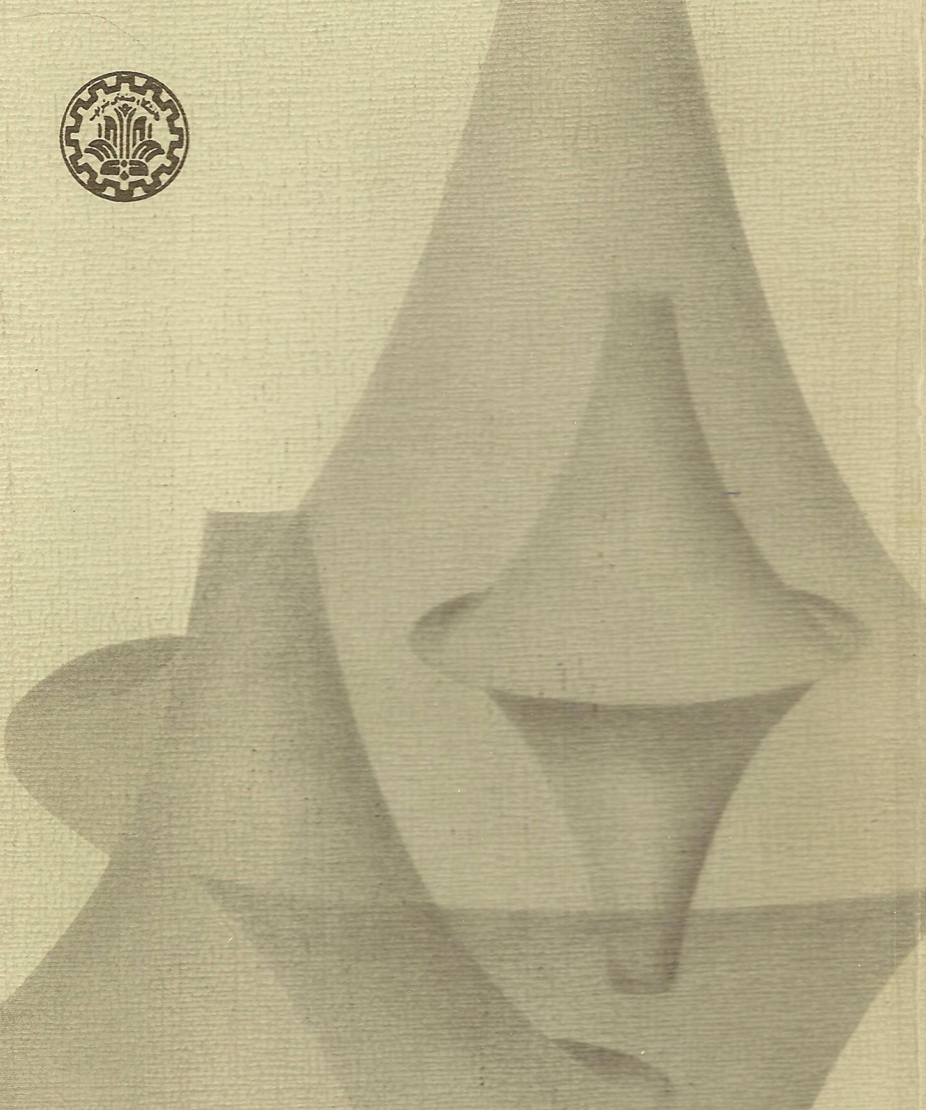


هندسهٔ لُباچفسکی

نوشتهٔ: آ.س. اسموگورژفسکی ترجمهٔ: احمد بیرشک

در میان پنج اصل موضوع اقلیدس اصل پنجم، یا اصل توازی، موجب زحمت فکری بود: نه چندان ساده بود که بتوان اصل بودنش را بی نگرانی پذیرفت و نه هم قابل اثبات بود. از همان آغاز کسانی دچار دودلی شدند و چه بسیار وقت برای اثبات آن یا قرار-دادن اصلی به‌جای آن صرف شد. این کوششها هر چند به نتیجهٔ قطعی نرسیدند راه را برای رسیدن به نتیجهٔ مهمتری گشودند. در قرن نوزدهم سه دانشمند در سه کشور، گاوس در آلمان، بویئی در مجارستان و لباچفسکی در روسیه تقریباً همزمان به‌کشف، یا بهتر بگوییم به ابداع، هندسه‌هایی دست یافتند که گاوس بر آنها نام هندسهٔ نا اقلیدسی نهاد.

هدف این کتاب آشنا ساختن خواننده است با اصول هندسهٔ نا اقلیدسی لباچفسکی. لباچفسکی ریاضیدان نامی روس متفکری برجسته بود که جهان یکی از بزرگترین اکتشاف های ریاضی، یعنی ساختن یك دستگاه ابتکاری هندسی متمایز از هندسهٔ اقلیدسی، را به او مدیون است.

در بخش ۱ این کتاب ترجمهٔ احوال کوتاهی از لباچفسکی آمده است، بخش ۲ به این مسئله می‌پردازد که مفهومهای اساسی هندسه چگونه نشأت کردند و گسترش یافتند، در بخش ۳ با تبدیلی به نام انعکاس، که وقوف بر آن برای درك هندسهٔ لباچفسکی لازم است آشنا می‌شویم، بخشهای دیگر کتاب، پاره‌ای از ویژگیهای هندسهٔ لباچفسکی را مورد بررسی قرار می‌دهد.

بها ۱۴ تومان

هندسهٔ لباچفسکئی

نوشتهٔ :
آ. س. اسموگورژفسکی
ترجمهٔ :
احمد بیرشك

مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

انتشارات دانشگاه صنعتی شریف

۱۶

هندسهٔ لباچفسکئی

نوشتهٔ آ. س. اسموگورژفسکی (A. S. Smogorzhevsky)
مترجم از روسی به انگلیسی: و. کیسین (V. Kisin)
مترجم فارسی : احمد بیرشک
طراح : نجمهٔ تجدد
روی جلد : سعید رحمتی
نظارت چاپ : ابوالفضل نادری
چاپ : چاپخانهٔ مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف
تعداد : ۳۵۰۰ نسخه

تاریخ چاپ : ۱۳۵۷.   تاریخ نشر: ۱۳۵۸. تهران.

اهدای کتاب

این ترجمهٔ کوچک را به کسانی تقدیم می‌دارم که در مدت بیشتر از چهل سالی که در دبیرستان و دانشگاه تدریس کرده‌ام توانسته باشم در دلهای پاکشان شور کوچکی برای کسب معرفت برانگیخته باشم.

ا. ب.

فهرست

یادداشت مترجم

هیجان انگیزترین پیشرفت ریاضی در سدهٔ
نوزدهم کشف هندسه های نااقلیدسی بود.
جمز نیومن، «جهان ریاضیات[1]».
ج. یکم، ص. ۵۴۶

هندسهٔ نااقلیدسی

انکارپذیر نیست که بسیاری از قسمتهای مهم ریاضی، حتی از آنچه ریاضیات محض نامیده می‌شود، در آغاز از تجربه الهام گرفته‌اند. هرکسی که با هندسه آشنا باشد می‌داند که نیاز آن را به وجود آورد. حتی نام آن در زبانهایی که از یونانی ریشه گرفته‌اند گویای آن است کــه این دانش برای اندازه گرفتن زمین آفریده شد. یونانیان جامهٔ آزمایشی بودن را از تن آن بیرون آوردند و قبای تجرید را بــر بالای آن آراستند. امــا میان تجرید اقلیدس و تجرید هیلبرت، میان اصل موضوعی ساختن هندسه بوسیلهٔ آن و این، بیست قرن راه است. وانگهی هندسهٔ اقلیدسی به شکلهای کوچک و فضاهای محدود می‌پرداخت و وقتی که پای بعدهای نجومی به میان آمـد هندسهٔ اقلیدسی نارسا ماند.

در میان پنج اصل موضوع اقلیدس اصل پنجم، یا اصل توازی، موجب زحمت فکری بود: نه چنان ساده بود که بتوان اصل بودنش را بی‌نگرانی پذیرفت و نه هم قابل‌اثبات بود. از همان آغازکسانی دچار دودلی شدند و چه بسیار وقت که در طی قرون برای اثبات آن یا قرار دادن اصلی به‌جای آن صرف شد. و قرن نوزدهم سررسید بی‌آن‌که برای آن تلاشها پایانی پیدا شده باشد. اما کوششها بی‌ثمر نبودند و اگر به نتیجهٔ قطعی نرسیدند راه را برای رسیدن به نتیجهٔ مهمتری گشودند.

شگفت آن‌که این نتیجهٔ مهمتر بوسیلهٔ یک نفر و در یک‌جا عاید نشد بلکه سه دانشمند در سه کشور، گاوس[۲]، پادشاه ریاضیاتِ قرن نوزدهم در آلمان، بویئی[۳] در مجارستان و لباچفسکی در روسیه تقریباً همزمان به‌کشف، یا بهتر بگویم به ابداع، هندسه‌هایی دست یافتند که گاوس برآنها نام هندسهٔ نااقلیدسی نهاد. اولین کسی که به آن دست یافت گاوس بود اما آنچه را یافته بود فاش نکرد. وی در حدود بیست سالگی، یعنی از زمانی که در زندگی راه خود را یافت و به دنبال ریاضیات رفت، دفتر یادداشت روزانه‌ای[۴] ترتیب داد که تا آخر عمر مطالبی، و نامه‌هایی را که می‌نوشت یا دریافت می‌کرد، در آن ثبت و نگاهداری می‌نمود. این دفتر که بسیاری از آنچه در آن است به صورت اختصار و رمز است چهل سال پس از درگذشت صاحبش به‌محافل علمی راه یافت ودانسته شد که عجب گنجینه‌ای است! معلوم شد که گاوس‌گذشته از هندسهٔ نااقلیدسی به‌استقبال بسیار مطالب رفته بود که بعد دیگران، بی‌خبر از کار او، کشف کردند و به نامشان ثبت شد. اما گاوس به هیچ یک از آنان دربارهٔ تقدم خود مطلبی نگفت و کسی به این رازها پی‌نبرد مگر از روی دفتر یادداشتهای روزانهٔ او.

همدورهٔ تحصیلی گاوس در دانشگاه گوتینگن مردی مجار بود به نام ولفگانگ، یا فورگوش، بویئی[۵]، که به ریاضیات دل بست و در آن پیش‌رفت وکتابی پرطمطراق‌نوشت. پسر او یانوس‌یا یوهان[۶]،که به‌راه پدر رفته بود، به هندسهٔ نااقلیدسی رسید و به پدر خود اطلاع داد. طرفه آن‌که

پدر به‌وی هشدار داد که در انتشار کشف خود شتاب کند، به دو دلیل: یکی این که اندیشه‌ها بآسانی نشر می‌یابد و چه بسا که کسی فکر را برباید و زودتر به نام خود منتشرکند؛ دوم این که، سابقه هم دارد، چند نفر بی ارتباط با یکدیگر مطلبی را کشف کنند و برنده کسی خواهد شد که زودتر کشف را برملا سازد.

این پیش‌بینی درست بود و برنده لباچفسکی شد که در این کتاب با او آشنا می شوید. با وجود این لباچفسکی در زمان حیات خود شاهد رواج کشفی‌که کرده بود نشد. چهل و پنج سال گذشت تا ریشارد بالتزر در اصول ریاضیات[7] به کار لباچفسکی اشاره کرد و هوئل[8] را تشویق کرد که آن را به فرانسوی برگرداند.

اگر دورهٔ گاوس ـ بویئی ـ لباچفسکی را دورهٔ اول بدانیم دورهٔ دوم از آن فریدریش برنهارد ریمان[9] است که هندسهٔ اقلیدسی نوع دیگری را وضع کرد.

در دورهٔ سوم از کیلی[10] و کلاین[11] و کلیفرد[12] می‌توان نام بردکه کارهای‌گذشته را به‌کمال رسانیدند و هندسهٔ نااقلیدسی را به‌صورت ابزار ریاضی مهمی درآوردند. کلاین سه نوع هندسهٔ: اقلیدسی، لباچفسکئی (بوئی) و ریمانی، را بترتیب هندسه‌های سهموی و هذلولوی و بیضوی نامید (به این دلیل که در فرضهای آن سه نوع هندسه خط راست بترتیب یک نقطهٔ بی‌نهایت دور دارد (سهموی)، دو نقطهٔ بی‌نهایت دور (هذلولوی)، یا نقطهٔ بی‌نهایت دور ندارد (بیضوی).

از ریاضیدانان دیگری هم که در این راه کارکردند و به پیشرفت آن کمک نمودند می‌توان نام برد، مانندواختر[13]، شوایکارت[14]، تاورینوس[15] و جز آنان.

این کتاب با سبک ساده و آسانی که دارد درکاخ با شکوه هندسهٔ نااقلیدسی را به روی شما می‌گشاید. پیش از این کتابی که آقای پرویز شهریاری ترجمه کرده بود در دسترس بود. بعد از آن، تا جائی که من

اطلاع دارم، کتاب مفصلتری منتشر خواهد شد که آقای محمد هادی شفیعیها ترجمه‌کرده است. و بعد، اگر عمری باقی باشد، کتاب متنوعتری که اکنون در دست ترجمه دارم در دسترس پژوهندگان قرار خواهد گرفت.

شهریور ماه ۱۳۵۷

1. James Newman, *World of Mathematics*
2. Karl Friedrich Gauss 3. Bolyai
4. Notizen-Journal 5. Wolfgang Bolyai (Bolyai Farkas)
6. Johann Bolyai (Bolyai Janos)
7. Richard Baltzer, *Elemente der Mathematik*
8. Houel 9. Friedrich Bernhard Riemann
10. Kayley 11. Klein
12. Clifford 13. Wachter
14. Schweikart 15. Taurinus

یادداشت مؤلف

هدف این‌کتاب آشنا ساختن خواننده است با اصول هندسهٔ نااقلیدسی لباچفسکی. لباچفسکی ریاضیدان نامی روس متفکری برجسته بود که جهان یکی از بزرگترین اکتشافهای ریاضی، یعنی ساختن یک دستگاه ابتکاری هندسی متمایز از هندسهٔ اقلیدسی، را به او مدیون است. خواننده ترجمهٔ کوتاهی از احوال لباچفسکی را در بخش ۱ خواهد یافت.

هندسه‌های اقلیدسی و لباچفسکئی در قسمتهای بسیار مشترک هستند، و تفاوتشان درتعریفها و قضیه‌ها و دستورهای‌مربوط به اصل موضوع توازی است. برای روشن‌ساختن دلایل‌این تفاوتها باید ببینیم‌که مفهومهای اساسی هندسه چگونه نشأت‌کردند وگسترش یافتند. این‌کار را دربخش ۲ می‌کنیم.

علاوه بر آشنایی به هندسهٔ مسطحه و مثلثات دبیرستانی، خواندن این کتاب‌نیازمند است به وقوف برتبدیلی به نام انعکاس،که‌مهمترین قسمتهایش در بخش ۳ آمده‌اند. امیدواریم که خواننده توفیق یابدکه اصول آن را بی‌زحمت زیاد دریابد و از آنها بهره برگیرد، زیرا که این قسمت، و نیز بخش ۱۰، نقشی بسیار مهم، هر چند کمکی، در آنچه عرضه می‌کنیم خواهند داشت.

۱

سخنی کوتاه دربارهٔ زندگی و کار ن. ا. لباچفسکی

نیکلای ایوانویچ لباچفسکی در ۱۱ آذر ۱/۲۳۵۱ دسامبر ۱۷۹۲ (= ۲۰ نوامبر در تقویم قدیم ژولیانی) چشم به جهان گشود. پدرش یک کارمند کم حقوق کشوری بود. در اوایل زندگی مراقبت نیکلای و دو برادرش بر عهدهٔ مادرشان، که زنی فعال و هوشیار بود، قرار گرفت و او با همهٔ امکانات بسیار محقری که داشت آنان را به دبیرستان غازان فرستاد.

نیکلای از ۱۸۰۲/۲۳۶۱ تا ۲۳۶۶ در دبیرستان و از ۲۳۶۶ تا ۲۳۷۰ در دانشگاه غازان تحصیل کرد. چون استعداد ریاضی درخشانی داشت دوره‌ها را با توفیق پشت سر گذاشت و پس از دانش آموختگی در دانشگاه باقی ماند تا خود را برای تدریس آماده کند؛ و این مقام در ۲۳۷۵ به وی تفویض شد.

تدریس لباچفسکی اثری ژرف بر خاطر دانشجویان‌گذاشت. درسهای او به سبب روشنی و کمالی که در روش او بود زبانزد بودند. معرفت او از شاخه‌های مختلف علوم وسیع و متنوع بود، و این وضع او را قادر می‌ساخت که نه تنها ریاضی بیاموزد بلکه مکانیک و فیزیک و نجوم و شناخت زمین و مساحی نیز تعلیم دهد.

لباچفسکی در۱۸۲۷/۲۳۸۶ به ریاست دانشگاه غازان برگزیده شد،

و نزدیک به بیست سال در آن سمت باقی بود. از آنجا که مدیری مستعد و نیرومند بود و بینشی نیک در هدفهای آموزش عالی داشت توانست دانشگاه کازان را به مقام یک مؤسسهٔ نمونهٔ آموزش عالی زمان خود برساند. به ابتکار او دانشگاه شروع کرد به انتشار نشریه‌های علمی. در زمان ریاست او ساختمانهای دانشگاه گسترش بسیار یافتند و رصدخانه‌ای در آن تأسیس شد.

اما آنچه شهرت جهانی را نصیب لباچفسکی ساخت کار علمی او بود. وی با آفرینش هندسه‌ای نااقلیدسی که اکنون به نام وی[1] موسوم است اسم خود را مخلد ساخت.

در ۲۱ بهمن ۲۳/۲۳۸۴ (۱۱) فوریهٔ ۱۸۲۶ در جلسهٔ گروه علوم ریاضی وفیزیک دانشگاه غازان، لباچفسکی مقاله‌ای خواند که در آن به هندسهٔ نااقلیدسی که کشف کرده بود پرداخت. اولین مطلبی که در بارهٔ اصول او چاپ شد یادداشتهایش زیر عنوان در بارهٔ مبانی هندسه بود که در ۲۳۸۷ و ۲۳۸۸ در مجلهٔ پیک غازان انتشار یافتند.

بیشتر همعصران لباچفسکی کشف او را نفهمیدند و کارهایی که در بارهٔ هندسه کرده بود، هم در روسیه و هم در خارج ازآن کشور، دشمنانه پذیرفته شدند. اندیشه‌هایش بسیار بی‌باکانه بودند و بیشتر از حد ازمفهومهایی که آن روز بر علوم حکومت می‌کردند دورمی‌شدند، تا جایی که مدتی دراز بایست تا مقبولیت عام پیدا کنند. و این کار نشد مگر بعد از مردن او.

لباچفسکی، با وجود حمله‌های انتقادکنندگان، در درستی نتایجی که بدست آورده بود تردیدی به خاطر راه نداد، و با نیرو و تصمیمی که جبلی او بود به گسترش دستگاه هندسی خود پرداخت، و تعدادی نوشته‌های

۱. نام دیگر این هندسه «هندسهٔ هذلولوی» است، از آن روی که در آن خط راست، مانند هذلولی در هندسهٔ اقلیدسی، دو نقطهٔ بی‌نهایت دور دارد. (← بخش ۴).

مربوط به مسائل هندسهٔ نااقلیدسی منتشر ساخت. آخرین آنها را، که با مرگ او فاصلهٔ چندانی نداشت، مجبور شدکه با دست کسی دیگر بنویسد، زیرا که کوری، که در سالهای آخر عمر گریبانگیر او شده بود، او را از نوشتن باز می‌داشت.

فعالیت علمی لباچفسکی منحصر به پژوهش وی در هندسه نبود: به پیشرفتهای جبر و حساب جامع و فاضل هم کمکهای اساسی چند کرد؛ روش تخمین جوابهای معادلات جبری که از او است بسیار ظریف و مؤثر است.

دیدهای فلسفی او آشکارا تمایلی مادی گرایانه داشت. به عقیدهٔ او تجربه و عمل قابل اعتمادترین وسایل برای آزمودن نتایج نظری بودند. آموزش ریاضیات را به صورتی می‌پسندید که پدیده‌های واقعی نهفته در عملهای ریاضی را برملا سازد.

در ۱۸۴۶/۲۴۰۵ لباچفسکی از وظایفی که در دانشگاه بر عهده داشت معاف گردید و به معاونت هیأت امنای ناحیهٔ فرهنگی غازان منصوب شد.

لباچفسکی در ۴ اسفند ۲۴/۲۴۱۴ (۱۲) فوریهٔ ۱۸۵۶ درگذشت. در ۱۸۹۶/۲۴۴۵ بنای یادبودی برای او درغازان ساخته شد.

۲

در منشأ اصلهای موضوع و نقش آنها در هندسه

برای روشن ساختن نقش اصلهای موضوع، به‌ترسیم طرحی کلی از مهمترین گامهایی که از زمانهای باستانی در راه هندسه برداشته شده‌اند می‌پردازیم.

زادگاه هندسه کشورهای خاور باستانی هستند. درآن کشورها هزارها سال پیش قاعده‌های عملی مهمی برای اندازه گرفتن زاویه‌ها، و مساحت بعضی شکلها، و حجم ساده‌ترین جسمها وضع شده بود تا نیازمندیهای مردم آنها را ازحیث مساحی ومعماری وستاره شناسی برآورد. این قاعده‌ها از راه تجربی بدست‌آمده بودند و ظاهراً باالفاظ، و دهان به‌دهان، اشاعه می‌یافتند: درکهن‌ترین کتابهایی که به‌دست ما رسیده‌اند به‌کاربرد قاعده‌های هندسی برمی‌خوریم، اما ازتلاش برای بیان منظم آنها نشانه‌ای نمی‌یابیم.

با گذشت زمان دایرهٔ چیزهایی که برایشان معرفت هندسی مورد احتیاج بود گسترش یافت و این نیاز احساس شد که قاعده‌ها به‌کلی‌ترین صورت خود به‌نظم درآیند. و این موجب شد که هندسه از موضوعهای عینی به مفهومهای ذهنی انتقال یابد. مثلاً قاعده‌ای که برای تعیین مساحت قطعه زمینی بکار می‌رفت در مورد اندازه گرفتن پهنهٔ قالیئی، یا سطح دیواری: هم سودمند افتاد؛ و سرانجام به یک مفهوم ذهنی، یعنی مربع

مستطیل، رسید.

