برای بررسی دایره‌هایی که مرکزشان در E است و E را قطع می‌کنند به کار می‌رود. بعید است که (۴-۱۲) بهترین نامعادله ممکن باشد. \square

با در نظر گرفتن این قضیه، نشان دادن اینکه زیرحلقه‌ای با بعد $\frac{1}{2} < s < 1$ وجود ندارد کار مشکلی نیست.

قضیه ۱۲-۶

فرض کنید F زیرحلقه‌ای از R تحت عملگرهای جمع و ضرب باشد. اگر F یک مجموعه بورل باشد، آنگاه نابرابری $1 < \dim_H F < \frac{1}{2}$ غیر ممکن است.

برهان. اگر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F \times F \subset R^2$ ، آنگاه از آنجا که F یک زیرحلقه است، $D^2(F \times F)$ پس اگر $|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|^2 \in F$ مجموعه مربعات فواصل بین نقاط $F \times F$ را نشان دهد، داریم $D^2(F \times F) \subset F$. از آنجا

که نگاشت $t \rightarrow t^2$ بعد هاوسدورف را حفظ می‌کند (تمرین ۲-۵ را ببینید) با استفاده از قضیه ۵-۱۲ و قاعده ضرب ۷-۲ داریم

$$\begin{aligned} \dim_H F &\geq \dim_H D^2(F \times F) = \dim_H D(F \times F) \\ &\geq \min\{1, \dim_H(F \times F) - \frac{1}{2}\} \\ &\geq \min\{1, 2 \dim_H F - \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

این نامعادله برقرار است اگر و فقط اگر $\dim_H F = 1$ یا $\dim_H F \leq \frac{1}{2}$.
 این که آیا زیرحلقه‌های (بورل) از R دارای بعد بین $\frac{1}{2}$ و 1 وجود دارند یا نه، هر چند تقریباً بعید به نظر می‌رسد، یک مساله حل نشده است.

۵-۱۲ نکات و منابع

توضیحات جزئی‌تر در مورد مسئله کاکیا و شکل‌های مختلف آن در کتاب‌های *Besicovitch* (۱۹۶۳)، *Cunningham* (۱۹۷۱، ۱۹۷۴) و *Falconer* (۱۹۸۵a) آورده شده است. در کتاب *Besicovitch* (۱۹۶۴) توجه مضاعفی به این مطلب شده است.

برای دیدن مسائل مرتبط با حدس ویتوشکین، به کتاب *Hruscev Harin* و *Nikol'skii* (۱۹۸۴) مراجعه کنید. روش ساختی که مطرح شد به کتاب *Mattila* (۱۹۸۶)، و قرینه مثال اخیر به کتاب *Jones* و *Murai* (۱۹۸۸) برمی‌گردد.

برای یک آشنایی کلی با هندسه محدب کتاب *Eggleston* (۱۹۵۸) را ببینید. نتیجه‌ای که در اینجا آورده شده بود به کتاب *Anderson* و *Klee* (۱۹۵۲) برمی‌گردد. برای بررسی بیشتر جدیدترین نتایج در مورد بعد هاوسدورف و تحدب به کتاب *Dalla* و *Larman* (۱۹۸۰) مراجعه کنید.

مثال‌هایی از گروه‌های با بعد کسری در کتاب *Erdos* و *Volkman* (۱۹۶۶) آورده شده است. این دو نفر همچنین سوال‌هایی در مورد حلقه‌ها مطرح کردند که در کتاب *Falconer* (۱۹۸۵c) مورد توجه قرار گرفته‌اند.

تمرین‌ها

۱-۱۲ یک مجموعه مسطح با مساحت صفر بسازید که در هر فاصله قائم تا مبدأ بین صفر و ۱ شامل خطی باشد. (توجه: تصویر مجموعه‌ای را که در قضیه ۱۲-۲ به دست آمد، تحت

$$\text{تبدیل } (x, y) \rightarrow (x(1+y^2)^{1/2}, y) \text{ در نظر بگیرید.}$$

۲-۱۲ با تبدیل مجموعه‌ای که در تمرین قبل به دست آمد توسط نگاشت $(1/r, 0) \rightarrow (r, 0)$ که در مختصات قطبی داده شده است، نشان دهید که یک مجموعه مسطح با مساحت صفر وجود دارد که به ازای هر $r > 0$ شامل یک دایره با شعاع r می‌باشد.

۳-۱۲ نشان دهید که زیرمجموعه‌ای از صفحه با مساحت صفر وجود دارد که به ازای هر نقطه از محور x شامل یک خط راست متمایز و گذرنده از آن نقطه می‌باشد.

۴-۱۲ فرض کنید A یک زیرمجموعه (بورل) از $[0, \pi]$ باشد، و F زیرمجموعه‌ای از صفحه باشد که به ازای هر $\theta \in A$ شامل یک خط در راستای زاویه θ باشد. نشان دهید که

$$\dim_H F \geq 1 + \dim_H A$$

۵-۱۲ با دو طرفه کردن قضیه ۶-۹، نشان دهید که هر مجموعه بورل با مساحت متناهی a را می‌توان کاملاً توسط مجموعه‌ای از خطوط راست با مساحت کل a پوشاند.

۶-۱۲ نشان دهید که اگر یک زیرمجموعه فشرده F از C محمل یک توزیع جرم μ باشد به طوریکه $f(z) = \int_F (z-w)^{-1} d\mu(w)$ کراندار باشد، آنگاه F به معنای بخش ۱۲-۱ حذف‌پذیر نیست. نشان دهید که این مطلب برقرار است هرگاه $1 < \dim_H F \leq 2$.
(توجه: برهان قضیه ۴-۱۳ (ب) را ببینید.)

۷-۱۲ فرض کنید $f: R \rightarrow R$ یک تابع محدب باشد. نشان دهید که مجموعه نقاطی که f در آنها دیفرانسیل‌پذیر نیست، متناهی یا شمارا می‌باشد.

۸-۱۲ نشان دهید که هر زیرگروه از R تحت جمع دارای بعد جعبه ۰ یا ۱ می‌باشد.

فصل ۱۳ سیستم های دینامیکی

اخیراً به سیستم‌های دینامیکی توجه بسیاری شده است. این توجه عمدتاً به خاطر قابلیت استفاده از کامپیوترهای قدرتمند می‌باشد، که به تحلیل‌های نظری این اجازه را می‌دهد که همراه با بررسی‌های عددی پیش بروند. بخشی از این توجه نیز به خاطر ظهور روش‌های "توپولوژیکی" برای مطالعه رفتارهای کیفی سیستم‌ها می‌باشد، این روش‌ها رهیافت کمی سنتی را تکمیل می‌کنند. این موضوع از گستره وسیع کاربردهای خود نیز تأثیر می‌پذیرد. سیستم‌های دینامیکی اکنون برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی در زیست‌شناسی، جغرافیا و اقتصاد به خوبی مهندسی و فیزیک به کار برده می‌شوند. در مورد سیستم‌های دینامیکی و آشوبها کتاب‌ها نوشته شده است. ما برای فراهم آوردن دانستنی‌های جامع، که به گشت و گذار در نظریه ارگودیک، نظریه انشعاب^۱ و بسیاری زمینه‌های دیگر نیاز خواهد داشت، تلاش نمی‌کنیم، اما راه‌های متعددی را توضیح می‌دهیم که در آنها فرکتال‌ها در سیستم‌های دینامیکی رخ می‌نمایند.

فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از R^n (اغلب خود R^n) و $f: D \rightarrow D$ یک نگاشت پیوسته باشد. طبق معمول، f^k ، k امین تکرار f را نشان می‌دهد، یعنی $f^0(x) = x$ ، $f^1(x) = f(x)$ ، $f^2(x) = f(f(x))$ و غیره؛ توجه کنید که اگر x یک نقطه از D باشد، $f^k(x)$ به ازای هر k در D است، نوعاً، x ، $f(x)$ ، $f^2(x)$ ، ... مقادیر یک کمیت در زمان‌های ۰ ، ۱ ، ۲ ، ... می‌باشند. بنابراین، مقدار در زمان $k+1$ بر حسب مقدار در زمان k به

^۱ bifurcation

وسیله تابع f داده می‌شود. مثال‌ها شامل جمعیت‌های زنده، ارزش یک سرمایه‌گذاری تحت شرایط بهره و مالیات و موقعیت یک ذره سیال در یک جریان یکنواخت، می‌باشند.

یک طرح تکراری $\{f^k\}$ یک سیستم دینامیکی گسسته نامیده می‌شود. ما به رفتار دنباله‌ای از تکرارها، یا مدارها، $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ، به ازای نقاط ابتدایی گوناگون $x \in D$ به خصوص به ازای تک‌های بزرگ، علاقه‌مند هستیم. برای مثال، اگر $f(x) = \cos x$ ، دنباله $f^k(x)$ به ازای هر x ابتدایی به 0.739 میل می‌کند. با زدن کلید کسینوس یک ماشین حساب به طور مکرر امتحان کنید و ببینید. گاهی توزیع تکرارها تقریباً تصادفی به نظر می‌آید. گاهی نیز $f^k(x)$ می‌تواند به یک نقطه ثابت w میل کند، یعنی نقطه‌ای از D که $f(w) = w$. به طور کلی‌تر، $f^k(x)$ می‌تواند به یک مدار با نقاط دارای دوره p ، $\{w, f(w), \dots, f^{p-1}(w)\}$ ، میل کند که p کوچکترین عدد صحیح مثبت است که $f^p(w) = w$ ، بدین معنی که چنانچه $k \rightarrow \infty$ ، $|f^k(x) - f^i(w)| \rightarrow 0$. با این حال گاهی ممکن است شاهد حرکت تصادفی $f^k(x)$ در اطراف باشیم، اما نزدیک یک مجموعه معین، که ممکن است یک فرکتال باشد. در این فصل روشهای گوناگونی را بررسی می‌کنیم که در آنها چنین جاذب‌های فرکتالی یا جاذب‌های عجیب پیش می‌آیند.

به بیان نادقیق، یک جاذب، مجموعه‌ای است که همه مدارهای نزدیک به هم به آن میل می‌کنند. به هر حال، همچنان که اغلب در نظریه سیستم‌های دینامیکی پیش می‌آید، مؤلفان تعاریف مختلفی ارائه داده‌اند. یک زیرمجموعه F از D را یک جاذب برای f می‌نامیم اگر F یک مجموعه بسته بوده و تحت f پایدار باشد (یعنی $f(F) = F$) به طوریکه به ازای هر x متعلق به یک مجموعه باز V شامل F ، فاصله $f^k(x)$ تا F با افزایش k ، به صفر میل کند. مجموعه V حوزه جذب F نامیده می‌شود. معمولاً فرض می‌شود که F مینیمال باشد به این معنی که دارای هیچ زیرمجموعه محض که در این شرایط صدق کند، نباشد. به طور مشابه، یک مجموعه بسته پایدار F که همه نقاط نزدیک به هم خارج F با تکرار از آن دور می‌شوند، یک دافع نامیده می‌شود. این به بیان نادقیق معادل با این است که F یک جاذب برای معکوس (احتمالاً چند مقداره) f یعنی f^{-1} ، باشد. یک جاذب یا دافع ممکن است دقیقاً یک نقطه یا یک مدار p - دوره‌ای باشد. به هر حال، حتی نگاشت‌های نسبتاً ساده f ممکن است دارای جاذب‌های فرکتالی باشند.

توجه کنید که مجموعه $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D)$ تحت f ثابت است. از آنجایی که به ازای هر $x \in D$ ، $f^k(x) \in \bigcap_{i=1}^k f^i(D)$ ، تکرارهای $f^k(x)$ با افزایش k به F نزدیک می‌شوند، و F اغلب یک جاذب می‌باشد.

بسیاری اوقات، اگر f دارای یک جاذب یا دافع فرکتالی F باشد، آنگاه f رفتارهای آشوبناک روی F به نمایش می‌گذارد. تعریف‌های گوناگونی از آشوب وجود دارد؛ f به عنوان آشوب روی F در نظر گرفته می‌شود اگر همه موارد زیر درست باشند.

(i) مدار $\{f^k(x)\}$ به ازای یک $x \in F$ در F چگال باشد.

(ii) آن نقاط تناوبی f (نقاطی که به ازای یک عدد صحیح مثبت p ، $f^p(x) = x$) که در F قرار دارند، در F چگال باشند.

(iii) f وابستگی حساسی به شرایط ابتدایی داشته باشد؛ یعنی عدد $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر x در F نقاط y در F به اندازه دلخواه نزدیک به x وجود داشته باشند به طوری که به ازای یک k ، $|f^k(x) - f^k(y)| \geq \delta$. بنابراین نقاطی که در ابتدا به هم نزدیک هستند، تحت تکرارهای f نزدیک به هم باقی نمی‌مانند.

شرط (i) ایجاب می‌کند که F نمی‌تواند به مجموعه‌های کوچکتر بسته و پایدار تجزیه شود، شرط (ii) یک اسکلت‌بندی از نظم در ساختار F را ارائه می‌دهد، و (iii) غیر قابل پیش‌بینی بودن تکرارهای نقاط روی F را منعکس کند. به خصوص، (iii) می‌گوید که تقریب‌های عددی بلند مدت دقیق برای مدارهای f غیر ممکن است. اغلب، شرایطی که باعث ایجاد جاذب‌های فرکتالی می‌شوند، به رفتارهای آشوبناک نیز می‌انجامند.

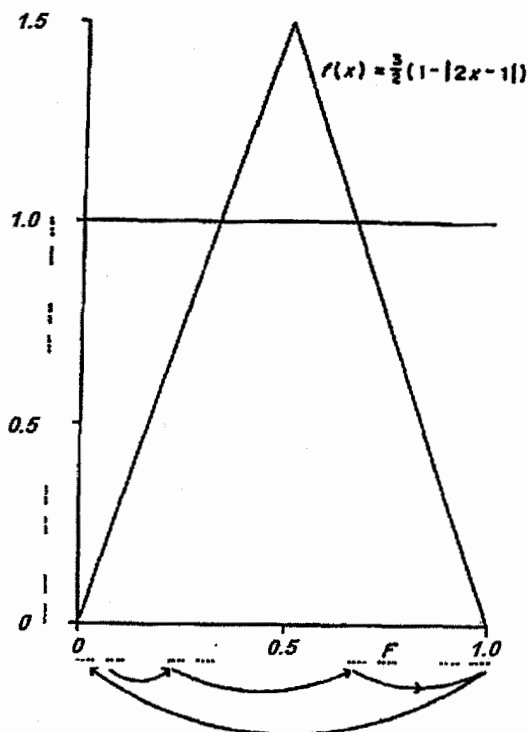
طبیعتاً رفتار سیستم‌های دینامیکی با کامپیوتر قابل مطالعه است. به بیان نادقیق، جاذب‌ها مجموعه‌هایی هستند که وقتی مدارها با یک کامپیوتر رسم می‌شوند، مشاهده می‌شوند. برای یک نقطه ابتدایی x ، تکرارهای $f^k(x)$ را به ازای $k \geq 100$ رسم می‌شوند، مثلاً، با این فرض که آنها از هر جاذب غیر قابل تشخیص باشند. اگر یک جاذب یک فرکتال را نمایش دهد، یک روش "جعبه شماری" برای تقریب بعد آن می‌تواند به کار برده شود. با وجود این، تصاویر کامپیوتری می‌توانند گمراه کننده باشند، چرا که توزیع $f^k(x)$ حول یک جاذب ممکن است بسیار ناهموار باشد، در حالی که بخش‌های معینی از جاذب به ندرت به چشم می‌خورند.

۱۳-۱ دافع‌ها^۱ و طرح‌های تابع تکرار شده

تحت شرایطی معین، یک دافع در سیستم دینامیکی منطبق بر مجموعه ناوردای یک طرح تابع تکرار شده می‌باشد. این موضوع با یک مثال بهتر روشن می‌شود. نگاشت $f: R \rightarrow R$ که به صورت زیر داده می‌شود

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$$

^۱ repellers



شکل ۱-۱۳ نگاشت خیمه f . توجه کنید که مجموعه یک سوم میانی کانتور F توسط f به روی خودش نگاشته می‌شود و یک دافع ناورد می‌باشد. همچنین، به طبیعت آشوبناک f روی F توجه کنید: تکرارهای یک نقطه توسط فلش‌ها نشان داده شده است.

به خاطر شکل نمودار آن نگاشت خیمه مانند نامیده می‌شود؛ شکل ۱-۱۳ را ببینید. به وضوح، f ، R را به طور دو به یک به روی $(-\infty, \frac{3}{2})$ می‌نگارد. با تعریف $S_1, S_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ به صورت

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x \quad , \quad S_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x$$

می‌بینیم که

$$f(S_1(x)) = f(S_2(x)) = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

بنابراین S_1 و S_2 دو شاخه f^{-1} می‌باشند. از آنجاییکه S_1 و S_2 انقباض‌هایی روی $[0, 1]$ می‌باشند، قضیه ۹-۱ می‌رساند که یک مجموعه ناوردای فشرده و یکتای F وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$(1-13) \quad F = S_1(F) \cup S_2(F)$$

که به صورت $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k([0,1])$ داده می‌شود (در اینجا $S(E) = S_1(E) \cup S_2(E)$ به ازای هر مجموعه E). به راحتی می‌توان دید که F مجموعه یک سوم میانی کانتور با بعد جعبه و هاسدورف $\log 2 / \log 3$ می‌باشد.

از (1-13) نتیجه می‌شود که $f(F) = F$. برای دیدن اینکه f یک دافع است، دقت کنید که اگر $x < 0$ آنگاه $f(x) < 3x$ ، بنابراین چنانچه $k \rightarrow \infty$ ، $f^k(x) \rightarrow -\infty$. اگر $x > 1$ آنگاه $f(x) < 0$ و دوباره $f^k(x) \rightarrow -\infty$. اگر $x \in [0,1] \setminus F$ آنگاه به ازای یک k داریم $x \notin \bigcup \{S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}[0,1] : i_j = 1,2\}$ ، بنابراین $f^k(x) \notin [0,1]$ و دوباره $f^k(x) \rightarrow -\infty$. همه نقاط خارج از F به سمت $-\infty$ تکرار می‌شوند از این رو F یک دافع است.

طبق مطالب بخش 9-1، طبیعت آشوبناک f روی F بی‌درنگ معلوم می‌باشد. با نشان دادن نقاط F به صورت $x_{i_1, i_2, \dots}$ ، $i_j = 1, 2$ ، همانند (9-7) اگر $i_1 = i'_1, \dots, i_k = i'_k$ آنگاه $|x_{i_1, i_2, \dots} - x_{i'_1, i'_2, \dots}| \leq 3^{-k}$. از آنجاییکه $x_{i_1, i_2, \dots} = S_{i_1}(x_{i_2, i_3, \dots})$ ، نتیجه می‌شود که $f(x_{i_1, i_2, \dots}) = x_{i_2, i_3, \dots}$. فرض کنید که (i_1, i_2, \dots) یک دنباله نامتناهی متشکل از دنباله‌های متناهی از 0 و 1 باشد که به صورت یک دسته متوالی از جملات ظاهر می‌شوند، برای مثال،

$$(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

آنگاه، به ازای هر نقطه $x_{i_1, i_2, \dots}$ در F و هر عدد صحیح q می‌توانیم k را به گونه‌ای بیابیم که $(i'_1, i'_2, \dots, i'_q) = (i_{k+1}, \dots, i_{k+q})$. بنابراین $f^k(x_{i_1, i_2, \dots}) = x_{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots}$ به دلخواه به ازای k به اندازه کافی بزرگ به هر یک از نقاط F نزدیک می‌شود بنابراین f دارای مدارهای چگال در F است. به علاوه، از آنجاییکه $x_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+2}, i_{k+3}, \dots}$ یک نقطه تناوبی با دوره تناوب k است، نقاط تناوبی f نیز در F چگال هستند. تکرارها وابستگی حساسی به شرایط اولیه دارند، زیرا $f^k(x_{i_1, \dots, i_k, 1, \dots}) \in [0, \frac{1}{3}]$ اما $f^k(x_{i_1, \dots, i_k, 2, \dots}) \in [\frac{2}{3}, 1]$. نتیجه می‌گیریم که F یک دافع آشوبناک برای f است. (مطالعه f به وسیله اثر آن روی نقاط F که به وسیله دنباله‌های (i_1, i_2, \dots) نمایش داده می‌شوند، به دینامیک نمادین مشهور است.)

به روشی دقیقاً مشابه، مجموعه‌های ناوردای طرح تابع تکرار شده دیگر منطبق بر دافع‌های دیگر می‌باشد. اگر S_1, \dots, S_m مجموعه‌ای از انقباض‌های دوسویی روی دامنه D با مجموعه ناوردای F باشند به طوری که $S_1(F), \dots, S_m(F)$ مجزا هستند، آنگاه F یک دافع برای هر

نگاشت f است به طوری که وقتی x نزدیک $S_i(F)$ است، $f(x) = S_i^{-1}(x)$. دوباره، با آزمایش اثر f روی نقطه $x_{i_1, i_2, \dots}$ ، می‌توان نشان داد که f روی F آشوبناک عمل می‌کند.

۱۳-۲ نگاشت پشتیبان (لژیستیک)

نگاشت پشتیبان $f: R \rightarrow R$ به صورت

$$(۲-۱۳) \quad f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$$

داده می‌شود که λ یک ثابت مثبت است. این نگاشت، به عنوان مدل رشد جمعیت یک گونه خاص، معرفی شده است. اگر جمعیت در آخر هر سال برابر x باشد، فرض می‌کنیم که جمعیت در آخر سال بعد برابر $f_\lambda(x)$ باشد. امروزه نگاشت پشتیبان به عنوان یک نمونه سیستم دینامیکی ۱- بعدی به طور گسترده‌ای مطالعه می‌شود. ما اینجا به بررسی هنگامیکه λ بزرگ است، و بحث مختصری از زمانیکه کوچک است، قناعت می‌کنیم.

به ازای $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ داده شده برای ریشه‌های $f(x) = 1$ بنویسید $a = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1/\lambda}$ و $1-a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1/\lambda}$. هر یک از بازه‌های $[0, a]$ و $[1-a, 1]$ توسط f_λ به صورت یک تناظر یک به یک به $[0, 1]$ نگاشته می‌شود. نگاشت‌های

$$S_1: [0, 1] \rightarrow [0, a] \quad \text{و} \quad S_2: [0, 1] \rightarrow [1-a, 1]$$

$$S_1(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x/\lambda} \quad S_2(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x/\lambda}$$

تحدیدهای معکوس f_λ^{-1} به $[0, a]$ و $[1-a, 1]$ می‌باشند، و برای هر $x \in [0, 1]$ داریم $f_\lambda(S_1(x)) = f_\lambda(S_2(x)) = x$.

$$|S'_i(x)| = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} - x/\lambda\right)^{-1/2}$$

بنابراین اگر $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{1}{\lambda} \leq |S'_i(x)| \leq \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} - 1/\lambda\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} (\lambda^2/4 - \lambda)^{-1/2}.$$

بنابر قضیه مقدار میانگین

$$(۳-۱۳) \quad \frac{1}{\lambda} |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \leq \frac{1}{2} (\lambda^2/4 - \lambda)^{-1/2} |x - y| \quad (0 \leq x, y \leq 1)$$

بنابراین اگر $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ نگاهت‌های S_1 و S_2 انقباض‌هایی روی $[0,1]$ خواهند بود، پس بنابر قضیه ۹-۱ یک زیرمجموعه فشرده ناتهی یکتای F از $[0,1]$ وجود دارد که در

$$F = S_1(F) \cup S_2(F)$$

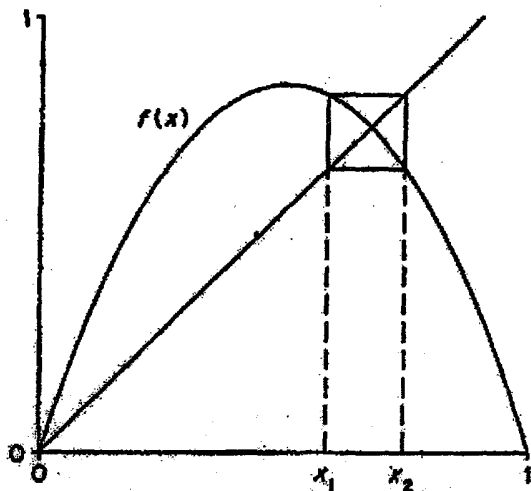
صدق می‌کند، و این نتیجه می‌دهد که $f_\lambda(F) = F$. از آنجاییکه این اجتماع مجزا است، F کلاً ناهمبند است. به روشی دقیقاً مشابه با آنچه برای نگاهت خیمه داشتیم، F یک دافع، و f روی F آشوبناک است.

برای تخمین زدن بعد F همانند مثال ۹-۸ اقدام می‌کنیم. با استفاده از قضایای ۹-۶ و ۹-۷، از ۱۳-۳ نتیجه می‌شود که

$$\frac{\log 2}{\log \lambda} \leq \dim_H F \leq \overline{\dim}_B F \leq \dim_B F \leq \frac{\log 2}{\log(\lambda(1-4/\lambda)^{1/2})}$$

بنابراین، اگر λ بزرگ باشد، بعد F نزدیک به $\log 2 / \log \lambda$ است.

به ازای مقادیر کوچکتر λ ، دینامیک‌های نگاهت پشتیبان (۱۳-۲)، ظریف هستند. اگر $0 < \lambda \leq 4$ ، تابع f_λ بازه $[0,1]$ را به خودش می‌نگارد، و می‌توانیم توجه خود را به بازه $[0,1]$ محدود کنیم. اگر x یک نقطه p -دوره از f باشد، یعنی $f^p(x) = x$ و f^p کوچکترین عدد صحیح مثبت با این خاصیت باشد، بر حسب اینکه $|(f^p)'(x)|$ کمتر یا بزرگتر از ۱ باشد، گوئیم که x پایدار یا ناپایدار است. نقاط متناوب پایدار مدارهای نزدیک را جذب می‌کنند، و نقاط متناوبی ناپایدار آنها را دفع می‌کنند. اگر $0 < \lambda \leq 1$ ، آنگاه f_λ دارای یک نقطه ثابت در ۰ است که جاذب می‌باشد، زیرا به ازای هر $x \in [0,1]$ ، $f_\lambda^k(x) \rightarrow 0$. برای $1 < \lambda < 3$ ، تابع f_λ یک نقطه ثابت ناپایدار ۰، و یک نقطه ثابت پایدار $1-1/\lambda$ دارد، بنابراین، به ازای هر $x \in (0,1)$ ، $f_\lambda^k(x) \rightarrow 1-1/\lambda$. چنانچه λ از مقدار $\lambda_1 = 3$ بیشتر شود، نقطه ثابت واقع در $1-1/\lambda$ ناپایدار می‌شود و به یک مدار پایدار با دوره ۲ که در آن همه نقاط به جز تعدادی شمارش‌پذیر از نقاط بازه $(0,1)$ جذب می‌شوند منجر می‌گردد (شکل ۱۳-۲ را ببینید). وقتی λ به مقدار $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$ می‌رسد، مدار ۲- دوره‌ای ناپایدار می‌شود و با یک مدار ۴- دوره‌ای پایدار جایگزین می‌شود. چنانچه λ باز هم افزایش یابد، این دو برابر شدن دوره با یک مدار پایدار با دوره 2^q که در $\lambda = \lambda_q$ ظاهر می‌شود، ادامه می‌یابد؛ این مدار همه نقاط اولیه در $(0,1)$ را جز تعدادی شمارش‌پذیر جذب می‌کند. یکی از ویژگی‌های شگفت‌انگیز این روند این است که دو برابر شدن دوره با افزایش λ ، بیشتر و بیشتر روی می‌دهد، و اگر $\lambda \rightarrow \infty$ آنگاه $\lambda \rightarrow \infty$ که در آن $\lambda_\infty \approx 3.570$.

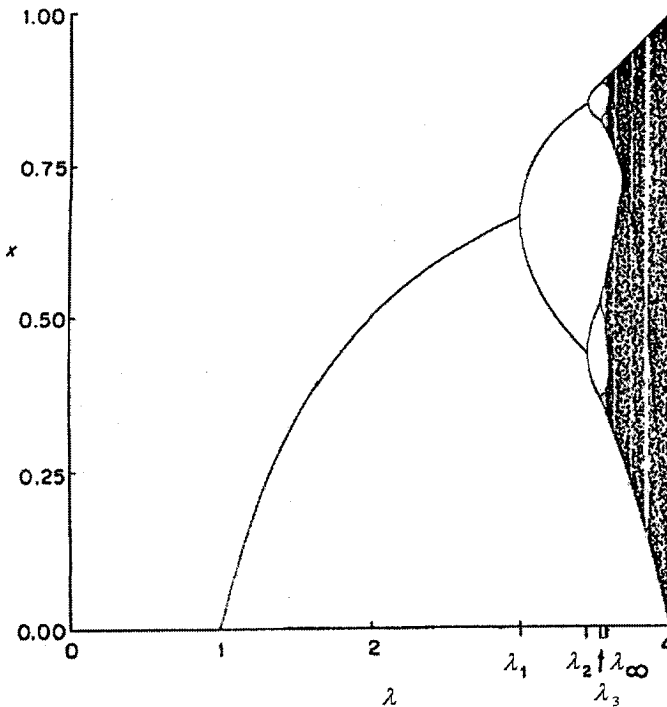


شکل ۱۳-۲ نکاشت پشتیبان $f(x) = \lambda x(1-x)$ به ازای $\lambda = 3.38$. به مدار ۲- دوره‌ای x_1, x_2 با $f(x_2) = x_1$ و $f(x_1) = x_2$ توجه کنید.

هنگامیکه λ به λ_∞ نزدیک می‌شود، انشعاب مکرر مدارهای پایدار با دوره 2^q به مدارهای پایدار نزدیک با دوره 2^{q+1} دنباله‌ای از مدارهای جذب کننده ایجاد می‌کنند که به یک مجموعه کانتور شباهت دارد؛ شکل ۱۳-۳ را ببینید. هنگامی که $\lambda = \lambda_\infty$ ، جذب F^1 واقعاً مجموعه‌ای از نوع کانتور است. در این صورت F تحت f_{λ_∞} ناوردا است و همه نقاط بازه $[0, 1]$ به استثنای تعدادی شمارش‌پذیر تحت تکرار به وسیله f_{λ_∞} ، به F نزدیک می‌شوند (نقاط استثنایی آنهایی هستند که روی مدارهای متناوب ناپایدار تکرار می‌شوند). اثر f_{λ_∞} روی F را می‌توان از طریق برونمایی مدارهای متناوب f_{λ_∞} هنگامی که q بزرگ باشد، تجزیه و تحلیل کرد. مدارهای چگالی وجود دارند که وابسته به شرایط اولیه نیستند، می‌توان نشان داد که F از نقطه نظر (۹-۱) تحت یک جفت از انقباضها ناوردا می‌باشد و با استفاده از روش مثال ۹-۸ بعد هائوسدورف آن را می‌توان برابر $0.538\dots$ تخمین زد. تجزیه و تحلیل کامل ساختار این جذب فرکتالی فراتر از این کتاب است.

به ازای $4 > \lambda > \lambda_\infty$ رفتارهای گوناگونی مشاهده می‌شود. یک مجموعه K وجود دارد به طوری که اگر $\lambda \in K$ آنگاه f_λ واقعاً دارای یک جذب آشوبناک با طول مثبت است. بعلاوه

خودکادارای اندازه لبگ مثبت است. با وجود این، در بریدگی‌ها یا "روزنه‌های" K دو برابر شدن دوره، دوباره روی می‌دهد. برای مثال، وقتی که $\lambda \approx 3.83$ ، یک مدار ۳- دوره‌ای پایدار وجود دارد؛ هنگامیکه λ افزایش می‌یابد ابتدا به یک مدار ۶- دوره‌ای پایدار و سپس به یک مدار ۱۲- دوره‌ای پایدار منشعب می‌شود و به همین ترتیب. هنگامی که λ به حدود 3.855 می‌رسد "حد" این مدارهای پایدار یک جاذب کانتور-مانند می‌دهد. به طور مشابه روزنه‌های دیگری وجود دارد که دو برابر شدن دوره در آنها با یک ۵- دوره‌ای، یک ۷- دوره‌ای شروع می‌شود و به همین ترتیب.



شکل ۱۳-۳ به ازای هر λ تکرارهای $f^k(x)$ با مقدار اولیه مناسب x برای مقادیر k بین 150 و 300 رسم شده‌اند. اشتراک نمودار با خطوط عمودی جاذب‌های تناوبی را به ازای $\lambda < \lambda_\infty$ نشان می‌دهد. با نزدیک شدن λ به λ_∞ ، انشعاب مکرر مدارهای تناوبی در جاذبی به فرم مجموعه کانتور در $\lambda = \lambda_\infty$ نتیجه می‌شود.

یکی از ویژگی‌های خیره کننده این موضوع این است که رفتار نگاشت پشتیبان با زیاد شدن مقدار λ به طور کیفی مشابه با رفتار هر گزایه‌ای از تبدیلات از یک بازه می‌باشد، $f_\lambda(x) = \lambda f(x)$ مشروط بر آنکه f تکمندی باشد (یعنی، یک ماکزیمم منحصر به فرد داشته باشد). هر چند مقادیر $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ که در آنها دو برابر شدن دوره روی می‌دهد به f بستگی دارد، آن مقداری که در آن این مقادیر به λ_∞ نزدیک می‌شوند، مطلق است، یعنی $\lambda_\infty - \lambda_k \approx c\delta^{-k}$ که در آن $\delta = 4.6692\dots$ ثابت فین‌بوم^۱ است و c بستگی به f دارد. به علاوه، بعد هاوسدورف جاذب فرکتالی f_{λ_∞} برابر $0.538\dots$ است، این مقدار یکسان برای هر f که تکمد و مشتق‌پذیر باشد، روی می‌دهد.

نگاشت‌هایی که برای مدل‌سازی کردن جمعیت‌های زیستی و موارد مشابه به کار برده شده‌اند شامل موارد زیر می‌باشند:

$$f_\lambda(x) = \lambda \sin \pi x$$

$$f_\lambda(x) = x \exp \lambda(1-x)$$

$$f_\lambda(x) = x(1 + \lambda(1-x))$$

$$f_\lambda(x) = \lambda x / (1 + ax)^5.$$

۱۳-۳ تبدیلات کشیدن و تا کردن

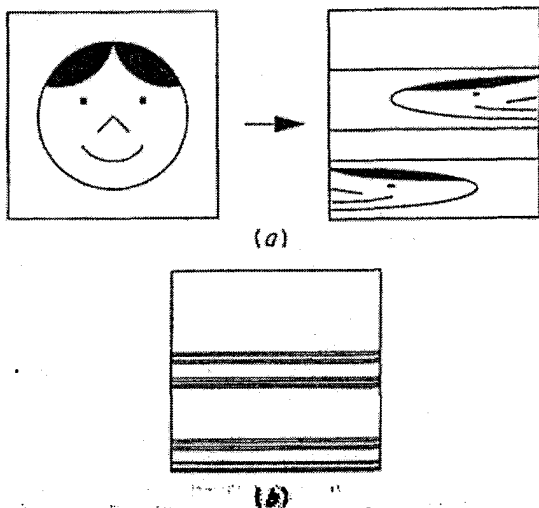
یکی از سیستم‌های دینامیکی مسطح با یک جاذب فرکتالی تبدیل "خیز" می‌باشد، دلیل این نام‌گذاری مشابه بودن این روند با عمل تکراری "کشیدن و تا کردن" یک تکه خمیر می‌باشد. فرض کنید $E = [0,1] \times [0,1]$ مربع واحد باشد. به ازای مقدار ثابت $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ تبدیل خیز $f: E \rightarrow E$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(۴-۱۳) \quad f(x, y) = \begin{cases} (2x, \lambda x) & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ (2x-1, \lambda x + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases}$$

این تبدیل را می‌توان به صورت کشیدن E به یک مستطیل $2 \times \lambda$ و برش آن به دو مستطیل $1 \times \lambda$ و قرار دادن آنها در بالای یکدیگر با یک بریدگی $\lambda - \frac{1}{2}$ مابین آنها، در نظر گرفت، شکل ۱۳-۴ را ببینید. آنگاه $E_k = f^k(E)$ یک دنباله نزولی از مجموعه‌ها می‌باشد، که E_k شامل 2^k نوار افقی با ارتفاع λ^{-k} می‌باشد که به وسیله بریدگی‌های به طول حداقل $(\frac{1}{2} - \lambda)\lambda^{1-k}$ از هم جدا شده‌اند. از آنجا که $f(E_k) = E_{k+1}$ ، مجموعه حدی فشرده

^۱ Feigenbaum

، $f^k(x, y) \in E_k$ آنگاه $(x, y) \in E$ اگر $f(F) = F$ در $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ صدق می‌کند. بنابراین $f^k(x, y)$ در فاصله λ^{-k} از F قرار می‌گیرد. بنابراین همه نقاط E تحت تکرار به وسیله f به F جذب می‌شوند.



شکل ۱۳-۴ تبدیل خباز: (a) تأثیر آن روی یک مربع واحد، (b) جاذب حاصل شده

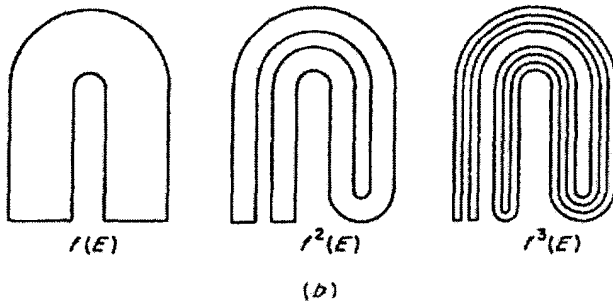
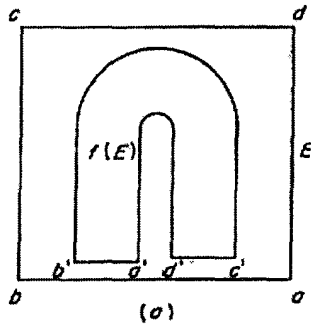
اگر نقطه اولیه (x, y) دارای بسط $x = a_1 a_2 \dots$ در مبنای ۲ باشد، آنگاه به سادگی بررسی می‌شود که

$$f^k(x, y) = (a_{k+1} a_{k+2} \dots, y_k)$$

که y_k نقطه‌ای در نوار E_k است که با حساب کردن از پایین به صورت $a_1 \dots a_{k-1} a_k$ (در مبنای ۲) شماره‌گذاری شده است. بنابراین هنگامی که k بزرگ است موقعیت $f^k(x, y)$ تا حدود زیادی به ارقام a_i در نمایش x در مبنای ۲ بستگی دارد، که i به k نزدیک است. با انتخاب یک x که بسط آن در مبنای ۲ شامل همه دنباله‌های متناهی است، می‌توانیم ترتیبی بدهیم که $f^k(x, y)$ به ازای مقدار اولیه معین (x, y) در F چگال باشد، دقیقاً همانند حالت نگاشت خیمه.

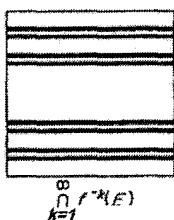
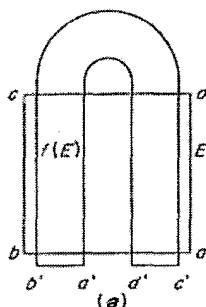
تجزیه و تحلیل بیشتر نشان می‌دهد که f وابستگی حساسی به مقادیر اولیه دارد، و اینکه نقاط متناوب f در F چگال هستند، به طوری که F یک جاذب آشوبی برای f است. مسلماً F یک فرکتال است - حاصلضرب $F_1 \times [0,1]$ که F_1 یک مجموعه کانتور یکنواخت است که از جایگزینی مکرر بازه‌های I با یک جفت از زیربازه‌ها به طول $|I| \lambda$ به دست می‌آید. مثال ۴-۵ ایجاب می‌کند که $\dim_H F_1 = \dim_B F_1 = \log 2 / -\log \lambda$ ، بنابراین با استفاده از نتیجه ۶-۷ داریم $\dim_H F = 1 + \log 2 / -\log \lambda$.

از آنجا که تبدیل خراب تک‌ای - خطی و ناپیوسته است نسبتاً ساختگی می‌باشد. به هر حال، برای نشان دادن اینکه چگونه روند "کشیدن و بریدن" به یک جاذب فرکتالی می‌انجامد، واقعاً به درد می‌خورد.

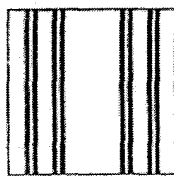


شکل ۱۳-۵ یک نگاشت نعل اسبی. (a) مربع E با کشیدن و خم کردن به نعل اسب $f(E)$ تبدیل شده است، به نحوی که نقاط a, b, c, d به ترتیب به نقاط a', b', c', d' نگاشته شده‌اند. (b) تکرار E تحت نگاشت f مجموعه‌ای شکل می‌دهد که به طور موضعی برابر حاصلضرب یک پاره‌خط و یک مجموعه کانتور می‌باشد.

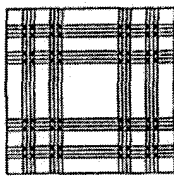
روند مشابه "کشیدن و تا کردن" می‌تواند برای تابع‌های پیوسته در نواحی مسطح روی دهد. فرض کنید $E = [0,1] \times [0,1]$ و f مجموعه E را به طور یک به یک به روی ناحیه نعلی شکل $f(E)$ مشمول در E بنگارد. آنگاه می‌توان f را اینطور در نظر گرفت که E را می‌کشد به طوریکه مستطیل باریک بلندی به دست آید و آنگاه آن را از وسط خم می‌کند. این شکل به طور مکرر توسط f کشیده و خم می‌شود به طوریکه $f^k(E)$ شامل تعداد فزاینده‌ای از نوارهای مجاور به هم می‌باشد؛ شکل ۱۳-۵ را ببینید. داریم $E \supset f(E) \supset f^2(E) \supset \dots$ و مجموعه فشرده $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(E)$ را جذب می‌کند. به طور موضعی، F مانند حاصلضرب یک مجموعه کانتور و یک بازه به نظر می‌آید.



$$\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$$



$$\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(E)$$



$$F$$

(a)

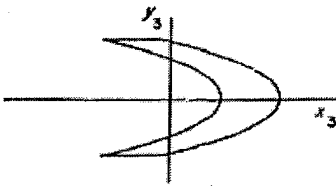
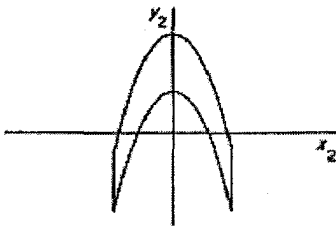
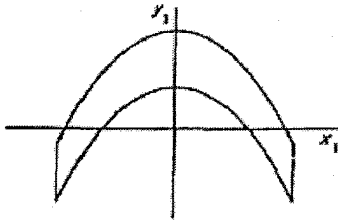
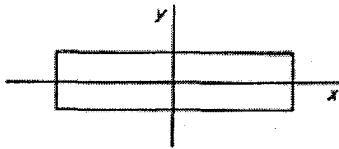
شکل ۱۳-۶ صورت دیگری از نگاشت نعل اسبی. (a) مربع E تحت نگاشت f به گونه‌ای به نعل اسب تبدیل می‌شود که "کمان" و "انتهای" $f(E)$ در خارج از E قرار می‌گیرند. هر دو مجموعه $\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$ و $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(E)$ حاصلضربی از یک مجموعه کانتور و یک بازه واحد می‌باشند. اشتراک این دو مجموعه یعنی F یک مجموعه ناوردای F می‌باشد.

یک تغییر روی ساختار فوق تبدیلی با ویژگی‌های نسبتاً متفاوتی می‌دهد؛ شکل ۱۳-۶ را ببینید. اگر D یک دامنه مسطح شامل مربع واحد E باشد و $f: D \rightarrow D$ به گونه‌ای باشد که $f(E)$ یک نعل باشد که قسمت‌های انتهایی و کمان آن در بخشی از D خارج از E قرار گرفته‌اند و در تکرارها هیچ وقت به داخل E بر نمی‌گردد، آنگاه تقریباً همه نقاط مربع E (با

اندازه سطح) سرانجام توسط تکرار f به بیرون E رانده می‌شوند. اگر به ازای هر k مثبت، $f^k(x, y) \in E$ ، آنگاه $(x, y) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$. اگر f به طور مناسب تعریف شده باشد، $f^{-1}(E)$ شامل دو نوار افقی در طول E می‌باشد، بنابراین $\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$ حاصلضرب بازه $[0, 1]$ و مجموعه کانتور می‌باشد. مجموعه

$$F = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(E) = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(E) \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$$

فشرده و ناوردای برای f ، و حاصلضرب دو مجموعه کانتور می‌باشد. به هر حال، F جاذب نمی‌باشد، چرا که نقاط به دلخواه نزدیک به F به سمت بیرون از E تکرار می‌شوند.



خم کردن با حفظ مساحت
 $(x_1, y_1) = (x, 1 - ax^2 + y)$

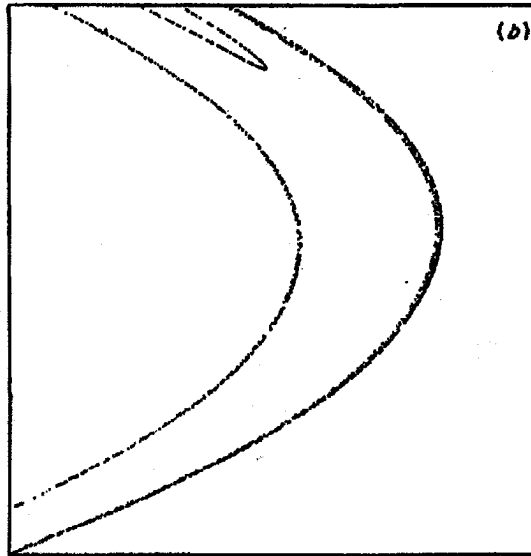
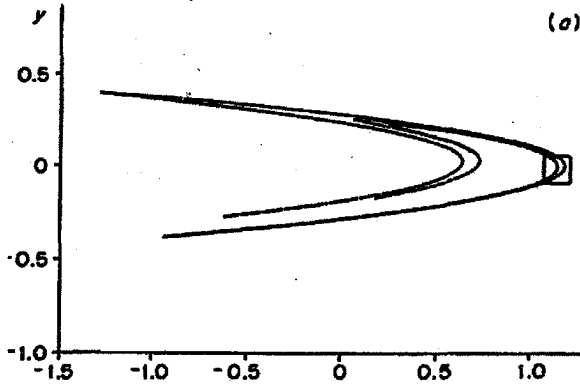
انقباض در جهت x
 $(x_2, y_2) = (bx_1, y_1)$

بازتاب نسبت به خط $y = x$
 $(x_3, y_3) = (y_2, x_2)$

شکل ۱۳-۷ نگاشت هنون را می‌توان به یک انحنای دهنده حافظ مساحت، سپس یک انقباض، و بعد، یک بازتاب نسبت به خط $y = x$ تجزیه کرد. نمودارها تأثیر پشت سر هم این تبدیلات روی یک مستطیل را نشان می‌دهند

یک مثال ویژه از یک تبدیل "کشیدن و تا کردن"، نگاشت هنون $f: R^2 \rightarrow R^2$ به صورت زیر است

$$(۵-۱۳) \quad f(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$$



شکل ۸-۱۳ تکرارهای یک نقطه تحت نگاشت هنون (۵-۱۳) شکل جاذب را نشان می‌دهد. در (b) با بزرگنمایی مربع قسمت (a)، جزئیات واضح‌تر نشان داده شده است.

که a و b ثابت هستند. (برای مطالعه معمولاً مقادیر $a = 1.4$ و $b = 0.3$ انتخاب می‌شوند. به ازای این مقادیر یک چهار ضلعی D وجود دارد که $f(D) \subset D$ ، و می‌توانیم توجه خود را به آن معطوف کنیم.) این نگاشت به ازای هر (x, y) دارای ژاکوبی $-b$ است، بنابراین مساحت را با آهنگ ثابتی در سراسر R^2 منقبض می‌کند؛ با تغییر خطی مختصات، (۱۳-۵) کلی‌ترین نگاشت درجه دو با این ویژگی است. تبدیل (۱۳-۵) را می‌توان به یک انحنای دهنده (حافظ مساحت)، یک انقباض، و یک بازتاب تجزیه کرد، که اثر خالص آن "نعلی شکل" است؛ شکل ۱۳-۷ را ببینید. این سبب می‌شود که انتظار داشته باشیم f دارای یک جاذب فرکتالی باشد، و این با تصاویر کامپیوتری تحقیق شده است. عکس‌های بزرگنمایی شده نمایشی از یک مجموعه را نشان می‌دهد که به طور موضعی حاصلضرب یک پاره خط و یک مجموعه کانتور-مانند می‌باشد. تقریب‌های عددی نشان می‌دهند که وقتی $a = 1.4$ و $b = 0.3$ ، جاذب تقریباً دارای بعد جعبه 1.26 است.

تجزیه و تحلیل دقیق نگاشت هنوز بسیار مشکل است، و هنوز دینامیک آن به طور کامل مطالعه نشده است. به ویژه تغییرات کیفی در رفتار (انشعاب‌ها) که با تغییر a و b روی می‌دهد بسیار پیچیده هستند.

انواع بسیار دیگری از نگاشت‌های "کشیدن و تا کردن" امکان‌پذیر هستند. تبدیلات ممکن است چندین بار روی خود برگردند یا حتی چند به یک باشند؛ برای مثال ممکن است نقاط انتهایی یک نعل به هم برسند. چنین تبدیلاتی اغلب دارای جاذب‌های فرکتالی می‌باشند، اما تجزیه و تحلیل آنها به جاهای سخت منتهی می‌شود.

۱۳-۴ سیملوله (سولنوئید)

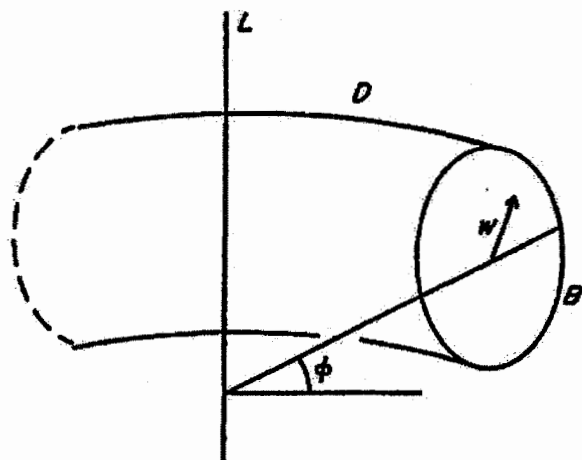
مثال بعدی ما تبدیلی از یک ناحیه ۳-بعدی یعنی یک چنبره توپر می‌باشد. اگر یک قرص واحد B حول یک محور L که در صفحه B قرار دارد اما خود B را قطع نمی‌کند، 360° چرخانده شود، یک چنبره توپر در فضا جاروب می‌شود. چنبره D را می‌توان به عنوان حاصلضرب قرص B و دایره C با شعاع $r > 1$ که با دوران دادن مرکز B حول L به دست آمده است در نظر گرفت. این یک پارامتربندی ساده از D را به صورت زیر ارائه می‌دهد

$$\{(\phi, w) \in C \times B : 0 \leq \phi < 2\pi, |w| \leq 1\}$$

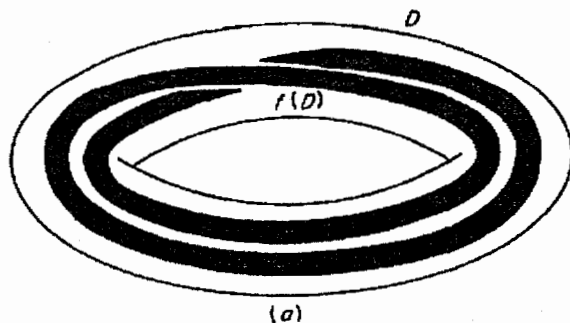
که زاویه ϕ یک نقطه روی C را مشخص می‌کند، و w بردار مکان نسبت به مرکز B می‌باشد؛ شکل ۱۳-۹ را ببینید.

$0 < \alpha < \frac{1}{4}$ را ثابت بگیرید و $f: D \rightarrow D$ را به صورت زیر تعریف کنید

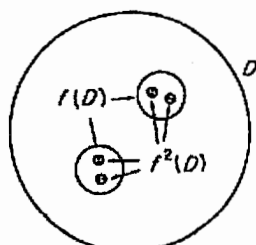
$$f(\phi, w) = (2\phi \pmod{2\pi}, \alpha w + \frac{1}{2}\hat{\phi}) \quad (13-6)$$



شکل ۹-۱۳ پارامتر بندی چنبره D



(a)



(b)

شکل ۱۰-۱۳ سیم لوله. (a) چنبره D و تصویر آن تحت f . (b) سطح مشترک مجموعه D با یک برش مسطح از میان آن، مجموعه‌ای کانتور مانند به جا می‌گذارد

که $\hat{\phi}$ بردار واحد در B با زاویه ϕ به سمت بیرون می‌باشد. در این صورت f, D را به روی یک استوانه توپر با شعاع a می‌نگارد که D را دو بار می‌پیماید. توجه کنید که (ϕ, w) و $(\phi + \pi, w)$ به نقاطی در نیم صفحه‌ای یکسان محدود به L نگاشته می‌شوند. تکرار دوم $f^2(D)$ یک استوانه با شعاع a^2 است که دو بار به دور $f(D)$ و بنابراین چهار بار به دور D می‌گردد؛ $f^3(D), D$ را هشت بار می‌پیماید، و به همین ترتیب. اشتراک $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D)$ شدیداً رشته رشته می‌باشد — یعنی به طور موضعی شبیه دسته‌ای از پاره‌خطها است که هر مقطع عرضی D را در یک مجموعه کانتور مانند قطع می‌کند. مجموعه F که سیملوله نامیده می‌شود، تحت f ناوردا می‌باشد و همه نقاط D را جذب می‌کند.

می‌توانیم بعد F را به روش‌های همیشگی بیابیم. فرض کنید P_ϕ نیم صفحه محدود به L باشد که C را در ϕ قطع می‌کند. توجه کنید که $f^k(C)$ یک منحنی بسته هموار است که چنبره را 2^k بار می‌پیماید، که طول کل آن حداکثر برابر $2^k c$ است که c مستقل از k می‌باشد ($f^k(C)$ نمی‌تواند خیلی زیاد نوسان کند — زاویه بین هر منحنی $f^k(C)$ و هر نیم صفحه P_ϕ دارای یک کران پایین مثبت است). مجموعه $f^k(D)$ "باد شده" منحنی $f^k(C)$ به یک استوانه به شعاع a^k است، بنابراین می‌توان آن را به وسیله گردایه‌ای از گوی‌ها با شعاع $2a^k$ پوشاند، که به اندازه بازه‌هایی از a^k در طول $f^k(C)$ از هم فاصله دارند. به وضوح تعداد $2 \times 2^k ca^{-k}$ از گوی‌ها برای این پوشش کفایت خواهد کرد، بنابراین طبق معمول برای $s = 1 + \log 2 / -\log a$ داریم $\dim_H F \leq \overline{\dim}_B F \leq s$ و $H^s(F) < \infty$.

