هندسه مسطحه

از مقدمات تا المپیاد

مؤلفان: سیامک احمدپور
مصطفی مسگری مشهدی

تقدیم به بزرگترین داشته های زندگیمان

دستان پرتلاش پدران

و قلب پر مهر مادرانمان

و ای کاش چیزی با ارزش تر از این داشتیم . . .

فهرست مطالب

فصل پنجم : دایره‌ها

فصل ششم : هندسه برداری

فصل هفتم : تبدیلات هندسی

مقدمه

هندسه یکی از قدیمی‌ترین علوم امروزی است که تاریخ آن به حدود ۴۰۰۰ سال پیش بازمی‌گردد و همواره در طول اعصار مختلف بزرگترین فیلسوفان و دانشمندان و متفکران از افلاطون و دکارت و اقلیدس گرفته تا خیام و نظام الملک و خواجه نصیرالدین طوسی و علامه طباطبایی را مسحور و مجذوب زیبایی‌های خود کرده است. اما متأسفانه آنچه امروزه به عنوان هندسه در دبیرستان‌ها و سیستم آموزشی ما تدریس می‌شود به شدت با آنچه باید باشد فاصله دارد و هرگز نتوانسته‌ایم مفاهیم و زیبایی‌های مباحث هندسه را به درستی برای دانش‌آموزان و علاقمندان به تصویر بکشیم.

در این کتاب برای اولین بار سعی شده تا با بکارگیری نرم افزار *Geometer's sketchpad* در نسخه الکترونیکی آن، مفاهیم و مباحث هندسه مسطحه با روشی جدید و البته کاملاً جذاب برای دانش‌آموزان و علاقمندان بیان شود تا شاید بتوانیم قسمتی از ضعف‌ها و کاستی‌های سیستم آموزشی را بپوشانیم. امید است این روش جدید آموزشی در هندسه مسطحه مورد اقبال و استفاده دانش‌آموزان، معلمین و اساتید محترم قرار گیرد. همچنین این کتاب تمام مباحث هندسه از مقدماتی‌ترین مطالب تا سطح المپیادهای ریاضی را پوشش می‌دهد و می‌تواند منبع مناسبی برای علاقمندان به شرکت در مسابقات المپیادهای ریاضی باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از زحمات بی‌دریغ خانم مینا نورهاشمی و آقای بهزاد مهرداد که مسئولیت ویراستاری این اثر را بر عهده داشتند تشکر کنیم. همچنین از خانم عطیه عسگری و آقایان حامد احمدی و شمس الدین آخوندزاده و آرمان فاضلی و محمدجواد مقدم‌زاده به خاطر کمک‌های ایشان در نمونه خوانی و ویراست این اثر و خانم خدیجه احمدپور که در آماده‌سازی شکل‌ها زحمات زیادی را متحمل شدند و همچنین آقای مهندس غلامرضا نجف‌پور و آقای مهندس پوریا آرمون به خاطر کمک‌های نرم افزاری ایشان کمال تشکر را داریم و در پایان از خانم فریده مرادزاده و همکاران ایشان که با صبر و حوصله حروف‌چینی این اثر را به نحو احسن انجام داده‌اند و مسئول محترم انتشارات خوشخوان جناب آقای رسول حاجی زاده که برای چاپ و ارائه هرچه بهتر این مجموعه تلاش زیادی داشتند قدردانی و تشکر می‌کنیم.

سیامک احمدپور
مصطفی مسگری مشهدی

سخنی با خواننده

خدا می‌داند

خدا می‌داند

و فقط خدا می‌داند، چه شب‌ها که تا صبح دانسته‌های هندسی‌مان را روی کاغذ آوردیم و چه روزها که تا شب سر از کاغذ و کتاب‌های مختلف برنداشتیم و چه ساعت‌های طولانی که بر سر مباحث و مسایل مختلف کتاب بحث و حتی جدل کردیم. اما همه اینها نبود جز به عشق اینکه حاصل سال‌ها تلاش و مطالعه‌مان در سینه مدفون نشود و این دانسته‌های محدودمان و البته مهم تر از همه، درک و فهم‌مان از حقایق و زیبایی‌های عمیق هندسه را نه به یک یا چند کلاس ۲۰ نفره، که به هزاران تن از دوستان عزیز و علاقمندمان در سراسر ایران تقدیم کنیم.

و همین برای ما بس . . .

این کتاب با رویکردی جامعیت‌گرا نگاشته شده است بطوری که تمام مباحث لازم برای علاقمندان به هندسه و داوطلبان شرکت در المپیادهای ریاضی را از مقدماتی‌ترین تا پیشرفته‌ترین مباحث پوشش می‌دهد. این کتاب شامل ۷ فصل است که فصول ۱ و ۲ آن به ترتیب حاوی مباحثی از هندسه ۱ سال دوم دبیرستان و هندسه ۲ سال سوم دبیرستان که در المپیاد ریاضی کاربرد فراگیری دارند می‌باشد. مطالب و مباحث سه فصل اول این کتاب برای شرکت در مرحله اول المپیادهای ریاضی ایران لازم و البته کافی نیز می‌باشد. برای تسلط بالاتر بر این مباحث و حل مسایل بیشتر می‌توانید به منابع [۲۲]، [۲۳] و [۲۴] از همین کتاب مراجعه کنید.

مباحث فصول ۴، ۵ و ۶ و بخش ۷-۱ نیز برای آمادگی برای شرکت در مرحله دوم المپیاد ریاضی لازم و کافی است. بقیه مطالب فصل ۷ نیز هرچند به دلیل سطح بالای مطالب بیشتر در مرحله سوم المپیاد ریاضی کاربرد دارند اما گاه برای حل مسایلی در سطح مرحله دوم نیز کاربرد دارند و تسلط بر آن‌ها برای مرحله دوم خالی از فایده نخواهد بود.

به دلیل ماهیت مبتکرانه و خلاق مباحث و مسایل هندسه مسطحه، مؤثرترین روش آموزشی برای تفهیم و انتقال این مباحث، روش آموزش از طریق حل مسأله است، یعنی روشی که دانش‌آموز پس از دانستن اصول اولیه بحث، با تفکر و تعمق بر روی مسایل مربوط به آن بحث و دیدن و بکارگیری ایده‌های مختلف در حل مسایل، قوه ابتکار و خلاقیت خود را پرورش داده و یاد می‌گیرد که چطور آن را در حل مسایل مختلف بکار گیرد. بنابراین مهمترین قسمت فرآیند آموزشی این کتاب مسایل داخل و انتهای هر بخش و به دنبال آن تمرینات تکمیلی مربوط به هر فصل است که طی آن یاد می‌گیرید که مباحث مختلف را در کنار هم برای حل یک مسأله بکار گیرید.

به دلیل همین اهمیت است که برای اولین بار در ارائه این مجموعه، از نرم افزار *Geometer's sketchpad* که یک نرم افزار تخصصی هندسه است و در بسیاری از کشورها برای آموزش هندسه بکار گرفته می‌شود، استفاده شده است. این نرم افزار که نسخه اصلی آن در ایران نبوده و قیمت فوق العاده‌ای نیز دارد، ابزاری فوق العاده برای فهم و درک مباحث و حل مسایل هندسی بدست می‌دهد. در نسخه الکترونیکی این کتاب که روی لوح فشرده همراه این کتاب عرضه می‌شود، مباحث و مسایل کتاب با استفاده از نرم‌افزار *Geometer's sketchpad* بیان شده‌اند و برای هر قضیه یا مسأله یک *sketch* آمده که در آن مفهوم و شکل آن قضیه یا مسأله بطور ملموسی بیان و رسم شده است و شما را با یک یا چند راهنمایی در حل آن یاری می‌رساند، درست مثل معلمی که قدم به قدم شما را در حل یک مسأله راهنمایی می‌کند. راه حل کامل این مسایل نیز در کتاب آمده است.

برای استفاده بهتر از این مجموعه رعایت نکات زیر در مطالعه آن توصیه می‌شود:

۱- ترتیب فصول و بخش‌ها و حتی مسایل را در مطالعه آن رعایت کنید.

۲- بعد از بیان هر قضیه، بلافاصله مسأله‌ای نیز بیان شده که شما را با کاربرد آن قضیه آشنا می‌کند. پس آن‌ها را در همان مقطع حل کنید.

۳- یکی از نکات مثبت کتاب حل تمام مسایل آن است که اگر به آن تکیه کنید اثر منفی خواهد داشت. پس سعی کنید مباحث و قضایا را از روی نسخه الکترونیکی کتاب مطالعه و با توجه به راهنمایی که در *sketch*ها آمده‌اند خودتان مسایل و قضایا را حل و اثبات کنید و در آخر برای مشاهده راه حل نهایی به کتاب مراجعه کنید.

۴- هرگز کیفیت مطالعه را فدای کمیت آن نکنید و به خاطر مطالعه حجم بیشتری از کتاب از روی مسایل آن به سرعت عبور نکنید. پس برای حل هر مسأله زمان مناسبی اختصاص دهید و قدم به قدم از راهنمایی‌های آن استفاده کنید تا خودتان به جواب مسأله برسید.

۵- فرآیند یادگیری شما طی همین تفکر بر روی مسایل اتفاق می‌افتد. پس حتی اگر بعد از ساعت‌ها مسأله‌ای حل نشود، وقت شما تلف نشده و قدرت حل مسأله شما تقویت شده است.

در پایان از تمامی دوستان علاقمند، دانش‌آموزان و اساتید محترم صمیمانه خواهشمندیم که ما را از نظرات انتقادی، پیشنهادی و یا تأییدی خود محروم نکنید و از طریق پست الکترونیکی *geobook@gmail.com* با ما در ارتباط باشید. همچنین می‌توانید *sketch* های خود برای مسایل حل نشده انتهای کتاب یا سایر مسایل و مباحث هندسه را برای ما ارسال کنید تا در چاپ‌های بعدی کتاب در نسخه الکترونیکی آن با نام خودتان آورده شود.

با آرزوی موفقیت برای تمام دوستان

سیامک احمدپور

مصطفی مسگری مشهدی

فصل اول

هندسه‌ی مقدماتی ۱

۱–۱ همنهشتی مثلث‌ها

هدف بخش: در این بخش با مثلث‌های همنهشت و خواص آن‌ها آشنا شده و سعی می‌شود بـا همـین مفهـوم سـاده هندسی مسایلی در سطوح بالا طرح و بررسی شود.

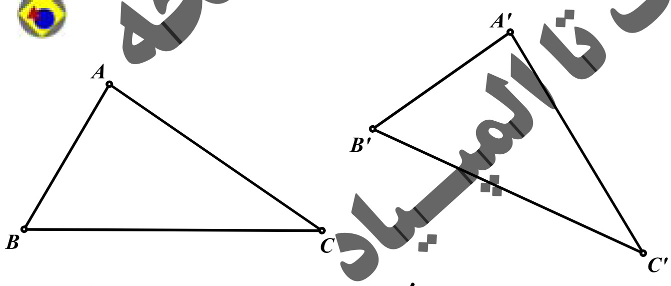
تعریف: دو مثلث همنهشت دو مثلثی هستند که بتوان کاملاً بریکدیگر منطبق کرد.

بدیهی است که در دو مثلث همنهشت یا قابل انطباق اضلاع دو به دو بایکدیگر و زوایا نیـز دو بـه دو بـایکـدیگر برابرند، که به این زوایا و اضلاع برابر، زوایا و اضلاع متناظر می‌گوییم.

به عنـوان مثـال اگـر دو مثلـث ABC و $A'B'C'$ همنهـشت باشـند $(\overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{A'B'C'})$ بطـوری که $\hat{A} = \hat{A'},\ \hat{B} = \hat{B'}$ و $\hat{C} = \hat{C'}$ آنگاه اضلاع متناظر AB و AC نیـز بـه ترتیـب برابـر اضـلاع $A'B'$ و $A'C'$ خواهند بود.

دو مثلث، بنابر هریک از سه حالت زیر بایکدیگر همنهشت خواهند بود:

الف) قضیه ۱–۱ : هر گاه دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

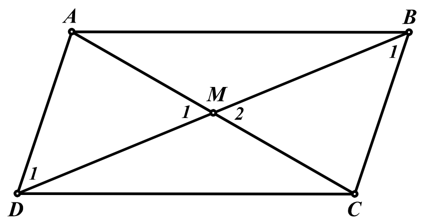


$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ \hat{A} &= \hat{A'} \\ AC &= A'C' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

برای اثبات کـافی اسـت دو مثلـث را بـر روی زوایـای مـساوی A و A' بـریکـدیگر منطبـق کنـیم، از آنجـا کـه $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ هستند، رئوس B , B' و همچنین C , C' نیز بریکدیگر منطبق خواهند شد.

مسأله ۱–۱ : ثابت کنید هر چهار ضلعی که اقطار آن‌یکدیگر را نصف کنند،یک متوازی‌الاضلاع است.

(متوازی‌الاضلاع چهار ضلعی است که اضلاع آن دو به دو بایکدیگر موازی‌اند.)



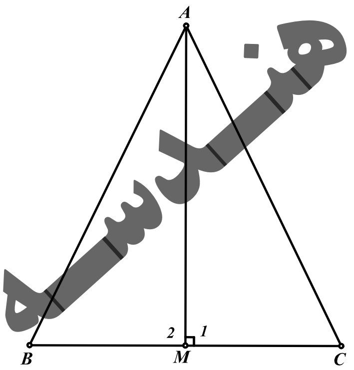
در چهار ضلعی $ABCD$، محل تقاطع دو قطر AC و BD را M را می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{l} AM = MC \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ MD = MB \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{MAD} = \overset{\Delta}{MCB} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow BC \parallel AD$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد: $AB \parallel CD$

در نتیجه $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

مسأله ۱-۲ : ثابت کنید هر مثلثی که میانه و ارتفاع آن بریکدیگر منطبق باشد،یک مثلث متساوی‌الساقین است.



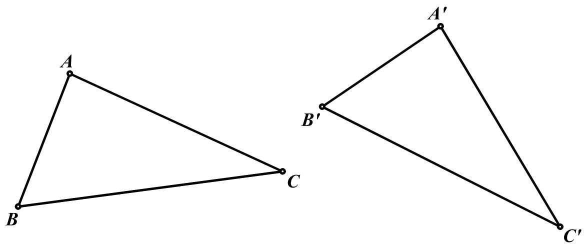
در مثلث ABC، AM هم میانه و هم ارتفاع است.

$$\left.\begin{array}{l} BM = CM \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ \\ AM = AM \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMB} = \overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow AB = AC$$

در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

نتیجه : هر نقطه روی عمود منصف‌یک پاره خط، از دو سر آن به‌یک فاصله است.

ب) قضیه ۱-۲ : هر گاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

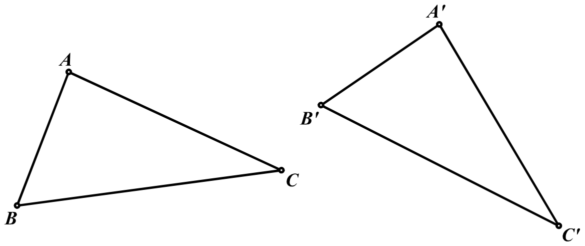


$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B'} \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات این حالت نیز مانند حالت قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۱-۳ : اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، $BC=B'C'$ و $\hat{A}=\hat{A}'$ و $\hat{B}=\hat{B}'$ باشد ثابت کنید :

$$\overset{\Delta}{ABC}=\overset{\Delta}{A'B'C'}$$



می‌دانیم که در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر 180° است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=180^\circ-\hat{A}-\hat{B}$$

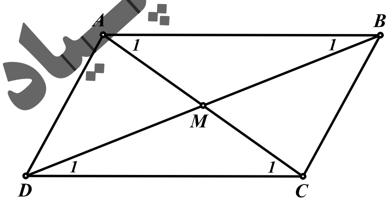
$$\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=180^\circ \Rightarrow \hat{C}'=180^\circ-\hat{A}'-\hat{B}'$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow 180^\circ-\hat{A}-\hat{B}=180^\circ-\hat{A}'-\hat{B}'$$

با توجه به روابط بالا نتیجه می‌گیریم که زوایای C و C' نیز با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B}'\\ BC=B'C'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}=\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مسأله ۱-۴ : ثابت کنید هر چهار ضلعی که دو ضلع روبروی آن بایکدیگر مساوی و موازی باشد،یک متوازی‌الاضلاع است.