و بدین‌سان دستگاهی از معرفت تشکیل شد، و برآن نام هندسه نهادند. هندسه در روزهای اول زندگی خود دانشی تجربی بود، بدین معنی که همهٔ نتیجه‌ها مستقیماً از تجربه عاید می‌شدند.

گسترش هندسه وقتی راه تازه‌ای پیش گرفت که معلوم شد برخی از احکام آن نیازی به پشتوانهٔ تجربی ندارند، زیرا که می‌شد آنها را از حکمهای دیگری، با تکیه بر قانونهای منطق، نتیجه گرفت. پس حکمهای هندسی به دو دسته تقسیم شدند: آنهایی که از راه تجربه استقرار می‌یافتند (و بعداً اصلهای موضوع خوانده شدند)، و آنهایی‌که بر مبنای اصلهای موضوع به کمک منطق قابل اثبات بودند (قضایا).

از آنجایی که پشتوانهٔ منطقی، که نیازی به وسایل ویژه یا اندازه‌گیریهای خسته کننده ندارد، از جنبهٔ فنی خیلی ساده‌تر از روشهای تجربی است طبیعی است که دانشمندان باستانی با این مسأله روبرو شده باشند که چگونه تعداد حکمهای نوع اول، یعنی اصلهای موضوع، را به حداقل برسانند تا هندسه سبکتر گردد و بار اصلی آن بردوش استدلالهای منطقی گذاشته شود. معلوم شد که این هدف دست یافتنی است، زیرا که هندسه از همهٔ خاصیتهای اجسام مجرد شده بود جز بسط دادن، که مطلبی اساسی بود، اما چندان آسان، که می‌شد با کمک قانونهای منطق همهٔ رابطه‌های هندسی را از معدود محدودی مقدمات، یا اصلهای موضوع، نتیجه گرفت.

بدین‌ترتیب هندسه از یک دانش تجربی به یک علم قیاسی[1] تبدیل شد و نمایش اصل موضوعی امروزی را پیدا کرد.

نخستین کتابی که به‌ما رسیده و درآن حکمهای اصلی هندسه به‌نحوی اصولی عرضه شده‌اند کتاب اصول[2] اقلیدس است که در حدود ۳۰۰

---

۱. قیاس بیرون آوردن نتیجه است. علمی را قیاسی گویند که احکام جدیدآن از احکامی که جلوتر گفته شده‌اند به‌کمك منطق نتیجه شوند.

۲. Elements

سال پیش از میلاد مسیح نوشته شد. ساختمان این کتاب بدین‌گونه است: بعد از تعریفها و اصلهای موضوع نوبت به‌قضایا و حل مسائل می‌رسد، و هرقضیهٔ تازه‌برپایهٔ اصلهای موضوع و قضایائی که جلوتر ثابت شده‌اند اثبات می‌گردد. اصلهای موضوع ثابت نشده‌اند بلکه فقط به‌بیان‌آنها اکتفا شده است.

دوهزار سالی اصول بر دانشمندان تسلط بی‌منازع داشت. اما نکته‌ای در آن بود که موجه به‌نظر نمی‌رسید، وآن اصل موضوع توازی بود، بدین شرح :

اگر خطی که بر دوخط دیگر فرود می‌آید چنان باشد که دو زاویهٔ داخلی که در یك طرف آن هستند وقتی که با هم گرفته شوند از دو قائمه کمتر باشند،آن دوخط راست اگر به‌طوز نامتناهی امتداد یابند درآن طرفی که زاویه‌هایش با هم از دو قائمه کمتراند یکدیگر را قطع می‌کنند.[1]

در اعتبار اصل موضوع توازی اقلیدس تردیدی حاصل نشد. اما دودلی در جای دیگر بود: آیا شمردن‌آن جزء اصلهای موضوع کار درستی است؟ آیا نمی‌توان آن را براساس اصل موضوعهای دیگر خود کتاب اثبات کرد و به‌جرگهٔ قضایا انتقالش داد؟

درآغاز تلاش برای اثبات اصل موضوع توازی از این فکر، که جلوتر به‌آن اشاره شد، سرچشمه می‌گرفت که تعداد حکمهای هندسی که نیاز به‌پشتوانهٔ تجربی داشتند هرچه ممکن باشد کمتر شود. با گذشت زمان وضع صورتی دیگر یافت: منشأ تجربی اصل‌های موضوع به‌دست

---

۱. درکتابهای درسی به‌جای اصل موضوع توازی اقلیدس این گزاره، که همارزآن است،گذاشته شده است: از نقطه‌ای واقع در خارج خطی فقط یك خط می‌توان موازی باآن رسم کرد.

در هندسهٔ اقلیدسی، یا هر هندسهٔ دیگر، دو اصل را وقتی همارز گویند که نتایج حاصل ازآن هردو یکی باشند، مشروط به‌آن که اصلهای دیگر معتبر بمانند.

فراموشی سپرده شد و درآنها چنان نگریستند که گویی از بدیهیانند و به هیچ آزمایش یا تجربه‌ای بستگی ندارند[1]. با این دید یقین حاصل شد که اصل موضوع توازی، که به سبب پیچیدگی مطلب بدیهی شمردنش دشوار است در حقیقت اصل موضوع نیست و باید بتوان آن را ثابت کرد. اما تلاشهای متعدد دراین راه نتیجهٔ مثبتی ببارنیاوردند؛ اصل موضوع توازی، مانند گنجی که طلسم شده باشد، از گشودن راز خود به‌روی پژوهشگران سرباز می‌زد. کوشش برای اثبات‌آن، که اندیشهٔ چند نسل ازدانشمندان را مصروف داشت، به‌قیمت تعبیر اندیشه‌گرایانهٔ جوهر وذات اصلهای‌موضوع، به‌شکست انجامید.

نادرست‌ترین نمونهٔ اثبات اصل موضوع توازی اقلیدس این بود که به‌جای‌آن گزاره‌ای هم‌ارزآن قرار داده شود، مانند: مایلی و عمودی که بریك خط راست رسم شوند یکدیگر را قطع می‌کنند؛ یا، مثلثی شبیه به مثلث دیگر وجود دارد که باآن مساوی نیست؛ یا، مکان هندسی نقاطی که دریك طرف پاره‌خطی باشند و از دو سر آن به‌یك فاصله باشند خطی است راست؛ یا، هرسه نقطه یا بر یك خط قرار دارند یا بر یك دایره. بعد ثابت خواهیم کرد که اگر اصل موضوع توازی اقلیدس درست نباشد همه این‌قضیه‌ها نادرست هستند. درنتیجه اگر هریک ازآنها را اصل موضوعی فرض کنیم بدان وسیله اعتبار اصل موضوع توازی را می‌پذیریم. یعنی فرض می‌کنیم که‌آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم درست بوده است.

لباچفسکی در پژوهشی که در نظریهٔ موازیهاآغاز کرد راه دیگری پیش گرفت. چون کار را با تلاشهایی برای اثبات اصل موضوع توازی شروع‌کرد متوجه گردید که یکی ازآنها به‌نتایجی بکلی غیرمنتظر می‌رسد.

---

۱. می‌دانیم که‌کوران مادرزادی که از راه جراحی بینایی می‌یابند تا مدتی بعد ازبینا شدن مکعب را ازکره تمیز نمی‌دهند مگر این‌که به‌آنها دست بزنند. این‌دلیلی است بر نیاز به‌تجربه برای دریافت صحیح شکلهای هندسی، که بی‌وجودآن مفهومهای هندسی صورتپذیر نمی‌توانند شد.

این تلاش اثبات با برهان خلف بود و برپایهٔ دلیلی که می‌آید قرار داشت: اگر اصل موضوع توازی اقلیدس نتیجهٔ اصل موضوعهای دیگر او باشد و اگر با وجود این فرض شود که از نقطهٔ واقع در خارج خطی که باآن خط در یك صفحه باشد دست کم دو خط متمایز بتوان رسم کرد که‌آن خط را قطع نکنند، این فرض زود یا دیر، و به صورت نتیجه‌ای نزدیک یا دور، به‌تناقض برخواهد خورد. اما لباچفسکی با بررسی بیشتر از بیشتر نتیجه‌های تازه‌ای که براین فرض مترتب می‌شدند یقین حاصل کرد که، هرقدر هم ازدیدگاه هندسهٔ اقلیدسی به‌نظر باطل نماید، این نتایج دستگاه سازگاری از قضایائی تشکیل می‌دهند که می توانند مبنای یک فرضیهٔ تازهٔ علمی باشند.

بدین ترتیب اساس هندسهٔ نااقلیدسی پی‌ریزی شد.[1] اصل موضوع توازی‌آن با اصل اقلیدسی فرق دارد وبه‌صورتی‌است که بالاتر بیان‌کردیم و ازاین پس به‌آن با عنوان اصل موضوع توازی لباچفسکی اشاره‌می‌کنیم.

اما هنوز روشن نبود که‌آیا با اطمینان خاطر می‌توان حکم کرد که از مجموعهٔ نامتناهی نتیجه‌هایی که از اصل موضوع توازی لباچفسکی برمی‌آیند حتی یکی نیست که به‌تناقض بربخورد. لباچفسکی راهی برای حل این مسأله اندیشید و به‌این نکته اشاره کرد که اگر هندسه‌ای که او کشف کرده است سازگار باشد باید حسابی کردن آن امکان‌پذیر باشد، یعنی بتوان حل هرمسألهٔ هندسی را منجر ساخت به‌محاسبهٔ‌آن، و تبدیل‌آن به‌تحلیلی با استفاده ازدستورهای مثلثات هذلولوی که خود او ابداع کرده بود. بعداً دانشمندان دیگر دلایل متقن برسازگار بودن هندسهٔ او یافتند.

پژوهشهای لباچفسکی در قلمرو هندسهٔ هذلولوی خیلی دامنه‌دار بود و اصول هندسه و مثلثات و هندسهٔ تحلیلی و هندسهٔ تفاضلی (دیفرانسیل)را دربر می‌گرفت. وی، با استفاده از هندسهٔ خودش، بیشتر از ۲۰۰ دستور

۱. پس از آن معلوم شد که علاوه بر هندسهٔ لباچفسکئی هندسه‌های نااقلیدسی متعدد دیگر می‌توان ساخت.

جدید برای محاسبهٔ انتگرال معین نتیجه گرفت.

کشف لباچفسکی در نظر معاصران او، حتی شاگردانش، سخت بیمعنی و در حکم سرپیچی گستاخانه از قواعد منطق و ذوق سلیم بود.[1] این گونه برخورد با اندیشه‌های بزرگی که مفهومهایی را که در ردیف مقدسات قرار گرفته‌اند از بیخ و بن برمی‌اندازند، مایهٔ شگفتی نیست. فرضیهٔ خورشید-مرکزی کپرنیکوس هم، که منکر آنچه بدیهی می‌نمود، و مدعی آنچه قابل تصور بود، بود با چنین پیشواز دشمنانه‌ای روبرو شد. درکی بسیار عمیق لازم بود تا وجود دوگونه هندسهٔ مختلف‌را بتوان دریافت. اکنون به‌عرضه کردن بعضی دلیلها که به‌آسانترین صورت فهمیده می‌شوند می‌پردازیم.

در قسمت هندسهٔ مسطحهٔ دبیرستان صفحه‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد که از فضای اطراف خود مستقل است؛ به بیان دیگر هندسهٔ مسطحه عبارت است از هندسهٔ صفحهٔ اقلیدسی. هندسهٔ بعضی سطوح منحنی نیز کاملاً معروف هستند، مانند هندسهٔ کروی که بسیار در اخترشناسی و شاخه‌های دیگری از علم بکار برده می‌شود.

در هر علمی ساده‌ترین مفهومها مهمترین مفهومها هستند. در هندسهٔ اقلیدسی این مفهومها عبارتند از مفهومهای نقطه و خط و صفحه. این

---

۱. البته نمی‌توان بی‌محابا معاصران لباچفسکی را به‌ناتوانی درک کشف او متصف کرد؛ بسیاری از آنان ابراز عقیده‌ای نکردند، شاید از این روی که قلمرو علائق علمی آنان محیط تفحصات لباچفسکی را در بر نمی‌گرفت. این را هم می‌دانیم که ریاضیدان بزرگ آلمانی کارل گاوس (Karl Gauss) و هندسه‌دان برجستهٔ مجار یانوش بویوئی (Janos Bolyai)، که بی‌ارتباط با لباچفسکی به‌فکر امکان ساختن هندسه‌ای نااقلیدسی افتادند، اندیشه‌هایی نظیر او داشتند. اما گاوس از بیم آن‌که فکرش را نفهمند و به‌ریشش بخندند چیزی به‌پشتیبانی لباچفسکی منتشر نکرد و بویوئی که دید تتبعات خودش در هندسهٔ نااقلیدسی (که در ۱۸۳۲/۲۳۹۱ انتشار داد) مورد قبول نیافت مطالعات ریاضی راکنار گذاشت. پس لباچفسکی ماند که به‌تنهایی برای به‌کرسی نشاندن حرف حسابش تقلا کند.

اصطلاحات درهندسه‌های نااقلیدسی حفظ شده‌اند، بدین‌صورت‌که(همه‌جا) منظور از «خط راست» خطی است که در روی‌آن کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه را می‌توان اندازه گرفت؛ «صفحه» سطحی است دارای این خاصیت که هرگاه دونقطه از «خط راستی» متعلق به آن سطح باشندآنگاه همهٔ نقاط آن «خط راست» به‌آن سطح تعلق داشته باشند. مثلاً درهندسهٔ کروی‌سطح کره و دایرهٔ بزرگ آن، بترتیب، «صفحه» و«خط راست» شناخته شده‌اند. این‌گونه وضع اصطلاح‌کاملاً بمورد است زیراکه «خط راست» ساده‌ترین خطها، و«صفحه» ساده‌ترین صفحه‌هایی است‌که اولی واجد مهمترین صفت خط و دومی دارای مهمترین صفت صفحهٔ هندسهٔ اقلیدسی باشند.[۱]

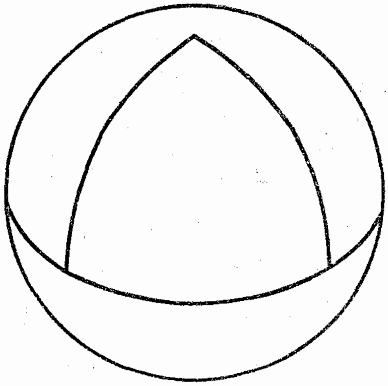
بپردازیم به‌برخی خصایص هندسهٔ کروی. برای مصور ساختن‌آن، آن را بـه صورت هندسهٔ سطح یک کره درنظر مـی‌گیریم. درک این مطلب مشکل‌نیست که دو«خط راست» این هندسه (مثلاً دو نصف‌النهار) یکدیگر را در دو انتهای قطری از کـره قطع می‌کنند. وانگهی مجموع زاویه‌های یک مثلث کروی بزرگتر است از π؛ مثلاً در مثلثی محدود به‌ربـع استوا و دو قوس از دو نصف‌النهار (شکل ۱) هرسه زاویه قائمه‌اند.[۲]

البته در جغرافیا، غیر از کـره، نقشه‌های برسطوح مستوی نیز متداول هستند. این کار بمنزلهٔ‌آن است که از روی نقشه‌های کـره به‌بررسی هندسهٔ کروی پرداخته شود، که کاری است شدنی، مشروط به‌آن کـه معلوم باشد اندازه‌های خطوط واقعی و زاویه‌های واقعی را چگونه مـی‌توان از روی نمایش‌آنها برروی نقشه بدست‌آورد؛ زیرا که دراین نمایشها اندازه‌ها بهم می‌خورند ومیزان بهمخوردگی در سراسر نقشه یکی نیست. مثلاً در روی

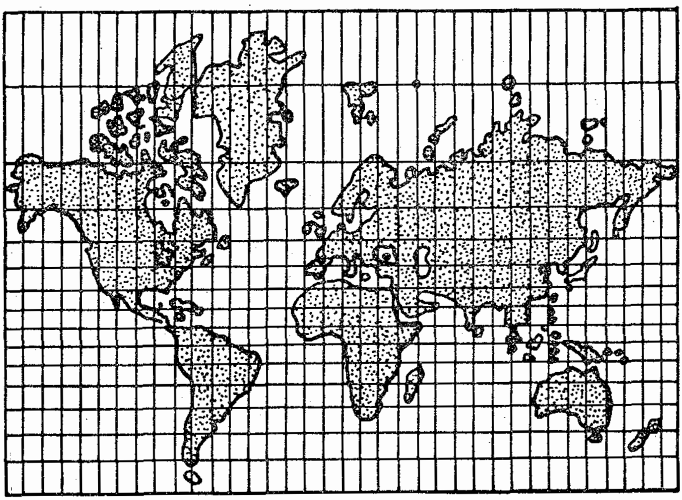
---

۱. باید خاطر نشان کـردکه در هندسه‌های تصویری از مفهوم فاصلهٔ بین دو نقطه اثری نیست. دراین‌گونه هندسه‌ها تعبیر «خط راست» و «صفحه» مورد پیدا نمی‌کند.

۲. تعریف زاویهٔ بین دو منحنی زاویهٔ بین مماسهای بر آنهاست در نقطهٔ تقاطعشان.



شکل ۱



شکل ۲

نقشه‌های کره زمین که به‌قاعدهٔ تصویر مرکاتور[1] رسم شده‌اند تصویرهای نصف‌النهارها خطوط متوازی‌اند (شکل ۲)، و خطوط عمود بر آنها که نمایش مدارها هستند چنانند که پاره خطی که نمایندهٔ °۱ برروی مدار است، بی‌توجه به‌عرض مدار، همه‌جا یکی است، حال‌آن که در حقیقت هرچه عرض مدار بیشتر باشد طول قوس °۱ برروی‌آن کوتاه‌تر است.

چون‌سطح دارای دوبعد است هندسه‌ای که موضوعش مطالعهٔ شکلهای واقع برصفحه است دوبعدی، وخود سطح فضای دوبعدی نامیده می‌شوند. از زمان باستان دوگونه هندسهٔ دوبعدی شناخته شده بود، اقلیدسی (برای صفحه) وکروی. ریاضیدانان به‌وجودهندسهٔ دوبعدی نااقلیدسی، یعنی‌هندسهٔ کروی، وقعی نمی‌گذاشتند؛ فقط به‌این دلیل ساده که کره در هندسهٔ سه‌بعدی اقلیدسی بررسی‌می‌شد. واین وضع موجب شده بود که خواص نااقلیدسی خود کره نادیده گرفته شوند.

براثر پژوهشهای لباچفسکی معلوم شد که نه تنها سطوح با خواص نااقلیدسی قابل تصور هستند بلکه فضاهای سه بعدی نااقلیدسی هم وجود دارند.

وارد کردن مفهوم هندسه‌های سه بعدی نااقلیدسی ممکن است مشکلی ایجاد کند مگر این که به‌این توضیح توجه کنیم: گاهی مناسب است که نتایج بررسی ردهٔ خاصی ازپدیده‌ها را به‌صورت هندسی نمایش‌دهیم.مثلاً معلومات حاصل از نتایج رشد باروری کار کارگران را با منحنی‌ها و نمودارها مجسم می‌سازند. و این نشانهٔ‌آن است که بسیاری از فرایندهای واقعی و حالتهایی را که ارتباط مستقیمی با هندسه ندارند می‌توان بوسیلهٔ شکلهای هندسی نمایان ساخت.

---

۱. گرهارد مرکاتر (Garhard Mercator) (۲۰۷۱ ـ ۲۱۵۳/ ۱۵۱۲ ـ ۱۵۹۴) نقشه‌کش برجستهٔ فلاندری. روش تصویری که او در ۱۵۶۹/۲۱۲۸ پیشنهاد کرد قبول عام یافت و از آن زمان نقشه‌های دریایی با این روش رسم می‌شوند.

اگر نمودار را همچون خطی درصفحهٔ اقلیدسی درنظر بگیریم آشکار می‌شود که شکلهای هندسهٔ اقلیدسی در مثال‌ما بکار رفته‌اند. درحالتهای پیچیده‌تر ممکن است به‌هندسه‌های سه‌بعدی، وحتی چند بعدی، اقلیدسی و نااقلیدسی توسل جوئیم. اما ازآنچه گفتیم نمی‌توان نتیجه گرفت که همهٔ این هندسه‌ها نسبت‌ها را بتفصیل توصیف می‌کنند؛ نظریه‌هایی وجود دارند که اصطلاحات هندسی را در بیان مطلب خود بکار می‌برند و، بطور کلی، به‌این اصطلاحات معنی‌هایی اسناد می‌شود که با مفهومهای فضائی ارتباطی ندارند. بدین‌ترتیب با افزودن زمان به عنوان بعد چهارم به سه بعد فضای حقیقی مفهوم فضای چهار بعدی را وارد می‌کنیم‌که درآن یک فاصلهٔ زمانی معین مانند «پاره خطی راست» در نظر گرفته می‌شود. در بیشتر حالتها این شیوهٔ برخورد فقط ظاهری از تجسم می آفریند، با وجود این تا حدی به آسان شدن درک مفهوم پدیده‌هایی که با این روش مورد مطالعه قرار می‌گیرند کمک می‌کند.

بدین‌ترتیب ساختن هندسه‌های نااقلیدسی از این حیث قابل توجیه است که اطلاق آنها به‌چیزهایی که وجود عینی دارند امکان‌پذیر است. نفس این واقعیت که این نتایج با اصطلاحات هندسی بیان می‌شوند نتیجه‌ای حقیقی نیست: تغییردادن این طرز بیان هندسی به‌صورتی که با خواص شیء و پدیده‌های مورد بحث مطابقت پیدا کنند کار دشواری بنظر نمی‌رسد.