برای به دست آوردن یک تقریب پایینی برای بعد، بخش‌های $F \cap P_\phi$ را به ازای هر ϕ آزمایش می‌کنیم. مجموعه $f(D) \cap P_\phi$ شامل دو قرص با شعاع a می‌باشد که در امتداد قطر مقابل یکدیگر قرار گرفته‌اند که فاصله مراکز آنها از هم در داخل $D \cap P_\phi$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد. هر یک از این قرص‌ها شامل دو قرص از $f^2(D) \cap P_\phi$ با شعاع a^2 می‌باشند که فاصله مرکز آنها از هم برابر $\frac{1}{2}a$ می‌باشد، و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. می‌توانیم یک توزیع جرم μ روی $F \cap P_\phi$ قرار دهیم به گونه‌ای که هر یک از 2^k قرص $f^k(D) \cap P_\phi$ دارای جرم 2^{-k} باشند. اگر $U \subset P_\phi$ در

$$a^k \left(\frac{1}{2} - 2a \right) \leq |U| < a^{k-1} \left(\frac{1}{2} - 2a \right)$$

صدق کند، آنگاه U حداکثر یک قرص از $f^k(D) \cap P_\phi$ را قطع می‌کند، بنابراین

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = a^{k(\log 2 / -\log a)} \leq c_1 |U|^{\log 2 / -\log a}$$

که c_1 مستقل از $|U|$ می‌باشد. از قاعده توزیع جرم ۴-۲ نتیجه می‌شود که

$$H^{\log 2 / -\log a}(F \cap P_\phi) \geq c_1^{-1}.$$

از آنجاییکه F از بخش‌های $F \cap P_\phi$ ($0 \leq \phi < 2\pi$) ساخته می‌شود، صورت‌بندی گزاره ۷-۹ برای ابعاد بالاتر می‌رساند که $H^s(F) > 0$ ، که در آن $s = 1 + \log 2 / -\log a$. نتیجه می‌گیریم که $\dim_H F = \dim_B F = s$ و اینکه $0 < H^s(F) < \infty$.

اگر در مبنای ۲، $\phi / 2\pi = 0.a_1 a_2 \dots$ ، از (۱۳-۶) نتیجه می‌شود که $f^k(\phi, w) = (\phi_k, v_k)$ که در آن $\phi_k / 2\pi = 0.a_{k+1} a_{k+2} \dots$ و عدد صحیحی که نمایش آن در مبنای ۲ به صورت $a_k a_{k-1} \dots a_{k-d+1}$ است تعیین می‌کند که کدامیک از 2^d قرص از $f^d(D) \cap P_{\phi_k}$ شامل نقطه v_k است. همانند مثال قبل، انتخاب مناسبی از ارقام a_1, a_2, \dots به نقاط آغازین (ϕ, w) منتهی می‌شود که $f^k(\phi, w)$ در F چگال است، یا به عبارتی به مدارهای متناوب منتهی می‌شود، بنابراین f روی F آشوبی است.

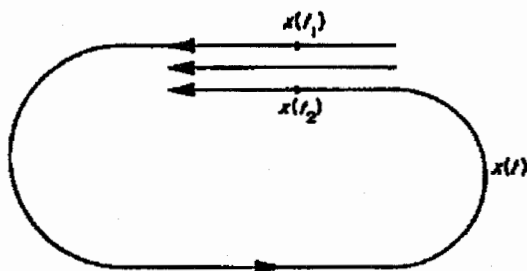
۱۳-۵ سیستم‌های دینامیکی پیوسته

یک سیستم دینامیکی گسسته را می‌توان به عنوان رابطه‌ای در نظر گرفت که در بازه‌های زمانی گسسته متوالی مقدار یک کمیت را نسبت می‌دهد. اگر اجازه دهیم که بازه زمانی به صفر میل کند، آنگاه آن رابطه به یک معادله دیفرانسیل تبدیل می‌شود. بنابراین طبیعی است که یک معادله دیفرانسیل مستقل (مستقل از زمان) را به عنوان یک سیستم دینامیکی پیوسته در نظر بگیریم.

فرض کنید D دامنه‌ای در R^n و $f : D \rightarrow R^n$ یک تابع هموار باشد. معادله دیفرانسیل

$$\dot{x}(t) = dx/dt = f(x) \quad (13-7)$$

دارای یک دسته منحنی جواب یا مسیرهایی است که D را پر می‌کنند. اگر یک نقطه اولیه $x(0)$ داده شده باشد، جواب $x(t)$ در هر زمان t روی مسیر یکتایی که از $x(0)$ می‌گذرد باقی می‌ماند؛ با دنبال کردن مسیر مورد نظر می‌توان رفتار $x(t)$ را چنانچه $t \rightarrow \pm\infty$ بررسی کرد. با شرایط منطقی حاکم بر f ، هیچ دو مسیری یکدیگر را قطع نمی‌کنند، در غیر این صورت معادلات (۱۳-۷) حرکت x را تعیین نخواهند کرد. علاوه بر آن مسیره‌ها در D به جز در نقاطی که $\dot{x}(t) = f(x) = 0$ و مسیره‌ها نقاطی تنها باشند، به طور هموار تغییر می‌کنند.



شکل ۱۳-۱۱ مسیری از یک سیستم دینامیکی پیوسته در صفحه. با این فرض که مسیرها به طور یکنواخت تغییر کنند، مسیر نشان داده شده، در هر زمان بعد از t_2 نمی تواند بیش از حد به $x(t_1)$ نزدیک شود.

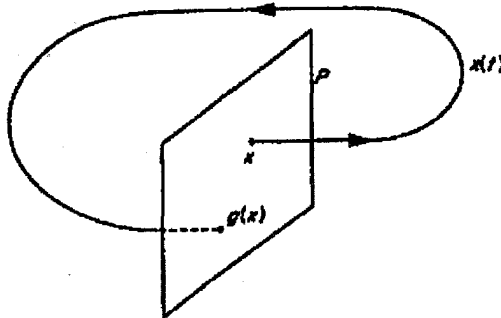
همانند حالت گسسته، سیستم‌های دینامیکی پیوسته جاذب‌ها و دافع‌ها را به وجود می‌آورند. یک زیرمجموعه بسته F از D را یک جاذب با حوضه جذب V شامل F می‌نامیم، اگر به ازای هر نقطه اولیه $x(0)$ در مجموعه باز V ، مسیر $x(t)$ از $x(0)$ هنگامی که t به بینهایت میل می‌کند به F نزدیک شود. البته فرض می‌کنیم F ناوردا باشد، به طوریکه اگر $x(0)$ نقطه‌ای از F باشد آنگاه $x(t)$ به ازای $-\infty < t < \infty$ در F قرار دارد، یعنی اینکه F اجتماعی از مسیرها است. همچنین لازم می‌دانیم که F مینیمال باشد، از آن نظر که یک نقطه $x(0)$ وجود دارد به طوریکه $x(t)$ در F چگال است.

هنگامی که D یک دامنه مسطح باشد، برد جاذب‌ها برای سیستم‌های پیوسته نسبتاً محدود است. تنها جاذب‌های ممکن، نقاط تنها (x هایی که به ازای آنها در (۷-۱۳) $f(x) = 0$) یا چرخه‌های بسته می‌باشند. جاذب‌های پیچیده‌تر روی نمی‌دهند. برای نشان دادن این، فرض کنید $x(t)$ یک مسیر چگال در یک جاذب باشد که به ازای هر t در نزدیک t_2 به مسیرش نزدیک و به ازای هر t در نزدیک t_1 از مسیرش دور می‌شود. از آنجاییکه مسیرها به طور هموار تغییر می‌کنند، جهت $x(t)$ در t_1 و t_2 تقریباً موازی است (شکل ۱۳-۱۱ را ببینید). بنابراین برای $t > t_2$ مسیر $x(t)$ جهت نزدیک شدن بیش از حد به $x(t_1)$ مسدود می‌باشد به طوریکه $x(t_1)$ نمی‌تواند در حقیقت نقطه‌ای روی یک جاذب باشد. (فرمول‌بندی دقیق این حقیقت به قضیه پوانکاره - بندیکسون معروف است.)

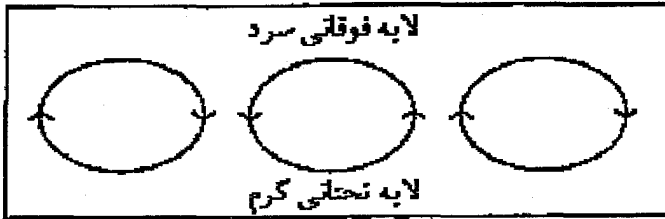
نتیجتاً، برای یافتن سیستم‌های دینامیکی با جاذب‌های فرکتالی لازم است که به سیستم‌های با بعد ۳ و بالاتر توجه کنیم. معادلات دیفرانسیل خطی (که $f(x)$ در (۷-۱۳) یک تابع خطی از x است) به روش‌های کلاسیک حل می‌شوند و جواب‌ها شامل جملات نمایی یا تناوبی می‌باشند. به هر حال، ممکن است حتی جملات غیر خطی ساده به مسیرهایی با

شکل‌هایی بسیار پیچیده منتهی شوند. بررسی معادلات دیفرانسیل غیر خطی، به ویژه در ابعاد بالاتر، بسیار مشکل است و دانش کنونی از ترکیبی از آنالیز ریاضی کیفی و مطالعات عددی ناشی می‌شود. یک روش استاندارد برای بررسی آنها این است که با در نظر گرفتن مقطع عرضی مسطح، یک سیستم سه بعدی پیوسته را به یک سیستم گسسته دو بعدی کاهش دهیم. اگر P یک ناحیه مسطح قطع کننده مسیرها باشد، می‌توانیم نگاشت "بازگشت اول" $g: P \rightarrow P$ را با گرفتن $g(x)$ به عنوان نقطه‌ای که در آن مسیر گذرنده از x بعداً P را قطع می‌کند تعریف کنیم؛ شکل ۱۳-۱۲ را ببینید. آنگاه g یک سیستم دینامیکی گسسته روی P می‌باشد. اگر g دارای یک جاذب E در P باشد نتیجه می‌شود که اجتماع مسیرهای گذرنده از نقاط E یک جاذب F برای f می‌باشد. به طور موضعی F همانند حاصلضرب E در یک پاره خط می‌باشد، و به ویژه با تغییری در نتیجه ۷-۴ داریم $\dim_H F = 1 + \dim_H E$.

شاید بهترین مثال مشهور از یک سیستم دینامیکی پیوسته با یک جاذب فرکتالی سیستم معادلات لورنز باشد. لورنز قاعده حرارتی یک لایه افقی از مایع را که از زیر حرارت داده می‌شود مورد مطالعه قرار داد: مایع گرم به بالا آمده و در یک چرخش استوانه‌ای سیر می‌کند. تحت شرایط معین این واحدها یک رشته دوران‌های استوانه‌ای موازی می‌باشند، شکل ۱۳-۱۳ را ببینید. لورنز برای توضیح رفتار یکی از این چرخش‌ها، از معادله پیوستگی و معادلات ناویر-استوکس از دینامیک سیالات با معادلات رسانش گرما استفاده کرد. یک سری از تخمین‌ها و ساده‌سازی‌ها به معادلات لورنز منتهی می‌شوند:



شکل ۱۳-۱۲ یک سیستم دینامیکی پیوسته در R^3 ، سیستم دینامیکی گسسته‌ای روی صفحه P با "نخستین بازگشت" نگاشتن g ایجاد می‌کند



شکل ۱۳-۱۳ معادلات لورنز رفتار چرخه استوانه‌ای همرفتی رسانش گرمایی سیال گران رو را توضیح می‌دهد

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

(۸-۱۳)

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

جمله x میزان دوران استوانه، و z انحراف از شیب یک دمای عمودی خطی را نمایش می‌دهند، و y برابر تفاوت دما در وجه‌های مقابل استوانه می‌باشد. ثابت σ عدد پراتل هوا می‌باشد (عدد پراتل مربوط به رسانش گرمایی و چسبندگی می‌باشد)، b مربوط به نسبت وسعت به ارتفاع لایه می‌باشد، و r یک پارامتر کنترل است که تفاوت ثابت دمای بالا و پایین سیستم را نشان می‌دهد. غیر خطی بودن معادلات دوم و سوم نتیجه غیر خطی بودن معادلات مایع می‌باشد.

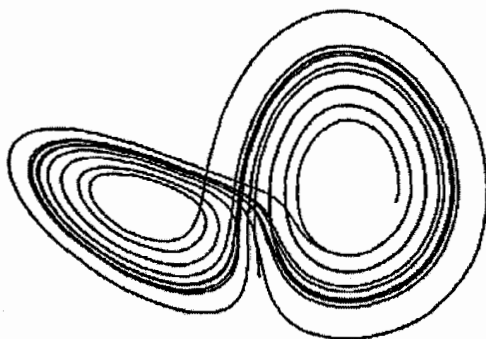
برای کار کردن در فضای (x, y, z) ، ابتدا باید توجه کرد که سیستم (۸-۱۳) حجم‌ها را به میزان ثابتی منقبض می‌کند. تفاوت‌های سرعت بین دو وجه مقابل یک جعبه مختصاتی کوچک با ضلع δ تقریباً برابر با $\delta(\partial\dot{x}/\partial x)$ ، $\delta(\partial\dot{y}/\partial y)$ ، $\delta(\partial\dot{z}/\partial z)$ می‌باشند، بنابراین میزان تغییر حجم جعبه برابر است با

$$\delta^3 ((\partial\dot{x}/\partial x) + (\partial\dot{y}/\partial y) + (\partial\dot{z}/\partial z)) = -(\sigma + b + 1)\delta^3 < 0.$$

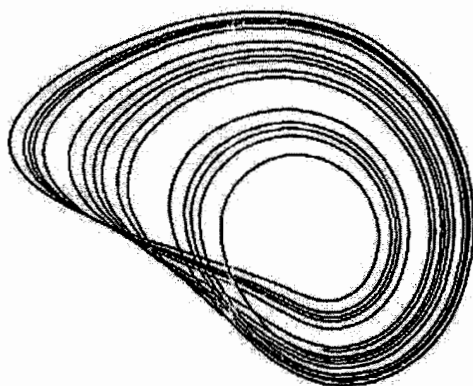
با وجود این، با $\sigma = 10$ ، $b = \frac{8}{3}$ ، $r = 28$ (مقادیری که معمولاً برای مطالعه انتخاب می‌شوند) مسیرها روی یک جاذب بسیار پیچیده متمرکز شده‌اند. این جاذب لورنز شامل دو "قرص" می‌باشد که هر دو از پیچ خوردن مسیرها به وجود آمده‌اند (شکل ۱۳-۱۴). مسیرهای معین تقریباً به طور قائم از هر یک از قرص‌ها خارج می‌شوند و در قرص دیگر گردش می‌کنند. اگر یک مسیر $x(t)$ محاسبه شود، رفتار زیر عادی است. با افزایش t ، $x(t)$ حول یکی از قرص‌ها چند بار می‌گردد و سپس روی قرص دیگر می‌پرد. پس از تعداد کمی پیچیدن حول این قرص دوم، به قرص اصلی بر می‌گردد. این روند با تعداد تصادفی معینی از مدارها قبل از ترک هر قرص، ادامه می‌یابد. حرکت آشوبی به نظر می‌رسد؛ به ویژه نقاطی که در ابتدا به هم نزدیک هستند سریعاً الگوهای کاملاً متفاوتی در دو قرص از جاذب از خود نشان می‌دهند. یک

تعبیر از وابستگی حساس به مقادیر اولیه این است که پیش‌بینی‌های بلند مدت آب و هوا غیرممکن است.

جاذب لورنز^۱ به عنوان یک فرکتال حاضر می‌شود که محاسبات عددی هنگامیکه $\sigma = 10$ ، $b = \frac{8}{3}$ ، $r = 28$ ، بعد 2.06 را برای آن ارائه می‌دهند.



شکل ۱۳-۱۴ نمایی از جاذب لورنز به ازای $\sigma = 10$ ، $b = \frac{8}{3}$ ، $r = 28$ ، به چرخش‌های حول دو قرص و "پرش‌ها" از یک قرص به قرص دیگر توجه کنید



شکل ۱۳-۱۵ نمایی از جاذب نوار راسلر به ازای $a = 0.375$ و $b = 2$ و $c = 4$ ، به نوار توجه کنید، شکل مجموعه‌ای که به طور موضعی حاصلضرب یک مجموعه کانتور و یک پاره‌خط می‌باشد به ذهن القا می‌شود

^۱ Lorenz

سیستم‌های دیگر معادلات دیفرانسیل هم دارای جاذب‌های فرکتالی هستند. معادلات

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + z(x - c)$$

توسط راسلر^۱ مطالعه شده‌اند. برای مثال، با ثابت گرفتن $b = 2$ و $c = 4$ ، طبیعت جاذب با تغییر a تغییر می‌کند. هنگامی که a کوچک است جاذب یک منحنی بسته ساده است، اما با افزایش a به یک چرخه دوتایی تجزیه می‌شود، آنگاه یک چرخه چهار تایی، و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. بنابراین نوعی از دو برابر شدن دوره روی می‌دهد، و هنگامی که a به حدود 0.375 می‌رسد، یک جاذب فرکتالی به شکل یک حلقه وجود خواهد داشت (شکل ۱۳-۱۵). در حلقه یک پیچ، نسبتاً شبیه نوار مویوس، وجود دارد.

فعالاً، هر سیستم دینامیکی پیوسته باید به طور مجزا مورد مطالعه قرار گیرد؛ نظریه جامع مختصری در دسترس می‌باشد. جاذب‌های سیستم‌های پیوسته برای مطالعات کامپیوتری مناسب هستند، و ریاضیدانان اغلب مواجه با مسأله توضیح جاذب‌های "عجیب" بوده‌اند که در کامپیوترها دیده می‌شوند.

* ۱۳-۶ نظریه مقسوم علیه کوچک^۲

تعدادی از سیستم‌های دینامیکی مهم وجود دارند که وابسته به یک پارامتر ω هستند، که این سیستم‌ها در برخی حالات پایدار هستند مشروط بر اینکه ω بیش از حد به یک عدد گویا نزدیک نباشد، به عبارت دیگر اگر ω از دیدگاه بخش 10^{-3} به خوبی قابل تخمین زدن نباشد، به وسیله قضیه 10^{-3} یارنیک، اعداد خوب - تخمین‌پذیر مجموعه‌های فرکتالی هستند، بنابراین پارامترهای پایدار در مجموعه‌هایی با متمم فرکتالی قرار می‌گیرند.

مثال ساده زیر نشان می‌دهد که چگونه پارامترهای بد - تخمین‌پذیر می‌توانند به سیستم‌های پایدار منجر شوند.

فرض کنید C استوانه نامتناهی با شعاع واحد باشد
 $\{(\theta, y) : 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < y < \infty\}$ ، $\omega \in R$ را ثابت بگیرید و یک سیستم

دینامیکی گسسته $f: C \rightarrow C$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$f(\theta, y) = (\theta + 2\pi\omega \pmod{2\pi}, y). \quad (9-13)$$

^۱ Rossler

^۲ small divisor theory

به وضوح، f دقیقاً نقاط روی استوانه را تحت زاویه $2\pi\omega$ دوران می‌دهد، و دایره‌های $y=c$ (ثابت) تحت f ناورداد هستند. طبیعی است سوال کنیم که آیا این منحنی‌های ناورداد پایدار هستند — اگر تبدیل (۹-۱۳) به مقدار ناچیزی تغییر داده شود، آیا استوانه همچنان توسط خانواده‌ای از منحنی‌های بسته ناورداد پوشیده خواهد شد (شکل ۱۳-۱۶)؟ مطلب شگفت‌انگیز این است که جواب به خصلت عدد ω بستگی دارد: اگر ω "به اندازه کافی ناگویا" باشد، آنگاه منحنی‌های ناورداد باقی می‌مانند.

تبدیل (۹-۱۳) را به صورت زیر تغییر می‌دهیم

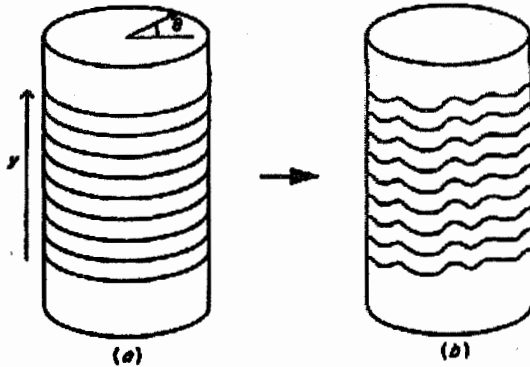
$$f(\theta, y) = (\theta + 2\pi\omega(\text{mod } 2\pi), y + g(\theta)) \quad (10-13)$$

که g یک تابع C^∞ است (یعنی دارای مشتق‌های پیوسته از هر مرتبه‌ای می‌باشد). با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء به سادگی می‌توان نشان داد که یک تابع C^∞ است اگر و فقط اگر ضریب فوریه a_k آن زودتر از هر توان k به صفر همگرا شود، یعنی اگر

$$g(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$$

سری فوریه g باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت m یک ثابت c وجود دارد به طوری‌که برای $k \neq 0$

$$|a_k| \leq c |k|^{-m}$$



شکل ۱۳-۱۶ (a) دایره‌های ناوردای نگاشت $f(\theta, y) = (\theta + 2\pi\omega(\text{mod } 2\pi), y)$ اگر ω "خیلی ناگویا" نباشد، ایجاد کمی دگرگونی در نگاشت $f(\theta, y) = (\theta + 2\pi\omega(\text{mod } 2\pi), y + g(\theta))$ دایره‌ها را به خانواده‌ای از منحنی‌های هموار پایدار تبدیل می‌کند

فرض کنید که $y(\theta)$ دارای سری فوریه زیر باشد

$$y(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\theta}$$

اگر $y(\theta)$ یک منحنی ناوردا باشد، هرگاه $(\theta, y(\theta))$ روی منحنی قرار گیرد، نقطه $(\theta + 2\pi\omega \pmod{2\pi}, y(\theta) + g(\theta))$ هم باید این چنین باشد؛ از این رو

$$y(\theta + 2\pi\omega \pmod{2\pi}) = y(\theta) + g(\theta)$$

یا

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{ik(\theta+2\pi\omega)} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$$

با برابر قرار دادن جملات در $e^{ik\theta}$ خواهیم داشت

$$b_k = \frac{a_k}{e^{2mk\omega} - 1} \quad (k \neq 0)$$

که اگر ω ناگویا باشد، b_0 دلخواه است. بنابراین منحنی‌های ناوردا به صورت زیر داده می‌شوند

$$(11-13) \quad y(\theta) = b_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{e^{2mk\omega} - 1} e^{ik\theta}$$

مشروط بر آنکه این سری فوریه به یک تابع پیوسته همگرا باشد. این هنگامی روی خواهد داد که مخرج‌های $e^{2mk\omega} - 1$ "مکرر زیاد کوچک" نباشد. فرض کنید که ω به ازای یک $\alpha > 2$ - خوب - تخمین پذیر نباشد؛ (۱۰-۴) را ببینید. آنگاه یک ثابت c_1 وجود دارد به طوری که به ازای هر $k \neq 0$

$$|e^{2mk\omega} - 1| \geq \|k\omega\| \geq c_1 |k|^{1-\alpha}$$

بنابراین به ازای هر m و یک ثابت c

$$\left| \frac{a_k}{e^{2mk\omega} - 1} \right| \leq c_1^{-1} \frac{|a_k|}{|k|^{1-\alpha}} \\ \leq cc_1^{-1} |k|^{-m-1+\alpha}$$

از این رو اگر g یک تابع C^∞ باشد و ω ، به ازای یک $\alpha > 2$ - خوب - تخمین پذیر نباشد، تابع $y(\theta)$ که به وسیله (۱۱-۱۳) داده شده است C^∞ می‌باشد، بنابراین f دارای خانواده‌ای از منحنی‌های ناوردا C^∞ است. در قضیه ۱۰-۳ دیدیم که مجموعه اعدادی که به ازای هر $\alpha > 2$ - خوب - تخمین پذیر هستند دارای بعد صفر هستند، بنابراین برای "بیشتر" ω ‌ها منحنی‌های ناوردا پایدار هستند.

مثال بالا حالت خاصی از دسته بسیار کلی‌تری از تبدیل‌های استوانه مشهور به نگاشت ماریچ می‌باشد. $f: C \rightarrow C$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$(12-13) \quad f(\theta, y) = (\theta + 2\pi\omega(y) \pmod{2\pi}, y).$$

دوباره دایره‌های $y = c$ (ثابت) ناوردا هستند، اما این بار زاویه دوران $\omega(y)$ مجاز است که با y به طور هموار تغییر کند. f را به شکل زیر تغییر می‌دهیم

$$(13-13) \quad f(\theta, y) = (\theta + 2\pi\omega(y) + \varepsilon h(\theta, y) \pmod{2\pi}, y + \varepsilon g(\theta, y))$$

که g و h توابع همواری هستند و ε کوچک می‌باشد. آیا منحنی‌های پایدار نزدیک C حفظ می‌شوند؟ قضیه ماریچ موزر^۱ که نتیجه‌ای بسیار عمیق است، تقریباً می‌گوید که دایره‌های ناوردا $y = c$ (ثابت)، که برای آنها $\omega(y) = \omega$ ، اگر ε به اندازه کافی کوچک باشد، به منحنی‌های ناوردا $y = c$ بسته مشتق‌پذیر (۱۳-۱۳) تغییر شکل خواهند داد، مشروط بر آنکه به ازای هر $k \neq 0$ و یک ثابت c_1 ، $\|k\omega\| \geq c_1 |k|^{-3/2}$. بنابراین بر اساس قضیه ۱۰-۳، مجموعه استثنایی از بسامدهای ω دارای بعد $\frac{4}{5}$ است. در حالت عادی C توسط منحنی‌های ناوردا مطابق با ω بد- تخمین‌پذیر پر می‌شود، که حرکت در آن منظم، و ناحیه‌ها در میان قسمت‌هایی که حرکت آشوبی می‌باشد قرار دارند. ناحیه‌های آشوبی با افزایش ε رشد می‌کنند.

شاید مهم‌ترین کاربرد قضیه مقسوم‌علیه کوچک، در پایداری سیستم‌های همیلتونی باشد. یک فضای ۴- بعدی را که به وسیله $(\theta_1, \theta_2, j_1, j_2)$ پارامتربندی شده است در نظر بگیرید. یک تابع همیلتونی $H(\theta_1, \theta_2, j_1, j_2)$ یک سیستم دینامیکی پایستار (حافظ حجم) مطابق با معادلات دیفرانسیل زیر تعیین می‌کند

$$\dot{\theta}_1 = \partial H / \partial j_1 \quad \dot{\theta}_2 = \partial H / \partial j_2 \quad \dot{j}_1 = -\partial H / \partial \theta_1 \quad \dot{j}_2 = -\partial H / \partial \theta_2.$$

بنابراین اگر $H(\theta_1, \theta_2, j_1, j_2) = H_0(j_1, j_2)$ مستقل از θ_1 و θ_2 باشد، جواب زیر را به دست می‌آوریم

$$\theta_1 = \omega_1 t + c_1 \quad \theta_2 = \omega_2 t + c_2 \quad j_1 = c_3 \quad j_2 = c_4$$

که ω_1 و ω_2 بسامدهای زاویه‌ای هستند (که ممکن است به j_1 و j_2 ربط داشته باشند) و c_1, \dots, c_4 ثابت هستند. یک مسیر از سیستم روی یک چنبره ۲- بعدی مشابه باقی می‌ماند، در هر زمان، (j_1, j_2) ؛ چنین چنبره‌هایی ناوردا نامیده می‌شوند.

مهم است بدانیم که آیا چنین چنبره‌های ناوردایی تحت تغییرات کوچک سیستم پایدار هستند. اگر تابع همیلتونی را با

^۱ Moser

$$H_0(j_1, j_2) + \varepsilon H_1(\theta_1, \theta_2, j_1, j_2)$$

که در آن ε عدد کوچکی است، عوض کنیم، آیا مسیرهای این سیستم جدید پس از یک انتقال مناسب دستگاه مختصات، روی چنبره‌های پایدار جدیدی که به صورت $c(j_1', j_2') = c$ (ثابت) قابل نمایش باشند قرار می‌گیرند؟ به عبارت دیگر آیا چنبره‌های پایدار سیستم اصلی اندک اندک تاب می‌خورند تا چنبره‌هایی پایدار برای سیستم جدید شوند، یا اینکه کاملاً از هم می‌پاشند؟ قضیه مشهور کولموگروف - آرنولد - موزر (KAM) به این سوال پاسخ می‌دهد - اساساً یک چنبره تحت تغییرات به اندازه کافی کوچک، پایدار است مشروط بر آنکه نسبت بسامد ω_1/ω_2 با اعداد گویا بد - تخمین پذیر باشد؛ به طور دقیق‌تر چنبره پایدار است اگر به ازای یک $c > 0$ ، برای هر دو عدد صحیح مثبت p و q داشته باشیم $|(\omega_1/\omega_2) - (p/q)| \geq c/q^{2.5}$. مجموعه اعدادی که در این شرط صدق می‌کنند بنابر قضیه ۱۰-۳ یک فرکتال با بعد $\frac{4}{5}$ می‌باشد، بنابراین، به ویژه، تقریباً همه نسبت‌های بسامد (با اندازه لبگ) دارای چنبره‌هایی هستند که تحت تغییرات به اندازه کافی کوچک، پایدار می‌باشند. (در واقع این شرط را می‌توان به صورت ضعیف‌تر $(\forall \alpha > 2)$ $|(\omega_1/\omega_2) - (p/q)| \geq c/q^\alpha$ تغییر داد.)

برخی شواهد نجومی برای نظریه مقسوم‌علیه کوچک وجود دارد. برای مثال بسامدهای زاویه‌ای ω سیارک‌ها از مقادیری که به ازای آنها نسبت ω/ω_r نزدیک به عدد گویای p/q است فاصله دارد، که در اینجا q یک عدد صحیح کوچک و ω_r بسامد زاویه‌ای سیاره مشتری و موثرترین عامل انحراف می‌باشد. با این فرض که مدارها در منظومه خورشیدی پایدار هستند (که خوشبختانه، حالت مورد نظر می‌باشد) و همچنین با فرض اینکه بتوانیم یک جفت اجرام مداری را به تنهایی در نظر بگیریم (وضعیت بیش از حد ساده شده است)، آنگاه فاصله از نسبت بسامدهای گویا توسط قضیه KAM پیش‌بینی می‌شود.

* ۱۳-۷ آنتروپی‌ها و نماهای لیاپونف

تاکنون به جاذب‌های سیستم‌های دینامیکی بیشتر از نقطه نظر هندسی نگاه کرده‌ایم. به هر حال، یک سیستم دینامیکی f ساختارهای بسیار ارزشمندتری نسبت به تنها یک حالت هندسی ارائه می‌دهد. در این بخش برخی ویژگی‌های f را مطرح می‌کنیم که اغلب پا به پای جاذب‌های فرکتالی پیش می‌روند.

مفهوم اندازه‌های پایدار در نظریه سیستم‌های دینامیکی مفهومی اساسی است. یک اندازه μ روی D به ازای یک نگاشت $f: D \rightarrow D$ پایدار است اگر به ازای هر زیرمجموعه A از D داشته باشیم

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A). \quad (۴-۱۳)$$

فرض می‌کنیم که μ نرمال‌سازی شده باشد به گونه‌ای که $\mu(D) = 1$. هر جاذب F محمل حداقل یک اندازه می‌باشد: به ازای x در حوزه جذب F و یک مجموعه بورل A ، برای نسبت تکرارها در A می‌نویسیم

$$\mu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \#\{k: 1 \leq k \leq m \text{ و } f^k(x) \in A\} \quad (۱۵-۱۳)$$

با استفاده از قضیه ارگودیک می‌توان نشان داد که این حد موجود است و به ازای μ تقریباً همه نقاط در حوزه جذب در بسیاری از حالات کلی، $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ اگر A و B مجزا باشند، و $f^k(x) \in A$ اگر و فقط اگر $f^{k-1}(x) \in f^{-1}(A)$ که (۱۴-۱۳) را ایجاب می‌کند. اندازه (۱۵-۱۳) روی مجموعه نقاطی که $f^k(x)$ بی‌نهایت بار به آنها نزدیک می‌شود متمرکز شده است، بنابراین جاذبی از f محمل μ می‌باشد. اندازه $\mu(A)$ نسبت تکرارهایی که در A قرار می‌گیرند را منعکس می‌کند، و می‌توان آن را به عنوان توزیعی که هنگام رسم تعداد زیادی از تکرارهای $f^k(x)$ روی صفحه نمایش کامپیوتر دیده می‌شوند، در نظر گرفت. تا آنجا که اندازه یک جاذب مورد نظر است، اغلب بعد مجموعه اشغال شده به وسیله اندازه ناوردای μ مربوطه در نظر گرفته می‌شود تا کل جاذب. با توجه به این مطلب، بعد هاوسدورف یک اندازه μ را که به ازای آن $\mu(D) = 1$ ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dim_H \mu = \inf\{\dim_H E : \mu(E) = 1\}. \quad (۱۶-۱۳)$$

اگر F محمل μ باشد، آنگاه به وضوح $\dim_H \mu \leq \dim_H F$ ، البته ممکن است که نامساوی، اکید باشد؛ تمرین ۱۳-۸ را ببینید. به هر حال اگر اعداد $s > 0$ و $c > 0$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر مجموعه U

$$\mu(U) \leq c |U|^s \quad (۱۷-۱۳)$$

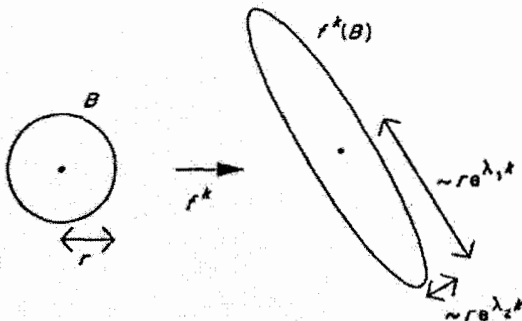
آنگاه قضیه توزیع جرم ۴-۲ ایجاب می‌کند که به ازای هر مجموعه E که $0 < \mu(E)$ داشته باشیم $H^s(E) \geq \mu(E)/c > 0$ ، بنابراین $\dim_H E \geq s$. از این رو اگر (۱۷-۱۳) برقرار باشد، آنگاه

$$\dim_H \mu \geq s. \quad (۱۸-۱۳)$$

هرگاه یک اندازه پایدار μ برای f در نظر گرفته شود چندین ثابت دینامیکی دیگر می‌توان تعریف کرد. برای راحتی فرض می‌کنیم که D یک دامنه در R^2 و $f: D \rightarrow D$ مشتق‌پذیر باشد. مشتق $(f^k)'(x)$ یک نگاشت خطی است؛ عبارات $a_k(x)$ و $b_k(x)$ را برای طول‌های اطول و اقصر نیم‌محوره‌های بیضی $(f^k)'(x)(B)$ به کار می‌بریم که B گوی واحد است. بنابراین تصویر یک گوی کوچک با شعاع r و مرکز x تحت f^k با یک بیضی با نیم‌محورهایی به طول‌های $ra_k(x)$ و $rb_k(x)$ تقریب زده می‌شود. نمای لیاپونف را به عنوان میانگین لگاریتمی میزان رشد این نیم‌محورها با افزایش k تعریف می‌کنیم:

$$(۱۳-۱۹) \quad \lambda_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log a_k(x), \quad \lambda_2(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log b_k(x)$$

تکنیک‌های نظریه ارگودیک نشان می‌دهند که اگر μ به ازای f پایدار باشد، این نماها موجود و به ازای μ - تقریباً هر x دارای مقدار یکسان λ_1 ، λ_2 می‌باشند. بنابراین در یک سیستم با یک اندازه پایدار، λ_1 و λ_2 را به عنوان نماهای لیاپونف سیستم در نظر می‌گیریم. نماهای لیاپونف نرخ "میانگین" گسترش f را نشان می‌دهند. اگر B یک قرص با شعاع کوچک r باشد، آنگاه $f^k(B)$ نوعاً نزدیک به یک بیضی با نیم‌محورهایی به طول $re^{\lambda_1 k}$ و $re^{\lambda_2 k}$ می‌باشد؛ شکل ۱۳-۱۷ را ببینید.



شکل ۱۳-۱۷ تعریف نماهای لیاپونف λ_1 و λ_2

یک ایده دینامیکی مرتبط آنتروپی یک نگاشت $f: D \rightarrow D$ می‌باشد. مجموعه

$$(۲۰-۱۳) \quad V(x, \varepsilon, k) = \{y \in D : |f^i(x) - f^i(y)| < \varepsilon, 0 \leq i \leq k\}$$

را برای مجموعه نقاطی که k تکرار اول آنها در فاصله حداکثر ε از آن x هاست می‌نویسیم. اگر μ یک اندازه پایدار برای f باشد، μ -آنتروپی f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(۲۱-۱۳) \quad h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{k} \log \mu(V(x, \varepsilon, k)) \right).$$

تحت شرایط مناسب، این حد موجود است و به ازای μ -تقریباً هر x دارای مقداری ثابت است. آنتروپی $h_\mu(f)$ میزانی را که در آن نقاط نزدیک به هم تحت تکرار توسط f از هم پراکنده می‌شوند یا به عبارت دیگر، مقدار اطلاعات اضافی در مورد یک مدار $\{f^k(x)\}_{k=1}^\infty$ که از راه دانستن موقعیت یک نقطه اضافی به دست آمده‌اند را منعکس می‌کند.

تبدیل خباز (۴-۱۳) توضیحی ساده در مورد این ایده فراهم می‌کند. یک توزیع جرم پایدار معمولی روی جاذب F وجود دارد به طوری که هر یک از 2^k نوار E_k دارای جرم 2^{-k} می‌باشد که این جرم به طور یکنواخت در پهنای E پخش شده است. همانند مثال ۴-۳ نتیجه می‌گیریم که $\mu(U) \leq c |U|^s$ که در آن $s = 1 + \log 2 / (-\log \lambda)$ ، پس بنابر (۱۷-۱۳) و (۱۳-۱) $s \leq \dim_H \mu \leq \dim_H F = s$.

همچنین نماهای لیاپونف به سادگی محاسبه می‌شوند. مشتق (۴-۱۳) برابر است با

$$(f^k)'(x, y) = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix} \quad f'(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{پس } (x \neq \frac{1}{2} \text{ مشروط بر اینکه } x \neq \frac{1}{2})$$

جز جایی که به ازای اعداد صحیح و مثبت p و k $(x = p/2^k)$ ، از این رو $\alpha_k(x, y) = 2^k$ و $\lambda_1(x, y) = \log 2$ ، بنابر (۱۹-۱۳) به ازای μ -تقریباً هر (x, y) ،

$$\lambda_2(x, y) = \log \lambda \quad \text{و نماهای لیاپونف سیستم عبارتند از } \lambda_1 = \log 2 \quad \text{و } \lambda_2 = \log \lambda.$$

از آنجاکه f^k با عامل 2^k به طور افقی کشیده می‌شود و با عامل λ^k از جهت عمودی منقبض می‌شود، با استفاده از (۲۰-۱۳) و نادیده گرفتن اثر "برشی" f نتیجه می‌گیریم که $V((x, y), \varepsilon, k)$ تقریباً یک مستطیل با اضلاع $2^{-k} \varepsilon$ و $2^{-k} \varepsilon$ می‌باشد که اگر $(x, y) \in F$ ، به طور تقریبی دارای μ -اندازه $2^{-k} \varepsilon^s$ می‌باشد. بنابراین

$$h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{k} \log(\varepsilon^s 2^{-k}) \right) = \log 2.$$

ابعاد جعبه و هاوسدورف، نماهای لیاپونف و آنتروپی‌های یک اندازه پایدار یک سیستم دینامیکی داده شده را می‌توان از طریق محاسباتی یا آزمایشی تخمین زد و اغلب هنگام مقایسه

سیستم‌های مختلف مفید واقع می‌شوند. به هر حال رفتار طبیعی این کمیت‌ها حاکی از این است که آنها می‌توانند کاملاً از هم مستقل نباشند. یک رابطه که دقیقاً استنباط شده است در یک تبدیل دوسویی هموار f روی یک رویه 2 بعدی به کار برده می‌شود. اگر μ یک اندازه پایدار برای f با نماهای لیاپونف $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ باشد آنگاه

$$\dim_H \mu = h_\mu(f) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right). \quad (13-22)$$

به سادگی دیده می‌شود که نمایی که برای تبدیل خیز محاسبه شد در این فرمول صدق می‌کنند.

حدس زیر به خاطر صدق کردن در بسیاری از حالات معروف می‌باشد؛ اگر f یک تبدیل مسطح با جاذب F و نماهای لیاپونف $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ باشد، آنگاه

$$\dim_B F \leq 1 - (\lambda_1 / \lambda_2). \quad (13-)$$

(۲۳)

توجیه این مطلب به این صورت است: فرض کنید $N_\delta(F)$ تعداد حداقل قرص‌های با شعاع δ باشد که می‌تواند F را بپوشاند. اگر مجموعه $\{U_i\}$ شامل $N_\delta(F)$ از چنین قرص‌هایی باشد، آنگاه $f^k(F)$ توسط $N_\delta(F)$ مجموعه $f^k(U_i)$ پوشیده می‌شود که تقریباً بیضی شکل با نیم محورهای به طول $\delta \exp(\lambda_1 k)$ و $\delta \exp(\lambda_2 k)$ می‌باشند. این بیضی‌ها را می‌توان تقریباً توسط $\exp((\lambda_1 - \lambda_2)k)$ قرص با شعاع $\delta \exp(\lambda_2 k)$ پوشاند. از این رو

$$N_{\delta \exp(\lambda_2 k)}(F) \leq \exp((\lambda_1 - \lambda_2)k) N_\delta(F)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\log N_{\delta \exp(\lambda_2 k)}(F)}{-\log(\delta \exp(\lambda_2 k))} &\leq \frac{\log(\exp((\lambda_1 - \lambda_2)k) N_\delta(F))}{-\log(\delta \exp(\lambda_2 k))} \\ &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)k + \log N_\delta(F)}{-\lambda_2 k - \log \delta}. \end{aligned}$$

حال اگر $k \rightarrow \infty$ نتیجه می‌شود که $\dim_B F \leq 1 - (\lambda_1 / \lambda_2)$. اشکال اینجاست که فرض می‌کنیم نماهای لیاپونف در سراسر دامنه D ثابت هستند، در حالیکه لزومی ندارد چنین باشد. رابطه بین اینها و پارامترهای دینامیکی دیگر هنوز به طور کامل استنتاج نشده است. به هر حال، واضح است که چنین مفاهیمی ارتباط تنگاتنگی با ویژگی‌های آشوبی f و طبیعت فرکتالی جاذب‌ها دارد.

اخیراً، نظریه اندازه‌های چند - فرکتالی همانند اندازه‌های پایدار سیستم‌های دینامیکی برای تجزیه و تحلیل ارائه شده اند. این مطلب در فصل ۱۷ مورد بحث قرار می‌گیرد.

۱۳-۸ نکات و منابع

مطالب چاپ شده در زمینه سیستم‌های دینامیکی بسیار زیاد می‌باشند و به سرعت در حال رشد می‌باشند. برای مثال کتاب‌های *Guckenheimer* و *Holmes* (۱۹۸۳)، *Berge* و *Pomeau* (۱۹۸۴)، *Vidal* (۱۹۸۴)، *Schuster* (۱۹۸۴)، *Devaney* (۱۹۸۶) و *Thompson* و *Stewart* (۱۹۸۶) توضیحاتی پایه‌ای از دیدگاه‌های مختلف فراهم کرده‌اند؛ کتاب *Ruelle* (۱۹۸۰) را هم ببینید. مجموعه آثاری که توسط *Cvitanovic* (۱۹۸۴) و *Fischer* و *Smith* (۱۹۸۵)، *Holden* (۱۹۸۶)، *Barnsley* و *Demko* (۱۹۸۶) و *Bedford* و *Swift* (۱۹۸۸) تدوین شده‌اند، چندین گونه مرتبط با این مطالب را مورد تاکید قرار داده‌اند. بعد جاذب‌ها توسط *Ott* و *Farmer* (۱۹۸۳) مورد بررسی قرار گرفته‌اند. توضیحات در مورد نگاشت منطقی در کتاب‌های *May* (۱۹۷۶) و *Devaney* (۱۹۸۶) آمده است. جاذب نعل اسب در کتاب مقدماتی *Smale* (۱۹۶۷)، و جاذب هِنون در کتاب *Henon* و *Pomeau* (۱۹۷۶) آورده شده است.

کتاب *Sparrow* (۱۹۸۲) شامل توضیحات کاملی در مورد معادلات لورنز می‌باشد، و آثار *Holden* و *Muhamad* (۱۹۸۶) دارای تصاویری از جاذب‌های چندین گونه از سیستم‌های دینامیکی پیوسته می‌باشد.

نظریه اصلی و کاربردهای نظریه مقسوم علیه کوچک، با هم، در آثار جمع آوری شده در زمینه سیستم‌های دینامیکی همیلتونی که توسط *MacKay* و *Meiss* (۱۹۸۷) تدوین شده‌اند، آورده شده است. برای مطالعه نتایج ارتباط نماهای لیاپونف به بعدها اثر *Young* (۱۹۸۲) و *Kaplan*، *Frederickson* و *Yorke* (۱۹۸۳) و آنچه در کتاب *Mayer Kress* (۱۹۸۶) آمده را مطالعه کنید.

تمرین‌ها

۱-۱۳ یک مجموعه فرکتالی پایای F برای نگاشت "خیمه - مانند" $f: R \rightarrow R$ که به صورت $f(x) = 2(1 - |2x - 1|)$ داده شده است بیابید. نشان دهید که F یک دافع برای f است و f روی F آشوبی می‌باشد.

۲-۱۳ تکرارهای $f_\lambda^k(x)$ از x در بازه $[0,1]$ را تحت نگاهت لژستیک $(2-13)$ به ازای مقادیر مختلف λ و نقاط ابتدایی گوناگون x بررسی کنید. نشان دهید که اگر دنباله تکرارها همگرا باشد، آنگاه این دنباله یا به 0 میل می‌کند یا به $1-\frac{1}{\lambda}$. نشان دهید که اگر $\lambda = \frac{1}{2}$ ، آنگاه به ازای هر x در $(0,1)$ ، تکرارها به صفر میل می‌کند، اما اگر $\lambda = 2$ به $\frac{1}{2}$ میل می‌کنند. نشان دهید که اگر $\lambda = 4$ ، آنگاه تعداد نامتناهی مقدار x در $(0,1)$ وجود دارد به طوری که $f_\lambda^k(x)$ به 0 میل می‌کند، تعداد نامتناهی x در $(0,1)$ وجود دارد که به ازای آنها $f_\lambda^k(x)$ به $\frac{3}{4}$ میل می‌کند، و تعداد نامتناهی x در $(0,1)$ وجود دارد که به ازای آنها $f_\lambda^k(x)$ همگرا نیست. با استفاده از یک ماشین حساب قابل برنامه‌ریزی یا یک کامپیوتر، رفتار مدارها را به ازای مقادیر دیگر از λ بررسی کنید. تبدیلات دیگر را که در انتهای بخش ۲-۱۳ لیست شده‌اند به روشی مشابه بررسی کنید.

۳-۱۳ در حالت‌های $\lambda = 2$ و $\lambda = 4$ به سادگی می‌توان فرمول ساده‌ای برای تکرارهای نگاهت منطقی f_λ روی $[0,1]$ به دست آورد. برای مقدار داده شده $x = x_0$ می‌نویسیم: $x_k = f_\lambda^k(x)$.

(i) نشان دهید که اگر $\lambda = 2$ و a به گونه‌ای انتخاب شده باشد که $x_k = \frac{1}{2}(\exp(2^k a) - 1)$ ، آنگاه تکرارها به صورت $x_k = \frac{1}{2}(\exp(2^k a) - 1)$ داده می‌شوند.

(ii) نشان دهید که اگر $\lambda = 4$ و $0 \leq a < 1$ به گونه‌ای انتخاب شده باشد که $x = \sin^2(\pi a)$ ، آنگاه $x_k = \sin^2(2^k \pi a)$ با نوشتن $a = 0.a_1 a_2 \dots$ در شکل دودویی، نشان دهید که f_4 به ازای هر عدد صحیح مثبت p دارای یک مدار ناپایدار با دوره p می‌باشد و همچنین دارای یک مدار چگال می‌باشد.

۴-۱۳ تبدیل تعدیل شده خباز $f: E \rightarrow E$ را که در آن، E مربع واحد می‌باشد، به صورت زیر در نظر بگیرید

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, \lambda y) & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ (2x-1, \mu y + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases}$$

که در آن $\lambda > 0$ و $\mu < \frac{1}{2}$. نشان دهید که یک مجموعه F وجود دارد که همه نقاط E را جذب می‌کند، و بعد هاوسدورف F را بیاورد.

۵-۱۳ نگاهت هنون $(5-13)$ را با $a = 1.4$ و $b = 0.3$ در نظر بگیرید. نشان دهید که چهار ضلعی D با رئوس $(1.32, 0.133)$ ، $(-1.33, 0.42)$ ، $(-1.06, -0.5)$ و

(1.245, -0.14) تحت f به خودش نگاشته می‌شود. از یک کامپیوتر برای رسم تکرارهای یک نقطه نوعی موجود در D استفاده کنید.

۶-۱۳ با توجه به نشانه‌گذاری‌های بخش ۴-۱۳، تبدیل f از چنبره توپر D که به صورت زیر داده شده است را در نظر بگیرید

$$f(\phi, w) = (3\phi \pmod{2\pi}, aw + \frac{1}{2}\hat{\phi})$$

که در آن $0 < a < \frac{1}{10}$. نشان دهید که f دارای یک جاذب F با بعد جعبه و هاوسدورف مساوی با $1 + \log 3 / -\log a$ می‌باشد، و تحقیق کنید که f بر F آشوبناک می‌باشد.

۷-۱۳ فرض کنید $g: R \rightarrow R$ دیفرانسیل پذیر باشد، و $h: R^2 \rightarrow R^2$ به صورت زیر داده شده باشد

$$h(t, x) = (\lambda t, \lambda^{2-s}(x - g(t)))$$

که در آن $\lambda > 1$ و $0 < s < 2$. نشان دهید که نمودار f دفاعی برای h است، که f تابع زیر می‌باشد:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} g(\lambda^k t).$$

از این رو، توابع از نوع وایرستراس ((۷-۱۱) را ببینید) می‌توانند به عنوان مجموعه‌های پایا در سیستم‌های دینامیکی واقع شوند.

۸-۱۳ مثالی از توزیع جرم μ روی $[0, 1]$ بیاورید که برای آن $\dim_H \mu < \dim_H F$ که در آن F محل μ می‌باشد. (توجه: بخش ۱-۱۰ را ببینید.)

۹-۱۳ نگاشت $f: E \rightarrow E$ را، که در آن E مربع واحد می‌باشد، به صورت زیر در نظر بگیرید

$$f(x, y) = (x + y \pmod{1}, x + 2y \pmod{1}).$$

(این نگاشت به نگاشت گربه آرنولد مشهور شده است.) نشان دهید که اندازه لبگ مسطح برای f پایا می‌باشد (یعنی، f حافظ مساحت است)، و نماهای لیاپونف f را بیابید.

۱۰-۱۳ یک برنامه کامپیوتری بنویسید که مدارهای یک نقطه x تحت تکرار یک نگاشت از یک ناحیه در صفحه را، رسم کند. از این برنامه برای بررسی جاذب‌های نگاشت خباز و نگاشت هنون استفاده کنید و آن را با توابع دیگر آزمایش کنید.

۱۱-۱۳ یک برنامه کامپیوتری بنویسید که مسیرهای معادلات لورنز (۸-۱۳) را رسم کند. ببینید که با تغییر σ ، r و b مسیرها چگونه تغییر می‌کنند. بررسی‌های مشابهی برای معادلات روسلر به کار برید.

فصل ۱۴ تکرار توابع مختلط - مجموعه‌های ژولیا

مجموعه‌های ژولیا^۱ مثال‌های قابل توجهی هستند که نشان می‌دهند چگونه یک روند به ظاهر ساده می‌تواند به یک مجموعه بسیار پیچیده منجر شود. توابع روی صفحه مختلط C به سادگی $f(z) = z^2 + c$ ، که c یک ثابت است، می‌توانند فرکتال‌هایی با ظاهری عجیب به وجود آورند - شکل ۱۴-۷ را ببینید.

مجموعه‌های ژولیا از طریق تکرار یک تابع f با متغیر مختلط ناشی می‌شوند، بنابراین با سیستم‌های دینامیکی که در فصل قبل بررسی شدند مرتبط می‌باشند - در حالت کلی مجموعه ژولیا یک دافع دینامیکی می‌باشد. اما به ویژه اگر توابعی را که بر صفحه مختلط تحلیلی هستند را در نظر بگیریم می‌توانیم از تکنیک‌های قدرتمند نظریه متغیرهای مختلط برای به دست آوردن اطلاعات مفصل‌تری درباره ساختار چنین مجموعه‌های دافعی استفاده کنیم.

۱۴-۱ نظریه کلی مجموعه‌های ژولیا

برای راحتی در بیان، گیریم $f: C \rightarrow C$ یک چند جمله‌ای از درجه $n \geq 2$ و با ضرایب مختلط باشد، $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$. تاکید می‌کنیم که با کمی تعدیل حتی اگر

^۱ Julia

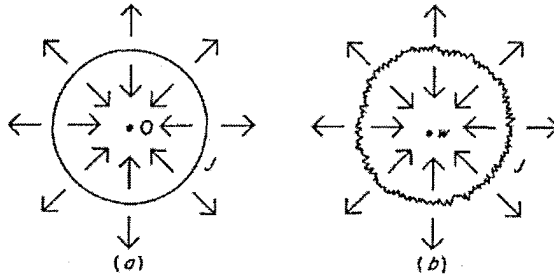
f یک تابع کسری در صفحه مختلط توسعه یافته $C \cup \{\infty\}$ باشد (به صورت $f(z) = p(z)/q(z)$ که p و q چند جمله‌ای هستند، و یا اگر f یک تابع مرومورفیک باشد (یعنی تابعی که روی $C \cup \{\infty\}$ به جز در تعدادی متناهی از قطب‌ها تحلیلی باشد) این نظریه همچنان برقرار خواهد بود.

طبق معمول نماد f^k را برای ترکیب k تایی $f \circ \dots \circ f$ از تابع f به کار می‌بریم، به طوریکه $f^k(w)$ ، k امین تکرار w می‌باشد. همچون گذشته اگر $f(w) = w$ آنگاه w را نقطه ثابت می‌نامیم، و اگر به ازای یک عدد صحیح $p \geq 1$ ، $f^p(w) = w$ ، آنگاه w را یک نقطه تناوبی f می‌نامیم، کوچک‌ترین p ای که $f^p(w) = w$ ، دوره w نامیده می‌شود. نقاط $w, f(w), \dots, f^p(w)$ را یک مدار با دوره p می‌نامیم. فرض کنید w یک نقطه تناوبی با دوره p باشد به طوریکه $(f^p)'(w) = \lambda$ ، که در آن علامت پریم نشان‌دهنده مشتق‌گیری مختلط می‌باشد. w را به نام‌های زیر می‌شناسیم

- $\lambda = 0$ ابرجاذب هرگاه
- $0 \leq |\lambda| < 1$ جاذب هرگاه
- $|\lambda| = 1$ بی‌تفاوت هرگاه
- $|\lambda| > 1$ دافع هرگاه

مجموعه ژولیای $J(f)$ از تابع f را می‌توان بستار مجموعه نقاط تناوبی دافعی تابع f تعریف کرد. (هنگامی که تابع f معلوم باشد به جای $J(f)$ فقط می‌نویسیم J). متمم مجموعه ژولیا مجموعه فاتو یا مجموعه پایدار $F(f)$ نامیده می‌شود. این فصل به بررسی هندسه و طبیعت فرکتالی مجموعه‌های ژولیا برای توابع چندجمله‌ای می‌پردازد. نشان می‌دهیم که $J(f)$ تحت f از پس و پیش پایدار است، یعنی $J = f(J) = f^{-1}(J)$ ، و ناتهی و فشرده است. به علاوه f روی J "آشوبناک" رفتار می‌کند، و J معمولاً یک فرکتال است.