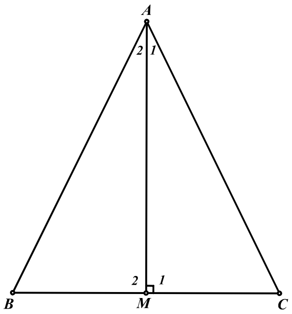


در چهار ضلعی $ABCD$، اضلاع AB و CD بایکدیگر مساوی و موازی‌اند. محل برخورد اقطار AC و BD را M می‌نامیم.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{C}_1\\ \hat{B}_1=\hat{D}_1\end{array}\right.\\ AB=CD\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{MAB}=\overset{\Delta}{MCD} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}AM=CM\\ BM=DM\end{array}\right.$$

در چهار ضلعی $ABCD$، اقطار AC و BD یکدیگر را نصف می‌کنند. پس طبق مسأله ۱-۱ $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

مسأله ۱–۵ : ثابت کنید هر مثلثی که نیمساز و ارتفاع آن بریکدیگر منطبق باشند،یک مثلث متساوی‌الساقین است.

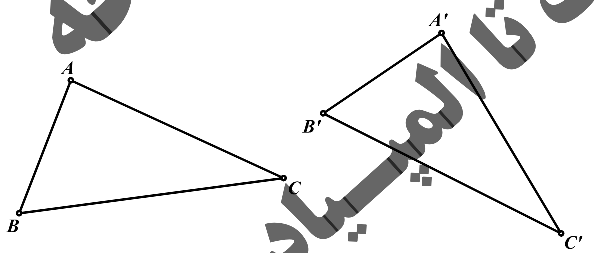


در مثلث ABC، AM هم نیمساز و هم ارتفاع است. بنابراین دو مثلث ABM و ACM به حالت دو زاویه و ضلع بین بایکدیگر همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AM = AM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{ACM} \Rightarrow AB = AC$$

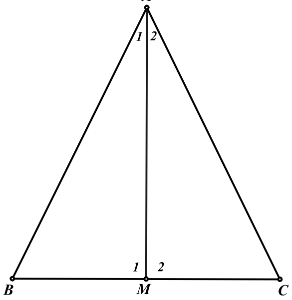
در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

ج) قضیه ۱–۳ : هر گاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث بایکدیگر همنهشت هستند.



$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مسأله ۱–۶ : ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانه وارد بر قاعده، ارتفاع و نیمساز نیز می‌باشد.



در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AM میانه‌ی وارد بر قاعده است.

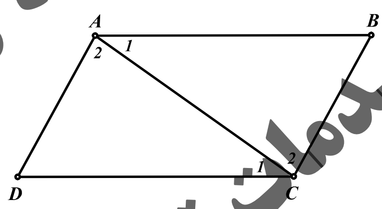
$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ BM = CM \\ AM = AM \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{ACM} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$$

در نتیجه، AM، نیمساز و ارتفاع مثلث ABC می‌باشد.

نتیجه: از همنهشتی دو مثلث $\overset{\Delta}{ABM}$ و $\overset{\Delta}{ACM}$ می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه مجاور به قاعده بایکدیگر برابرند $(\hat{B} = \hat{C})$ و بالعکس.

مسأله ۱–۷ : ثابت کنید هر چهارضلعی که اضلاع مقابل آن دو به دو بایکدیگر برابر باشند،یک متوازی‌الاضلاع است.

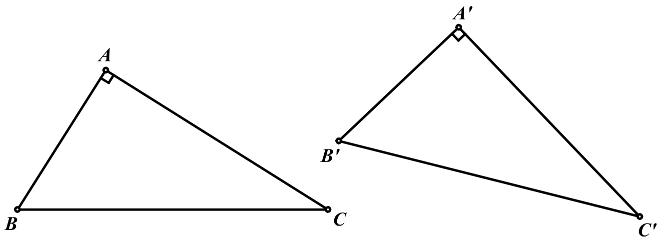


$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{CAD} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC \end{array}\right.$$

در نتیجه چهار ضلعی $ABCD$،یک متوازی‌الاضلاع است.

در مثلث قائم‌الزاویه علاوه بر سه حالت گذشته، بنابر هریک از دو حالت زیر نیز همنهشت خواهند بود:

الف) قضیه ۱–٤ : هر گاه وتر ویک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ویک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌خواهند بود.

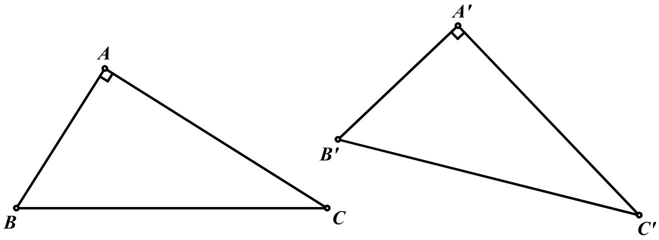


$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات این قضیه مشابه مسأله ۱–۳ می‌باشد.

ب) قضیه ۱–۵ : هر گاه وتر ویک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ویک ضلع از مثلث قـائم‌الزاویـه‌ی دیگـری برابـر باشند، آن دو مثلث بایکدیگر همنهشت خواهند بود.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'=90^\circ\\ BC=B'C'\\ AB=A'B'\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}=\overset{\Delta}{A'B'C'}$$



طبق قضیه فیثاغورث در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

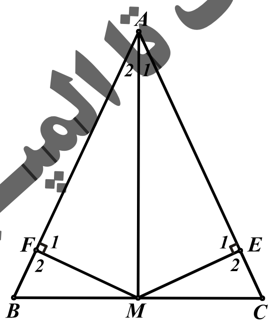
$$\begin{cases}AB^2+AC^2=BC^2 & \Rightarrow AC^2=BC^2-AB^2\\ A'B'^2+A'C'^2=B'C'^2 & \Rightarrow A'C'^2=B'C'^2-A'B'^2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}BC=B'C'\\ AB=A'B'\end{array}\right\}\Rightarrow BC^2-AB^2=B'C'^2-A'B'^2$$

$$\Rightarrow AC^2=A'C'^2\Rightarrow AC=A'C'$$

بنابراین دو مثلث به حالت سه ضلع با هم همنهشت می‌شوند.

مسأله ۱–۸ : ثابت کنید هر مثلثی که میانه و نیمساز آن بریکدیگر منطبق باشند،یک مثلث متساوی‌الساقین است.



میانه AM از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پای عمودهای وارد از M بر اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_1=\hat{F}_1=90^\circ\\ AM=AM\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AME}=\overset{\Delta}{AMF}\Rightarrow\begin{cases}AE=AF\\ ME=MF\end{cases}\qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_2=\hat{F}_2=90^\circ\\ MC=BM\\ ME=MF\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{MCE}=\overset{\Delta}{MBF}\Rightarrow CE=BF\qquad (2)$$

با جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$AE+CE=AF+BF\Rightarrow AC=AB$$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) خط d و دو نقطه A و B روی آن و نقطه‌ی O خارج از آن مفروض‌اند. از O به A و B وصل کرده و هر کدام را به اندازه‌ی خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط C و D حاصل شوند. ثابت کنید نقاط C و D از خط d هم فاصله‌اند.

۲) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. اوساط اضلاع AD و BC را به ترتیب E و F می‌نامیم. اگر CE و AF قطر BD را به ترتیب در M و N قطع کنند، نشان دهید : $DM = BN$

۳) روی اضلاع AB , BC , CD و DA از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به ترتیب چهار پاره‌خط AE , BF , CM و DN را بطور مساوی جدا می‌کنیم. ثابت کنید چهار ضلعی $EFMN$ متوازی‌الاضلاع است.

۴) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و درخارج از آن دو مثلث متساوی‌الساقین ABD و ACE را می‌سازیم بطوری‌که $AB = AD$ و $AC = AE$. اگر داشته‌باشیم $D\hat{A}E = \hat{B} + \hat{C}$ و M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید : $DE = 2AM$

۵) نقطه دلخواه D را بر روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC انتخاب می‌کنیم. اگر E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از D بر اضلاع AB و AC و BH ارتفاع وارد بر AC باشد، ثابت کنید:

$DE + DF = BH$

۶) مربع $ABCD$ و نقطه E بر ضلع CD مفروض‌اند. نیمساز زاویه‌ی EAB را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در F قطع کند. ثابت کنید: $BF + DE = AE$

۷) در مثلث ABC، از M وسط ضلع BC عمودی بر نیمساز داخلی زاویه‌ی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC ویا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید : $BE = CF$

۸) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، نقاط E و F را به ترتیب روی AC و امتداد AB طوری انتخاب می‌کنیم که $BE = CF$ باشد، نشان دهید BC، پاره خط EF را نصف می‌کند

۹) چهار ضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. از نقاط B , C و D عمودهای BB', CC' و DD' را بر خط d که از نقطه‌ی A می‌گذرد، فرود می‌آوریم. نشان دهید: $CC' = BB' + DD'$

۱۰) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC', BCA' , $CB'A$ را می‌سازیم. ثابت کنید: $AA' = BB' = CC'$

۱۱) ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه

الف) میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

ب) اگریکی از زوایا برابر 30° باشد ، ضلع روبروی زاویه 30° برابر نصف وتر است.

۱۲) در مثلث ABC، $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ است. اگر نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث باشد، ثابت کنید که دو مثلث ABC و HBC همنهشت هستند.

۲–۱ تشابه مثلث‌ها

هدف بخش: در این بخش برآنیم تا ضمن شناخت خواص مثلث‌های متشابه، با کاربردهای وسیع و گوناگون تشابه در انواع مسایل هندسی آشنا شویم.

پیش از آنکه به قضیه‌ی تالس و تشابه مثلث‌ها بپردازیم، بدلیل کاربرد برخی خواص نسبت‌های تناسب در تشابه، مروری بر بعضی از مهمترین این خواص خواهیم داشت.

قضیه ۱–٦ : اگر تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ برقرار باشد نسبت‌های زیر برقرار خواهند بود:

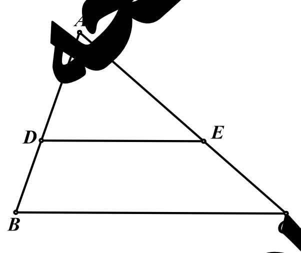
الف) $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$ به این خاصیت ترکیب در صورت (+)یا تفصیل در صورت (–) می‌گویند.

ب) $\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$ به این خاصیت ترکیب در مخرج (+)یا تفصیل در مخرج (–) می‌گویند.

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$

اثبات تمامی‌قسمت‌های بالا مشابه‌یکدیگر است و کافی است هر نسبت را طرفین – وسطین کرده و ساده کنید، تا به عبارت $ad=bc$ که همان فرض $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ است، برسید.

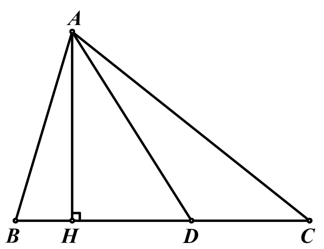
قضیه تالس ۱–۷ : هر خط موازی با یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر مثلث را به نسبت‌های یکسان تقسیم می‌کند.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

برای اثبات قضیه تالس ابتدا لم مهم و کاربردی زیر را مطرح می‌کنیم.

لم : برای هر خط دلخواه AD که ضلع BC از مثلث ABC را قطع می‌کند نسبت پاره خط‌های بوجود آمده بر روی BC با نسبت مساحت مثلث‌های متناظر برابر است.

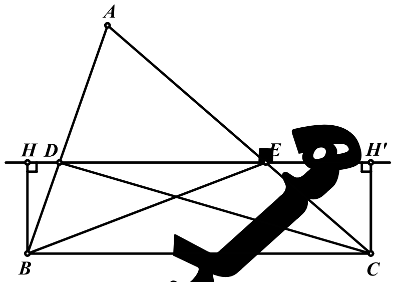


حکم : $\frac{BD}{DC}=\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$

H را پای ارتفاع نظیر رأس A می‌نامیم.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AH\ .\ BD}{\frac{1}{2}AH\ .\ DC}=\frac{BD}{DC}$$

برای اثبات قضیه تالس هر کدام از نسبت‌های $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{AE}{EC}$ را با استفاده از لم فوق به نسبت مساحت‌ها تبدیل می‌کنیم تا حکم جدید حاصل گردد.



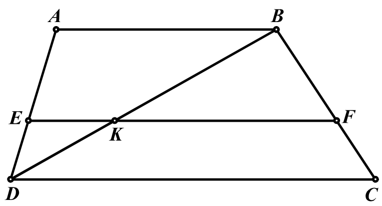
حکم جدید:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AD}{DB}=\frac{S_{EDA}}{S_{EDB}}\\ \frac{AE}{EC}=\frac{S_{DEA}}{S_{DEC}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{EDA}}{S_{EDB}}=\frac{S_{DEA}}{S_{DEC}}\Rightarrow S_{EDB}=S_{DEC}$$

$$\left.\begin{array}{l}S_{EDB}=\frac{1}{2}DE.BH\\ S_{DEC}=\frac{1}{2}DE.CH'\\ BC\parallel DE\Rightarrow BH=CH'\end{array}\right\}\Rightarrow S_{EDB}=S_{DEC}$$

پس حکم جدید برقرار است که از آن حکم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ نتیجه می‌شود.

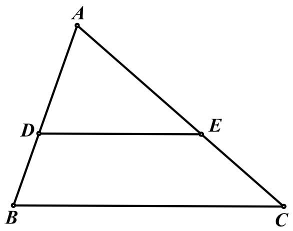
مسأله ۱-۹ : ثابت کنید هرخط موازی قاعده‌های ذوزنقه، ساق‌های آن را به طور متناسب قطع می‌کند.



محل برخورد BD و EF را K می‌نامیم . با استفاده از قضیه تالس در دو مثلث ABD و BCD خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} EK \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AE}{ED}=\dfrac{BK}{KD} \\ FK \parallel CD \Rightarrow \dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BK}{KD} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AE}{ED}=\dfrac{BF}{FC}$$

عکس قضیه تالس: هر خطی که دو ضلع از مثلث را به طور متناسب قطع کند با ضلع سوم موازی خواهد بود.

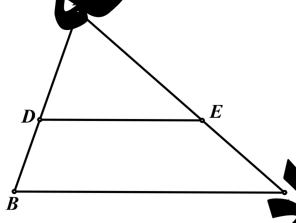


$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

اثبات عکس قضیه تالس را به خود شما واگذار می‌کنیم.

راهنمایی: برای اثبات عکس قضیه تالس از نقطه D خطی موازی BC رسم کنید تا AC را در نقطه‌ی E' قطع کند. با استفاده از قضیه تالس ثابت کنید که نقطه E' بر نقطه‌ی E منطبق است.