این را هم بگوییم که در ریاضیات عملی وقتی که نظریه‌ای چیزهای مختلفی راکه‌تابع قوانین واحد ریاضی هستند ازجنبهٔ کیفی توصیف‌می‌کند قراردادن بعضی مفهومها به‌جای بعضی دیگر کاری‌است متداول و معمول.

هندسه‌های سه بعدی درخور دقت خاص هستند. با صرف نظر از کاربردهای دیگری که این هندسه‌ها ممکن است داشته باشند در آنها باید به صورت فرضیه‌هایی نگریست که مدعی توصیف ویژگیهای فضائی حقیقی‌اند. این که کدام از این هندسه‌ها بیشتر با واقعیت مطابقت دارد

مسأله‌ای است که آن را فقط می‌توان با آزمونهای تجربی حل کرد.

اما باید واقعیتی را خاطر نشان سازیم که برای آنچه بعداً عرضه می‌کنیم دارای اهمیتی است. نقشه‌ای از یک صفحهٔ لباچفسکئی را می‌توان بر روی یک صفحهٔ اقلیدسی کشید، و آن هم به بیشتر از یک راه، درست همانطور که درمورد کره عمل می‌کنیم. ما باید تحلیل چنین نقشه‌ای را پایهٔ مطالعه‌ای قرار دهیم که در اینجا از هندسهٔ هذلولوی می‌شود.

هندسهٔ لباچفسکئی در مواردی‌که اینک خواهیم گفت قبول عام یافت. در ۱۸۶۸/۲۴۲۷ هندسه‌دان ایتالیایی اجنیو بلترامی[1] (۲۳۹۴ – ۱۸۳۵/۲۴۵۹ – ۱۹۰۰) کشف کرد که در فضای اقلیدسی سطحی وجود دارد که دارای ویژگیهای صفحهٔ لباچفسکئی، یا بهتر بگوییم (هرگاه کوتاه‌ترین خط بر روی سطوح را بمنزلهٔ «خط راست» بپذیریم) قسمتی از صفحهٔ لباچفسکئی، است. این کشف، که دیری نکشید که منجر به ترسیم نقشه‌های گوناگون بر صفحهٔ لباچفسکئی شد، دانشمندان را به درستی اندیشه‌های هندسه‌دان روسی معتقد ساخت، و موجب نهضتی برای بررسی دقیقتر کار او شد، و پژوهشهای متعدد در زمینهٔ هندسه‌های نااقلیدسی را برانگیخت.

کشف هندسه‌های نااقلیدسی مسأله‌ای بسیار دشوار برای علم فیزیک مطرح ساخت و آن توضیح این مسأله بود که آیا فضای واقعی فیزیکی، چنان که قبلاً پنداشته شده بود، اقلیدسی است، و اگر نیست به کدام نوع از فضاهای نااقلیدسی تعلق دارد[2]. برای یافتن جواب این مسأله لازم است که از راه تجربه به آزمون اعتبار اصول موضوع آن پرداخت، زیرا که آشکار است که با بهترشدن ابزارهای اندازه‌گیری، اعتماد به معلوماتی

---

۱. Eugenio Beltrami

۲. وقتی‌که این مسأله مورد توجه قرار می‌گیرد از امکان یکنواخت نبودن فضای واقعی غافل نباید ماند، یعنی فضائی که نهاد هندسی آن در نقاط مختلف متفاوت باشد.

که از راه تجربه فراهم‌آیند بیشتر می‌شود و با بالارفتن این اعتماد امکان نفوذ در جزئیاتی که از این پیش از دقت پژوهندگان گریخته‌اند افزایش می‌یابد.

بدین ترتیب لباچفسکی هندسه را به تعبیر مادی اصول موضوع آن باز گرداند، یعنی که این اصول احکامی هستند که خواص هندسی فضا را به صورتی که آدمی بر اثر تجربه درکشان می‌کند، به رشتهٔ قاعده می‌کشند.

ما هنوز نمی‌توانیم مسألهٔ نهاد هندسی فضای حقیقی فیزیکی را بکلی حل شده انگاریم. با وجود این می‌توانیم خاطر نشان سازیم که در نظریهٔ جدید نسبیت، براساس داده‌های متعدد، چنین بنظر می‌رسد که فضای حقیقی نااقلیدسی است و خواص هندسی آن از خواص فضای لباچفسکئی پیچیده‌ترند. یکی از بزرگترین ضربتهایی که بر اعتقاد به اقلیدسی بودن نهاد فضای حقیقی وارد آمد براثر کشف این قانون فیزیکی بود که ممکن نیست سرعتی بالاتر از سرعت نور وجود داشته باشد.

حالا می‌توانیم به پرسشی که غالباً به گوش می‌رسد جواب بگوئیم، یعنی به‌این که‌کدام یک از دو هندسهٔ اقلیدسی یا لباچفسکئی درست است.

چنین پرسشی در مورد هندسه‌های دو بعدی اقلیدسی و کروی مطرح نمی‌شود، هر دو به وضوح درست هستند، و هر یک محیطی خاص برای کار برد خود دارد. نه دستورهای هندسهٔ کروی را می‌توان برای شکلهای مسطح بکار برد و نه دستورهای هندسهٔ دو بعدی اقلیدسی را برشکلهای واقع بر روی کره بکار بست. همین حکم بر هندسه‌های مختلف سه بعدی روا است: هر یک ازآنها که ازجنبهٔ منطقی سازگار است در حوزهٔ خاصی، که الزاماً سرشت هندسی ندارد، بکار می‌رود؛ لیکن اگر به آن یک سرشت کلی بدهیم اعتبار خود را از دست می‌دهد.

اما در مورد نهاد هندسی فضای حقیقی، مسأله، به صورتی که مشخص کرده‌ایم، در قلمرو فیزیک قرار می‌گیرد و حل آن به وسیلهٔ هندسهٔ محض میسر نیست. از جمله، صفت مشخص‌کنندهٔ آن این است که هیچ هندسه‌ای

روابط فضائی را با دقت مطلق دربر نمی‌گیرد؛ مثلاً ساخت ملکولی ماده وجود اجسامی با ابعاد قابل درک با لمس را که واجد خواص هندسی یک کرهٔ آرمانی باشند نفی می‌کند. ازاین روی کاربرد قاعده‌های هندسی در حل مسائل عینی بناچار نتایج تقریبی ببار می‌آورد. بدین ترتیب مفهومی که از نهاد هندسی فضای حقیقی داریم به این عقیده، که از جنبهٔ علمی تأیید شده است، تحلیل می‌رود که گاهی هندسه‌ای روابط واقعی فضائی‌را بهتر از هندسه‌های دیگر توصیف می‌کند.

با این که نظریهٔ نسبیت از دستورهای هندسهٔ نااقلیدسی استفاده می‌کند، نتیجه نباید گرفت که از هندسهٔ اقلیدسی سلب اعتبار شود، چنان‌که از اختر شماری و کیمیاگری و علوم کاذبی مانند آنها شد. هر دو هندسه ابزار پژوهش در صورتهای فضائی‌اند، اما هندسهٔ نااقلیدسی پژوهشهای دقیقتری را میسر می‌سازد در حالی که هندسهٔ اقلیدسی برای حل بیشتر مسایل مهم عملی با درجهٔ خاصی از دقت بکار می‌رود؛ و چون در عین‌حال سادگی زیاد صفت برجستهٔ آن است کاربرد وسیع آن برای همیشه تضمین می‌شود.

برای به پایان رساندن این زمینهٔ مختصر اندیشه‌های تازه‌ای را که لباچفسکی در گسترش هندسه وارد عرصه کرده است خاطر نشان می‌سازیم.

خدمات علمی این متفکر بزرگ منحصر به‌پرده برداشتن از راز هزار سالهٔ اصل موضوع توازی نبود؛ بلکه کار او از اهمیت خیلی بیشتری برخوردار است.

لباچفسکی، با گذاشتن یکی از اصل موضوعهای اقلیدس در بوتهٔ انتقاد تحلیلی، زمینه‌را برای مطالعهٔ مجدد بعضی از احکام مقدماتی دستگاه اقلیدسی فراهم ساخت و این کار به گسترش اصول دقیق علمی برای ساختمان اصل موضوعی هندسه و شاخه‌های دیگر ریاضی رهنمون گردید.

کشف هندسهٔ هذلولوی به‌وسیلهٔ لباچفسکی علم صورتهای فضائی را از چارچوب تنگ دستگاه اقلیدسی‌رهانید. هندسهٔ او درنظریهٔ انتگرالهای

معین و سایر محیطهای ریاضی کاربردی مستقیم یافت.

لباچفسکی پرداختن بـه مسائلی را آغاز کـرد کـه در هیأت پیشین ریاضیات ظهور نکرده بودند، از جمله مسألهٔ نهـاد هندسی فضای حقیقی. اگر هندسهٔ لباچفسکئی نبود نظریهٔ نسبیت، که یکـی از عظیمترین کارهای فیزیک نوین‌است، امکان گسترش نمی‌یافت. برمبنای پژوهشهای لباچفسکی دانشمندان نظریه‌ای به وجود آوردند که تحلیل فرایندهایی را که دردرون هستهٔ اتم روی می دهند میسر سازد.

در پایان، اهمیت عرفانی اندیشه‌های این ریـاضیدان بزرگ روس را خـاطرنشان می‌سـازیم. پیش از لباچفسکی هندسه قرنها زیرسیطرهٔ نظرهای آرمان گرایانه (ایـده‌آلیست)، کـه از افـلاطون فیلسوف بزرگ یـونانی سرچشمه می‌گرفتند، بود. افلاطون با اسناد سرشتی‌مطلق به اصل موضوعهای اقلیدس منکر منشأ تجربی آنها شده بـود. لباچفسکی با قاطعیت این بینش را درهم کوفت و هندسه را به وضعی مادی باز گردانید.

۳
انعکاس

فرض‌کنید که قاعده‌ای وجود داشته باشد که رسیدن از شکلی به شکل دیگـری را میسر سازد، بقسمی کـه با مشخص بودن اولـی دومی کاملاً معین بـاشد، و بعکس. این گـونه رسیدن از شکلی به شکل دیگر را یک تبدیل، یا دگرگونی، هندسی گویند. متداولترین تبدیلهـای هندسی عبارتند ازانتقال، تجانس، دوران، تصویر و انعکاس. کاربرد انعکاس در ریاضیات بسیار است، مثلاً به عنوان روشی برای مسائل ساختمانهای هندسی، یا در نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط، یا در بررسی نقشه‌هـا برروی یک صفحهٔ لباچفسکئی.

دراین بخش به‌تعریف انعکاس و مفهومهای وابسته به‌آن می‌پردازیم؛ و به تعدادی از خواص بنیـادی آن توجه می‌کنیم.

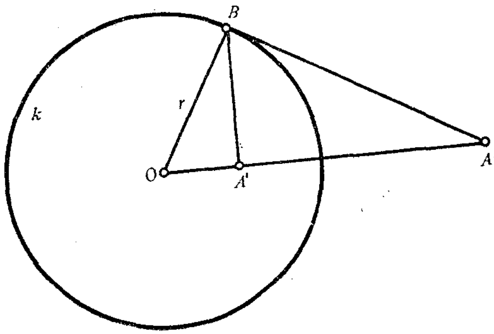
دایرهٔ k به شعاع r و مرکز O را در صفحهٔ α، و نقطهٔ A را که با O یکی نباشد، در نظر می‌گیریم. نقطـهٔ A' را بر نیمخط OA چنان اختیـار می‌کنیم که حـاصل‌ضرب اندازه‌های قطعات OA و OA' مساوی بـاشد با مربع اندازهٔ شعاع دایرهٔ k:

$$OA \cdot OA' = r^2 \qquad (1)$$

توافق می‌کنیم که A و A' را قرینه نسبت به دایرهٔ k بنامیم.

اگر یکی از دو نقطـهٔ A و A' در بیرون دایرهٔ k قـرار داشته باشد دیگری در درون دایره می‌افتد، و بعکس؛ مثلاً، با توجه به شرط (۱)، از نامساوی $OA > r$ نتیجه می‌گیریم $OA' < r$. اما اگـر A یا A' روی دایره واقع شود دیگری برآن منطبق می‌گردد.

به شکل ۳، که در آن AB بر دایرهٔ k ممـاس است و BA' بر OA



شکل ۳

عمود است، توجه کنید. چون OA' تصویرضلع OA در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB بر وتر OA است

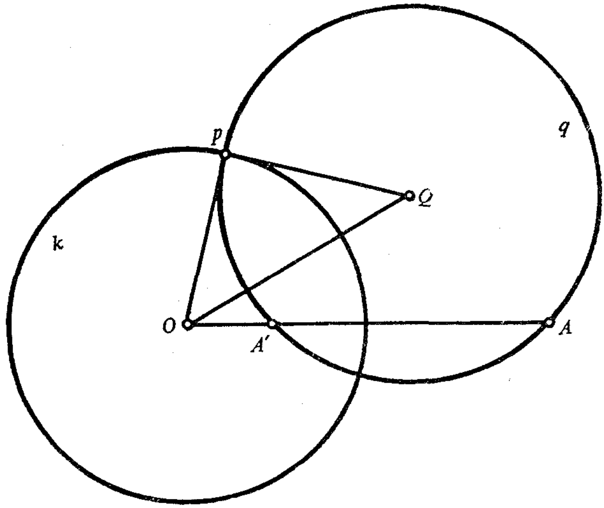
$$OA \cdot OA' = OB^{۲} = r^{۲}$$

پس دو نقطهٔ A و A' نسبت به دایرهٔ k قرینه‌اند. در اینجـا البته وسیله‌ای است برای آن که اگر A را داشته باشیم A' را، و اگر A' را داشته باشیم A را، بدست آوریم.

قضیهٔ ۱. هرگاه دایره‌ای چون q بر دو نقطه A و A' که نسبت به‌دایرهٔ مفروض k قرینه‌اند بگذرد، آنگاه دو دایرهٔ k و q بر یکدیگر عمودند.

دو دایره را برهم عمود گویند وقتی که به زاویهٔ قائمه تقاطـع کنند،

یعنی وقتی که مماسهای برآنها در نقطهٔ تقاطع دوایر برهم عمود باشند؛ یا شعاعهای آنها در آن نقطــه برهم عمود باشند (چیزی که در حکــم عمود بودن مماسها است).



شکل ۴

P را یک نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ k و q می‌انگاریم (شکل ۴). چون OP شعاع دایرهٔ k است رابطهٔ (۱) به صورت $OA \cdot OA' = OP^{۲}$ در می‌آید. از سوی دیگر حاصلضرب دو پاره خط OA و OA' مساوی است با مربع مماسی که از O بر q رسم شود. بنابراین OP مماس است بر q . در نتیجه شعاعهای OP و QPی این دو دایره برهم عمودند، یعنی دو دایره متعامدند.

توجه داشته باشید که هر دایره که بر دو نقطهٔ متمایــز قرینه نسبت به یک خط راست بگذرد آن خط را به زاویــه‌های قائمــه قطــع می‌کند. شباهتی که بین این خاصیت و واقعیتی کــه به مــوجب قضیهٔ ۱ ثابت شد

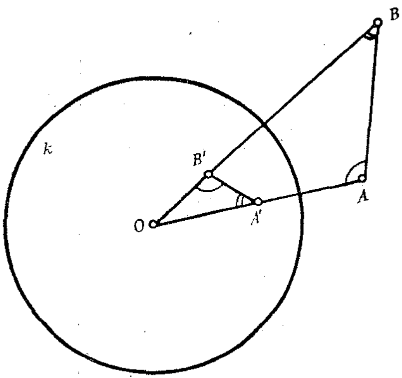
وجود دارد اطلاق اصطلاح «قرینه» را بر دو نقطه که نسبت به دایرهٔ مفروضی به وضعی که گفتیم قرار گرفته باشند موجب گردیده است؛ و نیز این را که هر دایره‌ای که بر آن دو نقطه بگذرد برآن دایره عمود است.

قضیهٔ ۲. هرگاه دو دایرهٔ k و q برهم عمود باشند هر خطی که بر O، مرکز k، بگذرد و q را قطع کند دو نقطهٔ تقاطعش با q نسبت به دایرهٔ k قرینه‌اند.

دو نقطه‌ای را که در آنها خط با q تقاطع می‌کند A و A'، و یکی ازنقاط برخورد دو دایره k و q را P، می‌نامیم (شکل۴). چون دو دایره برهم عمودند OP بر q مماس است، بنابراین $OA \cdot OA' = OP^2$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که A و A' نسبت به k قرینه‌اند.

قضیهٔ ۳. هرگاه مثلث OAB، که در آن O مرکز دایره‌ای مانند k است، داده شده باشد و A' و B' قرینه‌های A و B نسبت به k باشند، آنگاه

$$\angle OBA = \angle OA'B' \text{ و } \angle OAB = \angle OB'A'$$



شکل ۵

شکل ۵ را در نظر بگیرید. از رابطهٔ $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$،

که نتیجهٔ شرط (۱) است، نتیجه می‌گیریم $OA/OB' = OB/OA'$. پس دو مثلث OAB و $OB'A'$، کـه در یک زاویـه هـم مشترکنـد، متشابه‌اند. بنابراین نتیجه می‌گیریم کـه قضیه صحیح است.

خاطر نشان می‌کنیم که می‌تـوان دایره‌ای بر چهـار ضلعی $ABB'A'$ محیط کرد، زیرا که $\angle A'AB + \angle A'B'B = \pi$. چنان که از قضیهٔ ۱ برمی‌آید این دایره بر k عمود است.

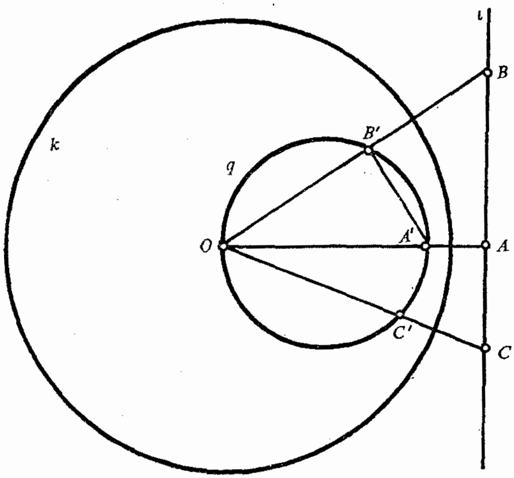
اکنون در صفحهٔ α تبدیلی بدین‌گونه در نظر می‌گیریم که هر دو نقطهٔ این‌صفحه که نسبت به k قرینه باشند جای خود را با یکدیگر عوض‌کنند. این تبدیل را انعکاس، دایرهٔ k را دایـرهٔ انعکاس، و O مـرکـز آن را قطب انعکاس می‌نامیم. هرگاه انعکاس نسبت به دایرهٔ k شکلی مانند F را به F' تبدیل‌کند می‌گوئیم F' قرینهٔ F، و F قرینهٔ F'، است نسبت به k.

توجـه کنید که هیچ نقطـه‌ای قرینهٔ قطب انعکاس نسبت بـه دایـرهٔ انعکاس نیست.

بآسانی دیده می‌شود کـه نقطه‌های بیرون دایره کـه به دایره محدود می‌شوند به نقطه‌هایی در درون دایره، جز مرکز دایـره، تبدیل می‌گردند؛ و بعکس. نقطه‌های واقـع بر دایرهٔ انعکـاس به خودشان تبدیل می‌شوند؛ هر خط که بر قطب انعکاس O بگذرد به خودش تبدیل می‌شود اما دراین فرایند نقطهٔ O را از دست می‌دهد.

قضیهٔ ۴. هر خطی کـه بر قطب انعکاس نگذرد در تبدیل بـه وسیلهٔ انعکاس به دایره‌ای تبدیل می‌شود که بر قطب انعکاس می‌گذرد.

A را پای عمودی فرض کنید که از قطب انعکاس بر خـط راست l فرود آید؛ B را نقطهٔ دلخـواهی از l و A' و B' را بترتیب قـرینه‌های A و B نسبت به دایرهٔ انعکاس k فـرض کنید (شکل۶). دایـرهٔ q را به قطر OA' رسم می‌کنیم. به موجب قضیهٔ ۳، $\angle OB'A' = \angle OAB$، پس $\angle OB'A' = \pi/۲$؛ بنابراین نقطهٔ B' واقع است بر دایـرهٔ q. از سوی



شکل ۶

دیگر نقطهٔ دلخواه C' را، متمایز از O، بر دایرهٔ q اختیار کنید؛ خط OC' خط l را در نقطه‌ای مانند C قطع می‌کند که، بطوری‌که هم‌اکنون خواهیم دید، با این انعکاس به C' تبدیل می‌شود. قضیه بدین ترتیب اثبات شده است اما باید به یاد داشته باشیم که خط l بدین ترتیب به دایرهٔ q، بی‌نقطهٔ O، تبدیل شده است.

توجه داشته باشید که مرکز دایرهٔ q بر روی عمودی است که از O بر l فرود آمده است.

اگر خط l با دایرهٔ انعکاس k نقطهٔ مشترکی نداشته باشد، آنگاه q در درون k می‌افتد.

اگر l بر k در نقطه‌ای مماس باشد q هم بر k در آن نقطه مماس است.

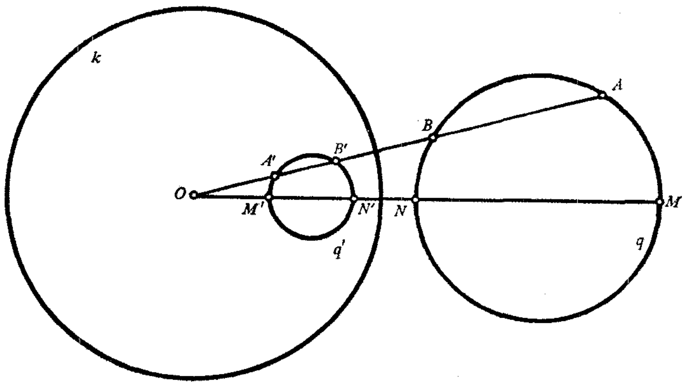
هرگاه l و k تقاطع کنند q بر نقطه‌های تقاطعشان می‌گذرد.

قضیهٔ ۵. انعکاس دایره‌ای را که بر قطب انعکاس بگذرد به خطی تبدیل می‌کند که بر قطب انعکاس نمی‌گذرد.