به عنوان ساده‌ترین مثال فرض کنید $f(z) = z^2$ ، بنابراین $f^k(z) = z^{2^k}$. نقاطی که در $f^p(z) = z$ صدق می‌کنند عبارتند از $\{ \exp(2\pi i q / (2^p - 1)) : 0 \leq q < 2^p - 2 \}$ ، که مسلماً دافعی هستند، چرا که در چنین نقاطی $|(f^p)'(z)| = 2$. بنابراین مجموعه ژولیای $J(f)$ دایره واحد $|z| = 1$ می‌باشد. به وضوح $J = f(J) = f^{-1}(J)$ که هنگامیکه $k \rightarrow \infty$ ، $f^k(z) \rightarrow 0$ برای $|z| < 1$ و $f^k(z) \rightarrow \infty$ برای $|z| > 1$ ، و اما وقتی که $|z| = 1$ ، $f^k(z)$ به ازای هر k روی J باقی می‌ماند. مجموعه ژولیای J مرز بین دو مجموعه از نقاط است که تکرار آنها به طرف 0 یا ∞ می‌رود. البته، در این حالت خاص، J فرکتال نیست.



شکل ۱-۱۴ (a) مجموعه ژولیا تابع $f(z) = z^2$ برابر دایره $|z|=1$ می باشد، با تکرارها، $f^k(z) \rightarrow 0$ اگر z درون J باشد، و $|f^k(z)| \rightarrow \infty$ اگر z خارج از J باشد. (b) اگر f را به تابع $f(z) = z^2 + c$ ، که در آن c عدد کوچکی هست، تغییر دهیم، این شکل کمی تغییر می کند و به منحنی دیگر J تبدیل می شود که آن نقاطی از z را که به ازای آنها $f^k(z)$ به نقطه ثابت w از f نزدیک صفر همگرا می شوند را از آن نقاطی از z که به ازای آنها $|f^k(z)| \rightarrow \infty$ جدا می کند. منحنی J اکنون یک فرکتال است.

این مثال را به صورت زیر کمی تغییر می دهیم. گیریم $f(z) = z^2 + c$ که در آن c یک عدد مختلط کوچک است. به سادگی می توان دید که همچنان $f^k(z) \rightarrow w$ ، اگر z کوچک باشد، که در آن w نقطه ثابت f و نزدیک به صفر می باشد، و همچنین $f^k(z) \rightarrow \infty$ اگر z بزرگ باشد. بار دیگر، مجموعه ژولیا مرز بین این دو نوع رفتار می باشد اما اکنون J یک منحنی فرکتالی است، شکل ۱-۱۴ را ببینید.

برای به دست آوردن ویژگی های ابتدایی مجموعه های ژولیا، داشتن اطلاعاتی از خانواده های نرمال توابع تحلیلی و قضیه مانتل اجتناب ناپذیر است.

* (خوانندگان مایل به حذف این قسمت که کاملاً تکنیکی و شامل نظریه متغیرهای مختلط است، می توانند به خلاصه ۱۴-۱۲ بروند.)

فرض کنید U یک مجموعه باز در C باشد، و فرض کنید $g_k: U \rightarrow C$ خانواده ای از توابع مختلط تحلیلی (یعنی توابع مشتق پذیر روی U در شکل مختلط) باشد. خانواده $\{g_k\}$ نرمال روی U نامیده می شود اگر هر دنباله از توابع که از $\{g_k\}$ انتخاب شده باشند شامل زیردنباله ای باشد که به طور یکنواخت روی هر زیرمجموعه فشرده از U یا به یک تابع تحلیلی کراندار یا به ∞ همگرا باشد. توجه کنید که بنابر نظریه متغیرهای مختلط این بدان معنی است که زیردنباله روی هر مولفه همبند از U یا به یک تابع تحلیلی متناهی یا به ∞ همگرا می باشد. در حالت اول مشتق های زیردنباله باید به مشتق تابع حدی همگرا باشند. خانواده

$\{g_k\}$ در نقطه w از U نرمال است اگر یک زیرمجموعه باز V از U شامل w وجود داشته باشد به طوری که $\{g_k\}$ یک خانواده نرمال روی V باشد. دقت کنید که این معادل با این است که یک همسایگی V از w وجود داشته باشد به طوری که هر دنباله از $\{g_k\}$ روی آن دارای یک زیردنباله به طور یکنواخت همگرا به یک تابع تحلیلی کراندار یا به ∞ باشد. نتیجه اساسی که نظریه مجموعه‌های ژولیا متکی به آن می‌باشد از قضیه مانتل نتیجه می‌شود. این قضیه ژرف ادعا می‌کند که خانواده‌های غیر نرمال از توابع، همه مقادیر (جز احتمالاً یک مقدار) نزدیک به هر نقطه مختلط را می‌گیرد.

قضیه مانتل ۱۴-۱

فرض کنید $\{g_k\}$ خانواده‌ای از توابع مختلط تحلیلی روی یک دامنه باز U باشد. اگر $\{g_k\}$ یک خانواده نرمال نباشد، آنگاه به ازای هر $w \in C$ به استثنای حداکثر یک نقطه داریم $g_k(z) = w$ برای یک $z \in U$ و یک k .

برهان را می‌توانید در کتاب‌های توابع مختلط جستجو کنید. \square

نرمال بودن تکرارهای یک چندجمله‌ای مختلط f را آزمایش می‌کنیم. تعریف می‌کنیم

$$J_0(f) = \{z \in C : \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ در } z \text{ نرمال نباشد}\} \quad (1-14)$$

با استفاده از قضیه مانتل، نشان خواهیم داد که $J_0(f)$ همان بستار مجموعه نقاط متناوب دافعی، $J(f)$ ، می‌باشد. در حقیقت (۱-۱۴) اغلب به عنوان تعریف مجموعه ژولیا در نظر گرفته می‌شود. هر چند تعریف ما از $J(f)$ شهودی‌تر است، اما کار کردن با $J_0(f)$ نسبتاً ساده‌تر است، چراکه روش‌های متغیرهای مختلط کارا تر هستند. برخی ویژگی‌های ابتدایی $J_0(f)$ را با این هدف که نشان دهیم $J(f) = J_0(f)$ ، به دست می‌آوریم. توجه کنید که متمم:

$$\begin{aligned} F_0(f) &\equiv C \setminus J_0(f) \\ &= \{z \in C : \text{یک مجموعه باز } V \text{ وجود داشته باشد که } z \in V \text{ و } \{f^k\} \text{ روی } V \text{ نرمال باشد}\} \end{aligned} \quad (2-14)$$

به روشنی یک مجموعه باز است.

گزاره ۱۴-۲

اگر f یک چند جمله‌ای باشد، آنگاه $J_0(f)$ فشرده است.

برهان. با توجه به مطلب فوق متمم $J_0(f)$ باز است، بنابراین خود بسته است. از آنجایی که f یک چندجمله‌ای با درجه حداقل ۲ می‌باشد، می‌توانیم r را به گونه‌ای بیابیم که $|f(z)| \geq 2|z|$ برای $|z| \geq r$ ، که این مطلب را هم می‌رساند که برای $|z| > r$ ، $|f^k(z)| > 2^k r$. بنابراین $f^k(z) \rightarrow \infty$ به طور یکنواخت روی مجموعه باز $V = \{z : |z| > r\}$. بنابر تعریف، $\{f^k\}$ روی V نرمال است، بنابراین $V \subset C \setminus J_0(f)$. پس $J_0(f)$ کراندار و در نتیجه فشرده است. \square

(توجه کنید که اگر $f : C \cup \{\infty\} \rightarrow C \cup \{\infty\}$ یک تابع کسری باشد آنگاه J_0 باید بسته باشد، اما لازم نیست که کراندار باشد. در واقع، J_0 می‌تواند تمام صفحه مختلط باشد؛ برای مثال، اگر $f(z) = ((z-2)/z)^2$ ،

گزاره ۳-۱۴

$J_0(f)$ ناتهی است.

برهان. فرض کنید $J_0(f) = \emptyset$. آنگاه به ازای هر $r > 0$ ، خانواده $\{f^k\}$ روی قرص باز $B_r^0(0)$ با مرکزیت مبدا و شعاع r ، نرمال است (از آنجاکه قرص بسته $B_r(0)$ فشرده است، می‌توان آن را توسط تعداد متناهی از مجموعه‌های باز که f^k روی آنها نرمال است، پوشاند). چون f یک چند جمله‌ای می‌باشد، انتخاب r به اندازه کافی بزرگ تضمین می‌کند که $B_r^0(0)$ شامل یک نقطه z است که برای آن $|f^k(z)| \rightarrow \infty$ و همچنین شامل یک نقطه ثابت w از f است که به ازای هر k ، $f^k(w) = w$. بنابراین امکان ندارد که زیردنباله‌ای از $\{f^k\}$ روی زیرمجموعه فشرده‌ای از $B_r^0(0)$ که شامل w باشد، به طور یکنواخت به یک تابع کراندار یا به بینهایت همگرا باشد، که این با نرمال بودن $\{f^k\}$ در تناقض است. \square

گزاره ۴-۱۴

$J_0(f)$ از پیش و پس پایدار است؛ یعنی $J_0 = f(J_0) = f^{-1}(J_0)$.

برهان. به طور معادل نشان می‌دهیم که متمم آن یعنی $F_0(f)$ پایدار است. فرض کنید V یک مجموعه باز و $\{f^k\}$ روی V نرمال باشد. از آنجایی که f پیوسته است، $f^{-1}(V)$ باز است. فرض کنید $\{f^{k_i}\}$ یک زیردنباله از $\{f^k\}$ باشد. آنگاه $\{f^{k_i+1}\}$ دارای یک زیردنباله $\{f^{k'_i+1}\}$ می‌باشد که روی زیرمجموعه‌های فشرده از V به طور یکنواخت همگرا می‌باشد. بنابراین اگر D زیرمجموعه‌ای فشرده از $f^{-1}(V)$ باشد، آنگاه $\{f^{k'_i+1}\}$ روی مجموعه فشرده

$f(D)$ به طور یکنواخت همگرا می‌باشد، در نتیجه $\{f^{k_i}\}$ روی D به طور یکنواخت همگرا می‌باشد. از این رو $\{f^k\}$ روی $f^{-1}(V)$ نرمال می‌باشد، پس $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$. شمول‌های مورد نیاز دیگر را می‌توان به روشی مشابه به دست آورد، با استفاده از این مطلب که یک چندجمله‌ای $f: C \rightarrow C$ یک نگاشت باز است، یعنی $f(V)$ باز است هرگاه V باز باشد. \square

گزاره ۱۴-۵

به ازای هر عدد صحیح مثبت p ، $J_0(f^p) = J_0(f)$

برهان. بار دیگر با F_0 کار می‌کنیم. به وضوح، اگر هر زیردنباله از $\{f^k\}$ دارای زیردنباله‌ای یکنواخت همگرا روی یک مجموعه داده شده باشد، $\{f^{p_k}\}_{k \geq 1}$ نیز به همین صورت خواهد بود. بنابراین $F_0(f) \supset F_0(f^p)$.

اگر D فشرده و $\{g_k\}$ خانواده‌ای از توابع باشد که روی D به طور یکنواخت یا به یک تابع کراندار یا به ∞ همگرا است، آنگاه این مطلب برای $\{h \circ g_k\}$ به ازای هر چندجمله‌ای h نیز درست است. بنابراین اگر $\{f^{p_k}\}_{k \geq 1}$ روی یک مجموعه باز V نرمال باشد، $\{f^{p_k+r}\}_{k \geq 1}$ نیز به ازای $r = 0, 1, \dots, p-1$ همین طور است. اما هر زیردنباله از $\{f^k\}_{k \geq 1}$ به ازای یک عدد صحیح r که $0 \leq r \leq p-1$ ، شامل تعدادی متناهی از زیردنباله‌های $\{f^{p_k+r}\}_{k \geq 1}$ می‌باشد، که دارای زیردنباله‌ای به طور یکنواخت همگرا روی زیرمجموعه‌های فشرده از V می‌باشد. از این رو $\{f^k\}$ نرمال است، بنابراین $F_0(f) \supset F_0(f^p)$. \square

نتیجه بعدی این مطلب را می‌رساند که f "مخلوط" می‌کند؛ یعنی همسایگی نقاط متعلق به J_0 با تکرار f در پهنای صفحه مختلط کاملاً پراکنده می‌شوند.

لم ۱۴-۶

فرض کنید f یک چندجمله‌ای، $w \in J_0(f)$ و U یک همسایگی از w باشد. آنگاه $W \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ تمام صفحه مختلط C می‌باشد، به استثنای احتمالاً یک نقطه. این نقطه استثنایی در $J_0(f)$ نمی‌باشد، و مستقل از انتخاب w و U می‌باشد.

برهان. بنابر تعریف J_0 ، خانواده $\{f^k\}$ در w نرمال نیست، بنابراین قسمت اول قضیه نتیجه فوری قضیه مانتل ۱۴-۱ است.

فرض کنید $v \notin W$. اگر $f(z) = v$ ، آنگاه، از آنجایی که $f(W) \subset W$ ، نتیجه می شود که $z \notin W$. چنانچه $C \setminus W$ شامل حداکثر یک نقطه باشد، آنگاه $z = v$. از این رو f یک چند جمله ای از درجه n است به طوری که تنها جواب $f(z) - v = 0$ برابر v می باشد و این ایجاب می کند که به ازای یک ثابت c ، $f(z) - v = c(z - v)^n$.

اگر z به اندازه کافی به v نزدیک باشد، آنگاه هنگامی که $k \rightarrow \infty$ ، $f^k(z) - v \rightarrow 0$ ، که همگرایی روی مثلاً $\{z : |z - v| < (2c)^{-1/(n-1)}\}$ یکنواخت است. لذا $\{f^k\}$ در v نرمال است، بنابراین نقطه استثنایی $f \notin J_0(f)$. به وضوح v تنها به چند جمله ای f مربوط می شود. (در حقیقت، اگر W یک نقطه v از C را حذف کند، آنگاه $J_0(f)$ یک دایره با مرکز v و شعاع $c^{-1/(n-1)}$ می باشد). \square

نتیجه زیر، مبنایی برای بسیاری از تصاویر کامپیوتری مجموعه های ژولیا می باشد؛ صفحه ۲۹۳ را ببینید.

نتیجه ۷-۱۴

(آ) این عبارت به ازای هر $z \in C$ با حداکثر یک استثنا برقرار است: اگر U یک مجموعه باز باشد که $J_0(f)$ را قطع می کند، آنگاه $f^{-k}(z)$ به ازای تعداد نامتناهی مقدار از k ، U را قطع می کند.

(ب) اگر $z \in J_0(f)$ آنگاه $J_0(f)$ بستر $f^{-k}(z)$ است $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ می باشد.

برهان.

(آ) مشروط بر آنکه z نقطه استثنایی لم ۱۴-۶ نباشد، $z \in f^k(U)$ ، بنابراین $f^{-k}(z)$ به ازای یک k ، U را قطع می کند. با استفاده از این به طور مکرر به دنباله ای نامتناهی از k ها می رسیم که $f^{-k}(z)$ ، U را قطع می کند.

(ب) اگر $z \in J_0(f)$ آنگاه بنابر ویژگی ۱۴-۴، $f^{-k}(z) \subset J_0(f)$ ، در نتیجه $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ و بنابراین بستر آن در مجموعه بسته $J_0(f)$ قرار می گیرد. از طرف دیگر، اگر U یک مجموعه باز شامل $z \in J_0(f)$ باشد، آنگاه بنابر قسمت (آ)، $f^{-k}(z)$ به ازای یک k ، U را قطع می کند؛ نقطه z بنابر لم ۱۴-۶ نمی تواند نقطه استثنایی باشد. #

یک نتیجه فوری دیگر از لم ۱۴-۶ این است که $J_0(f)$ نمی تواند "زیاد ضخیم" باشد.

نتیجه ۸-۱۴

اگر f یک چندجمله ای باشد، آنگاه $J_0(f)$ درون تهی می باشد.

برهان. فرض کنید $J_0(f)$ شامل یک مجموعه باز U باشد. آنگاه با استفاده از گزاره ۱۴-۴ به ازای هر k ، $J_0(f) \supset f^k(U)$ ، بنابراین $J_0(f) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$. بنابر لم ۱۴-۶ $J_0(f)$ جز احتمالاً به ازای یک نقطه، تمام C می‌باشد، که این در تناقض با ویژگی ۱۴-۲ می‌باشد که می‌گوید $J_0(f)$ کراندار است. \square

گزاره ۱۴-۹

$J_0(f)$ یک مجموعه کامل است (یعنی بسته است و نقطه تنها ندارد) و بنابراین ناشمارا است.

برهان. فرض کنید $v \in J_0(f)$ و U یک همسایگی از v باشد. باید نشان دهیم که U شامل نقاط دیگری از $J_0(f)$ می‌باشد. سه حالت مجزا را در نظر می‌گیریم.

(i) یک نقطه ثابت یا تناوبی f نباشد. بنابر نتیجه ۱۴-۷ (ب) و ویژگی ۱۴-۴، U به ازای یک $k \geq 1$ ، شامل نقطه‌ای از $J_0(f) \subset f^{-k}(v)$ می‌باشد، و این نقطه باید متفاوت با v باشد.

(ii) $f(v) = v$. اگر $f(z) = v$ دارای جوابی غیر از v نباشد، آنگاه، همانند برهان لم ۱۴-۶، $v \notin J_0(f)$. از این رو، $w \neq v$ وجود دارد که $f(w) = v$. بنابر نتیجه ۱۴-۷ (ب)، U به ازای یک $k \geq 1$ شامل نقطه‌ای از $f^{-k}(w)$ می‌باشد. هر چنین نقطه‌ای به وسیله پایداری از پیش در $J_0(f)$ است و مجزا از v می‌باشد، چرا که $f^k(v) = v$.

(iii) به ازای یک $p > 1$ ، $f^p(v) = v$. بنابر گزاره ۱۴-۵، $J_0(f) = J_0(f^p)$ ، پس با اعمال (ii) بر f^p می‌بینیم که U شامل نقاطی از $J_0(f^p) = J_0(f)$ غیر از v می‌باشد. پس $J_0(f)$ شامل هیچ نقطه تنهایی نیست؛ از آنجاکه بسته هم هست، پس کامل می‌باشد. \square

اکنون می‌توانیم نتیجه اصلی این بخش را اثبات کنیم، که $J_0(f)$ مجموعه نقاط غیر نرمال از $\{f^k\}$ ، دقیقاً همان $J(f)$ ، بستار مجموعه نقاط دافع تناوبی f ، می‌باشد.

قضیه ۱۴-۱۰

اگر f یک چندجمله‌ای باشد آنگاه $J(f) = J_0(f)$.

برهان. فرض کنید w یک نقطه دافع تناوبی از f با دوره تناوب p باشد، بنابراین w یک نقطه ثابت دافع برای $g = f^p$ می‌باشد. فرض کنید $\{g^k\}$ در w نرمال باشد؛ آنگاه w دارای یک

همسایگی باز V می باشد که روی آن یک زیر دنباله $\{g^{k_i}\}$ به یک تابع تحلیلی متناهی g_0 همگراست (از آنجاکه به ازای هر k ، $g^k(w) = w$ ، این دنباله نمی تواند به ∞ همگرا باشد). بنابر یک نتیجه استاندارد از آنالیز مختلط، مشتق ها هم همگرا هستند، پس اگر $z \in V$ ، $g_0'(z) \rightarrow (g^{k_i})'(z)$. با استفاده از قاعده زنجیری، از آنجا که w یک نقطه ثابت دافع است و $|g'(w)| > 1$ ، $|(g^{k_i})'(w)| = |(g'(w))^{k_i}| \rightarrow \infty$ و این متناهی بودن $g_0'(w)$ را نقض می کند، بنابراین $\{g^{k_i}\}$ نمی تواند در w نرمال باشد. پس بنابر گزاره ۱۴-۵، $w \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$ از آنجاکه $J_0(f)$ بسته است نتیجه می شود که $J(f) \subset J_0(f)$.

فرض کنید

$$K = \{w \in J_0(f) : f'(z) \neq 0 \text{ و } f(z) = w\}$$

و $w \in K$. آنگاه یک همسایگی باز V از w وجود دارد که روی آن می توانیم یک معکوس تحلیلی موضعی $f^{-1} : V \rightarrow C \setminus V$ بیابیم به گونه ای که به ازای $z \in V$ ، $f(f^{-1}(z)) = z$ (تنها مقادیر $f^{-1}(z)$ را به صورت پیوسته انتخاب کنید). یک خانواده از توابع تحلیلی $\{h_k\}$ روی V به صورت زیر تعریف کنید

$$h_k(z) = \frac{(f^k(z) - z)}{(f^{-1}(z) - z)}.$$

فرض کنید U یک همسایگی باز از w باشد که $U \subset V$. از آنجا که $w \in J_0(f)$ خانواده $\{f^k\}$ و بنابراین، طبق تعریف، خانواده $\{h_k\}$ روی U نرمال نیست. بنابر قضیه مانتل ۱۴-۱، $h_k(z)$ به ازای یک k و $z \in U$ باید مقدار 0 یا 1 بگیرد. در حالت اول به ازای یک $z \in U$ ، $f^k(z) = z$ ؛ در حالت دوم به ازای یک $z \in U$ ، $f^k(z) = f^{-1}(z)$ ، بنابراین $f^{k+1}(z) = z$. بنابرین U شامل یک نقطه تناوبی از f می باشد، پس $w \in J(f)$.

نشان داده ایم که $K \subset J(f)$ ؛ با گرفتن بستار داریم $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$. با این وجود K شامل همه $J_0(f)$ جز تعدادی متناهی از نقاط می باشد. از آنجاکه $J_0(f)$ شامل هیچ نقطه تنهایی نمی باشد، بنابر ویژگی ۱۴-۹، $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$ ، که همان چیزی است که می خواستیم. \square

اگر w یک نقطه ثابت جاذب از f باشد، تعریف زیر را برای حوزه جذب w می نویسیم

$$A(w) = \{z \in C : f^k(z) \rightarrow w, k \rightarrow \infty\}$$

حوزه جذب بینهایت، $A(\infty)$ ، را به روشی مشابه تعریف می‌کنیم. از آنجاکه w جاذب است، یک مجموعه باز V شامل w در $A(w)$ وجود دارد (اگر $w = \infty$ می‌توانیم V را، به ازای r به اندازه کافی بزرگ، به صورت $\{z : |z| > r\}$ بگیریم)، این می‌رساند که $A(w)$ باز است، چرا که اگر به ازای یک k ، $f^k(z) \in V$ ، آنگاه $z \in f^{-k}(V)$ ، که باز است. بیان ویژگی خاص زیر در مورد J به عنوان مرز هر حوزه جذب، در تعیین مجموعه‌های ژولیا بسیار مفید است. یادآوری می‌کنیم که نماد ∂A برای مرز مجموعه A به کار می‌رود.

لم ۱۴-۱۱

فرض کنید w یک نقطه ثابت جاذب برای f باشد. آنگاه $\partial A(w) = J(f)$ برای $w = \infty$ هم این مطلب درست است.

برهان. اگر $z \in J(f)$ آنگاه به ازای هر k ، $f^k(z) \in J(f)$ ، پس این دنباله نمی‌تواند به یک نقطه ثابت جاذب همگرا شود، و $z \notin A(w)$. در عین حال، اگر U یک همسایگی از z باشد، مجموعه $f^k(U)$ بنابر لم ۱۴-۶ به ازای یک k ی شامل نقاط $A(w)$ می‌باشد، بنابراین نقاطی به دلخواه نزدیک به z وجود دارند که با تکرار به سمت w می‌روند. لذا $z \in A(w)$ و بنابراین $z \in \partial A(w)$.

فرض کنید $z \in \partial A(w)$ اما $z \notin J(f) = J_0(f)$. آنگاه z دارای یک همسایگی همبند باز V است که روی آن $\{f^k\}$ دارای یک زیردنباله است که یا به یک تابع تحلیلی همگرا است یا به ∞ . زیردنباله مورد نظر روی $V \cap A(w)$ که باز و ناتهی می‌باشد، به w همگرا است و در نتیجه روی V هم به w همگرا است، چرا که یک تابع تحلیلی روی یک مجموعه همبند ثابت است اگر روی هر زیرمجموعه باز ثابت باشد. همه نقاط V تحت تکرارهای f به درون $A(w)$ نگاشته می‌شوند، بنابراین $V \subset A(w)$ ، که عبارت $z \in \partial A(w)$ را نقض می‌کند. \square

به عنوان یک مثال برای این لم، حالت $f(z) = z^2$ را به یاد آورید. در این حالت مجموعه ژولیا یک دایره واحد است که مرز هر دوی $A(0)$ و $A(\infty)$ می‌باشد. نکات مهم این بخش را به صورت زیر گردآوری می‌کنیم.

خلاصه ۱۴-۱۲

مجموعه ژولیای $J(f)$ بستار مجموعه نقاط تناوبی دافع چند جمله‌ای f می‌باشد. این یک مجموعه فشرده ناشمارا است که شامل هیچ نقطه تنهایی نیست و تحت f و f^{-1} پایدار است.

اگر $z \in J(f)$ ، آنگاه $J(f)$ بستر $f^{-k}(z)$ است. مجموعه ژولیا مرز حوزه جذب تمام نقاط ثابت جذب کننده در f می باشد که ∞ را شامل می شود، و به ازای هر عدد صحیح مثبت p ، $J(f) = J(f^p)$.

اطلاعات بسیار بیشتری را در مورد پویایی f روی مجموعه ژولیا می توان کشف کرد. می توان نشان داد که " f به طور آشوبناک روی J عمل می کند" (فصل ۱۳ را ببینید). بنابر تعریف، نقاط تناوبی f در J چگال هستند. از طرف دیگر، J شامل نقاطی همچون z با تکرارهای $f^k(z)$ می باشد که در J چگال هستند. به علاوه، f روی J دارای "وابستگی حساس به شرایط اولیه" می باشد؛ از این رو به ازای k ی معین، مقدار $|f^k(z) - f^k(w)|$ ، صرف نظر از اینکه $z, w \in J$ چه اندازه به هم نزدیک هستند، بزرگ خواهد بود، که این موضوع محاسبه دقیق تکرارها را غیر ممکن می سازد.

۱۴-۲ توابع درجه دو — مجموعه مندلبروت

اکنون توجه خود را به توابع درجه دوم روی C معطوف می کنیم. مجموعه های ژولیا از چندجمله ایهای به شکل زیر را در نظر می گیریم

$$f_c(z) = z^2 + c \quad (۱۴-۳)$$

این کار به آن اندازه که در ابتدا به نظر می رسد، محدودکننده نیست: اگر $h(z) = \alpha z + \beta$ ($\alpha \neq 0$) آنگاه

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = (\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta)/\alpha.$$

با انتخاب مقادیر مناسبی برای α ، β و c می توانیم این عبارت را به هر تابع درجه دوم f که بخواهیم، تبدیل کنیم. در این صورت $h^{-1} \circ f_c \circ h = f$ ، بنابراین به ازای هر k ، $h^{-1} \circ f_c^k \circ h = f^k$. این بدان معنی است که دنباله تکرارهای $\{f^k(z)\}$ از یک نقطه z تحت f دقیقاً تصویر دنباله تکرارهای $\{f_c^k(h(z))\}$ تحت تابع h^{-1} می باشد. نگاشت h تصویر دینامیکی f را به تصویر دینامیکی f_c تبدیل می کند. به ویژه، z یک نقطه p - دوره از f است اگر و فقط اگر $h(z)$ یک نقطه p - دوره از f_c باشد؛ بنابراین مجموعه ژولیا از f تصویر مجموعه ژولیا از f_c تحت h^{-1} می باشد.

تبدیل h یک زوجیت بین f و f_c نامیده می شود. هر تابع درجه دو به ازای یک c با f_c مزدوج می باشد، بنابراین با مطالعه مجموعه های ژولیای تابع f_c به ازای $c \in C$ نتیجتاً مجموعه های ژولیای همه چندجمله ایهای درجه دوم را مطالعه کرده ایم. از آنجاییکه h یک

تبدیل تشابه است، مجموعه ژولیای هر چند جمله‌ای درجه دوم از لحاظ هندسی، به ازای یک $c \in C$ شبیه به مجموعه ژولیای تابع f_c می‌باشد.

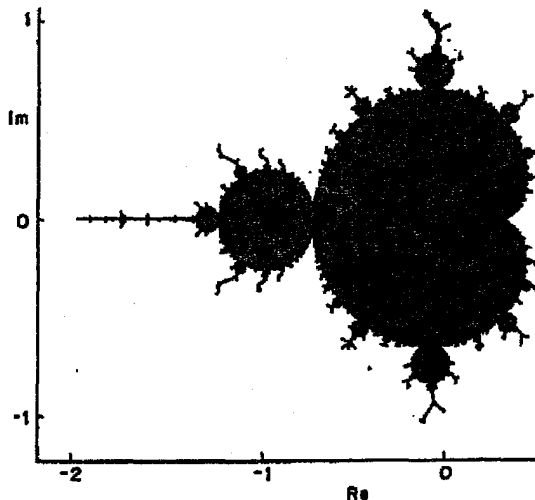
در طول این بخش باید به ذهنتان رسیده باشد که به استثنای هنگامی که $z = c$ ، $f_c^{-1}(z)$ دو مقدار مجزای $\pm(z-c)^{1/2}$ می‌گیرد، که دو شاخه $f_c^{-1}(z)$ نامیده می‌شوند. از این رو اگر U یک مجموعه باز کوچک باشد به طوری که $c \notin U$ ، آنگاه تصویر وارون $f_c^{-1}(U)$ دارای دو بخش است، که هر دو به طور یکنواخت و پوشا توسط f_c به روی U نگاشته می‌شوند.

مجموعه مندلیبروت M را مجموعه پارامترهای c که به ازای آنها مجموعه ژولیا از تابع f_c همبند است تعریف می‌کنیم

$$M = \{c \in C : J(f_c) \text{ همبند باشد}\} \quad (۴-۱۴)$$

در ابتدا به نظر می‌آید که M تنها با یک ویژگی نسبتاً خاص از $J(f_c)$ مربوط است. در حقیقت، همانگونه که خواهیم دید، M شامل اطلاعات بسیار زیادی درباره ساختار مجموعه‌های ژولیا است.

تعریف (۴-۱۴) برای اهداف محاسباتی مناسب نیست. ما یک تعریف معادل به دست می‌آوریم که برای تعیین اینکه آیا یک پارامتر c در M قرار می‌گیرد یا نه و برای بررسی شکل فوق‌العاده پیچیده M کارا تر باشد؛ شکل ۱۴-۲ را ببینید.



شکل ۱۴-۲ مجموعه مندلیبروت M در صفحه مختلط

برای این کار، ابتدا لازم است کمی در مورد تاثیر تبدیل f_c روی منحنی‌های هموار بدانیم. برای اختصار، یک منحنی هموار (یعنی مشتقپذیر)، بسته و ساده (یعنی بدون خود قطعی) را یک طوقه می‌نامیم. بخش‌هایی از C که داخل و خارج چنین منحنی‌هایی قرار گرفته‌اند را با عنوان درون و برون طوقه نام می‌بریم. شکل عدد هشت لاتین، 8، یک منحنی بسته هموار است که در یک نقطه خود قطعی دارد.

لم ۱۴-۱۳

فرض کنید C یک طوقه در صفحه مختلط باشد.

(آ) اگر c درون C باشد، آنگاه $f_c^{-1}(C)$ یک طوقه است و تصویر معکوس درون C همان درون $f_c^{-1}(C)$ می‌باشد.

(ب) اگر c روی C قرار گیرد آنگاه $f_c^{-1}(C)$ به شکل عدد هشت لاتین می‌باشد، به طوریکه تصویر معکوس درون C درون دو طوقه می‌باشد.

پرهان. توجه کنید که $f_c^{-1}(z) = (z - c)^{1/2}$ و $(f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-1/2}$ ، که اگر $z \neq c$ ، متناهی و ناصفر است. از این رو، اگر یکی از دو شاخه f_c^{-1} را انتخاب کنیم، مجموعه $f_c^{-1}(C)$ به طور موضعی یک منحنی هموار است مشروط بر آنکه $c \notin C$.

(آ) فرض کنید c درون C باشد. یک نقطه ابتدایی w روی C بگیرید و یکی از دو مقدار را برای $f_c^{-1}(w)$ انتخاب کنید. اگر بگذاریم $f_c^{-1}(z)$ به طور پیوسته همراه با حرکت z ، در اطراف C تغییر کند، نقطه $f_c^{-1}(z)$ یک منحنی هموار را طی می‌کند. هنگامی که z به w برمی‌گردد، $f_c^{-1}(w)$ مقدار دومش را می‌گیرد. هنگامی که z دوباره C را می‌پیماید، $f_c^{-1}(z)$ روی منحنی هموارش تکرار می‌شود، که وقتی z برای بار دوم به w می‌رسد این منحنی بسته می‌شود. از آنجاکه $c \notin C$ ، داریم $0 \notin f_c^{-1}(C)$ ، پس روی $f_c^{-1}(C)$ ، $f_c^{-1}(z) \neq 0$. بنابراین f_c به طور موضعی یک تبدیل دوسویی هموار نزدیک نقاط روی $f_c^{-1}(C)$ می‌باشد. به خصوص $z \in f_c^{-1}(C)$ نمی‌تواند یک نقطه خودقطعی $f_c^{-1}(C)$ باشد، در غیر این صورت $f_c(z)$ در یک خودقطعی از C قرار خواهد داشت.

از آنجاکه f_c یک تابع پیوسته است که فقط طوقه $f_c^{-1}(C)$ را به روی طوقه C می‌نگارد، چند جمله‌ای f_c باید درون و برون $f_c^{-1}(C)$ را به ترتیب به درون و برون C بنگارد. در نتیجه f_c^{-1} درون C را به درون $f_c^{-1}(C)$ می‌نگارد.

(ب) این قسمت به روشی مشابه قسمت (آ) اثبات می‌شود، با توجه به اینکه اگر C_0 یک قطعه هموار از منحنی گذرنده از C باشد، آنگاه $f_c^{-1}(C_0)$ شامل دو قطعه هموار از منحنی مار بر 0 می‌باشد که با زاویه قائم یکدیگر را قطع می‌کنند، و خودقطعی شکل هشت لاتین را ایجاد می‌کنند. \square

اکنون ویژگی خاص دیگری از مجموعه مندلیبروت، بر حسب تکرارهای f_c ، به دست می‌آوریم.

قضیه ۱۴-۱۴

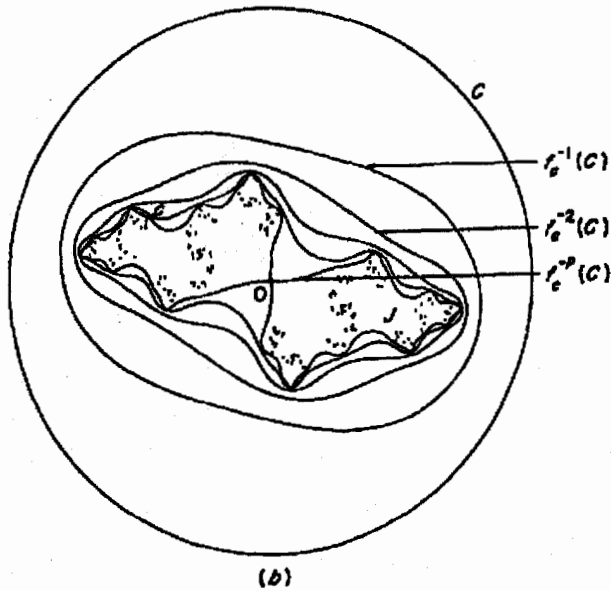
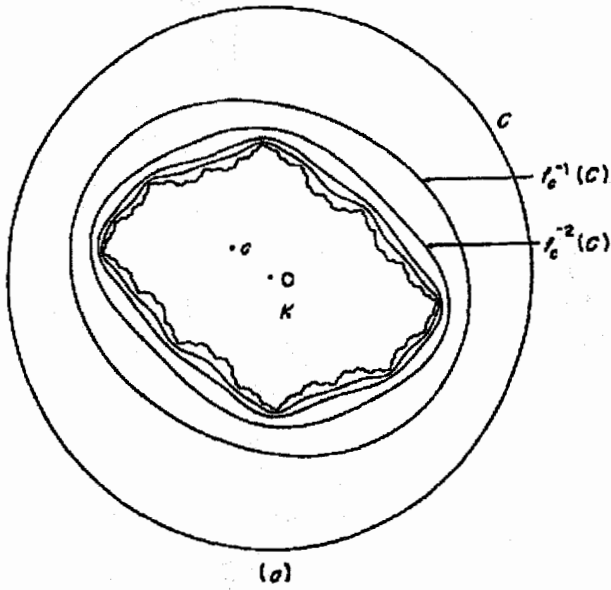
$$(۵-۱۴) \quad M = \{c \in C : \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ کراندار است}\}$$

$$(۶-۱۴) \quad = \{c \in C : f_c^k(0) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty \text{ وقتی که}\}$$

برهان. از آنجا که یک عدد r وجود دارد به طوری که اگر $|z| > r$ ، $|f_c(z)| > 2|z|$ ، واضح است که $f_c^k(0) \rightarrow \infty$ اگر و فقط اگر $\{f_c^k(0)\}$ کراندار باشد، پس (۵-۱۴) و (۶-۱۴) معادل هستند.

(آ) نخست نشان می‌دهیم که اگر $\{f_c^k(0)\}$ کراندار باشد آنگاه $J(f_c)$ همبند است. فرض کنید C یک دایره بزرگ در C باشد به طوری که همه نقاط $\{f_c^k(0)\}$ درون C قرار گیرند، $f_c^{-1}(C)$ درون C باشد و آن نقاطی که خارج C هستند تحت تکرارهای f_c^k به ∞ روند. از آنجا که $c = f_c(0)$ درون C قرار دارد، لم ۱۴-۱۳ (آ) نتیجه می‌دهد که $f_c^{-1}(C)$ یک طوقه است که درون C قرار می‌گیرد. همچنین، $f_c(c) = f_c^2(0)$ درون C می‌باشد و $f_c^{-1}(C)$ برون C را به روی برون $f_c^{-1}(C)$ می‌نگارد، بنابراین c درون $f_c^{-1}(C)$ قرار دارد. پس $f_c^{-2}(C)$ یک طوقه است که در درون $f_c^{-1}(C)$ قرار دارد. اگر به همین طریق ادامه دهیم می‌بینیم که $\{f_c^{-k}(C)\}$ شامل دنباله‌ای از طوقه‌ها است که هر کدام در درون طوقه قبلی قرار دارد (شکل ۱۴-۳ (a)). فرض کنید K مجموعه بسته متشکل از نقاطی باشد که به ازای هر k داخل و یا روی طوقه $f_c^{-k}(C)$ قرار دارند. اگر $z \in C \setminus K$ ، یک تکرار $f_c^k(z)$ خارج از C قرار می‌گیرد و در نتیجه $f_c^k(z) \rightarrow \infty$. از این رو

$$A(\infty) = \{z : f_c^k(z) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty \text{ وقتی که}\} = C \setminus K.$$



شکل ۱۴-۳ تکرارهای معکوس یک دایره c تحت f_c ، دو بخش برهان قضیه ۱۴-۱۴ را توضیح می دهد: (a) $c = -0.9 + 0.5i$ (b) $c = -0.3 + 0.3i$

با استفاده از لم ۱۴-۱۱، $J(f_c)$ مرز $C \setminus K$ می‌باشد که البته با مرز K یکی می‌باشد. اما K اشتراک یک دنباله صعودی از مجموعه‌های بسته همبند ساده (یعنی مجموعه‌هایی که همبند هستند و متمم همبند هم دارند) می‌باشد، بنابراین با یک استدلال توپولوژیکی ساده معلوم می‌شود که K همبند ساده است و در نتیجه دارای مرز همبند می‌باشد. بنابراین $J(f_c)$ همبند است.

(ب) اثبات اینکه اگر $\{f_c^k(0)\}$ کراندار نباشد، $J(f_c)$ همبند نیست، تا حدود زیادی مشابه است. فرض کنید C دایره‌ای بزرگ باشد به گونه‌ای که $f_c^{-1}(C)$ درون C قرار گیرد، همه نقاط خارج از C به سمت ∞ تکرار شوند و به ازای یک p ، $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$ که $f_c^k(0)$ بر حسب اینکه k کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از p باشد داخل یا خارج C قرار می‌گیرد. دقیقاً همانند قسمت اول برهان، یک دنباله $\{f_c^{-k}(C)\}$ از طوقه‌ها می‌سازیم که هر کدام از طوقه‌ها در درون خود شامل طوقه بعدی می‌باشد (شکل ۱۴-۳) با این وجود، هنگامی که به طوقه $f_c^{1-p}(C)$ می‌رسیم در استدلال با مشکل مواجه می‌شویم، چرا که $c \in f_c^{1-p}(C)$ و لم ۱۴-۱۳(ا) قابل استفاده نیست. بنابر لم ۱۴-۱۳ (ب) به این می‌رسیم که $E \equiv f^{-p}(C)$ به شکلی عدد هشت لاتین درون طوقه $f_c^{1-p}(C)$ می‌باشد، که f_c درون هر نیمه از E را به روی درون $f_c^{1-p}(C)$ می‌نگارد. مجموعه ژولای $J(f_c)$ باید درون طوقه‌های E قرار گیرد، چرا که نقاط دیگر به طرف بینهایت تکرار می‌شوند. از آنجا که $J(f_c)$ تحت f_c^{-1} پایدار است، بخش‌های آن باید در هر یک از طوقه‌های E قرار گیرند. بنابراین، این شکل ۸ - مانند E ، $J(f_c)$ را ناهمبند می‌سازد. \square

دلیل درنظر گرفتن تکرارهای مبدأ در (۱۴-۵) و (۱۴-۶) این است که مبدأ، به ازای هر c ، نقطه بحرانی f_c می‌باشد، یعنی نقطه‌ای که به ازای آن $f_c'(z) = 0$. نقاط بحرانی آن نقاطی هستند که f_c نمی‌تواند در آنها یک دوسویی موضعی باشد - ویژگی‌ای که در جدا کردن دو حالت برهان قضیه ۱۴-۱۴ سرنوشت ساز بود.

تعریف معادل M که در ۱۴-۵ آمده است مبنای تصاویر کامپیوتری از مجموعه مندلیبروت می‌باشد.

اعداد r و k_0 را انتخاب کنید طوری که هر دو از مرتبه مثلاً ۱۰۰ باشند. به ازای هر c جملات متوالی دنباله $\{f_c^k(0)\}$ را حساب کنید تا آنجا که یا $|f_c^k(0)| > r$ ، حالتی که در آن به صلاح است که c خارج از M باشد، یا تا زمانیکه $k = k_0$ ، حالتی که c را متعلق به M می‌گیریم. با تکرار این روند به ازای مقادیر c در سراسر یک ناحیه، تصویری از M رسم خواهد

شد. اغلب بر حسب نخستین عدد صحیح k به طوریکه $|f_c^k(0)| > r$ ، رنگ‌هایی به متمم M نسبت داده می‌شود.

شکل مجموعه مندلبروت حاکی از چهره پیچیده آن می‌باشد (شکل ۱۴-۲ را ببینید). مجموعه مندلبروت ظاهر واضح و معینی دارد: یک دلگون اصلی که یک سری جوانه‌های دایره مانند از آن بیرون زده است. هر یک از این جوانه‌ها توسط جوانه‌های دیگری محاصره شده است، و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. در عین حال، این تمام مجموعه نیست. به علاوه "پرزه‌های" شاخه شاخه ریزی از جوانه‌ها به طرف بیرون رشد می‌کنند، و این پرزها در طولشان دارای کپی‌های ریزی از کل مجموعه مندلبروت می‌باشند. به سادگی می‌توانیم از این پرزها در تصاویر کامپیوتری صرف نظر کنیم. به هر حال تصاویر دقیق حاکی از همبند بودن مجموعه مندلبروت می‌باشند، این مطلبی است که از لحاظ ریاضی نیز اثبات شده است.

۱۴-۳ مجموعه‌های ژولیا از توابع درجه دوم

در این بخش کمی به بررسی تغییرات ساختار مجموعه ژولیای $J(f_c)$ در اثر تغییرات c در صفحه مختلط می‌پردازیم. به خصوص، اهمیت بخش‌های گوناگون مجموعه مندلبروت، آشکار خواهد شد.

نقاط تناوبی جاذب f_c در شکل $J(f_c)$ نقش بسیار مهمی دارند. می‌توان نشان داد که اگر $w \neq \infty$ یک نقطه تناوبی جاذب برای یک چندجمله‌ای f باشد، آنگاه یک نقطه بحرانی z (نقطه‌ای با ویژگی $f'(z) = 0$) وجود دارد به طوریکه $f^k(z)$ به مدار تناوبی شامل w جذب می‌شود (تمرین ۱۴-۸ را ببینید). از آنجا که تنها نقطه بحرانی f_c نقطه 0 است، f_c می‌تواند حداکثر یک مدار تناوبی جاذب کننده داشته باشد. به علاوه، اگر $c \notin M$ آنگاه بنابر قضیه ۱۴-۱۴، $f_c^k(0) \rightarrow \infty$ پس ممکن است f_c مدار تناوبی جاذب کننده نداشته باشد. گمان می‌رود که مجموعه c هایی که به ازای آنها f_c دارای یک مدار تناوبی جاذب کننده است درون M را پر کند، اما این مطلب هنوز اثبات نشده است.

طبیعی است که f_c را بر حسب دوره مدارهای (متناهی) جاذب کننده، p ، طبقه‌بندی کنیم؛ اگر چنین مدارهایی موجود باشند؛ مقادیر c متناظر با p های مختلف را می‌توان به عنوان ناحیه‌های مختلف مجموعه مندلبروت در نظر گرفت.

در ابتدا، فرض کنید c خارج از M قرار گیرد، پس f_c دارای نقطه تناوبی جاذب کننده نیست. بنابر تعریف، $J(f_c)$ همبند نیست. در حقیقت، $J(f_c)$ باید کلاً ناهمبند باشد و

بتوان آن را به صورت اجتماع مجزای $J = S_1(J) \cup S_2(J)$ بیان کرد، که در آن S_1 و S_2 دو شاخه f_c^{-1} روی J می‌باشند. این می‌رساند که J به تعبیر (۹-۱) ناوردا است. این موضوع، اصولاً از نیمه دوم برهان قضیه ۱۴-۱۴ نتیجه می‌شود — فرض می‌کنیم که f_c درون هر یک از طوقه‌ها از شکل ۸ مانند E را به یک ناحیه D شامل E می‌نگارد. نگاشت‌های S_1 و S_2 را می‌توان به عنوان تحدیدهای f_c^{-1} به درون هر یک از طوقه‌ها در نظر گرفت. از آنجا که $S_1(J)$ و $S_2(J)$ درون دو نیمه E می‌باشند، پس از هم جدا هستند، پس J باید کلاً ناهمبند باشد؛ صفحه ۱۶۵ را ببینید.

هنگامی که c به اندازه کافی بزرگ باشد که بتوانیم کار را ساده‌تر کنیم، به این وضعیت به طور دقیق‌تری نگاه می‌کنیم.

قضیه ۱۴-۱۵

فرض کنید $(5 + 2\sqrt{6})/4 > |c|$. آنگاه $J(f_c)$ کلاً ناهمبند است، و (به تعبیر (۹-۱)) مجموعه ناوردای انقباض‌هایی است که به وسیله دو شاخه $f_c^{-1}(z)$ به ازای z نزدیک J داده می‌شود. هنگامی که $|c|$ بزرگ باشد داریم

$$\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) \sim 2 \log 2 / \log |c|.$$

برهان. فرض کنید C دایره $|z| = |c|$ و D درون آن، $|z| < |c|$ ، باشد. آنگاه

$$f_c^{-1}(C) = \{(ce^{i\theta} - c)^{1/2} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

که به شکل ۸ می‌باشد و نقطه خودقطعی آن نقطه ۰ است و هر یک از طوقه‌های آن در یک طرف خطی راست گذرنده از مبدأ می‌باشند (شکل ۱۴-۴). از آنجا که $|c| > 2$ داریم $f_c^{-1}(C) \subset D$ درون هر یک از طوقه‌های $f_c^{-1}(C)$ توسط f_c به صورت یک به یک و پوشا به روی D نگاشته می‌شود. اگر $S_1, S_2 : D \rightarrow D$ را به عنوان شاخه‌های $f_c^{-1}(z)$ درون هر یک از طوقه‌ها تعریف کنیم، آنگاه $S_1(D)$ و $S_2(D)$ درون دو طوقه می‌باشند.

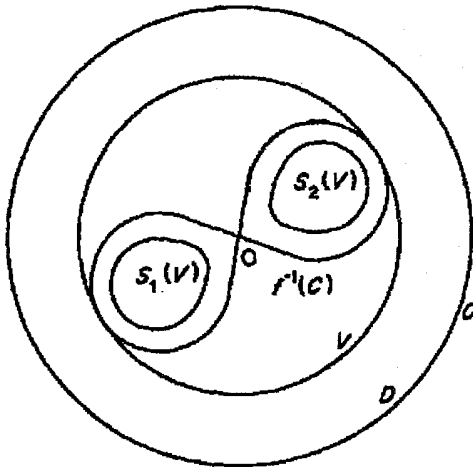
فرض کنید V قرص $\{z : |z| < |2c|^{1/2}\}$ باشد. شعاع V را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که V فقط شامل $f_c^{-1}(C)$ باشد، پس $S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D$. از این

رو $S_1(V), S_2(V) \subset V$ و $S_1(\bar{V})$ و $S_2(\bar{V})$ از هم جدا هستند. داریم

$$S_1'(z) = S_2'(z) = (f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-1/2}.$$

از این رو اگر $z \in \bar{V}$

$$(۷-۱۴) \quad \frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq |S_i'(z)| \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}.$$



شکل ۴-۱۴ برهان قضیه ۱۴-۱۵

اگر $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$ کران بالا کمتر از یک است که در این حالت S_2 و S_1 انقباض‌هایی روی قرص \bar{V} باشند. با استفاده از قضیه ۹-۱ یک مجموعه ناتهی فشرده پایدار یکتای $F \subset \bar{V}$ وجود دارد که در تساوی زیر صدق می‌کند

$$S_1(F) \cup S_2(F) = F. \tag{۸-۱۴}$$

از آنجا که $S_1(\bar{V})$ و $S_2(\bar{V})$ از یکدیگر جدا هستند، پس $S_1(F)$ و $S_2(F)$ نیز از یکدیگر جدا هستند، که نتیجه می‌شود F کلاً ناهمبند است.

البته F چیزی جز مجموعه ژولیای $J = J(f_c)$ نیست. یک راه بررسی این مطلب توجه به این نکته است که چون \bar{V} شامل حداقل یک نقطه z از J (برای مثال، یک نقطه دافع ثابت از f_c) است، داریم $(\bigcup_{k=1}^{\infty} f_c^{-k}(z)) \subset \bar{V}$ ، بستار J ، چرا که $f_c^{-k}(\bar{V}) \subset \bar{V}$ با به کار بردن نتایج دیگری از خلاصه ۱۴-۱۲، در می‌یابیم که J یک زیرمجموعه ناتهی فشرده از \bar{V} است که در $J = f_c^{-1}(J)$ یا معادلاً در $J = S_1(J) \cup S_2(J)$ صدق می‌کند. پس $J = F$ مجموعه فشرده یکتایی است که در (۸-۱۴) صدق می‌کند.

در پایان بعد $J(f_c)$ را تخمین می‌زنیم. با استفاده از (۷-۱۴) و "قضیه مقدار میانگین" ویژه توابع مختلط، می‌توان نشان داد که اگر z_1 و z_2 نقاط مجزایی از \bar{V} باشند، آنگاه

$$\frac{1}{2}(|c| + |2c|^{1/2})^{-1/2} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2}(|c| - |2c|^{1/2})^{-1/2}$$

بنابر گزاره‌های ۶-۹ و ۷-۹ کران‌های بالا و پایین $\dim_H J(f_c)$ از جواب‌های $s = 2 \log 2 / \log 4 (|c| \pm |2c|^{1/2})^s = 1$ یعنی با $2(\frac{1}{2}(|c| \pm |2c|^{1/2})^{-1/2})^s = 1$ دست می‌آیند، که تقریب مجانبی گفته شده را به ما می‌دهد. \square

اکنون به حالتی بر می‌گردیم که c کوچک می‌باشد. می‌دانیم که اگر $c = 0$ آنگاه $J(f_c)$ دایره واحد است. اگر c کوچک و z هم به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه چنانچه w نقطه ثابت جذب کننده $f_c^k(z) \rightarrow w$ ، $k \rightarrow \infty$ که $w = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$ نزدیک به صفر می‌باشد. از جهت دیگر، اگر z بزرگ باشد، $f_c^k(z) \rightarrow \infty$ با جدا کردن این دو نوع رفتار هنگامی که c از 0 دور می‌شود منطقی است که انتظار داشته باشیم دایره به یک منحنی بسته ساده (یعنی بدون نقطه خودقطعی) "تحریف شود".

درحقیقت، این حالت اتفاق می‌افتد مشروط بر آنکه f_c یک نقطه ثابت جذب کننده را حفظ کند، یعنی اگر در یکی از ریشه‌های $f_c(z) = z$ ، $|f_c'(z)| < 1$. محاسبات جبری ساده نشان می‌دهد که این اتفاق زمانی روی می‌دهد که c درون دایره $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}e^{i\theta})$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) قرار گیرد — این دایره اصلی مجموعه مندلیبروت می‌باشد.

برای راحتی، به حالتی می‌پردازیم که $|c| < \frac{1}{4}$ ، اما اگر f_c هر نقطه ثابت جذب کننده‌ای داشته باشد، برهان را می‌توان به سادگی تطبیق داد.

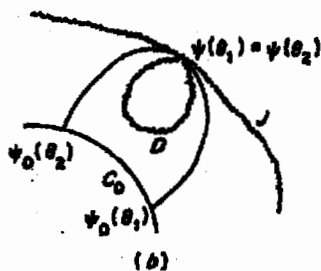
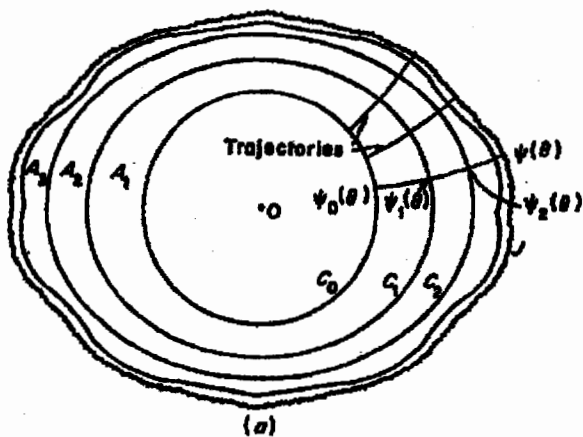
قضیه ۱۴-۱۶

اگر $|c| < \frac{1}{4}$ آنگاه $J(f_c)$ منحنی بسته ساده‌ای می‌باشد.