نکته: طبق قضیه تالس $DE \parallel BC$ است، اگر و فقط اگر $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ باشد. اما طبق خواص نسبت‌های تناسب شرط $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ را می‌توان با استفاده از ترکیب در مخرج یا صورت به نسبت‌های زیر تبدیل کرد.



الف) $\dfrac{AD}{DB+AD}=\dfrac{AE}{EC+AE} \Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

ب) $\dfrac{AD+DB}{DB}=\dfrac{AE+EC}{EC} \Rightarrow \dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$

به عبارت دیگر طبق قضیه‌ی تالس $DE \parallel BC$ است اگر و فقط اگر هرکدام از نسبت‌های فوق برقرار باشد.

تعریف: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ بایکدیگر متشابه هستند $(\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'})$ اگر و فقط اگر:

۱- زوایای دو مثلث دو بدو بایکدیگر برابر باشند. $\hat{A}=\hat{A}'\ ,\ \hat{B}=\hat{B}'\ ,\ \hat{C}=\hat{C}'$

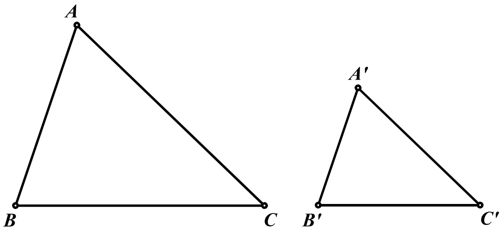
۲- اضلاع متناظر متناسب باشند. $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k$

که به عدد ثابت k، نسبت تشابه دو مثلث گفته می‌شود.

دو مثلث بنابر هریک از سه حالت زیر متشابه خواهند بود:

الف) قضیه ۱-۸: هر گاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث تشابه هستند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A'}\\ \hat{B}=\hat{B'}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

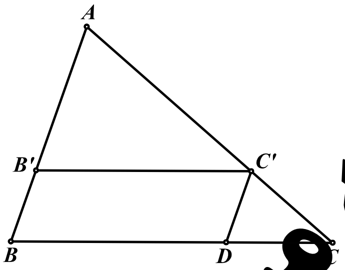


از آنجا که دو زاویه A و A' بایکدیگر و B و B' نیز بایکدیگر برابرند، پس زوایای C و C' نیز بـا هـم برابر خواهند بود. بنابراین شرط اول تشابه دو مثلث یعنی تساوی زوایا برقرار است. اما برای اثبات تناسـب اضـلاع، مثلـث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC طوری قرار می‌دهیم که دو زاویه A و A' بریکدیگر منطبق شوند .

$$\hat{B}=\hat{B'}\Rightarrow B'C' \parallel BC$$

طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC} \qquad (۱)$$



پس تناسب دو ضلع برقرار است، اما برای اثبات نسبت ضلع سوم، از C' خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در D قطع کند. طبق قضیه تالس خواهیم داشت:

$$C'D \parallel AB \Rightarrow \frac{AC'}{AC}=\frac{BD}{BC}$$

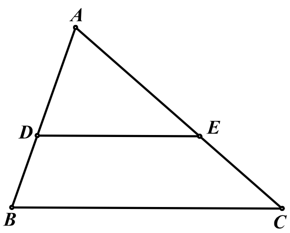
در متوازی‌الاضلاع $B'C'DB$ دو ضلع BD و $B'C'$ با هم برابرند

$$\Rightarrow \frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

از آنجا که شرط دوم تشابه‌یعنی تناسب اضلاع نیز برقرار است، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مشابه هستند.



نتیجه: طبق قضیه فوق در صورتی که خطی موازی BC، دو ضـلع دیگـر مثلـث را در نقاط D و E قطع کند. خواهیم داشت: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

مسأله ۱-۱۰: ثابت کنید در دو مثلث متشابه همواره:

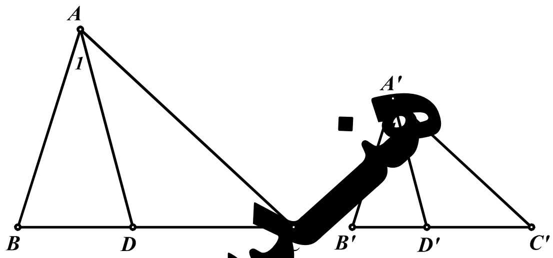
الف) نسبت طول نیمسازهای نظیر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

ب) نسبت طول ارتفاع‌های نظیر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

ج) نسبت مساحت دو مثلث برابر مربع نسبت تشابه دو مثلث است.

د) نسبت محیط دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

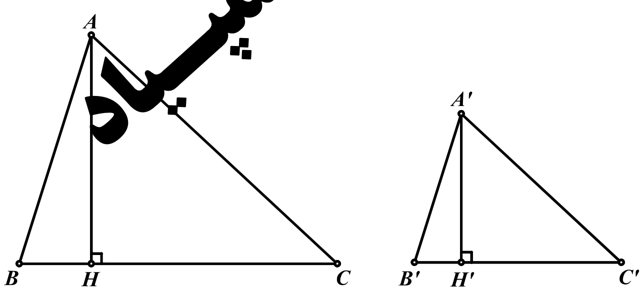
الف) عدد ثابت k را برابر نسبت تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در نظر می‌گیریم.
AD و $A'D'$ به ترتیب نیمسازهای داخلی دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \dfrac{\hat{A}}{۲} = \dfrac{\hat{A}'}{۲} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{A}'_۱ \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{A'B'D'} \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

ب) AH و $A'H'$، به ترتیب ارتفاع‌های دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.



$$\left.\begin{array}{r} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{A'B'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

ج)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}AH.BC}{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}\Rightarrow=\frac{AH}{A'H'}.\frac{BC}{B'C'}=k\ .\ k=k^2$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=k^2$$

د)

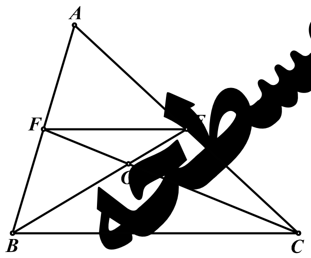
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$

با استفاده از خواص نسبت‌های تناسب داریم:

$$\Rightarrow\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{AB}{A'B'}=k$$

مسأله ۱-۱۱: ثابت کنید میانه‌های هر مثلث‌یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند.

حکم: $\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}$



در مثلث ABC ، BE و CF میانه‌های مثلث هستند یعنی:

$$AE=CE\ ,\ AF=BF$$

$$\Rightarrow\frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EC}=1$$

طبق عکس قضیه تالس نتیجه می‌گیریم که:

$$\Rightarrow EF\parallel BC$$

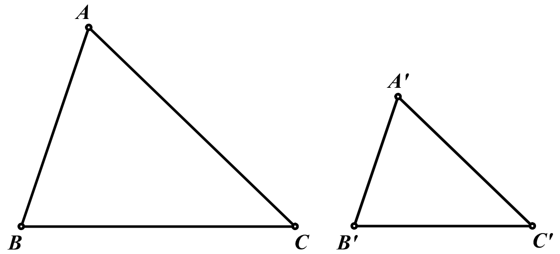
$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow A\hat{F}E=A\hat{B}C\\ \hat{A}=\hat{A}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AFE}\sim \overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{FE}{BC}=\frac{AF}{AB}=\frac{1}{2}\quad(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}EF\parallel BC\Rightarrow E\hat{F}G=B\hat{C}G\\ EF\parallel BC\Rightarrow F\hat{E}G=C\hat{B}G\end{array}\right\}\Rightarrow\ \overset{\Delta}{GEF}\sim\overset{\Delta}{GBC}\Rightarrow\frac{GB}{GE}=\frac{GC}{GF}=\frac{BC}{FE}$$

با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم:

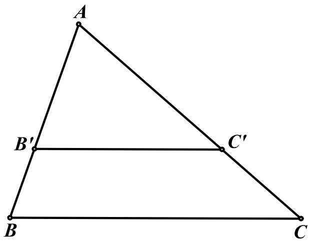
$$\frac{GB}{GE}=\frac{GC}{GF}=\frac{2}{1}$$

ب) قضیه ۱-۹: هر گاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن‌ها نیز برابر باشد، دو مثلث متشابه هستند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}' \\ \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

برای اثبات، مانند قسمت قبل مثلث‌ها را روی‌یکدیگر قرار می‌دهیم. طبق فرض و عکس قـضیه تـالس خـواهیم داشت:

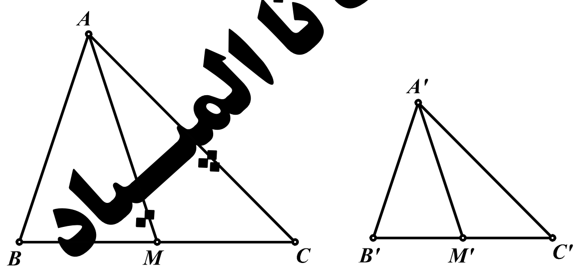


$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC} \Rightarrow B'C' \parallel BC$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B}' \\ \hat{A}=\hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AB'C'} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

طبق حالت دو زاویه، دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه‌اند.

مسأله ۱-۱۲: ثابت کنید در دو مثلث متشابه همواره نسبت طول میانه‌های متناظر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.



عدد k را برابر نسبت تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ فرض می‌کنیم. AM و $A'M'$ بـه ترتیـب میانه‌های دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.

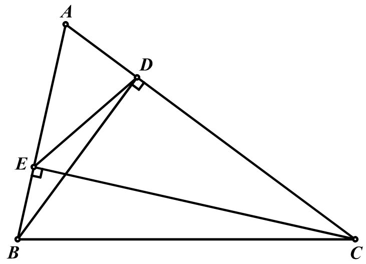
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases}\hat{B}=\hat{B}' \\ \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k\end{cases} \qquad (۱)$$

$$\frac{BM}{B'M'}=\frac{\frac{BC}{۲}}{\frac{B'C'}{۲}}=\frac{BC}{B'C'}=k \qquad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$A\overset{\Delta}{B}M \sim A'\overset{\Delta}{B'}M' \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

مسأله ۱-۱۳: اگر BD و CE ارتفاع‌های مثلث ABC باشند، ثابت کنید: $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{D}E$

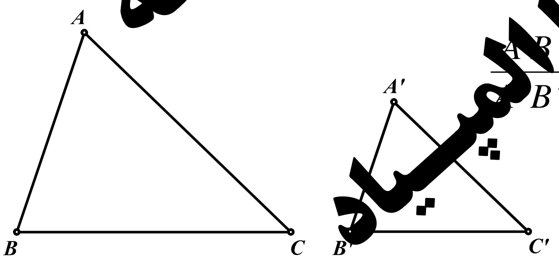


ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث ABD و ACE متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = ۹۰^\circ \\ \hat{A} = \hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}D \sim A\overset{\Delta}{C}E \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \\ \hat{A} = \hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

ج) قضیه ۱-۱۰: هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

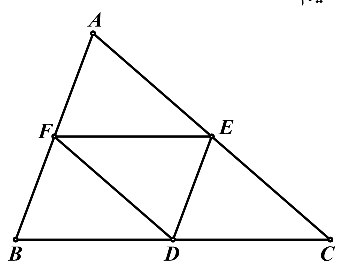


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

اثبات این قضیه به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۱-۱۴: اگر D و E و F اوساط اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF به نسبت ۲ به ۱ بایکدیگر متشابه‌اند.

D و E و F را به ترتیب اوساط اضلاع BC، AC و AB می‌نامیم.



$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} = ۱ \Rightarrow FE \parallel BD$$

$$\Rightarrow \frac{FE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

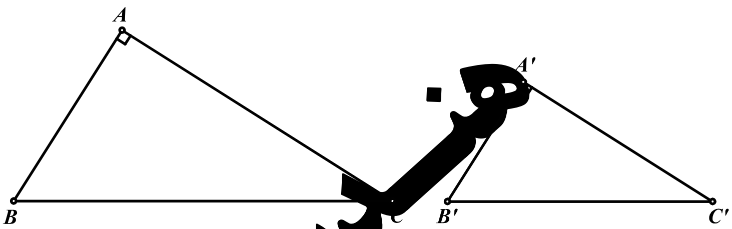
$$\Rightarrow BC = ۲FE$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد که:

$$AC=۲DF \quad , AB=۲DE$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE}=۲ \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F$$

مسأله ۱-۱۵: اگر برای دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$, $(\hat{A}=\hat{A'}=۹۰^\circ)$ داشته باشیم $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ ثابت کنید: $A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$



عدد k را برابر نسبت $\frac{BC}{B'C'}$ در نظر می‌گیریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} AB=k.A'B' \Rightarrow AB^۲=k^۲ . A'B'^۲ \\ BC=k.B'C' \Rightarrow BC^۲=k^۲ . B'C'^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC^۲-AB^۲=k^۲ . B'C'^۲-k^۲ . A'B'^۲=k^۲(B'C'^۲-A'B'^۲)$$

طبق قضیه فیثاغورث نتیجه می‌گیریم که:

$$AC^۲=k^۲ . A'C'^۲ \Rightarrow \frac{AC}{A'C'}=k$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) نقاط اوساط اضلاع AB ، BC ، CD و DA از چهار ضلعی $ABCD$ را به ترتیب M ، N ، P و Q می‌نامیم. ثابت کنید چهار ضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.

۲) خط دلخواهی را از رأس C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرانیم تا امتدادهای اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=1$

۳) امتداد ساق‌های AD و BC از ذوزنقه $ABCD$ یکدیگر را در M قطع می‌کنند. از M خطی به موازات دو قاعده رسم می‌کنیم تا امتدادهای AC و BD را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید:

$$EM=MF$$

۴) وسط ضلع BC از مثلث ABC را M می‌نامیم. نقطه دلخواه F را بر روی AC انتخاب می‌کنیم و BF را رسم می‌کنیم تا AM را در E قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BE}$

۵) مثلث ABC مفروض است. سه خط موازی یکدیگر از سه رأس A ، B و C می‌گذرانیم تا اضلاع مقابل یا امتداد آنها را به ترتیب در A' ، B' و C' قطع کنند. اگر A' بین B و C باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{AA'}=\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}$$

۶) در مثلث ABC، M وسط ضلع BC و N وسط میانه‌ی AM است. محل تقاطع BN با امتداد AC را D می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $AD=\frac{1}{3}AC$

ب) $ND=\frac{1}{4}BD$

۷) در مثلث ABC، از M وسط ضلع BC، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا نیمساز رأس A را در N قطع کند. نشان دهید: $MN=\frac{|AC-AB|}{2}$

۸) خطی که موازی قطر AC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ رسم می‌شود، اضلاع AB و BC را در E و F قطع می‌کند. محل برخورد دو خط CE و AD را P و محل برخورد دو خط AF و DC را Q می‌نامیم. ثابت کنید خط PQ نیز با قطر AC موازی است.

۹) در مثلث ABC، A را نسبت به نقطه‌ی وسط BC، قرینه می‌کنیم تا P و نقطه‌ی B را نسبت به C قرینه می‌کنیم تا Q بدست آید. ثابت کنید که اضلاع مثلث APQ دو برابر میانه‌های مثلث ABC است.

۱۰) اگر نقاط M و N اوساط ساق‌های AD و BC از ذوزنقه $ABCD$ باشند ثابت کنید :

الف) $MN \parallel AB \parallel CD$

ب) $MN = \frac{AB+CD}{۲}$

۱۱) دو نیم خط موازی Ax و By را از دو سر پاره خط AB و دریک طرف آن رسم می‌کنیم. نقاط M و N را به ترتیب روی این دو نیم خط طوری انتخاب می‌کنیم که $AM+BN=AB$. اگر D وسط MN باشد، ثابت کنید زاویه ADB قائمه است.