O (قطب انعکاس) و A و B سه نقطهٔ متمایز بر دایرهٔ q در نظر بگیرید و A' و B' را قرینه‌های A و B نسبت به دایرهٔ انعکاس فرض کنید. به موجب قضیهٔ ۴ خط $A'B'$ تبدیل می‌شود به دایره‌ای که بر O و A و B بگذرد، یعنی به دایرهٔ q؛ بنابراین نتیجه می‌شود که q تبدیل شده است به خط $A'B'$.

قضیهٔ ۶. انعکاس دایره‌ای را که بر قطب انعکاس نگذرد به دایرهٔ دیگری تبدیل می‌کند که آن هم بر قطب انعکاس نمی‌گذرد.

دایرهٔ k به مرکز O و شعاع r را دایرهٔ انعکاس انگارید. q را دایره‌ای فرض کنید که بر O نگذرد (شکل ۷). اکنون نقطهٔ دلخواهی



شکل ۷

مانند A بر q اختیار کنید و نقطهٔ دیگر تلاقی خط OA با q را B و قرینه‌های A و B را نسبت به k بترتیب A' و B' بنامید. آنگاه

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^{2}$$

و در نتیجه
$$OA/OB' = OB/OA' \qquad (۲)$$
و
$$OA \cdot OB \cdot OA' \cdot OB' = r^۴$$

به موجب قضیهٔ معروفی که در هندسهٔ مقدماتی هست وقتی که A برروی q تغییر مکان دهد مقدار حاصل ضرب

$$OA \cdot OB = g$$

تغییر نمی‌کند. بنابراین g مقدار ثابتی است که وقتی O بیرون q باشد مثبت است، و وقتی که O در داخل دایره باشد منفی است (زیرا که در حالت اخیر پاره خطهای OA و OB در جهت مخالف یکدیگراند). از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم $OA' \cdot OB' = (r^۴/g)$، بنابراین

$$\frac{OA \cdot OB}{OB' \cdot OA'} = \frac{g^۲}{r^۴}$$

و چون رابطهٔ (۲) را به میان آوریم:

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{g}{r^۲}$$

(علامت درست انتخاب شده است، زیرا که OB و OB' همجهت‌اند.) از آخرین رابطه برمی‌آید که دو شکلی‌که به وسیلهٔ A و B' ترسیم می‌شوند مجانس یکدیگرند. پس قضیه به ثبوت رسید: B' دایره‌ای ترسیم می‌کند (که q' می‌نامیمش).

قطب انعکاس O مرکز تجانس دایره‌های q و q' است،که متخارج‌اند اگر $g > ۰$ و متداخل‌اند هرگاه $g < ۰$. درحالت اول O بیرون q و q' است و در حالت دوم در درون آنها.

هرگاه q در نقطه‌ای بر k مماس باشد q' نیز در همان نقطه بر آن مماس است.

اگر q و k تقاطع کنند q' بر نقاط تقاطعشان می‌گذرد.

در صورتی که q بر k عمود باشد در انعکاس نسبت به k به خودش تبدیل می‌شود (q' بر q منطبق است)، و این نتیجهٔ قضیهٔ ۲ است.

هرگاه خط بین مرکزهای دو دایرهٔ k و q دایرهٔ q را در M و N قطع کند (و M' و N' قرینه‌های M و N نسبت به k باشند) پاره خط $M'N'$ قطر دایرهٔ q' (شکل۷) خواهد بود. از این نکته می‌توان برای ساختن q' استفاده کرد.

خاطر نشان می‌سازیم که مرکزهای دو دایرهٔ q و q' نسبت به k قرینه نیستند.

قضیهٔ ۷. نقاط برخورد دو دایرهٔ p و q عمود بر دایرهٔ k، نسبت به k قرینه‌اند.

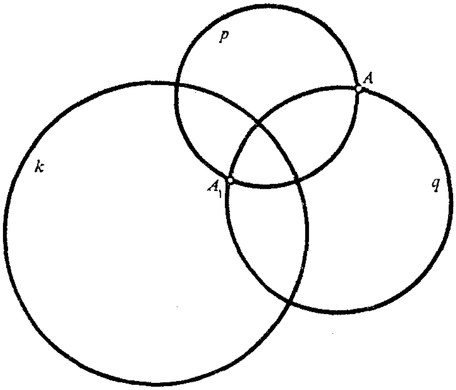
قضیه واضح است، زیرا که هر یک از دو دایره p و q با انعکاس نسبت به k به خودش تبدیل می‌شود؛ پس دو نقطهٔ تقاطع آنها جا عوض می‌کنند (شکل۸).

قضیهٔ ۸. هرگاه دو نقطهٔ M و M' که نسبت به یک دایرهٔ k قرینه‌اند بر روی دو منحنی m و m' باشند که آنها نیز نسبت به k قرینه‌اند، آنگاه مماسهای بر m و m' در M و M' یا بر MM' عموداند یا با آن مثلث متساوی‌الساقینی می‌سازند که MM' قاعدهٔ آن است.

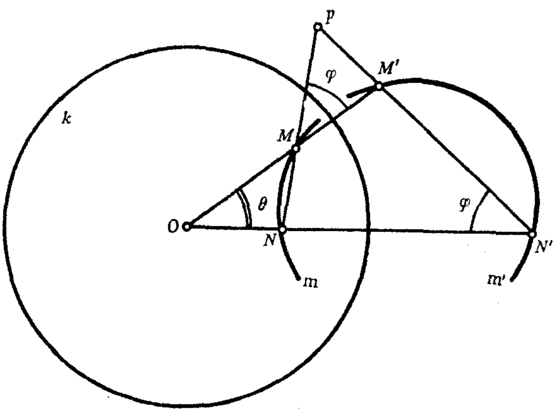
بر m نقطه‌ای چون N، جدا از M، اختیار کنید و N' قرینهٔ آن نسبت به k را بدست آورید (شکل ۹). واضح است که N' بر m' قرار دارد. خطهای MM' و NN' بر O، مرکز k، می‌گذرند. خطهای MN و $M'N'$ را رسم کنید و نقطهٔ تقاطع آنها را P بنامید. اگر

$$\angle OMN = \varphi \text{ و } \angle MON = \theta،$$

آنگاه، به موجب قضیهٔ ۳، $\angle ON'M' = \varphi$. بنابراین درمثلث $MM'P$



شکل ۸



شکل ۹

$$\angle M' = \varphi + \theta \text{ و } \angle M = \varphi$$

نقطهٔ M را ثابت نگاه می‌داریم و θ را به صفر میل می‌دهیم. در وضع حدی قاطعهای MN و $M'N'$ به مماسهای بر m و m' در M و M' تبدیل می‌شوند و مثلث $MM'P$ متساوی‌الساقین خواهد شد. در حقیقت

$$\underset{\theta\to 0}{\text{حد}}\,(\varphi+\theta) = \underset{\theta\to 0}{\text{حد}}\,\varphi + \underset{\theta\to 0}{\text{حد}}\,\theta = \underset{\theta\to 0}{\text{حد}}\,\varphi$$

قضیهٔ ۹. انعکاس اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

دو خط m و n را که در A تقاطع می‌کنند درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم انعکاس نسبت به دایرهٔ k دو خط m و n و نقطهٔ A را به دو خط m' و n' و نقطهٔ A' تبدیل کند. ازقضیهٔ ۸ برمی‌آیدکه زاویهٔ بین مماسهای بر m و n در A مساوی است با زاویهٔ بین مماسهای بر m' و n' در A'. هم آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبدیلی که زاویه‌ها را تغییر ندهد همدیس[1] نامیده می‌شود. از آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که انعکاس تبدیلی است همدیس.

---

1. Conformal

۴

نقشهٔ صفحهٔ لباچفسکئی

صفحه‌ای چون ω، و خطی چون u بر آن فرض کنید که ω را به دو نیمصفحهٔ τ و τ' تقسیم کند. فرض کنید که نیمصفحهٔ τ نقشهٔ فضای دو بعدی H باشد. بر روی خطی از H طولی مانند s در نظرمی‌گیریم وطول نگار آن بر نقشه را σ می‌نامیم؛ دو مقدار s و σ را، بترتیب، طولهای هذلولوی و اقلیدسی نام می‌گذاریم.

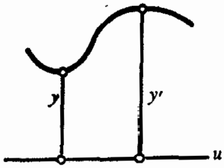
اصول زیرین برای اندازه‌گرفتن طولها روی نقشهٔ ما بکارخواهند رفت:

۱م. طول هذلولوی پاره خط MN که با خط u موازی باشد و در فاصلهٔ y از آن قرار گرفته شده باشد مساوی MN/y، یعنی نسبت طول اقلیدسی آن به فاصلهٔ اقلیدسیش از u، است.

۲ م. هرگاه σ طول اقلیدسی و s طول هذلولوی قوسی از یک منحنی (یا پاره‌خطی ناموازی با u) باشند و y و y'، بترتیب، کوچکترین و بزرگترین فاصله‌های اقلیدسی نقطه‌های آن از u باشند، و هرگاه $y \neq 0$ (شکل ۱۰)، آنگاه این نامساویها برقرارند

$$\frac{\sigma}{y'} < s < \frac{\sigma}{y}$$

بعد ثابت خواهیم کرد که فضای H که نقشه‌اش دو خاصیت یاد شده

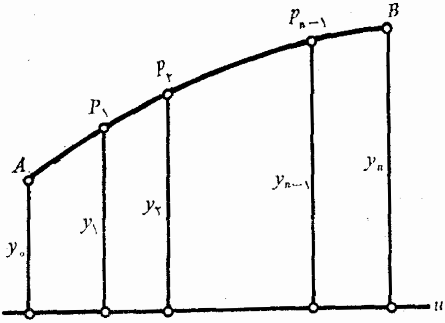


شکل ۱۰

را داشته باشند یک صفحهٔ لباچفسکئی است.

براساس اصلهای ۱م و ۲م تعیین روشی کلی برای اندازه گرفتن طولهای هذلولوی دشوار نیست.

نخست به یافتن s طول هذلولوی قوسی چون AB که دارای خواص ذیل است می‌پردازیم: اگر نقطه‌ای روی این منحنی از A به طرف B حرکت کند فاصله‌اش از خط u به فزونی گراید؛ فاصلهٔ نقطهٔ A از u مساوی صفر نباشد؛ قوس AB هموار باشد، یعنی تیزی نداشته باشد (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

بر روی قوس AB، در حالی که از A به سوی B پیش می‌رویم نقطه‌های

$$A, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, B \qquad (*)$$

را نشان می‌کنیم. فاصله‌های اقلیدسی نقطه‌های (*) از خط راست u، طولهای اقلیدسی قوسهای AP_1، P_1P_2، ...، $P_{n-1}B$ پاره‌های قوس AB، و طولهای اقلیدسی وترهای این قوسها، را بترتیب

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$$
$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$$
$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$$

می‌نامیم. این جمعها را بجا می‌آوریم:

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{y_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_n}$$

$$\Sigma' = \frac{\sigma_1}{y_0} + \frac{\sigma_2}{y_1} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1}}$$

$$Z = \frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \dots + \frac{\zeta_n}{y_n}$$

بموجب اصل ۲م بدست می‌آید

$$\Sigma < s < \Sigma'$$

زیرا که با توجه به شرط اولی $y_n > \dots > y_1 > y_0 > 0$.
اینک به در نظر گرفتن تفاضل $\Sigma' - \Sigma$ می‌پردازیم:

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{\sigma_1}{y_0 y_1}(y_1 - y_0) + \frac{\sigma_2}{y_1 y_2}(y_2 - y_1) + \dots$$
$$+ \frac{\sigma_n}{y_{n-1} y_n}(y_n - y_{n-1})$$

طرف راست این رابطه بزرگ می‌شود اگر به جای هر یک از

مقدارهای σ_1، σ_2، . . . ، σ_n بزرگترین مقدار آنها را (که σ' نامیده شده است)، و به جای هر مخرج y_0^2 قرار دهیم. در نتیجه

$$\Sigma' - \Sigma < \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \cdots$$
$$+ y_n - y_{n-1}) = \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_n - y_0)$$

اگر σ' به سوی صفر بگراید، تفاضل $\Sigma - \Sigma'$ نیز به سمت صفر میل می‌کند. مجموع Z را به صورت

$$Z = \frac{\sigma_1}{y_1} \cdot \frac{\zeta_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} \cdot \frac{\zeta_2}{\sigma_2} + \cdots + \frac{\sigma_n}{x_n} \cdot \frac{\zeta_n}{\sigma_n}$$

تبدیل می‌کنیم.

چون کهین [1] نسبتهای ζ_1/σ_1، ζ_2/σ_2، . . . ، ζ_n/σ_n را α و مهین [2] آنها را β بنامیم بدست می‌آوریم

$$\alpha\Sigma \leqslant Z \leqslant \beta\Sigma$$

n را می‌گذاریم که به‌طور نامحدود افزایش یابد و در همان حال هر یک از مقدارهای σ_1، σ_2، . . . ، σ_n، و در نتیجه σ'، را به طرف صفر سوق می‌دهیم. در این صورت، همچنان که پیش از این ثابت شد، تفاضل $\Sigma - \Sigma'$ به سمت صفر می‌گراید در حالی که مقدارهای α و β به سمت واحد [3] میل می‌کنند. با توجه به این وضع از رابطه‌های (۳) و (۴) برمی‌آید که هر سه حاصل جمع Σ و Σ' و Z به سوی یک مقدار حد

1. Minimal 2. Maximal

۳. می‌دانیم که (تا جائی که فقط قوسهای هموار را در نظر داریم) نسبت درازای وتر به اندازهٔ قوسی که وتر متعلق به آن است به سوی ۱ می‌گراید وقتی که اندازهٔ قوس میل کند به سمت صفر.

می‌گرایند و این حد برابر است با s طول هذلولوی قوس AB.

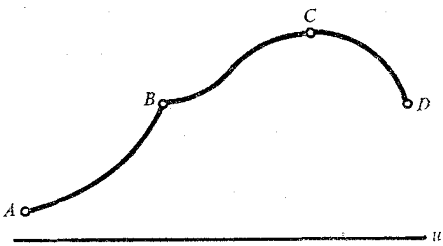
مناسبتر آن است که مجموع Z را بکار بریم زیرا که متضمن طولهای اقلیدسی پاره خطها است نه طول قوسها. بدین سان

$$(\text{۵})\qquad s = \lim Z = \lim\left(\frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \dots + \frac{\zeta_n}{y_n}\right)$$

که در آن رفتن به حد با شرایطی که در بالا گفته شد صورت می‌پذیرد.

خاطر نشان سازیم که در رابطهٔ (۵) می‌توان y_1 را فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه پاره خط AP_1 از خط u، y_2 را مساوی فاصلهٔ هر نقطـهٔ اختیاری پاره خط P_1P_2 از u، و بـه همین قیاس، پـدانیم؛ این وضـع بر مقدار مجموع Z اثر می‌گذارد، اما در حد آن تأثیر نمی‌کند.

هرگاه قـوسی از یک منحنی را بتوان به تعـدادی متناهی قطعاتـی تقسیم کرد که درشرایطی که در بالا دربارهٔ قوس AB گفته شد صدق کنند، آنگاه طول هذلولوی آن مساوی خواهد بود با مجموع طولهای اجزای آن. مثلاً قوس AD را کـه در شکل ۱۲ نشان داده شده است به اجزای AB و BC و CD تقسیم می‌کنیم، امـا می‌توانیم نقاط تقسیم را بـر روی قوس DC از D به سوی C اختیار کنیم.



شکل ۱۲

نقاط نیمصفحهٔ τ را طوری تغییر مکان می‌دهیم که طول هذلولـوی هر قوسی که بر آن جا داشته باشد مساوی باشد با طول هذلولوی همان‌قوس

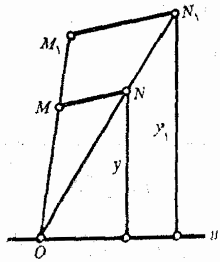
در وضع جدیدش. ما به این گونه تغییر جای نقاط با عنوان حرکت‌هذلولوی اشاره خواهیم کرد، که مفهومی است شبیه به مفهوم حرکت یک صفحهٔ اقلیدسی، مثلاً دوران صفحهٔ اقلیدسی حول یکی از نقاطش به اندازهٔ زاویه‌ای مشخص.

هرگاه حرکت هذلولوی شکلی چون F را به F_1 تبدیل کند شکلهای F و F_1 را هذلولیانه متساوی می‌نامیم. اکنون به ساده‌ترین حرکتهای هذلولوی می‌پردازیم.

(۱) اگر همه نقاط نیمصفحهٔ τ به یک مقدار و در یک جهت موازی با خط u انتقال داده شوند، هر شکل این صفحه به شکلی که هذلولیانه با آن مساوی است تبدیل می‌شود، زیرا که نه بعدهای اقلیدسی آن تغییر کرده‌اند و نه فاصله‌های نقطه‌هایش از u.

از این روی نتیجه می‌گیریم که تغییر مکان اقلیدسی نیمصفحهٔ τ در طول یك خط راست حرکتی هذلولوی است.

(۲) تجانسی را درنظر می‌گیریم که مرکز آن نقطهٔ دلخواه O واقع برخط u باشد وضریب مثبت تجانس پاره‌خط MN را به M_1N_1 تبدیل کند (شکل ۱۳). فاصله‌های دو نقطهٔ N و N_1 از u را به y و y_1 نشان می‌دهیم. به سبب مجانس بودن مثلثهای OMN و OM_1N_1 این رابطه را داریم: $MN/y = M_1N_1/y_1$.



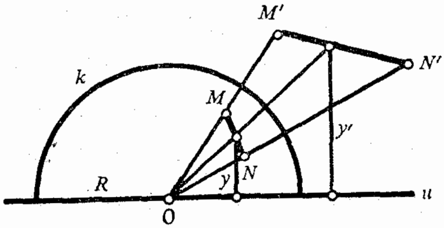
شکل ۱۳

از این عبارت و رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود کــه طـول هذلولوی هیچ قوس هیچ منحنی خاصی براثر این تبدیل تغییر نمی‌کند.

بنا براین، تجانسی به مرکز واقع برخطی راست چـون u و با ضریب تجانس مثبت حرکتی است هذلولوی.

ضریب تجانس مثبت اختیارمی‌شود تا پاره خط M_1N_1 در نیمصفحهٔ τ واقع شود، نه در نیمصفحهٔ τ'.

(۳) انعکاس نسبت به‌یک دایرهٔ k باشعاع اختیاری R را که مرکزش بـریک خط راست u (شکل ۱۴) باشد در نظر می‌گیریم. M و N را دو



شکل ۱۴

نقطه که به‌اندازهٔ کافی به‌هم نزدیک باشند، و M' و N' قرینه‌های آنهارا نسبت به k، اختیار می‌کنیم؛ فاصله‌های نقاط برخورد نیمساز زاویهٔ MON و پاره خطهای MN و $M'N'$ از u را y و y' مـی‌نامیم. چـون مثلثهای OMN و $OM'N'$ متشابهند،

$$\frac{MN}{y}=\frac{M'N'}{y'}$$

از این عبارت و رابطهٔ (۵) نتیجه می‌گیریم کــه طول هذلولوی هر قوس دلخواهی از هرمنحنی با این تبدیل تغییر نمی‌کند.

در نتیجه، انعکاس نسبت به‌دایره‌ای با هر شعاع، که مرکزش برخطی

راست باشد، نیز حرکتی است هذلولوی.

(۴) مثالها را با این حکم ختم می‌کنیم: اثبات این مطلب دشوار نیست که تقارن محوری نسبت به‌محوری که بریك خط راست عمود باشد حرکتی هذلولوی است.

خاطرنشان سازیم که هریک از حرکتهای هذلولوی که دربارهٔاش بحث کردیم تبدیلی است همدیس. این خاصیت در انتقال نیمصفحهٔ τ در طول خط راست u، و تجانس، و تقارن، واضح است. خاصیت همدیسی انعکاس را در بخش ۳ ثابت کردیم.

چون حرکت هذلولوی این خاصیت را دارد که هرشکل را به‌شکلی تبدیل می‌کند که هذلولیانه باآن برابر است، هرتبدیلی که عبارت باشد از دنباله‌ای از چند حرکت هذلولوی همین خاصیت را دارد، به‌نحوی که آن نیز حرکتی است هذلولوی.

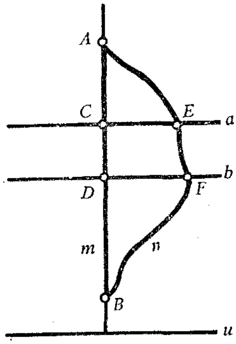
می‌گوئیم، اما ثابت نمی‌کنیم، که هرحرکت هذلولوی را ممکن است به‌صورت دنباله‌ای از تعدادی متناهی از ساده‌ترین حرکتهای هذلولوی، که در بالا مورد بحث واقع شدند، نمایش داد.

حالا می‌پردازیم به‌نشان دادن این که اگر قواعد اندازه‌گیری طولها آنهایی باشندکه دربالاگفته شدند قوانین هندسهٔ لباچفسکئی در نیمصفحهٔ τ تحقق می‌پذیرند.

ما ناگزیر در نیمصفحهٔ τ برخی شکلها را در نظر خواهیم گرفت که با همان صفاتی مشخص می‌شوند که شکلهای متناظرآنها در هندسهٔاقلیدسی دارند، اما شاید ازحیث صورت اختلافی داشته باشند؛ وهمان اصطلاحات هندسی اقلیدسی را، با افزودن صفت هذلولوی، حفظ می‌کنیم. مثلاً خطی را که در طول آن کوتاه‌ترین فاصلهٔ هذلولوی بین نقاط آن اندازه گرفته می‌شود، خط راست هذلولوی می‌نامیم؛ یا مکان هندسی نقاطی را که از نقطهٔ مفروضی به فاصلهٔ هذلولوی ثابتی باشند دایرهٔ هذلولوی می‌خوانیم.

اینک تعیین مـی‌کنیم کـه در نیمصفحهٔ τ کـدام منحنیها خـط راست هذلولوی هستند.