برهان. فرض کنید C_0 منحنی $|z| = \frac{1}{2}$ باشد، که هم c و هم نقطه ثابت جذب کننده f_c را احاطه می‌کند. محاسبه‌ای سر راست نشان می‌دهد که تصویر معکوس $f_c^{-1}(C_0)$ یک طوقه C_1 است که C_0 را محاصره می‌کند. می‌توانیم ناحیه طوق مانند A_1 ، بین C_0 و C_1 را به وسیله زنجیره‌ای از منحنی‌ها، که به طور قائم C_0 را ترک و به C_1 می‌رسند و ما آنها را "پرتابه" می‌نامیم، پر کنیم؛ شکل ۱۴-۵ (آ) را ببینید. به ازای هر θ فرض کنید $\psi_1(\theta)$ نقطه روی C_1 در پایان پرتابه ترک کننده C_0 در $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ باشد. تصویر معکوس $f_c^{-1}(A_1)$ یک ناحیه طوق مانند A_2 است که طوقه $C_2 = f_c^{-1}(C_1)$ مرز بیرونی و C_1 مرز درونی آن می‌باشد، و f_c ، A_2 را به طور دو به یک به A_1 می‌نگارد. تصویر معکوس

پرتابه‌های وصل کننده C_0 به C_1 خانواده‌ای از پرتابه‌هایی که C_1 را به C_2 وصل می‌کنند به وجود می‌آورد. فرض کنید $\psi_2(\theta)$ نقطه روی C_2 در انتهای مسیر ترک کننده C_1 در $\psi_1(\theta)$ باشد. به همین روش ادامه می‌دهیم تا به دنباله‌ای از طوقه‌های C_k برسیم که هر کدام طوقه‌های پیشین و خانواده‌های پرتابه‌های متصل کننده نقاط $\psi_k(\theta)$ روی C_k به $\psi_{k+1}(\theta)$ روی C_{k+1} را به ازای هر k ، محاصره می‌کنند.

هنگامی که $k \rightarrow \infty$ ، منحنی‌های C_k به مرز حوزه جذب W نزدیک می‌شوند؛ بنابراین $1 < \gamma$ در ۱۱-۱۴ این مرز دقیقاً مجموعه ژولیای $J(f_c)$ می‌باشد. از آنجا که به ازای یک $\gamma > 1$ ، خارج از C_1 داریم $|f_c'(z)| > \gamma$ ، نتیجه می‌شود که f_c^{-1} در نزدیک J منقبض می‌شود. پس طول پرتابه وصل کننده $\psi_k(\theta)$ به $\psi_{k+1}(\theta)$ هنگامی که $k \rightarrow \infty$ با یک نسبت هندسی به صفر میل می‌کند. در نتیجه هنگامی که $k \rightarrow \infty$ ، $\psi_k(\theta)$ به طور یکنواخت به یک تابع پیوسته $\psi(\theta)$ میل می‌کند، و J منحنی بسته‌ای است که به وسیله $\psi(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) مشخص می‌شود.



شکل ۱۴-۵ برهان قضیه ۱۴-۱۶

نشان دادن اینکه ψ نمایش یک منحنی ساده است، باقی می‌ماند. فرض کنید $\psi_0(\theta_1) = \psi(\theta_2)$ و D ناحیه محدود شده به وسیله C_0 و دو پرتابه وصل کننده $\psi_0(\theta_1)$ و $\psi_0(\theta_2)$ به این نقطه مشترک باشد. مرز D تحت تکرارهای f_c کراندار باقی می‌ماند، پس به وسیله قضیه ماکزیمم قدر مطلق (که می‌گوید قدرمطلق یک تابع تحلیلی، ماکزیمم مقدار خود را در نقطه مرزی یک ناحیه می‌گیرد) D تحت تکرارهای f کراندار باقی می‌ماند. بنابراین لم ۱۴-۶ درون D نمی‌تواند شامل نقطه‌ای از J باشد. بنابراین وضعیت شکل ۱۴-۵ (ب) این‌طور می‌تواند روی دهد، بنابراین به ازای هر θ بین θ_1 و θ_2 ، $\psi(\theta) = \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$. این نتیجه می‌دهد که $\psi(\theta)$ دارای هیچ نقطه خودقطعی نمی‌باشد. \square

با گسترش این عبارت در می‌یابیم که اگر c در دلگون اصلی مجموعه M باشد، آنگاه $J(f_c)$ یک منحنی بسته ساده می‌باشد؛ چنین منحنی‌هایی گاهی اوقات شبه دایره نامیده می‌شوند. البته اگر $c > 0$ ، $J(f_c)$ یک منحنی فرکتالی خواهد بود. می‌توان نشان داد که به ازای c کوچک، بعد آن به صورت زیر داده می‌شود

$$s = \dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) = 1 + |c|^2 / 4 \log 2$$

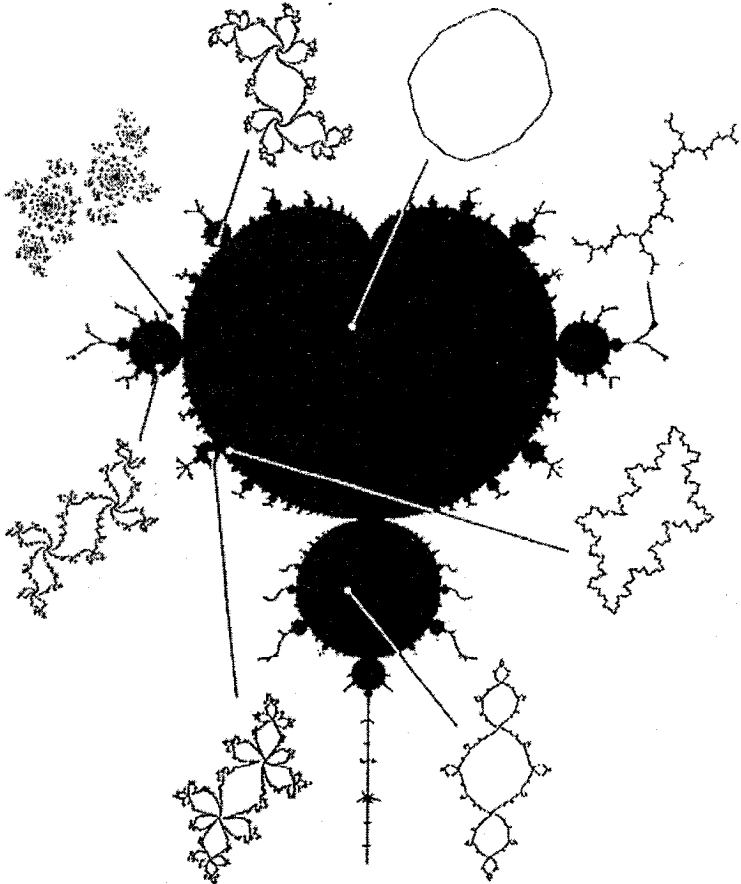
(تعداد جملات در $|c|^3$ و درجات بالاتر) + (۱۴-۹)

به علاوه، $0 < H^s(J) < \infty$ ، که $\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c)$ به وسیله یک تابع تحلیلی حقیقی از c داده می‌شود.

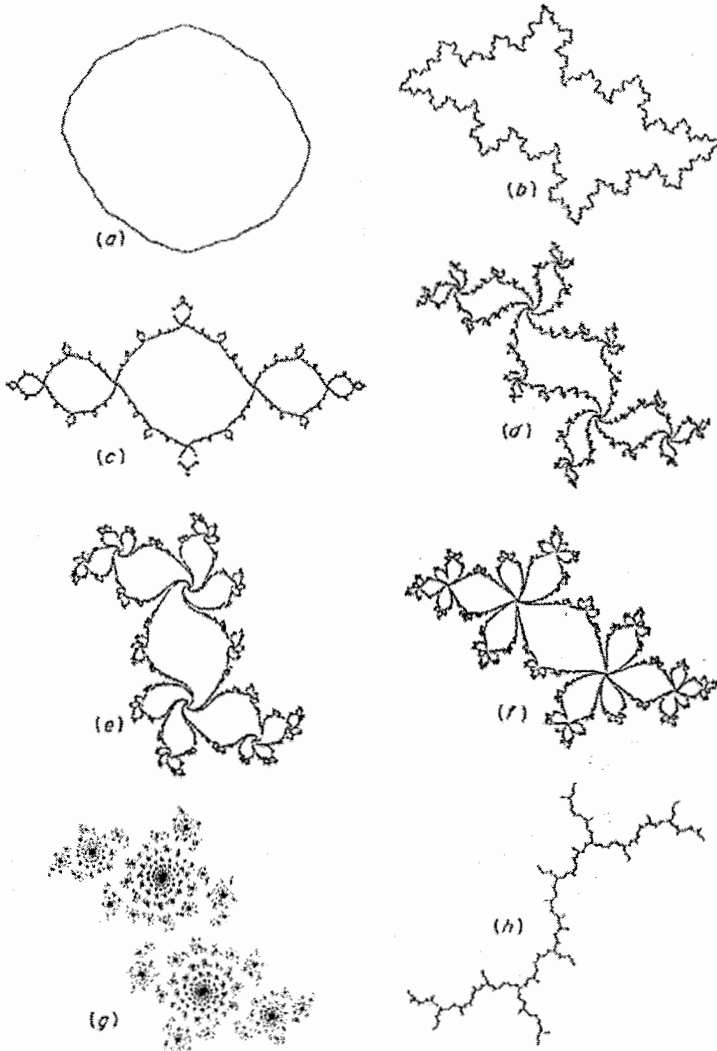
حالت بعدی که در نظر می‌گیریم هنگامی است که f_c دارای یک مدار تناوبی جذب کننده با دوره تناوب ۲ باشد. با یک محاسبه سراسر معلوم می‌شود که این حالت هنگامی روی می‌دهد که $|c+1| < \frac{1}{4}$ ؛ یعنی اگر z در آن قرص دایره مانند برآمده از M و مماس بر دلگون، قرار داشته باشد.

از آنجا که f_c^2 یک چندجمله‌ای از درجه ۴ می‌باشد، f_c دو نقطه ثابت و دو نقطه ۲- دوره‌ای دارد. فرض کنید w_1 و w_2 نقاط مدار ۲- دوره‌ای جذب کننده باشند. همانند برهان قضیه ۱۴-۱۶ می‌توان نشان داد که حوزه جذب w_i (یعنی $\{z: f_c^{2k}(z) \rightarrow w_i \text{ as } k \rightarrow \infty\}$) شامل ناحیه‌ای است محدود به یک منحنی بسته ساده C_i که به ازای $i=1,2$ ، w_i را محاصره می‌کند. بنابراین لم ۱۴-۱۱ و گزاره ۱۴-۵، $C_i \subset J(f_c^2) = J(f_c)$. منحنی‌های C_i به صورت دو به یک توسط f_c^2 به روی خودشان نگاشته می‌شوند، که ایجاب می‌کند که نقطه‌ای ثابت از f_c^2 روی هر C_i وجود داشته باشد. نقاط ۲- دوره‌ای اکیداً درون C_i قرار دارند، پس یک نقطه ثابت از f_c روی هر

یک از C_i ها وجود دارد؛ از آنجا که C_i ها به وسیله f_c به روی یکدیگر نگاشته می شوند، تنها ممکن است که C_1 و C_2 در یکی از نقاط ثابت f_c به هم برسند. تابع معکوس f_c^{-1} روی C_1 دو مقداری است. یکی از تصاویر معکوس، C_2 می باشد (که W_2 را احاطه می کند). به هر حال، شاخه دیگر $f_c^{-1}(C_1)$ یک منحنی بسته ساده دیگر است که دومین مقدار $f_c^{-1}(W_1)$ را احاطه می کند. می توانیم ادامه دهیم تا تصاویر معکوسی به این روش به دست آوریم تا برسیم به اینکه $J(f_c)$ از تعدادی نامتناهی منحنی بسته ساده تشکیل شده است که پیش تصاویرهای W_1 و W_2 را از هر مرتبه ای دربردارند و هر جفت از آنها در "نقاط نیشگون گرفتگی" به هم می رسند — شکل ۱۴-۷ (c) را ببینید.



شکل ۱۴-۶ مجموعه های ژولیا $J(f_c)$ به ازای نقاط مختلف c در مجموعه مندلیبروت. مجموعه های ژولیا با جزئیات بیشتر در شکل ۱۴-۷ نشان داده شده اند.



شکل ۱۴-۷ دسته‌ای از مجموعه‌های ژولیا از تابع درجه دو $f_c(z) = z^2 + c$. (a) $c = -0.1 + 0.1i$ دارای یک نقطه ثابت جذب کننده می‌باشد و J یک شبه دایره است، (b) $c = -0.5 + 0.5i$ دارای یک نقطه ثابت جذب کننده می‌باشد و J یک شبه دایره است، (c) $c = -1 + 0.05i$ دارای یک مدار ۲ دوره‌ای f_c جذب کننده می‌باشد، (d) $c = -0.2 + 0.75i$ دارای یک مدار ۳ دوره‌ای جذب کننده می‌باشد، (e) $c = 0.25 + 0.52i$ دارای یک مدار ۴ دوره‌ای جذب کننده می‌باشد، (f) $c = -0.5 + 0.55i$ دارای یک مدار ۵ دوره‌ای جذب کننده می‌باشد، (g) $c = 0.66i$ دارای یک مدار ۵ دوره‌ای جذب کننده می‌باشد، (h) $c = -i$ دارای یک تناوبی و J یک دندریت می‌باشد.

بنابراین به مجموعه‌های ژولیای فرکتالی می‌رسیم که از لحاظ توپولوژیکی بسیار پیچیده‌تر از حالت‌های قبلی می‌باشند.

می‌توان از این ایده‌ها برای تجزیه و تحلیل حالتی که f_c دارای یک مدار تناوبی جذب کننده با دوره تناوب $p > 2$ می‌باشد استفاده کرد. همسایگی‌های به هم چسبیده نقاط با دوره تناوبی p که درون مدارهای جذب کننده رسم می‌شوند، به منحنی‌های بسته ساده که با یکدیگر در یک نقطه مشترک هستند، محدود می‌شوند. مجموعه ژولیا متشکل از این منحنی‌های فرکتالی همراه با همه پیش تصویرهای آنها تحت f^k می‌باشد.

مثال‌های متنوعی در شکل‌های ۱۴-۶ و ۱۴-۷ نشان داده شده‌اند. "جوانه‌ها" روی مجموعه مندلبروت متناظر با مدارهای جذب کننده با دوره p در شکل ۱۴-۸ نمایش داده شده‌اند.

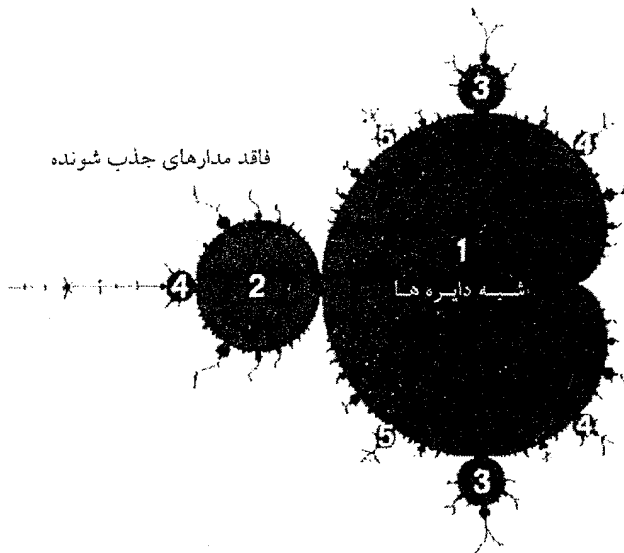
پیچیده‌ترین مجموعه‌های ژولیای $J(f_c)$ که سخت‌ترین تجزیه و تحلیل را دارند، مربوط به مقادیر "استثنایی" c در روی مرز M می‌باشند. اگر c روی مرز دلگون یا یک جوانه M باشد، آنگاه f_c یک نقطه تناوبی آزاد دارد. اگر c در یک "گردنه" که یک جوانه به ناحیه اصلی تماس دارد واقع باشد، آنگاه $J(f_c)$ شامل یک سری از "پی‌ها" است که مرز آن را به نقاط تناوبی بی‌تفاوت متصل می‌کنند. برای c در هر جای دیگر از مرز دلگون مجموعه ژولیا می‌تواند شامل "قرص‌های زیگل" باشد. مجموعه ژولیای $J(f_c)$ شامل تعدادی نامتناهی از منحنی‌های احاطه کننده ناحیه‌های باز می‌باشد که f_c هر ناحیه را به یک ناحیه "بزرگ‌تر" می‌نگارد تا زمانی که ناحیه شامل نقطه ثابت به دست آید. درون این قرص زیگل، f_c نقاط روی دایره‌های پایدار را حول نقطه ثابت دوران می‌دهد.

هنوز هم حالت‌های دیگری وجود دارند. اگر c روی یکی از "پرز"های M باشد آنگاه، $J(f_c)$ می‌تواند دندریت باشد، یعنی شبیه 3. این وضع هنگامی روی می‌دهد که یک تکرار نقطه بحرانی 0 تناوبی باشد، یعنی به ازای اعدادی صحیح مانند k و q داشته باشیم

$$f_c^{k+q}(0) = f_c^k(0)$$

گفتیم که کپی‌های مینیاتوری از M روی پرزهای M قرار گرفته‌اند. اگر c متعلق به یکی از اینها باشد، آنگاه $J(f_c)$ به شکل دندریت خواهد بود، اما با کپی‌های ریزی از مجموعه ژولیا از مقدار متناظر از c در بخش اصلی از M که در "رفوس" دندریت درج شده‌اند.

استفاده از کامپیوتر، روش خوبی برای بررسی برد مجموعه‌های ژولیا و در واقع مجموعه‌های ژولیای هر تابع دیگر می‌باشد. برای رسم مجموعه‌های ژولیا بر مبنای ویژگی‌هایی که گفتیم، دو شیوه معمول وجود دارد.



شکل ۱۴-۸ دوره‌های مدارهای جذب کننده f_c به ازای c در بخش‌های گوناگونی از مجموعه مندلیبروت M . اگر c درون دلگون اصلی باشد، f_c دارای یک نقطه ثابت جذب کننده می‌باشد و مجموعه ژولیا $J(f_c)$ یک شبه دایره است. به ازای c هایی که در جوانه‌های M قرار دارند، f_c یک مدار جذب کننده با دوره p که نمایش داده شده است، دارد، با p ناحیه درون مجموعه ژولیا $J(f_c)$ که در هر نقطه نیشگان گرفتگی به هم می‌رسند. خارج از M ، تابع f_c دارای مدار جذب کننده نمی‌باشد و $J(f_c)$ کلاً ناهمبند می‌باشد.

در روش اول، یک نقطه دفع کننده تناوبی z انتخاب می‌کنیم. به ازای k ی مناسب می‌توانیم مجموعه تصاویر معکوس $J_k = f^{-k}(z)$ را حساب کنیم. بنابر نتیجه ۱۴-۷ (ب) این 2^k نقطه در J قرار دارند، و با بزرگ شدن k ، J_k را پر می‌کنند. یک اشکال این روش برای تصویر کردن J این است که لزومی ندارد که نقاط J_k در سراسر J به طور یکنواخت توزیع شده باشند — آنها ممکن است در بعضی بخش‌های J تمایل به انباشتگی داشته باشند و در بخش‌های دیگر پراکنده شوند. نتیجتاً، حتی با k ی کاملاً بزرگ، ممکن است بخش‌هایی از J از دست بروند. (برای f_c با c ی نزدیک به مرز M ، احتمال این رویداد وجود دارد). راه‌های گوناگونی برای حذر از این مشکل وجود دارد. برای نمونه، با $J_0 = \{z\}$ ، به جای گرفتن $J_k = f^{-1}(J_{k-1})$ به ازای هر k می‌توانیم یک زیرمجموعه J_k از J_{k-1} را با افزودن تنها یک نقطه از هر انباشتگی "کوچک" انتخاب کنیم. این کار تضمین می‌کند که ما

در هر مرحله از تکرار با یک مجموعه از نقاط J که به طور عادلانه‌ای توزیع شده‌اند، کار می‌کنیم؛ این کار پیچیدگی‌های محاسبه را نیز کاهش می‌دهد.

روش دوم، آزمایش نقاط تک می‌باشد که آیا نزدیک به مجموعه ژولیا می‌باشند یا نه. فرض کنید، برای مثال، که f دارای دو یا چند نقطه ثابت جذب کننده (اگر f یک چندجمله‌ای باشد، ∞ نیز جزو چنین نقاطی است) باشد. اگر z نقطه‌ای از $J(f)$ باشد، آنگاه بنابر لم ۱۴-۱۱، نقاطی به دلخواه نزدیک به z در حوزه جذب هر نقطه جذب کننده وجود دارند. برای یافتن J ناحیه‌ای از C را به شبکه‌های ریز تقسیم می‌کنیم. سرنوشت نهایی چهار گوشه هر شبکه مربعی را تحت تکرارهای f ، آزمایش می‌کنیم. اگر دو تا از گوشه‌ها به نقاط متفاوتی جذب شوند، گمان می‌رود که آن شبکه مربعی دارای نقطه‌ای از J باشد. اغلب، مربع‌های دیگر، "مجموعه فاتو"، بر حسب اینکه رؤس مربع به چه نقطه‌ای جذب شوند، رنگ می‌شوند، و احتمالاً بر حسب اینکه k امین تکرارها به ازای یک k ی ثابت به چه اندازه به نقطه جذب کننده نزدیک باشند، سایه زده می‌شوند.

استفاده از هر دو روش در بعضی حالت‌ها ممکن است ما را به نتیجه مطلوب نرساند. داشتن معلومات هر چه بیشتر می‌تواند در چیره شدن با مشکلاتی که روی می‌دهند سودمند باشد.

۱۴-۴ تشریح ویژگی‌های شبه — دایره‌ها توسط بعد

در بخش قبل دیدیم که اگر C درون دگون اصلی مجموعه مندلیبروت باشد، آنگاه مجموعه ژولیای تابع $f_c(z) = z^2 + c$ یک منحنی بسته ساده می‌باشد. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که به ازای هر عدد صحیح $n \geq 2$ ، مشروط بر آنکه C به اندازه کافی کوچک باشد، مجموعه ژولیای تابع $f(z) = z^n + c$ یک منحنی بسته ساده خواهد بود، و در واقع مطلب مشابهی برای تابع $f(z) = z^2 + g(z)$ به ازای گستره متنوعی از توابع تحلیلی g که "به اندازه کافی کوچک" و نزدیک به مبدأ می‌باشند، برقرار است. بنابراین همه این توابع دارای مجموعه‌های ژولیایی هستند که از لحاظ توپولوژیکی مشابه می‌باشند — همه آنها با یک دایره هم‌مورف هستند. مطلب شگفت‌انگیز دیگر این است که آنها به عنوان فرکتال شبیه هم هستند، به عبارت دیگر معادل لپشیتز یکدیگر می‌باشند اگر و فقط اگر دارای بعد هاوسدورف یکسان باشند. البته، اگر دو مجموعه دارای بعد متفاوت باشند، نمی‌توانند معادل لپشیتس یکدیگر باشند (نتیجه ۲-۴). به هر حال، عکس مطلب در این موقعیت خاص برقرار می‌باشد.

یک مجموعه F را یک دایره شبه خود متشابه یا شبه دایره می‌نامیم اگر شرایط زیر برقرار

باشند

(i) F با یک دایره هم‌تومورف باشد (یعنی F یک منحنی بسته ساده باشد).

$$(ii) \quad 0 < H^s(F) < \infty \quad \text{که در آن } s = \dim_H F$$

(iii) ثابت‌های $a, b, r > 0$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر زیرمجموعه

از F که $|U| \leq r$ ، یک نگاشت $\varphi: U \rightarrow F$ وجود داشته باشد به طوری

که

$$(14-10) \quad a|x-y| \leq |U| \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq b|x-y| \quad (x, y \in F).$$

شرط "شبه خود متشابه" (iii) می‌گوید که بخش‌های به دلخواه کوچک از F تقریباً مشابه

با بخش بزرگی از F می‌باشند.

قضیه زیر وابسته به استفاده از اندازه s - بعدی هاوسدورف برای اندازه گیری "فاصله" دور

یک شبه دایره می‌باشد.

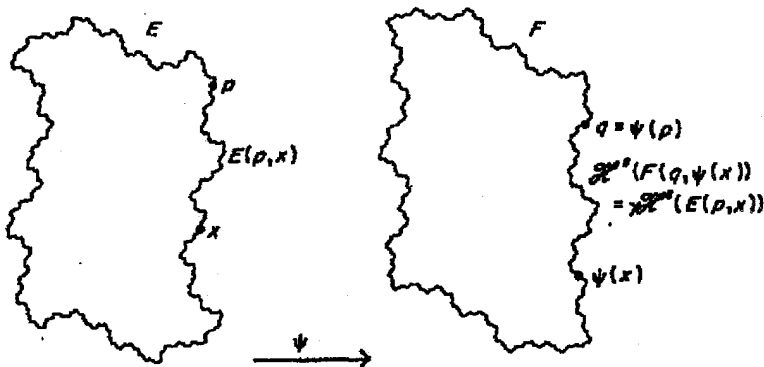
قضیه ۱۴-۱۷

شبه دایره‌های E و F معادل دو-لیپشیتس یکدیگر می‌باشند اگر و فقط اگر

$$\dim_H E = \dim_H F.$$

طرح برهان. اگر یک نگاشت دو-لیپشیتس بین E و F وجود داشته باشد، آنگاه بنابر نتیجه

$$4-2 (b), \quad \dim_H E = \dim_H F.$$



شکل ۱۴-۹ برقرار کردن یک نگاشت دو-لیپشیتس ψ بین دو شبه دایره با بعد هاوسدورف s

فرض کنید که $\dim_H E = \dim_H F$ و $E(x, y)$ "کمان" ما بین نقاط $x, y \in E$ روی E باشد که به صورت ساعتگرد در نظر گرفته شده است، و نماد مشابهی را نیز برای کمان های F استفاده می کنیم. شرایط (ii) و (iii) ایجاب می کنند که مقدار $H^s(E(x, y))$ در $x, y \in E$ پیوسته باشد و اگر $x \neq y$ ، مثبت می باشد. ادعا می کنیم که ثابت های $c_1, c_2 > 0$ وجود دارند به طوری که

$$(11-14) \quad c_1 \leq \frac{H^s(E(x, y))}{|x - y|^s} \leq c_2$$

هر گاه کمان $E(x, y)$ از کمان $E(y, x)$ کوتاه تر باشد، یعنی $H^s(E(x, y)) \leq H^s(E(y, x))$. فرض کنید $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک باشد. اگر $|x - y| \geq \varepsilon$ آنگاه (11-14) با استفاده از پیوستگی برای ثابت های مناسب برقرار است. اگر $|x - y| < \varepsilon$ آنگاه یک نگاشت $\varphi: E(y, x) \rightarrow E$ وجود دارد که در (14-10) صدق می کند به طوریکه $|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq \varepsilon$. نامعادلات (14-10)، (2-8) و (2-9) ایجاب می کنند که اگر x و y با $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ عوض شوند، آنگاه نسبت (14-11) مقدار اندکی تغییر کند، بنابراین (14-11) به ازای مقادیر مناسب c_1 و c_2 و هر $x, y \in E$ برقرار می ماند.

حال نقاط پایه ای $p \in E$ و $q \in F$ را به دلخواه انتخاب کنید. قرار دهید $\gamma = H^s(E)/H^s(F)$ و $\psi: E \rightarrow F$ را به گونه ای تعریف کنید که $\psi(x)$ نقطه ای از F باشد که

$$H^s(E(p, x)) = \gamma H^s(F(q, \psi(x)))$$

(شکل 14-9 را ببینید). آنگاه ψ یک دوسوی پیوسته می باشد، و همچنین

$$H^s(E(x, y)) = \gamma H^s(F(\psi(x), \psi(y))) \quad (x, y \in E).$$

با استفاده از (14-11) همراه با نامعادلات مشابهی برای کمان های F ، این تساوی نتیجه می دهد که اگر $x \neq y$ ،

$$c_3 \leq \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} \leq c_4$$

به گونه ای که ψ دو لیبشیتس می باشد و برهان کامل می شود. □

نتیجه 14-18

فرض کنید که مجموعه های ژولیای J_1 و J_2 از چند جمله ایهای f_1 و f_2 منحنی های بسته ساده ای باشند. فرض کنید f_i روی J_i اکیداً دفع کننده باشد (یعنی به ازای $i=1, 2$ ،

اگر $|f_1'(z)| > 1$. آنگاه J_1 و J_2 معادل دو لپیشیتس یکدیگر هستند اگر و فقط اگر $\dim_H J_1 = \dim_H J_2$.

برهان. می‌توان نشان داد که اگر یک چندجمله‌ای f روی مجموعه ژولیا J ، اکیداً دفع کننده باشد، آنگاه $0 < H^s(J) < \infty$ ، که در آن $s = \dim_H J$. به علاوه، به ازای یک زیرمجموعه داده شده U از J ، می‌توانیم k را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $f^k(U)$ دارای قطر قابل مقایسه‌ای با قطر خود J باشد، و (۱۴-۱۰) با گرفتن $\varphi = f^k$ برقرار باشد (این، شبه خود تشابهی J را می‌رساند). بنابراین J_1 و J_2 شبه دایره‌هایی هستند که قضیه ۱۴-۱۷ را می‌توان برای آنها به کار برد. \square

۱۴-۵ روش نیوتن برای حل معادلات چندجمله‌ای

هر کس که آنالیز عددی خوانده باشد، حتماً ریشه معادلات را با استفاده از روش نیوتن به دست آورده است. فرض کنید $p(x)$ یک تابع با مشتق پیوسته باشد. اگر $f(x) = x - p(x)/p'(x)$ آنگاه تکرارهای $f^k(x)$ به جواب $p(x) = 0$ میل می‌کند مشروط بر آنکه در نقطه جواب، $p'(x) \neq 0$ ، و مقدار اولیه x به طور مناسب انتخاب شده باشد. کیلی بررسی این روش در صفحه مختلط را پیشنهاد کرد، و به ویژه اینکه چه نقاط اولیه‌ای از C به سمت چه صفرهایی از p تکرار می‌شوند.

فرض کنید $p: C \rightarrow C$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد و تابع گویای $f: C \cup \{\infty\} \rightarrow C \cup \{\infty\}$ را به صورت زیر شکل دهید

$$f(z) = z - p(z)/p'(z). \quad (14-12)$$

آنگاه نقاط ثابت f ، که به صورت $p(z)/p'(z) = 0$ داده می‌شوند، همراه با ∞ صفرهای p را تشکیل می‌دهند. با مشتق گیری، درمی‌یابیم که

$$f'(z) = p(z)p''(z)/p'(z)^2 \quad (14-13)$$

پس یک صفر z از p یک نقطه ثابت ابر جذب کننده از f خواهد بود، مشروط بر آنکه $p'(z) \neq 0$. اگر $|z|$ بزرگ باشد، $f(z) \sim z(1-1/n)$ ، که در آن n درجه p می‌باشد، بنابراین ∞ یک نقطه دفع کننده برای f می‌باشد. طبق معمول برای حوزه جذب صفر w ،

می‌نویسیم

$$A(w) = \{z : f^k(z) \rightarrow w\} \quad (14-14)$$

یعنی مجموعه نقاط ابتدایی که تحت تکرارهای نیوتن به w میل می کنند. از آنجا که صفرها جذب کننده می باشند، حوزه $A(w)$ حاوی ناحیه بازی شامل w می باشد. خواهیم دید که، با وجود این، $A(w)$ می تواند مجموعه ای پیچیده و دور از w باشد.

نظریه مجموعه های ژولیا برای یک تابع گویا تقریباً مشابه آنچه که برای چندجمله ای ها در بخش ۱۴-۱ توسعه داده شدند، می باشد، مشروط بر آنکه نقطه $\{\infty\}$ را به عنوان یک نقطه معمولی در نظر بگیریم. تفاوت های اصلی عبارتند از اینکه اگر f یک تابع گویا باشد، لازم نیست $J(f)$ کراندار باشد (هر چند که باید بسته باشد) و ممکن است $J(f)$ دارای نقاط درونی باشد، که در این حالت $J(f) = C \cup \{\infty\}$. به هر حال، لم ۱۴-۱۱ برقرار می ماند، یعنی $J(f)$ به ازای هر نقطه ثابت جذب کننده w ، مرز $A(w)$ باشد. پس $J(f)$ کم و بیش هنگام تجزیه و تحلیل دامنه جذب ریشه ها در روش نیوتون اهمیت خواهد داشت.

یک حالت سر راست، چندجمله ای درجه دوم

$$p(z) = z^2 - c$$

با صفرهای $\pm \sqrt{c}$ می باشد (همانند قبل، چندجمله ای های درجه دوم کلی تر را می توان توسط یک مزدوج به این شکل تبدیل کرد). فرمول نیوتن (۱۴-۱۲) به صورت زیر در می آید

$$f(z) = (z^2 + c)/2z.$$

از این رو

$$f(z) \pm \sqrt{c} = (z \pm \sqrt{c})^2 / 2z$$

بنابراین

$$(۱۴-۱۵) \quad \frac{f(z) + \sqrt{c}}{f(z) - \sqrt{c}} = \left(\frac{z + \sqrt{c}}{z - \sqrt{c}} \right)^2.$$

این تساوی بلافاصله نتیجه می دهد که اگر $|z + \sqrt{c}| / |z - \sqrt{c}| < 1$ ، آنگاه $|f^k(z) + \sqrt{c}| / |f^k(z) - \sqrt{c}| \rightarrow 0$ و هنگامی که $k \rightarrow \infty$ ، $f^k(z) \rightarrow -\sqrt{c}$ و به طور مشابه اگر $|z + \sqrt{c}| / |z - \sqrt{c}| > 1$ ، آنگاه $f^k(z) \rightarrow \sqrt{c}$. مجموعه ژولیای $J(f)$ خط $|z + \sqrt{c}| = |z - \sqrt{c}|$ می باشد (عمود منصف $-\sqrt{c}$ و \sqrt{c}) و $A(-\sqrt{c})$ و $A(\sqrt{c})$ نیم صفحه های دو طرف هستند. (با فرض $h(z) = (z + \sqrt{c}) / (z - \sqrt{c})$ در (۱۴-۱۵) نتیجه می شود $f(z) = h^{-1}(h(z))^2$ ، بنابراین f با نگاشت $g(z) = z^2$ مزدوج و در نتیجه دارای دینامیک مشابهی با آن می باشد.) در این حالت وضعیت بسیار منظم است — هر نقطه آغازین، تحت تکرارهای f به نزدیکترین صفر p می رسد.

مثال‌های درجه دو باید ما را قانع سازند که دامنه‌های جذب صفرهای هر چندجمله‌ای تحت تکرارهای نیوتن به نحو معقولانه‌ای منظم باشند. با وجود این، برای چندجمله‌ایهای از درجه بالاتر شرایط اساساً فرق می‌کند. لم ۱۴-۱۱ اشاره می‌کند که چیز بسیار عجیبی روی می‌دهد. اگر p دارای صفرهای z_n, \dots, z_1 باشد که $p'(z_i) \neq 0$ ، لم ۱۴-۱۱ می‌گوید که مجموعه ژولیا‌ی تابع f مرز دامنه جذب هر صفر می‌باشد:

$$J(f) = \partial A(z_1) = \dots = \partial A(z_n).$$

یک نقطه روی مرز هر یک از دامنه‌های جذب باید روی مرز هر یک از آنها باشد؛ از آنجا که $J(f)$ ناشمارا می‌باشد، تعداد بسیار زیادی از چنین نقاط مرزی چندگانه وجود دارد. تلاش برای مجسم کردن سه مجموعه مجزا یا بیشتر با این ویژگی، خواننده را مطمئن خواهد کرد که این مجموعه‌ها باید واقعاً بسیار پیچیده باشند.

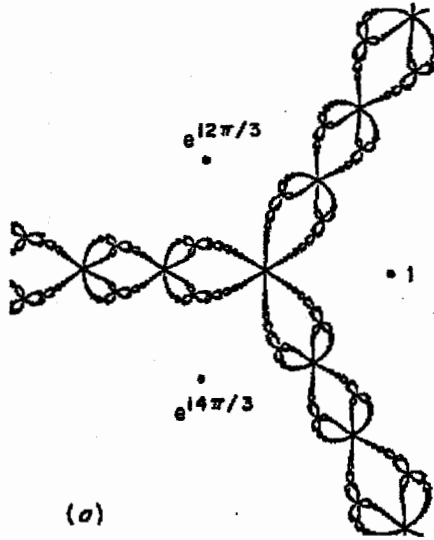
اکنون یک مثال خاص را بررسی می‌کنیم. چندجمله‌ای درجه سوم

$$p(z) = z^3 - 1$$

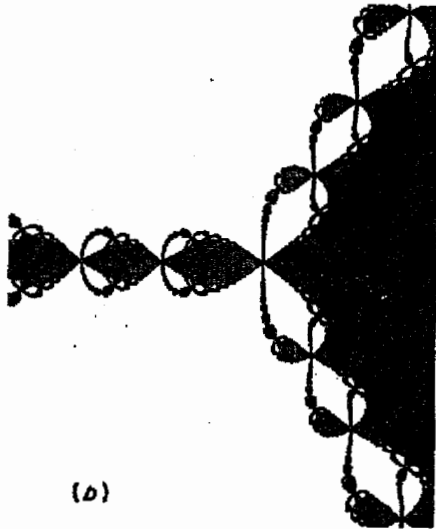
دارای صفرهای ۱، $e^{i2\pi/3}$ ، $e^{i4\pi/3}$ و تابع نیوتن

$$f(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}.$$

می‌باشد. تبدیل $\rho(z) = ze^{i2\pi/3}$ یک دوران 120° حول مبدأ می‌باشد. به سادگی می‌توان دید که $f(\rho(z)) = \rho(f(z))$ ، به عبارت دیگر ρ یک تزویج از f به خودش می‌باشد. این نتیجه می‌دهد که یک دوران 120° حول مبدأ، $A(w)$ را به ازای هر سه صفر w ، به $A(we^{i2\pi/3})$ می‌نگارد، به گونه‌ای که مجموعه ژولیا دارای تقارن سه تایی حول مبدأ می‌باشد. (البته، این تقارن‌ها از تقارن قرار گرفتن سه صفر p ، انتظار می‌رود). اگر z حقیقی باشد آنگاه $f^k(z)$ به ازای هر k ، حقیقی باقی می‌ماند، و با استدلال‌های ساده معلوم می‌شود که به جز برای تعدادی شمارش‌پذیر از اعداد حقیقی z ، به ۱ میل می‌کند. پس $A(1)$ شامل محور حقیقی به جز تعدادی متناهی از نقاط می‌باشد، و همچنین جز برای تعدادی متناهی از نقاط، بنابر تقارن، $A(e^{i2\pi/3})$ و $A(e^{i4\pi/3})$ نیز شامل خطوط گذرنده از مبدأ می‌باشند که با محور حقیقی زاویه 120° و 240° می‌سازند. همچنین می‌دانیم که هر $A(w)$ شامل ناحیه بازی نزدیک w می‌باشد، که هر نقطه روی مرز یکی از $A(w)$ ‌ها، روی مرز هر سه تا می‌باشد، و همچنین اینکه تعداد ناشمارایی از این "نقاط سه تایی" وجود دارد. بسیاری افراد برای هضم این وضعیت معماگونه، نیازمند شکل‌های کامپیوتری می‌باشند، شکل ۱۴-۱۰ را ببینید.



(a)



(b)

شکل ۱۴-۱۰ روش نیوتن برای $p(z) = z^3 - 1$ مجموعه ژولیا به ازای تابع نیوتن $f(z) = (z^2 + 1)/3z^2$ در (a) نشان داده شده است، و دامنه جذب صفر به رنگ سیاه در (b) نمایش داده شده است.

دامنه $A(1)$ در شکل ۱۴-۱۰ (ب) با رنگ سیاه نشان داده شده است؛ توجه کنید که حوزه‌های جذب دو صفر دیگر، که با دوران 120° و 240° به دست می‌آیند، طبیعتاً در تصویر مشخص می‌شوند. مجموعه ژولیا که در شکل ۱۴-۱۰ (آ) نشان داده شده است، مرز سه حوزه می‌باشد و از سه "زنجیر" درست شده است که از مبدأ دور می‌شوند. این زنجیرهای فرکتالی ساختار ظریفی دارند — نزدیک به هر نقطه از $J(f)$ ، یک کپی با تغییر ناچیزی از تصویر واقع در مبدأ با شش مولفه از $A(W)$ که در یک نقطه به هم می‌رسند، وجود دارد. این نتیجه ۱۴-۷ (ب) را نشان می‌دهد: $J(f)$ بستار $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(0)$ می‌باشد، یعنی اگر z در $J(f)$ باشد، آنگاه یک نقطه w به دلخواه نزدیک به z و یک عدد صحیح k وجود دارد، به طوری که $f^k(w) = 0$ اما f^k موضعاً یک نگاشت همدیس است، یعنی معکوس موضعی $(f^k)^{-1}$ یک همسایگی از 0 را به یک همسایگی "تقریباً مشابه" از w می‌نگارد. مجموعه ژولیای $J(f)$ شبه خود تشابهی را نشان می‌دهد.

این تازه اول کار است. دامنه جذب صفرهای چندجمله‌ایهای دیگر از درجه سه یا بیشتر، در واقع از توابع تحلیلی دیگر را، می‌توان با کمک ترکیبی از تئوری و نمودارهای کامپیوتری، بررسی کرد. این کار به مجموعه‌های فراوان با پیچیدگی‌های بسیار زیاد منتهی می‌شود که هنوز درست شناخته نشده‌اند.

در این فصل دست بر آن زمینه‌های جذاب و پیچیده‌ای از ریاضیات گذاشتیم که فرکتال‌ها نقشی اساسی در آنها بازی می‌کنند. این زمینه‌ای است که در آن کارهای کامپیوتری با توجه به زمینه ریاضی راه‌هایی را به ما می‌نمایانند. تنوع موضوع بی‌پایان است — می‌توانیم مجموعه ژولیا از چندجمله‌ایهای با درجه بالاتر و از توابع تحلیلی دیگر، همچون $\exp z$ ، و همچنین مجموعه‌های پایدار از تبدیلات غیر تحلیلی از صفحه را بررسی کنیم. با پیدایش گرافیک رنگی کامپیوتری نسبتاً سهل‌الوصول، این نظریه‌ها مبنای بسیاری از آثار هنری کامپیوتری شده‌اند. یک تابع با ضابطه‌ای ساده می‌تواند به تصاویر بسیار پیچیده و در عین حال منظم منجر شود، که اغلب بسیار زیبا و گاهی عجیب و غریب می‌باشند.

۱۴-۶ نکات و منابع

قسمت عمده نظریه اساسی تکرار توابع مختلط توسط $Julia$ (۱۹۱۸) و $Fatou$ (۱۹۱۹) توسعه داده شده است. طی سال‌های بسیار، تقریباً فعالیتی روی این موضوع انجام نمی‌شد، تا اینکه با پیشرفت کافی گرافیک کامپیوتری، این امکان به وجود آمد تا بتوان شکل پیچیده مجموعه‌های ژولیا را نشان داد. اخیراً توجه فوق‌العاده‌ای به این موضوع شده است. شور و شوق

بسیاری برای رسم مجموعه‌های ژولیا و مجموعه مندلبروت توسط کامپیوتر به وجود آمده است، و این احتمالاً به خاطر احساس خلاقیتی است که به برنامه‌نویس می‌دهد، اما از دید ریاضی هم، پیشرفت‌های قابل توجهی در این موضوع صورت گرفته است.

برای بررسی نظریه مقدماتی متغیرهای مختلط، کتاب *Ahlfors* (۱۹۷۹) را ببینید. کتاب *Peitgen* و *Richter* (۱۹۸۶) شامل توضیحات کاملی در مورد تکرار توابع مختلط می‌باشد. کتاب *Blanchard* (۱۹۸۴) شامل بررسی کاملی از ریاضیات می‌باشد و کتاب *Devaney* (۱۹۸۶) شامل برخی مباحث آنالیز ریاضی به طور مفصل می‌باشد. کتاب *Saupe* (۱۹۸۷) در مورد محاسبه مجموعه ژولیا بحث می‌کند. کتاب *Mandelbrot* (۱۹۸۰) مجموعه‌ای که به نام خود او می‌باشد را معرفی می‌کند؛ قضیه اساسی ۱۴-۱۴ در کتاب *Brolin* (۱۹۶۵) آمده است. فرمول (۹-۱۴) برای محاسبه $J(f_c)$ به کتاب *Ruelle* (۱۹۸۲) مربوط می‌شود. برای مطالب جزئی‌تر در زمینه توصیف شبه دایره‌ها توسط بعد، به کتاب *Falconer* و *Marsh* (۱۹۸۹) مراجعه کنید. فرکتال‌هایی که وابسته به روش نیوتن هستند در کتاب‌های *Peitgen* و *Richter* (۱۹۸۶)، *Saupe*، *Peitgen* و *von Haeseler* (۱۹۸۴) و کتاب *Curry*، *Sullivan* و *Garnett* (۱۹۸۳) مورد بحث قرار گرفته‌اند.

تمرین‌ها

- ۱-۱۴ به طور مستقیم، نشان دهید که اگر f یک چند جمله‌ای مختلط باشد، آنگاه خانواده $\{f^k\}_k$ در هیچ یک از نقاط دفع کننده تناوبی f نرمال نیست.
- ۲-۱۴ مجموعه ژولیای $f(z) = z^2 + 4z + 2$ را تشریح کنید.
- ۳-۱۴ نشان دهید که مجموعه ژولیای $f(z) = z^2 - 2$ در بازه حقیقی $[-2, 2]$ قرار می‌گیرد. از قضیه ۱۴-۱۴ استفاده کنید و نتیجه بگیرید که مجموعه ژولیا همبند است، و از اینرو، این مجموعه برابر با بازه $[-2, 2]$ می‌باشد.
- ۴-۱۴ نشان دهید که f_c دقیقاً هنگامی دارای یک نقطه ثابت جذب کننده می‌باشد که $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}e^{i\theta})$ مجموعه مندلبروت می‌باشد، قرار داشته باشد.
- ۵-۱۴ نشان دهید که اگر c یک عدد غیر حقیقی با شرط $|c| < \frac{1}{4}$ باشد و همچنین $w = \frac{1}{2}(1 + (1 - 4c)^{1/2})$ نقطه ثابت دفع کننده $f_c(z) = z^2 + c$ باشد، آنگاه حقیقی $f'_c(w)$ نیست. نتیجه بگیرید که منحنی بسته ساده‌ای که مجموعه ژولیای

$J(f_c)$ را تشکیل می‌دهد، نمی‌تواند در W دارای مماس باشد. از این رو نتیجه بگیرید که این منحنی دارای هیچ کمان دیفرانسیل پذیری نمی‌باشد.

۶-۱۴ نشان دهید که اگر $|c| < 1$ ، آنگاه مجموعه ژولیا $f(z) = z^3 + cz$ یک منحنی بسته ساده می‌باشد.

۷-۱۴ تخمینی برای بعد هاوسدورف مجموعه ژولیا $f(z) = z^3 + c$ هنگامیکه $|c|$ بزرگ می‌باشد، به دست آورید.

۸-۱۴ نشان دهید که اگر W یک نقطه ثابت جذب کننده (متناهی) f_c باشد، آنگاه حوزه جذب $A(W)$ باید شامل نقطه c باشد. (توجه: نشان دهید که در غیر این صورت،

یک مجموعه باز کوچک شامل W وجود دارد که در آن تکرارهای معکوس f^{-k} از f می‌توانند به طور یکتا تعریف شوند و یک خانواده نرمال شکل دهند، که غیر ممکن

است، چرا که W یک نقطه ثابت دفع کننده f^{-1} می‌باشد.) نتیجه بگیرید که f_c می‌تواند دارای حداکثر یک نقطه ثابت جذب کننده باشد. این مطلب را تعمیم دهید

و نشان دهید که اگر W یک نقطه ثابت جذب کننده برای یک چندجمله‌ای f باشد، آنگاه $A(W)$ به ازای یک z که $f'(z) = 0$ ، شامل یک نقطه $f(z)$ می‌باشد.

۹-۱۴ فرض کنید f یک چندجمله‌ای درجه دوم باشد. با اعمال تمرین ۱۴-۸ بر f^p به ازای p های صحیح مثبت، نشان دهید که f می‌تواند دارای حداکثر یک مدار دوره‌ای جذب کننده باشد.

۱۰-۱۴ یک برنامه کامپیوتری بنویسید که مجموعه ژولیا z توابع را رسم کند (پایان بخش ۱۴-۳ را ببینید). این برنامه را ابتدا با توابع درجه دو، و سپس آن را با

چندجمله‌ای‌های دیگر و توابع گویا، و بعد با توابع دیگر همچون $\exp z$ امتحان کنید.

۱۱-۱۴ با استفاده از یک کامپیوتر، دامنه‌های جذب را برای صفرهای چند چندجمله‌ای دیگر، مثلاً برای $p(z) = z^4 - 1$ یا $p(z) = z^3 - z$ ، تحت تکرار روش نیوتن بررسی کنید.

فصل ۱۵ فرکتال‌های تصادفی

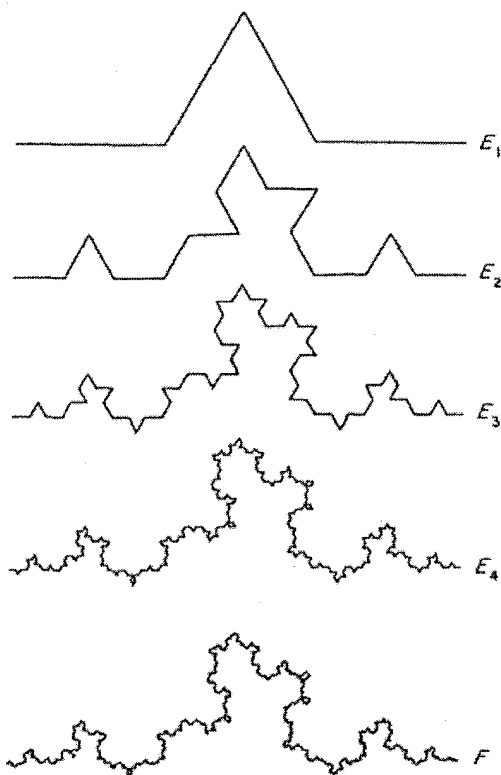
بسیاری از روش‌های ساخت فرکتال‌ها که در این کتاب با آنها مواجه شدیم نمونه‌های تصادفی نیز دارند. برای مثال، در روش ساخت منحنی کخ، هر بار که یک سوم میانی هر پاره خط را با دو ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع جایگزین می‌کنیم، می‌توانیم برای تعیین این که بخش جدید را در "بالا"ی تکه قبلی قرار دهیم یا در "پایین" آن، سکه‌ای پرتاب کنیم. پس از چند مرحله، به یک منحنی که در ظاهر نسبتاً نامنظم است می‌رسیم که با وجود این، ویژگی‌های مشخصی از منحنی کخ را حفظ می‌کند؛ شکل ۱۵-۱ را ببینید.

ساختار مجموعه یک سوم میانی کانتور را به روش‌های مختلفی می‌توان تصادفی کرد، همانند شکل ۱۵-۲. هر بار یک پاره خط را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم. می‌توانیم به جای اینکه همیشه قسمت وسط را حذف کنیم، با پرتاب کردن یک طاس برای حذف یکی از قسمت‌ها تصمیم‌گیری کنیم. به روش دیگر، می‌توانیم طول بازه‌ها را به طور تصادفی انتخاب کنیم، به گونه‌ای که در مرحله k ام، 2^k بازه با طول‌های متفاوت داشته باشیم، که نتیجه کار به ظاهر یک فرکتال نسبتاً نامنظم است.

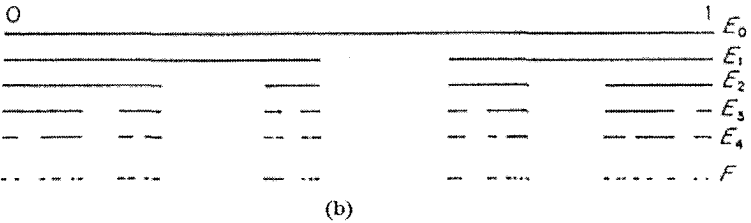
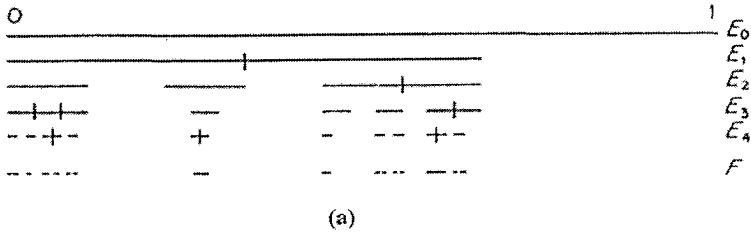
هر چند که چنین فرکتال‌هایی دارای خودتشابهی فرکتال غیر تصادفی نظیر خود نمی‌باشند، ظاهر غیر یکنواخت آنها اغلب به پدیده‌های طبیعی مانند خط ساحلی، نقشه سطوح جغرافیایی یا مرز ابرها، نسبتاً نزدیک‌تر است. در واقع، روش‌های ساخت فرکتال‌های تصادفی مبنای بسیاری از مناظر شگفت‌انگیز ترسیم شده توسط کامپیوتر می‌باشند.

بیشتر فرکتال‌هایی که در این کتاب مورد بحث قرار گرفتند شامل دنباله‌ای از تقریب‌های E_k می‌باشند که هر کدام از تقریب پیشین خود با تطریف جزئیات به صورت افزایشی به دست می‌آید، که یک فرکتال F مجموعه حدی این دنباله می‌باشد. در صورتی که یک فرکتال نام

تصادفی می‌دهیم که در هر مقیاسی تصادفی باشد، پس بجا است که یک عامل تصادفی در هر مرحله از ساختار معرفی شود. اگر اندازه تغییرات تصادفی را به مقیاس مربوط کنیم، می‌توانیم ترتیبی دهیم که آن فرکتال به طور آماری خود متشابه باشد به صورتی که بزرگنمایی قسمت‌های کوچک توزیع آماری مشابهی با کل مجموعه داشته باشد. هنگامی که بزرگنمایی قسمت‌های کوچک عیناً مثل کل مجموعه باشد، آنگاه آن مجموعه قابل قیاس با مجموعه‌های خود متشابه (غیر تصادفی، فصل ۹ را ببینید) خواهد بود.



شکل ۱۵-۱ روش ساخت یک "منحنی ون کخ تصادفی". در هر مرحله برای تعیین اینکه دو مولفه جدید در کدام طرف مولفه حذف شده قرار گیرند، یک سکه پرتاب می‌کنیم.



شکل ۱۵-۲ دو مدل تصادفی از مجموعه کانتور. در (a) هر بازه به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود که به طور تصادفی بعضی از آنها انتخاب می‌شوند. در (b) دو زیربازه با طول تصادفی جایگزین هر بازه می‌شوند.

به منظور توضیح دقیق ساختارهای فرکتالی شامل تعداد نامتناهی مرحله‌های تصادفی، باید از نمادها و تعاریف نظریه احتمال استفاده کنیم، که بررسی اجمالی آن در بخش ۱-۴ آمده است.

۱-۱۵ یک مجموعه کانتور تصادفی

در اینجا یک تجزیه و تحلیل مفصل از یک ساختار خود تشابه آماری ارائه می‌دهیم. این مطالب شبیه توضیحات مجموعه یک سوم میانی کانتور است با این تفاوت که طول بازه‌ها در هر مرحله تصادفی می‌باشد.

به طور شهودی، یک ساختار $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ را در نظر می‌گیریم که در آن $[0,1] = E_0 \supset E_1 \supset \dots$ یک دنباله نزولی از مجموعه‌های بسته است و E_k اجتماعی از 2^k بازه "اولیه" مجزا می‌باشد. فرض می‌کنیم که هر بازه اولیه I در E_k شامل دو بازه I_L و I_R از E_{k+1} می‌باشد، که به ترتیب منتهی‌الیه‌های چپ و راست I می‌باشند. طول بازه‌ها

تصادفی هستند، و خاصیت خود تشابهی آماری را به وسیله این شرط اعمال می‌کنیم که نسبت‌های طول $|I_L|/|I|$ برای هر بازه اولیه I در ساختار، توزیع احتمالی یکسان و مستقلی داشته و مطلب مشابهی هم برای نسبت‌های $|I_R|/|I|$ برقرار باشد. "مجموعه کانتور تصادفی" F به طور آماری خود متشابه می‌باشد، از آن جهت که به ازای هر I توزیع مجموعه $F \cap I$ با توزیع مجموعه F یکسان، اما در مقیاس عامل $|I|$ می‌باشد.