۱۲) در مثلث ABC، از نقطه‌ی دلخواه D روی ضلع BC، خطی موازی میانه AM رسم می‌کنیم تا AC و AB ویا امتداد آن‌ها را به ترتیب در N و P قطع کند. ثابت کنید:

الف) $DP+DN$ مقداری ثابت است.

ب) $\frac{AP}{AN}=\frac{AB}{AC}$

۱۳) در ذوزنقه $ABCD$، از P، محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده‌ی AB رسم می‌کنیم تا دو ساق AD و BC را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید :

الف) $EP=PF$

ب) $\frac{۲}{EF}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}$

۱۴) در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، پای ارتفاع نظیر رأس A را H و پای ارتفاع‌های وارد از H بر اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $AH^۲=BH.CH$

ب) $AB^۲=BH.BC$

ج) $HB.HC=AE.EC+AF.FB$

۱۵) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، خطی که از A می‌گذرد BD، BC و امتداد CD را به ترتیب در M و N و L قطع می‌کند. نشان دهید: $AM^۲=MN.ML$

۱۶) دو مربع $ACEK$ و $ABFL$ را در خارج مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ می‌سازیم. محل برخورد دو پاره‌خط BE و AC را P و محل برخورد دو پاره‌خط CF و AB را Q می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $AP=AQ$

ب) $AP^۲=BQ.CP$

۱۷) در مثلث ABC، AH ارتفاع می‌باشد. E و F را به ترتیب پای ارتفاع‌های وارد از H بر اضلاع AC و AB می‌نامیم. نشان دهید: $\widehat{BEH}=\widehat{CFH}$.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه ABC $(AB = AC)$ مفروض است. از نقطه‌ی D واقع بر وتر BC، عمودهای DE و DF را به ترتیب بر AC و AB فرود می‌آوریم. اگر M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید: $ME = MF$

۲) در مثلث ABC، بر دو ضلع AB و AC و در خارج مثلث ABC، دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین طوری ایجاد می‌کنیم که AB و AC وترهای آن‌ها باشد. اگر رئوس این دو مثلث را D و E بنامیم و M وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید:

الف) $MD = ME$

ب) $MD \perp ME$

۳) روی ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC مربع‌های $ABDE$ و $ACKF$ را رسم می‌کنیم. اگر M وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید:

الف) $EF = ۲AM$

ب) $EF \perp AM$

۴) نقطه‌ی P را درون مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته‌باشیم $P\hat{B}A = P\hat{C}A$. پای عمودهای وارد از P بر اضلاع AB و AC را به ترتیب E و F می‌نامیم. اگر M وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید: $ME = MF$

۵) نقاط D و E را به ترتیب روی امتداد اضلاع AB و AC (از طرف C,B) مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که $BD = CE$ باشد. محل تقاطع امتدادهای BC و DE را F می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

۶) خطی که از اوساط اقطار چهار ضلعی $ABCD$ می‌گذرد، اضلاع AB و CD را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. ثابت کنید: $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF}$

۷) BH و CK ارتفاع‌های مثلث ABC هستند. نقاط P و Q را به ترتیب روی BH و CK طوری انتخاب می‌کنیم که داشته‌باشیم $\widehat{APC} = \widehat{AQB} = ۹۰^\circ$. ثابت کنید: $AP = AQ$

۸) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، M وسط ضلع BC و H پای عمود وارد از M بر ضلع AC و N وسط MH می‌باشد. ثابت کنید: $AN \perp BH$

۹) در مثلث ABC، زاویه‌ی B منفرجه است. اگر AH ارتفاع مثلث باشد و بدانیم که $(\frac{AB}{AC})^۲ = \frac{BH}{CH}$ ثابت کنید: $\hat{B} - \hat{C} = ۹۰^\circ$

۱۰) از G، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC، خط دلخواهی می‌گذرد. تصاویر نقاط A، B و C روی این خط را به ترتیب A'، B' و C' می‌نامیم. نشان دهید مجموع دو تا از طول‌های AA'، BB' و CC' برابر سومی‌است.

فصل دوم

هندسه‌ی مقدماتی ۲

۲–۱ دایره و زوایا

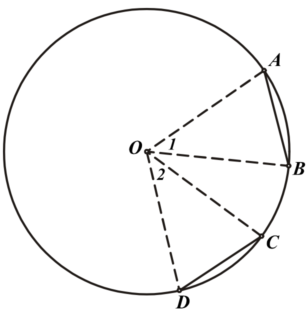
هدف بخش: در این بخش با ۵ نوع زاویه در دایره آشنا می‌شویم و سعی می‌کنیم بیشتر به کاربرد همه آن‌ها در کناریکدیگر بپردازیم. این ۵ نوع زاویه عبارتند از:

۱) زاویه مرکزی
۲) زاویه محاطی
۳) زاویه داخلی
۴) زاویه خارجی
۵) زاویه ظلّی

تعریف: زاویه مرکزی زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشند.

تعریف: اندازه هر کمانی از دایره برحسب درجه برابر است با اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل آن کمان.

مسأله ۲–۱: ثابت کنید اگر دو کمان AB و CD از دایره بایکدیگر برابر باشند، دو وتر AB و CD نیز برابر خواهند شد و بالعکس.



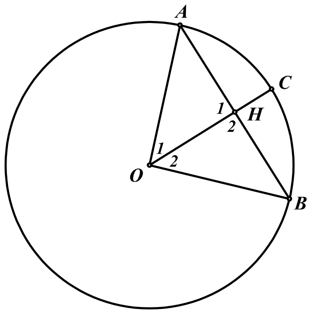
حکم: $AB = CD$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{AB} \\ \hat{O}_2 = \overset{\frown}{CD} \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویه بین بایکدیگر همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} = \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow AB = CD$$

مسأله ۲-۲: ثابت کنید اگر از مرکز دایره به وسط کمان AB وصل کنیم، عمود منصف وتر AB خواهد شد.



از نقطه O به C وسط کمان AB وصل می‌کنیم تا وتر AB را در H قطع کند.

$$\left.\begin{array}{r} AC = BC \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ AO = BO \\ OH = OH \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOH} = \overset{\Delta}{BOH} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{array}\right.$$

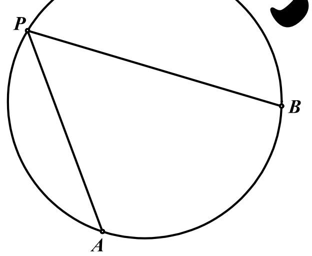
$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = ۱۸۰^\circ \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = ۹۰^\circ$$

بنابراین OH هم عمود بر AB و هم منصف آن است.

تعریف: زاویه محاطی زاویه‌ای است که راس آن روی محیط دایره و دو ضلع آن دو وتر از دایره باشند.

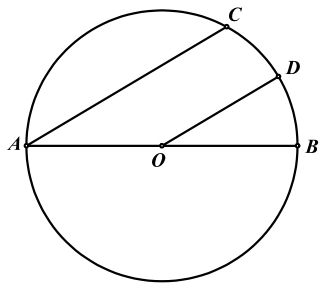
تعریف: کمان در خور هر زاویه به کمانی از دایره که داخل زاویه قرار دارد گفته می‌شود.

قضیه ۲-۱: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان در خور آن است.



$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$$

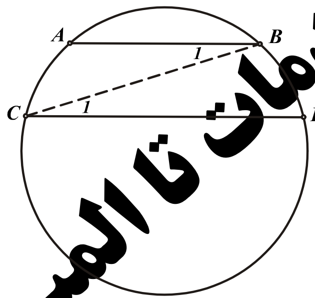
مسأله ۲-۳: در دایره‌ی به مرکز O و قطر AB وتر AC با شعاع OD موازی است. ثابت کنید : $\overparen{CD} = \overparen{DB}$



$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel OD \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{DOB} \\ \widehat{CAB} = \dfrac{\overparen{CB}}{2} \\ \widehat{DOB} = \overparen{DB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overparen{CB}}{2} = \overparen{DB} \Rightarrow \overparen{CB} = 2\overparen{DB}$$

پس کمان CB دو برابر کمان DB است یعنی دو کمان CD و DB بایکدیگر برابرند.

مسأله ۲-٤: ثابت کنید اگر دو وتر AB و CD موازی باشند، کمان‌های محصور بین آن‌ها نیز بایکدیگر برابرند و بالعکس.



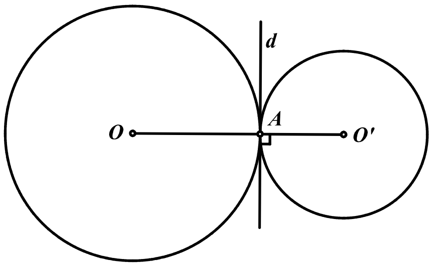
حکم : $\overparen{AC} = \overparen{BD}$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \dfrac{\overparen{AC}}{2} \\ \hat{C}_1 = \dfrac{\overparen{BD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overparen{AC}}{2} = \frac{\overparen{BD}}{2} \Rightarrow \overparen{AC} = \overparen{BD}$$

اثبات عکس مسأله نیز کار ساده‌ای است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله۲-۵: دو دایره به مراکز O و O' در نقطه A بریکدیگر مماس داخل‌اند. خط دلخواهی کـه از A مـی‌گـذرد، دواير را در C و C' قطع می‌کند. ثابت کنید: $OC \parallel O'C'$

لم: هر گاه دو دایره به مراکز O و O' در نقطه‌ای مثل A بریکدیگر مماس (داخل‌یا خارج) باشند سه نقطه‌ی O، O' و A هم خطاند. (بر روی‌یک خط راست قرار دارند.)

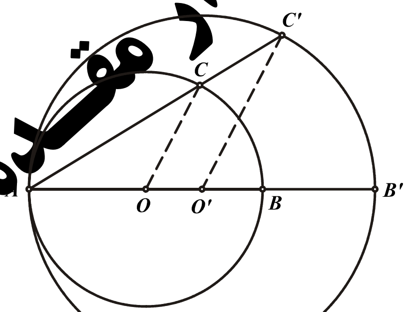


اثبات لم: خط d را که در نقطه‌ی A بر هر دو دایره مماس است رسم می‌کنیم و از دو نقطه‌ی O و O' به A وصل می‌کنیم

$$\left.\begin{array}{l} OA \perp d \\ O'A \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow OA \parallel O'A$$

پس سه نقطه‌ی O، O' و A هم خط هستند.

اثبات مسأله: بنابر لم بالا در این مسأله نیز O، O' و A هم‌خطاند.



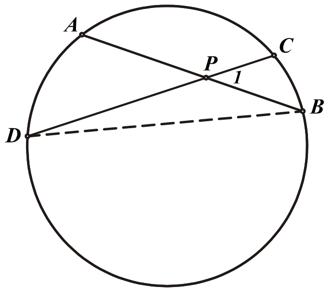
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{B'C'}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{B'C'}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{B'C'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{COB} = \overset{\frown}{BC} \\ \widehat{C'O'B'} = \overset{\frown}{B'C'} \\ \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{B'C'} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{COB} = \widehat{C'O'B'} \Rightarrow OC \parallel O'C'$$

تعریف: زاویه داخلی زاویه‌ای است که از برخورد دو وتر در داخل دایره حاصل می‌شود.

نکته: هر زاویه داخلی دارای دو کمان در خور است.یکی کمانی که داخل خودش قرار دارد و دیگری کمانی که داخل زاویه متقابل به رأس با آن زاویه قرار دارد.

قضیه ۲–۲: اندازه هر زاویه داخلی برابر نصف مجموع کمان درخورهای آن است.

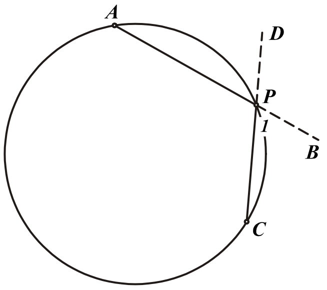


حکم : $\hat{P}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$

از آنجا که $\hat{P}_1$ زاویه خارجی مثلث PDB است خواهیم داشت:

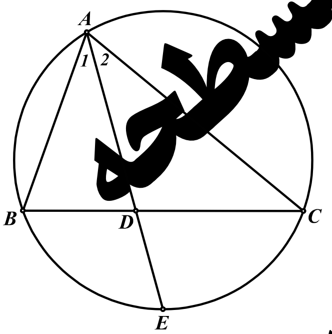
$$\left.\begin{array}{l}\hat{P}_1=\hat{D}+\hat{B}\\ \hat{D}=\dfrac{\widehat{BC}}{2}\\ \hat{B}=\dfrac{\widehat{AD}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{P}_1=\frac{\widehat{BC}}{2}+\frac{\widehat{AD}}{2}=\frac{\widehat{AD}+\widehat{BC}}{2}$$

ممکن است دو وتریکدیگر را روی دایره نیز قطع کنند که در این حالت نیز خواهیم داشت:



$$\hat{P}_1=\frac{\widehat{AP}+\widehat{PC}}{2}=\frac{\widehat{APC}}{2}$$

مسأله ۲-۶: اگر AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ و E محل برخورد AD با دایره محیطی مثلث ABC باشد، ثابت کنید: $\widehat{BDE}=\widehat{ABE}$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\dfrac{\widehat{BE}}{2}\\ \hat{A}_2=\dfrac{\widehat{CE}}{2}\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{BE}=\widehat{CE}$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABE}=\dfrac{\widehat{AC}+\widehat{CE}}{2}\\ \widehat{BDE}=\dfrac{\widehat{AC}+\widehat{BE}}{2}\\ \widehat{BE}=\widehat{CE}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{BDE}$$

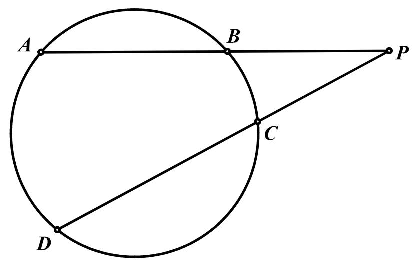
تعریف: زاویه خارجی زاویه‌ای است که از برخورد امتداد دو وتر در خارج دایره بوجود می‌آید.

نکته: هر زاویه خارجی نیز دو کمان در خور دارد که هر دو در داخل زاویه قرار دارند.

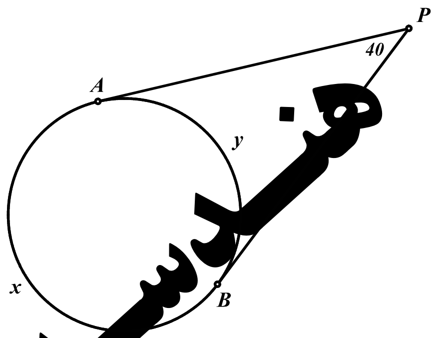
قضیه۲-۳: اندازه هر زاویه خارجی برابر است با نصف تفاضل کمان درخورهایش. $\hat{P}=\dfrac{\widehat{AD}-\widehat{BC}}{2}$

اثبات این قضیه نیز مشابه قضیه قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

راهنمایی: خط BD را رسم کرده و به حکم نیز دقت کنید.