چنان که از دلیلی‌که هم‌اکنون خواهیم گفت برمی‌آید، خطهای راست هذلولوی در درجهٔ اول نیمخط‌های اقلیدسی هستند که برخط u عمودند.



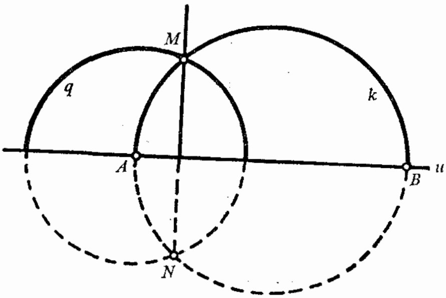
شکل ۱۵

A و B را دونقطهٔ واقع برخطی عمود بر u می‌انگاریم (شکل ۱۵) که با پاره‌خط AmB ونیز با منحنی، یا خط شکستهٔ، AnB به‌یکدیگرمربوط شده‌اند. فرض می‌کنیم دو خط a و b، موازی u و به‌اندازهٔ کافی نزدیک به‌یکدیگر، AmB را در C و D و AnB را در E و F قطع کنند. چـون به‌طور کلی طول اقلیدسی پاره خط CD کوچکتر است ازطول قوس EF، و چون طولهای اقلیدسی‌آنها را مـی‌توان $\frac{CD}{y}$ و $\frac{EF}{y}$ انگاشت، که در آنها y فاصلهٔ D (یا F) از u باشد، پس به‌طور کلی طول هذلولوی CD کوتاه‌تر است از طول EF (این دو طـول هذلولوی فقط وقتـی متساوی مـی‌توانند بود که EF پاره‌ای از یک خط اقلیدسی عمود بـر u باشد؛ واضح است که این شرط همیشه تحقق نمی‌پذیرد، زیرا که در آن صورت

قـوس AnB برخط راست AmB منطبق مـی‌شود). پس طول هذلولوی پاره‌خط AmB کوچکتر است از طول هذلولوی قوس AnB.

ه. ب. ث.

اکنون نشان می‌دهیم که نیمی از یک دایرهٔ اقلیدسی k کـه مـرکزش برخط u باشد خط راستی هذلولوی است.



شکل ۱۶

فرض‌کنید دایرهٔ k خط u را در A و B قطع‌کند (شکل۱۶). دایره‌ای چون q به مرکز A رسم کنید وآن را دایرهٔ انعکاس انگارید. فرض کنید k و q در M و N تقاطع کنند. دایرهٔ k، که برقطب‌انعکاس می‌گذرد، بوسیلهٔ انعکاس نسبت بـه q به‌خط راست MN تبدیل مـی‌شود (← بخش ۳). چـون انعکاس حـرکتی هذلولوی است، و MN عمود است برu، نتیجه مـی‌گیریم کـه نیمدایرهٔ k بوسیلهٔ حـرکت هـذلولوی به‌یک خط راست هذلولوی تبدیل شده است. پس نیمدایره هـم یک خط راست هذلولوی است.

بدین‌ترتیب خطهای راست هذلولوی نیمصفحهٔ τ بوسیلهٔ نیمخطهای اقلیدسی عمود برخط راست u، و نیمدایره‌های اقلیدسی که مرکزشان بر u است، نمایش داده می‌شوند. بعد از این، با توجه به‌اصل مـوضوع یکم،

خواهیم دید که این دوشکل تنها خطهای راست هذلولوی هستند که ممکن است وجود داشته باشند.

از نقطهٔ M واقع بر u و در نیمصفحهٔ τ عمودی براین خط اخراج کنید (شکل ۱۷)، ونقطهٔ A را برآن اختیارنمائید، ونقطه‌های A_1وA_2وA_3،... را بر AM چنان بیابید که

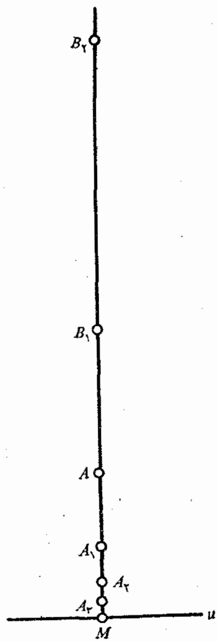
$$A_1M = AA_1 ، A_2M = A_1A_2 ، A_3M = A_2A_3 ، \ldots$$

به‌بیانی دیگر، A_1 وسط AM، A_2 وسط A_1M، A_3 وسط A_2M،.. باشند. تجانسی را که مرکزش در M و ضریبش $\frac{1}{2}$ باشد در نظر می‌گیریم . این تبدیل یک حرکت هذلولوی است که نقطه‌های A و A_1 و A_2 و . . . را، بترتیب، به‌نقطه‌های A_1 و A_2 و A_3 و . . . تبدیل می‌کند. نتیجه‌آن که طولهای هذلولوی AA_1 و A_1A_2 و A_2A_3 و . . . همه با هم برابرند. پس شکلی که ساختیم عبارت از این است که پاره خطهای AA_1 و A_1A_2 و A_2A_3 و . . . را که طولهایشان هذلولیانه برابرند از نقطهٔ A در پی هم برخط راست AM قرار داده‌ایم، و از ترسیمی که کرده‌ایم پیداست که هرقدرهم تعداد قطعات زیاد شوند هیچگاه به M نتوان رسید. نتیجه‌آن که M یک نقطهٔ بی‌نهایت دوربر خط هذلولوی AM است. چون M نقطهٔ دلخواهی از u است به‌این نتیجه می‌رسیم که همهٔ نقطه های خط u نقطه‌های بی‌نهایت دور نیمصفحهٔ τ هستند . فرایند به‌دنبال هم قراردادن پاره خطهای هذلولیانه متساوی AB_1، B_1B_2، B_2B_3، . . . برخط راست هذلولوی AM (شکل ۱۷) را می‌توان در امتدادی مخالف آن امتداد که بررویش عمل کردیم انجام داد. از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که نقطه‌ای از خط AM که به‌معنی اقلیدسی کلمه بی‌نهایت دور است در همان حال نقطه‌ای بی نهایت دور از خط راست هذلولوی AM است.

هرنقطهٔ خط راست AM، به‌استثنای دونقطه‌ای که در بالا تعیین‌شدند،

در فاصلهٔ هذلولوی متناهی از A قرار دارند، زیرا که به‌ازای مقدار بسیار بزرگ متناهی از عدد صحیح مثبت n نقطهٔ مورد نظر بـرامتداد قطعهٔ AA_n یا برامتداد AB_n قرار می‌گیرد.

بنابراین خط راست هذلولوی AM، کـه در حکم هـر خط راست هذلولوی است، دارای دو، و فقط دو، نقطهٔ بی‌نهایت دور است.



شکل ۱۷

هرگاه خط‌راست هذلولوی به‌شکل یک نیمدایرهٔ اقلیدسی که مرکزش بر u است نمایش داده شود دو نقطهٔ بـرخورد این نیمدایره با u دو نقطهٔ

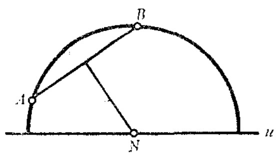
بی‌نهایت دورآن خط خواهند بود.

خاطرنشان سازیم که خط راست اقلیدسی فقط یک نقطهٔ بی‌نهایت دور دارد، و این همان نقطهٔ مشترک خط با خطهای موازی‌آن است.

اکنون بآسانی دیده خواهد شدکه همهٔ اصلهای موضوع‌هندسهٔ مسطحهٔ لباچفسکئی در نیمصفحهٔ τ معتبرند. ما فقط به تحلیل دو اصل موضوع می‌پردازیم.

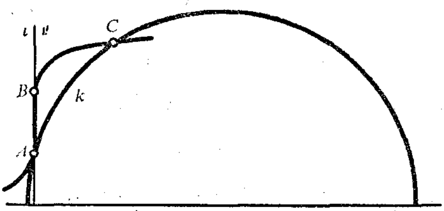
اصل موضوع ۱. بر هر دو نقطهٔ متمایز یك، و فقط یك، خط راست هذلولوی می‌توان گذراند.

هرگاه دو نقطهٔ مفروض A و B برخطی اقلیدسی واقع باشند که بر u عمود است همان خط خط هذلولوی مطلوب است؛ اگر نباشند بر روی u نقطه‌ای چون O بدست می‌آوریم‌که از A و B به‌یک فاصله باشد. نیمدایرهٔ اقلیدسی به مرکز O و شعاع NA (شکل ۱۸) خط راست هذلولوی



شکل ۱۸

مطلوب‌است. برای نشان دادن‌این که ممکن نیست دوخط راست هذلولوی مانند l و l' بردونقطه A و B بگذارند کافی است فرض شود که A و B برروی یک عمود اقلیدسی بر خط u قرار دارند (شکل ۱۹)، زیرا که



شکل ۱۹

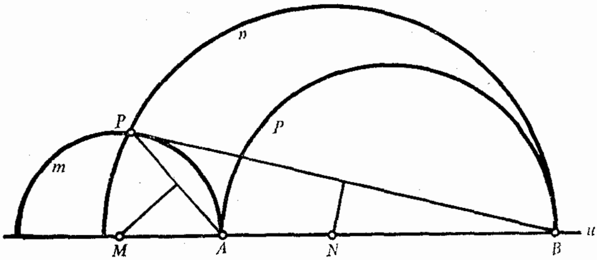
هر حالت دیگری را می‌توان با حرکت هذلولولی مناسبی به این حالت تبدیل کرد. برای این گونه‌آرایش A و B کوتاه‌ترین فاصلهٔ هذلولوی بین آنها آن فاصله‌ای است که بر امتداد خط راست اقلیدسی l است و درنتیجه l' و l روی پاره‌خط AB برهم منطبقند. حالا فرض می‌کنیم که نقطه‌ای چون C که بر l' قرار دارد بر l واقع نباشد و بر l' نقطهٔ B بین A و C قرار بگیرد. در این صورت قوس AC از یک نیمدایرهٔ اقلیدسی k، که مرکزش روی u است، جزئی است از یک خط راست هذلولوی که در پاره‌خط AC بر l منطبق نیست؛ اما هم‌اکنون دیدیم که چنین کاری شدنی نیست؛ پس l و l' همه‌جا برهم منطبق‌اند.

پس نتیجه می‌شود که خط راست هذلولوی نیست مگر نیمخط های اقلیدسی عمود بر u و نیمدایره‌های اقلیدسی که مرکزشان روی u است، تنها یک خط راست هذلولوی بر هردونقطه می‌گذرد و آن یکی از این دوگونه است.

اصل موضوع ۲. از هر نقطهٔ P که برخط راست هذلولوی p واقع باشد دو خط راست هذلولوی می‌توان موازی p کشید.

دو خط راست هذلولوی را متوازی گویند اگر یک نقطهٔ بی‌نهایت دور مشترک داشته باشند. بخصوص خطهای راست هذلولوی که به‌صورت خطهای اقلیدسی عمود بر u داده شده باشند متوازی‌اند؛ نقطهٔ بی‌نهایت دور مشترک بین آنها در نیمصفحهٔ τ با همان نقطه در صفحه اقلیدسی ω یکی است.

نقطه‌های بی‌نهایت دورخط راست هذلولوی p (شکل ۲۰) را A و B می‌نامیم و بر P و A یک نیمدایرهٔ اقلیدسی m به‌مرکز M واقع بر u، و بر P و B نیمدایرهٔاقلیدسی دیگر n به‌مرکز N واقع بر u را می‌گذرانیم. دو نیمدایرهٔ اقلیدسی m و n خطهای راست هذلولوی مطلوبند که با خط راست هذلولوی p در دو امتداد مختلف آن موازی‌اند، m در امتداد B



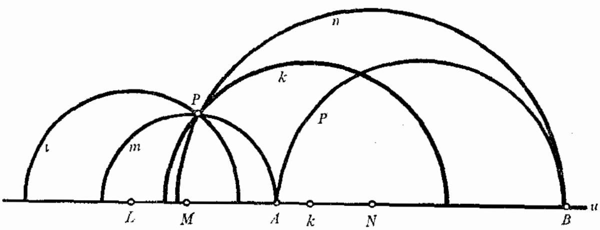
شکل ۲۰

به A و n در امتداد A به B

سه نوع خط راست هذلولوی بر نقطهٔ P می‌گذرند: (۱) خط راست p را قطع می‌کنند؛ (۲) با p موازی‌اند؛ (۳) نه p را قطع می‌کنند و نه با آن موازی هستند.

تعدادی نامتناهی خط راست هذلولوی از نوع (۱) وجود دارند؛ و نیز تعدادی نامتناهی از نوع (۳)؛ اما فقط دو خط از نوع (۲)

برای ساختن یک خط راست هذلولوی از نوع (۱) نقطه‌ای عادی ودلخواه مانند K بر پاره‌خط MN را اختیارکرده نیمدایرهٔ k را به‌مرکز K و شعاع KP رسم می کنیم (شکل ۲۱). اگر همین کار را برای یک نقطهٔ



شکل ۲۱

L روی خط u و بیرون پاره خط MN انجام دهیم نمونهٔ (۳) خطهای راست هذلولی l را بدست می‌آوریم (شکل ۲۱). اکنون آشکار می‌شود که اصل موضوع (۲) هم‌ارز است با اصل موضوع توازی لباچفسکی که در بخش ۲ گفته شد.

دو خط راست لباچفسکئی که نه متقاطع باشند و نه متوازی واگرا نامیده می‌شوند. مثلاً در روی شکل ۲۱ دو خط راست p و l واگری‌اند.

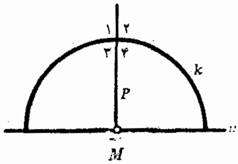
بدین‌ترتیب در نیمصفحهٔ τ اصلهای موضوع، و در نتیجه قضایای، هندسهٔ لباچفسکئی برقرارند. بنابراین نیمصفحهٔ τ، با قاعده‌هائی که جلوتر برای محاسبهٔ طولها گفتیم، یک صفحهٔ لباچفسکئی، یا به عبارتی دقیقتر، نقشه‌ای از صفحه‌ای لباچفسکئی برصفحه‌ای اقلیدسی، است.

آموزنده است که این نقشه را با نقشهٔ سطح زمین در تصویر مرکاتر قیاس کنیم. در نقشهٔ مرکاتر نصف‌النهارها به صورت خطوط متوازی عمود بر خطوط راستی‌که تصویرهای مدارهای جغرافی‌اند نمایش داده‌می‌شوند. (← شکل ۲ صفحهٔ ۲۲). دایره‌های بزرگ، از جمله نصف‌النهارها، را بر روی کره می‌توان «خط راست» فرض‌کرد مدارها، به استثنای استوا، روی کره خط راست نیستند، هرچند در نقشه به صورت خط راست اقلیدسی نموده می‌شوند. همچنین از خطهای اقلیدسی در نیمصفحهٔ τ آنها که عمود بر u هستند خطهای‌راست هذلولوی‌اند؛ وآنهاکه موازی u هستند خطهای هذلولوی نیستند. (در این باره در بخش ۷ بتفصیل صحبت خواهیم کرد.)

بعلاوه، هرچه عرض مدار بیشتر شود طول قوس 1° بر روی آن کوچکتر می‌گردد؛ اما در نقشهٔ مرکاتر طول قوس 1° همه جا، و صرف‌نظر از عرض جغرافیایی مدارها، یکی است. طرح بر روی نیم‌صفحهٔ τ نیز چنین است (← اصل ۱).

توجه به این نکته مهم است که نقشهٔ τ همدیس است، یعنی اندازهٔ اقلیدسی زاویه‌ای دراین نقشه برابر است با اندازهٔ آن‌درصفحهٔ لباچفسکئی.

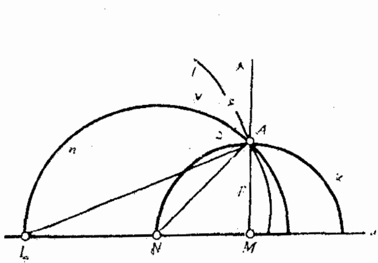
نخست این حکم را در مورد زاویهٔ قائمه ثابت می‌کنیم. نیمدایرهٔ k را به مرکز M واقع بر u می‌زنیم و از M نیمخط p را بر u عمود می‌کنیم (شکل ۲۲). اکنون زاویه‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را که بین دو خط



شکل ۲۲

هذلولوی k و p تشکیل شده‌اند در نظر می‌گیریم. حرکتی هذلولوی (تقارن نسبت به p) ۱ را به ۲ و ۳ را به ۴ تبدیل می‌کند؛ و حرکت هذلولی دیگری (انعکاس نسبت به k) ۱ را به ۳ و ۲ را به ۴ تبدیل می‌نماید؛ بنابراین در صفحهٔ لباچفسکئی (همچنان‌که در نقشهٔ بر τ) $\angle ۴ = \angle ۳ = \angle ۲ = \angle ۱$؛ نتیجه آن که هر یک از این زاویه‌ها یک قائمه است.

آرایشی را که در شکل ۲۲ است بکار می‌بریم و نقطهٔ تقاطع خطهای k و p را A، و یکی از نقاط برخورد دو خط k و u را N می‌نامیم (شکل ۲۳). یک نیمدایرهٔ اقلیدسی n به مرکز N و با شعاع



شکل ۲۳

NA زاویهٔ $\angle 1$ شکل ۲۲ را به زاویه‌های ۵ و ۶ تقسیم می‌کند، که، همانطور که بآسانی دیده می‌شود، اندازه‌های اقلیدسی آنها برابرند. انعکاس نسبت به n دایرهٔ k را به p و p را به k تبدیل می‌کند، درنتیجه زاویه‌های ۵ $\angle$ و ۶ $\angle$ می‌توانند تغییرجا بدهند. پس به‌این نتیجه‌می‌رسیم که نه‌تنها اندازه‌های اقلیدسی ۵$\angle$ و ۶$\angle$ یکی هستند بلکه اندازهٔ فعلی (یعنی هذلولوی) آنها هم یکی است؛ یعنی درهندسهٔ لباچفسکئی (همچنان که در نقشهٔ T) هر یک برابر است با نصف زاویهٔ قائمه.

نقطهٔ برخورد خطهای u و n را، که با N در یک طرف M است، L می‌نامیم، ودایرهٔ l را به مرکز L و شعاع LA رسم می‌کنیم (شکل۲۳). دایرهٔ l زاویهٔ ۶ را به زاویه‌های ۷ و ۸ تقسیم می‌کند. بآسانی دیده می‌شود که

$$\angle ۸ = \angle NAL = \frac{\pi}{۸}$$

و چون $(\pi/۸) = ۶\angle$، پس $(\pi/۸) = ۷\angle$؛ بنابراین اندازهٔ اقلیدسی زاویه‌های ۷$\angle$ و ۸$\angle$ یکی است. درهمان‌حال اندازه‌های هذلولوی‌آنها مساوی هستند، زیرا که این زاویه‌ها بوسیلهٔ انعکاس نسبت به l به‌یکدیگر تبدیل می‌شوند.

با همین روش ثابت می‌کنیم که زاویه‌های نقشهٔ T که اندازه‌های اقلیدسیشان $\pi/۱۶$ و $\pi/۳۲$ و . . . است در صفحهٔ هذلولوی دارای یک مقدارند.

چون هر زاویه را می‌توان با مجموع تعدادی متناهی، و در حد با تعدادی نامتناهی، از جمله‌هائی به صورت

$$\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۸}, \frac{\pi}{۱۶}, \frac{\pi}{۳۲}, \ldots$$

نمایش داد خاصیت همدیسی نقشهٔ T به اثبات می‌رسد.

۵
دایره در صفحهٔ لباچفسکئی

ببینیم دایره در صفحهٔ لباچفسکئی در نقشهٔ τ چگونه نمایش داده می‌شود.

از نقطهٔ M واقع بر خط u خط اقلیدسی p را عمود بر u رسم کنید، و در نیمصفحهٔ τ دو نقطهٔ دلخواه B و C بر آن اختیار نمایید (شکل ۲۴؛ $MB > MC$). اکنون بر p نقطه‌ای مانند A بیابید چنان‌که برابری

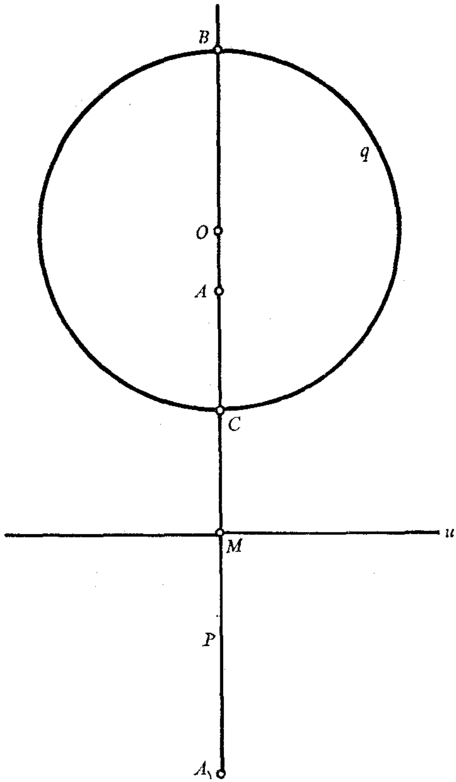
$$\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM} \qquad (۶)$$

برقرار باشد.

از این تساوی نتیجه می‌گیریم که طولهای هذلولوی قطعه‌های CA و CB یکی‌هستند. در حقیقت تجانسی با مرکز تجانس M و ضریب تجانس CM/AM قطعهٔ AB را به CA تبدیل می‌کند.[1] هرگاه وسط اقلیدسی پاره خط BC را O بنامیم، یک دایرهٔ اقلیدسی q به مرکز O و با شعاع

---

۱. $AM = BM\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{CM}{AM} \cdot BM$؛ در نتیجه B به A تبدیل شده است؛ $CM = \dfrac{CM}{AM} \cdot AM$، در نتیجه A به C تبدیل شده است.