این ساختار تصادفی را بر اساس اصطلاحات احتمال توضیح می‌دهیم. فرض کنید a و b ثابت‌هایی باشند که $0 < a \leq b < \frac{1}{2}$. فرض می‌کنیم Ω نشان‌دهنده دسته همه دنباله‌های نزولی از مجموعه‌های $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots = [0,1]$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند. مجموعه E_k شامل 2^k بازه مجزای بسته I_{i_1, \dots, i_k} می‌باشد، که در آن i_j ($1 \leq j \leq k$) برابر ۱ یا ۲ می‌باشد؛ شکل ۱۵-۳ را ببینید. بازه I_{i_1, \dots, i_k} از E_k شامل دو بازه $I_{i_1, \dots, i_k, 1}$ و $I_{i_1, \dots, i_k, 2}$ از E_{k+1} می‌باشد، که بازه‌های انتهایی سمت چپ $I_{i_1, \dots, i_k, 1}$ و $I_{i_1, \dots, i_k, 2}$ بر هم، و بازه‌های انتهایی سمت راست $I_{i_1, \dots, i_k, 1}$ و $I_{i_1, \dots, i_k, 2}$ نیز بر هم منطبق می‌باشند. می‌نویسیم $|I_{i_1, \dots, i_k, 1}|/|I_{i_1, \dots, i_k}| = C_{i_1, \dots, i_k}$ ، و فرض کنید که به ازای هر i_1, \dots, i_k ،

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \quad a \leq C_{i_1, \dots, i_k} \leq b$$

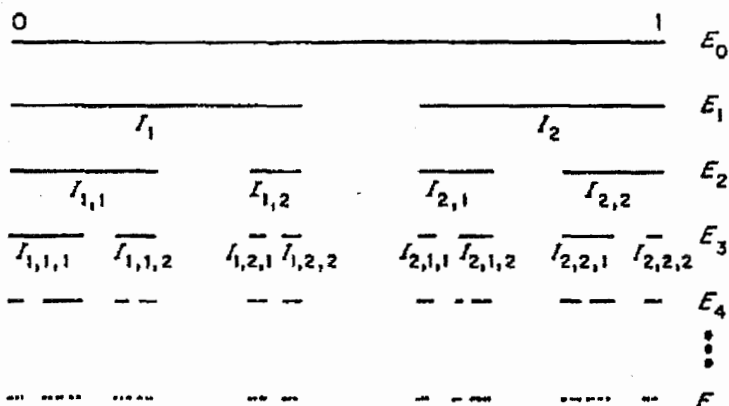
Ω را فضای نمونه در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که یک اندازه احتمال P روی یک خانواده به اندازه کافی بزرگ F از زیرمجموعه‌های Ω تعریف شده باشد، به طوری که نسبت‌های C_{i_1, \dots, i_k} متغیرهای تصادفی باشند. خودتشابهی آماری روی ساختار را با این الزام که به ازای هر دنباله i_1, \dots, i_k ، $i_1, \dots, i_k, 1$ ، $i_1, \dots, i_k, 2$ ، و $C_1 = |I_1|$ توزیعی یکسان با $|I_2| = C_2$ داشته باشد اعمال می‌کنیم. فرض می‌کنیم که C_{i_1, \dots, i_k} ها متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند، به استثنای اینکه به ازای هر دنباله i_1, \dots, i_k ، نیازی نیست $I_{i_1, \dots, i_k, 1}$ و $I_{i_1, \dots, i_k, 2}$ مستقل باشند. می‌توان نشان داد که $\dim_H F$ یک متغیر تصادفی است که می‌توان آن را بر حسب C_{i_1, \dots, i_k} ها بیان کرد. نتیجه زیر صورت تصادفی قضیه ۹-۳ می‌باشد.

قضیه ۱۵-۱

با احتمال ۱، مجموعه کانتور تصادفی F که در بالا توضیح داده شد دارای $\dim_H F = s$ می‌باشد، که در آن s جواب معادله امید زیر می‌باشد

$$E(C_1^s + C_2^s) = 1. \quad (1-15)$$

برهان. به سادگی می‌توان دید که $E(C_1^s + C_2^s)$ در s اکیداً صعودی است، پس (۱-۱۵) یک جواب یکتا خواهد داشت.



شکل ۱۵-۳ روش ساخت مجموعه کانور تصادفی که در قضیه ۱-۱۵ تجزیه و تحلیل شده است. نسبت طول‌ها $|I_{i_1, \dots, i_k, 1}| / |I_{i_1, \dots, i_k}|$ به ازای هر i_1, \dots, i_k دارای توزیع آماری یکسانی می‌باشد. برای نسبت $|I_{i_1, \dots, i_k, 2}| / |I_{i_1, \dots, i_k}|$ نیز مطلب مشابهی برقرار است.

با کمی مسامحه در علامت گذاری، فرض کنید $I \in E_k$ به معنای این باشد که بازه I یکی از بازه‌های اولیه برای E_k باشد. برای بازه‌های I نمادهای I_L و I_R را به ترتیب برای $I_{i_1, \dots, i_k, 1}$ و $I_{i_1, \dots, i_k, 2}$ به کار می‌بریم. نماد $E(X | F_k)$ را برای امید شرطی از متغیر X که به ازای هر دنباله i_1, \dots, i_k با $j \leq k$ اطلاع در مورد C_{i_1, \dots, i_j} به ما می‌دهد به کار می‌بریم. (به طور شهودی، تصور می‌کنیم که E_0, \dots, E_k ساخته شده‌اند، و اکنون داریم تجزیه و تحلیل می‌کنیم که پس از آن چه روی می‌دهد.) فرض کنید I_{i_1, \dots, i_k} یک بازه در E_k باشد. آنگاه با استفاده از خاصیت توزیع یکسان داریم

$$\begin{aligned} E(|I_{i_1, \dots, i_k, 1}|^s + |I_{i_1, \dots, i_k, 2}|^s | F_k) &= E(C_{i_1, \dots, i_k, 1}^s + C_{i_1, \dots, i_k, 2}^s | I_{i_1, \dots, i_k})^s \\ &= E(C_1^s + C_2^s | I_{i_1, \dots, i_k})^s \end{aligned}$$

با جمع بستن روی همه بازه‌های موجود در E_k به دست می‌آید

$$(۲-۱۵) \quad E\left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s | F_k\right) = \sum_{I \in E_k} |I|^s E(C_1^s + C_2^s).$$

این نتیجه می‌دهد که امید غیر شرطی در برابری

$$(۳-۱۵) \quad E\left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s\right) = E\left(\sum_{I \in E_k} |I|^s\right) E(C_1^s + C_2^s).$$

صدق می‌کند. اگر s جواب (۱-۱۵) باشد، معادله (۲-۱۵) به صورت زیر در می‌آید

$$(۴-۱۵) \quad E\left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s \mid F_k\right) = \sum_{I \in E_k} |I|^s.$$

خواننده‌های آشنا با نظریه احتمال تشخیص خواهند داد که (۴-۱۵) می‌گوید که دنباله متغیرهای تصادفی

$$(۵-۱۵) \quad X_k = \sum_{I \in E_k} |I|^s$$

در مورد F_k یک مارتینگل است. حقیقت بسیار مهم برای اهداف ما، که از خواننده می‌خواهیم که آن را بپذیرد، این است که در این وضعیت، با افزایش k ، X_k با احتمال ۱ به یک متغیر تصادفی X میل می‌کند به طوری که $E(X) = E(X_0) = E(1^s) = 1$. به خصوص، با احتمال ۱، $0 \leq X < \infty$ ، و با احتمال $q < 1$ ، $X = 0$. اما $X = 0$ اگر و فقط اگر $\sum_{I \in E_k \cap I_2} |I|^s$ و $\sum_{I \in E_k \cap I_1} |I|^s$ هر دو به صفر میل کنند، که در آنها I_1 و I_2 بازه‌های E_1 هستند، و این بنابر خاصیت خودتشابهی ساختار با احتمال q^2 روی می‌دهد. از این رو $q = q^2$ ، پس $q = 0$ ، و نتیجه می‌گیریم که با احتمال ۱، $0 < X < \infty$. به ویژه، این ایجاب می‌کند که با احتمال ۱ اعداد (تصادفی) M_1 و M_2 وجود دارند بطوریکه به ازای هر k

$$(۶-۱۵) \quad 0 < M_1 \leq X_k = \sum_{I \in E_k} |I|^s \leq M_2 < \infty$$

به ازای هر $I \in E_k$ داریم $|I| \leq 2^{-k}$ ، پس اگر $k \geq -\log \delta / \log 2$ آنگاه $H_\delta^s(F) \leq \sum_{I \in E_k} |I|^s \leq M_2$ که نتیجه می‌دهد $H^s(F) \leq M_2$. بنابراین با احتمال ۱، $\dim_H F \leq s$.

برای به دست آوردن کران پایین تقریباً قطعی، از نظریه پتانسیل بخش ۳-۴ استفاده می‌کنیم. برای این کار، یک توزیع جرم تصادفی μ روی مجموعه تصادفی F تعریف می‌کنیم. فرض کنید s در (۱-۱۵) صدق کند. به ازای $I \in E_k$ فرض کنید $\mu(I)$ متغیر تصادفی

$$\mu(I) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{J \in E_j} |J|^s \cdot \mathbf{1}_{\{J \subset I\}}$$

باشد. با احتمال ۱ این حد همزمان با (۵-۱۵) وجود دارد و مثبت و منتهای است. به علاوه اگر $I \in E_k$

$$(۷-۱۵) \quad E(\mu(I) \mid F_k) = |I|^s.$$

اگر $I \in E_k$ آنگاه $\mu(I) = \mu(I_L) + \mu(I_R)$ و μ یک توزیع جرم با محمل مشمول در $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = F$ می‌باشد؛ گزاره ۱-۷ را ببینید. (از مسائل نظریه اندازه که با تعریف μ مرتبط می‌باشند، چشم پوشی می‌کنیم.)

عدد $0 < t < s$ را ثابت می‌گیریم و امید t -انرژی μ را تخمین می‌زنیم. اگر $x, y \in F$ آنگاه یک k ی بزرگ‌تر وجود دارد به طوری‌که x و y متعلق به بازه مشترکی از E_k باشند، این بازه را با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم. اگر I بازه‌ای از E_k باشد، زیربازه‌های I_L و I_R از I در E_{k+1} با شکافی به اندازه حداقل $d |I|$ از هم جدا می‌شوند، که در آن $d = 1 - 2b$. بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) &= 2 \int_{x \in I_L} \int_{y \in I_R} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{-t} \mu(I_L) \mu(I_R). \end{aligned}$$

اگر $I \in E_k$ ، با استفاده از (۷-۱۵) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\iint_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \mid F_{k+1} \right) &\leq 2d^{-t} |I|^{-t} \mathbb{E}(\mu(I_L) \mid F_{k+1}) \mathbb{E}(\mu(I_R) \mid F_{k+1}) \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{-t} |I_L|^s |I_R|^s \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{2s-t} \end{aligned}$$

با استفاده از تعدیلی از (۱-۲۱)، نامعادله‌ای برای امید غیر شرطی به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\mathbb{E} \left(\iint_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \right) \leq 2d^{-t} \mathbb{E}(|I|^{2s-t}).$$

با جمع بستن روی $I \in E_k$ ، و با به کار بردن مکرر (۱۵-۳) داریم

$$\mathbb{E} \left(\sum_{I \in E_k} \iint_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \right) \leq 2d^{-t} \mathbb{E} \left(\sum_{I \in E_k} |I|^{2s-t} \right) = 2d^{-t} \lambda^k$$

که در آن $\lambda = \mathbb{E}(C_1^{2s-t} + C_2^{2s-t}) < 1$. آنگاه

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_F \int_F |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I \in E_k} \iint_{x \wedge y = I} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \right) \\ &\leq 2d^{-t} \sum_0^{\infty} \lambda^k < \infty \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد t -انرژی μ با احتمال ۱ متناهی است. با استفاده از (۱۵-۶)، با احتمال ۱،

$$\square \quad \dim_H F \geq t, \quad (A), \quad 0 < \mu(F) < \infty \text{ و بنابر قضیه ۴-۱۳ (آ),}$$

این قضیه و برهان را می‌توان از جهات بسیاری تعمیم داد. هر بازه در E_k می‌تواند تعدادی تصادفی از بازه‌های با طول تصادفی در E_{k+1} به وجود آورد. البته، روش ساخت به R^n تعمیم می‌یابد، و مشروط بر آنکه حالتی از "شرط مجموعه باز" ((۹-۱۱) را ببینید) برقرار باشد، می‌توان شرط جدایی بازه‌های مولفه‌ای متفاوت را رها کرد. ساختار زیر یک مقیاس کاملاً تصادفی از مجموعه‌هایی که در بخش ۹-۲ توضیح داده شدند می‌باشد.

فرض کنید V زیرمجموعه‌ای باز از R^n باشد که \bar{V} بستر آن می‌باشد، و فرض کنید $m \geq 2$ یک عدد صحیح باشد و $0 < b < 1$. دسته Ω را همه دنباله‌های نزولی $\bar{V} = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ از مجموعه‌های بسته می‌گیریم که در شرایط زیر صدق می‌کنند. مجموعه E_k اجتماعی از m^k مجموعه بسته $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ می‌باشد که در آن $i_j = 1, \dots, m$ ($1 \leq j \leq k$) و یا V متشابه است یا مجموعه‌ای تهی می‌باشد.

فرض می‌کنیم که به ازای هر i_1, \dots, i_k ، مجموعه V_{i_1, \dots, i_k} شامل $V_{i_1, \dots, i_k, i}$ ($1 \leq i \leq m$) باشد و همچنین این مجموعه‌ها جدا از هم باشند؛ این همان شرط مجموعه باز می‌باشد. اگر V_{i_1, \dots, i_k} ناتهی باشد، $|V_{i_1, \dots, i_k}| = C_{i_1, \dots, i_k}$ را به عنوان نسبت تشابه میان مجموعه‌های متوالی می‌پذیریم و اگر V_{i_1, \dots, i_k} تهی باشد، می‌گیریم $C_{i_1, \dots, i_k} = 0$. قرار می‌دهیم $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$.

فرض کنید P یک اندازه احتمال روی خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Ω باشد به طوری که $C_{i_1, \dots, i_k} > 0$ داشته باشد. فرض کنید که به ازای $C_{i_1, \dots, i_k} > 0$ داده شده، یعنی به ازای V_{i_1, \dots, i_k} ناتهی، C_{i_1, \dots, i_k} به ازای هر دنباله i_1, \dots, i_k و برای $1 \leq i \leq m$ دارای توزیع همانندی با C_i باشد. فرض می‌کنیم که C_{i_1, \dots, i_k} ‌ها مستقل باشند، جز آنکه به ازای هر دنباله i_1, \dots, i_k ، به مستقل بودن متغیرهای تصادفی $C_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, C_{i_1, \dots, i_k, m}$ نیازی نباشد. این یک توزیع احتمال خود متشابه را روی ساختارهای موجود در Ω تعریف می‌کند. فرض کنیم N تعداد (تصادفی) از C_1, \dots, C_k باشد که مثبت هستند؛ یعنی، تعداد مجموعه‌های V_1, \dots, V_k که ناتهی می‌باشند.

قضیه ۱۵-۲

مجموعه F که در بالا توضیح داده شد، با احتمال q تهی می‌باشد، که q کوچک‌ترین ریشه نامنفی معادله چندجمله‌ای زیر می‌باشد

$$(15-1) \quad f(t) \equiv \sum_{j=0}^m P(N=j)t^j = t.$$

به احتمال $1-q$ مجموعه F دارای بعد جعبه و هاوسدورف برابر با جواب s از معادله زیر می‌باشد

$$E\left(\sum_{j=0}^m C_j^s\right) = 1. \quad (9-15)$$

برهان. حذف می‌شود. \square

مثال ۳-۱۵ منحنی ون کخ تصادفی

فرض کنید C یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی بازه $(0, \frac{1}{3})$ باشد. فرض کنید E_0 یک پاره خط واحد در R^2 باشد. E_1 را با حذف یک نسبت C از وسط E_0 و جایگزینی آن با دو ضلع از یک مثلث متوازی الاضلاع به گونه‌ای که ضلع حذف شده قاعده آن باشد، به دست می‌آوریم. این کار را به طور مستقل برای هر یک از چهار قسمت تکرار می‌کنیم و به همین روال ادامه می‌دهیم تا به یک منحنی حدی F برسیم. آنگاه با احتمال ۱، $\dim_H F = \dim_B F = 1.144$.

محاسبه. این حالت خاصی از قضیه ۲-۱۵ می‌باشد. مجموعه V را می‌توان مثلث متساوی الساقین با قاعده E_0 و ارتفاع $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ در نظر گرفت. در هر مرحله یک پاره خط با طول L توسط چهار پاره خط با طول‌های $\frac{1}{2}(1-C)L$ ، CL ، CL ، و $\frac{1}{2}(1-C)L$ جایگزین می‌شود، بنابراین داریم $m=4$ و $C_1=C_4=\frac{1}{2}(1-C)$ و $C_2=C_3=C$. از آنجا که C به طور یکنواخت روی بازه $(0, \frac{1}{3})$ توزیع شده است، عبارت ۹-۱۵ به صورت

$$1 = E\left(2\left(\frac{1}{2}(1-C)\right)^s + 2C^s\right) = \int_0^{1/3} 3 \times 2\left[\left(\frac{1}{2}(1-C)\right)^s + C^s\right] dc$$

یا

$$s+1 = 12 \times 2^{-(s+1)} - 6 \times 3^{-(s+1)}$$

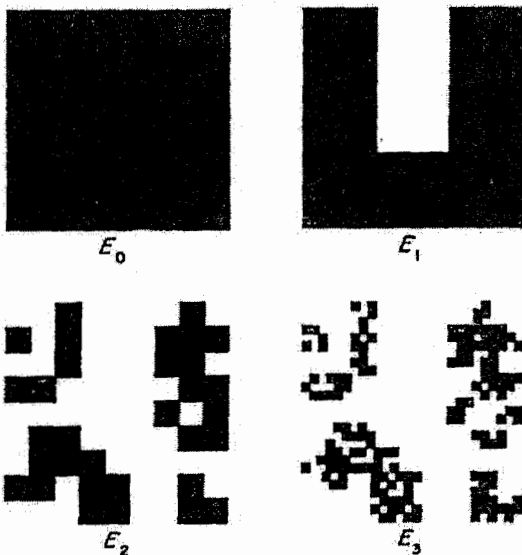
در می‌آید که بعد ذکر شده را به ما می‌دهد. \square

۲-۱۵ پالایش^۱ فرکتالی

بحث پالایش در فرکتال‌های تصادفی را به انواعی که در بخش گذشته مطرح شد، محدود می‌کنیم.

^۱ percolation

فرض کنید $0 < p < 1$. مربع واحد E_0 را به ۹ مربع با ضلع $\frac{1}{3}$ تقسیم می‌کنیم. با انتخاب زیرمجموعه‌ای از این مربع‌ها، E_1 را تشکیل می‌دهیم به گونه‌ای که احتمال انتخاب هر یک از مربع‌ها مستقل و برابر p باشد. به همین ترتیب هر یک از مربع‌های E_1 به ۹ مربع با ضلع $\frac{1}{9}$ تقسیم می‌شوند، و احتمال انتخاب هر یک از این مربع‌ها جهت تشکیل E_2 برابر p می‌باشد. به همین روش ادامه می‌دهیم، به گونه‌ای که E_k یک گردایه تصادفی از مربع‌های با ضلع 3^{-k} می‌باشد. این روند که مرتبط با پارامتر p می‌باشد، یک فرکتال تصادفی براساس اصطلاحات دقیق احتمال، سخت نیست؛ برای مثال، می‌توان دنباله‌های تودرتوی مناسب از مربع‌های E_k را به عنوان فضای نمونه در نظر گرفت.



شکل ۴-۱۵ گام‌های ساخت فرکتال تصادفی توضیح داده شده در بخش ۲-۱۵ با $p = 0.6$. فرکتال حاصل در شکل ۵-۱۵ نشان داده شده است.



(a)



(b)

شکل ۱۵-۵ فرکتال‌های تصادفی شکل گرفته بر اساس روند پلایش که در بخش ۱۵-۲ توضیح داده شده است. در (a) $p = 0.6$ و در (b) $p = 0.8$.

گزاره ۴-۱۵

به ازای p داده شده، فرض کنید $t = q$ کوچک‌ترین جواب مثبت معادله زیر باشد

$$t = (pt + 1 - q)^9.$$

آنگاه F_p با احتمال q تهی می‌باشد. اگر $p \leq \frac{1}{9}$ آنگاه $q = 1$. اگر $\frac{1}{9} < p \leq 1$ آنگاه

$$\dim_H F = \dim_B F = \log 9p / \log 3, \quad 0 < q < 1, \quad \text{با احتمال } 1 - q.$$

برهان. فرض کنید N تعداد (تصادفی) مربع‌های موجود در E_1 باشد. آنگاه

$$\text{ضریب دو جمله‌ای} \binom{n}{r} = n! / r!(n-r)! \quad \text{که در آن } P(N = j) = \binom{9}{j} p^j (1-p)^{9-j}$$

می‌باشد، پس احتمال اینکه $F_p = \phi$ باشد، بنابر (۱۵-۸) برابر کوچک‌ترین ریشه مثبت

$$t = \sum_{j=0}^9 \binom{9}{j} p^j (1-p)^{9-j} t^j = (pt + 1 - p)^9.$$

است. هر مربع در E_1 دارای ضلع $\frac{1}{3}$ است، پس (۱۵-۹) به صورت زیر در می‌آید

$$1 = E \left(\sum_{j=0}^N C_i^s \right) = E \left(\sum_{j=0}^N 3^{-s} \right) = 3^{-s} E(N) = 3^{-s} 9p$$

(هر یک از ۹ مربع با ضلع $\frac{1}{3}$ با احتمال p انتخاب شده‌اند، پس امید عدد انتخاب شده برابر

$9p$ می‌باشد). در نتیجه بنابر قضیه ۱۵-۲ بعد تقریباً قطعی F_p ، که نتیجه می‌دهد این

مجموعه تهی نیست، برابر با $\log 9p / \log 3$ می‌باشد. \square

در این بخش به طور مختصر وضعیت کیفی تغییرات F_p را هنگامی که p از ۰ به ۱

افزایش می‌یابد، مورد بحث قرار می‌دهیم. قبلاً اشاره کرده‌ایم که اگر $0 < p \leq \frac{1}{9}$ آنگاه F_p

تقریباً به طور قطعی تهی می‌باشد. اگر $\frac{1}{9} < p < 3$ آنگاه با احتمال ۱، یا $F_p = \phi$ یا

$\dim_H F_p = \log 9p / \log 3 < 1$ ، پس بنابر گزاره ۲-۵، F_p کلاً ناهمبند است. در انتهای

بازه، یعنی اگر p به ۱ نزدیک باشد، احتمال دارد که به خاطر تعداد بیشتری از مربع‌ها که در

هر مرحله از ساختار باقی می‌مانند، F_p اضلاع راست و چپ مربع E_0 را به هم وصل کند؛

هنگامی که این حالت روی دهد، می‌گوییم پلاایش بین اضلاع اتفاق افتاده است. نشان می‌دهیم

که این حالت حداقل زمانی که p به ۱ بسیار نزدیک باشد روی می‌دهد؛ کران 0.999 که

آزموده شده است را حتماً می‌توان به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد.

گزاره ۱۵-۵

فرض کنید که $0.999 < p < 1$. آنگاه به احتمال بزرگتر از صفر (در واقع بزرگ تر از 0.9999) فرکتال تصادفی F_p اضلاع راست و چپ E_0 را به هم وصل می‌کند.

برهان. برهان به بررسی این مطلب مربوط می‌شود که اگر I_1 و I_2 با مربع‌های E_k مماس باشند و هر دوی I_1 و I_2 شامل ۸ یا ۹ زیرمربع از E_{k+1} باشند، آنگاه یک زیرمربع در I_1 و یکی هم در I_2 وجود دارد که مماس هستند، و مربع‌های E_{k+1} در I_1 و I_2 یک بخش همبند تشکیل می‌دهند.

گوییم یک مربع از E_k لبریز می‌باشد اگر شامل ۸ یا ۹ مربع از E_{k+1} باشد. گوییم یک مربع از E_k ۲- لبریز است اگر شامل ۸ یا ۹ مربع لبریز از E_{k+1} باشد، و به طور استقرایی، یک مربع از E_k ، m - لبریز است اگر شامل ۸ یا ۹ مربع $(m-1)$ - لبریز از E_{k+1} باشد. بنابراین مطلب بالا، اگر E_0 ، m - لبریز باشد، آنگاه اضلاع مقابل E_0 توسط دنباله‌ای از مربع‌های مماس در E_m به هم وصل می‌شوند.

مربع E_0 ، m - لبریز ($m \geq 1$) است اگر یکی از سه حالت زیر اتفاق بیفتد

(آ) E_1 شامل ۹ مربع باشد که همگی $(m-1)$ - لبریز هستند؛

(ب) E_1 شامل ۹ مربع باشد که ۸ تای آنها $(m-1)$ - لبریز هستند؛

(پ) E_1 شامل ۸ مربع باشد که همگی $(m-1)$ - لبریز هستند.

بنابراین اگر p_m احتمال m - لبریز بودن E_0 باشد، با جمع کردن احتمالات این سه گزینه با استفاده از (۱۶-۱)، و با استفاده از خود تشابهی بودن این روند، برای $m \geq 2$ خواهیم داشت

$$p_m = p^9 p_{m-1}^9 + p^9 9 p_{m-1}^8 (1 - p_{m-1}) + 9 p^8 (1 - p) p_{m-1}^8$$

$$(10-15) \quad = 9 p^8 p_{m-1}^8 - 8 p^9 p_{m-1}^9$$

علاوه بر این، $p_1 = p^9 + 9 p^8 (1 - p) = 9 p^8 - 8 p^9$ ، بنابراین یک طرح تکراری

و $p_0 = 1$ برای $m \geq 1$ داریم که در آن $p_m = f(p_{m-1})$

$$(11-15) \quad f(t) = 9 p^8 t^8 - 8 p^9 t^9.$$

فرض کنید که $p = 0.999$. آنگاه (۱۱-۱۵) به صورت زیر در می‌آید

$$f(t) = 8.9282515 t^8 - 7.9282874 t^9$$

و مختصری محاسبات نشان می‌دهد که $t_0 = 0.9999613$ یک نقطه ثابت برای f می‌باشد که پایدار است یعنی اگر $t_0 < t \leq 1$ ، $t_0 < f(t) - t_0 \leq \frac{1}{2}(t - t_0)$. این نتیجه می‌دهد که p_m صعودی است و هنگامی که $m \rightarrow \infty$ به t_0 میل می‌کند، پس یک احتمال $t_0 > 0$

وجود دارد که E_0 به ازای هر m ، m - لبریز باشد. هنگامی که اینطور باشد، اضلاع مقابل E_0 به ازای هر m توسط دنباله‌ای از مربع‌های E_m به هم وصل می‌شوند، بنابراین اشتراک $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ اضلاع مقابل E_0 را به هم وصل می‌کند. از این رو، اگر $p = 0.999$ و نتیجتاً به ازای مقادیر بزرگ‌تر p ، احتمال روی دادن پراکندگی مثبت می‌باشد. □

دیدیم که اگر $0 < p < \frac{1}{3}$ آنگاه به احتمال ۱، F_p یا تهی است یا کلاً ناهمبند است. از طرف دیگر، اگر $p > 0.999$ آنگاه احتمال پراکندگی زیاد است. قضیه بعد می‌گوید که هر مقدار از p به یکی از این حالت‌ها مربوط می‌شود.

قضیه ۱۵-۶

یک عدد بحرانی p_c با محدوده $0.333 < p_c < 0.999$ وجود دارد به طوری که اگر $0 < p < p_c$ آنگاه با احتمال ۱، F_p کلاً ناهمبند است، اما اگر $p_c < p < 1$ آنگاه به احتمال ناصفر، F_p اضلاع راست و چپ E_0 را به هم وصل می‌کند.

طرح برهان. فرض کنید p آنگونه باشد که با احتمال مثبتی F_p کلاً ناهمبند نباشد. آنگاه احتمال مثبتی وجود دارد که دو نقطه جدا از هم در F توسط مسیری در F به هم وصل شده باشند. این ایجاب می‌کند که با احتمال مثبت، مسیری وجود داشته باشد که از دو ضلع مقابل یکی از مربع‌های موجود در E_k بگذرد؛ بنابر خاصیت خود تشابهی آماری ساختار مورد نظر، با احتمال مثبت، مسیری وجود دارد که E_0 را از چپ به راست طی می‌کند. به وضوح، اگر F_p به احتمال ۱ کلاً ناهمبند باشد، آنگاه F_p نیز برای $p' < p$ به همین صورت خواهد بود. بنابراین احتمال بحرانی p_c با ویژگی‌های گفته شده وجود دارد. □

تجربه‌ها پیشنهاد می‌کنند که $0.7 < p_c < 0.8$.

تغییر در شکل F_p هنگامی که p در عبور از p_c تغییر می‌کند، شگرف‌تر از آن است که قضیه ۱۵-۶ بیان می‌کند. فرض کنید F'_p مجموعه‌ای تصادفی باشد که به وسیله فرش کردن صفحه توسط کپی‌های مستقل تصادفی از F_p به دست آمده باشد. اگر $p < p_c$ آنگاه، تقریباً به طور قطعی، F'_p کلاً ناهمبند است. با وجود این، اگر $p \geq p_c$ آنگاه با احتمال ۱، F'_p دارای یک مولفه همبند بی‌کران تنها می‌باشد. پس هنگامی که p در عبور از p_c افزایش می‌یابد، ناگهان نقاط تک F'_p به هم متصل می‌شوند تا یک واحد یکپارچه ایجاد شود و یک "گذر حالت" وجود خواهد داشت. ایده‌ای که اساس اثبات این مطلب می‌باشد این است که اگر $p > p_c$ آنگاه با احتمال مثبت مسیری در F'_p وجود دارد که بخش‌های داده شده از F'_p

که در دو قرص جدا از هم با شعاع واحد قرار می‌گیرند را به هم وصل می‌کند. در یک مولفه بی‌کران از F'_p تعدادی نامتناهی از این قرص‌ها وجود دارد، پس اگر F'_p دارای دو مولفه بی‌کران باشد، احتمال اتصال آنها برابر ۱ خواهد بود.

۱۵-۳ نکات و منابع

مراجع اصلی فرکتال‌های تصادفی از نوعی که در بخش ۱۵-۱ در مورد آنها بحث شد، عبارتند از کتاب *Kahane* (۱۹۷۴)، *Peyriere* (۱۹۷۶)، *Falconer* (۱۹۸۶b، ۱۹۸۷)، *Mauldin* و *Williams* (۱۹۸۸). یک روش ساخت جالب فرکتال‌ها به وسیله حذف کردن‌های تصادفی، در کتاب *Zahle* (۱۹۸۴) مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. مدل پراکندگی فرکتالی توسط *Mandelbrot* (۱۹۷۴) پیشنهاد شد، و تحلیل‌های ریاضی جزئی‌تر در کتاب‌های *Chayes* و *Durrett* (۱۹۸۸) آورده شده است. مطالب زیادی در مورد پالایش "گسسته"، که در آنها مربع‌ها به طور تصادفی از یک شبکه مربعی بزرگ انتخاب می‌شوند، نوشته شده است. تشابهات زیادی بین پالایش گسسته و پالایش فرکتالی وجود دارد، کتاب‌های *Kesten* (۱۹۸۲) یا *Grimmett* را ببینید.

تمرین‌ها

۱-۱۵ بعد هاوسدورف تقریباً قطعی مجموعه کانتور تصادفی را که با حذف یک سوم میانی هر بازه با احتمال $\frac{1}{2}$ و حذف دو سوم‌های میانی بازه‌ها با احتمال $\frac{1}{2}$ ساخته می‌شود، به دست آورید.

۲-۱۵ شکل تصادفی ساخت مجموعه ون کخ را به صورت زیر در نظر بگیرید: ابتدا یک پاره‌خط با طول واحد را در نظر بگیرید، با احتمال $\frac{1}{2}$ ، یک سوم میانی این بازه را با دو ضلع دیگر از یک مثلث متوازی‌الاضلاع (رو به بالا) جایگزین می‌کنیم، و با احتمال $\frac{1}{2}$ ، یک سوم میانی را تماماً حذف می‌کنیم. این روند را برای تمامی بازه‌هایی که باقی می‌مانند تکرار می‌کنیم. نشان دهید که این فرکتال تصادفی به احتمال ۱، دارای بعد هاوسدورف ۱ می‌باشد.

۳-۱۵ نشان دهید که منحنی ون کخ تصادفی نشان داده شده در شکل ۱۵-۱، همواره دارای بعد هاوسدورف $s = \log 4 / \log 3$ می‌باشد، و واقعاً یک s -مجموعه می‌باشد. (این بعد وابسته به روش ساختن تصادفی فرکتال‌ها نیست.)

۴-۱۵ فرض کنید $0 < p < 1$. می‌توانیم روش ساخت بادبان‌بند سرپینسکی (شکل ۳-۰) را به صورت تصادفی در آوریم به این صورت که در هر مرحله، هر یک از سه زیرمثلث متساوی‌الاضلاع را به طور مستقل با احتمال p انتخاب می‌کنیم. (بنابراین یک روند پراکندگی بر مبنای بادبان‌بند سرپینسکی خواهیم داشت). نشان دهید که اگر $\frac{2}{3} < p < 1$ آنگاه به احتمال ۱، مجموعه حدی F تهی می‌باشد، اما اگر $\frac{2}{3} < p < 1$ آنگاه با احتمال مثبت، F ناتهی می‌باشد. استدلالی برای این احتمال بیابید، و نشان دهید که به ازای مجموعه ناتهی داده شده F ، با احتمال ۱،

$$\dim_H = \log 3p / \log 2$$

۵-۱۵ برای بادبان‌بند سرپینسکی تصادفی که در تمرین ۴-۱۵ توضیح داده شد، نشان دهید که به ازای هر $p < 1$ ، با احتمال ۱، مجموعه F تماماً ناهمبند است. (اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند، آنها را متصل به هم در نظر می‌گیریم).

۶-۱۵ مجموعه کانتور تصادفی را که در قضیه ۱-۱۵ بررسی شد، در نظر بگیرید. با گرفتن $H_\infty^s(F)$ به عنوان اینفیمم مجموع (۱-۲) روی پوشش‌های دلخواه مجموعه F ، نشان دهید که

$$H_\infty^s(F) = \min\{1, H_\infty^s(F \cap I_1) + H_\infty^s(F \cap I_2)\}$$

که در آن s جواب (۱-۱۵) می‌باشد. با استفاده از خودتشابهی آماری نتیجه بگیرید که جز در حالتی که $P(C_1^s + C_2^s = 1) = 1$ ، تقریباً به یقین، $H_\infty^s(F) = 0$ ، و از این رو $H^s(F) = 0$.

فصل ۱۶ حرکت‌های براونی^۱ و سطوح براونی

در سال ۱۸۲۷ یک گیاه شناس به نام آر. براون مشاهده کرد که ذرات بسیار ریز معلق در یک مایع در مسیرهای بسیار نامنظمی حرکت می‌کنند. این پدیده و پدیده‌های مشابه آن برای ذرات دود در هوا را، در نهایت به عنوان نتیجه‌ای از بمباران‌های ملکولی ذرات تعبیر کردند. آنیشتین مطالعه ریاضی این حرکت را منتشر کرد، که سرانجام به کسب جایزه نوبل برای محاسبه عدد آووگادرو توسط پرین منتهی شد.

در سال ۱۹۲۳ وینر^۲ یک مدل ریاضی دقیق پیشنهاد کرد که رفتاری تصادفی مشابه با آنچه که در حرکت براونی دیده می‌شد را نشان می‌داد. مسیری که توسط این "فرایند وینر" در فضای ۳- بعدی ترسیم می‌شد، آنچنان نامنظم بود که بعد هاوسدورف برابر با ۲ داشت. این مثال خوبی از پدیده‌های طبیعی با ظاهری فرکتالی می‌باشد که می‌تواند توسط یک مدل ساده ریاضی شرح داده شود.

یک مسیر را می‌توان به وسیله یک تابع $f: R \rightarrow R^n$ توصیف کرد که در آن $f(t)$ مکان یک ذره در زمان t می‌باشد. تابع f را می‌توان از دو دیدگاه بررسی کرد. یا می‌توان مسیر را گذر $f([t_1, t_2]) = \{f(t) : t_1 \leq t \leq t_2\}$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از R^n در نظر گرفت که در آن t صرفاً یک پارامتر در نظر گرفته می‌شود، یا می‌توان نمودار f ، $graph f = \{(t, f(t)) : t_1 \leq t \leq t_2\}$ را به عنوان شرح تغییرات f نسبت به زمان در نظر گرفت. مسیرهای براونی و نمودارهای آنها، در حالت کلی، فرکتال هستند.

^۱ Brown

^۲ Wiener

در این فصل هدف ما تعریف یک اندازه احتمال روی فضایی از توابع می‌باشد، به طوریکه آن مسیرهایی که احتمال روی دادن آنها وجود دارد همانند حرکت‌های براونی مشاهده شده باشند. با بررسی شکل فرکتالی حرکت‌های براونی کلاسیک شروع می‌کنیم، و سپس به بررسی چند نمونه مختلف آن می‌پردازیم که در مدل بندی بسیاری از پدیده‌ها، از زنجیره‌های پلیمری گرفته تا سطوح توپوگرافی، استفاده شده‌اند.

۱-۱۶ حرکت‌های براونی

نخست حرکت براونی را در یک بعد تعریف می‌کنیم و سپس تعریف را به ابعاد بالاتر تعمیم می‌دهیم.

به منظور بیان انگیزه این تعریف، یک ذره را که به طور تصادفی روی خط حقیقی حرکت می‌کند در نظر بگیرید. فرض کنید در بازه‌های زمانی کوچک τ ، ذره یک فاصله کوچک δ را به طور تصادفی به چپ یا به راست بپیماید. (این حرکت می‌تواند توصیفی منطقی از یک ذره باشد که در یک بعد دستخوش بمباران ملکولی تصادفی می‌باشد.) فرض کنید $X_\tau(t)$ نشان دهنده مکان ذره در زمان t باشد. در این صورت، اگر مکان ذره در زمان $k\tau$ ، $X_\tau(k\tau)$ باشد، $X_\tau((k+1)\tau)$ برابر با $X_\tau(k\tau) + \delta$ یا $X_\tau(k\tau) - \delta$ می‌باشد. با این فرض که ذره حرکت خود را در زمان صفر از مبدأ شروع کند، به ازای $t > 0$ ، مکان در زمان t توسط متغیر تصادفی زیر تعریف می‌شود

$$X_\tau(t) = \delta(Y_1 + \dots + Y_{\lfloor t/\tau \rfloor})$$

که در آن Y_1, Y_2, \dots متغیرهای تصادفی مستقل می‌باشند که هر کدام به احتمال $\frac{1}{2}$ برابر ۱ و به احتمال $\frac{1}{2}$ برابر -1 می‌باشند. در اینجا $\lfloor t/\tau \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی با t/τ را نشان می‌دهد. برای نرمال شدن، طول گام δ را برابر $\sqrt{\tau}$ می‌گیریم، بنابراین

$$(۱-۱۶) \quad X_\tau(t) = \sqrt{\tau}(Y_1 + \dots + Y_{\lfloor t/\tau \rfloor}).$$

قضیه حد مرکزی ((۱-۲۶) را ببینید) می‌گوید که، به ازای t ثابت، اگر τ کوچک باشد آنگاه توزیع متغیر تصادفی $X_\tau(t)$ تقریباً نرمال، با میانگین ۰ و واریانس t می‌باشد، چرا که Y_i دارای میانگین صفر و واریانس ۱ می‌باشد. به روشی مشابه، اگر t و h ثابت باشند، و τ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه $X_\tau(t+h) - X_\tau(t)$ تقریباً نرمال و دارای میانگین صفر و واریانس h می‌باشد. همچنین توجه کنید که اگر $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{2m}$ آنگاه نموداری

متغیرهای $X_\tau(t_2) - X_\tau(t_1)$ ، $X_\tau(t_4) - X_\tau(t_3)$ ، ...، $X_\tau(t_{2m}) - X_\tau(t_{2m-1})$ ، تصادفی مستقل می‌باشند. حرکت براونی را حد حرکت تصادفی $X_\tau(t)$ هنگامی که $0 \rightarrow \tau$ در نظر می‌گیریم.

فرض کنید (X, F, P) یک فضای احتمال باشد. برای اهدافی که در پیش داریم، X را یک فرایند تصادفی یا یک تابع تصادفی از $[0, \infty)$ به R می‌نامیم هر گاه $X(t)$ به ازای هر t ، $0 \leq t < \infty$ یک متغیر تصادفی باشد. گاهی نیز فضای توابع تصادفی روی یک بازه متناهی $[t_1, t_2]$ را در نظر می‌گیریم، که پیشرفت کار در این حالت مشابه قبل است. (در تعریف رسمی یک فرایند تصادفی یک شرط اضافی "اندازه پذیر بودن" هم وجود دارد که اکنون به کار ما مربوط نمی‌شود). البته به X به عنوان تعریف یک تابع نمونه $X(\omega, t) \rightarrow t$ به ازای هر نقطه ω در فضای نمونه Ω نگاه می‌کنیم. بنابراین نقاط Ω را به عنوان پارامتر بندی توابع $R \rightarrow [0, \infty) : X, P$ را هم اندازه احتمال روی این دسته توابع در نظر می‌گیریم.

حرکت براونی یا فرایند وینر را یک فرایند تصادفی X تعریف می‌کنیم به طوریکه، (BM) (i) با احتمال ۱، $X(0) = 0$ (یعنی فرایند از مبدأ شروع می‌شود) و $X(t)$ یک تابع پیوسته از t باشد.

(ii) به ازای هر $t \geq 0$ و $h > 0$ نمو $X(t+h) - X(t)$ با میانگین صفر و واریانس h به طور نرمال توزیع می‌شود، از این رو

$$P(X(t+h) - X(t) \leq x) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-u^2}{2h}\right) du$$

(iii) اگر $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{2m}$

نموهای $X(t_2) - X(t_1)$ ، ...، $X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$ مستقل باشند.

(در این تعریف کمی اغراق شده است: (iii) را می‌توان از (i) و (ii) نتیجه گرفت).

توجه کنید که یک نتیجه فوری از (i) و (ii) این است که خود $X(t)$ نیز با میانگین صفر و واریانس t (به ازای هر t) به طور نرمال توزیع می‌شود. دقت کنید که نموای X مانا هستند؛ یعنی، $X(t+h) - X(t)$ توزیعی مستقل از t دارد.

(نکته‌ای در مورد نمادگذاری: ما $E(X(t))$ را برای امید یا مقدار میانگین $X(t)$ در نظر می‌گیریم؛ ممکن است بعضی از خوانندگان برای امید $X(t)$ روی توابع فضای نمونه، به نوشتن $\langle X(t) \rangle$ عادت داشته باشند).

اولین سوالی که به ذهن می‌آید این است که آیا واقعاً تابعی تصادفی وجود دارد که در شرایط (BM) صدق کنند. نشان دادن اینکه حرکت براونی واقعاً وجود دارد بسیار مشکل است، و ما در اینجا تصمیم به چنین کاری نداریم. در برهان از ویژگی‌های خاصی از توزیع

نرمال استفاده می‌شود. برای مثال، اگر $X(t_2) - X(t_1)$ و $X(t_3) - X(t_2)$ که مستقل و نرمال و به ترتیب دارای واریانس‌های $t_2 - t_1$ و $t_3 - t_2$ و با میانگین صفر هستند، داده شده باشند، آنگاه مجموع آنها یعنی $X(t_3) - X(t_1)$ لزوماً نرمال با میانگین صفر و واریانس $t_3 - t_1$ می‌باشد؛ (۱-۲۴) و بعد از آن را ببینید. سازگار بودن تعریف (BM) نیز امری ضروری است. وجود یک فرایند $X(t)$ که در (BM) صدق می‌کند، امکان‌پذیر به نظر می‌رسد، کافی است حد گذر تصادفی $X_\tau(t)$ هنگامی که $\tau \rightarrow 0$ را در نظر بگیریم.

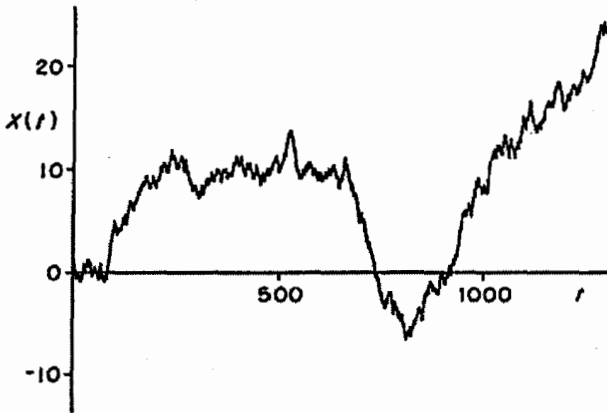
به جای اثبات وجود، به دو روش ساخت توابع نمونه براونی، مثلاً با یک کامپیوتر، اشاره می‌کنیم. هر دو روش در حقیقت می‌توانند به عنوان مبنایی برای اثبات وجود استفاده شوند. روش اول از تقریب گذر تصادفی (۱-۱۶) استفاده می‌کند. مقادیر ۱ یا -۱ را به وسیله "پرتاب سکه" به ازای $1 \leq i \leq m$ ، که m عدد بزرگی است، به Y_i نسبت می‌دهیم و $X_\tau(t)$ مطابق با آن رسم می‌شود. اگر τ در مقایسه با t کوچک باشد، آنگاه این تابع تقریب خوبی برای یک تابع نمونه براونی ارائه می‌دهد.

در روش دیگر، شیوه "تغییر مکان تصادفی نقطه میانی" را می‌توان برای به دست آوردن یک تابع نمونه $X: [0,1] \rightarrow R$ به کار برد. مقادیر $X(k2^{-j})$ را با استقرا روی j تعریف می‌کنیم که در آن $0 \leq k \leq 2^j$. قرار می‌دهیم $X(0) = 0$ ، و $X(1)$ را به طور تصادفی از یک توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ انتخاب می‌کنیم. سپس $X(\frac{1}{2})$ را از یک توزیع نرمال با میانگین $\frac{1}{2}(X(0) + X(1))$ و واریانس $\frac{1}{2}$ انتخاب می‌کنیم. در گام بعد $X(\frac{1}{4})$ و $X(\frac{3}{4})$ انتخاب می‌شوند و به همین طریق ادامه می‌دهیم. در مرحله j ام مقادیر $X(k2^{-j})$ به ازای k فرد به طور مستقل از یک توزیع نرمال با میانگین $\frac{1}{2}(X((k-1)2^{-j}) + X((k+1)2^{-j}))$ و واریانس 2^{-j} انتخاب می‌شود. این فرایند، $X(t)$ را در هر نقطه دودویی $t = k2^{-j}$ تعیین می‌کند. با فرض این که X پیوسته باشد، کاملاً X تعیین می‌شود. با استفاده از ویژگی‌های توزیع نرمال می‌توان نشان داد که توابعی که چنین ساخته می‌شوند دارای توزیع داده شده توسط (BM) می‌باشند.

نمودار یک تابع براونی نمونه در شکل ۱-۱۶ نشان داده شده است.

به سادگی می‌توان تعریف حرکت براونی را از R به R^n تعمیم داد. حرکت براونی را روی R^n به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که مولفه‌های مختصاتی، حرکت‌های براونی ۱- بعدی مستقل می‌باشند. بنابراین $X: [0, \infty) \rightarrow R^n$ که به صورت $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ داده می‌شود، یک حرکت براونی n - بعدی روی یک فضای احتمال است اگر فرایند تصادفی $X_i(t)$ به ازای هر i یک حرکت براونی یک بعدی باشد، و $X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)$ به ازای هر مجموعه

از زمان‌های t_1, \dots, t_n مستقل باشند. یک مسیر نمونه از حرکت براونی در R^2 در شکل ۲-۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۶ نمودار یک نمونه تابع براونی



شکل ۲-۱۶ نمونه‌ای از یک مسیر براونی در R^2

بنابر تعریف، تصویر $X(t)$ روی هر یک از محورهای مختصات یک حرکت براونی 1 -بعدی می‌باشد. به هر حال تنها محورهای مختصات دارای این خاصیت نیستند: حرکات براونی n -بعدی همسانگرد^۱ هستند، یعنی در هر جهتی دارای ویژگی‌های یکسانی هستند. برای بررسی

^۱ isotropic

این مطلب (برای راحتی) حالت ۲- بعدی حرکت براونی $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ را در نظر بگیرید. تصویر $X(t)$ روی خط L_θ با زاویه θ و مار بر مبدأ عبارت است از $X_1(t) \cos \theta + X_2(t) \sin \theta$. به ازای $t \geq 0$ و $h > 0$ متغیرهای تصادفی $X_1(t+h) - X_1(t)$ و $X_2(t+h) - X_2(t)$ مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس h می‌باشند. بنابراین نمودهای تصویر روی L_θ که به صورت زیر داده می‌شوند

$$(X_1(t+h) - X_1(t)) \cos \theta + (X_2(t+h) - X_2(t)) \sin \theta$$

دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $h \cos^2 \theta + h \sin^2 \theta = h$ می‌باشند؛ (۱-۲۴) را ببینید. به روشی مشابه، نمودهای تصویر مستقل هستند، بنابراین تصویر $X(t)$ روی L_θ به ازای هر θ یک حرکت براونی ۱- بعدی می‌باشد.

اگر $\gamma > 0$ ، با تعویض h با γh و x با $\gamma^{1/2} x$ ، (به وسیله جایگزینی $u_1 = u \gamma^{-1/2}$ در انتگرال) مقدار سمت راست (۱۶-۲) تغییر نمی‌کند. از این رو به ازای هر x_i

$$P(X_i(t+h) - X_i(t) \leq x_i) = P(X_i(\gamma t + \gamma h) - X_i(\gamma t)) \leq \gamma^{1/2} x_i$$

این نتیجه می‌دهد که $X(t)$ و $\gamma^{-1/2} X(\gamma t)$ دارای توزیع یکسان می‌باشند، با تعویض مقیاس موقتی و مقیاس ویژه به ترتیب با عامل‌های γ و $\gamma^{1/2}$ فرایندی را می‌دهد که از فرایند اصلی غیر قابل تمیز می‌باشد. بنابراین مسیرهای براونی خود متشابه آماری هستند، زیرا مسیرهای $X(t)$ و $X(\gamma t)$ ($0 \leq t < \infty$) غیر قابل تمیز می‌باشند، و نمودارهای آنها خود آفین آماری هستند، زیرا مقیاس‌ها در جهت‌های t و x متفاوت می‌باشند.

فرض کنید که $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ حرکت براونی n - بعدی باشد. از آنجا که $X_i(t+h) - X_i(t)$ به ازای هر i دارای توزیع نرمال مستقل می‌باشد، از ۱۶-۲ نتیجه می‌شود که برای بازه‌های $[a_i, b_i]$ ،

$$P(X_i(t+h) - X_i(t) \in [a_i, b_i]) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) dx_i.$$

از این رو اگر E متوازی السطوح $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ باشد،

$$\begin{aligned} P(X(t+h) - X(t) \in E) &= \prod_{i=1}^n \left[(2\pi h)^{-1/2} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) dx_i \right] \\ (۱۶-۳) \quad &= (2\pi h)^{-n/2} \int_E \exp\left(-\frac{|x|^2}{2h}\right) dx \end{aligned}$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$. با تقریب مجموعه‌ها به وسیله اجتماعی از چنین متوازی‌السطوح‌هایی، نتیجه می‌شود که (۱۶-۳) برای هر مجموعه بورل E برقرار است. گاهی

می‌گوییم که $X(t+h) - X(t)$ توزیع نرمال چند بعدی دارد. پس اگر E را گوی $B_p(0)$ در نظر بگیریم و با تبدیل به مختصات قطبی خواهیم داشت

$$(۴-۱۶) \quad P(|X(t+h) - X(t)| \leq \rho) = ch^{-n/2} \int_0^\rho r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) dr$$

که c ثابتی است که فقط به n وابسته است.

یک ویژگی اساسی حرکت براونی این است که، با احتمال ۱، تابع نمونه در شرط هولدر با نمای λ ، به ازای هر $\frac{1}{2} < \lambda$ ، صدق می‌کند.

گزاره ۱-۱۶

فرض کنید $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. تابع نمونه براونی $X: [0,1] \rightarrow R^n$ به ازای یک $H_0 > 0$ ، با احتمال ۱، در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$(۵-۱۶) \quad |X(t+h) - X(t)| \leq b |h|^\lambda \quad (|h| < H_0)$$

که در آن b فقط به λ وابسته است.

برهان. اگر $h > 0$ ، بنابر (۴-۱۶)، پس از جایگزینی $u = rh^{-1/2}$ و چند تخمین داریم

$$P(|X(t+h) - X(t)| > h^\lambda) = ch^{-n/2} \int_{h^\lambda}^\infty r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) dr$$

$$= c \int_{h^{\lambda-1/2}}^\infty u^{n-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$\leq c_1 \int_{h^{\lambda-1/2}}^\infty \exp(-u) du$$

$$(۶-۱۶) \quad = c_1 \exp(-h^{\lambda-1/2})$$

$$\leq c_2 h^{-2}$$

که در آن c_1 و c_2 به h یا t وابسته نیستند. اگر بازه‌های $[t, t+h]$ را بازه‌های دودویی $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$ بگیریم، خواهیم داشت

$$P(|X((m-1)2^{-j}) - X(m2^{-j})| > 2^{-j\lambda} \quad 1 \leq m \leq 2^j \text{ و } j \geq k \text{ (به ازای یک)})$$

$$\leq c_2 \sum_{j=k}^\infty 2^j 2^{-2j}$$

$$= c_2 2^{-k+1}$$

بنابراین با احتمال ۱ یک عدد صحیح K وجود دارد به طوری که به ازای هر $j > k$ و $1 \leq m \leq 2^j$

$$|X((m-1)2^{-j}) - X(m2^{-j})| \leq 2^{-j\lambda} \quad (۷-۱۶)$$

اگر $h < H_0 = 2^{-k}$ بازه $[t, t+h]$ را می‌توان، به جز احتمالاً برای نقاط انتهایی، به صورت اجتماع شمارایی از بازه‌های دودویی همجوار به شکل $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$ نوشت که $2^{-j} \leq h$ و بیش از دو بازه دارای طول یکسان نمی‌باشند. (هر بازه دودویی درون $[t, t+h]$ را در نظر بگیرید به گونه‌ای که مشمول در هیچ چنین بازه دیگری نباشد.) سپس با استفاده از پیوستگی X ، اگر k کوچک‌ترین عدد صحیح با خاصیت $2^{-k} \leq h$ باشد،

$$|X(t) - X(t+h)| \leq 2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\lambda} = \frac{2^{-k\lambda} 2}{(1-2^{-\lambda})} < \frac{2h^\lambda}{(1-2^{-\lambda})}. \quad \square$$

قضیه ۲-۱۶

با احتمال ۱، یک مسیر نمونه براونی در R^n ($n \geq 2$) دارای بعد جعبه و هاوسدورف ۲ می‌باشد.