مسأله۲-۷ : اگر اندازه زاویه P برابر 40° باشد، اندازه کمان‌های x و y را بیابید.



$$\hat{P} = \frac{x-y}{2} = 40^\circ \Rightarrow x-y = 80^\circ$$

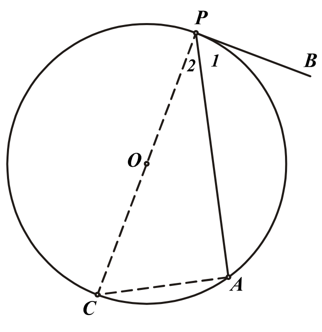
$$\begin{cases} x-y = 80^\circ \\ x+y = 360^\circ \end{cases} \Rightarrow 2x = 440^\circ \Rightarrow x = 220^\circ \ ، \ y = 140^\circ$$

تعریف: زاویه ظلّی زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره،یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگر آن خطی مماس بر دایره باشد.

نکته: خط مماس تنها دریک نقطه دایره را قطع می‌کند و در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

قضیه ۲-٤: اندازه هر زاویه ظلّی برابر است با نصف کمان درخورش.

قطر گذرنده از P را رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم دو زاویه P_1 و C بایکدیگر برابرند.

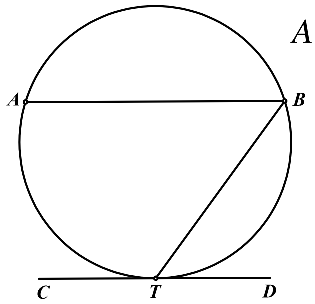


$$\hat{A} = \frac{\overparen{PC}}{2} = 90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \hat{C} + \hat{P}_2 = 90^\circ \\ \hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{C}$$

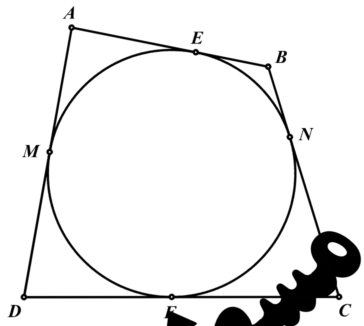
$$\left.\begin{array}{r} \hat{C} = \frac{\overparen{PA}}{2} \\ \hat{C} = \hat{P}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{P}_1 = \frac{\overparen{PA}}{2}$$

مسأله۲-۸: اگر خط CD موازی وتر AB بوده و در نقطه T نیز بر دایره مماس باشد، ثابت کنید: $\overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{BT}$



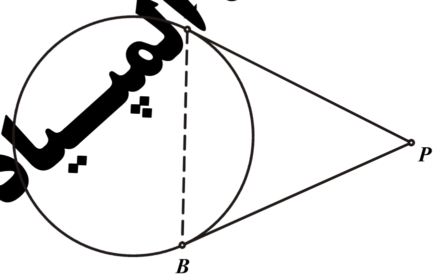
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{ABT}=\widehat{BTD} \\ \widehat{ABT}=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \widehat{BTD}=\dfrac{\overset{\frown}{BT}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{BT}$$

مسأله ۲-۹: ثابت کنید در هر چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع روبرو با هم برابرند.(چهارضلعی محیطی چهارضلعی است که تمام اضلاع آن بریک دایره مماس باشند)



حکم: $AB+DC=AD+BC$

لم: طول مماس‌های مرسوم ازیک نقطه بر دایره بایکدیگر برابر است.



اثبات لم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}$$

بنابراین مثلث PAB متساوی الساقین بوده و دو ساق PA و PB بایکدیگر برابرند.

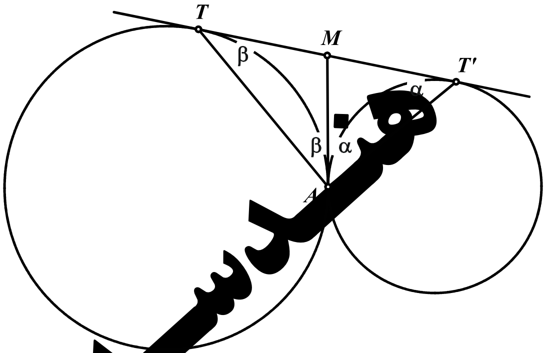
اثبات مسأله : بنابر لم فوق خواهیم داشت:

$$AE = AM \ , BE = BN \ , CF = CN \ , DF = DM$$

با جمع کردن طرفین تساویهای فوق داریم:

$$AB + CD = AD + BC$$

مسأله ۲-۱۰: دو دایره در نقطه A بریکدیگر مماس خارج‌اند و TT' مماس مشترک خارجی آن‌هاست. ثابت کنید مثلث TAT' قائم الزاویه است.



مماس مشترک داخلی دو دایره را در نقطه A رسم می‌کنیم تا TT' را در M قطع کند. از آنجا که هر دو زاویه ظلّی با کمان درخور مشترک با یکدیگر برابرند داریم:

$$\widehat{MAT'} = \widehat{MT'A} = \frac{\widehat{AT'}}{۲} = \alpha$$

$$\widehat{MAT} = \widehat{MTA} = \frac{\widehat{AT}}{۲} = \beta$$

مجموع زوایای داخلی مثلث ATT' برابر ۱۸۰° است. بنابراین:

$$\hat{T} + \hat{T}' + \hat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta + \alpha + (\beta + \alpha) = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲(\beta + \alpha) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta + \alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) از نقطه P مماس PT و قاطع **PAB** را بر دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید: $TA \,.\, PT = TB \,.\, PA$

۲) ارتفاع های AA' و BB' از مثلث ABC یکدیگر را در H قطع می‌کنند. ارتفاع AA' را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث ABC را در D قطع کند. ثابت کنید ضلع BC نیمساز زاویه HBD است.

۳) دو دایره در نقطه P بریکدیگر مماس خارج‌اند. دو خط دلخواه طوری رسم می‌کنیم که از نقطه P گذشته و دوایر رایکی در A و B و دیگری در C و D قطع کنند. نشان دهید: $AC \parallel BD$

۴) نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه E قطع کند. نشان دهید:

الف) $AB \,.\, AC = AD \,.\, AE$

ب) $CE^2 = AE \,.\, DE$

۵) اگر نیمساز زوایای A و B از مثلث ABC دایره محیطی مثلث را به ترتیب در E و F و یکدیگر را در I قطع کنند، ثابت کنید: $CE = BE = IE$

۶) دو دایره به مراکز O_1 و O_2 یکدیگر را در A و B قطع می‌کنند. خط دلخواهی از B می‌گذرانیم تا دو دایره را در E و F قطع کند. ثابت کنید: $\overset{\Delta}{AEF} \sim \overset{\Delta}{AO_1O_2}$

۷) روی امتداد قطر CD از نیم دایره به مرکز O (نزدیک به C) نقطه A را انتخاب می‌کنیم و خطی از A می‌گذرانیم تا نیم‌دایره را در دو نقطه B و E قطع کند به طوری که $AB = DO$. اگر $E\hat{O}D = 45^\circ$ باشد، اندازه زاویه A را بیابید.

۸) ارتفاع AH و نیمساز AD از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. قطری از دایره محیطی مثلث را که از A می‌گذرد رسم می‌کنیم و انتهای دیگر قطر را A' می‌نامیم. نشان دهید AD زاویه $H\hat{A}A'$ را نصف می‌کند.

۹) روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB دو نقطه C و D را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ باشد. از نقطه D عمودی بر CD خارج می‌کنیم تا AC را در F قطع کند. اگر محل برخورد AC و BD را E بنامیم، نشان دهید: $AF = FE$

۱۰) ارتفاع‌های مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقاط A'، B' و C' قطع کنند. اگر ارتفاع‌های مثلث در نقطه‌ی H همرس باشند، نشان دهید ارتفاع‌ها، نیمسازهای زوایای مثلث $A'B'C'$ هستند.

۱۱) خطی که از رأس B از مثلث ABC به موازات ضلع AC رسم می‌شود، خط مماس بر دایره محیطی مثلث در C را در نقطه‌ی B' قطع می‌کند و خطی که از رأس C از مثلث ABC به موازات ضلع AB رسم می‌شود، خط مماس بر دایره محیطی مثلث در B را در نقطه‌ی C' قطع می‌کند ثابت کنید:

$$BC^2 = CB'.BC'$$

۱۲) نقطه‌ی P را روی دایره ای به مرکز O انتخاب می‌کنیم و تصویر آن بر روی قطر AB از دایره را N می‌نامیم روی شعاع PO پاره خط PQ را برابر $2AN$ جدا می‌کنیم اگر AQ دایره را در نقطه دیگری مانند R قطع کند، ثابت کنید : $\widehat{AOR} = 3\widehat{AOP}$

۱۳) دایره ای به قطر AB مفروض است . وتر دلخواه AC و نیمساز زاویه‌ی $C\hat{A}B$ را رسم می‌کنیم تا این نیمساز وتر BC را در F و دایره را در H و مماسی که در نقطه‌ی B بر دایره رسم می‌شود را در D قطع کند . ثابت کنید : $FH = DH$ و $BD = BF$

۱۴) سه دایره $(O_1), (O_2), (O_3)$ دو به دو در نقاط D, E, F مماس خارج اند . امتداد های DE, DF دایره (O_1) را در نقاط A, B قطع می‌کنند. ثابت کنید:

الف) AB قطر دایره (O_1) است.

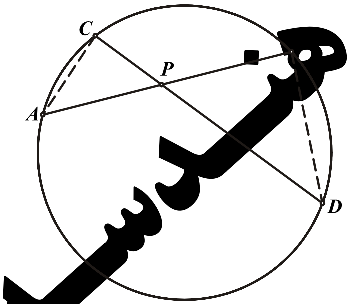
ب) خط المرکزین دو دایره (O_2) و (O_3) موازی AB است.

۱۵) دو دایره $(O_1), (O_2)$ در نقطه A بریکدیگر مماس خارج اند. از نقطه دلخواه B بر روی دایره (O_1) مماس BD را بر دایره (O_2) رسم می‌کنیم تا دایره (O_1) را در C قطع کند و امتداد پاره خط BA دایره (O_2) را در F قطع کند، ثابت کنید AD نیمساز زاویه $\widehat{CAF}$ است.

۲–۲ قوت نقطه نسبت به دایره

هدف بخش: در این بخش اشاره ای خواهیم داشت به‌یکی از خواص اساسی نقطه نسبت به دایره که کاربرد وسیعی در حل مسایل مرتبط با دایره دارد. قوت نقطه نسبت به دایره بسته به اینکه نقطه داخل‌یا خارج از دایره باشد به شکل های متفاوتی تعریف می‌شود که البته تفاوت چندانی بایکدیگر ندارند. در زیر با این مفاهیم آشنا می‌شویم .

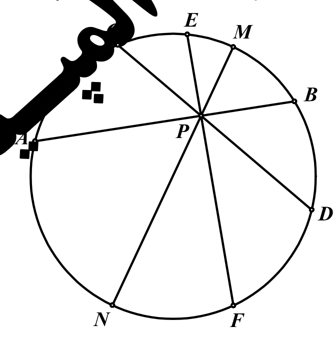
مسأله ۲–۱۱ : از نقطه P در داخل دایره C دو وتر دلخواه CD, AB را می‌گذرانیم. ثابت کنید حاصل ضرب قطعات جدا شده روی هر وتر بایکدیگر برابر است.



حکم: $AP.PB = CP.PD$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \dfrac{\widehat{AD}}{۲} \\ \widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \dfrac{\widehat{CB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{APC} \sim \overset{\Delta}{BPD} \Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PB} \Rightarrow AP.PB = CP.PD$$

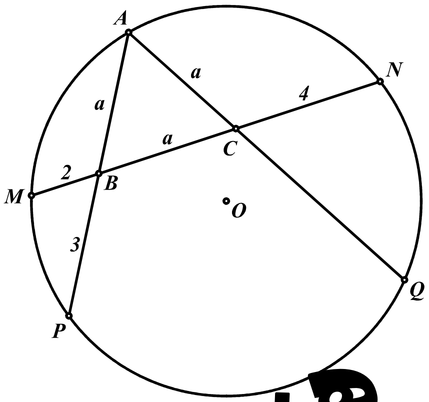
حال اگر دو وتر دلخواه EF , MN را نیز از P بگذرانیم با توجه به مسأله بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم:



$$\left.\begin{array}{l} AP.PB = CP.PD \\ AP.PB = EP.PF \\ AP.PB = MP.PN \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AP.PB = CP.PD = EP.PF = MP.PN$$

نتیجه : حاصل ضرب قطعات روی هر وتری که از نقطه P بگذرد با هم برابر و مقداری ثابت است که بـه ایـن مقـدار ثابت، قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی C می‌گوییم و به صورت P_C^P نمایش می‌دهیم.

مسأله۲-۱۲ : در شکل زیر با توجه به مقادیر داده شده طول پاره خط CQ را بیابید.

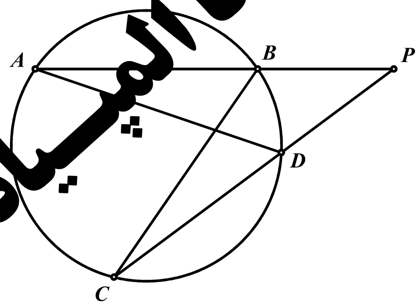


$$P^{B}_{C(O)} = ۳\times a = ۲\times(a+۴) \Rightarrow ۳a = ۲a+۸ \Rightarrow a = ۸$$

$$P^{C}_{C(O)} = a\times CQ = ۴\times(a+۲) \Rightarrow a\times CQ = ۴a+۸ \Rightarrow CQ = \frac{۴a+۸}{a}$$

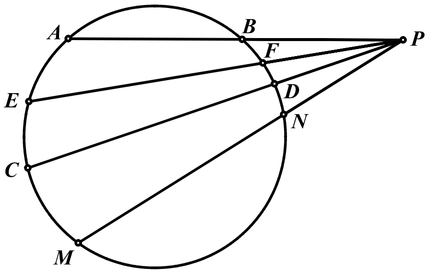
$$\Rightarrow CQ = \frac{(۴\times۸)+۸}{۸} = ۵$$

مسأله ۲-۱۳ : از نقطه‌ی P در خارج از دایره C دو خط دلخواه می‌گذرانیم بطوری که دایره را در نقاط D,C,B,A قطع کنند. ثابت کنید: $PA.PB = PC.PD$



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{PAD} = \widehat{PCB} = \dfrac{\widehat{BD}}{۲} \\ \widehat{P} = \widehat{P} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADP} \sim \overset{\Delta}{BCP} \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

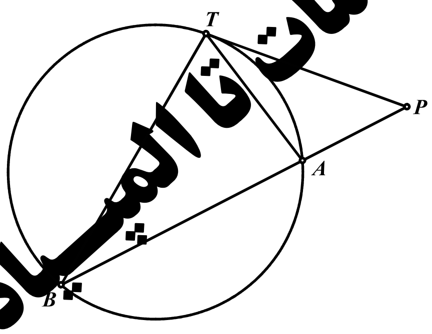
حال اگر دو خط دلخواه دیگر نیز از P بگذرانیم که دایره C را در نقاط N ,M ,F ,E قطع کنند با توجه به مسأله بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم:



$$\left.\begin{array}{l} PA.PB = PC.PD \\ PA.PB = PE.PF \\ PA.PB = PM.PN \end{array}\right\} \Rightarrow \quad PA.PB = PC.PD = PE.PF = PM.PN$$

نتیجه : برای تمام خطوط گذرنده از P حاصل ضرب طول نقطه P از نقاط تقاطع آن خط با دایره، همواره برابر و مقداری ثابت است که به این مقدار ثابت، قوت نقطه P نسبت به دایره C می‌گوییم و به صورت P_C^P نمایش می‌دهیم.