شکل ۲۴

OB رسم می‌کنیم و نقطهٔ A_1 قرینهٔ A نسبت به‌خط u را مشخص می‌سازیم. چون

$$OA = OM - AM, OA_1 = OM + MA_1 = OM + AM$$

پس

$$OA \cdot OA_1 = OM^2 - AM^2 \tag{۷}$$

علاوه براین

$$OM = \frac{۱}{۲}(BM + CM)$$

و بموجب رابطهٔ (۶)

$$AM^{۲} = BM \cdot CM$$

پس رابطهٔ (۷) را می‌توان به این صورت درآورد:

$$OA \cdot OA_{۱} = \frac{۱}{۴}(BM + CM)^{۲} - BM \cdot CM$$

$$= \frac{۱}{۴}(BM^{۲} + ۲BM \cdot CM + CM^{۲} - ۴BM \cdot CM)$$

اما

$$OA \cdot OA_{۱} = \frac{۱}{۴}(BM - CM)^{۲} \qquad (۸)$$

چون

$$\frac{۱}{۲}(BM - CM) = OB$$

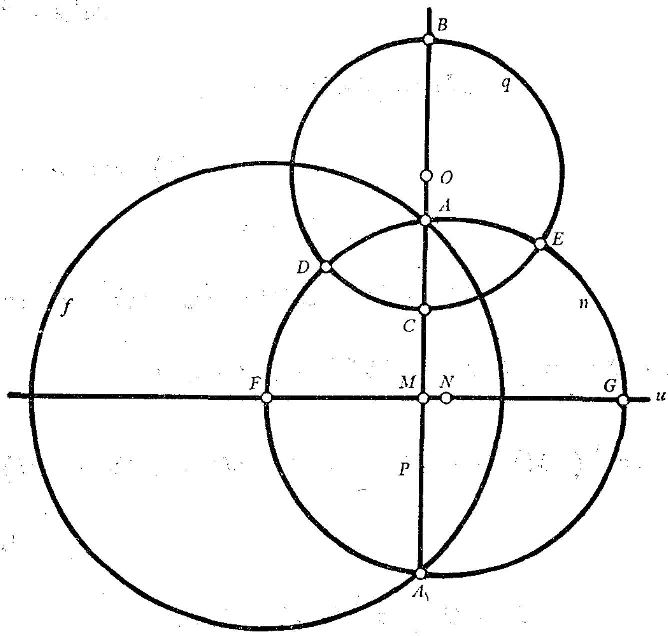
از رابطهٔ (۸) نتیجه می‌گیریم

$$OA \cdot OA_{۱} = OB^{۲}$$

و این رابطه بیان می‌کند که دو نقطهٔ A و $A_{۱}$ نسبت به دایرهٔ q قرینه‌اند.

ثابت می‌کنیم که فواصل هذلولوی همهٔ نقاط خط q تا نقطهٔ A متساوی‌اند.

دایرهٔ اقلیدسی دلخواهی بر A و $A_{۱}$ می‌گذرانیم (شکل ۲۵). N مرکز آن بر خط u قرار دارد: پس جزئی از آن که در نیمصفحهٔ τ است



شکل ۲۵

خط راست هذلولوی است.

فرض کنید n و q در نقطه‌هــای D و E، و n و u در F و G تقاطع کنند، دایرهٔ اقلیدسی f را به مرکز F و شعاع FA رسم کنید. چون دایرهٔ f بر دو نقطهٔ A و A_1 که نسبت به دایرهٔ q قرینه‌انـــد می‌گذرد، دو دایرهٔ q و f بر یکدیگر عمودند (← بخش۳)؛ پس انعکاس نسبت به f دایرهٔ q را به خودش تبدیل می‌کند.

وانگهی، همین انعکاس خط p را که بر قطب F نمی‌گذرد به‌دایره‌ای تبدیل می‌کند که بر قطب، و نیز بــر A و A_1 (کــه در این تبــدیل ثابت می‌مانند)، می‌گذرد، یعنی به دایرهٔ n. از سوی دیگر دایـرهٔ n که بر قطب

انعکاس می‌گذرد تبدیل به خط راست p می‌شود زیرا که چنین خطی باید بر A و A_1 مرور کند.

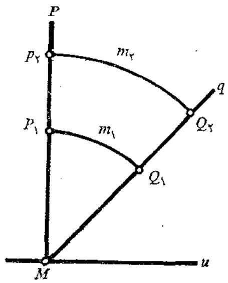
از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که قوسهای AD و AE دایرهٔ n بترتیب تبدیل می‌شوند به پاره خطهای AB و AC واقع بر خط p. بنابراین طولهای هذلولوی پاره‌های AD و AE ازخط راست هذلولوی n مساوی هستند با طولهای هذلولوی پاره‌های AB و AC از خط راست هذلولوی p؛ به بیانی دیگر فاصله‌های هذلولوی نقاط B و C و D و E از نقطهٔ A برابراند. آنچه دیدیم نشان می‌دهد که تصویر یک دایرهٔ هذلولوی بر نقشهٔ τ یک دایرهٔ اقلیدسی است که با خط راست u نقطهٔ مشترکی ندارد، اما تصویر مرکزش (A) بر (O) مرکز دایرهٔ اقلیدسی متناظر با آن منطبق نیست.

در خاتمه خاطر نشان سازیم که هر خط راست هذلولوی که بر (مرکز) A بگذرد دایرهٔ q را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کند، و این خاصیت شبیه است به خاصیت معروف قطرهای دایرهٔ اقلیدسی.

٦

منحنی همفاصله

فرض می‌کنیم p و q بترتیب عمود و مایلی باشند که با u در M تلاقی کرده باشند وقوسهای P_1Q_1 و P_2Q_2 دایره‌های اقلیدسی به مرکز مشترک M باشند، یا به بیان دیگر قطعه‌هائی از دو خط راست هذلولوی m_1 و



شکل ۲۶

m_2 باشند (شکل ۲۶). چون m_1 و m_2 خط p را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند طولهای هذلولوی قوسهای P_1Q_1 و P_2Q_2 فاصله‌های هذلولوی نقاط Q_1 و Q_2 را از خط راست هذلولوی p مشخص می‌سازند، و این فاصله‌ها متساوی‌اند زیراکه قوس P_1Q_1 را می‌توان با تجانسی به‌مرکز M تبدیل به قوس P_2Q_2 کرد.

از این روی می‌توان نتیجه‌گرفت که خط q مکان هندسی نقاطی است که به فاصلهٔ هذلولوی مشخصی از خط هذلولوی p قرار دارند. این خط را منحنی همفاصله، و خط راست هذلولوی p را پایهٔ آن می‌نامند. بطوری که از بخش ۴ بر می‌آید منحنی هم‌فاصله خطی هذلولوی نیست.

فرض این که مکان نقاطی که به یک فاصله از خط راست مفروضی، و در یک طرف آن، باشند خطی است راست با این خاصیت منحنی همفاصله، و در نتیجه با اصل موضوع توازی لباچفسکئی، تناقض دارد و هم‌ارز است با اصل موضوع توازی اقلیدسی.

خاطر نشان می‌سازیم که خط راست هذلولوی عمود بر پایهٔ یک منحنی همفاصله آن را به زاویه قائمه قطع می‌کند، و این خود از شکل۲۶ بوضوح بر می‌آید.

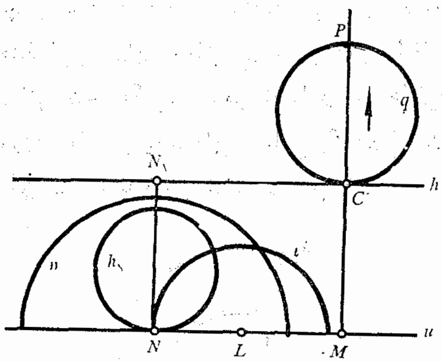
انعکاس نسبت به دایره‌ای که مرکزش بر خط راست u در یک نقطهٔ مشخص M باشد q را به یک دایرهٔ اقلیدسی تبدیل می‌کند که مانند خط راست هذلولوی u را قطع می‌کند اما مرکزش روی u نیست.

بدین ترتیب یک منحنی همفاصله بر روی نقشهٔ τ یا به‌وسیلهٔ نیمخطی اقلیدسی نمایش داده می‌شود که خط u را به زاویه‌ای حاده یا منفرجه قطع کند، یا به‌وسیلهٔ قوسی از دایره‌ای که u را قطع کند اما مرکزش بر u نباشد. بآسانی دیده می‌شود که منحنی همفاصلهٔ دیگری وجود ندارد.

۷

دایرهٔ زمانی[1]

قطر p از دایرهٔ q را عمود بر خط u رسم می‌کنیم و آن نقطهٔ تقاطع آن با دایره را که به u نزدیکتر باشد C می‌نامیم (شکل ۲۷). اگر C را ثابت نگاه داریم و شعاع دایره را به‌طور نامحدود افزایش دهیم به‌طوری که مرکز همواره بر p قرار داشته باشد و در امتـدادی که با پیکان نشان



شکل۲۷

داده شده است دور شود، در آرایش حدی q به خـط راست اقلیدسی h تبدیل می‌شود که با u موازی است.

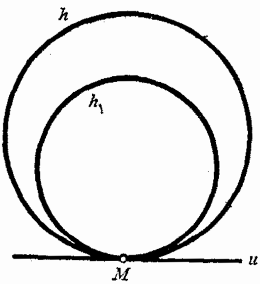
1. Horocycle

خط h را که هذلولوی نیست خط حدی یا دایرهٔ زمانی نامیده‌اند. بدین ترتیب حد دایره‌ای که یک نقطه‌اش و مماس برآن نقطه‌اش ثابت بمانند و شعاعش بی‌حد ترقی‌کند در هندسهٔ اقلیدسی خطی راست و در هندسه لباچفسکئی دایرهٔ زمانی است.

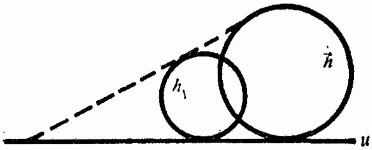
حرکتی هذلولوی را که بوسیلهٔ انعکاس نسبت به یک دایرهٔ n که مرکزش N روی خط u (شکل ۲۷) است نموده می‌شود در نظر می‌گیریم. این انعکاس خط h را به دایرهٔ اقلیدسی h_1 تبدیل می‌کند که بر N می‌گذرد و مرکزش روی عمود مشترک NN_1 خطهای اقلیدسی u و h است؛ نتیجه آن که h_1 مماس است بر خط u.

بدین ترتیب در نقشهٔ τ دایرهٔ زمانی یا بوسیلهٔ یک خط راست اقلیدسی موازی با u، و یا بوسیلهٔ یک دایرهٔ اقلیدسی مماس بر u، نمایش داده می‌شود.

بر N دایره‌ای اقلیدسی مانند l بگذرانیم که مرکزش L بر u باشد (شکل۲۷). چون شعاعهای دایره‌های اقلیدسی h_1 و l بریکدیگر عمودند، خط راست هذلولوی l دایرهٔ زمانی h_1 را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر خط راست هذلولوی که بر یک نقطهٔ بینهایت دور واقع بر یک دایرهٔ زمانی بگذرد (و عنوان محودآن را داشته باشد) آن خط را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کند.



شکل ۲۸



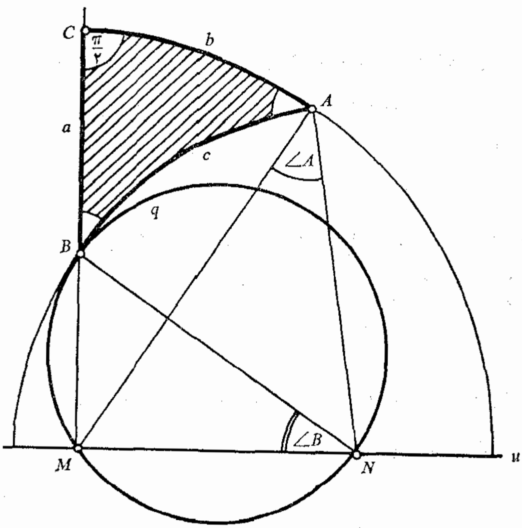
شکل ۲۹

هر دایرهٔ زمانی h هذلولیانه برابر استبا هردایرهٔ زمانی دیگر h_1، یعنی حرکتی هذلولوی وجود دارد که h را به h_1 تبدیل می‌کند. این حرکتهای هذلولوی عبارتند از: (آ) تجانس وقتی که مرکز تجانس بر u باشد، و این هنگامی است که h و h_1 خطهای اقلیدسی موازی با u یا دایره‌های نامساوی اقلیدسی مماس بر u باشند (شکلهای ۲۸ و ۲۹)؛ (ب) تغییر مکان نیمصفحهٔ τ در امتداد خط u، و این هنگامی است که h و h_1 دایره‌های اقلیدسی متساوی و مماس بر u باشند؛ (ج) انعکاسی که قطبش بر u باشد، و این هنگامی استکه یکی از دو منحنی h و h_1 خطی راست اقلیدسی موازی u، و دیگری دایره‌ای اقلیدسی مماس بر u، باشد.

۸
قضیه‌هایی برگزیده از هندسهٔ لباچفسکئی

قضیهٔ ۱. مجموع زاویه‌های هر مثلث کوچکتر است از π.

نخست یک زاویه قائمه مانند ABC در نظر می‌گیریم (شکل ۳۰). اضلاع a و b و c آن، بترتیب، به‌وسیلهٔ پاره خطی اقلیدسی عمود بر u، قوسی از دایره‌ای اقلیدسی بـه مرکز M و قـوسی از دایره‌ای دیگر اقلیدسی به



شکل ۳۰

مرکز N نمایش داده شده‌اند. زاویهٔ C قائمه است. زاویهٔ A برابر است با زاویهٔ بین مماسهای بر دایره‌های b و c در نقطهٔ A، یا بـه بیانی دیگر، زاویهٔ بین شعاعهای MA و NAی این دو دایره، و $\angle B = \angle BNM$.

دایـره‌ای اقلیدسی به قطر BN رسم می‌کنیم؛ ایـن دایـره فقط یـک نقطهٔ مشترک B با دایرهٔ C خواهد داشت زیرا که قطر آن شعاع این است. پس نقطهٔ A دربیرون دایره‌ای است که به q محدود می‌شود، و ازاین روی

$$\angle A = \angle MAN < \angle MBN$$

بنابراین، بموجب رابطهٔ $\angle MBN + \angle B = \pi/۲$ نتیجه می‌گیریم

$$\angle A + \angle B < \frac{\pi}{۲}$$

پس

$$\angle A + \angle B + \angle C < \pi \qquad (۹)$$

ه. ب. ث

خاطر نشان سازیم که هرمثلث قائم‌الزاویه را می‌توان بـوسیلهٔ حرکتی هذلولوی به صورتی تبدیل کردکـه یکی از ضلعهایش بر خطی اقلیدسی عمود بر u واقـع شود؛ پس روشی را که برای رسیدن به نـامساوی (۹) بکار بردیم در مورد هر مثلث قائم‌الزاویه قابل استفاده است.

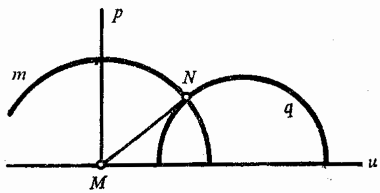
وقتی‌که مثلث غیر قائم‌الزاویه داده شده باشد با رسم ارتفاعی آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تبدیل می‌کنیم، و با توجه به نامساوی (۹) به این نتیجه می‌رسیم که قضیه در مورد هر مثلثی معتبر است.

قضیهٔ ۲. مجموع زاویه‌های هر چهار ضلعی کوچکتر است از ۲π.

برای اثبات کافی است چهـار ضلعی را به‌وسیلهٔ قطـرش به دو مثلث تقسیم کرد.

قضیهٔ ۳. دو خط راست واگرا یک، و فقط یک، عمود مشترک دارند.

در نقشهٔ τ یکی از دو خط واگرا را با خط اقلیدسی p عمود بر u در M، و دیگری را با نیمدایرهٔ اقلیدسی q که مرکزش بر u باشد، نمایش می‌دهیم، بطوری کــه p و q نقطهٔ مشترک نداشته باشند (شکل ۳۱) این گونه آرایش دوخط راست هذلولوی واگرا را می‌توان همواره باحرکت هذلولوی مناسبی فراهم ساخت.



شکل ۳۱

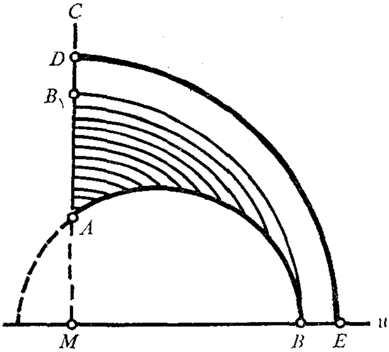
مماس اقلیدسی MN را بر q می‌کشیم و نیمدایرهٔ اقلیدسی m را به مرکز M (و با شعاع MN) رسم می‌کنیم. واضح است کــه m یک خط راست هذلولوی است که هم p و هم q را به زاویهٔ قائمه قطــع می‌کند. پس در نقشهٔ τ خط m عمود مشترک مطلوب بردو خط راست واگرا است.

دوخط راست واگرا نمی‌توانند دوعمود مشترک داشته باشند، زیراکه در چنین حــالتی یک چهار ضلعی بوجود می‌آید که مجموع زاویه‌هایش چهار قائمه است، و این وضع ناقض قضیهٔ ۲ خواهد بود.

قضیهٔ ۴. تصویر قائم هر ضلع زاویهٔ حاده بر ضلع دیگر آن پاره خط است (نه نیمخط، مانند آنچه در هندسهٔ اقلیدسی است).

اعتبار این قضیه از شکل ۳۲ پیــدا است؛ در این شکل AB_1 تصویر قائم ضلع ABی زاویهٔ حادهٔ BAC است بر ضلع ACی آن.

در همین شکل قوس DE دایرهٔ اقلیدسی به مرکز M عمود است بر



شکل ۳۲

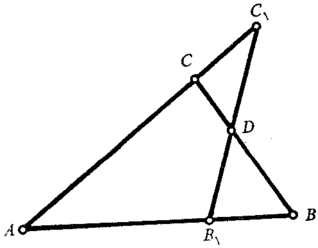
خط راست هذلولوی AC. این عمود مایل AB را قطع نمی‌کند. پس فرض این که یک عمود و یک مایل بر یک خط مفروض همیشه تقاطع می‌کنند نقیض اصل توازی لباچفسکئی وهم ارز با اصل توازی اقلیدسی است.

قضیهٔ ۵. هرگاه سه زاویهٔ مثلث ABC، نظیر به نظیر، با سه زاویهٔ مثلث $A'B'C'$ مساوی باشند، آنگاه دو مثلث متساوی‌اند.

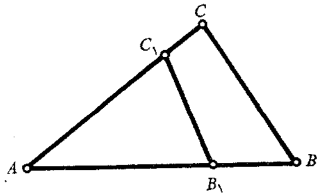
فرض کنیم که عکس قضیه صحیح باشد، و طولهای $AB = A'B'$ و $AC_1 = A'C'$ را بترتیب روی نیمخطهای AB و AC جدا کنیم. واضح است که دو مثلث AB_1C_1 و $A'B'C'$ که دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلعشان نظیر به نظیر برابرند مساوی یکدیگرند. چون نقطهٔ B_1 بر B منطبق نیست نقطهٔ C_1 بر C منطبق نمی‌تواند بود والا دو مثلث متساوی می‌شدند، و این مخالف فرض است.

به امکانات زیرین توجه می‌کنیم.

(آ) نقطهٔ B_1 بین A و B و نقطهٔ C_1 بین A و C قرار می‌گیرند



شکل ۳۳



شکل ۳۴

(شکل۳۳؛ در این شکل و شکل بعدی، هر دو، خطها به‌طور قراردادی، هم نمایش خطهای اقلیدسی هستند و هم نمایش خطهای هذلولوی). بآسانی دیده می‌شود که مجموع زاویه‌های چهار ضلعی BCC_1B_1 مساوی 2π است، و چنین چیزی به‌موجب قضیهٔ ۲ شدنی نیست.

(ب) نقطهٔ B_1 بین A و B و نقطهٔ C بین A و C_1 واقع می‌شوند (شکل ۳۴). نقطهٔ برخورد BC و B_1C_1 را D می‌نامیم. چون $\angle C = \angle C'$ و $\angle C' = \angle C_1$، پس $\angle C = \angle C_1$، وچنین چیزی ممکن نیست، زیرا که زاویهٔ C زاویهٔ خارجی مثلث CC_1D است[1].

حالتهای دیگری که امکان پذیر باشند به همین گونه تعبیر می‌شوند.

قضیه به‌ثبوت رسیده است، زیرا که فرضی که دربالاکردیم به تناقض انجامید.

از قضیهٔ ۵ چنین برمی‌آید که در هندسهٔ لباچفسکئی مثلثی نیست که با مثلث دیگر مشابه باشد اما با آن مساوی نباشد.

---

۱. اثبات این که «هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن بزرگتر است» بستگی به اصل موضوع توازی ندارد.

۹
چند تبصرهٔ دیگر

از بررسی نقشهٔ τ تعدادی نتایج مهم می‌توان بیرون کشید.

نخست آن که هر قضیهٔ هندسهٔ لباچفسکئی در نقشهٔ τ به قضیه‌ای از هندسهٔ اقلیدسی کشانیده می شود. پس هر تناقضی در هندسهٔ لباچفسکئی لزوماً به تناقضی در هندسهٔ اقلیدسی می‌رسد. بنابراین هندسهٔ لباچفسکئی سازگار است.

دو دیگر آن که آشنائی با هندسهٔ لباچفسکئی کشف خطاهایی را که در تلاش برای اثبات اصل موضوع توازی در هندسهٔ اقلیدسی صورت پذیرد بسیار آسان می‌کند، این خطاها وقتی سر می‌زنند که قضیه‌ای هم‌ارز با آن اصل تصور شود. دلیلی بر این که این فرض با اصل موضوع توازی لباچفسکئی تناقض دارد برای بی‌اعتبار ساختن آن کفایت می‌کند. این همان روشی است که، در سه حالتی که جلوتر به بحث دربارهٔ آنها پرداختیم بکار بردیم (یعنی در مورد مکان هندسی نقاط همفاصله از خطی راست؛ و در تقاطع عمود و مایلی که بر یک خط رسم شوند؛ ودر وجود مثلثی مشابه اما نه مساوی مثلثی دیگر).