برهان. به ازای هر $\lambda < \frac{1}{2}$ ، تابع $X: [0,1] \rightarrow R^n$ ، به احتمال ۱، در شرط هولدر (۵-۱۶) صدق می‌کند، بنابراین با استفاده از گزاره ۳-۲، $\dim_H X([0,1]) \leq (1/\lambda) \dim_H [0,1] < 1/\lambda$ و نامعادله مشابهی برای ابعاد جعبه برقرار است. از این رو، تقریباً به طور قطع، مسیرهای براونی دارای بعد حداکثر ۲ هستند.

برای کران پایینی، از شیوه نظریه پتانسیل استفاده می‌کنیم. فرض کنید $1 < s < 2$ به ازای t و h داده شده، فرض کنید $p(\rho)$ نشان دهنده عبارت (۴-۱۶) باشد. با گرفتن میانگین روی همه توابع، و با جایگزینی $w = r^2/h$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E(|X(t+h) - X(t)|^{-s}) &= \int_0^{\infty} r^{-s} dp(r) \\ &= ch^{-n/2} \int_0^{\infty} r^{-s+n-1} \exp\left(\frac{-r^2}{2h}\right) dr \\ &= \frac{1}{2} ch^{-s/2} \int_0^{\infty} w^{(n-s-2)/2} \exp\left(\frac{-w}{2}\right) dw \\ &\leq c_1 h^{-s/2} \end{aligned} \quad (۸-۱۶)$$

که در آن c_1 مستقل از h و t است. آنگاه

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^1 \int_0^1 |X(t) - X(u)|^{-s} dt du\right) &= \int_0^1 \int_0^1 E|X(t) - X(u)|^{-s} dt du \\ (9-16) \quad &= \int_0^1 \int_0^1 c_1 |t-u|^{-s/2} dt du \\ &< \infty \end{aligned}$$

چرا که $s < 2$. روشی طبیعی برای تعریف یک توزیع جرم μ_f روی مسیر f وجود دارد؛ جرم یک مجموعه برابر است با زمانی که مسیر در مجموعه سیر می‌کند؛ یعنی $\mu_f(A) = \ell\{t: 0 \leq t \leq 1 \text{ \& } f(t) \in A\}$ که در آن ℓ اندازه لبگ است. آنگاه به ازای هر تابع g ، $\int_0^1 g(x) d\mu_f(x) = \int_0^1 g(f(t)) dt$ ، پس (۹-۱۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$E\left(\iint |x-y|^{-s} d\mu_x(x) d\mu_x(y)\right) < \infty.$$

از این رو اگر $s < 2$ ، آنگاه به طور تقریباً قطعی $\iint |x-y|^{-s} d\mu_x(x) d\mu_x(y) < \infty$ می‌باشد، بنابراین با استفاده از قضیه ۱۴-۳ (آ)، $\dim_H X([0,1]) \geq s$. □

در حقیقت، با احتمال ۱، مسیرهای براونی در R^n ($n \geq 2$) دارای اندازه هاوسدورف ۲-بعدی صفر می‌باشد. مباحث موشکافانه‌تر که شامل تعاریف ظریف‌تری از بعد می‌باشند و در بخش ۲-۵ آورده شده‌اند نشان می‌دهند که در مورد توابع $h(t) = t^2 \log(1/t) \log \log(1/t)$ و $h(t) = t^2 \log \log(1/t)$ اگر به ترتیب $n=2$ و $n \geq 3$ ، با احتمال ۱، مسیرهای $X([0,1])$ اندازه متناهی و مثبت دارند. از این نظر، مسیرهای براونی دارای بعدی "از لحاظ لگاریتمی کوچک‌تر" از ۲ می‌باشند.

یک سوال واضح و کیفی در مورد مسیرهای براونی این است که آیا این مسیرها منحنی‌های ساده‌ای هستند، یا اینکه دارای خودقطعی می‌باشند. اگر تابع f داده شده باشد، گوییم x یک نقطه دارای چندگانگی k می‌باشد اگر به ازای k مقدار مختلف t ، $f(t) = x$ از روش‌های ابعادی می‌توان برای تعیین اینکه توابع براونی دارای نقطه چندگانه هستند یا نه، استفاده کرد.

قضیه ۱۶-۳

یک تابع براونی نمونه $B: [0, \infty) \rightarrow R^n$ ، به احتمال ۱، دارای نقاط چندگانه به صورت زیر می‌باشد:

- $n = 2$: به ازای هر k نقاطی دارای چندگانگی k می‌باشند؛
- $n = 3$: نقاطی دوگانه وجود دارد ولی نقطه سه گانه وجود ندارد؛
- $n \geq 4$: نقطه چندگانه وجود ندارد.

آیده برهان. یک پیشنهاد این است که از قضایای اشتراک فصل ۸ استفاده کنیم. برای حالت $n=3$ فرض کنید که با احتمال ۱، $\dim_H(X([0,1]) \cap X([2,3])) < 1$. با استفاده از آیزوتوبی و کوچک و بزرگ کردن حرکت براونی به سادگی می توان نشان داد که این ایجاب می کند که با احتمال ۱ و به ازای هر تبدیل تشابه σ ، $\dim_H(X([0,1]) \cap \sigma(X([2,3]))) < 1$. این نامساوی نتیجه می دهد که با احتمال ۱، به ازای تقریباً هر تبدیل تشابه σ ، $\dim_H(X([0,1]) \cap \sigma(X([2,3]))) < 1$. از این رو، بنابر قضیه ۱۶-۲، با احتمال ۱، $\dim_H X([0,1]) = \dim_H X([2,3]) = 2$ ، که این قضیه ۸-۲ (آ) را نقض می کند. و نتیجه می گیریم که با احتمال مثبت، مثلاً p ، $\dim_H(X([0,1]) \cap X([2,3])) = 1$. با استفاده از خودتشابهی آماری $X(t)$ نتیجه می شود که به ازای هر t و δ ، با احتمال p $\dim_H(X([t, t+\delta]) \cap X([t+2\delta, t+3\delta])) = 1$ هستند، مجموعه نقاط دوگانه F ، با احتمال p دارای بعد هاوسدورف ۱ می باشد. برای اثبات نتایج دیگر می توان از تکنیک های مشابهی استفاده کرد. \square

مشتمق گیری از بعد تقریباً قطعی نمودارهای براونی مشابه مشتق گیری از بعد تقریباً قطعی مسیره های براونی می باشد.

قضیه ۱۶-۴

با احتمال ۱، نمودار یک تابع براونی نمونه $X: [0,1] \rightarrow R$ دارای بعد جعبه و هاوسدورف $1\frac{1}{2}$ می باشد.

برهان. از شرط هولدر (۱۶-۵) و نتیجه ۱۱-۲ (آ) روشن می شود که با احتمال ۱، نمودار X به ازای هر $\lambda < \frac{1}{2}$ دارای بعد جعبه بالایی و هاوسدورف حداکثر $2 - \lambda$ می باشد. بنابراین دارای بعد حداکثر $1\frac{1}{2}$ می باشد. برای تخمین پایینی، همچون برهان قضیه ۱۶-۲ داریم

$$\begin{aligned} E(|X(t+h) - X(t)|^2 + h^2)^{-s/2} &= \int_0^\infty (r^2 + h^2)^{-s/2} dp(r) \\ &= ch^{-1/2} \int_0^\infty (r^2 + h^2)^{-s/2} \exp\left(\frac{-r^2}{2h}\right) dr \\ &= \frac{1}{2}c \int_0^\infty (uh + h^2)^{-s/2} u^{-1/2} \exp\left(\frac{-u}{2}\right) du \\ &\leq \frac{1}{2}c \int_0^h (h^2)^{-s/2} u^{-1/2} du + \frac{1}{2}c \int_h^\infty (uh)^{-s/2} u^{-1/2} du \\ &\leq c_1 h^{1/2-s} \end{aligned}$$

که با شکستن بازه انتگرال‌گیری و با تخمین انتگرال به دو طریق به دست آمده است. می‌توانیم اندازه لبگ را از روی محور t به نمودار تابع f منتقل کنیم تا به یک توزیع جرم μ_f روی نمودار یک تابع f برسیم که به صورت $(t, f(t)) \in A$ و $0 \leq t \leq 1$ $\mu_f(A) = \ell\{t: 0 \leq t \leq 1$ داده می‌شود. با استفاده از قضیه فیثاغورث، اگر $s < 1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} E\left(\iint |x-y|^{-s} d\mu_X(x)d\mu_X(y)\right) &= \iint E(|X(t)-X(u)|^2 + |t-u|^2)^{-s/2} dt du \\ &\leq \iint c_1 |t-u|^{1/2-s} dt du \\ &< \infty \end{aligned}$$

با احتمال ۱، توزیع جرم μ_X روی نمودار X مثبت و متناهی و دارای s - انرژی متناهی می‌باشد، بنابراین قضیه ۴-۱۳ (آ) نتیجه می‌دهد که $\dim_H \text{graph } X \geq 1\frac{1}{2}$. □

از آنجا که نمودار X روی هر بازه، به احتمال ۱، دارای بعد $1\frac{1}{2}$ می‌باشد، فوراً نتیجه می‌شود که توابع براونی، هر چند پیوسته باشند، به طور پیوسته مشتق‌پذیر نیستند. در حقیقت، با احتمال ۱، یک تابع براونی هیچ جا مشتق‌پذیر نیست.

همانند مسیرهای براونی، نمودارهای براونی دارای بعدی به طور لگاریتمی کوچک‌تر از $1\frac{1}{2}$ می‌باشد: با احتمال ۱، نمودار X روی بازه $[0,1]$ برای تابع $h(t) = t^{3/2} \log \log(1/t)$ اندازه متناهی مثبت دارد.

اغلب، مجموعه‌های زمان‌هایی که در آنها یک تابع براونی نمونه مقادیر خاصی را می‌گیرد، مطلوب می‌باشد. اگر $f: [0,1] \rightarrow R$ یک تابع باشد، مجموعه‌های تراز $f^{-1}(c) = \{t: f(t) = c\}$ را به ازای هر c تعریف می‌کنیم. اساساً، مجموعه‌های تراز اشتراک نمودار f با خطوط موازی با محور t ها می‌باشند.

گزاره ۱۶-۵

با احتمال ۱، یک تابع براونی نمونه $X: [0,1] \rightarrow R$ به ازای تقریباً هر c (از نظر اندازه لبگ بعدی) در $\dim_H X^{-1}(c) \leq \frac{1}{2}$ صدق می‌کند. به علاوه، به ازای هر c داده شده، با احتمال مثبت $\dim_H X^{-1}(c) = \frac{1}{2}$.

نکته‌ای از برهان. بنابر قضیه ۱۶-۴، با احتمال ۱ داریم $\dim_H \text{graph } X = 1\frac{1}{2}$. از این رو به ازای تقریباً هر c ، $\dim_H((\text{graph } X) \cap L_c) \leq \frac{1}{2}$ ، که در آن L_c خط $y = c$ می‌باشد؛ در غیر این صورت نتیجه ۷-۱۰ ایجاب می‌کند که $\dim_H \text{graph } X > 1\frac{1}{2}$. نشان دادن اینکه با احتمال مثبت، $\dim_H X^{-1}(c) = \frac{1}{2}$ است، بسیار مشکل‌تر می‌باشد. استدلال با آنچه که در برهان قضیه ۸-۲ نشان داده شد، بی شباهت نیست. \square

۱۶-۲ حرکت براونی کسری

حرکت براونی، هر چند دارای اهمیت نظری فراوانی می‌باشد، اما برای بسیاری از اهداف خیلی محدود است. یک حرکت براونی نمونه، اغلب به عنوان یک تابع تصادفی "نمونه" در نظر گرفته می‌شود، هر چند نمودار آن تقریباً به طور قطعی دارای بعد $1\frac{1}{2}$ می‌باشد. به هر حال، توابع تصادفی که نمودار آنها دارای ابعاد دیگر باشند برای انواع مختلفی از مدل‌بندی‌ها لازم می‌باشد. می‌توان نشان داد که فرآیند براونی، توزیع احتمالی یکتا از توابعی می‌باشد که نمودارهای مستقل و ثابت با واریانس متناهی دارند. برای به دست آوردن توابعی نمونه با ویژگی‌هایی متفاوت، لازم است که یک یا چند تا از این شرایط را رها کنیم.

معمولاً دو روش مختلف برای این کار وجود دارد. حرکت براونی کسری دارای نموداری با توزیع نرمال می‌باشد که مستقل نیستند. از سوی دیگر در فرایندهای پایدار می‌توان از شرط واریانس متناهی گذشت و این می‌تواند به توابع ناپیوسته منتهی شود. برای سادگی، نمودارهای این فرایندها را تنها در حالت ۱- بعدی مورد بحث قرار می‌دهیم، فرایندهای متناظری را می‌توان در حالت n - بعدی تعریف کرد.

حرکت براونی کسری α - شاخص $(0 < \alpha < 1)$ به عنوان یک فرایند تصادفی $R \rightarrow [0, \infty): X$ روی یک فضای احتمال تعریف می‌شود به طوریکه:

(i) (FBM) با احتمال ۱، $X(t)$ پیوسته باشد و $X(0) = 0$ ؛

(ii) به ازای هر $t \geq 0$ و $h > 0$ نمو $X(t+h) - X(t)$ دارای توزیع نرمال با

میانگین صفر و واریانس $h^{2\alpha}$ باشد، یعنی

$$(16-10) \quad P(X(t+h) - X(t) \leq x) = (2\pi)^{-1/2} h^{-\alpha} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2h^{2\alpha}) du.$$

می‌توان نشان داد که، به ازای $0 < \alpha < 1$ ، فرایندی که در (FBM) صدق کند وجود دارد.

در تعریف بالا، به طور ضمنی، نمودارهای $X(t+h) - X(t)$ پایدار هستند؛ یعنی دارای توزیع احتمال مستقل از t می‌باشند. با وجود این، توزیع توابعی که توسط (FBM) تعیین

می‌شوند نمی‌توانند دارای نمو‌های مستقل باشند، مگر در حالت براونی که $\alpha = \frac{1}{2}$. بنابر شرط

$$(ii), E((X(t+h) - X(t))^2) = h^{2\alpha}, \text{ که با آن می‌توان نشان داد که}$$

$$(11-16) \quad E(X(t)X(t+h) - X(t)) = \frac{1}{2}[(t+h)^{2\alpha} - t^{2\alpha} - h^{2\alpha}]$$

که برای $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ناصفر است. از این رو

برحسب اینکه $\alpha > \frac{1}{2}$ یا $\alpha < \frac{1}{2}$ ، مثبت یا منفی می‌باشد. بنابراین نموها مستقل نمی‌باشند

— اگر $\alpha > \frac{1}{2}$ آنگاه $X(t) - X(0)$ و $X(t+h) - X(t)$ سرانجام علامت یکسانی

خواهند داشت، نتیجتاً $X(t)$ در آینده رو به افزایش خواهد گذاشت اگر در گذشته رو به

افزایش داشته است. به طور مشابه، اگر $\alpha < \frac{1}{2}$ آنگاه $X(t) - X(0)$ و

$X(t+h) - X(t)$ به علامت‌هایی متفاوت خواهند گروید. همچنین توجه کنید که از شرط

(16-10) می‌توان نتیجه گرفت که مسیرهای متجانس شده $\gamma^{-\alpha} X(\gamma t)$ به ازای $\gamma > 0$

دارای توزیع آماری یکسانی با $X(t)$ می‌باشند.

بعد تقریباً قطعی نمودارهای براونی کسری را می‌توان به روشی مشابه با حالت‌های براونی

اکید به دست آورد.

گزاره ۱۶-۶

فرض کنید $0 < \lambda < \alpha$. با احتمال ۱، یک تابع براونی نمونه α - شاخص در نامساوی زیر

صدق می‌کند

$$|X(t+h) - X(t)| \leq b |h|^\lambda$$

اگر $b > 0$ و به ازای یک $H_0 > 0, |h| < H_0$.

نکته‌ای در اثبات. هنگامی که $\lambda < \frac{1}{2}$ ، برهان همانند برهان گزاره ۱۶-۱، با استفاده از (۱۶-۱۰)

(۱۰) به جای (۱۶-۴) پیش می‌رود. با وجود این، اگر $\alpha > \lambda \geq \frac{1}{2}$ ، برهان به تخمین

$C_2 h^{1/2-\alpha}$ در جریان رابطه (۱۶-۶) منتهی می‌شود، و برای نشان دادن اینکه شرط هولدر (۱۶-۱۰)

(۱۲) به طور یکنواخت به ازای هر t معتبر است، به تکنیک‌های پیشرفته‌تری از نظریه احتمال

نیاز است. □

قضیه ۱۶-۷

با احتمال ۱، یک تابع براونی نمونه α - شاخص $X: [0,1] \rightarrow R$ نموداری با بعد جعبه و

هاوسدورف $2 - \alpha$ دارد.

برهان. نتیجه ۲-۱۱ (آ) همراه با شرط هولدر (۱۶-۱۲) نشان می‌دهند که بعد تقریباً به طور قطعی نمودار، حداکثر برابر $2 - \alpha$ می‌باشد. کران پایین همانند قضیه ۴-۱۶ با استفاده از توزیع احتمال (۱۶-۱۰) به دست می‌آید. \square

نظریه خود همبستگی که در بخش ۲-۱۱ بحث شد، می‌تواند در مورد توابع براونی کسری به کار رود. به سادگی می‌توان فرض کرد که X به ازای هر زمانی تعریف شده باشد، یعنی $R \rightarrow (-\infty, \infty) : X$. برای این کار تنها به تغییر ناچیزی در تعریف (FBM) نیاز است. از آنجا که واریانس $E(|X(t+h) - X(t)|^2)$ با افزایش h به بینهایت میل می‌کند، داریم

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)^2 dt \right) = \infty$$

بنابراین تابع نمونه گرایش به میانگین مربعی نامتناهی دارد. با این حال،

$$E \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t+h) - X(t))^2 dt \right) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(X(t+h) - X(t))^2 dt = h^{2\alpha}$$

می‌توان نتیجه گرفت که "روی هم رفته" تابع نمونه در

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t+h) - X(t))^2 dt \simeq ch^{2\alpha}$$

صدق می‌کند و بنابر (۱۱-۱۸) و (۱۱-۱۹)، این واقعاً مطابق با نموداری با بعد $2 - \alpha$ خواهد بود. اگر این تشابه را بیشتر در نظر بگیریم، می‌توان انتظار داشت که $X(t)$ طیف توانی تقریباً برابر با $1/\omega^{1+2\alpha}$ داشته باشد.

به خاطر همبستگی میان نموها، شبیه سازی حرکت براونی کسری α - شاخص می‌تواند مشکل باشد. روش تغییر مکان تصادفی نقطه میانی برای ساخت نمودار حرکت‌های براونی را نمی‌توان برای حرکت‌های براونی کسری تعمیم داد. اگر فرض کنیم توابع $X(k2^{-j})$ دارای توزیع نرمال، به ازای k فرد دارای واریانس $2^{-2\alpha j}$ و به ازای هر k و j مستقل باشند، تابع حاصل دارای نمونه‌های پایدار نخواهد بود. می‌توان X را توسط یک "گذر تصادفی" با استفاده از مجموع‌های معینی از متغیرهای تصادفی تخمین زد، اما فرمولی که به دست می‌آید کاملاً پیچیده است.

روش دیگر برای ساخت توابع با ویژگی‌های مشابه توابع براونی α - شاخص این است که تابع وایرستراس (۴-۱۱) را تصادفی کنیم. تابع تصادفی زیر را در نظر بگیرید

$$(16-13) \quad X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-\alpha k} \sin(\lambda^k t + A_k)$$

که در آن $\lambda > 1$ ، و C_k ها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال و میانگین صفر و واریانس یک بوده و "فازهای" A_k مستقل و هر کدام روی بازه $[0, 2\pi)$ دارای توزیع یکنواخت باشند. به وضوح $E(X(t+h) - X(t)) = 0$. علاوه بر این

$$\begin{aligned} E(X(t+h) - X(t))^2 &= E\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-\alpha k} 2 \sin\left(\frac{1}{2} \lambda^k h\right) \cos\left(\lambda^k \left(t + \frac{1}{2} h\right) + A_k\right)\right)^2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-2\alpha k} \sin^2\left(\frac{1}{2} \lambda^k h\right) \end{aligned}$$

به این دلیل که $E(C_k C_j)$ بر حسب اینکه $k = j$ باشد یا نه، برابر 1 یا 0 می‌باشد و همچنین میانگین $\cos^2(a + A_k)$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد. با انتخاب N به گونه‌ای که $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ داریم

$$\begin{aligned} E(X(t+h) - X(t))^2 &\simeq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda^{-2\alpha k} \lambda^{2k} h^2 + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^{-2\alpha k} \\ &\simeq c \lambda^{-2\alpha N} \\ &\simeq c h^{2\alpha} \end{aligned}$$

هنگامی که به ازای $h < 1$ ، $h^{2\alpha} \leq c_2 < \infty$ ، $0 < c_1 \leq E(X(t+h) - X(t))^2 / h^{2\alpha} \leq c_2 < \infty$. از این رو (۱۶-۱۳) دارای ویژگی‌های آماری معینی مشابه با حرکت براونی کسری α - شاخص می‌باشد، و روش مفیدی برای رسم نمودارهای تصادفی با ابعاد گوناگون فراهم می‌کند. چنین توابعی اغلب در مدل سازی فرکتالی به کار برده می‌شوند. مقدار $\alpha = 0.8$ ، متناظر با نموداری با بعد 1.2، برای یک "خط افق کوه" مناسب است.

همانطور که انتظار می‌رود، مجموعه‌های تراز توابع براونی نمونه α - شاخص نوعاً دارای بعد $1 - \alpha$ می‌باشند. گزاره ۱۶-۵ را می‌توان تعمیم داد به اینکه با احتمال ۱، به ازای تقریباً هر c ، $\dim_H X^{-1}(c) \leq 1 - \alpha$ ، و اینکه به ازای c داده شده، با احتمال مثبت، $\dim_H X^{-1}(c) = 1 - \alpha$.

۱۶-۳ فرایندهای پایدار

تعمیم دیگری از حرکت براونی، فرایندهای پایدار را که به وسیله "لوی" معرفی شده است به ما می‌دهد. یک فرایند پایدار یک تابع تصادفی $X: [0, \infty) \rightarrow R$ می‌باشد، به طوری که نمونه‌های $X(t+h) - X(t)$ پایدار باشند، یعنی توزیع آنها فقط وابسته به h باشد، و مستقل

باشند، یعنی اگر $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{2m}$ ، آنگاه $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$ مستقل باشند. با این وجود، جز در حالاتی بسیار خاص مانند حرکت براونی، فرایندهای پایدار دارای واریانس نامتناهی و به احتمال ۱، ناپیوسته می‌باشند.

در حالت کلی، توزیع احتمال فرایندهای پایدار را نمی‌توان به طور مستقیم تعیین کرد. برای تعریف چنین توزیع‌هایی اغلب از تبدیل‌های فوریه استفاده می‌شود، و تجزیه و تحلیل بعد نمودارها و مسیرهای فرایندهای پایدار نیازمند روش‌های تبدیل‌های فوریه می‌باشد.

توزیع احتمال یک متغیر تصادفی Y را می‌توان توسط تابع مشخصه آن، یعنی تبدیل فوریه $E(\exp(iuY))$ به ازای $u \in R$ ، تعیین کرد. برای تعریف یک فرایند پایدار، یک تابع مناسب $\psi: R \rightarrow R$ در نظر می‌گیریم و لازم است که نمونه‌های $X(t+h) - X(t)$ در

$$E(\exp(iu(X(t+h) - X(t)))) = \exp(-h\psi(u)) \quad (16-14)$$

صدق کنند که در آن $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$ مستقل هستند. واضح است نموها ساکن هستند. این تعریف، حداقل، به تعبیر زیر سازگار است. اگر $t_1 < t_2 < t_3$ ، آنگاه، با میانگین گرفتن روی همه مسیرها، و استفاده از استقلال آنها،

$$\begin{aligned} E(\exp(iu(X(t_3) - X(t_1)))) &= E(\exp iu(X(t_3) - X(t_2)) + (X(t_2) - X(t_1))) \\ &= E(\exp iu(X(t_3) - X(t_2)))E(\exp iu(X(t_2) - X(t_1))) \\ &= \exp(-(t_3 - t_2)\psi(u)) \exp(-(t_2 - t_1)\psi(u)) \\ &= \exp(-(t_3 - t_1)\psi(u)). \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که به ازای ψ مناسب، فرایندهای پایدار واقعاً وجود دارند.

با قرار دادن $\psi(u) = c|u|^\alpha$ با $0 < \alpha \leq 2$ ، فرایند متقارن پایدار α -شاخص به دست می‌آید. تعویض h با γh ، و u با $\gamma^{-1/\alpha}u$ در سمت راست (۱۶-۱۴) تغییری ایجاد نمی‌کند، پس این نتیجه می‌دهد که $X(\gamma t)$ توزیع آماری یکسانی با $X(t)$ دارد. حالت $\alpha = 2$ حرکت براونی استاندارد می‌باشد.

قضیه ۱۶-۸

با احتمال ۱، نمودار فرایند متقارن پایدار α - شاخص دارای بعد جعبه و هاوسدورف $\max\{1, 2 - 1/\alpha\}$ می‌باشد.

برهان جزئی. نشان می‌دهیم که

$$\dim_H \text{graph } X \leq \overline{\dim}_B \text{graph } X \leq \max\{1, 2 - 1/\alpha\}$$

عبارت $R_f[t_1, t_2]$ را به عنوان ماکزیمم برد تابع f روی بازه $[t_1, t_2]$ به کار می‌بریم. با استفاده از ویژگی خودتشابهی آماری فرایند X ، به ازای هر t و $\delta > 0$ داریم

$$E(R_x[t, t + \delta]) = \delta^{1/\alpha} E(R_x[0, 1]).$$

اگر تعداد N_δ مربع از شبکه δ - مختصات توسط نمودار X قطع شوند، از گزاره ۱-۱۱ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E(N_\delta) &\leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} E(R_x[i\delta, (i+1)\delta]) \\ &= 2m + m\delta^{-1} \delta^{1/\alpha} E(R_x[0, 1]) \end{aligned}$$

که در آن m کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی $1/\delta$ می‌باشد. می‌توان نشان داد، حداقل منطقی به نظر می‌رسد، که $E(R_x[0, 1]) < \infty$ ، بنابراین یک ثابت c وجود دارد به طوری که به ازای هر δ کوچک، $E(N_\delta \delta^\beta) \leq c$ ، که در آن $\beta = \max\{1, 2 - 1/\alpha\}$. اگر $\varepsilon > 0$ ، آنگاه $E(N_\delta \delta^{\beta+\varepsilon}) \leq c\delta^\varepsilon$ بنابراین

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty} N_{2^{-k}} (2^{-k})^{\beta+\varepsilon}\right) \leq c \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k})^\varepsilon < \infty.$$

این نابرابری نتیجه می‌دهد که، با احتمال ۱، $\sum_{k=1}^{\infty} N_{2^{-k}} (2^{-k})^{\beta+\varepsilon} < \infty$. به ویژه چنانچه $\delta = 2^{-k} \rightarrow 0$ ، آنگاه $N_\delta \delta^{\beta+\varepsilon} \rightarrow 0$ ، بنابراین با احتمال ۱، $\dim_B \text{graph } X \leq \beta$. □

اگر $\alpha < 1$ آنگاه تقریباً به طور قطعی $\dim_H \text{graph } X = 1$ ، که کوچک‌ترین بعد ممکن برای نمودار هر تابع روی بازه $[0, 1]$ می‌باشد. این مطلب، این حقیقت را می‌رساند که مسیرهای نمونه به جز در بین نقاط معین با ناپیوستگی‌های جهشی، ثابت می‌باشند. تصویر X ، یعنی $\{X(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ ، با احتمال ۱، دارای بعد α می‌باشد، که نشان‌دهنده توزیع جهش‌ها می‌باشد. می‌توان نشان داد که احتمال وجود k جهش با قدر مطلق حداقل a در بازه $[t, t+h]$ برابر $(ha^{-\alpha})^k \exp(-ha^{-\alpha})/k!$ می‌باشد، که متناظر با یک توزیع پواسن با میانگین $ha^{-\alpha}$ می‌باشد.

اگر $1 < \alpha < 2$ ، فرایند متقارن پایدار، یک مولفه "پیوسته" و یک مولفه "جهشی" را به هم می‌پیوندد.

۱۶-۴ سطوح براونی

این فصل را با بحث مختصری در مورد سطوح براونی کسری به پایان می‌رسانیم که در خلق مناظر کامپیوتری به طور موثری از آنها استفاده می‌شود.

متغیر زمان t را با مختصات (x, y) عوض می‌کنیم، پس متغیر تصادفی $X(x, y)$ به عنوان ارتفاع یک سطح در نقطه (x, y) در نظر گرفته می‌شود.

به ازای $0 < \alpha < 1$ ، یک تابع براونی α -شاخص را یک تابع تصادفی تعریف می‌کنیم به طوریکه:

(i) (FBS) با احتمال ۱، $X(0,0) = 0$ ، و $X(x, y)$ یک تابع پیوسته از (x, y) باشد؛

(ii) به ازای $(x, y), (h, k) \in R^2$ ، نموهای ارتفاع $X(x+h, y+k) - X(x, y)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $(h^2 + k^2)^\alpha$ باشند، یعنی

$$P(X(x+h, y+k) - X(x, y) \leq z)$$

$$(15-16) = (2\pi)^{-1/2} (h^2 + k^2)^{-\alpha/2} \int_{-\infty}^z \exp\left(\frac{-r^2}{2(h^2 + k^2)^\alpha}\right) dr.$$

با کمی تلاش، می‌توان نشان داد فرایندی که در این شرایط صدق کند وجود دارد. همبستگی متغیرهای تصادفی $X(x, y)$ در نقاط مختلف کاملاً پیچیده می‌باشد.

سطح $\{(x, y, X(x, y)) : (x, y) \in R^2\}$ را یک سطح براونی α -شاخص می‌نامیم.

چند سطح نمونه در شکل ۱۶-۳ نشان داده شده‌اند.

از مقایسه (۱۵-۱۶) با توزیع (۱۶-۱۰) می‌بینیم که نمودار حاصل از اشتراک $X(x, y)$ با هر صفحه عمودی، نمودار یک تابع براونی ۱-بعدی α -شاخص می‌باشد (برای اینکه مطمئن شویم که $X(0) = 0$ می‌توانیم یک ثابت به آن اضافه کنیم). اغلب با در نظر گرفتن این بخش‌های عمودی، می‌توانیم اطلاعاتی در مورد سطوح به دست آوریم.

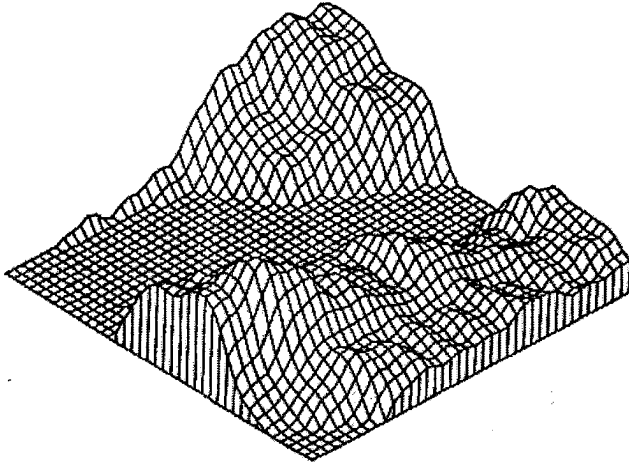
قضیه ۱۶-۹

با احتمال ۱، یک سطح براونی نمونه α -شاخص دارای بعد جعبه و هاوسدورف $3-\alpha$ می‌باشد.

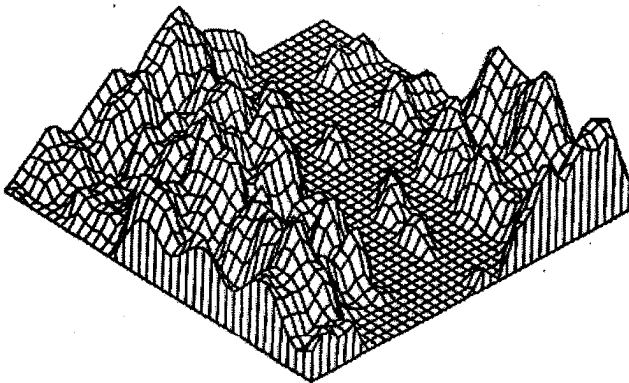
برهان. می‌توان نشان داد که اگر $\lambda < \alpha$ آنگاه، با احتمال ۱، یک تابع براونی α -شاخص $X : [0,1] \times [0,1] \rightarrow R$ در نابرابری

$$|X(x+h, y+k) - X(x, y)| \leq b(h^2 + k^2)^{1/2} = b|(h, k)|^1$$

صدق می‌کند، مشروط بر آنکه (h, k) به اندازه کافی کوچک باشد. نظیر نتیجه ۱۱-۲ (آ) برای یک تابع دو متغیره (تمرین ۱۱-۹ را ببینید) مقدار $1-3$ را به عنوان کران بالا برای بعد بالایی جعبه سطح به ما می‌دهد.



(a)



(b)

شکل ۱۶-۳ سطوح براونی کسری α -شاخص: (a) $\alpha = 0.95$ و بعد = 2.05

(b) $\alpha = 0.8$ و بعد = 2.20

اگر x_0 را ثابت بگیریم، آنگاه $X(x_0, y) - X(x_0, 0)$ یک تابع براونی α - شاخص روی بازه $[0, 1]$ می‌باشد، بنابراین با استفاده از قضیه ۱۶-۷، $X(x_0, y)$ با احتمال ۱، دارای نموداری با بعد هاوسدورف $2 - \alpha$ می‌باشد. از این رو، با احتمال ۱، نمودار $X(x_0, y)$ به ازای تقریباً هر $0 \leq x_0 \leq 1$ دارای بعد $2 - \alpha$ می‌باشد. اما این نمودارها تنها بخش‌های موازی از سطحی است که توسط X داده می‌شود. پس با استفاده از تعمیم واضحی از نتیجه ۷-

۱۰ برای R^3 ، سطح دارای بعد هاوسدورف حداقل $1 + (2 - \alpha)$ می‌باشد. \square

مجموعه‌های تراز $X^{-1}(c) = \{(x, y) : X(x, y) = c\}$ مسیره‌های سطوح تصادفی هستند. گزاره ۱۶-۵ به سطوح α - شاخص تعمیم می‌یابد. می‌توان نشان داد که، با احتمال ۱، به ازای تقریباً هر c (با اندازه ۱- بعدی)، $\dim_H X^{-1}(c) \leq 2 - \alpha$ ، و با احتمال مثبت، $\dim_H X^{-1}(c) = 2 - \alpha$. بنابراین، مسیره‌های سطوح α - شاخص، در حالت کلی، دارای بعد $2 - \alpha$ می‌باشند.

مسائل ساختن سطوح نمونه برای توابع براونی α - شاخص، قابل توجه هستند و ما در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم. با وجود این، اشاره می‌کنیم که نظیر رابطه (۱۶-۱۳) برای سطوح α - شاخص به صورت زیر می‌باشد

$$X(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-\alpha k} \sin(\lambda^k (x \cos B_k + y \sin B_k) + A_k)$$

که در آن C_k ها مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ بوده، و A_k و B_k مستقل با توزیع یکنواخت روی بازه $[0, 2\pi)$ می‌باشند. چنین توابعی پیشنهادهایی امکانپذیر برای رسم کامپیوتری سطوح تصادفی می‌باشند.

ایده‌های این بخش را می‌توانیم در جهات بسیاری تعمیم دهیم و به روش‌های مختلفی آنها را با هم ترکیب کنیم. حرکت‌های براونی کسری و فرایندهای پایدار را می‌توان به ازای هر n و m از R^n به R^m تعریف کرد و تغییرات بسیار دیگری هم می‌توان در آنها ایجاد کرد. مسائل مجموعه‌های تراز، نقاط چندگانه، تقاطع با مجموعه‌های ثابت، تصاویر $X(F)$ برای فرکتال‌های گوناگون F ، و غیره، همگی در چنین وضعیت‌هایی مطرح می‌شوند. برای تجزیه و تحلیل چنین مسائلی اغلب در کنار روش‌های هندسی به تکنیک‌های پیشرفته‌ای از علم احتمال نیز نیازمند هستیم.

۱۶-۵ نکات و منابع

جزئیات بیشتر در مورد نظریه احتمالاتی حرکت‌های براونی را می‌توانید در کتاب‌های نوشته شده توسط *Carlin* و *Taylor* (۱۹۷۵، ۱۹۸۱) و *Billingsley* (۱۹۷۹) بیابید. حرکت براونی کسری در کتاب‌های *Mandelbrot* و *Van Ness* (۱۹۶۸) معرفی شده‌اند، و ویژگی‌های روندهای پایدار برای اولین بار توسط *Levy* مورد مطالعه قرار گرفتند. بررسی‌های انجام شده توسط *Taylor* (۱۹۸۶، ۱۹۷۳) به برخی ویژگی‌های بعدی این گونه روندها اشاره دارد. کتاب‌های نوشته شده توسط *Adler* (۱۹۸۱) و *Kahne* (۱۹۸۵) منابع پایه‌ای برای ریاضیات سطوح و توابع براونی کسری و ابعاد آنها می‌باشند. روش‌های محاسباتی برای تولید مسیره‌ها و سطوح براونی در کتاب‌های *Voss* (۱۹۸۵)، *Feder* (۱۹۸۸) و *Saupe* و *Peitgen* (۱۹۸۸) بحث شده است.

تمرین‌ها

- ۱-۱۶ با استفاده از خودتشابهی آماری حرکت براونی نشان دهید که یک مسیر نمونه براونی در R^3 ، با احتمال ۱، دارای بعد جعبه حداکثر ۲ می‌باشد.
- ۲-۱۶ فرض کنید $X: [0, \infty) \rightarrow R^3$ حرکت براونی معمولی باشد. نشان دهید که با احتمال ۱، تصویر $X(F)$ از مجموعه یک سوم میانی کانتور F دارای بعد هاوسدورف حداکثر $\log 4 / \log 3$ می‌باشد. (مشکل‌تر: نشان دهید که این بعد تقریباً به یقین برابر با $\log 4 / \log 3$ می‌باشد.) نتیجه متناظر برای حرکت براونی α -شاخص چیست؟
- ۳-۱۶ فرض کنید $X: [0, \infty) \rightarrow R^3$ حرکت براونی معمولی باشد، و F یک زیرمجموعه فشرده از R^3 باشد. با استفاده از قضیه ۸-۲ نشان دهید که اگر $\dim_H F > 1$ ، آنگاه به احتمال مثبت مسیر براونی $X(t)$ ، F را قطع می‌کند.
- ۴-۱۶ نشان دهید که با احتمال ۱، تابع براونی نمونه $X: [0, \infty) \rightarrow R$ روی هر بازه $[t, u]$ یکنواخت نیست.
- ۵-۱۶ از تعریف حرکت براونی کسری، (۱۶-۱۱) را نتیجه بگیرید.
- ۶-۱۶ فرض کنید $1 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq \frac{1}{2}$ و $X_1(t)$ و $X_2(t)$ ، از $[0, 1]$ به R توابع براونی مستقلی، به ترتیب با شاخص‌های α_1 و α_2 باشند. نشان دهید که با احتمال ۱،

مسیر داده شده $\{X_1(t), X_2(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ در R^2 دارای ابعاد جعبه و هاوسدورف $(1 + \alpha_2 - \alpha_1)/\alpha_2$ می‌باشد.

فصل ۱۷ اندازه‌های چندفرکتالی

یک جرم μ را می‌توان به گونه‌ای روی یک ناحیه توزیع کرد که تمرکز جرم تغییرات زیادی داشته باشد. غالباً پیش می‌آید که مجموعه‌هایی که در آنها تمرکز جرم دارای چگالی معینی است، مثلاً مجموعه‌ای که برای آن به ازای r کوچک داشته باشیم $\mu(B_r(x)) \approx r^\alpha$ ویژگی‌های فرکتال ماندنی را نمایش می‌دهند، جایی که به α های متفاوت مجموعه‌های متفاوتی نظیر می‌شوند. یک توزیع جرم یا یک اندازه μ با چنین ویژگی‌هایی یک اندازه چند فرکتالی^۱ نامیده می‌شود. همانند فرکتال‌ها، بهتر است از بیان یک تعریف دقیق برای اندازه‌های چند فرکتالی پرهیز کنیم.

یک دسته مهم از چندفرکتال‌ها در ارتباط با جاذب‌ها در سیستم‌های دینامیکی ظاهر می‌شوند، بخش ۱۳-۷ را ببینید. اگر $f: D \rightarrow D$ یک نگاشت روی یک دامنه D باشد، با در نظر گرفتن

$$\mu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \# \{k: 1 \leq k \leq m \text{ و } f^k(x) \in A\}$$

می‌توانیم یک اندازه برای زیرمجموعه‌های A از D تعریف کنیم که در آن x یک نقطه ابتدایی داده شده می‌باشد. در این صورت $\mu(A)$ "نسبت زمانی" را که تکرارهای x در A سپری می‌کنند نشان می‌دهد. قبلاً دیدیم که محمل μ اغلب یک جاذب از f بوده و ممکن است یک فرکتال باشد. با این وجود، غیر یکنواخت بودن توزیع μ ممکن است زیرمجموعه‌های بیشتری از جاذب را به چشم آورد. نامنظم بودن توزیع μ اطلاعات بیشتری درباره سیستم را در بر

^۱ multifractal

می‌گیرد که می‌توان به سادگی آنها را با استفاده از نظریه چندفرکتالی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد و تشریح کرد.

چندفرکتال‌ها گذر از هندسه مجموعه‌ها به ویژگی‌های هندسی اندازه‌ها را نمایش می‌دهند. به هر حال، در پرتو اقبال امروزمین به چند فرکتال‌ها و "ایده‌های فرکتالی" که در فصل‌های قبلی توسعه داده شده‌اند، شایسته است که در این کتاب مطالبی نیز از چندفرکتال‌ها آورده شود. از آنجا که این نظریه در زمینه‌های بسیاری از ریاضیات کاربرد دارد، می‌توان آن را متعلق به قسمت اول کتاب که در مورد مبانی نظریه می‌باشد، در نظر گرفت. برای این که این مطلب را به تفصیل بیان کنیم بیان آن را به تأخیر انداختیم. آشنایی با بسیاری از فرکتال‌ها که بسیاری از آنها دارای قرینه‌های چندفرکتالی هستند، سبب می‌شود که نظریه چندفرکتالی، طبیعی‌تر به نظر آید. به علاوه، می‌توان اندازه‌های چندفرکتالی را به عنوان ابزاری برای تولید گستره‌ای از فرکتال‌ها در نظر گرفت، اما این روش نیاز به دقت قابل توجهی دارد.

تعدادی از راه‌های دستیابی به چندفرکتال‌ها ارائه شده‌اند؛ اما از نقطه نظر ریاضی، هیچکدام از آنها کاملاً قانع کننده نمی‌باشند، چرا که از دقت کمی برخوردارند و کاربرد آنها به دسته‌های خاصی از اندازه‌ها محدود می‌شود. در بررسی ما بعضی از ایده‌های مهم از این موضوع مطرح خواهند شد، اما باید تأکید کرد که اینها تنها رهیافت‌های ممکن نیستند.

۱۷-۱ تعریف چندفرکتال‌ها

فرض کنید μ اندازه‌ای باشد که محمل آن ناحیه کرانداری از R^n است، و جرم کل آن $\mu(R^n) = 1$ باشد. خود محمل μ می‌تواند فرکتال باشد، می‌تواند هم نباشد.

به ازای هر $0 < \delta < 1$ ، فرض کنید $\{B_i\}$ مکعب‌های شبکه δ - مختصاتی باشند که محمل μ را قطع می‌کنند. تعداد این مکعب‌های δ - شبکه‌ای را که اندازه‌های آنها "به میزان مناسبی بزرگ" می‌باشند، می‌شماریم. به ازای $-\infty < \alpha < \infty$ - قرار می‌دهیم

$$N_\delta(\alpha) = \#\{i : \mu(B_i) \geq \delta^\alpha\}. \quad (1-17)$$

(توجه کنید که نحوه نمایش ما اندکی با نحوه نمایش بعضی از مولفان تفاوت دارد.) هر چند $N_\delta(\alpha)$ به وسیله "شمارش جعبه" به دست می‌آید و طبیعی است که رفتار $\log N_\delta(\alpha) / -\log \delta$ را هنگامی که $\delta \rightarrow 0$ ، بررسی کنیم، در تعبیر این حد باید احتیاط کرد - نیازی نیست که این حد بعد جعبه مجموعه خاصی باشد، چرا که لزومی ندارد که جعبه‌های شمارش شده برای δ ‌های کوچک، در جعبه‌های شمارش شده برای δ ‌های بسیار بزرگ تر قرار گیرند.

همچنین مجموع روی مکعب‌های δ - شبکه را به ازای $-\infty < q < \infty$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S_\delta(q) = \sum_i \mu(B_i)^q \quad (17-2)$$

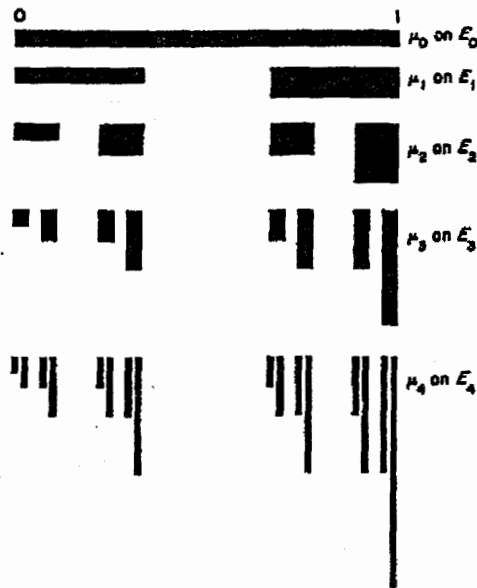
از آنجا که تعداد (محمل μ) $S_\delta(0) = N_\delta(\mu)$ مکعب δ - شبکه‌ای برای پوشاندن محمل μ لازم می‌باشد، از دیدگاهی حدهای $\log S_\delta(q) / -\log \delta$ $\lim_{\delta \rightarrow \infty}$ ایده بعد جعبه را تعمیم می‌دهد. نکته با ارزشی که باید بیان کنیم این است که همانطور که برای بعد جعبه داشتیم (۳-۱۴) می‌توان رفتار حدی $\log S_\delta(q) / -\log \delta$ را هنگامی که $\delta \rightarrow 0$ ، توسط رفتار حدی $\log S_{\delta_k}(q) / -\log \delta_k$ تعیین کرد جاییکه $\delta_k \rightarrow 0$ و $\delta_{k+1} / \delta_k \geq c$ و برای یک $c > 0$. توجه کنید که به ازای هر δ ، با افزایش α ، $N_\delta(\alpha)$ افزایش می‌یابد، و با افزایش q $S_\delta(q)$ کاهش می‌یابد.

نظریه چند فرکتال‌ها به این حقیقت مربوط می‌شود که در بسیاری از حالات، $N_\delta(\alpha)$ و $S_\delta(q)$ هنگامی که $\delta \rightarrow 0$ ، از قوانین توان پیروی می‌کنند؛ به علاوه اینکه روابطی اساسی بین نماهای قانون توان وجود دارد.

مثال زیر از یک اندازه "خود متشابه" دارای ویژگی‌هایی است که نوعاً ویژگی‌های اندازه‌های چندفرکتالی می‌باشند.

مثال ۱-۱۷

فرض کنید $0 < p < 1$ داده شده باشد. یک اندازه μ را به صورت زیر روی مجموعه یک سوم میانی کانتور $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ می‌سازیم. (طبق معمول E_k شامل 2^k بازه به طول 3^{-k} می‌باشد). یک جرم واحد را به گونه‌ای قسمت کنید که بازه سمت چپ E_1 دارای جرم p و بازه سمت راست آن دارای جرم $1-p$ باشد. جرم روی هر یک از بازه‌های E_1 را بین دو زیربازه E_2 به نسبت $p:1-p$ قسمت کنید. به همین روش ادامه دهید، به گونه‌ای که جرم روی هر یک از بازه‌های E_k به نسبت $p:1-p$ بین دو زیربازه آن در E_{k+1} تقسیم شود؛ شکل ۱-۱۷ را ببینید. این یک توزیع جرم μ را روی F تعریف می‌کند. در این صورت $S_\delta(q)$ و $N_\delta(\alpha)$ در قوانین توان به ازای δ ی کوچک و هر $-\infty < q < \infty$ و $\alpha \geq 0$ صدق می‌کنند.



شکل ۱۷-۱ روش ساخت اندازه خود تشابهی که در مثال ۱۷-۱ بررسی شد. جرم موجود روی هر یک از بازه‌های E_k در روش ساخت مجموعه کانتور که با ناحیه مستطیلی نمایش داده شده، به نسبت $p:1-p$ (در اینجا به نسبت $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$) بین دو زیربازه از E_{k+1} تقسیم شده است. ادامه این روند به یک توزیع جرم μ روی مجموعه کانتور F منتهی می‌شود.

محاسبه (بخش اول). مجموعه E_k از 2^k بازه به طول 3^{-k} ساخته می‌شود، و به ازای هر r ، تعداد $\binom{k}{r}$ از آنها دارای جرم $p^r (1-p)^{k-r}$ می‌باشند. در اینجا ضریب دودویی معمولی می‌باشد. بنابراین قضیه دو جمله‌ای،

$$S_{3^{-k}}(q) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} p^{qr} (1-p)^{q(k-r)} = (p^q + (1-p)^q)^k$$

بنابراین، حداقل هنگامی که $\delta = 3^{-k}$ داریم،

$$S_{\delta}(q) = \delta^{\log(p^q + (1-p)^q) / \log 3}$$

از این رو

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log S_{\delta}(q)}{-\log \delta} = \frac{\log(p^q + (1-p)^q)}{\log 3}.$$

برآورد مستقیم $N_\delta(\alpha)$ نسبتاً سخت‌تر است. بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض می‌کنیم $0 < p < \frac{1}{2}$ ، آنگاه داریم

$$(۳-۱۷) \quad N_{3^{-k}}(\alpha) = \sum_{r=0}^m \binom{k}{r}$$

که در آن m بزرگترین عدد صحیحی است که $p^m(1-p)^{k-m} \geq 3^{-k\alpha}$ ، یعنی:

$$m \approx \frac{k(\log(1-p) + \alpha \log 3)}{\log(1-p) - \log p}$$

با این فرض که این مقدار بین 0 و k قرار گیرد.

اکنون می‌توان از (۳-۱۷) برای تخمین $N_{3^{-k}}(\alpha)$ و سپس برای سنجش نمای قانون توان استفاده کرد، اما این کار خسته کننده است. ترجیح می‌دهیم که محاسبات را به زمانی موکول کنیم که بعضی از نظریه‌های کلی را بسط داده و توانایی استفاده از شیوه‌های غیر مستقیم را داشته باشیم. □

اکنون فرض می‌کنیم که، به ازای ε کوچک، تعداد مکعب‌های δ - شبکه‌ای B_i با خاصیت $\mu(B_i) < \delta^\alpha \leq \delta^{\alpha+\varepsilon}$ به ازای δ کوچک، تقریباً از مرتبه $\delta^{-f(\alpha)}$ باشد. (ممکن است خواننده ترغیب شود که این مورد را بدین صورت تفسیر کند که مجموعه‌ای چون

$$\{x : \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x))}{-\log \delta} = \alpha \text{ باشد } x \text{ شامل } \delta\text{- شبکه شامل } x \text{ می‌باشد}\}$$

دارای بعد جعبه $f(\alpha)$ می‌باشد. لیکن، این تفسیر گمراه کننده است — چنین مجموعه‌هایی اغلب در محمل μ چگال می‌باشند و بنابراین بعد جعبه آنها برابر با بعد جعبه محمل μ می‌باشد). یک تخمین خام بر مبنای چنین فرضی نتیجه می‌دهد

$$S_\delta(q) \sim \int_0^\infty \delta^{q\alpha} \delta^{-f(\alpha)} d\alpha \\ = \int_0^\infty \delta^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha .$$

به ازای δ کوچک، سهم غالب بر این انتگرال مربوط به آن مقدار α است که به ازای آن $f(\alpha) - q\alpha$ ماکزیمم می‌باشد. با نوشتن $\tau(q)$ برای این مقدار ماکزیمم، یک قانون توان $S_\delta(q) \sim \delta^{-\tau(q)}$ نتیجه می‌شود.

این مبحث سردستی را می‌توان تحت فرض‌های زیر روی $N_\delta(\alpha)$ ، به طور دقیق بیان کرد: به ازای $0 \leq \alpha < \infty$ حد دوگانه زیر موجود است:

$$(۴-۱۷) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon))}{-\log \delta} \equiv f(\alpha).$$

حالت $f(\alpha) = -\infty$ نیز مجاز می‌باشد. وجود این حد ایجاب می‌کند که به ازای $\eta > 0$ داده شده، و برای $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، و هر δ ی به اندازه کافی کوچک، داشته باشیم

$$(۵-۱۷) \quad \delta^{-f(\alpha)+\eta} \leq N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon) \leq \delta^{-f(\alpha)-\eta}$$

گزاره ۲-۱۷

فرض کنید $N_\delta(\alpha)$ در (۴-۱۷) صدق کند، و تعریف کنید

$$(۶-۱۷) \quad \tau(q) = \sup_{0 \leq \alpha < \infty} (f(\alpha) - q\alpha).$$

آنگاه

$$(۷-۱۷) \quad \tau(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log S_\delta(q)}{-\log \delta}$$

و به خصوص، این حد وجود دارد.

*برهان. برهان را برای زمانیکه $q > 0$ می‌باشد، بیان می‌کنیم. به ازای هر $\alpha \geq 0$ ، اگر $\eta > 0$ ، $0 < \varepsilon < \eta/q$ وجود دارد به طوریکه، اگر $0 < \delta \leq \delta_0$ ،

$$\delta^{-f(\alpha)+\eta} \leq N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon) \leq N_\delta(\alpha + \varepsilon)$$

آنگاه

$$\begin{aligned} S_\delta(q) &\geq N_\delta(\alpha + \varepsilon) \delta^{q(\alpha + \varepsilon)} \\ &\geq \delta^{-f(\alpha)+2\eta+q\alpha}. \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$(۸-۱۷) \quad \begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log S_\delta(q)}{-\log \delta} &\geq f(\alpha) - q\alpha - 2\eta \\ &\geq \tau(q) - 2\eta. \end{aligned}$$

برای عکس این نامساوی، فرض کنید $\eta > 0$ داده شده باشد. β را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنید تا مطمئن شوید که $n - q\beta \leq \tau(q)$ (n دقیقاً همان بعد فضای R^n می‌باشد). استفاده از (۵-۱۷) و فشردگی یک دنباله $\alpha_1 < \dots < \alpha_m$ و $\varepsilon < \eta/q$ را فراهم می‌کند به

طوری که $[0, \beta] \subset \bigcup_{k=1}^m (\alpha_k - \varepsilon, \alpha_k + \varepsilon)$ و به ازای هر k ($1 \leq k \leq m$).

$$(۹-۱۷) \quad N_\delta(\alpha_k + \varepsilon) - N_\delta(\alpha_k - \varepsilon) \leq \delta^{-f(\alpha_k)-\eta}$$

اگر δ به اندازه کافی کوچک باشد. بنابراین، از آنجاییکه تعداد مکعب‌های δ - شبکه به ازای یک ثابت c حداکثر برابر $c\delta^{-n}$ می‌باشد، به ازای هر δ ی به اندازه کافی کوچک داریم

$$\begin{aligned} S_\delta(q) &\leq \sum_{k=1}^m (N_\delta(\alpha_k + \varepsilon) - N_\delta(\alpha_k - \varepsilon)) \delta^{q(\alpha_k - \varepsilon)} + c\delta^{-n} \delta^{q\beta} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \delta^{-f(\alpha_k) + q\alpha_k - 2\eta} + c\delta^{-n} \delta^{q\beta} \\ &\leq (b+c)\delta^{-\tau(q) - 2\eta} \end{aligned}$$

از این رو،

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\log S_\delta(q)}{-\log \delta} \leq \tau(q) + 2\eta.$$

نامساوی (۸-۱۷) همچنین به ازای هر $\eta > 0$ برقرار است، بنابراین به (۷-۱۷) می‌رسیم. □

فرض (۴-۱۷)، که بیان می‌کند "تعداد مکعب‌های δ - شبکه، با $\mu(B_i)$ تقریباً برابر با δ^α ، از یک قانون توان پیروی می‌کند"، فرض معقولی است و می‌توان در بسیاری از حالت‌هایی که مورد نظر ماست، معتبر بودن آن را نشان داد. در چنین حالاتی (۷-۱۷) نماهای قوانین توان

$$S_\delta(q) \sim \delta^{-\tau(q)} \quad \text{و} \quad N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon) \sim \delta^{-f(\alpha)}.$$

را به هم مربوط می‌کند.