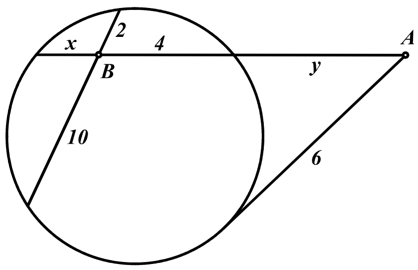
قضیه ۲-۵ : قوت نقطه‌ی P در خارج از دایره نسبت به دایره برابر است با مربع طول مماس مرسوم از P بر دایره.



حکم: $PA.PB = PT^{۲}$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{TBA} = \widehat{ATP} = \dfrac{\widehat{TA}}{۲} \\ \widehat{P} = \widehat{P} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overset{\Delta}{APT} \sim \overset{\Delta}{BTP} \Rightarrow \quad \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \quad \Rightarrow PT^{۲} = PA.PB$$

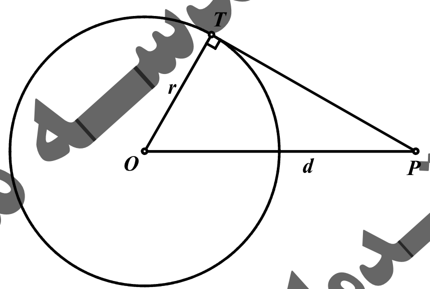
مسأله ۲-۱٤ : در شکل مقابل مقادیر y,x را بیابید.



$$P_C^B = 4\times x = 2\times 10 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

$$P_C^A = y(y+4+x) = 6^2 \Rightarrow y(y+9) = 36 \Rightarrow y = 3$$

قضیه ۲-٦ : قوت نقطه P نسبت به دایره برابر است با تفاضل مربع فاصله نقطه P از مرکز دایره (d) و مربع شعاع دایره (r).



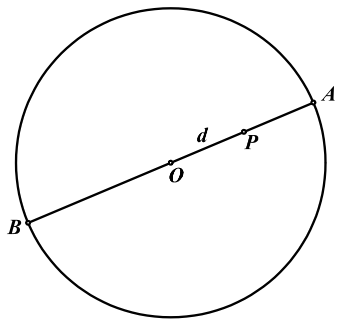
ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطه P خارج از دایره باشد.

حکم : $P_{C(O)}^{P} = d^2 - r^2$

در این حالت از آنجا که مثلث OTP قائم الزاویه است طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$d^2 = r^2 + PT^2 \Rightarrow PT^2 = d^2 - r^2 = P_{C(O)}^{P}$$

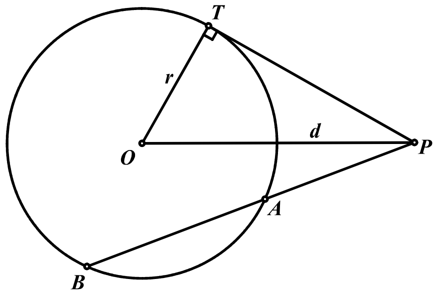
در حالتی که P داخل دایره باشد قطر AB را که از نقطه P می‌گذرد در نظر می‌گیریم و با استفاده از اتحاد مزدوج ثابت می‌کنیم : $r^2 - d^2 = PA.PB$



$$r^2 - d^2 = (r-d)(r+d) = (OA - OP)(OB + OP) = PA.PB$$

جمع بندی : قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی $C(O)$ را به هریک از شکل های زیر می‌توان نشان داد:

$$P^{P}_{C(O)} = PA.PB = PT^{2} = \left| d^{2} - r^{2} \right|$$

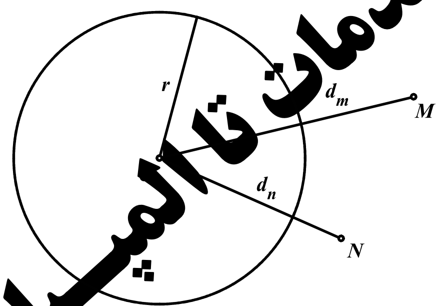


مسأله ۲-۱۵ : در چه صورتی قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی $C(O)$ برابر صفر خواهد بود؟

$$P^{P}_{C(O)} = d^{2} - r^{2} = 0 \Rightarrow d^{2} = r^{2} \Rightarrow d = r$$

بنابراین قوت نقطه‌ی P در صورتی صفر خواهد شد که فاصله‌ی نقطه‌ی P از مرکز دایـره برابـر شـعاع دایـره باشد به عبارت دیگر زمانی که نقطه‌ی P روی محیط دایره باشد.

مسأله ۲-۱۶ : در چه صورتی قوت دو نقطه متفاوت N, M نسبت به دایره‌ی $C(O)$ مساوی خواهد بود؟



$$P^{M}_{C(O)} = P^{N}_{C(O)} \Rightarrow d_m^{2} - r^{2} = d_n^{2} - r^{2} \Rightarrow d_m^{2} = d_n^{2} \Rightarrow d_m = d_n$$

پس زمانی قوت دو نقطه نسبت به‌یک دایره برابر است که فاصله‌ی آن ها از مرکز دایره‌یکسان باشد و همچنـین قوت نقطه‌ای بزرگتر است که فاصله‌ی بیشتری از مرکز دایره داشته باشد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) به قطر ساق BC از ذوزنقه‌ی قائم الزاویه $ABCD$ دایره ای رسم کرده ایم تا ساق قائم AD را در M و N قطع کند . اگر $CD = ۷, AB = ۳$ باشند مقدار $AM \cdot MD$ را بیابید.

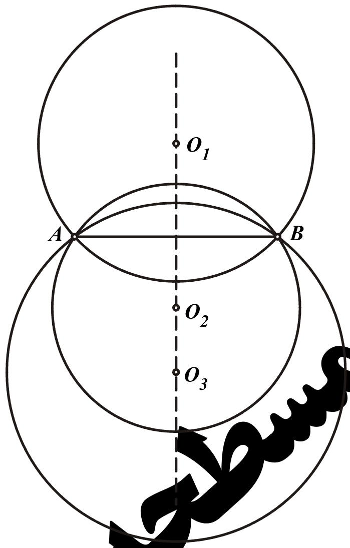
۲) دو دایره‌ی $C(O), C'(O')$ در نقاط M , N متقاطع اند. ثابت کنید امتداد خط MN مماس مشترک خارجی دو دایره را نصف می‌کند.

۳) از نقطه‌ی دلخواه A در خارج دایره‌ی $C(O)$ مماس AB را بر دایره رسم می‌کنیم و نقطه‌ی E را طوری در نظر می‌گیریم که $AB = AE$ باشد. اگر D نقطه ای دلخواه روی دایره باشد، محل برخورد AD با دایره را C نامیده و محل برخورد خطهای ED , EC با دایره را به ترتیب G, F می‌نامیم. ثابت کنید : $AE \parallel FG$

۲–۳ چهارضلعی های محاطی

هدف بخش : خواص مهم چهارضلعی های محاطی باعث شده تا این نوع از چهارضلعی ها کاربرد وسیعی در انواع سؤالات هندسه داشته باشند . به همین دلیل و همچنین آمیختگی این مبحث با دو بخش قبلی، در این بخش به بررسی خواص مختلف آن پرداخته می‌شود.

مسأله۲–۱۷ : دو نقطه‌ی دلخواه A ,B مفروض اند. چند دایره می‌توان رسم کرد بـه طـوری کـه از هـر دو نقطـه بگذرند؟

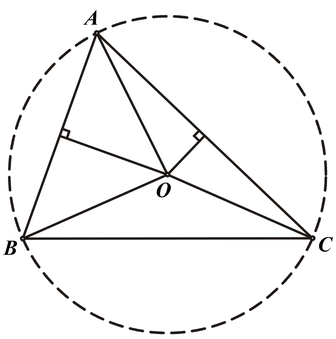


بینهایت دایره – اگر O مرکز دایره ای باشد که چنین خاصیتی را داشـته باشـد تنها خاصیت O این است که از A, B به یک فاصله است و به عبارت دیگر Oنقطه ای روی عمود منصف پاره خط AB است پس اگر هـر نقطـه روی عمود منصف AB را به عنـوان Oدر نظـر بگیـریم دایـره ای بـه مرکـز O حاصل خواهد شد که از A, Bمی‌گذرد.

نتیجه : از هر دو نقطه‌ی مفروض بینهایت دایره می‌گذرد.

مسأله ۲–۱۸ : سه نقطه‌ی غیر هم خط A ,B ,C مفروض اند. چند دایره می‌توان رسم کرد به طوری که از هر سـه نقطه بگذرند؟

فقط و فقط‌یک دایره – اگر O مرکز دایره فرضی باشد که چنین خاصیتی را داشته باشد طبق توضیحات مسأله قبـل از آنجا که دایره از نقاط A, B می‌گذرد نقطه‌ی O روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد و از طرف دیگر چون دایره از A, C نیز می‌گذرد O روی عمود منصف پاره خط AC نیـز قـرار دارد. پـس O بایـد روی محل تقاطع عمود منصف های AB, AC قرار داشته باشد.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OA = OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB = OC$$

از آنجا که محل تقاطع دو عمود منصف‌یک نقطـه بیـشتر نیـست، یـک نقطه O و بالاخره‌یک دایره بیشتر وجود ندارد.

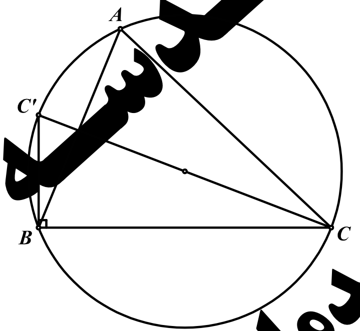
نتیجه ۱ : از هر سه نقطه‌ی غیر هم خط دقیقایک دایره می‌گذرد که به این دایره دایره‌ی محیطی مثلث ABC گویند. و مرکز آن نیز محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع مثلث است که با O نشان داده می‌شود.

نتیجه ۲: نقطه‌ی O روی عمودمنصف BC نیز قرار خواهد داشت .

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OA = OC \end{array}\right\} \Rightarrow OB = OC$$

به عبارت دیگر عمودمنصف های اضلاع هر مثلث دریک نقطه همرس اند.

مسأله ۲-۱۹ : (قضیه‌ی سینوس ها) اگر R شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC و c, b, a طول اضلاع متناظر رئوس آن باشد، ثابت کنید : $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}} = ۲R$



قطر گذرنده از رأس C را رسم کرده و انتهای قطری آن را C' می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویه $C'BC$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \sin \hat{C}' = \dfrac{BC}{CC'} = \dfrac{a}{۲R} \\ \hat{C}' = \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin \hat{A} = \dfrac{a}{۲R}$$

به همین ترتیب حکم برای رئوس C , B نیز اثبات می‌شود.

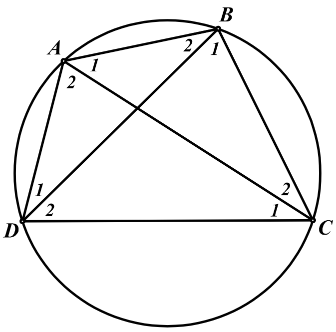
توجه داشته باشید که قضیه‌ی سینوس ها در حل مسایل هندسی کاربرد وسیعی دارد.

مسأله ۲-۲۰ : چهار نقطه‌ی دلخواه D, C, B, A مفروض اند. چند دایره می‌توان رسم کرد به طوری که از هر چهار نقطه بگذرند؟

در این حالت دیگر نمی‌توان حکمی‌قطعی برای هر چهار نقطه (چهار ضلعی) دلخواه صادر کرد چرا که برای برخی چهارضلعی‌ها مانند لوزی (در صورتی که مربع نباشد) هرگز نمی‌توان چنین دایره ای رسم کرد اما برای برخی چهارضلعی‌ها مانند مربع و مستطیل همواره چنین دایره ای‌یافت می‌شود.

تعریف : چهارضلعی محاطی چهارضلعی است که بتوان دایره ای از هر چهار رأس آن گذراند یا به عبارتی چهارضلعی که بتوان آن را در دایره ای محاط کرد.

قضیه ۲-۷ : در هر چهارضلعی محاطی، اگر قطرها را رسم کنید هر دو زاویه رو به یک ضلع با یکدیگر برابرند.

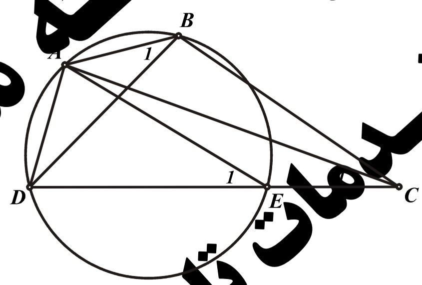


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_2=\dfrac{\overparen{DC}}{2}\\[2ex]\hat{B}_1=\dfrac{\overparen{DC}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}_1$$

و به همین صورت خواهیم داشت : $\hat{A}_1=\hat{D}_2$، $\hat{D}_1=\hat{C}_2$, $\hat{C}_1=\hat{B}_2$

عکس قضیه : در هر چهار ضلعی که قطرهای آن رسم شده است، اگر دو زاویه رو به‌یک ضلع بایکدیگر برابر باشند، چهارضلعی محاطی است.

$\hat{C}_1=\hat{B}_1 \Rightarrow ABCD$ محاطی



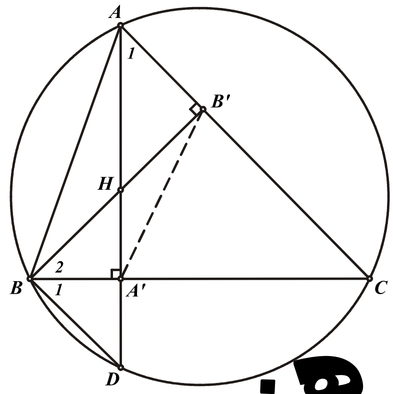
ابتدا فرض می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ محاطی نباشد بنابراین دایره ای که از سه رأس A, B, D می‌گذرد از نقطه‌ی C نخواهد گذشت . محل تلاقی دایره با ضلع DC را E می‌نامیم . از آنجا که چهارضلعی $ABED$ محاطی است داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow \hat{E}_1=\hat{B}_1\\ \text{طبق فرض}:\ \hat{C}_1=\hat{B}_1\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}_1=\hat{E}_1$$

از آنجا که هرگز ممکن نیست $\hat{C}_1=\hat{E}_1$ باشد (چرا؟) پس به تناقض رسیده ایم یعنی دایره محیطی ABD از C گذشته و چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.

نکته : این نوع از استدلال را که در بالا بکار گرفته شده برهان خلف می‌گویند که در آن برای اثبات درستی حکم خلاف حکم را در نظر گرفته و با استفاده از مفروضات مسأله و خلاف حکم به‌یک تناقض می‌رسند.

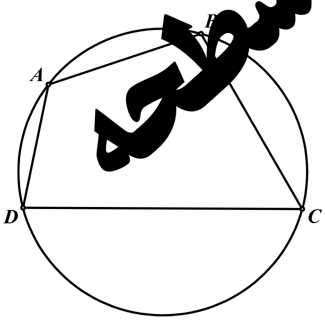
مسأله ۲-۲۱ : اگر دو ارتفاع BB', AA' از مثلث ABC یکدیگر را در H و ارتفاع AA' دایره محیطی مثلث را در D قطع کند، ثابت کنید : $\widehat{HBA'} = \widehat{A'BD}$



حکم: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AB'B} = \widehat{AA'B} = 90^\circ \Rightarrow AB'A'B \text{ محاطی } \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \dfrac{\widehat{CD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

قضیه ۲-۸ : در هر چهار ضلعی محاطی زوایای رو به رو به هم مکمل‌یکدیگرند.