به مثال دیگری می‌پردازیم. ریاضیدانی از قرن نوزدهم، فورکوش بویوئی (پدر یانوش بویوئی‌که پیشتر از او یادکردیم) برهانی برای اصل توازی اقلیدس عرضه کرد که بر این فرض که همیشه بر سه نقطهٔ غیرواقع

بر یک خط می‌توان دایره‌ای گذراند استوار بود. بویوئی این مطلب را واضح‌می‌پنداشت اما درهندسهٔ لباچفسکئی وضع بدین‌منوال نیست، زیراکه در این هندسه بر سه نقطهٔ واقع در صفحهٔ لباچفسکئی اما غیر واقع بر یک خط راست می‌توان یک دایره، یا یک دایرهٔ زمانی، یا یک منحنی همفاصله مرور داد؛ در نتیجه همیشه بر چنین سه نقطه‌ای نمی‌توان دایره‌ای گذراند. بدین ترتیب می‌بینم که فرض بیانی هم‌ارز است با اصل موضوع توازی اقلیدسی، و این خود از برهان بویوئی سلب اعتبار می‌کند.

لباچفسکی در کتاب خودش روش ساختن نقشهٔ یک صفحهٔ هذلولوی را بکارنبرد؛ این نقشه را برای اولین‌بار هندسه‌دان ایتالیائی اجینوبلترامی در مقاله‌ای که در ۱۸۶۸، دوازده سال پس از مردن لباچفسکی، منتشر ساخت، عرضه کرد.

نقشهٔ صفحهٔ لباچفسکئی که در این هندسه مورد بحث قرار گرفته است با آن که بلترامی ساخته بود تفاوت بین دارد. این نقشه را دانشمند فرانسوی هانری پوانکاره (۲۴۱۳ – ۱۸۵۴/۲۴۷۱ – ۱۹۱۲) وارد ساخته است.

۱۰

در لگاریتم طبیعی و تابعهای هذلولوی

آنچه را در پایین می‌آوریم در بخشهای آینده بکار خواهیم برد.
نخست به بیان چند رابطهٔ مهم می‌پردازیم.
علامتگذاریهای

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{10}$$

را معرفی می‌کنیم. واضح است که

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \tag{11}$$

$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

از رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) بدست می‌آوریم:

$$b_n - a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{a_n}{n} \tag{12}$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{13}$$

و

$$b_n - a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

باسازهٔ مشترک گرفتن در طرف راست رابطهٔ اخیر بدست می‌آید:

$$(14) \quad \frac{1}{n(n+1)}\Big[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n-1} + \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\Big]$$

حال اگر در داخل قلابها $1 + 1/n$ را به جای هر همسازهٔ $1 + 1/(n+1)$ قرار دهیم عبارت (۱۴) بزرگتر می‌شود و پس از ساده شدن نتیجه می‌دهد

$$b_n - a_{n+1} < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

از این رابطه و به کمک رابطهٔ (۱۲) بدست می‌آوریم

$$b_n - a_{n+1} < b_n - a_n$$

یا

$$a_{m+1} > a_m$$

نتیجه آن که a_n با عدد صحیح n بزرگ می‌شود.

حالا در داخل قلابهای رابطهٔ (۱۴) به جای هرهمسازهٔ $1 + 1/n$ مقدار $1 + 1/(n+1)$ را قرار می‌دهیم ؛ در نتیجه مقدار داخل قلابها تنزل می‌کند؛ پس از ساده کردن حاصل می‌شود.

$$(15) \qquad b_n - a_{n+1} > \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

و بآسانی دیده می‌شود که

$$\frac{۱}{n}\left(۱ + \frac{۱}{n+۱}\right)^{n} > \frac{۱}{n+۱}\left(۱ + \frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱} \qquad (۱۶)$$

در حقیقت این عبارت پس از ساده شدن به

$$\frac{۱}{n} > \frac{n+۲}{(n+۱)^{۲}}$$

یا به

$$(n+۱)^{۲} > n(n+۲)$$

تبدیل می‌شود.

آخرین نامساوی آشکارا صحیح است.

از (۱۵) و (۱۶) و (۱۳) نتیجه می‌گیریم

$$b_n - a_{n+۱} > b_{n+۱} - a_{n+۱}$$

و در نتیجه

$$b_n > b_{n+۱}$$

بدین ترتیب وقتی که n ترقی کند b_n تنزل می‌کند.

چون $a_۱ = ۲$ و $b_۱ = ۴$، ازاین تحلیل نتیجه می‌توان گرفت که

$$۲ \leqslant a_n < b_n \leqslant ۴$$

و از این نامساوی و تساوی (۱۲) چنین برمی‌آید که

$$b_n - a_n < \frac{۴}{n} \qquad (۱۷)$$

چون وقتی که n ترقی کند a_n ترقی و b_n تنزل می‌کنند و، چنان که

از نامساوی (۱۷) نتیجه می‌شود، $b_n - a_n$ به‌سوی صفر می‌گراید، مقدار های a_n و b_n باید به سوی حد مشترکی میل کنند، که معمولاً با e نموده می‌شود. a_n همیشه کوچکتر و b_n همیشه بزرگتر از این مقدار حدی هستند. پس

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (18)$$

و

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (19)$$

بویژه، به ازای $n = 1$

$$2 < e < 4 \qquad (20)$$

عدد e گنگ است و مقدار تقریبی آن ۲٫۷۱۸۲۸ است.

از رابطهٔ (۱۹) تساوی تقریبی

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e \qquad (21)$$

نتیجه می‌شود. خطای محاسبهٔ آن کمتر از تفاضل $a_n - b_n$، و در نتیجه کوچکتر از $4/n$ است.

فرض می‌کنیم x کسری مثبت و گویا و کوچکتر از ۱ باشد، و فرض می‌کنیم آن مقدارهای عدد مثبت صحیح آن را درنظر بگیریم که $nx = k$ عددی صحیح باشد. آنگاه به‌موجب نامساوی (۱۹) بدست می‌آوریم:

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k < e^x < \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k+x}$$

در نتیجه این تساوی تقریبی برقرار خواهد بود:

$$\left(۱+\frac{x}{k}\right)^k \approx e^x \qquad (۲۲)$$

و خطائی که در این محاسبه ارتکاب می‌شود کوچکتر است از

$$\left(۱+\frac{x}{k}\right)^{k+x}-\left(۱+\frac{x}{k}\right)^k=\left(۱+\frac{x}{k}\right)^k\left[\left(۱+\frac{x}{k}\right)^x-۱\right]<\frac{xe^x}{k} \qquad (۲۳)$$

بعلاوه از دستور دو جمله‌ای نیوتن این رابطه را داریم

$$\left(۱+\frac{x}{k}\right)^k=۱+x+\frac{k(k-۱)}{۲k^۲}x^۲+\frac{k(k-۱)(k-۲)}{۶k^۳}x^۳+\cdots+\frac{۱}{k^k}x^k \qquad (۲۴)$$

که از آن رابطهٔ تقریبی زیرین نتیجه می‌شود:

$$\left(۱+\frac{x}{k}\right)^k \approx ۱+x \qquad (۲۵)$$

خطاهای محاسبه را با σ نشان می‌دهیم. واضح است که

$$\sigma=\frac{x^۲}{۲}\left[\frac{k-۱}{k}+\frac{(k-۱)(k-۲)}{۳k^۲}x+\cdots+\frac{۲}{k^k}x^{k-۲}\right]<\frac{x^۲}{۲}(۱+x+x^۲+\cdots)=\frac{x^۲}{۲(۱-x)} \qquad (۲۶)$$

از (۲۲) و (۲۵) و (۲۶) به این نتیجه می‌رسیم که

$$e^x \approx ۱+x \qquad (۲۷)$$

خطای این رابطه از $x^۲/[۲(۱-x)]$ بیشتر نیست زیرا که حد عبارت (xe^x/k) (← رابطهٔ (۲۳)) صفر است وقتی‌که k بی‌نهایت بزرگ شود. هرگاه به x مقدار های خیلی کوچک داده شود این خطا هرقدر بخواهیم کوچک می‌شود.

رابطهٔ (۲۷) در حالتی هم معتبر است که $۱ > x$ عدد گنگ مثبتی باشد؛ اگر تخمین‌های گویای مقدارهای x را در نظر بگیریم آنچه را گفتیم می‌توان اثبات کرد.

شایان تذکار است که رابطهٔ (۲۷) برای مقدارهای منفی x که قدر مطلقشان کوچکتر از ۱ باشد معتبر است و خطا در این مورد از $(x^۲/۲(x+۱))$ بیشتر نیست.

از رابطه‌های (۲۲) و (۲۴) رابطهٔ تقریبی دیگری، دقیقتر از رابطهٔ (۲۷) بدست می‌آوریم. وقتی که $k \to \infty$ حد جملهٔ سوم طرف راست رابطهٔ (۲۴) مقدار $x^۲/۲$ است. در نتیجه بدست می‌آید:

$$e^x \approx ۱ + x + x^۲/۲ \tag{۲۸}$$

این دستور وقتی بکار می‌رود که x آنقدر کوچک باشد که بتوان از $x^۳$ چشم پوشید. از برآورد خطای دستور (۲۸) صرف نظر می‌کنیم.

اکنون به‌دستگاه لگاریتمهای به مبنای e، یا لگاریتم طبیعی، که نقشی مهم در ریاضیات ایفا می‌کنند، می‌پردازیم.

لگاریتم طبیعی عدد x را با $\ln x$ نمایش می‌دهیم. بر طبق خواص معلوم لگاریتمها $\ln ۱ = ۰$ و $\ln e = ۱$.

اگر از دو طرف رابطهٔ (۲۷) لگاریتم بگیریم رابطهٔ تقریبی

$$\ln(۱+x) \approx x$$

را بدست می‌آوریم که می‌تواند وقتی که x خیلی کوچک باشد بکار برده شود.

تابعهای هذلولوی، یعنی جیب هذلولوی و جیب تمام هذلولوی (که sinh و cosh نوشته می‌شوند) به کمک عدد e تعریف می‌شوند:

$$\text{(۳۰)} \qquad \sinh x = (e^{x} - e^{-x})/۲$$
$$\text{و} \quad \cosh x = (e^{x} + e^{-x})/۲$$

دو تابع هذلولوی دیگر، ظل هذلولوی وظل تمام هذلولوی (نوشته می‌شوند tanh و coth) را می‌توان چنین تعریف کرد.

$$\text{(۳۱)} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

تابعهای هذلولوی خواص متعددی دارند شبیه به خواص تابعهای مثلثاتی نظیرشان.

دستورهای تقریبی زیرین، برای مقدارهای به اندازهٔ کافی کوچک x، از رابطه‌های (۲۷) و (۳۰) و (۳۱) نتیجه شده‌اند:

$$\text{(۳۲)} \qquad \sinh x \approx x, \quad \cosh x \approx ۱, \quad \tanh x \approx x$$

و از روابط (۲۸) و (۳۰) و (۳۱):

$$\text{(۳۳)} \qquad \sinh x \approx x, \quad \cosh x \approx ۱ + \frac{۱}{۲}x^{۲},$$
$$\tanh x \approx \frac{۲x}{۲ + x^{۲}}$$

۱۱
اندازه‌گیری پاره‌خطهای راست هذلولوی

در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان طول پاره‌های خطهای راست هذلولوی را حساب کرد.

نخست یک نیمخط اقلیدسی را در نظر می‌گیریم که از نقطه‌ای مانند M از خط u بر این خط عمود شده است (شکل ۱۵)، و براین خط به چهار نقطهٔ A و B و C و D، به فواصلی از هم که در این رابطه صدق کنند، توجه می‌کنیم:

$$\frac{MB}{MA}=\frac{MD}{MC}$$

یا به صورتی هم‌ارز این رابطه:

$$\frac{MB}{MD}=\frac{MA}{MC}$$

چون هر یک از این دو نسبت را μ بنامیم خاطر نشان می‌سازیم که تجانسی که مرکزش در M و ضریبش μ باشد پاره خط CD را به پاره‌خط AB تبدیل می‌کند؛ پس طولهای هذلولوی این قطعات متساویند.

از این مطالب نتیجه می‌شود که طول هذلولوی پاره خط AB (که آن‌را با AB_h می‌نمائیم)، بوسیلهٔ نسبت MB/MA مشخص می‌شود، یا،

به عبارتی دیگر، تابعی است از این نسبت. حالا نشان می‌دهیم که لگاریتم را می‌توان برای این تابع اختیار کرد، یعنی که می‌توانیم فرض کنیم

$$AB_h = \log \frac{MB}{MA} \qquad (۳۴)$$

هرگاه F نقطه‌ای از پاره خط AB باشد، آنگاه

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MA} \cdot \frac{MB}{MF}$$

اگر لگاریتم رابطهٔ اخیر را بگیریم به‌موجب رابطهٔ (۳۴) بدست می‌آوریم

$$AB_h = AF_h + FB_h$$

که با قاعدهٔ جمع پاره خطها مطابقت دارد.

به‌طور کلی می‌توان لگاریتم رابطهٔ (۳۴) را با هر مبنای مثبتی (جز واحد) ـ البته برای همهٔ پاره خطها مبنا باید یکی باشد ـ گرفت؛ با وجود این، برای آن که قاعدهٔ مورد بحث را با محتوای بخش ۴ هماهنگ سازیم باید انتخاب خود را به لگاریتم طبیعی محدود کنیم، و در نتیجه رابطهٔ (۳۴) را به صورت

$$AB_h = \ln \frac{MB}{MA}$$

محدود سازیم.

براستی، وقتی‌که پاره خط AB در مقایسه با پاره خط MA به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد بموجب رابطه‌های (۲۹) و (۳۵) از رابطهٔ

$$\ln \frac{MB}{MA} = \ln \frac{MA + AB}{MA} = \ln\left(۱ + \frac{AB}{MA}\right)$$

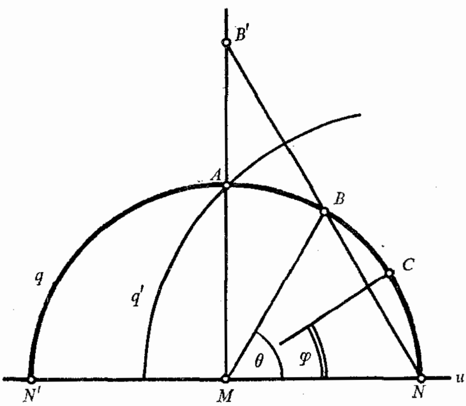
به رابطهٔ

$$AB_h \approx \frac{AB}{MA}$$

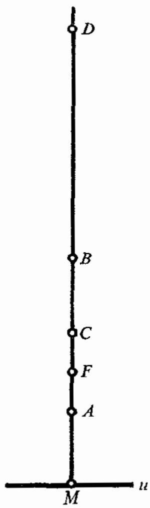
می‌رسیم که با اصلی که در بخش ۴ فرض کردیم مطابقت دارد.

لازم است خاطر نشان شود که طولهای هذلولوی پاره خطهای AB و BA، که بوسیلهٔ رابطهٔ (۳۵) حساب شوند از حیث مقدار مطلق برابراند اما علامتهای مخالف دارند. از اینجا معلوم می‌شود که عوض کردن جهت پاره خط موجب تغییر علامت طول هذلولوی آن است. اگر جهت پاره‌خط مورد علاقهٔ ما نباشد طرف راست رابطهٔ (۳۵) باید متضمن قدر مطلق لگاریتم باشد.

اکنون نیمدایرهٔ اقلیدسی q را که مرکزش M بر خطی چون u باشد و u را در N' و N قطع کند، و نیز عمودی را که در M بر u اخراج شود و q را در A قطع کند در نظر می‌گیریم (شکل ۳۶) .



شکل ۳۶



شکل ۳۵

نقطهٔ B را بر قوس AN اختیار می‌کنیم. خط راست اقلیدسی NB را می‌کشیم و نقطهٔ برخوردش با MA را B' می‌نامیم. دیدن این که پاره‌های AB و AB' از خطهای راست هذلولوی q و MA متساویند دشوار نیست. درحقیقت انعکاس نسبت به‌دایرهٔ q'(با شعاع NA ومرکز N) q را به خط راست اقلیدسی MA تبدیل می‌کند؛ با این انعکاس نقطهٔ A به خودش و نقطه B به B' تبدیل می‌شوند، زیراکه B و B' هر دو بریک خط راست اقلیدسی قرار دارندکه بر قطب انعکاس N می‌گذرد. بنا براین

$$AB_h = AB'_h = \ln \frac{MB'}{MA}$$

زاویهٔ NMB را θ می‌نامیم؛ پس $\angle MNB = ۹۰^\circ - \theta/۲$ و

$$\frac{MB'}{MA} = \frac{MB'}{MN} = \tan\left(۹۰^\circ - \frac{\theta}{۲}\right) = \cot\frac{\theta}{۲}$$

و از آن روی

$$AB_h = \ln\cot\frac{\theta}{۲} \qquad (۳۶)$$

هرگاه C نقطه‌ای ازقوس BN (شکل ۳۶) باشد و $\angle NMC = \varphi$، آنگاه از رابطهٔ (۳۶) برمی‌آید:

$$AC_h = \ln\cot\frac{\varphi}{۲}, \; BC_h = AC_h - AB_h$$

$$= \ln\cot\frac{\varphi}{۲} - \ln\cot\frac{\theta}{۲}$$

و بالمآل

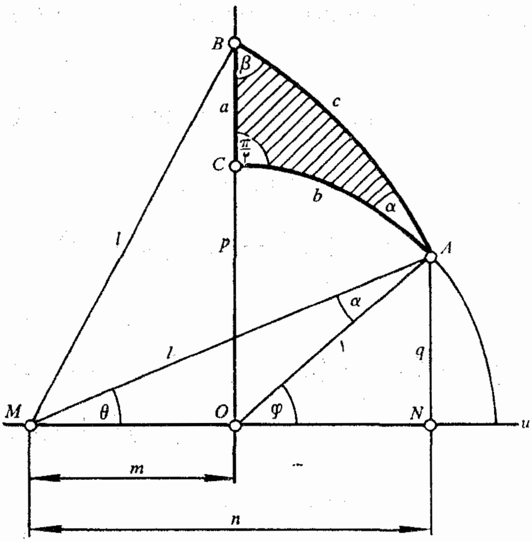
$$BC_h = \ln\left(\cot\frac{\varphi}{۲}\cdot\tan\frac{\theta}{۲}\right) \qquad (۳۷)$$

بدین ترتیب دستور طول یک پاره خط راست هذلولوی را هم برای وقتی که آن پاره جزئی از یک خط راست اقلیدسی باشد، و هم برای وقتی که با یک نیمدایرهٔ اقلیدسی نموده شود، بدست آوردیم.

۱۲

دستورهای اصلی مثلثات هذلولوی

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نیمصفحهٔ τ در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷). ضلع BC آن پاره‌ای است از یک خط راست اقلیدسی OB (با شرط $u \perp OB$)، ضلع CA قوسی است از یک دایرهٔ اقلیدسی به مرکز



شکل ۳۷

O و به شعاع ۱، AB قوسی است از یک دایرهٔ اقلیدسی به مرکز M و به شعاع l؛ $\angle C$ قائمه است و $\angle A = \alpha$ و $\angle B = \beta$.

از A عمود AN را بر u فرود می‌آوریم و قرارداد می‌کنیم

$$OB = p,\ NA = q,\ MO = m,\ MN = n,$$
$$\angle NMA = \theta,\ \angle NOA = \varphi$$

طولهای هذلولوی اضلاع BC و CA و AB مثلث را بترتیب a و b و c می‌نامیم (بعکس، l و m و n و p و q طولهای اقلیدسی‌اند).

توجه کنید که

$$\angle OAM = \alpha, \quad \angle OMB = \beta$$

زیرا که مماسهای براضلاع زاویهٔ A در A بر اضلاع زاویهٔ OAM، و مماسهای در B بر اضلاع زاویهٔ OMB عموداند.

اکنون به برقراری تعدادی رابطه بین مقدارهایی که مورد بحث هستند می‌پردازیم.