فرض‌های بیشتر در مورد شکل f سبب می‌شود که روابط بیشتری بین نماهای گوناگون نتیجه شود. از هم اکنون حالتی را که غالباً در عمل پیش می‌آید را فرض می‌گیریم: f یک تابع مشتق پذیر از α است که $f(\alpha) > 0$ ، و اکیداً محدب می‌باشد، یعنی $f'(\alpha)$ با α به طور اکید نزول می‌کند.

فرض کنید که به ازای هر q سوپریمم در (۶-۱۷) در نقطه $\alpha = \alpha(q) > 0$ به دست آید. آنگاه در $\alpha(q)$

$$(10-17) \quad \frac{d}{d\alpha} (f(\alpha) - q\alpha) = 0$$

که نتیجه می‌دهد

$$(11-17) \quad q = \frac{df}{d\alpha} (\alpha(q)).$$

از این رو $\alpha(q)$ آن مقداری از α می‌باشد که در آن نمودار f دارای شیب q می‌باشد. از (۱۷-۶) داریم

$$(۱۷-۱۲) \quad \tau(q) = f(\alpha(q)) - q\alpha(q)$$

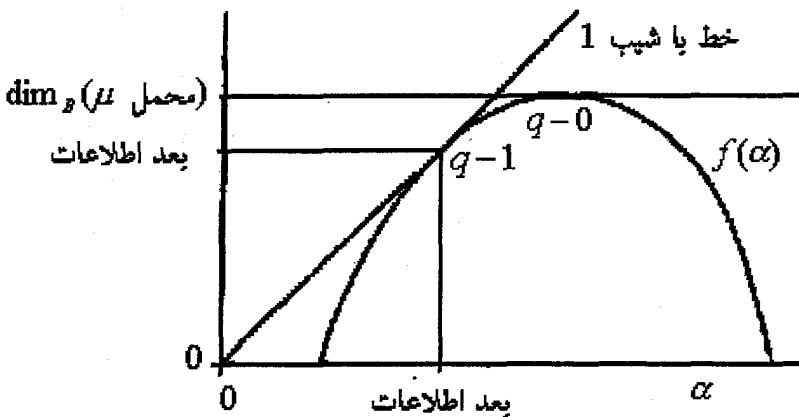
بنابراین، اگر α به عنوان تابعی از q مشتق پذیر باشد، داریم

$$\frac{d\tau}{dq} = \frac{df}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dq} - \alpha - q \frac{d\alpha}{dq}.$$

با قرار دادن $\alpha = \alpha(q)$ و استفاده از (۱۷-۱۱)، خواهیم داشت

$$(۱۷-۱۳) \quad \frac{d\tau}{dq}(q) = -\alpha(q).$$

معادلات (۱۷-۱۲) و (۱۷-۱۳) اساساً، یک جفت تبدیل لژاندر می‌باشند که متغیرهای مستقل q و τ را به متغیرهای مستقل α و f ربط می‌دهند. در مثال‌های ریاضی معمولاً راه ساده‌تر این است که با تغییر دادن q ، $\tau(q)$ را بیابیم، و سپس $\alpha(q)$ و $f(\alpha(q))$ را می‌توان با استفاده از (۱۷-۱۳) و (۱۷-۱۲) یافت، که ما را به ترسیم نموداری از $f(\alpha)$ در مقایسه با α به واسطه پارامتر q قادر می‌سازد. برای تخمین‌های عملی، این روند ممکن است با مشکلاتی مواجه شود، و روش‌های دیگر برای یافتن نمودار $f(\alpha)$ اغلب بهتر می‌باشند. این منحنی $f(\alpha)$ گاهی به عنوان طیف چندفرکتالی اندازه μ خوانده می‌شود؛ شکل ۱۷-۲ را ببینید.



شکل ۱۷-۲ ویژگی‌های طیف چندفرکتالی - نمودار $f(\alpha)$ بر حسب α

تعدادی از مقادیر پارامتر q در خور توجه هستند. هنگامی که $q = 0$ داریم

$$S_\delta(0) = N_\delta(\mu) \text{ (محمل)}$$

یعنی تعداد مکعب‌های δ - شبکه که برای پوشاندن محمل μ لازم می‌باشد، اکنون از (۱۷-۱)

(۱۲) نتیجه می‌شود که $\tau(0) = \dim_B(\mu) = f(\alpha(0))$ (محمل μ) از آنجا که به واسطه (۱۷-۱)

$$(۱۱)، \quad d f(\alpha(0))/d\alpha = 0، \text{ این مقدار ماکزیمم } f \text{ می‌باشد.}$$

برای مقدار $q = 1$ خواهیم داشت $S_\delta(1) = 1$ ، یعنی $\tau(1) = 0$. به علاوه، با استفاده از

(۱۲-۱۷) و (۱۱-۱۷) داریم $f(\alpha(1)) = \alpha(1)$ و $d f(\alpha(1))/d\alpha = 1$. از (۱۷-۲) نتیجه

می‌شود که

$$\frac{d}{dq} \log S_\delta(q) = \frac{\sum \mu(B_i)^q \log \mu(B_i)}{\sum \mu(B_i)^q}$$

که مجموع‌ها روی مکعب‌های δ - شبکه B_i گرفته می‌شوند، پس در $q = 1$ ،

$$\frac{d \log S_\delta(q)}{dq} \Big|_{q=1} = \frac{\sum \mu(B_i) \log \mu(B_i)}{-\log \delta}$$

با فرض همگرایی مشتق‌ها هنگامی که $\delta \rightarrow 0$ ، برابری‌های (۱۷-۷) و (۱۷-۱۳) ایجاب می‌کنند که

$$(۱۷-۱۴) \quad \alpha(1) = -\frac{d\tau}{dq}(1) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sum \mu(B_i) \log \mu(B_i)}{\log \delta} \right)$$

عبارت $-\sum \mu(B_i) \log \mu(B_i)$ ، که در آن مجموع روی مکعب‌های شبکه با ضلع δ گرفته می‌شود، آنتروپی افزاز اندازه μ به وسیله مکعب‌های δ - شبکه نامیده می‌شود. این مقدار، میانگین اطلاعات در مورد موقعیت یک نقطه x که توسط μ اندازه‌گیری شده است را نشان می‌دهد، که با دانستن این مطلب که نقطه x متعلق به کدام یک از مکعب‌های B_i می‌باشد، فراهم آمده است. بنابراین $\alpha(1)$ ، یعنی مقداری که در آن، مقیاس این آنتروپی δ است، اغلب بعد اطلاعات^۱ μ نامیده می‌شود.

مقدار $\alpha(1) = f(\alpha(1))$ تفسیر بسیار مهم تری نیز دارد — این مقدار، سایز مجموعه‌ای را که اندازه μ روی آن تمرکز یافته است منعکس می‌کند. برای دیدن این موضوع، فرض کنید $h > 0$ و $\eta > 0$ را طوری اختیار کنید که اگر $0 \leq \alpha < \alpha(1) - h$ آنگاه $f(\alpha) - \alpha < -\eta$ دقیقاً مانند آنچه در برهان گزاره ۱۷-۲ داشتیم، می‌توانیم $\varepsilon < \eta/4$ و $0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_m \leq \alpha(1) - h$ را چنان بیابیم که

^۱ information dimension

$$[0, \alpha(1) - h] \subset \bigcup_{k=1}^m (\alpha_k - \varepsilon, \alpha_k + \varepsilon)$$

و به ازای هر δ ی به اندازه کافی کوچک

$$N_\delta(\alpha_k + \varepsilon) - N_\delta(\alpha_k - \varepsilon) \leq \delta^{-f(\alpha_k) - \eta/2}$$

آنگاه،

$$\mu\{\bigcup B_i : \mu(B_i) \geq \delta^{\alpha(1)-h} \text{ و شبکه می‌باشد و } \delta \text{ یک } B_i\}$$

$$\leq \sum_{k=1}^m (N_\delta(\alpha_k + \varepsilon) - N_\delta(\alpha_k - \varepsilon)) \delta^{\alpha_k - \varepsilon}$$

$$\leq \sum_{k=1}^m \delta^{-f(\alpha_k) + \alpha_k - \eta/2 - \varepsilon}$$

$$\leq m \delta^{\eta/2 - \eta/4}$$

اگر δ به اندازه کافی کوچک باشد، که چنانچه $\delta \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود

$$\mu\{\bigcup B_i : \mu(B_i) \geq \delta^{\alpha(1)-h} \text{ و شبکه می‌باشد و } \delta \text{ یک } B_i\} \rightarrow 0$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که اگر $\delta \rightarrow 0$ ،

$$\mu\{\bigcup B_i : \mu(B_i) \leq \delta^{\alpha(1)+h} \text{ و شبکه می‌باشد و } \delta \text{ یک } B_i\} \rightarrow 0$$

از این رو، اگر $\delta \rightarrow 0$

$$\mu\{\bigcup B_i : \delta^{\alpha(1)+h} < \mu(B_i) < \delta^{\alpha(1)-h} \text{ و شبکه می‌باشد و } \delta \text{ یک } B_i\} \rightarrow 1$$

این بدان معنی است که اندازه μ روی مکعب‌های δ -شبکه‌ای B_i که $\mu(B_i)$ ها نزدیک $\delta^{\alpha(1)}$ می‌باشند، متمرکز می‌باشد. بنابراین "مجموعه تمرکز μ در مقیاس δ " را می‌توان به وسیله $N_\delta(\alpha(1) + h) - N_\delta(\alpha(1) - h) \simeq \delta^{-f(\alpha(1))} = \delta^{-\alpha(1)}$ پوشاند.

اکنون تحلیل ناتمام مثال خود را ادامه می‌دهیم.

ادامه محاسبه مثال ۱۷-۱

قبلاً نشان داده‌ایم که

$$\tau(q) = \log(p^q + (1-p)^q) / \log 3. \quad (15-17)$$

اجازه دهید فرض کنیم که (۱۷-۴) برقرار است و مباحث قبلی معتبر می‌باشند. با استفاده از (۱۷-۱۳) داریم

$$\alpha(q) = - \frac{(p^q \log p + (1-p)^q \log(1-p))}{(p^q + (1-p)^q) \log 3} \quad (16-17)$$

و با استفاده از (۱۷-۱۲) که مقدار متناظر f بر حسب پارامتر q را می‌دهد، نتیجه می‌شود

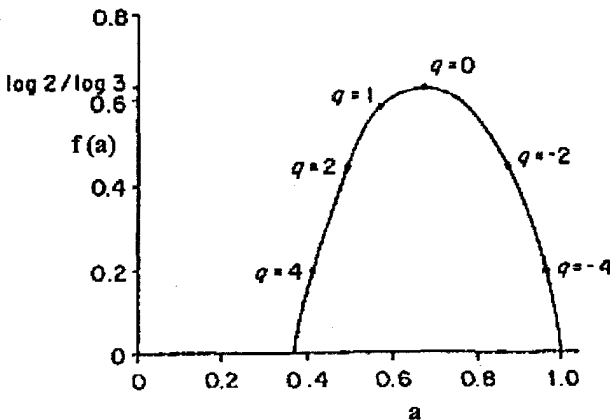
$$f(\alpha(q)) = \frac{\left(\log(p^q + (1-p)^q) - \frac{q(p^q \log p + (1-p)^q \log(1-p))}{(p^q + (1-p)^q)} \right)}{\log 3}$$

(۱۷-۱۷)

نمودار طیف چندفرکتالی $f(\alpha)$ برای هنگامی که $p = \frac{1}{3}$ در شکل ۳-۱۷ نمایش داده شده است.

* (ادامه این محاسبه را می‌توان حذف کرد). رهیافت حاضر برای یافتن $f(\alpha)$ ، از محاسبات فراوانی که برای کار با (۳-۱۷) لازم است، اجتناب می‌کند. با این وجود، برای اینکه این روش معتبر باشد، همچنان لازم است که نشان دهیم حد (۴-۱۷) وجود دارد. یک روش برای انجام این کار آن است که به قضیه چرنوف در مورد انحراف‌های بزرگ در نظریه احتمال متوسل شویم. فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد و X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع همه آنها یکسان با توزیع X باشد. صورتی از قضیه چرنف می‌گوید که اگر γ به گونه‌ای باشد که $E(\log X) < \log \gamma$ و $P(X > \gamma) > 0$ ، آنگاه

$$(۱۸-۱۷) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P(X_1 X_2 \cdots X_k \geq \gamma^k)^{1/k} = \sup_{0 \leq q < \infty} E(X^q) \gamma^{-q}.$$



شکل ۳-۱۷ گستره چند فرکتالی مثال ۱-۱۷ با $p = \frac{1}{3}$.

به ازای هر j ، فرض کنید با احتمال $\frac{1}{2}$ ، $X_j = p$ و با احتمال $\frac{1}{2}$ ، $X_j = 1 - p$. از آنجا که 2^k بازه E_k دارای جرمهای $X_1 X_2 \cdots X_k$ می‌باشند به ازای هر یک از 2^k تقسیمات ممکن $X_j = p$ یا $X_j = 1 - p$ ($1 \leq j \leq k$)، با گرفتن $\gamma = 3^{-\alpha}$ معادله (۱۸-۱۷) را می‌توان به صورت زیر تعبیر کرد

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (2^{-k} N_{3^{-k}}(\alpha))^{1/k} &= \sup_{0 \leq q < \infty} E(X^q) 3^{\alpha q} \\ &= \sup_{0 \leq q < \infty} \frac{1}{2} (p^q + (1-p)^q) 3^{\alpha q} \end{aligned}$$

یا

$$(۱۹-۱۷) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{3^{-k}}(\alpha)}{-\log 3^{-k}} = \sup_{0 \leq q < \infty} \left(\frac{\log(p^q + (1-p)^q)}{\log 3} + \alpha q \right) = g(\alpha)$$

مشروط بر آنکه فرض کنیم

$$\frac{1}{2} (\log p + \log(1-p)) < -\alpha \log 3 < \max \{ \log p, \log(1-p) \}.$$

با مقایسه بازه‌های δ -شبهه با بازه‌های نزدیک با طول 3^{-k} ، به سادگی می‌توان دید که این ایجاب می‌کند که

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(\alpha)}{-\log \delta} = g(\alpha).$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\log(N_{\delta}(\alpha + \varepsilon) - N_{\delta}(\alpha - \varepsilon))}{-\log \delta} = \frac{\log(N_{\delta}(\alpha + \varepsilon) + \log(1 - N_{\delta}(\alpha - \varepsilon)/N_{\delta}(\alpha + \varepsilon)))}{-\log \delta}$$

که چنانچه $\delta \rightarrow 0$ ، به $g(\alpha)$ میل می‌کند. استدلالی کاملاً مشابه با استفاده از صورت "عکس" قضیه چرنف، نشان می‌دهد که حد مورد نظر هنگامی که

$$\frac{1}{2} (\log p + \log(1-p)) > -\alpha \log 3 > \min \{ \log p, \log(1-p) \}$$

وجود دارد. بنابراین حد (۴-۱۷) به ازای $\alpha \geq 0$ حتماً وجود خواهد داشت. همانگونه که انتظار می‌رود، آن مقدار q که در (۱۹-۱۷) سوپریمم را می‌دهد مطابق با مقدار ماکزیمم α در (۶-۱۷) می‌باشد.

قراردادن $q = 0$ در (۱۵-۱۷)، نتیجه می‌دهد $\dim_B(\mu) = \tau(0) = \log 2 / \log 3$ که همان بعد مجموعه یک سوم میانی کانتور، F^I می‌باشد. اگر $q = 1$ ، بعد اطلاعات $\alpha(1) = -(p \log p + (1-p) \log(1-p)) / \log 3$ را به دست می‌آوریم که وقتی

$p = \frac{1}{2}$ ، مقدار ماکزیمم $\log 2 / \log 3$ را می‌دهد. به ازای این مقدار از p ، اطلاع از بازه‌ای از E_k که یک نقطه x به آن متعلق می‌باشد، x را در مجموعه‌ای با μ -اندازه 2^{-k} قرار می‌دهد؛ به ازای دیگر مقادیر p ، اطلاعات نسبتاً کمتری به دست می‌آید.

از (۱۷-۱۷) به سادگی می‌توان دید که $f(\alpha(q))$ به ازای $-\infty < q < \infty$ ، مثبت می‌باشد و چنانچه $q \rightarrow \pm\infty$ ، به صفر میل می‌کند. به علاوه، با توجه به اینکه به ازای

$\delta = 3^{-k}$ داریم $\min_i \mu(B_i) = (\min\{p, 1-p\})^k$ و $\max_i \mu(B_i) = (\max\{p, 1-p\})^k$ ، با کمی محاسبه با استفاده از (۱۷-۱۶)، می‌توان نشان داد که

$$(۲۰-۱۷) \quad \lim_{q \rightarrow -\infty} \alpha(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(\min_i \mu(B_i))}{\log \delta}$$

و

$$(۲۱-۱۷) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \alpha(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(\max_i \mu(B_i))}{\log \delta}.$$

این عبارتها، تعبیری از نقاطی که در آنها منحنی $f(\alpha)$ محورها را قطع می‌کند، فراهم می‌کند؛ بنابر (۱۷-۱۱) این منحنی در این نقاط دارای شیب نامتناهی می‌باشد. \square

هر چند مثال ۱۷-۱ نسبتاً خاص به نظر می‌آید، اما نمونه خوبی از دسته وسیعی از اندازه‌های خود متشابه می‌باشد. با نماد گذاری بخش ۹-۱، فرض کنید F مجموعه‌ای پایدار برای تبدیل‌های تشابه S_1, \dots, S_m باشد، که در آنها S_i دارای نسبت $0 < c_i < 1$ می‌باشد؛ برای راحتی فرض می‌کنیم مولفه‌های $S_i(F)$ مجزا باشند. فرض کنید p_1, \dots, p_m اعدادی مثبت باشند که $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. توزیع جرم μ روی F که به صورت $\mu(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)) = p_{i_1} \dots p_{i_k}$ تعریف می‌شود، ویژگی‌های چندفرکتال‌ها را نشان می‌دهد؛ این اندازه‌های خود متشابه یک قیاس اندازه از مجموعه‌های خود متشابه می‌باشند. با استفاده از ایده‌هایی که در برهان قضیه ۹-۳ آمده است، مقدار $\sum (p_{i_1} \dots p_{i_k})^q$ یک تخمین قابل قبول برای $S_\delta(q)$ می‌باشد، نه در آن مجموع روی همه دنباله‌های i_1, \dots, i_k ، با خاصیت $1 \leq i_j \leq m$ گرفته می‌شود و $c_{i_1} \dots c_{i_k} > \delta \geq c_{i_{k-1}} \dots c_{i_1}$. تکنیک‌های احتمال مانند قضیه چرنف را می‌توان برای تخمین چنین مجموع‌هایی به کار برد؛ به خصوص می‌توان نشان داد که حد (۱۷-۴) وجود دارد که نتیجتاً قضیه اصلی معتبر می‌باشد و همچنین فرمول‌های (۱۷-۱۰) تا (۱۷-۱۳) برقرار خواهند بود.

در این وضعیت یک روش جایگزین نیز وجود دارد که از لحاظ محاسبه ساده تر می باشد، و مقادیر نابرار c_i را به حساب می آورد. می توانیم مجموع هایی روی همه دنباله های k - جمله ای تشکیل دهیم

$$\begin{aligned} S_k^d(q) &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F))^q (c_{i_1} \dots c_{i_k})^d \\ (17-22) \quad &= \sum_{i_1, \dots, i_k} (p_{i_1} \dots p_{i_k})^q (c_{i_1} \dots c_{i_k})^d \end{aligned}$$

و $\tau(q)$ را با شرایط $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^d(q) = \infty$ برای $d < \tau(q)$ و $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^d(q) = 0$ برای $d > \tau(q)$ ، تعریف کنیم. این کار مبنایی برای یک نظریه چندفرکتالی دیگر فراهم می کند.

باید خاطر نشان کرد که استنباط دقیق نتایجی که مبنای نظریه چندفرکتالی را تشکیل می دهند، واضح نمی باشد و ما در اینجا جز پیمودن چند گام اولیه، کاری انجام نداده ایم. برای پرداختن به این موضوع، حتی اندازه های خود متشابه، زمانی که نظریه کامل با دلیل بیان شود، تکنیک های پیشرفته ای از نظریه احتمال و قوانین اعداد بزرگ مورد نیاز است. با این وجود، استفاده دقیق از ریاضیات چندفرکتالی تکنیکی قوی برای مطالعه اندازه ها فراهم می کند.

این فصل را با بیان این مطلب به پایان می بریم که تکنیک های چندفرکتالی می توانند برای استفاده در تمرین های کامپیوتری و عملی به کار برده شوند. فرض کنید $f: D \rightarrow D$ یک سیستم دینامیکی در صفحه باشد و μ اندازه "زمان سکونت" باشد:

$$\mu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \# \{k : 1 \leq k \leq m \text{ و } f^k(x) \in A\}.$$

با انتخاب دامنه مناسبی برای δ ی کوچک، و شمردن تعداد دفعاتی که $f^k(x)$ به ازای تعداد زیادی از تکرارها در هر یک از مربع های B_i از δ - شبکه قرار می گیرد، $\mu(B_i)$ و بنابراین $N_\delta(\alpha)$ را می توان تخمین زد، و در نتیجه طیف چندفرکتالی $f(\alpha)$ قابل رسم می باشد.

هنگامی که $f^k(x)$ ، مثلاً با دنباله ای از مشاهدات تجربی که در بازه هایی از زمان انجام شده اند، جایگزین شود، روندی مشابه دنبال خواهد شد. مقایسه طیف چندفرکتالی که به صورت تجربی به دست آمده است با آنچه که از یک مدل نظری نتیجه شده است، روشی برای ارزیابی مناسب بودن مدل، فراهم می کند.

در مورد معانی فیزیکی منحنی های $f(\alpha)$ و $\tau(q)$ مطالب ناچیزی گفتیم؛ در واقع، مسائل قابل توجهی در رابطه با تفسیر آنها وجود دارد. برای مثال، اغلب نیاز است که طیف چندفرکتالی را طوری تعمیم دهیم که $f(\alpha)$ بتواند مقادیر منفی را نیز بگیرد (که متناظر با

در نظر گرفتن اندازه به عنوان بخش کوچک- بعد از یک اندازه بزرگ- بعد می‌باشد. این مباحث از حیثه کار این کتاب خارج است.

۱۷-۲ نکات و منابع

برای اطلاع از جدیدترین مطالبی که در زمینه اندازه‌های چندفرکتالی نوشته شده است، به کتاب‌های *Tel* (۱۹۸۸)، *Mandelbrot* (۱۹۸۸) و *Feder* (۱۹۸۸) مراجعه کنید. برای نظریه انحراف‌های بزرگ و قضیه *Chernoff* کتاب *Billingsley* (۱۹۷۹) را ببینید.

تمرین‌ها

۱-۱۷ فرض کنید μ یک اندازه روی یک ناحیه فشرده D از R^n باشد که به ازای آن مباحث بخش ۱-۱۷ برقرار است. فرض کنید $f: D \rightarrow R$ یک تابع پیوسته باشد که به ازای ثابت‌های c_1 و c_2 در $0 < c_1 \leq f(x) \leq c_2$ صدق می‌کند و $\int_D f(x) d\mu(x) = 1$. یک توزیع جرم ν روی D به ازای مجموعه‌های بورل A به صورت $\nu(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$ تعریف کنید. نشان دهید که نماهای $\tau(q)$ و $f(\alpha)$ متناظر با اندازه‌های μ و ν معادل هستند.

۲-۱۷ فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه روی ناحیه کرانداری از R^n باشند که جرم کل هر دو برابر ۱ می‌باشد. μ را به صورت $\mu(A) = \frac{1}{2}(\mu_1(A) + \mu_2(A))$ تعریف کنید. نشان دهید که به ازای هر $q > 0$ اعداد مثبت c_1 و c_2 مستقل از δ وجود دارند به طوری که

$$c_1 \max\{S_\delta^1(q), S_\delta^2(q)\} \leq S_\delta(q) \leq c_2 \max\{S_\delta^1(q), S_\delta^2(q)\}$$

که در آن $S_\delta(q)$ ، $S_\delta^1(q)$ و $S_\delta^2(q)$ به ترتیب مجموع‌های متناظر با μ ، μ_1 و μ_2 می‌باشند. نتیجه بگیرید که $\tau(q) = \max\{\tau_1(q), \tau_2(q)\}$ که در آن τ ها نماهایی متناظر با سه اندازه حاصل از (۱۷-۷) می‌باشند.

۳-۱۷ فرض کنید $0 < p < 1$ و μ توزیع جرم روی بازه $[0, 1]$ باشد که از تقسیم مکرر جرم روی بازه‌های دودویی $(m+1)2^{-k}$ ، $[m2^{-k}, (m+1)2^{-k}]$ به نسبت $p:1-p$ بین زیربازه‌های دودویی $[2m2^{-k-1}, (2m+1)2^{-k-1}]$ و

حسب پارامتر q برای این اندازه چندفرکتالی بیابید.
 $(2m+2)2^{-k-1}, (2m+1)2^{-k-1}$ به دست آمده است. $f(\alpha)$ و α را بر

۴-۱۷ فرض کنید F مجموعه مثال ۹-۷ باشد. به ازای $0 < p < 1$ فرض کنید μ توزیع جرم روی F باشد که از طریق تقسیم مکرر جرم روی هر بازه از E_k به نسبت $p:1-p$ بین دو زیربازه از E_{k+1} به دست آمده باشد. در این حالت $\tau(q)$ را که توسط (۲-۱۷) تعریف شده است بیابید.

فصل ۱۸ کاربردهای فیزیکی

کران ابرها، مرز کوه‌ها با آسمان، خطوط ساحلی، آذرخش‌ها، ...؛ اینها و بسیاری پدیده‌های طبیعی دیگر، دارای شکل‌هایی هستند که در هندسه فرکتالی بهتر قابل توضیح می‌باشند تا در هندسه کلاسیک که در آن بیشتر به خطوط راست و منحنی‌های هموار پرداخته می‌شود. ریاضیات فرکتالی باید با مدل‌سازی و پیشگویی در مورد این پدیده‌ها سازگاری داشته باشد و دارد.

در عین حال، در به کار بردن ریاضیات هندسه فرکتالی برای مثال‌هایی که وجود خارجی دارند، مشکلات قابل توجهی وجود دارد. باید بعد جعبه راه، مثلاً برای خط ساحل بریتانیا با محاسبه عدد N_δ از مربع‌های شبکه با ضلع δ که با خط ساحلی برخورد دارند، به دست آورد. به ازای بازه‌ای از δ بین 20 m و 200 km نمودار $\log N_\delta$ بر حسب $-\log \delta$ کاملاً با خط راستی با شیب تقریباً 1.2 جور در می‌آید. بنابراین قانون توان $N_\delta \approx \text{constant} \times \delta^{-1.2}$ برای چنین δ ای معتبر می‌باشد و می‌گوییم خط ساحل مورد نظر روی چنین بازه‌ای از مقیاس‌ها دارای بعد 1.2 می‌باشد. به هر حال، با کوچک شدن δ ، این قانون توان در ابتدا نادقیق و سپس بی‌معنی می‌شود. به طور مشابه، در مورد مثال‌های دیگر فیزیکی، تخمین‌های بعد با استفاده از جعبه‌های با ضلع δ ، به محض رسیدن به مقیاس‌های مولکولی ناگزیر با شکست مواجه می‌شوند.

نظریه فرکتال‌ها که در بخش اول این کتاب مطالعه شدند، به گرفتن حدهایی با $\delta \rightarrow 0$ مربوط می‌شوند، که در حقیقت در دنیای طبیعی نمی‌توان به آن رسید. هیچ فرکتال واقعی در طبیعت وجود ندارد — به همین خاطر، هیچ رشته بسط‌ناپذیر یا هیچ چرخ بی اصطکاکی نیز وجود ندارد!

با این وجود، به کار بردن نظریه ریاضی فرکتال‌های "دقیق" در فرکتال‌های "تقریبی" طبیعت، امکان‌پذیر است و در بسیاری از وضعیت‌ها به طور متقاعد کننده‌ای کاربرد دارد. فرکتال‌ها، نسخه‌هایی برای استفاده رسمی بهتر از هندسه کلاسیک در علوم مختلف می‌باشند — برای مثال، کروی در نظر گرفتن زمین، تقریب کاملاً خوبی برای بسیاری از محاسبات که شامل میدان جاذبه می‌باشند، فراهم می‌کند.

شاید مثالی از پدیده‌های فیزیک که بیشتر از هر مثالی متقاعد کننده و دارای مدل فرکتالی است، حرکت براونی باشد؛ فصل ۱۶ را ببینید. فرضیه بنیادین فیزیک، که می‌گوید یک ذره دستخوش بمباران ملکولی، به گونه‌ای حرکت می‌کند که توزیع نمو‌های آن مطابق با توزیع نرمال می‌باشد، به این نتیجه ختم می‌شود که مسیر ذره دارای بعد ۲ می‌باشد. می‌توان این را به طور آزمایشی با استفاده از روش‌های جعبه - شماری چک کرد. این حرکت را می‌توان در کامپیوتر نیز توسط پی‌موند مسیری که توسط تعداد زیادی از نمو‌های کوچک تصادفی شکل می‌یابد، شبیه‌سازی کرد. همچنین می‌توان بعد آن چه را که در کامپیوتر تحقق یافته است، با شمارش جعبه تخمین زد. حرکت براونی، که می‌توان آن را در طبیعت یا در کامپیوتر دید، دارای شکل فرکتالی است که توسط یک مدل نظری پیش‌بینی شده است. (بهتر است متذکر شویم که تفسیر فرکتالی حتی برای مسیرهای براونی هم در مقیاس‌های کوچک ناتوان می‌ماند، چرا که یک ذره برای طی کردن مسیری با بعد ۲ که در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست، نیاز به انرژی نامتناهی دارد.) به طور قطع هدف ما پیوند آزمایش، شبیه‌سازی و نظریه با یکدیگر، و با نشانه‌های فیزیکی دیگر از فرکتال‌ها، خواهد بود.

بنابراین مطالعه فرکتال‌ها در طبیعت در سه زمینه زیر ادامه می‌یابد: آزمایش، شبیه‌سازی و نظریه. اشیای فیزیکی مشاهده و اندازه‌گیری می‌شوند، ابعاد و، احتمالاً، زنجیره‌های چندفرکتالی در بازه خاصی از مقیاس‌ها تخمین زده می‌شوند، و استقلال آنها از پارامترهای گوناگون مورد توجه قرار می‌گیرد. گاهی از تکنیک‌های نظری، همچون در نظر گرفتن قضیه تصویر ۶-۱، برای تخمین بعد یک شیء از روی عکس آن استفاده می‌شود. البته، برای به دست آوردن یک بعد برای هر منظوری، در هر بار آزمایش باید مقادیر یکسانی به دست آید.

هنگامی که بعد، مقداری با اهمیت، مانند یک ثابت فیزیکی باشد، اگر بتوانیم ویژگی‌های فرکتال را بر اساس اصطلاحات فیزیکی بیان کنیم، بسیار رضایت‌بخش‌تر خواهد بود. بنابراین، مرحله بعد این است که شماری از فرایندها را برای توضیح پدیده‌های طبیعی در نظر بگیریم. آنگاه شبیه‌سازی محاسباتی، برآورد مدل‌های متنوع را به وسیله مقایسه خصوصیاتمانند بعد مدل شبیه‌سازی شده و نمونه واقعی، ممکن می‌سازد. شیوه‌های محاسباتی همواره تقریبی هستند؛ این مسئله، هنگام مدل‌سازی فرکتال‌های طبیعی، بر خلاف فرکتال‌های واقعی،

می‌تواند واقعاً یک مزیت به حساب آید، چرا که تأثیرات در مقیاس‌های بسیار کوچک نادیده گرفته می‌شوند.

داشتن یک مدل نظری با تدبیر فیزیکی، که از طریق ریاضی قابل کنترل باشد، بسیار مطلوب می‌باشد، مانند بعد ظاهری، که با مباحث ریاضی قابل دستیابی است. مدل باید در این تعبیر مختلف وابستگی به پارامترهای گوناگون را نشان دهد، و به طور ایده‌آل و به روشنی قابل پیش‌بینی باشد. توصیف پدیده‌های فرکتالی در طبیعت اغلب پیچیده می‌باشد، و تخمین‌ها و فرضیه‌های متعددی برای به پا کردن و تحلیل یک مدل ریاضی لازم خواهد بود. البته، توانایی انجام چنین کاری به صورتی که مضامین و معانی فیزیکی حفظ شوند، نشانه یک دانشمند خوب نظری می‌باشد! گاهی ممکن است معادلات دیفرانسیل توصیف کننده یک وضعیت فیزیکی باشند، که در آنها جاذب‌های فرکتالی ظاهر می‌شوند، بخش ۱۳-۵ را ببینید. از طرف دیگر، تحلیل معادلات دیفرانسیلی که در آنها شرایط مرزی فرکتال می‌باشند، می‌توانند مسائلی با طبیعتی کاملاً متفاوت ارائه دهند.

نوشته‌ها و مقالات بسیار زیادی به آزمایش پدیده‌های فرکتالی با استفاده از این روش‌ها، اختصاص داده شده‌اند؛ اغلب توافق مقادیر بعد بدست آمده از آزمایش، شبیه‌سازی و نظریه، به طور شگفت‌انگیزی خوب می‌باشد. به علاوه، تحلیل بعد به طور موثری برای جدا کردن ویژگی‌های غالب که مبنای فرآیندهای فیزیکی معین می‌باشند، مورد استفاده قرار گرفته است. با این وجود هنوز راهی طولانی برای پیمودن در پیش است. سوالاتی همچون: "چرا تصویر ابرها در گستره وسیعی از مقیاس‌ها دارای محیطی با بعد 1.35 می‌باشد؟"، "چگونه بعد سطح یک فلز، ویژگی‌های فیزیکی همچون تابش گرما یا ضریب اصطکاک را تحت تأثیر قرار می‌دهد؟" و "چه فرآیندهایی در زمین به منظره‌ای با بعد 2.2 منتهی می‌شوند؟"، باید در چارچوب مدل سازی فرکتالی پاسخ داده شوند.

برای بیشتر اهداف عملی، ملزم به استفاده از بعد جعبه - شمار می‌باشیم. با گرفتن N_δ بنابر یکی از تعاریف معادل ۱-۳، بعد یک شیء معمولاً با تخمین شیب نمودار $\log N_\delta$ بر حسب $-\log \delta$ به دست می‌آید. اغلب خواهان تخمین بعد یک فرکتال نظری دقیق F به وسیله شمارش جعبه‌ها روی یک تقریب فیزیکی E می‌باشیم. برای این کار، باید از جعبه‌هایی که در مقایسه با درستی تخمین بزرگ می‌باشند، استفاده کرد. به عبارت دقیق‌تر، اگر $d(E, F) \leq \varepsilon$ که در آن d نشان دهنده فاصله هاوسدورف می‌باشد، و $N_\delta(E)$ و $N_\delta(F)$ تعداد گوی‌های مورد نیاز با شعاع δ جهت پوشاندن مجموعه‌ها می‌باشد، به سادگی می‌توان دید که

$$N_{\delta+\varepsilon}(E) \leq N_\delta(F) \leq N_{\delta-\varepsilon}(E)$$

و می‌توان برای تخمین $\dim_H F$ از روی نمودارهای $\log\text{-}\log$ از اندازه گیری‌های E نامساوی بالا را به کار برد. ارزش یادآوری دارد که همانطور که در بسیاری از مثال‌های کتاب نشان داده‌ایم، اغلب دلایلی نظری وجود دارند که می‌توانیم برای فرکتال‌های دقیق، بعد جعبه و هاوسدورف را مساوی بگیریم.

گاهی اوقات اندازه‌گیری کمیت‌های دیگر ساده‌تر از اندازه‌گیری بعد می‌باشد. برای مثال، در حالتی که یک سیگنال مستقل از زمان داشته باشیم، باید تابع خود همبستگی (بخش ۱۱-۲ را ببینید) با معادله (۱۱-۲۰) که بر حسب بعد بیان گردیده است، اندازه‌گیری شود. اکنون به طور مفصل چند مثال خاص فیزیکی را مطرح می‌کنیم که در آنها تحلیل فرکتالی می‌تواند به فهم فرآیندهای فیزیکی کمک کند.

۱۸-۱ رشد فرکتالی

بسیاری اشیای طبیعی به وضوح همچون یک فرکتال رشد می‌کنند، با شاخه‌هایی که به طور مکرر تقسیم می‌شوند و شاخه‌های فرعی کوچک‌تر تولید می‌کنند. هنگامی که در مقیاس‌های مناسب بنگریم، بعضی درخت‌ها، سیستم‌های گیاهان و ریشه گیاهان (به خصوص نمونه‌های ابتدایی‌تر مانند گل‌سنگ، خزه‌ها و جلبک‌های دریایی) فرکتال به نظر می‌آیند. الگوهای چنگالی شکل آذرخش یا تخلیه‌های الکتریکی دیگر، و پدیده "پنجه‌های لزج" وقتی آب را به یک مایع لزج، مانند روغن وارد می‌کنیم، نیز شکل فرکتالی شاخه شاخه خواهد داشت. در حین الکترولیز محلول سولفات مس، رسوب کردن مس در کاتد رشدی با الگوی فرکتالی دارد.

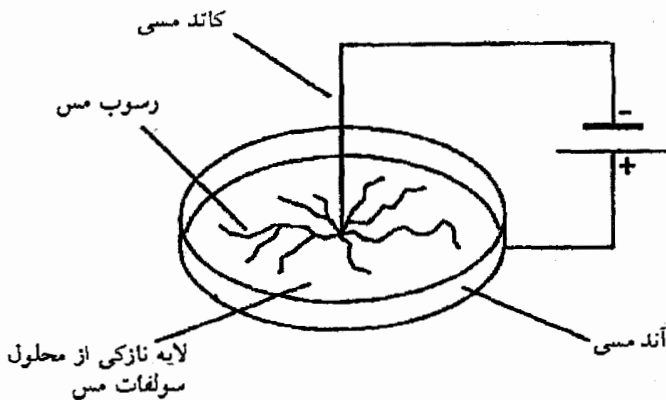
قوانین زیستی که بر رشد گیاهان حاکم‌اند بسیار پیچیده‌تر از آن هستند که بخواهیم آنها را مبنای یک مدل ریاضی قرار دهیم. با این وجود می‌توانیم پدیده‌های دیگر را با قوانین رشد نسبتاً ساده مدل‌سازی کنیم و ما در اینجا برخی از آنها را امتحان می‌کنیم.

یک آزمایش ساده رشد فرکتالی را به وسیله الکترولیز سولفات مس ($CuSO_4$) نشان می‌دهد؛ شکل ۱۸-۱ را ببینید. کف یک ظرف دایره شکل را با محلول سولفات مس می‌پوشانیم. یک کاتد مسی در وسط ظرف آویزان می‌کنیم و نواری مسی را حول جداره ظرف به عنوان آند قرار می‌دهیم. اگر یک اختلاف پتانسیل الکتریکی با ولتاژ کم بین دو الکترود اعمال شود، آنگاه پس از چند دقیقه رسوب مس حول کاتد شروع می‌شود. بعد از حدود نیم ساعت، رسوب مس به پنجه‌های فرکتالی با طول چندین اینچ گسترش می‌یابد.

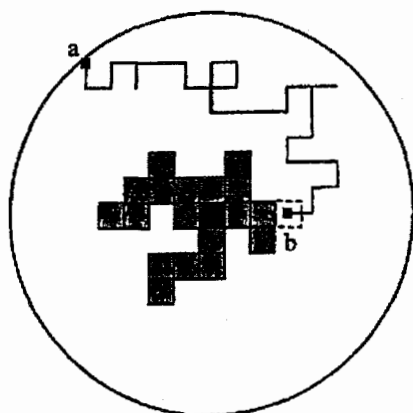
مکانیسم این الکترولیز به این صورت است: در محلول، سولفات مس به یون‌های مس Cu^{2+} و یون‌های سولفات SO_4^{2-} که به طور تصادفی به اطراف حرکت می‌کنند، تجزیه

می‌شود. هنگامی که ولتاژ اعمال می‌شود، یون‌های مس که به کاتد می‌خورند، دو الکترون دریافت می‌کنند و به عنوان مس رسوب می‌کنند. آن یون‌های مس که به مس‌هایی که قبلاً شکل یافته‌اند برخورد می‌کنند نیز به عنوان مس رسوب می‌کنند، بنابراین ته مانده اطراف کاتد رشد می‌کند. با این فرض که یون‌های مس به صورت کاملاً تصادفی حرکت می‌کنند، برای مثال، مس‌هایی براونی را طی می‌کنند (فصل ۱۶ را ببینید)، احتمال اینکه یون‌ها با انتهای پنجه‌های رسوب برخورد کنند بیشتر از احتمال برخورد با قسمت‌هایی است که زودتر رسوب کرده‌اند، که سبب می‌شود این یون‌ها توسط قسمت‌هایی که اخیراً رشد کرده‌اند نگهداری شوند. بنابراین توجیه‌پذیر است که رشد رسوب‌های مسی به صورت پنجه‌های شاخه‌نازک باشد تا به صورت یک بلوک جامد حول کاتد.

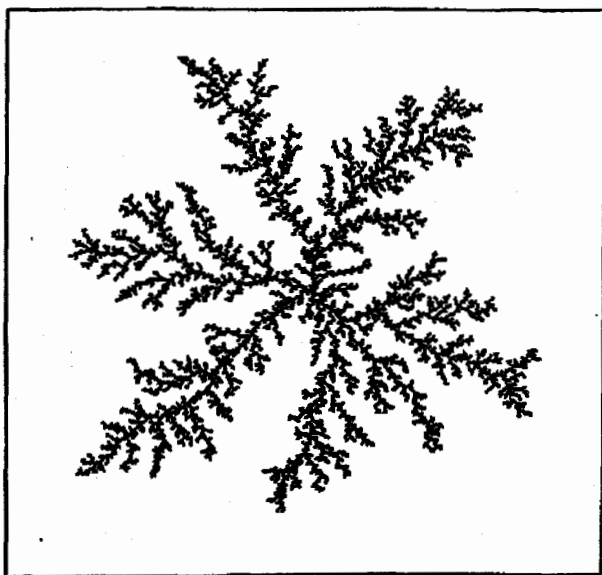
در آزمایشی که توضیح داده شد، یون‌های Cu^{2+} مسیری براونی دنبال می‌کنند که در نتیجه وجود میدان الکتریکی بین کاتد و آند روی مس‌هایی به طرف کاتد قرار می‌گیرند. غنی کردن سولفات در محلول، مثلاً با اضافه کردن سولفات سدیم، یون‌های مس را از میدان الکتریکی جدا می‌کند. رسوب‌های فرکتالی دیگری هم ایجاد می‌شوند، اما این وضعیت برای مدل‌سازی ریاضی راحت‌تر می‌باشد، چرا که حرکت یون‌های Cu^{2+} را می‌توان براونی در نظر گرفت.



شکل ۱۸-۱ الکترولیز سولفات مس به رسوب‌های فرکتال مانند مس که رشد کرده و از کاتد دور می‌شوند منجر می‌شود.



شکل ۱۸-۲ مدل تجمع محدود - پخش (DLA=Diffusion-Limited Aggregation). ذره‌ای از یک نقطه تصادفی a روی دایره رها می‌شود و به طور تصادفی در دایره می‌گردد تا زمانیکه دایره را ترک کند یا اینکه به یک مربع b در مجاورت مربعی که قبلاً سایه زده شده است برسد، که در این حالت آن مربع نیز سایه زده می‌شود.



شکل ۱۸-۳ یک مدل تجمع محدود - گسترش که توسط کامپیوتر به تصویر کشیده شده است. مربع به یک شبکه ۷۰۰ در ۷۰۰ تقسیم شده که ۱۶۰۰۰ مربع از آنها بنابر روش ذکر شده انتخاب شده‌اند.

مدل تجمع محدود - پخش^۱ (DLA) یک شبیه‌سازی متقاعد کننده برای رشد فراهم می‌کند. این مدل بر اساس شبکه‌ای از مربع‌های کوچک می‌باشد. یک مربع اولیه برای نشان دادن کاتد سایه زده می‌شود، و یک دایره بزرگ با مرکزی درون این مربع رسم می‌شود. یک ذره از یک نقطه تصادفی نزدیک محیط دایره رها می‌شود، و اجازه می‌دهیم تا به حرکت براونی ادامه دهد تا زمانی که یا از دایره خارج شود یا به مربعی در همسایگی یک مربع سایه زده شده برسد، که در این حالت آن مربع نیز سایه زده می‌شود. اگر این روند دفعات زیادی تکرار شود، مجموعه پیوسته‌ای از مربع‌ها از یک مربع اولیه به طرف بیرون رشد می‌کند. از لحاظ محاسبه، ساده‌تر است که اجازه دهیم ذره یک مسیر تصادفی را طی کند (که تقریبی از مسیر براونی را نتیجه می‌دهد). پس زمانیکه ذره رها می‌شود، احتمال حرکت به یک مربع همسایه در هر یک از جهت‌های چپ، راست، بالا یا پایین برابر $\frac{1}{4}$ می‌باشد، که تا زمانیکه ذره از دایره خارج شود یا به یک مربع بعد از یک مربع سایه‌دار وارد شود، ادامه می‌یابد، شکل ۱۸-۲ را ببینید. (راه‌هایی برای کوتاه کردن محاسبات لازم وجود دارد؛ برای مثال، اگر ذره به اندازه k مربع از بخش سایه‌دار فاصله داشته باشد، ذره بتواند فوراً k مرحله را بپیماید.)

با اجرای مدل برای، مثلاً ۱۰۰۰۰ مربع سایه‌دار، یک تصویر بسیار شاخه شاخه نتیجه می‌شود (شکل ۱۸-۳) که شبیه طرح آزمایش الکترولیز می‌باشد. شاخه‌های اصلی از نقطه اولیه منشعب می‌شوند و هنگامی که رشد می‌کنند شاخه شاخه می‌شوند، شاخه‌های فرعی هم رشد می‌کنند و همگی میل به سمت بیرون دارند. طبیعی است که از روش‌های شمارش جعبه‌ها برای تخمین بعد چنین ساختارهایی در مقیاس‌هایی بزرگ‌تر از طول ضلع مربع، استفاده کنیم، و به طوری چشم‌گیر توافقی نزدیک بین آزمایش الکترولیز و شبیه‌سازی آن وجود دارد، مقادیر بعد ۱.70 (در حالت مسطح) و 2.43 برای حالت ۳- بعدی می‌باشند.

مدل DLA را می‌توان به عنوان نمایشی از زنجیره یون‌ها در نظر گرفت که یکی پس از دیگری از فاصله‌ای رها می‌شوند. در حالی که این مدل، مدل خوبی برای شکل رسوب فراهم می‌کند، ایده مختصری در مورد توسعه آن با زمان به ما می‌دهد، که به تعداد زیادی از یون‌ها که به طور همزمان دارای حرکت تصادفی می‌باشند و با رسیدن به رسوب مس به آن می‌چسبند، مربوط می‌باشد. از این‌رو، صورت "پیوسته" ای از این مدل "رسوب" مفید می‌باشد. فرض کنید که تعداد زیاد یون‌ها در محلول در نقطه x در زمان t دارای چگالی $u(x, t)$ باشد، به گونه‌ای که تعداد یون‌ها در قرص بسیار کوچکی با مساحت δx و مرکز x برابر $u(x, t)\delta x$ باشد. با این فرض که یون‌ها مسیرهای براونی مستقلی را طی می‌کنند، یون‌هایی که در زمان t

^۱ Diffusion-Limited Aggregation

در این قرص کوچک هستند، به آرامی به بیرون پخش خواهند شد تا آنکه در زمان $t + h$ دارای توزیع نرمال ۲- بعدی

$$\delta u(x', t + h) = (2\pi)^{-1} h^{-1} \exp(-(x - x')^2 / 2h) u(x, t) \delta x$$

خواهند بود ((۳-۱۶) را ببینید) و بنابراین

$$u(x', t + h) = (2\pi)^{-1} h^{-1} \int \exp(-(x - x')^2 / 2h) u(x, t) dx$$

که در آن، انتگرال روی سراسر ناحیه سیال گرفته می‌شود. این با آن فرض است که h نسبت به فاصله x' از رسوب و مرز، کوچک باشد، به گونه‌ای که بتوان تأثیر افزایش یا حذف شدن یون‌ها را نادیده گرفت. مشتق‌گیری تابع زیر انتگرال با در نظر گرفتن x' و h نتیجه می‌دهد

$$\partial u / \partial t = \frac{1}{2} \nabla^2 u \quad (1-18)$$

که معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییرات چگالی یون در محلول می‌باشد. این معادله مشهور انتشار یا معادله گرما در دو بعد می‌باشد.

باید شرایط مرزی این معادله دیفرانسیل را تعیین کنیم. در مرز بیرونی، یون‌ها با آهنگ ثابتی تولید می‌شوند، بنابراین

$$u = u_0 \quad \text{روی } |x| = r_0 \quad (2-18)$$

مرز رسوب مس در زمان t را با F_t نشان می‌دهیم. در فاصله کاملاً نزدیک به این مرز، همه یون‌ها عملاً بار خود را از دست می‌دهند، بنابراین در F_t

$$u = 0 \quad (3-18)$$

از آنجا که یون‌های تخلیه شده به عنوان فلز مس رسوب می‌کنند، آهنگ v پیشروی مرز F_t باید برابر با مشتق تجمع در جهت n قائم بر F_t باشد. بنابراین، به ازای یک ثابت k ، روی F_t داریم

$$v_n = kn \cdot \nabla u \quad (4-18)$$

(ما فرض می‌کنیم که F_t در مقیاس بسیار کوچک واقعاً هموار می‌باشد).

اگر رشد در فاصله دوری از الکتروود خارجی باقی بماند، آهنگ انتشار، با تقریب خوبی، مستقل از زمان می‌باشد، بنابراین (۱-۱۸) را می‌توان با معادله لاپلاس عوض کرد

$$\nabla^2 u = 0. \quad (5-18)$$

با حل این معادله با شرایط مرزی (۲-۱۸) و (۳-۱۸) و با استفاده از (۴-۱۸) می‌توان آهنگ

رشد رسوب را پیدا کرد.

این معادلات به تنهایی برای فراهم کردن مدلی دقیق و کامل بیش از حد ایده‌آل در نظر گرفته شده‌اند. در ابتدا، برای پیشگیری از ناپایدار بودن معادله با در نظر گرفتن بی‌نظمی‌های

سطح، معادله‌ها به اندکی "پیرایش" در مقیاس کوچک نیاز دارند. این در مدل DLA مربع - شبکه فراهم شده است - اگر یک ذره به اندازه کافی نزدیک شود، به رسوب می‌چسبد. دوم اینکه، مشتق‌گیری ما از معادلات دیفرانسیل، با این فرض است که تغییرات چگالی ذره پیوسته باشد، نه اینکه تعداد زیادی ذرات رسوبی داشته باشیم. تغییر تصادفی در حرکت اینگونه ذرات منفرد می‌باشد که بی‌نظمی‌ها را به وجود می‌آورد و شاخه‌دار شدن پنجه‌ها را گسترش می‌دهد. از این رو (۱۸-۴) نیاز به تعدیل دارد تا شامل یک دگرگونی تصادفی

(۶-۱۸)

$$v_n = kn \cdot \nabla u + p$$

هم باشد، که در آن p را می‌توان جمله "نوفه" در نظر گرفت. هر دوی این ویژگی‌ها در مدل DLA مربع - شبکه وجود دارند، که نتیجتاً برای شبیه سازی الگوی رشد، از کار عددی مستقیم برای حل معادلات دیفرانسیل، مناسب‌تر است.

یک تعبیر از مدل DLA مربع - شبکه، فراهم شدن یک راه حل فضایی برای معادلات (۱۸-۱) (۲) الی (۱۸-۵) به شرط یک دگرگونی تصادفی مختصر در مرز F_t می‌باشد. شگفت‌آور آنکه معادلات دیفرانسیل یکسان با شرایط مرزی یکسان، چندین پدیده فیزیکی نسبتاً متفاوت را تفسیر می‌کنند. بنابراین انتظار می‌رود که مدل DLA در حالت‌های متفاوت تا بعضی مراحل به کار رود.

رشد پنجه‌های لزج در یک سیال، یک مثال می‌باشد. فرض کنید دو صفحه شیشه‌ای در فاصله بسیار کمی از یکدیگر (مثلاً $\frac{1}{2} mm$) قرار گرفته باشند و بین آن دو به وسیله محلول لزجی مانند روغن پر شده باشد. (این وسیله را یک سلول هله-شا^۱ می‌نامند). اگر یک مایع با لزجی کم را، مانند آب، از راه روزنه کوچکی که در یکی از صفحات است، تزریق کنیم، آنگاه تحت شرایطی خاص، آب به صورت پنجه‌ای با شاخه‌های بسیار در داخل روغن پخش می‌شود. این طرح، بسیار شبیه رسوب‌های مس در آزمایش الکترولیز می‌باشد.

نظریه روغن کاری می‌گوید که در این وضعیت سرعت شارش روغن، ν ، متناسب با شیب فشار می‌باشد:

(۷-۱۸)

$$\nu = -c \nabla p$$

که در آن $p(x)$ فشار در x می‌باشد. فرض بر این است که روغن تراکم‌ناپذیر باشد، پس سرعت دارای واگرایی صفر می‌باشد یعنی $\nabla \cdot \nu = 0$ ، که نتیجه می‌دهد در سراسر روغن

$$\nabla^2 p = 0.$$

^۱ Hele-Shaw

اگر لزجی آب در مقایسه با روغن، ناچیز باشد، آنگاه فشار در سراسر آب واقعاً ثابت می‌باشد. بنابراین، شرایط مرزی زیر را داریم

$$p(x) = p_0,$$

در حد فاصل بین مرزهای مایع، و

$$p(x) = 0,$$

در فاصله زیاد r_0 از نقطه تزریق. از این‌رو تفاضل فشار $u(x) = p_0 - p(x)$ در معادله دیفرانسیل (۵-۱۸) و در شرایط مرزی (۲-۱۸) و (۳-۱۸) از آزمایش الکترولیز صدق می‌کند. به علاوه، در محل سطح سیال، زاویه فشار در روغن عمود بر کرانه می‌باشد، (چراکه فشار بر کرانه‌ها ثابت است)، بنابراین (۴-۱۸) سرعت پیشروی مرز، $v_n = -kn \cdot \nabla p$ ، را به ما می‌دهد، که به خاطر اثر کششی سطح، دارای خطای برشی کوچکی می‌باشد. فشار، مشابه چگالی یون در مثال الکترولیز می‌باشد.