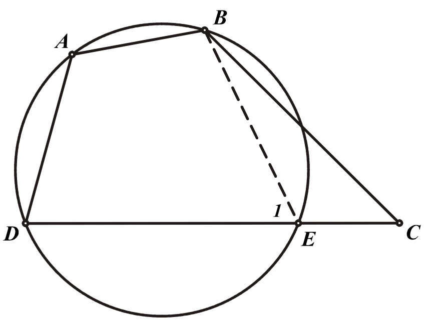
حکم: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \dfrac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} = \dfrac{\widehat{BAD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

و به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت : $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

عکس قضیه : در هر چهارضلعی که دو زاویه روبرو به‌یکدیگر مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است.

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow ABCD \text{ محاطی}$$

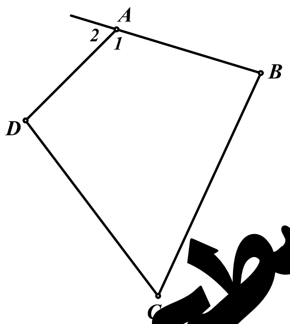


از برهان خلف استفاده می‌کنیم . فرض می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ محاطی نباشد در این صورت دایره ای که از سه رأس A , B , D می‌گذرد از نقطه‌ی C نخواهد گذشت . محل برخورد دایره با DC را E می‌نامیم. از آنجا که چهارضلعی $ABED$ محاطی است داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \hat{A}+\hat{E}_1=180^\circ \\ \text{طبق فرض}\ : \hat{A}+\hat{C}=180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_1=\hat{C} \Rightarrow BE \parallel BC$$

و از آنجا که هرگز دو خط BC , BE موازی نیستند پس بـه تنـاقض رسـیده ایـم‌یعنـی چهارضـلعی $ABCD$ محاطی است.

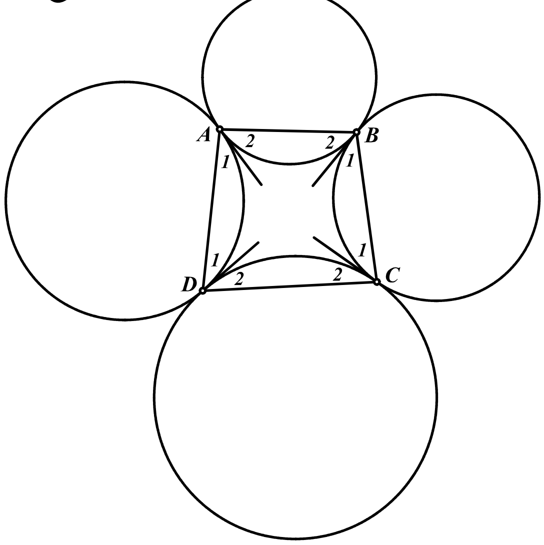
نکته : طبق استدلال زیر چنانکه دریک چهارضلعی دو زاویه روبرو مکمل یکدیگر باشند $(\hat{A}_1+\hat{C}=180^\circ)$ هر کدام از دو زاویه با زاویه خارجی زاویه دیگر برابر خواهد بود $(\hat{C}=\hat{A}_2)$ و بالعکس.



$$\left.\begin{array}{r} \text{فرض}\ \hat{A}_1+\hat{C}=180^\circ \\ \hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}$$

نتیجه : در هر چهارضلعی محاطی هر زاویه با زاویه‌ی خارجی زاویه‌ی روبروی آن برابر است و بالعکس.

مسأله۲-۲۲ : چهار دایره‌ی غیر متقاطع در چهار نقطه‌ی D,C,B,A بریکدیگر مماس خارج اند به طوری که هر کدام بر دو دایره‌ی مجاور خود مماس است. ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.



مماس‌های مشترک دوایر را در نقاط D, C, B, A رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم دو زاویه‌ی روبرو به‌یکدیگر در چهارضلعی مکمل‌یکدیگرند . از آنجا که هر کدام از این زوایا ظلّی هستند داریم:

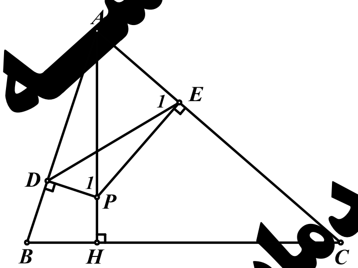
$$\left.\begin{aligned}\hat{A}_۱ &= \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\\ \hat{D}_۱ &= \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱$$

و به همین ترتیب داریم : $\hat{C}_۲ = \hat{D}_۲ \ , \hat{C}_۱ = \hat{B}_۱ \ , \hat{A}_۲ = \hat{B}_۲$

با جمع کردن طرفین چهار تساوی بالا بایکدیگر خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{A}+\hat{C} = \hat{B}+\hat{D}\\ &\hat{A}+\hat{C}+\hat{B}+\hat{D} = ۳۶۰^\circ\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{C} = \hat{B}+\hat{D} = ۱۸۰^\circ$$

مسأله۲-۲۳ : از نقطه‌ی دلخواه P بر روی ارتفاع AH از مثلث ABC عمودهای PE, PD را بر اضلاع AC, AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید چهارضلعی $BDEC$ محاطی است.



برای اثبات محاطی بودن چهارضلعی $BDEC$ نشان می‌دهیم :

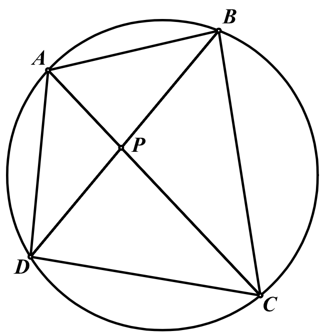
حکم معادل: $\hat{B} = \hat{E}_۱$

$$\left.\begin{aligned}\overset{\frown}{BHP}+\overset{\frown}{BDP} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow BDPH \text{ محاطی} \Rightarrow \hat{B} = \hat{P}_۱\\ \overset{\frown}{ADP}+\overset{\frown}{AEP} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ADPE \text{ محاطی} \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{P}_۱\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{E}_۱$$

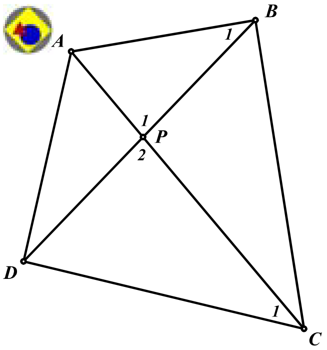
قضیه‌ی ۲-۹ : در هر چهارضلعی محاطی حاصل ضرب قطعات روی هر قطر بایکدیگر برابر است .

از آنجا که قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره ثابت است به راحتی می‌توان نتیجه گرفت :

$$AP.PC = BP.PD$$



عکس قضیه : درهر چهارضلعی که حاصل ضرب قطعات روی هر قطر بایکدیگر برابر باشد، چهارضلعی محاطی است.



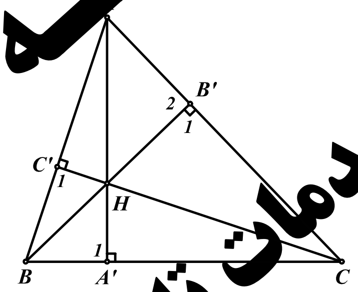
فرض : $AP.PC = BP.PD$

حکم: $ABCD$ محاطی

برای اثبات محاطی بودن چهارضلعی $ABCD$ نشان می‌دهیم : $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$

$$AP.PC = BP.PD \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BP}{PC} \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{APB} \sim \overset{\Delta}{DPC} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

مسأله ۲-۲٤ : ارتفاع‌های مثلث ABC را رسم کرده‌ایم تایکدیگر را در نقطه‌ی H قطع کنند. نشان دهید حاصل ضرب قطعات روی هر ارتفاع بایکدیگر برابر است.



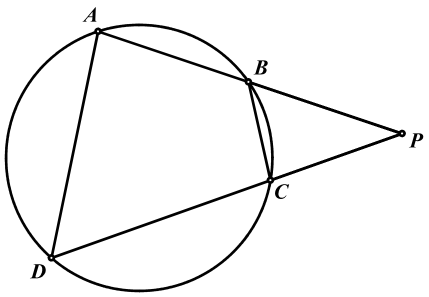
حکم: $AH.HA' = BH.HB' = CH.HC'$

$\hat{C}_1' = \hat{B}_1' = 90^\circ \Rightarrow BC'B'C$ محاطی $\Rightarrow CH.HC' = BH.HB' \qquad (1)$

$\hat{A}_1' = \hat{B}_2' = 90^\circ \Rightarrow AB'A'B$ محاطی $\Rightarrow AH.HA' = BH.HB' \qquad (2)$

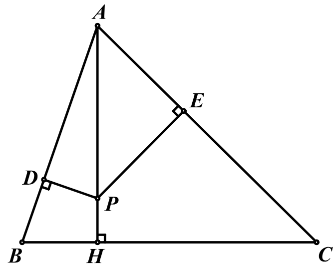
(۱) و (۲) $\Rightarrow AH.HA' = BH.HB' = CH.HC'$

قضیه ۲-۱۰ : در چهارضلعی محاطی $ABCD$، اگر امتداد دو ضلع روبه رو (AB, CD) یکدیگر را در P قطع کند $PA.PB = PC.PD$ خواهد بود و بالعکس.



اثبات این قضیه نیز مشابه قضیه‌ی قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۲-۲۵: از نقطه‌ی دلخواه P بر روی ارتفاع AH از مثلث ABC عمودهای PE,PD را بر اضلاع AC,AB فرود می‌آوریم . ثابت کنید چهارضلعی $BDEC$ محاطی است.



برای اثبات حکم نشان می‌دهیم:

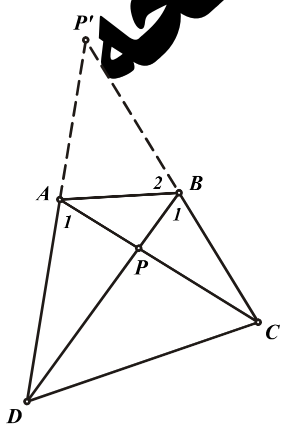
حکم معادل: $AD.AB = AE.AC$

$B\hat{D}P + B\hat{H}P = ۱۸۰^\circ \Rightarrow BDPH$ محاطی $\Rightarrow AD.AB = AP.AH \qquad (۱)$

$C\hat{H}P + C\hat{E}P = ۱۸۰^\circ \Rightarrow CHPE$ محاطی $\Rightarrow AE.AC = AP.AH \qquad (۲)$

(۱) و (۲) $\Rightarrow AD.AB = AE.AC$

جمع بندی : در هر چهارضلعی محاطی پنج خاصیت می‌توان نام برد که از هر کدام از این پنج خاصیت می‌توان محاطی بودن‌یک چهارضلعی را نتیجه گرفت که این پنج خاصیت عبارتند از :



محاطی $\Leftrightarrow \begin{cases} ۱)\hat{A} = \hat{B}_۱ \\ ۲)\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ ۳)\hat{D} = \hat{B}_۲ \\ ۴)AP.PC = BP.PD \\ ۵)P'A.P'D = P'B.P'C \end{cases}$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) دو دایره‌ی C_1, C_2 در نقاط A, B متقاطع اند. نقطه‌ی M را روی خط AB در نظر می‌گیریم و دو خط از آن می‌گذرانیم تایکی دایره‌ی C_1 را در E, F و دیگری دایره‌ی C_2 را در P, Q قطع کند. ثابت کنید چهار نقطه‌ی P, Q, F, E هم دایره‌اند.

۲) وتر AB از دایره‌ی C مفروض است. نقطه‌ی وسط کمان AB را P می‌نامیم و دو وتر PM, PN را چنان رسم می‌کنیم که AB را به ترتیب در D, E قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی $DENM$ محاطی است.

۳) دو نقطه‌ی C, D را طوری روی نیم‌دایره‌ی به قطر AB انتخاب می‌کنیم که $\widehat{BC}=\widehat{CD}$ باشد. P را نیز نقطه‌ای دلخواه روی نیم دایره در نظر می‌گیریم و محل تلاقی AD, AC با PC, PB را به ترتیب F, E می‌نامیم. ثابت کنید: $EF \perp AD$

۴) بر روی ضلع AC از مثلث متساوی الاضلاع ABC مربعی بنا می‌کنیم. مرکز مربع را E و وسط ضلع AB را D می‌نامیم. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{D}E$ را بیابید.

۵) ثابت کنید که در هر مثلث خطی که پای ارتفاع‌های وارد از دو رأس را به‌یکدیگر وصل می‌کند، بر شعاعی از دایره‌ی محیطی که از رأس سوم رسم شود، عمود است.

۶) چهار دایره مطابق شکل، هر کدام دو دایره‌ی مجاور خود را در دو نقطه قطع می‌کنند. ثابت کنید اگر چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد، چهارضلعی $A'B'C'D'$ نیز محاطی خواهد بود.

۷) در نیم دایره‌ی روبرو اگر O مرکز دایره بوده و $\hat{M}=\hat{N}=10^{\circ}$ و $\widehat{AM}=40^{\circ}$ باشند، اندازه‌ی کمان $\widehat{BN}$ را پیدا کنید.

۸) از دو رأس B, C از مثلث ABC عمودهای BB', CC' را بر AO (O مرکز دایره‌ی محیطی ABC) رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقاط B', C' از وسط ضلع BC به‌یک فاصله اند.

۹) ارتفاع‌های AA', BB', CC' از مثلث ABC یکدیگر را در نقطه‌ی H قطع می‌کنند. نشان دهید ارتفاع AA' نیمساز زاویه‌ی $\widehat{B'A'C'}$ است.

۱۰) دایره ای که از رأس‌های A, B, C از متوازی الاضلاع $ABCD$ می‌گذرد ضلع AD را در A' و ضلع CD را در C' قطع می‌کند. نشان دهید : $\dfrac{A'D}{A'C'}=\dfrac{A'C}{A'B}$

۱۱) قضیه‌ی بطلمیوس : در هر چهار ضلعی محاطی $ABCD$ نشان دهید:

$AB.CD + AD.BC = AC.BD$

۱۲) مثلث‌های ناپلئونی : بر روی اضلاع مثلث ABC سه مثلث BCA', ACB', ABC' را طوری بنا کرده ایم که $\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=180^\circ$. ثابت کنید دایره‌های محیطی این سه مثلث دریک نقطه همرس اند.

۱۳) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی الاضلاع ABC', ACB', BCA' را بنا می‌کنیم . نشان دهید سه پاره خط CC', BB', AA' دریک نقطه همرس اند.

۱۴) در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ اقطار BD , AC بریکدیگر عمودند. نشان دهید فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی از ضلع AB برابر نصف طول ضلع CDاست.

۲–۴ مکان هندسی

هدف بخش : گاهی لازم است تمام نقاطی که دارای خاصیت مشترکی هستند را پیدا کنیم تا بـه حـل برخـی مـسایل هندسه نایل آییم. این مفهوم ، مکان هندسی نامیده می‌شود که از این به بعد در بخش‌های مختلف این کتاب بـا مسایلی از این دسته آشنا خواهید شد.

تعریف : مکان هندسی خاصیت P مجموعه همه‌ی نقاطی است که دارای ویژگی یا خاصیت P هستند، بـه عبـارت دیگر :

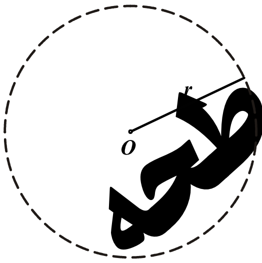
الف) هر نقطه در این مجموعه (مکان هندسی) دارای خاصیت P است.