از مثلثهای OBM و OAM بدست می‌آوریم

$$p^۲ = l^۲ - m^۲$$

$$۱ = l^۲ + m^۲ - ۲mn (= OA^۲)$$

در نتیجه

$$(۳۸) \quad p^۲ - ۱ = ۲m(n - m),\ \ p^۲ + ۱ = ۲(l^۲ - mn)$$

وانگهی بموجب رابطهٔ (۳۵)

$$a = \ln \frac{p}{۱} = \ln p$$

و در نتیجه

$$e^a = p, \quad e^{-a} = ۱/p$$

$$\sinh a = \frac{۱}{۲}(e^a - e^{-a}) = \frac{۱}{۲}\left(p - \frac{۱}{p}\right) = \frac{p^۲ - ۱}{۲p}$$

$$\cosh a = \frac{۱}{۲}(e^a + e^{-a}) = \frac{۱}{۲}\left(p + \frac{۱}{p}\right) = \frac{p^۲ + ۱}{۲p}$$

پس با بکار بردن رابطهٔ ۳۶ بدست می‌آوریم

$$(۳۹) \quad \sinh a = \frac{m(n-m)}{p}, \quad \cosh a = \frac{l^۲ - nm}{p}$$

در مثلث OAN این رابطه‌ها را داریم.

$$(۴۰) \qquad \sin\varphi = q, \qquad \cos\varphi = n - m$$

در نتیجه

$$\cot\frac{\varphi}{۲} = \frac{۱ + \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{۱ + n - m}{q}$$

$$\tan\frac{\varphi}{۲} = \frac{۱ - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{۱ - n + m}{q}$$

چون از رابطهٔ (۳۶) برمی‌آید که

$$b = \ln\cot\frac{\varphi}{۲}$$

پس

$$e^b = \cot\frac{\varphi}{۲} = \frac{۱ + n - m}{q}, \quad e^{-b} = \tan\frac{\varphi}{۲} = \frac{۱ - n + m}{q}$$

در نتیجه

$$\sinh b = \frac{n-m}{q}, \quad \cosh b = \frac{۱}{q} \tag{۴۱}$$

بعلاوه، از مثلثهای OBM و OAN بدست می‌آوریم

$$\sin\theta = \frac{q}{l}, \quad \cos\theta = \frac{n}{l} \tag{۴۲}$$

$$\sin\beta = \frac{p}{l}, \quad \cos\beta = \frac{m}{l} \tag{۴۳}$$

در نتیجه

$$\cot\frac{\theta}{۲} = \frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{l+n}{q},$$

$$\tan\frac{\theta}{۲} = \frac{۱-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{l-n}{q}$$

$$\tan\frac{\beta}{۲} = \frac{۱-\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{l-m}{p},$$

$$\cot\frac{\beta}{۲} = \frac{۱+\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{l+m}{p}$$

چون از رابطهٔ (۳۷) برمی‌آید که

$$c = \ln\cot\frac{\theta}{۲}\tan\frac{\beta}{۲}$$

پس

$$e^c = \cot\frac{\theta}{۲}\tan\frac{\beta}{۲} = \frac{(l+n)(l-m)}{pq} = \frac{l^۲+ln-lm-mn}{pq}$$

$$e^{-c} = \tan\frac{\theta}{۲}\cot\frac{\beta}{۲} = \frac{(l-n)(l+m)}{pq} = \frac{l^{۲}-ln+lm-mn}{pq}$$

بنا براین

$$(۴۴) \quad \sinh c = \frac{l(n-m)}{pq}, \quad \cosh c = \frac{l^{۲}-mn}{pq}$$

و سرانجام، از مثلث OAM بدست می‌آوریم

$$\alpha = \varphi - \theta$$

چون رابطه‌های (۴۰) و (۴۲) را هم در محاسبه واردکنیم نتیجه می‌گیریم

$$\sin\alpha = \sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta = \frac{qn - q(n-m)}{l}$$

$$\cos\alpha = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta$$
$$= \frac{n(n-m)+q^{۲}}{l} = \frac{n(n-m)+l^{۲}-n^{۲}}{l}$$

زیرا که $q^{۲} = l^{۲} - n^{۲}$. بدین ترتیب

$$(۴۵) \qquad \sin\alpha = \frac{qm}{l}, \quad \cos\alpha = \frac{l^{۲}-mn}{l}$$

از رابطه‌های (۳۹) و (۴۱) و (۴۳) و (۴۴) و (۴۵) بدست می‌آوریم

$$(۴۶) \quad \tanh a = \frac{m(n-m)}{l^{۲}-mn}, \quad \tanh b = n-m,$$

$$\tanh c = \frac{l(n-m)}{l^{۲}-nm}$$

$$(۴۷) \qquad \tan\alpha = \frac{qm}{l^{۲}-mn}, \qquad \cot\alpha = \frac{l^{۲}-mn}{qm}$$

$$\tan\beta = \frac{p}{m}, \quad \cot\beta = \frac{m}{p} \qquad (۴۸)$$

تحقیق اعتبار دستورهای زیرین،که دستورهای اصلی مثلثات هذلولوی را تشکیل می‌دهند، با کمک رابطه‌های (۳۹) و (۴۰) و (۴۳) تا (۴۸) کار دشواری نیست

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b \qquad (۴۹)$$
$$\sinh a = \sinh c \cdot \sin\alpha \qquad (۵۰)$$
$$\sinh b = \sinh c \cdot \sin\beta \qquad (۵۱)$$
$$\tanh a = \sinh b \cdot \tan\alpha \qquad (۵۲)$$
$$\tanh b = \sinh a \cdot \tan\beta \qquad (۵۳)$$
$$\tanh a = \tanh c \cdot \cos\beta \qquad (۵۴)$$
$$\tanh b = \tanh c \cdot \cos\alpha \qquad (۵۵)$$
$$\cos\alpha = \cosh a \cdot \sin\beta \qquad (۵۶)$$
$$\cos\beta = \cosh b \cdot \sin\alpha \qquad (۵۷)$$
$$\cosh c = \cot\alpha \cdot \cot\beta \qquad (۵۸)$$

هرگاه به جـای مقدارهای a و b و c، بترتیب، مقدارهای (a/r) و (b/r) و(c/r) را بگذاریم، یعنی مقیاس طولهای هذلولوی را تغییردهیم، روابط (۴۹) تا (۵۸) را می‌توان با عبارتهایی دیگر بیان کرد. در اینجا r ثابتی است که بین همهٔ پاره خطها مشترک است.

جالب دقت است که با استفاده از روابطی‌که گفتیم و با فرض این‌که a و b و c به اندازهٔ کافی کوچک باشند، می‌تـوان رابطه‌هـایی تقریبی، شبیه به دستورهای مثلثات اقلیدسی، بین اجزای مثلث قائم‌الـزاویه یافت. مثلاً با استفاده از رابطه‌های (۳۲) و (۳۳) دستورهای ذیل را ازرابطه‌های (۵۰) و (۵۲) و (۵۴) نتیجه می‌گیریم.

$$a \approx c\sin\alpha$$

$$a \approx b \tan \alpha$$
$$a \approx c \cos \beta$$

رابطهٔ (۴۹) به

$$۱ + \frac{۱}{۲}c^{۲} \approx \left(۱ + \frac{۱}{۲}a^{۲}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۲}b^{۲}\right)$$

تبدیل می‌شود و در نتیجه بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}c^{۲} \approx \frac{۱}{۲}a^{۲} + \frac{۱}{۲}b^{۲} + \frac{۱}{۴}a^{۲}b^{۲}$$

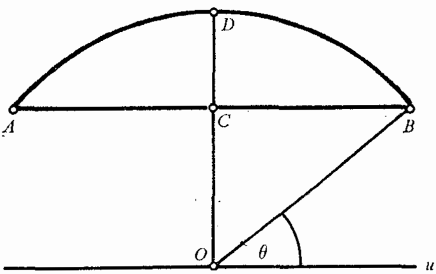
بعد از ساده کردن و صرف‌نظر کردن از جملهٔ سوم طرف راست رابطه، که بسیار کوچک است، به این نتیجه می‌رسیم

$$c^{۲} \approx a^{۲} + b^{۲}$$

بدین ترتیب رابطهٔ (۴۹) متناظر است با قضیهٔ فیثاغورس در هندسهٔ اقلیدسی.

۱۳
طول بعضی قوسهای مستوی در هندسهٔ لباچفسکئی

طول قوس دایرهٔ زمانی. در شکل ۳۸ قوس ADB از دایرهٔ اقلیدسی که مرکزش O بر خط u واقـع است نمـایش پـارهای است از یک خط راست هذلولوی، و پاره خـط اقلیدسی AB کـه موازی u است نمـایش قوسی است از دایرهٔ زمانی؛ طولهـای هذلولوی آنها را بترتیب با $۲a$ و $۲s$ نمایش میدهیم.



شکل ۳۸

با بکار بردن رابطهٔ (۳۶) بدست مـیآوریم $a = \ln \cot (\theta/۲)$ که نتیجهاش $\cot (\theta/۲) = e^a$ است. بعلاوه بکاربستن اصل ۱م (بخش

۴) منجر می‌شود به

$$s=\frac{AC}{OC}=\cot\theta=\frac{۱}{۲}\left(\cot\frac{\theta}{۲}-\tan\frac{\theta}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}(e^a-e^{-a})$$

از تعریف سینوس هذلولوی بدست می‌آوریم

$$s=\sinh a \tag{۵۹}$$

درنتیجه $۲s=۲\sinh a$. بدین ترتیب طول قوس دایرهٔ زمانی دوبرابر سینوس هذلولوی نصف وتر آن قوس است. چون $s<a$، از رابطهٔ (۵۹) نتیجه می‌گیریم

$$a<\sinh a \quad (\text{اگر } a>۰) \tag{۶۰}$$

طول دایره ۰ در گام اول به اثبات دو حکم کمکی می‌پردازیم.

(آ) اگر a به اندازهٔ کافی کوچک باشد $\tanh a<a$.[1] در حقیقت رابطهٔ (۳۳) نتیجه می‌دهد

$$\tanh a\approx\frac{۲a}{۲+a^۲}<a \quad (\text{اگر } a>۰)$$

(ب) اگر به این نکته توجه کنیم که محیطهای n ضلعی منتظم محاط در، و محیط بر، دایره‌ای به شعاع ۱، وقتی که n بی‌نهایت زیاد شود، به یک حد مشترک، که طول دایره است، میل می‌کنند نتیجه می‌گیریم

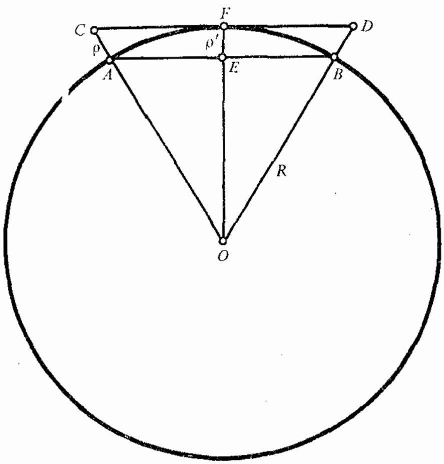
$$\lim_{n\to\infty}۲n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}۲n\tan\frac{\pi}{n}=۲\pi \tag{۶۱}$$

اکنون به یافتن طول s دایرهٔ هذلولوی به شعاع R می‌پردازیم (اینجا و از این پس همهٔ نمادها نمایندهٔ طول هذلولوی هستند). فرض

---

۱. بی‌اثبات می‌گوییم که این نامساوی برای هر مقدار مثبت a معتبر است.

کنید AB و CD اضلاع n ضلعی‌های منتظم محاط در دایره[1] ومحیط بر آن باشند. محیطهای آنها را بترتیب p و P و طولهای قطعات AC و EF را ρ و ρ' می‌نامیم (← شکل ۳۹، که در آن شکلهای هذلولوی به نحوی قرار دادی مانند شکلهای اقلیدسی نمایش داده شده‌اند).



شکل ۳۹

۱. فرض کنید A نقطه‌ای از دایرهٔ هذلولوی q به مرکز O باشد. زاویهٔ $AOM = \pi/m$ را، که در آن m عدد صحیح مثبتی است، بسازید و در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ q بکشید. این مماس و نیمخط OM یا در نقطه‌ای مانند B تلاقی می‌کنند، یا نقطهٔ مشترک ندارند. در صورت اول پاره خط AB نصف ضلع m ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ q است. در حالت دوم هیچ m ضلعی منتظم نمی‌توان بر q محیط کرد، اما می‌توان n ضلعی منتظم بر آن محیط نمود مشروط به‌آن که عدد صحیح $m < n$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد

برای مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAE و OCF، که در آنها O مرکز دایرهٔ مفروض است، از رابطه‌های (۵۲) و (۵۰) بدست می‌آوریم

$$\tanh AE = \sinh OE \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\sinh CF = \sinh OC \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

یا

$$\tanh \frac{p}{2n} = \sinh (R - \rho') \cdot \tan \frac{\pi}{n} \qquad (۶۲)$$

$$\sinh \frac{P}{2n} = \sinh (R + \rho) \cdot \sin \frac{\pi}{n} \qquad (۶۳)$$

n را آنقدر بزرگ انگارید که $tg\ p/2n < p/2n$؛ چون بر طبق نامساویهای (۶۰)، $(P/2n) < \sinh (P/2n)$، از ضرب عضو به عضو رابطه‌های (۶۲) و (۶۳) در $2n$ نتیجه می‌گیریم.

$$\sinh (R - \rho') \cdot 2n \tan\frac{\pi}{n} < p < s \qquad (۶۴)$$

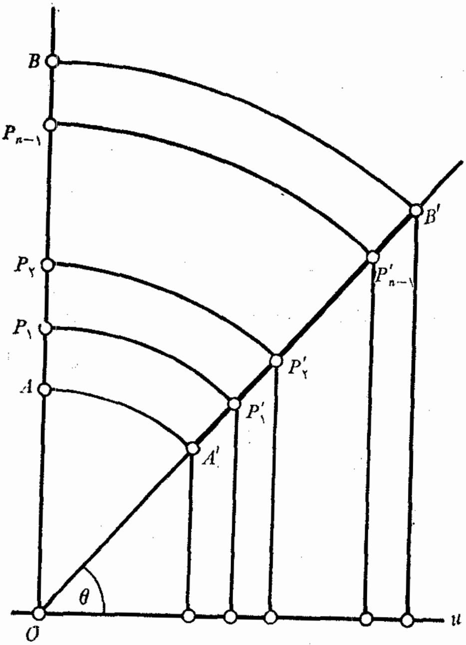
$$< P < \sinh (R + \rho) \cdot 2n \sin\frac{\pi}{n}$$

وقتی که تساویهای (۶۱) را در نظر بگیریم و توجه کنیم که هرگاه n بیحد بزرگ شود ρ و ρ' به سوی صفر می‌گرایند به این نتیجه می‌رسیم که اولین و آخرین جمله‌های رشتهٔ نامساویهای (۶۴) به یک حد مشترک $2\pi \sinh R$، که با مقدار s منطبق است، می‌گرایند

$$s = 2\pi \sinh R$$

بنا براین طول محیط دایره در هندسهٔ لباچفسکئی مساوی است با با حاصل‌ضرب سینوس هذلولوی شعاعش در 2π.

طول قوس منحنی همفاصله. فرض می‌کنیم P_1 ، P_2 ، . . . ، P_{n-1} نقطه‌هایی باشند که به فاصله‌های اقلیدسی y_1 ، y_2 ، . . . ، و y_{n-1} از خط u واقع باشند و پاره خط AB را، که بر u عمود است، به n جزء متساوی (به مفهوم اقلیدسی) تقسیم کنند و طولهای اقلیدسی پاره خطهای OB و AB را، بترتیب، y_n و ξ می‌نامیم (شکل ۴۰). قوسهای AA' و $P_1P'_1$ و . . . و BB' از دایره‌های اقلیدسی به مرکز مشترک O را، که نمایش عمودهایی هستند که از نقاطی از همفاصلهٔ OB' بر OB قاعدهٔ آن فرود آمده‌اند، رسم می‌کنیم. به‌موجب رابطهٔ (۳۶) طول هذلولوی هریک



شکل ۴۰

از این عمودها با دستور $h = \ln \cot (\theta/۲)$ مشخص شده است.

طولهای هذلولوی قوس $A'B'$ از منحنی همفاصله، و پاره خط AB را که قاعدهٔ آن است، s و a می‌نامیم. چون فاصله‌های اقلیدسی نقاط $P'_۱$، $P'_۲$، . . . و B از خط، بترتیب، مساوی هستند با $y_۱ \sin\theta$، $y_۲ \sin\theta$، . . . و $y_n \sin\theta$، و چون طولهای اقلیدسی هر یک از تقسیمات AB و $A'B'$ مساوی ζ/n هستند، به‌موجب نتیجهٔ بخش ۴ بدست می‌آوریم:

$Z \xrightarrow[n\to\infty]{\text{حد}} a$ و $Z' \xrightarrow[n\to\infty]{\text{حد}} s$، که در آنها

$$Z = \frac{\zeta}{n}\left(\frac{۱}{y_۱}+\frac{۱}{y_۲}+\cdots+\frac{۱}{y_n}\right)$$

$$Z' = \frac{\zeta}{n}\left(\frac{۱}{y_۱ \sin\theta}+\frac{۱}{y_۲ \sin\theta}+\cdots+\frac{۱}{y_n \sin\theta}\right)$$

و در نتیجه

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{۱}{sin\theta}$$

چون نسبت اندازه‌های Z' و Z ثابت می‌ماند نسبت حدهای آنها نیز همان مقدار است:

$$\frac{s}{a} = \frac{۱}{\sin\theta} = \frac{۱}{۲}\left(\cot\frac{\theta}{۲} + \tan\frac{\theta}{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}(e^h + e^{-h}) = \cosh h$$

بنابراین

$$s = a \cosh h$$

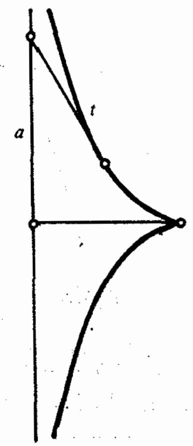
بدین ترتیب طول قــوسی از یک منحنی همفــاصله مساوی است با حاصل‌ضرب تصویر قائم قوس بر قاعدهٔ همفاصله در جیب تمام هذلولوی فاصلهٔ بین نقاط آن قوس و قاعده.

نتیجه

اینک کــه این جــزوه به پایــان نزدیک می‌شود دوست داریــم که خــواننده را (بی‌آن کــه وارد استدلال و اثبات شویــم) با برخی احکام هندسهٔ لباچفسکئی، کــه نمایندهٔ سرشت خاص آن شمــرده می‌شوند، آشنا سازیم.

نخست سطح فضائی اقلیدسی را، کــه در بخش۴ در حال عبور فقط نظری به آن افکندیم، توصیف می‌کنیم.

در شکل ۴۱ صفحــه‌ای اقلیدسی و در آن خــط راست a و منحنی t

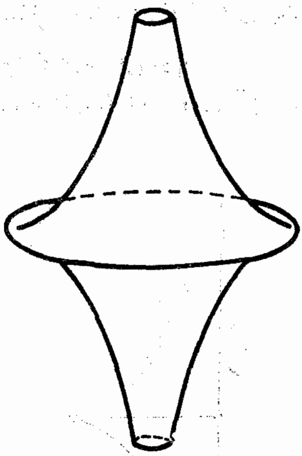


شکل ۴۱

(به نام کشنده[1]) را درنظر گرفته‌ایم. خاصیت منحنی کشنده آن است که قطعه‌ای از مماس بر هر نقطهٔ آن که بین نقطهٔ تماس و نقطهٔ تقاطع مماس با خط a محدود شود همواره دارای طولی ثابت است، که بستگی به نقطهٔ تماس ندارد.

اگر منحنی t حول خط a دوران کند سطحی بوجود می‌آورد به نام کرهٔ کاذب[2].

کرهٔ‌کاذب سطحی است که بلترامی[3] دربارهٔ آن پژوهش کرده و ثابت نموده است که دارای خواصی است‌که جبلی قطعه‌ای از صفحهٔ لباچفسکئی است (اگر کوتاهترین مسیرهای روی این سطح را «خط راست» در نظر بگیریم .)



شکل ۴۲

به نحوی مشابه، در فضای لباچفسکئی سطحی هست که ثابت شده است (با همان تعبیری که از خط راست کردیم) احکام هندسهٔ مسطح

1. Tractrix
2. Pseudosphere
3. Beltrami

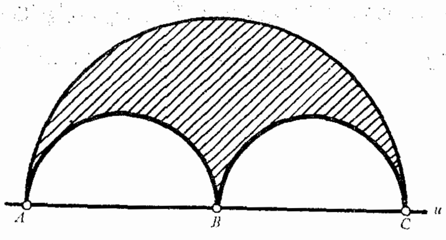
اقلیدسی درآن صادق‌اند؛ این سطح را گوی حدی یا کرهٔ زمانی[1] می‌نامند و از دوران دایرهٔ زمانی حول یکی از محورهایش بوجود می‌آید.

و اینک به بیان تعدادی از ساده‌ترین حکمهای مشخص کنندهٔ هندسهٔ لباچفسکی می‌پردازیم.

۱. دو خط راست متوازی در امتداد توازی خود مجانبانه به‌یکدیگر نزدیک می‌شوند (یعنی فاصلهٔ بین یک نقطهٔ یکی از آنها و دیگری هرقدر خواسته باشیم کوچک می‌شود)، ودر جهت مقابل بیحد از هم دور می‌گردند.

۲. هرگاه خط راست c دو خط راست واگرای a و b را در A و B قطع کند، آنگاه طول پاره خط AB وقتی به کمترین مقدار می‌رسد که c بر عمود مشترک آن دو خط واگرا منطبق شود (a و b در دو طرف عمود مشترک بیحد از یکدیگر دور می‌شوند).

۳. مساحت مثلث ABC مساوی $r^2(\pi - \angle A - \angle B - \angle C)$ است که درآن‌زاویه‌ها با رادیان اندازه‌گیری می‌شوند و r عدد ثابتی‌است که در بخش ۱۲ از آن یاد شد و در همهٔ مثلثها مشترک است. مثلثی‌که هر سه زاویه‌اش صفر باشند بزرگترین مساحت، یعنی πr^2 را دارد (چنین مثلثی در شکل ۴۳ هاشور خورده است).



شکل۴۳

1. Horosphere

۴. اندازهٔ زاویهٔ محاطی همیشه مساوی با نصف قوس روبروی آن نیست. بخصوص زاویهٔ محاطی که اضلاعش بر دو سرقطر بگذرند همیشه حاده است (و مانند هندسهٔ اقلیدسی قائمه نیست).

۵. هرگاه‌عدد صحیح دلخواه n، $n > ۶$، داده شده باشد،می‌توانیم دایره‌ای بسازیم آن‌چنان‌که ضلع n ضلعی منتظم محاط در آن مساوی‌شعاع دایره باشد. ضلع شش ضلعی منتظم محاط در دایره همیشه از شعاع دایره بزرگتر است.

۶. در برخی حالتها هندسهٔ لباچفسکی تربیع دایره را میسر می‌سازد، یعنی امکان می‌بخشدکه فقط با خطکش و پرگار «دایره» و «مربعی» معادل یکدیگر بسازیم (سخن درستر بگوییم، یک لوزی متساوی‌الزوایای معادل با دایره، زیرا که در صفحهٔ هذلولوی چهار ضلعی با چهار زاویهٔ قائمه وجود پیدا نمی‌کند). البته در هندسهٔ اقلیدسی تربیع دایره مقدور نیست.

***

و اینک ما فقط تعداد کمی از سنگهای کیلومتر نمای کنار راهی را که به ژرفنای هندسهٔ هذلولوی رهنمون می‌شود ترسیم کرده‌ایم. مایهٔ شادمانی ما خواهد بود که خواننده‌ای که با طرحی که عرضه کرده‌ایم به اصول این دانش برجسته آشنا می‌شود بدان دلبستگی یابد و بر آن شود که با خواندن کتابهای ویژه‌ای که دربارهٔ آن نوشته شده‌اند، از جمله کتاب بنیادگذار آن، یعنی نیکالای ایوانویچ لباچفسکی، بیشتر به بررسی آن بپردازد.