بنابراین نباید عجیب باشد که تحت شرایط خاص، پنجه پنجه شدن لزج رفتار نمونه‌های تولید شده در مدل شبکه مربعی DLA را منعکس می‌سازند. با این وجود هنگامی که تعداد عوامل "رویداد تصادفی" در آزمایش الکترولیز کم باشد، بی‌نظمی‌ها در محل برخورد دو سیال به هیچ وجه اثر پنجه پنجه شدن را نشان نمی‌دهند.

یک وضعیت کاملاً مشابه برای جریان یک سیال از یک محیط آبخش مانند برقرار است - معادله (۷-۱۸) قانون داریسی^۱ می‌باشد که بر چنین سیالی حاکم است. پنجه پنجه شدن فرکتالی در این وضعیت هم می‌تواند رخ دهد.

مثالی دیگر، از تخلیه بار الکتریکی در یک گاز، به وجود می‌آید. پتانسیل الکترواستاتیک u در فاصله دور از ناحیه یونیزه شده در اثر تخلیه بار الکتریکی، در معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ صدق می‌کند. مسیر یونیزه شده به اندازه کافی رسانش دارد که بتوان پتانسیل آن را ثابت در نظر گرفت، بنابراین u در شرایط مرزی یکسان با مثال پنجه پنجه شدن لزج صدق می‌کند. این فرضیه (غیر قابل اعتماد) که سرعت فرو ریختن متناسب با میدان الکتریکی است، معادله (۱۸-۴) را به ما می‌دهد. این مثالی دیگر با معادلات دیفرانسیل مشابه می‌باشد که مدل شبکه مربعی DLA تصویری واقعی برای آن است.

تحت شرایط آزمایشی مناسب، نمونه‌های رشد در الکترولیز، پنجه پنجه شدن لزج و تخلیه بار الکتریکی، هنگامی که بعد در یک بازه مناسب از مقیاس‌ها تخمین زده می‌شود، تقریباً دارای بعد 1.7 می‌باشند. این عدد با مقداری که از طریق بررسی‌های کامپیوتری مدل شبکه مربعی

^۱ Darcy

DLA به دست می‌آید، مطابقت می‌کند. هر چند تعبیر چنین پدیده‌هایی به طور نظری، همواره کاملاً قانع کننده نیستند، اما عمومیت داشتن این مقدار بعد بسیار چشمگیر است.

۱۸-۲ تکینگی‌های الکترواستاتیک و پتانسیل گرانشی

پتانسیل الکترواستاتیک حاصل از توزیع بار μ ، یا پتانسیل گرانشی ناشی از یک توزیع جرم μ در R^3 برابر است با

$$(۱۸-۸) \quad \phi(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|}$$

نشان می‌دهیم که بعد مجموعه تکینگی پتانسیل، یعنی مجموعه x هایی که به ازای آنها $\phi(x) = \infty$ ، نمی‌تواند بسیار بزرگ باشد.

گزاره ۱۸-۱

فرض کنید μ یک توزیع جرم با محمل کراندار روی R^3 باشد. فرض کنید پتانسیل (۱۸-۸) دارای مجموعه تکینگی $F = \{x : \phi(x) = \infty\}$ باشد. آنگاه $\dim_H F \leq 1$.

برهان. فرض کنید $x \in R^3$ و به ازای $r > 0$ قرار می‌دهیم $m(r) = \mu(B_r(x))$. فرض کنید به ازای $s > 1$ ، اعداد $a > 0$ و $c > 0$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $0 < r \leq a$ ، $m(r) \leq cr^s$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{|x-y| \leq a} \frac{d\mu(x)}{|x-y|} + \int_{|x-y| > a} \frac{d\mu(x)}{|x-y|} \\ &\leq \int_0^a \frac{dm(r)}{r} + \int_{|x-y| > a} \frac{d\mu(x)}{a} \\ &\leq [r^{-1}m(r)]_0^a + \int_0^a r^{-2}m(r)dr + a^{-1}\mu(R^3) \\ &\leq c(1 + (s-1)^{-1})a^{s-1} + a^{-1}\mu(R^3) < \infty. \end{aligned}$$

از این رو، اگر $x \in F$ ، باید به ازای هر $c > 0$ داشته باشیم $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\mu(B_r(x))/r^s) \geq c$ از گزاره ۴-۹ (ب) نتیجه می‌شود که به ازای $s > 1$ ،

$H^s(F) = 0$ ، و برهان کامل می‌شود. \square

اغلب می‌توان μ را بر حسب یک "تابع چگالی" f بیان کرد، به گونه‌ای که به ازای مجموعه‌های بورل A ، $\mu(A) = \int_A f(x) dx$ ، و $(18-9)$ به صورت زیر در می‌آید

$$(9-18) \quad \phi(x) = \int \frac{f(y)}{|x-y|} dy.$$

به ازای شرایط معین داده شده برای f ، برای مثال، اگر به ازای یک $p > 1$ ، $\int |f(x)|^p dx < \infty$ ، از روش‌های مشابهی می‌توان برای قرار دادن کرانه‌های دیگر روی بعد مجموعه تکینگی استفاده کرد.

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر f یک تابع به اندازه کافی هموار باشد، آنگاه $(18-9)$ برابر با جواب معادله پواسن زیر می‌باشد

$$\nabla^2 \phi = -4\pi f$$

که در آن $\phi(x) \rightarrow 0$ وقتی که $|x| \rightarrow \infty$. به ازای یک تابع انتگرال‌پذیر دلخواه f ، لازم نیست که پتانسیل ϕ دیفرانسیل‌پذیر باشد. با این وجود، ممکن است $(18-9)$ به عنوان جوابی ضعیف از معادله پواسن در نظر گرفته شود، که می‌توان این مطلب را با استفاده از نظریه توزیع‌ها دقیق بیان کرد. این تکنیک را می‌توان، به شیوه‌ای غیر بدیهی، برای به دست آوردن کرانه‌هایی برای بعد مجموعه‌های تکینگی جواب ضعیف معادلات دیفرانسیل جزئی دیگر هم گسترش داد.

۱۸-۳ دینامیک سیالات و آشفتگی

به رغم سال‌های بسیار مطالعات سخت، آشفتگی در سیالات هنوز به طور کامل درک نشده است. سیالات با شارش آرام، در یک شکل هموار و ناشکستنی حرکت می‌کنند، که به طور کامل توسط معادلات ناویر-استوکس (معادلات دیفرانسیل اساسی در دینامیک سیالات) توضیح داده می‌شوند. به چنین شارش همواری شارش لایه‌ای می‌گویند. در سرعت‌های بالاتر، شارش اغلب آشفتگی می‌شود؛ ذرات سیال مسیره‌ای در هم پیچیده‌ای را با سرعت به شدت متغیر دنبال می‌کنند و در هر مقیاسی دارای پیچش و بی‌نظمی‌هایی می‌باشند. همه افراد با تغییر شارش لایه‌ای به شارش آشفتگی، هنگامی که شیر آب از کم تا کامل چرخانده می‌شود، آشنایی دارند. هر چند شکل دقیق شارش آشفتگی، نامنظم و غیر قابل پیش‌بینی می‌باشد، رفتار کلی آن به نحو قابل قبولی در دسترس می‌باشند.

هیچ تعریف عموماً پذیرفته شده‌ای از شارش آشفتگی وجود ندارد — مزیت این موضوع این است که در مورد هر شارشی، به طور منطقی می‌توان آشفتگی را بر اساس یک "ویژگی جالب

توجه" و مناسب آن شارش معرفی کرد. ما مدلی را در نظر می‌گیریم که در آن، آشفتگی عمدتاً به خاطر تولید موضعی گرما در اثر لزج بودن، یعنی در اثر "اصطکاک سیال"، در نقاطی که دارای حرکت شدیدی هستند، اتفاق می‌افتد.

در مقیاس‌های به اندازه کافی کوچک، ممکن است آشفتگی را همسانگرد، یعنی مستقل از جهت در نظر گرفت. بررسی‌های شهودی ما از آشفتگی‌های همسانگرد بیشتر از روش‌های کیفی کولموگوروف سرچشمه می‌گیرد تا از تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل. مدل کولموگوروف بر مبنای این ایده است که انرژی جنبشی، در مقیاسی بزرگ، مثلاً در اثر هم زدن، در یک سیال ایجاد می‌شود. با این وجود، انرژی جنبشی تنها می‌تواند در مقیاس‌های بسیار کوچک (به صورت گرما) از میان برود که در اینجا اثر لزجی اهمیت می‌یابد. این اتلاف انرژی در مقیاس‌های میانی می‌تواند نادیده گرفته شود. اگر جریان‌های حلقه‌وار در هر مقیاسی در سیال وجود داشته باشد، آنگاه انرژی به وسیله حرکت سیال از طریق دنباله‌ای از حرکت‌های دورانی که اندازه آنها در حال کوچک شدن است منتقل می‌شود تا اینکه به حرکت‌های دورانی کوچکی که اتلاف در آنها صورت می‌گیرد، می‌رسد. اگر، آنگونه که کولموگوروف فرض کرده، ناحیه سیال از حرکت‌های دورانی با هر مقیاسی پر شود، آنگاه اتلاف انرژی به صورت گرما به طور یکنواخت در سرتاسر سیال روی می‌دهد.

فرض کنید $\varepsilon(x)$ سرعت اتلاف در نقطه x در واحد حجم باشد، در نتیجه گرمای تولید شده در یک حجم کوچک δV اطراف x در زمان δt برابر $\varepsilon(x)\delta V\delta t$ می‌باشد. بر مبنای این فرض خواهیم داشت

$$\varepsilon(x) = \bar{\varepsilon} : D \text{ در } x \text{ هر ازای}$$

که در آن $\bar{\varepsilon}$ سرعت اعمال انرژی به ناحیه D از سیال با حجم واحد می‌باشد.

هر چند چنین آشفتگی "همگنی" به خاطر سادگی آن مورد توجه است، اما به وسیله آزمایش تایید نمی‌شود. اندازه گیری‌ها با استفاده از یک بادسنج سیمی-حرارتی، نشان می‌دهد که در یک سیال آشفته، سرعت اتلاف در بخش‌های مختلف سیال به مقدار زیادی تفاوت دارد. این، پدیده وقفه می‌باشد. اتلاف در بعضی نواحی بسیار بالا و در بعضی نواحی دیگر بسیار کم می‌باشد، در حالیکه در مدل کولموگوروف لازم است که این اتلاف ثابت باشد. میزان این تغییرات را می‌توان با استفاده از توابع همبستگی سنجید. به ازای یک بردار کوچک h همبستگی میان سرعت‌های اتلاف در نقاط با فاصله h به صورت زیر داده می‌شود

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+h) \rangle \quad (10-18)$$

که در آن براکت‌های زاویه دار، میانگین روی همه x ها در D را نشان می‌دهد. اگر اتلاف ثابت بود آنگاه داشتیم $\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+h) \rangle = \bar{\varepsilon}^2$. با این وجود، آزمایش نشان می‌دهد که به ازای یک مقدار d بین 0.4 و 0.5 داریم

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+h) \rangle \simeq \bar{\varepsilon}^2 |h|^{-d}.$$

مدل کولموگوروف را می‌توان برای توضیح وقفه تعدیل کرد با این فرض که، به جای اینکه حلقه‌های دورانی در هر مقیاس فضا را پر کنند، این حلقه‌ها همزمان با کوچک شدن اندازه‌هایشان، قسمت‌های کوچک‌تری از فضا را پر کنند. انرژی جنبشی به بزرگ‌ترین حلقه دورانی داده می‌شود و از میان حلقه‌های دورانی کوچک شونده عبور می‌کند تا اینکه در کوچک‌ترین مقیاس‌ها تلف می‌شود. اکنون، با وجود این، انرژی و اتلاف در بخش کوچکی از سیال متمرکز می‌شوند. سرازیر شدن حلقه‌های دورانی را می‌توان به عنوان k مرحله اول E_i از ساختار یک فرکتال خود متشابه F در نظر گرفت (فصل ۹ را ببینید) که k کاملاً بزرگ است، و اتلاف در طی k امین مرحله E_k روی می‌دهد. برای راحتی فرض می‌کنیم که مجموعه E_{i+1} ، از جایگزینی هر مجموعه اولیه E_i با تعداد ثابتی مجموعه با اندازه‌های مساوی تشکیل شود.

اگر A یک زیرمجموعه از D باشد، سرعت کل اتلاف انرژی در مجموعه A را به صورت $\mu(A) = \int_A \varepsilon(x) dx$ تعریف می‌کنیم؛ از این رو سرعت ورودی انرژی برابر است با $\mu(D) = \bar{\varepsilon}$. در این صورت μ دارای ویژگی‌های یک توزیع جرم روی D می‌باشد. به علاوه، اگر فرض کنیم که سرعت اتلاف در هر یک از مولفه‌های E_i به طور مساوی بین زیرمولفه‌های هم اندازه در E_{i+1} تقسیم شود، آنگاه به عنوان نتیجه‌ای ساده از خودمتشابه بودن F با بعد هاوسدورف یا جعبه s ، اگر x در F باشد، خواهیم داشت

$$c_1 \bar{\varepsilon} r^s \leq \mu(B_r(x)) \leq c_2 \bar{\varepsilon} r^s$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های مثبتی هستند (تمرین ۹-۸ را ببینید). این نامساوی‌ها هم برای حد F هنگامیکه اندازه حلقه‌های دورانی اتلاف به صفر میل کند، برقرار می‌ماند، و هم برای تقریب فیزیکی E_k ، مشروط بر اینکه r بزرگتر از مقیاس اتلاف باشد.

سپس، از آنجا که اتلاف روی E_k متمرکز شده است، داریم

$$\begin{aligned} \int_{|h| \leq r} \langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+h) \rangle dh &= \int_{x \in D} \int_{|h| \leq r} \varepsilon(x)\varepsilon(x+h) dh dx \\ &= \int_{x \in D} \varepsilon(x) \mu(B_r(x)) dx \\ &= \int_{x \in E_k} \varepsilon(x) \mu(B_r(x)) dx. \end{aligned}$$

$$(12-18) \quad c_1 \bar{\varepsilon}^2 r^s \leq \int_{|h| \leq r} \langle \varepsilon(x) \varepsilon(x+h) \rangle dh \leq c_2 \bar{\varepsilon}^2 r^s.$$

این در صورتی حاصل می‌شود که همبستگی در یک قانون توان

$$\langle \varepsilon(x) \varepsilon(x+h) \rangle \simeq \bar{\varepsilon}^2 |h|^{s-3}$$

صدق کند، که آنگاه انتگرال در (۱۲-۱۸) به صورت زیر در می‌آید

$$4\pi \int_0^r \bar{\varepsilon}^2 t^{s-3} t^2 dt = 4\pi \bar{\varepsilon}^2 r^s / s.$$

که مقایسه با (۱۱-۱۸) پیشنهاد می‌کند که $s = 3 - d$ ، بنابراین فرضیه "آشفته‌گی همگن فرکتالی" که اتلاف روی یک فرکتال تقریبی با بعد مابین ۲.۵ و ۲.۶ متمرکز شده است، با نتایج حاصل از آزمایش سازگار است.

جستجوی دلایلی نظری، برای اینکه نشان دهیم ناحیه آشفته‌گی دارای شکل فرکتالی است، امری طبیعی است. یک تعبیر مناسب، بر حسب گرداب‌های استوانه‌ای در سیال می‌باشد. بنابر قضیه حرکت چرخشی کلوین، چنین استوانه‌هایی در حین حرکت، حداقل در حالت شارش تقریباً غیر لزج حفظ می‌شوند. با این وجود، گرداب‌های استوانه‌ای توسط حرکت سیال کشیده و بلند و باریک می‌شوند. تا کردن‌های مکرر جهت تعدیل و منطبق کردن این طول لازم است، پس ممکن است استوانه‌ها به شکل یک فرکتال تقریبی در نظر گرفته شوند که به نعل اسب مثال شکل ۱۳-۵ بی‌شبهت نیست.

رفتار یک سیال (لزج) می‌تواند توسط معادله ناویر - استوکس پیش‌بینی شود

$$(13-18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \nabla^2 u + \nabla p = f$$

که در آن u سرعت، p فشار، ν میزان لزج بودن، و f چگالی نیروی اعمال شده می‌باشد. وجود نواحی فعالیت فرکتالی به راحتی از معادله ناویر - استوکس نتیجه نمی‌شود. با این حال، روش استفاده شده در بخش ۱۸-۲ را می‌توان تعمیم داد؛ پس از اثبات اینکه، مثلاً مجموعه‌ای که روی آن جواب $u(x, t)$ از معادله (۱۳-۱۸) به ازای هر t کراندار نیست دارای بعد حداکثر $2\frac{1}{2}$ می‌باشد. پس امکان دارد که از معادلات شارش سیال نشان دهیم که انواع معینی از "فعالیت شدید" باید روی مجموعه‌هایی با بعد کوچک متمرکز شوند.

۱۸-۴ نکات و منابع

مطالب بسیار زیاد و متنوعی در مورد کاربرد فرکتال‌ها در فیزیک در کتاب‌های Mandelbrot (۱۹۸۲) و Feder (۱۹۸۸) و در جلدهایی از مقالات جمع‌آوری و ویرایش

شده توسط *Rubin* و *Mandelbrot Shlesinger*، *Tosatti* و *Pietronero* (۱۹۸۶)، *Pietronero* (۱۹۸۴) و *Avinor* (۱۹۸۴) کتاب‌های *Scholz* و *Mandelbrot* (۱۹۸۹)، و برای کاربردهای فرکتال در ژئوفیزیک، (۱۹۸۹) را مطالعه کنید. *Stanley* و *Ostrowsky* (۱۹۸۸، ۱۹۸۶) و *Viesek* (۱۹۸۹) شامل مقالاتی در مورد رشد فرکتالی هستند. کتاب *Feder* (۱۹۸۸) شامل بررسی‌های مفصل‌تری در مورد پنجه پنجه شدن مواد چسبناک می‌باشد. برای آشنایی مقدماتی با نظریه‌های آشفتگی، کتاب *Leslie* (۱۹۷۳) را مطالعه کنید. مدل همگن *Kolmogorov* (۱۹۴۱) توسط *Mandelbrot* (۱۹۷۴) برای مدل همگن فرکتالی تنظیم شده است؛ کتاب‌های *Frisch*، *Sulem* و *Nelkin* (۱۹۷۸) را نیز ببینید. مجموعه مقالات مرتبط با جنبه فرکتالی آشفتگی در کتاب‌های *Temam* (۱۹۷۶) و *Looss, Barenblatt* و *Joseph* (۱۹۸۳) آمده است. در کتاب *Temam* (۱۹۸۳) توضیحاتی در مورد بعد مجموعه‌های مرتبط با جواب‌های معادلات ناویر-استوکس آمده است.

تعداد بسیار زیادی مقاله در موارد دیگر کاربردهای فیزیکی وجود دارد. به طور مختصر، *Nye* (۱۹۷۰) فرکتال‌ها را در جماد شناسی به کار می‌برد، *Berry* (۱۹۷۹) تاثیر فرکتال‌ها روی امواج را بررسی می‌کند، *Burrough* (۱۹۸۱) به بررسی بعد مناظر طبیعی و اطلاعات محیط طبیعی می‌پردازد. *Lovejoy* (۱۹۸۲) جنبه فرکتالی ابرها را در نظر گرفته، *Bale* و *Schmidt* (۱۹۸۴) ویژگی‌های فرکتالی روزه‌های میکروسکوپیک سطوح را بررسی می‌کند.

تمرین‌ها

۱-۱۸ فرض کنید مدل شبکه مربعی DLA را برای تعداد زیادی از مربع‌های کوچک اجرا کنیم و مجموعه به دست آمده یک فرکتال تقریبی با بعد s باشد. انتظار دارید تعداد مربع‌های سایه زده شده تا فاصله r از مربع اولیه از چه قانون توانی پیروی کند؟ با این فرض که در طی اجرای مدل، مربع‌ها به بخش‌هایی از مجموعه در نقاط دورتر نسبت به مربع اولیه اضافه شوند، در مورد "شعاع" رشد نسبت به k پس از اضافه شدن k مربع، چه پیش‌بینی می‌کنید؟

۲-۱۸ فرض کنید در آزمایش الکترولیز که در بخش ۱-۱۸ توضیح داده شد، $m(t)$ جرم مس رسوب شده، و $r(t)$ "شعاع" رسوب مس پس از زمان t باشد. می‌توان نشان داد که ریزش در زمان جاری، و در نتیجه، بنابر قانون فارادی، سرعت رسوب جرم متناسب با $r(t)$ می‌باشد. با تکیه بر این فرض که این سیستم رشد یک فرکتال

تقریبی با بعد s شکل می‌دهد، به گونه‌ای که $m(t) \sim cr(t)^s$ ، با ارائه استدلالی نشان دهید که $r(t) \sim c_1 t^{1/(s-1)}$.

۳-۱۸ تحقیق کنید که $u(x', t)$ در معادله دیفرانسیل جزئی (۱-۱۸) صدق می‌کند.

۴-۱۸ تحقیق کنید که پتانسیل در (۹-۱۸) در معادله پواسن صدق می‌کند اگر، برای نمونه، f تابعی باشد که دو مرتبه به طور پیوسته مشتق پذیر باشد و به ازای x های به اندازه کافی بزرگ، $f(x) = 0$.

۵-۱۸ نشان دهید که اگر به ازای هر x به اندازه کافی بزرگ $f(x) = 0$ و $\int |f(x)|^2 dx < \infty$ ، آنگاه مجموعه تشابه ϕ ، که از (۹-۱۸) به دست می‌آید، تهی است.

۶-۱۸ نشان دهید استدلالی که به (۱۲-۱۸) منتهی می‌شود را می‌توان برای حالتی که، مثلاً، D مکعب واحد در R^3 ، و F حاصلضرب دو مجموعه غبار کانتور شکل $4-0$ و پاره‌خط واحد L می‌باشد، تنظیم کرد. (به طور نادقیق می‌توان تمرین را برای مجموعه $E_k \times L$ که در آن E_k ، k امین مرحله ساخت غبار کانتور به ازای k ی بزرگ می‌باشد، حل کرد.)

- Adler R. J. (1981) *The Geometry of Random Fields*, Wiley, New York.
- Ahlfors L. V. (1979) *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Anderson R. D. and Klee V. L. (1952) Convex functions and upper semi-continuous functions, *Duke Math. J.*, 19, 349-357.
- Apostol T. M. (1974) *Mathematical Analysis*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Avinor D. (Ed.) (1989) *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, Wiley, New York.
- Baker A. and Schmidt W. M. (1970) Diophantine approximation and Hausdorff dimension, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 21, 1-11.
- Bale H. D. and Schmidt P. W. (1984) Small-angle X-ray-scattering investigation of submicroscopic porosity with fractal properties, *Phys. Rev. Lett.*, 53, 596-599.
- Barenblatt G. I., Iooss G. and Joseph D. D. (Eds) (1983) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, Pitman, London.
- Barnsley M. F. (1988) *Fractals Everywhere*, Academic Press, Orlando, FL.
- Barnsley M. F. and Demko S. G. (1985) Iterated function schemes and the global construction of fractals, *Proc. R. Soc.*, A 399, 243-275.
- Barnsley M. F. and Demko S. G. (Eds) (1986) *Chaotic Dynamics and Fractals*, Academic Press, New York.
- Barnsley M. F. and Sloan A. D. (1988) A better way to compress images, *Byte*, 13, 215-233.
- Beardon A. F. (1965) On the Hausdorff dimension of general Cantor sets, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 61, 679-94.
- Bedford T. J. (1989) The box dimension of self-affine graphs and repellers, *Nonlinearity*, 2, 53-71.
- Bedford T. J. and Swift J. (Eds) (1988) *New Directions in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bergé P., Pomeau Y. and Vidal Ch. (1984) *L'Ordre dans le Chaos*, Hermann, Paris.
- Berry M. V. (1979) Diffraction, *J. Phys. A: Math. Gen.*, A 12, 781-797.
- Berry M. V. and Lewis Z. V. (1980) On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function, *Proc. R. Soc.*, A 370, 459-484.
- Besicovitch A. S. (1928) On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, *Math. Annalen*, 98, 422-464.
- Besicovitch A. S. (1934) Sets of fractional dimensions IV: On rational approximation to real numbers, *J. Lond. Math. Soc.*, 9, 126-131.
- Besicovitch A. S. (1938) On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points II, *Math. Annalen*, 115, 296-329.

- Besicovitch A. S. (1939) On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points III, *Math. Annalen*, 116, 349–357.
- Besicovitch A. S. (1952) On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure, *Indag. Math.*, 14, 339–344.
- Besicovitch A. S. (1963) The Kakeya problem, *Am. Math. Monthly*, 70, 697–706.
- Besicovitch A. S. (1964) On fundamental geometric properties of plane line sets, *J. Lond. Math. Soc.*, 39, 441–448.
- Besicovitch A. S. and Moran P. A. P. (1945) The measure of product and cylinder sets, *J. Lond. Math. Soc.*, 20, 110–120.
- Besicovitch A. S. and Ursell H. D. (1937) Sets of fractional dimensions, V: On dimensional numbers of some continuous curves, *J. Lond. Math. Soc.*, 12, 18–25.
- Billingsley P. (1965) *Ergodic Theory and Information*, Wiley, New York.
- Billingsley P. (1979) *Probability and Measure*, Wiley, New York.
- Blanchard P. (1984) Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, *Bull. Am. Math. Soc.*, 11, 85–141.
- Brolin H. (1965) Invariant sets under iteration of rational functions, *Arkiv Math.*, 6, 103–144.
- Bumby R. T. (1985) Hausdorff dimension of sets arising in number theory, in *Number Theory, New York 1983–84 Seminar (Lecture Notes in Mathematics, 1135)*, pp. 1–8, Springer, New York.
- Burrough P. A. (1981) Fractal dimensions of landscapes and other environmental data, *Nature*, 294, 240–242.
- Carathéodory C. (1914) Über das lineare Mass von Punktmengen eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*, pp. 406–426.
- Carleson A. (1967) *Selected Problems on Exceptional Sets*, Van Nostrand, Princeton, NJ.
- Carlin S. and Taylor H. M. (1975) *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.
- Carlin S. and Taylor H. M. (1981) *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.
- Cassels J. W. S. (1957) *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Chayes J. T., Chayes L. and Durrett R. (1988) Connectivity of Mandelbrot's percolation process, *Prob. Theor. Related Fields*, 77, 307–324.
- Cunningham F. (1971) The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets, *Am. Math. Monthly*, 78, 114–129.
- Cunningham F. (1974) Three Kakeya problems, *Am. Math. Monthly*, 81, 589–592.
- Curry J., Garnett L. and Sullivan D. (1983) On the iteration of rational functions: computer experiments with Newton's method, *Commun. Math. Phys.*, 91, 267–277.
- Cvitanović P. (Ed.) (1984) *Universality in Chaos*, Adam Hilger, Bristol.
- Dalla L. and Larman D. G. (1980) Convex bodies with almost all k -dimensional sections polytopes, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 88, 395–401.
- Davies R. O. (1952) On accessibility of plane sets and differentiation of functions of two real variables, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 48, 215–232.
- Dekking F. M. (1982) Recurrent sets, *Adv. Math.*, 44, 78–104.

- Devaney R. L. (1986) *Introduction to Chaotic Dynamic Systems*, Benjamin Cummings, Menlo Park, CA.
- Dodson M. M., Rynne B. P. and Vickers J. A. G. (to appear) Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension.
- Eggleston H. G. (1952) Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), 54, 42-93.
- Eggleston H. G. (1958) *Convexity*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Erdős P. and Volkmann B. (1966) Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension, *J. reine angew. Math.*, 221, 203-208.
- Falconer K. J. (1985a) *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Falconer K. J. (1985b) Classes of set with large intersection, *Mathematika*, 32, 191-205.
- Falconer K. J. (1985c) The Hausdorff dimension of distance sets, *Mathematika*, 32, 206-212.
- Falconer K. J. (1986a) Sets with prescribed projections and Nikodym sets, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 53, 48-64.
- Falconer K. J. (1986b) Random fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 100, 559-582.
- Falconer K. J. (1987) Cut set sums and tree processes, *Proc. Am. Math. Soc.*, 101, 337-346.
- Falconer K. J. (1988) The Hausdorff dimension of self-affine fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 103, 339-350.
- Falconer, K. J. and Marsh D. T. (1989) Classification of quasi-circles by Hausdorff dimension, *Nonlinearity*, 2, 489-493.
- Farmer J. D., Ott E. and Yorke J. A. (1983) The dimension of chaotic attractors, *Physica*, 7D, 153-180.
- Fatou P. (1919) Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 47, 161-271.
- Feder J. (1988) *Fractals*, Plenum Press, New York.
- Federer H. (1947) The (φ, k) rectifiable subsets of n -space, *Trans. Am. Math. Soc.*, 62, 114-192.
- Federer H. (1969) *Geometric Measure Theory*, Springer, New York.
- Fischer P. and Smith W. R. (Eds.) (1985) *Chaos, Fractals and Dynamics*, Marcel Dekker, New York.
- Frederickson P., Kaplan J., Yorke E. and Yorke J. (1983) The Lyapunov dimension of strange attractors, *J. Diff. Eq.*, 49, 185-207.
- Frisch U., Sulem P.-L. and Nelkin M. (1978) A simple dynamical model of fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.*, 87, 719-736.
- Frostman O. (1935) Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Math. Sem.*, 3, 1-118.
- Graf S. (1987) Statistically self-similar fractals, *Prob. Theor. Related Fields*, 74, 357-392.
- Graf S., Mauldin R. D. and Williams S. C. (1988) The exact Hausdorff dimension in random recursive constructions, *Mem. Am. Math. Soc.*, 71, no. 381.
- Grimmett G. R. (1989) *Percolation*, Springer, New York.
- Grimmett G. R. and Stirzaker D. R. (1982) *Probability and Random Processes*, Clarendon Press, Oxford.
- Guckenheimer J. and Holmes P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York.

- Hausdorff F. (1919) Dimension und äusseres Mass, *Math. Annalen*, 79, 157-179.
- Hurdy G. H. and Wright E. M. (1960) *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Harin V. P., Hruščëv S. V. and Nikol'skii N. K. (1984) '*Linear and Complex Analysis Problem Book*' (*Lecture Notes in Mathematics*, 1043), Springer, New York.
- Hayman W. K. and Kennedy P. B. (1976) *Subharmonic Functions*, Volume 1, Academic Press, New York.
- Hénon M. and Pomeau Y. (1976) Two strange attractors with a simple structure, in *Turbulence and the Navier-Stokes Equations* (*Lecture Notes in Mathematics*, 565), (Ed. R. Temam), pp. 29-68, Springer, New York.
- Holden A. V. (1986) *Chaos*, Manchester University Press, Manchester.
- Holden A. V. and Muhamad M. A. (1986) A graphical zoo of strange and peculiar attractors, in *Chaos* (Ed. A. V. Holden), pp. 15-34, Manchester University Press, Manchester.
- Hutchinson J. E. (1981) Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.*, 30, 713-747.
- Jarnik V. (1931) Über die simultanen diophantischen Approximationen, *Math. Zeit.*, 33, 505-543.
- Jones P. W. and Murai T. (1988) Positive analytic capacity but zero Buffon needle probability, *Pacific J. Math.*, 133, 99-114.
- Julia G. (1918) Sur l'iteration des fonctions rationnelles, *J. Math. Pure Appl.*, 8, 47-245.
- Kahane J.-P. (1974) Sur le modèle de turbulence de Benoit Mandelbrot, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 278A, 621-623.
- Kahane J.-P. (1985) *Some Random Series of Functions*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kahane J.-P. (1986) Sur la dimensions des intersections, in *Aspects of Mathematics and its Applications* (Ed. J. A. Barroso), pp. 419-430, North-Holland, Amsterdam.
- Kaufman R. (1968) On the Hausdorff dimension of projections, *Mathematika*, 15, 153-155.
- Kaufman R. (1981) On the theorem of Jarnik and Besicovitch *Acta. Arithmetica*, 39, 265-267.
- Kesten H. (1982) *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhauser, Boston, MA.
- Kingman J. F. C. and Taylor S. J. (1966). *Introduction to Measure and Probability*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kolmogorov A. N. (1941) Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers, *C.R. Acad. Sci. USSR*, 30, 299-303.
- Lovejoy S. (1982) Area perimeter relation for rain and cloud areas, *Science*, 216, 185-187.
- Leslie D. C. (1973) *Developments in the Theory of Turbulence*, Clarendon Press, Oxford.
- MacKay R. S. and Meiss J. D. (Eds) (1987) *Hamiltonian dynamical Systems*, Adam Hilger, Bristol.
- Mandelbrot B. B. (1974) Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid Mech.*, 62, 331-358.
- Mandelbrot B. B. (1980) Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ, z , *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 357, 249-259.
- Mandelbrot B. B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco.
- Mandelbrot B. B. (1986) Self-affine fractal sets. in *Fractals in Physics* (Eds J. Pietronero

- Mandelbrot B. B. (1988) An introduction to multifractal distribution functions, in *Fluctuations and Pattern Formation*, (Eds H. E. Stanley and N. Ostrowsky), Kluwer Academic, Dordrecht.
- Mandelbrot B. B. and Van Ness J. W. (1968) Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.*, 10, 422–437.
- Marstrand J. M. (1954a) Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 4, 257–302.
- Marstrand J. M. (1954b) The dimension of Cartesian product sets, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 50, 198–202.
- Mattila P. (1975) Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A 1, 227–244.
- Mattila P. (1984) Hausdorff dimension and capacities of intersections of sets in n -space, *Acta Math.*, 152, 77–105.
- Mattila P. (1985) On the Hausdorff dimension and capacities of intersections, *Mathematika*, 32, 213–217.
- Mattila P. (1986) Smooth maps, null-sets for integralgeometric measures and analytic capacity, *Ann. Math.*, 123, 303–309.
- Mauldin R. D. and Williams S. C. (1986a) Random recursive constructions: asymptotic geometric and topological properties, *Trans. Am. Math. Soc.*, 295, 325–346.
- Mauldin R. D. and Williams S. C. (1986b) On the Hausdorff dimension of some graphs, *Trans. Am. Math. Soc.*, 298, 793–803.
- May R. M. (1976) Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, 261, 459–467.
- Mayer Kress G. (Ed.) (1986) *Dimensions and Entropies in Chaotic Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- McMullen C. (1984) The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets, *Nagoya Math. J.*, 96, 1–9.
- Moran P. A. P. (1946) Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 42, 15–23.
- Nye J. F. (1970) Glacier sliding without cavitation in a linear viscous approximation, *Proc. R. Soc.*, A 315, 381–403.
- Papoulis A. (1962) *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York.
- Peitgen H.-O. and Richter P. H. (1986) *The Beauty of Fractals*, Springer, Berlin.
- Peitgen H.-O. and Saupe D. (Eds) (1988) *Fractal Images*, Springer, New York.
- Peitgen H.-O., Saupe D. and von Haeseler F. (1984) Cayley's problem and Julia sets, *Math. Intelligencer*, 6, 11–20.
- Peyrière J. (1974) Turbulence et dimension de Hausdorff, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 278A, 567–569.
- Peyrière J. (1977) Calculs de dimensions de Hausdorff, *Duke Math. J.*, 44, 591–601.
- Pietronero L. (Ed.) (1989) *Fractals*, Plenum Press, New York.
- Pietronero L. and Tosatti E. (Eds) (1986) *Fractals in Physics*, North-Holland, Amsterdam.
- Preiss D. (1987) Geometry of measures in R^n : distribution, rectifiability and densities, *Ann. Math.*, 125, 537–641.
- Rogers C. A. (1970) *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Rogers C. A. (1988) *Dimensions* prints, *Mathematika*. 35. 1–27.

- Ruelle D. (1980) Strange attractors, *Math. Intelligencer*, 2, 126–137.
- Ruelle D. (1982) Repellers for real analytic maps, *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, 2, 99–108.
- Ruelle D. (1983) Bowen's formula for the Hausdorff dimension of self-similar sets, in *Scaling and Self-similarity in Physics*, (*Progress in Physics*, 7) Birkhauser, Boston, MA.
- Santaló L. A. (1976) *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- Saupe D. (1987) Efficient computation of Julia sets and their fractal dimension, *Physica*, 28D, 358–370.
- Schmidt W. M. (1980) *Diophantine Approximation (Lecture Notes in Mathematics, 785)*. Springer, Berlin.
- Scholz C. H. and Mandelbrot B. B. (Eds) (1989) *Fractals in Geophysics*, Birkhauser, Boston, MA.
- Schuster H. G. (1984) *Deterministic Chaos—An Introduction*, Physik Verlag, Weinheim.
- Shlesinger M. F., Mandelbrot B. B. and Rubin R. J. (Eds) (1984) *Proceedings of the Gaithersburg Symposium on Fractals in the Natural Sciences*, *J. Stat. Phys.*, 36, (special issue) 519–921.
- Smale S. (1967) Differentiable dynamical systems, *Bull. Am. Math. Soc.*, 73, 747–817.
- Sparrow C. (1982) *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer, New York.
- Stanley H. E. and Ostrowsky N. (Eds) (1986) *On Growth and Form*, Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- Stanely H. E. and Ostrowsky N. (Eds) (1988) *Random Fluctuations and Pattern Growth*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- Taylor S. J. (1961) On the connection between Hausdorff measures and generalized capacities, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 57, 524–31.
- Taylor S. J. (1973) Sample path properties of processes with stationary independent increments, in *Stochastic Analysis* (Eds D. G. Kendall and E. F. Harding), pp. 387–414, Wiley, New York.
- Taylor S. J. (1986) The measure theory of random fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 100, 383–406.
- Tél T. (1988) Fractals and multifractals, *Zeit. Naturforsch.*, 43A, 1154–1174.
- Temam R. (Ed.) (1976) *Turbulence and the Navier–Stokes Equations*, (*Lecture Notes in Mathematics* 565), Springer, New York.
- Temam R. (1983) *Navier–Stokes Equations and Non-linear Functional Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Thompson J. M. T. and Stewart H. B. (1986) *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley, Chichester.
- Tricot C. (1982) Two definitions of fractional dimension, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 91, 54–74.
- Viesek T. (1989) *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific, Singapore.
- Voss R. F. (1985) Random fractal forgeries, in *Fundamental Algorithms in Computer Graphics* (Ed. R. A. Earnshaw), pp. 805–835, Springer, Berlin.
- Young L.-S. (1982) Dimension, entropies and Liapunov exponents, *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, 2, 109–124.
- Zähle U. (1984) Random fractals generated by random cutouts, *Math. Nachr.*, 116, 27–52.

نمایه و واژه نامه

Porous flow	آبکش ۳۶۲
dimension print	اثر بعد ۸۰-۸۱
turbulence	آشفستگی ۳۶۴-۳۶۷
homogeneous	- همگن ۳۶۵
chaos	آشوب ۲۲۹
mass distribution principle	اصل توزیع جرم ۸۵
(α -)well approximable numbers	اعداد (α -) خوب تخمین پذیر ۱۹۴-۱۹۶، ۲۵۲-۲۵۳
normal numbers	اعداد نرمال ۱۹۰
affinity	آفینی ۲۴
Entropy	آنترویی ۶۳، ۲۵۴-۲۵۸، ۳۴۵
Kolmogorov entropy	آنترویی کولموگوروف ۶۳
measure	اندازه ۲۷-۳۴
packing	- بسته بندی ۷۵-۷۸
on a set	- روی یک مجموعه ۲۹
Lebesgue	- لیگ ۳۰
n-dimensional Lebesgue	- لیگ n بعدی ۳۰
net	- مشبک ۵۷
Hausdorff	- هاوسدورف ۴۶-۵۰
restriction of	تحدید - ۳۱
multifractal measures	اندازه چند فرکتالی ۳۳۷-۳۵۲
self-similar measure	اندازه خود متشابه ۳۳۹، ۳۴۹
invariant measure	اندازه ناورد ۲۵۸، ۲۵۴
Hausdorff measure	اندازه هاوسدورف ۴۶-۴۹
(s-)energy	(s-) انرژی ۹۸
bifurcation diagram	انشعاب ۲۳۵

Sierpinski gasket	بادبان بند سیرپینسکی ۵، ۱۷۱، ۳۱۴
(δ)-parallel body	بدنه (δ) موازی ۱۸-۱۹، ۶۸، ۱۶۱
dimension	بُعد ۸، ۶۱-۸۳
of intersections	- اشتراک‌ها ۱۴۴-۱۵۸
information	- اطلاعات ۶۳، ۳۴۸
entropy	- آنتروپی ۶۳
upper box(-counting)	- بالای جعبه ۷۳-۷۸
packing	- بسته بندی ۷۵-۷۸
similarity	- تشابه ۸
of projections	- تصاویر ۱۲۱-۱۳۱
of attractors and repellers	- جاذب‌ها و دافع‌ها ۲۲۷-۳۶۲
box (-counting)	- جعبه (شمار) ۶۱-۸۳، ۳۳۹
lower box (-counting)	- جعبه پایینی ۶۶-۸۲
modified box-counting	- جعبه شمار تعدیل شده ۷۳-۷۴
of products	- حاصل ضرب‌ها ۱۳۲-۱۴۳
capacity	- ظرفیت ۶۳
Fourier	- فوریه ۱۰۲
metric	- متریک ۶۳
of random sets	- مجموعه‌های تصادفی ۳۰۱-۳۰۷، ۳۱۵-۳۳۶
of self-affine sets	- مجموعه‌های خود آفین ۱۴۱، ۱۷۷-۱۸۲
of self-similar sets	- مجموعه‌های خود متشابه ۸، ۱۶۷-۱۷۳
Minkowski	- مینکوفسکی ۶۹
of graphs of functions	- نمودار توابع ۱۹۸-۲۱۲
Hausdorff – Besicovitch	- هاوسدورف - بسیکوویچ ۵۰
Hausdorff	- هاوسدورف ۵۰-۵۷
Hausdorff dimension of a measure	- هاوسدورف یک اندازه ۲۵۵
one-sided	- یک طرفه ۷۹
approximations	- تخمین ۲۵۳
experimental estimation	- تخمین تجربی - ۶۳، ۶۴، ۲۵۴
finer definitions	- تعاریف ظریفتر - ۵۸
calculation of	- محاسبه - ۸۴، ۱۰۳، ۱۶۷-۱۸۲

stability	پایداری ۶۳
countable	- شماره ۶۳
electrostatic potential	پتانسیل الکترواستاتیک ۹۸، ۳۶۲
gravitational potential	پتانسیل گرانشی ۹۸
(s-)potential	(s-) پتانسیل ۹۸
viscous fingering	پنجه پنجه شدن لزجناک ۳۶۱-۳۶۲
(δ -) cover	(δ) پوشش ۴۶
population dynamics	پویایی جمعیت ۲۳۲، ۲۴۳
Pre-fractal	پیش - فرکتال ۱۶۵
dimension function	تابع بعد ۵۸
autocorrelation function	تابع خود همبستگی ۲۰۹
bi-Lipschitz function	تابع دو لپیشیتس ۲۴، ۵۳، ۲۹۰
Lipschitz function	تابع لپیشیتس ۲۴، ۵۰، ۵۲
Holder function	تابع هولدر ۲۴، ۴۹-۵۲
Weierstrass function	تابع وایرستراس ۷، ۲۰۱-۲۰۶، ۲۱۳-۲۱۴
random	- تصادفی ۳۲۸
affine transformation	تبدیل آفین ۲۴، ۱۷۷
baker's transformation	تبدیل خباز ۲۳۶-۲۳۷، ۲۵۷-۲۵۸
stretching and folding or cutting transformations	تبدیلات کشیدن و تا کردن یا بریدن ۲۳۶-۲۴۲
decomposition of 1-sets	تجزیه ۱- مجموعه‌ها ۱۰۶
diffusion limited aggregation	تجمع محدود - پخش ۳۵۶-۳۶۳
electrical discharge	تخلیه بار الکتریکی ۳۵۶
percolation	تراوش ۳۰۷-۳۱۳
projection	تصویر کردن ۱۲۱-۱۳۰
at a point	- در یک نقطه ۱۳۰
phase transition	تغییر فاز ۳۱۲
bounded variation	تغییر کراندار ۱۱۶
Diophantine approximations	تقریب دیوفانتی ۱۹۴-۱۹۵
almost surely	تقریباً حتمی ۳۷
iteration	تکرار ۲۲۷-۲۴۵، ۲۵۴-۲۹۷
quadratic functions	توابع درجه دوم ۲۷۳-۲۸۹، ۲۹۲-۲۹۴

distribution	توزیع
Gaussian	- گاوس ۴۲
normal	- نرمال ۴۲
multidimensional normal	- نرمال چند بعدی ۳۲۱
uniform	- یکنواخت ۴۲
distribution of digits	توزیع ارقام ۱۹۰-۱۹۲
mass distribution	توزیع جرم ۲۷-۳۴
attractor	جاذب ۲۲۸، ۲۲۹-۲۵۰
chaotic attractor	جاذب آشوبناک ۲۲۸
Lorenz attractor	جاذب لورنز ۲۴۷
Legendre transform pair	جفت ترادیسه لژاندر ۳۴۴
weak solutions	جواب‌های ضعیف ۳۶۴، ۳۶۷
upper density	چگالی بالایی ۱۰۶
lower density	چگالی پایینی ۱۰۶
logarithmic density	چگالی لگاریتمی ۶۳-۶۴
torus	چنبره ۲۴۲-۲۴۵
invariant tori	چنبره‌های ناورد ۲۵۳، ۲۵۴
Cantor product	حاصلضرب کانتور ۱۳۵، ۱۳۷
Vitushkin's conjecture	حدس ویتوشکین ۲۱۹-۲۲۱
Brownian motion	حرکت براونی ۵۸، ۳۱۵-۳۳۶، ۳۵۴، ۳۵۹
index- α	- α - شاخص ۳۲۶-۳۲۹
multiple points	- با نقاط چندگانه ۳۲۳
fractional	- کسری ۳۲۶-۳۲۹
rigid motion	حرکت صلب ۱۴۴، ۱۴۹
sensitive dependence on initial conditions	حساسیت به شرایط اولیه ۲۲۹
ring	حلقه ۲۲۳-۲۲۵
basin of attraction	حوزه جذب ۲۲۸، ۲۷۱، ۲۷۲
normal family	خانواده نرمال ۲۶۳-۲۷۲
at a point	- در یک نقطه ۲۶۴
autocorrelation	خود همبستگی ۲۰۹ - ۲۱۲، ۳۲۸
repeller	دافع ۲۲۹-۲۳۶، ۲۵۹، ۲۹۱
dendrite	دندریت ۲۸۷

period doubling	دو برابر کردن دوره ۲۳۳-۲۳۶
symbolic dynamics	دینامیک نمادین ۲۳۱
fractal growth	رشد فرکتالی ۳۶۳-۳۵۶
Newton's method	روش نیوتن ۲۹۶، ۲۹۲
Wiener process	فرایند وینر ۳۱۷
iterated Venetian blind construction	ساختار درز کردن تکراری ون ۱۲۷-۱۳۰، ۲۲۰
local structure	ساختار موضعی ۱۰۴-۱۲۰
digital sundial	ساعت آفتابی دیجیتال ۱۳۰
Brownian surface	سطوح براونی ۳۳۲-۳۳۴
copper sulphate	سولفات مس ۳۵۶
dynamical systems	سیستم‌های دینامیکی ۲۲۷-۲۶۲، ۳۳۷، ۳۵۰
continuous	- پیوسته ۲۴۵-۲۵۰
discrete	- گسسته ۲۲۷-۲۴۵
solenoid	سیملوله ۲۴۲-۲۴۵
quasi-circles	شبه دایره ۲۸۴، ۲۸۹-۲۹۲
open set condition	شرط مجموعه باز ۱۶۷-۱۶۹
figure of eight	شکل عدد ۸ ۲۷۵
tangent plane	صفحه مماس ۲۲۱
local product	ضرب موضعی ۱۳۷، ۲۳۹
iterated function scheme	طرح تابع تکرار شونده ۱۶۲، ۱۸۲-۱۸۹، ۲۲۸-۲۳۰
power spectrum	طیف توانی ۲۱۰-۲۱۲
multifractal spectrum	طیف چند فرکتالی ۳۴۴، ۳۴۷
s -dimensional content	ظرفیت s -بعدی ۷۹
(s) -capacity	$(-s)$ ظرفیت ۱۰۰
Avogadro's number	عدد آووگادرو ۳۱۵
Cantor dust	غبار کانتور ۵، ۱۲۶
stable symmetric process	فرآیند متقارن پایدار ۳۳۰
stable process	فرآیند پایدار ۳۲۹-۳۳۱
fractal	فرکتال ۷-۱۲
random fractal	فرکتال تصادفی ۲۹۹-۳۱۳
natural fractals	فرکتال‌های طبیعی ۱۲، ۱۸۶، ۳۵۳، ۳۵۶
data compression	فشرده سازی اطلاعات ۱۸۷
Darcy's law	قانون دارسی ۳۶۲

Siegel disc	قرص زیگل ۲۸۷
KAM theorem	قضیه KAM ۲۵۴
Egoroff's theorem	قضیه اگوروف ۳۵
Parseval's theorem	قضیه پارسوال ۱۰۱
Poincare-Bendixson theorem	قضیه پوانکاره - بندیکسون ۲۴۶
convolution theorem	قضیه پیچش ۱۰۱
Moser's twist theorem	قضیه چرخشی موزر ۲۵۳
Chernoff's theorem	قضیه چرنوف ۳۴۷
Lebesgue density theorem	قضیه چگالی لیگ ۱۰۴
central limit theorem	قضیه حد مرکزی ۳۱۶، ۴۳
collage theorem	قضیه کولاژ ۱۸۴
Montel's theorem	قضیه مانتل ۲۶۶
Jarnik's theorem	قضیه یارنیک ۱۴۲
physical applications	کاربردهای فیزیکی ۱۲، ۳۵۰، ۳۵۳-۳۶۹
electrolysis	الکترولیز ۳۵۶-۳۶۲
image encoding	کدگذاری تصویر ۱۸۲-۱۸۶
covering lemma	لم پوششی ۹۳
Hausdorff metric	متریک هاوسدورف ۱۹۰
Statistically self-affine set	مجموعه به طور آماری خود آفین ۳۲۰
Statistically self-similar set	مجموعه به طور آماری خود متشابه ۲۹۹، ۳۱۴، ۳۲۰، ۳۳۱
Borel set	مجموعه بورل ۲۱
stable set	مجموعه پایدار ۲۶۴
curve - free set	مجموعه پوچ - منحنی ۱۱۰
singularity set	مجموعه تکینگی ۳۶۴-۳۶۳
removable set	مجموعه حذف شدنی ۳۱۹-۳۲۰
self-affine set	مجموعه خود آفین ۱۷۷-۱۸۲، ۱۴۱
self-similar set	مجموعه خود متشابه ۱۶۷-۱۷۳، ۳۶۶
Julia set	مجموعه ژولیا ۶، ۲۶۳-۲۹۸
Fatou set	مجموعه فاتو ۱۹۸-۲۲۴
perfect set	مجموعه کامل ۲۷۰

Cantor set	مجموعه کانتور
random	- تصادفی ۳۰۱-۳۰۷
nonlinear	- غیر خطی ۱۷۵
middle third	- یک سوم میانی ۲، ۷، ۵۵، ۸۷، ۱۰۳، ۱۶۱، ۱۶۵، ۲۳۴
uniform	- یکنواخت ۹۰، ۱۳۷
curve – like set	مجموعه منحنی مانند ۱۱۰
Mandelbrot set	مجموعه مندلیبروت ۲۷۳-۲۷۹
regular set	مجموعه منظم ۱۰۶، ۱۲۰، ۱۲۵-۱۲۷
Irregular set	مجموعه نامنظم ۱۰۶-۱۲۰، ۱۲۵-۱۲۶، ۲۱۹
invariant set	مجموعه ناوردانواردا ۱۶۲، ۱۸۲، ۱۸۹، ۲۲۸، ۲۳۰
level sets	مجموعه‌های تراز ۳۲۵
s-set	S- مجموعه ۵۱، ۹۷، ۱۰۴-۱۰۹، ۱۱۵، ۱۱۸
l-set	l- مجموعه ۱۰۹-۱۱۴، ۱۱۷-۱۱۸، ۱۲۵-۱۲۶
heuristic calculation	محاسبه تجربی ۵۴-۵۶، ۱۶۷-۱۶۹
Minkowski content	محتوی مینکوفسکی ۶۸
support of a measure	محمل یک اندازه ۲۹
partial quotients	کسرهای جزئی ۱۹۱
orbit	مدار ۲۲۸، ۲۶۳
attractive orbit	مدار جذب کننده ۲۷۹، ۲۹۸
Kolmogorov model of turbulence	مدل آشفتگی کولموگوروف ۳۶۵
Keakeya problem	مساله کاکیا ۲۱۵-۲۱۹
Diophantine equations	معادلات دیوفانتین ۱۹۵
Lorenz equations	معادلات لورنز ۲۴۷-۲۴۸
Hamilton's equations	معادلات همیلتونی ۲۵۳
diffusion equation	معادله انتشار ۳۶۰
Poisson's equation	معادله پواسن ۳۶۴
Laplace's equation	معادله لاپلاس ۳۶۰
small divisors	مقسوم علیه کوچک ۲۵۰-۲۵۴
self-affine curve	منحنی خود آفین ۲۰۷-۲۰۹
von Koch curve	منحنی ون کخ ۳-۵، ۱۶۱، ۱۶۷
random	- تصادفی ۲۹۹-۳۰۰، ۳۰۷
Modified	- تعدیل شده ۱۷۱-۱۷۲
generator	مولد ۱۷۳

invariance	ناوردایی
geometric	- هندسی ۶۳
Lipschitz	- لیبشیتس ۶۳، ۲۸۹
Lipschitz invariance	ناوردایی لیبشیتس ۶۳، ۲۹۰
experimental approach to fractals	نزدیک شدن به فرکتال‌ها از طریق آزمایش ۶۱-۶۳، ۳۵۰، ۳۵۳-۳۵۶
number theory	نظریه اعداد ۱۹۰-۱۹۷
potential theory	نظریه پتانسیل ۹۸-۱۰۱، ۱۲۳، ۱۴۷، ۳۶۳-۳۶۴
horseshoe	نعل اسب ۲۳۸
multiple points	نقاط چندگانه ۳۲۳
period- p point	نقطه p - دوره ۲۲۸، ۲۶۳
superattractive point	نقطه ابر جاذب ۲۶۴
critical point	نقطه بحرانی ۲۷۸
indifferent point	نقطه بی تفاوت ۲۶۴
stable point	نقطه پایا ۲۳۳
attractive point	نقطه جذب کننده ۲۶۴
repelling point	نقطه دافعی ۲۶۴
regular point	نقطه منظم ۱۰۶، ۱۱۰
unstable point	نقطه ناپایدار ۲۳۳
irregular point	نقطه نامنظم ۱۰۶، ۱۱۰
first return map	نگاشت بازگشت اول ۲۴۷
tent map	نگاشت خیمه ۲۳۰
cat map	نگاشت گربه ۲۶۱
logistic map	نگاشت لژستیک ۲۳۲-۲۳۶، ۲۶۲
twist map	نگاشت مارپیچ ۳۵۳
Henon map	نگاشت هنون ۲۴۱
Liapounov exponents	نمای لیاپونوف ۲۵۴-۲۵۹
stationary increments	نمو پایدار ۳۱۷، ۳۲۶، ۳۲۹
Rosler band	نوار روسلر ۲۵۰
Cantor target	هدف کانتور ۱۳۷
thermal convection	همرفتی گرمایی ۲۴۷
isotropic	همسانگرد ۳۱۹
Hamiltonian	همیلتونی ۲۵۳، ۲۵۴