ب) هر نقطه ای که خاصیت P را دارا باشد عضو این مجموعه (مکان هندسی) است.

توجه داشته باشید که برای اثبات مسأله‌ی مکان هندسی باید هر دو شرط فوق اثبات شوند.

مسأله ۲–۲٦ : ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی مفروض O به فاصله‌ی r هستند، یک دایره است.

در این مسأله خاصیت P ، به فاصله‌ی r بودن از نقطه‌ی O است و مکان هندسی مورد نظر نیز دایره ای به شعاع r و مرکز O است.



الف) هر نقطه روی دایره ای به شعاع r از نقطه‌ی O به فاصله‌ی r است.

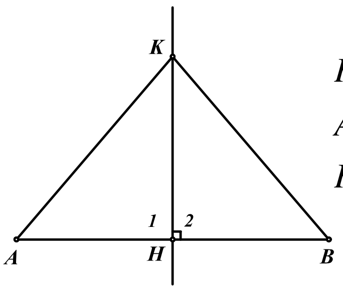
ب) هر نقطه ای که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی r باشد حتما روی این دایره است.

از آنجا که درستی دو شرط بالا واضح و روشن است مسأله اثبات شده است.

مسأله ۲–۲۷ : ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو سر پاره خط به‌یک فاصله انـد، عمـود منـصف آن پـاره خـط است.

در این مسأله خاصیت P، یکسان بودن فاصله از دو سر پاره خط است و مکان هندسـی مـورد نظـر نیـز عمـود منصف پاره خط است. برای اثبات مسأله باید دو شرط (الف) و (ب) را ثابت کنیم.

الف) هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر آن به‌یک فاصله است. اگر K نقطه ای روی عمود منصف AB باشد خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^{\circ}\\ AH=HB\\ HK=HK\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AHK}=\overset{\Delta}{BHK}\Rightarrow AK=BK$$

ب) هر نقطه ای که از دو سر پاره خط AB به‌یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن قرار دارد.

از نقطه K که از دو سر پاره خط AB به‌یک فاصله است عمود KH را بر AB رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که KH منصف پاره خط AB نیز می‌باشد.

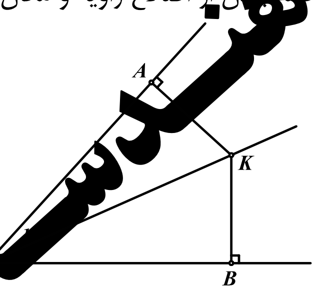
فرض: $AK = KB$

حکم: $AH = HB$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AK = KB \\ KH = KH \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AKH} = \overset{\Delta}{BKH} \Rightarrow AH = HB$$

مسأله ۲-۲۸ : ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است.

در این مسأله خاصیت P ، هم فاصله بودن از اضلاع زاویه و مکان هندسی مورد نظر نیمساز زاویه است.



برای اثبات مسأله دو شرط (الف) و (ب) را ثابت می‌کنیم.

الف) هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به‌یک فاصله است.

فرض: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

حکم: $KA = KB$

اگر نقطه‌ی K را روی نیمساز زاویه‌ی $\hat{O}$ در نظر بگیریم، مثلث زیر به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده بایکدیگر برابرند و خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ KO = KO \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{KOA} = \overset{\Delta}{KOB} \Rightarrow KA = KB$$

ب) هر نقطه ای که از دو ضلع زاویه به‌یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویه قرار دارد.

از نقطه‌ی K که از دو ضلع زاویه‌ی $\hat{O}$ به‌یک فاصله است به رأس زاویه وصل کرده و ثابت می‌کنیم KO نیمساز زاویه است.

فرض: $KA = KB$

حکم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{B}=۹۰^{\circ}\\ KO=KO\\ KA=KB\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AKO}=\overset{\Delta}{BKO}\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$$

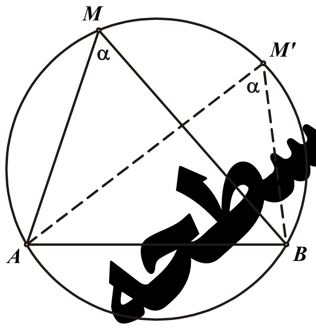
بنابراین دو مثلث فوق به حالت وتر ویک ضلع با هم برابرند و حکم ثابت شده است.

مسأله۲-۲۹ : ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که پاره خط مفروض AB را با زاویه ی α می‌بینید، کمانی ازیک دایره است.

ابتدا حدس می‌زنیم که این کمان، کمانی از دایره محیطی مثلث AMB $(\widehat{AMB}=\alpha)$ باشد و سپس به اثبات آن می‌پردازیم.

الف) هر نقطه روی کمان $\widehat{AMB}$ از دایره‌ی محیطی مثلث AMB $(\widehat{AMB}=\alpha)$، پاره خط AB را با زاویه‌ی α درجه می‌بیند.

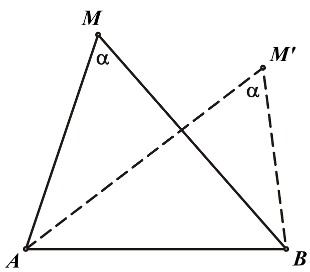
اگر نقطه‌ی M' را روی کمان $\widehat{AMB}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:



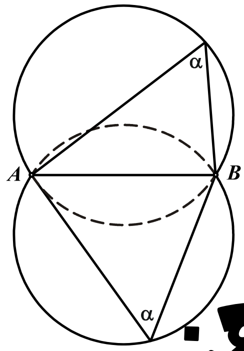
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}'=\dfrac{\widehat{AB}}{۲}\\ \hat{M}=\alpha=\dfrac{\widehat{AB}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}'=\alpha$$

ب) هر نقطه ای که پاره خط AB را با زاویه‌ی α ببیند روی کمانی از دایره‌ی محیطی مثلث AMB است.

اگر M' هم پاره خط AB را با زاویه‌ی α ببیند، از آنجا که $\hat{M}=\hat{M}'=\alpha$ پس چهارضلعی $AMM'B$ محاطی بوده و M' بر روی کمان $\widehat{AMB}$ از دایره‌ی محیطی مثلث AMB قرار دارد.



نکته : در واقع مکان هندسی نقاطی که پاره خط AB را با زاویه‌ی α می‌بینند، دو کمان از دو دایـره مـی‌باشـد کـه دایره‌ی دوم متقارن دایره‌ی فوق نسبت به پاره خط AB است. به این دو کمان، کمان درخورهای α درجـه‌ی AB گفته می‌شود.



مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) مکان هندسی نقاطی را بیابید که قوت یکسانی نسبت به دایره مفروض دارند.

۲) ضلع BC از مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض اند و رأس A بر روی کمان $B\widehat{A}C$ تغییر می‌کند. ضلع AB را از طرف A به اندازه AC امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی M بدست آید. مکان هندسی نقطه‌ی M را بیابید.

۳) نشان دهید مکان هندسی نقطه ای درون‌یک زاویه‌ی مفروض که فاصله‌های آن از دو ضلع این زاویه مقدار مفروض K است، خط راست ثابتی است که از رأس این زاویه می‌گذرد.

۴) AA', BB' دو قطر عمود بر هم دایره‌ی مفروض (O) هستند. وتر متغیری که از B می‌گذرد (O) را در M، AA' را در N قطع می‌کند. نشان دهید که نقطه‌ی برخورد مماسی که در M بر دایره‌ی (O) رسم می‌شود و خطی که در N بر AA' عمود می‌شودیک خط راست را می‌پیماید.

۵) مثلث متساوی الاضلاع ABC مفروض است . دو نقطه متغیر D , E به ترتیب بر امتدادهای اضلاع AB , AC (نزدیک به B , C) قرار دارند به طوری $BD.CE = BC^2$. اگر محل تلاقی BE , CD را K بنامیم مکان هندسی نقطه‌ی K را پیدا کنید.

۶) قطرهای عمود بر هم AC, BD از دایره‌ی (O) مفروض اند. وتر متغیر AP از این دایره قطر BD را در E قطع می‌کند. از E خطی موازی قطر AC رسم می‌کنیم تا خط BP را M قطع کند. مکان هندسی نقطه‌ی M را بیابید.

۷) نقطه‌ی A و دو خط عمود بر هم d', d مفروض اند مستطیل متغیر $ABCD$ را طوری رسم می‌کنیم که رئوس D , B از آن به ترتیب روی خطوط d', d قرار گرفته باشند. مکان هندسی رأس C از این مستطیل را بیابید.

۸) دایره‌ی متغیری که ازیک رأس‌یک زاویه‌ی مفروض می‌گذرد، دو ضلع این زاویه را در نقطه‌های B , A قطع می‌کند. نشان دهید مکان هندسی دو انتهای قطر موازی با وتر AB از این دایره متشکل از دو خط راست است.

۹) دایره‌ی (O) و دو نقطه‌ی C , B بر روی آن مفروض‌اند. نقطه‌ی A روی کمان BAC از این دایره تغییر می‌کند. نقطه‌ی وسط AB را K می‌نامیم و عمود KH را بر AC فرود می‌آوریم . مکان هندسی نقطه‌ی H را بیابید.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) در مثلث ABC ، AA' ارتفاع ، AM میانه و AD نیمساز زاویه‌ی A می‌باشد. پای عمودهای وارد از B , C بر نیمساز رأس A را به ترتیب B' , C' می‌نامیم . ثابت کنید:

الف) دو مثلث ABC , $A'B'C'$ متشابه اند.

ب) مثلث $MB'C'$ متساوی الساقین است.

ج) چهارضلعی $A'B'MC'$ محاطی است.

۲) نقطه‌ی دلخواه P روی نیمساز زاویه‌ی A از مثلث ABC مفروض است . A' , B' , C' به ترتیب تصاویر نقطه‌ی P براضلاع BC , AC , AB می‌باشند . امتداد PA' ، پاره خط $B'C'$ را در N قطع می‌کند. نشان دهید نقطه‌ی N بر روی میانه‌ی AM از مثلث ABC قرار دارد.

۳) دایره ای در B بر ضلع AB از مثلث ABC مماس است و از I محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث می‌گذرد. این دایره AC را در H و K قطع می‌کند. ثابت کنید که IC نیمساز زاویه‌ی HIK است.

۴) D نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC از مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$ است. پای عمودهای وارد از نقطه‌ی D بر اضلاع AC , AB را به ترتیب E , F می‌نامیم. اگر M وسط قاعده‌ی BC باشد، ثابت کنید: $ME = MF$

۵) ثابت کنید مراکز نیمسازی (محل برخورد نیمسازهای داخلی) چهار مثلثی که رئوسشان رئوس یک چهارضلعی محاطی است،یک مستطیل تشکیل می‌دهند.

۶) نیم دایره ای به قطر AB و مرکز O مفروض است. نقطه‌ی P را روی امتداد AB انتخاب می‌کنیم (A بین P , B). از P قاطعی رسم می‌کنیم تا نیم دایره را در C , D قطع کند (C بین P , D) . نقطه‌ی تقاطع دوایر محیطی دو مثلث OAC , OBD را Q می‌نامیم. ثابت کنید: $O\hat{Q}P = ۹۰^\circ$

۷) DE قطری از دایره‌ی محیطی مثلث ABC است که بر ضلع BC در نقطه‌ی M عمود است. H تصویر نقطه‌ی A روی قطر DE و K تصویر نقطه‌ی E روی AC است. ثابت کنید EK بر دایره‌ی محیطی مثلث HMK مماس است.

۸) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. محل تقاطع امتداد اضلاع AB , CD را E و محل تقاطع امتداد اضلاع AD , BC را F می‌نامیم. نیمساز زاویه‌ی $\hat{E}$ اضلاع AD , BC را به ترتیب در P , Q و نیمساز زاویه‌ی $\hat{F}$ اضلاع AB , CD را به ترتیب در K , L قطع می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی $PLQK$ یک لوزی است.

۹) از نقطه‌ی P خارج دایره‌ی (O) مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. نقطه‌ی Q را بر امتداد OP طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $PQ = PT$. مماس QS را بر دایره رسم می‌کنیم و تصویر نقطه‌ی S روی OP را K می‌نامیم. ثابت کنید: $PQ = PK$

۱۰) دو دایره در نقطه‌ی P بر هم مماس داخل اند. وتر AB از دایره‌ی بزرگتر بر دایره‌ی کوچکتر در نقطه‌ی Q مماس است . ثابت کنید PQ از وسط کمان AB می‌گذرد.

فصل سوم

خواص مثلث

۳–۱ ارتفاع

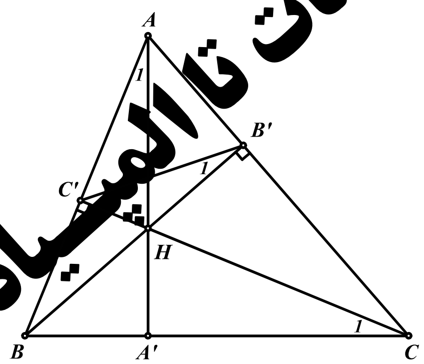
هدف بخش : در این بخش برخی از مهمترین خواص ارتفاع‌های مثلث را که در حل مسایل بکار برده می‌شوند، یادآور خواهیم شد و سپس با حل مسایلی چند، شما را با بخشی از گستره مسایل مختلف مرتبط با خواص ارتفاع‌ها آشنا خواهیم ساخت.

تعریف : ارتفاع نظیر هر رأس از مثلث، پاره خطی است که از آن رأس بر ضلع مقابل یا امتداد آن عمود می‌شود که به محل تلاقی ارتفاع با ضلع مقابل پای ارتفاع گویند.

قضیه‌ی ۳–۱ : ارتفاع‌های هر مثلث دریک نقطه همرس اند.

راه حل اول : دو ارتفاع CC', BB' از مثلث ABC را رسم کرده و محل تلاقی آن‌ها را H می‌نامیم ثابت می‌کنیم خط AH بر BC عمود بوده و ارتفاع مثلث ABC است.

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{C}'C = B\hat{B}'C = 90^\circ \Rightarrow BC'B'C \ \text{محاطی} \Rightarrow \hat{B'}_1 = \hat{C}_1 \\ A\hat{C}'H + A\hat{B}'H = 180^\circ \Rightarrow AC'HB' \ \text{محاطی} \Rightarrow \hat{B'}_1 = \hat{A}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1$$

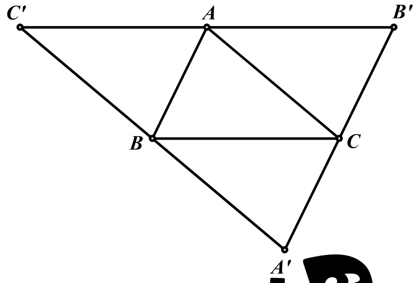


از آنجا که در چهارضلعی $AC'A'C$ دو زاویه‌ی رو به‌یک ضلع‌یعنی $\hat{C}_1, \hat{A}_1$ بایکدیگر برابر شده اند پس چهارضلعی $AC'A'C$ محاطی می‌باشد بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{A}'C = A\hat{C}'C \\ A\hat{C}'C = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{A}'C = ۹۰^\circ$$

توجه داشته باشید که ایده این راه حل در حل مسایل مربوط به همرسی خطوط، بسیار مهم و کاربردی است‌یعنی برای اثبات همرسی سه خط دو خط را رسم کرده و ثابت می‌کنیم که خط سوم نیز از محل تلاقی آن دو خط می‌گذرد.

راه حل دوم : از هر رأس مثلث خطی موازی ضلع مقابل به آن رأس رسم می‌کنیم تا این سه خط‌یکدیگر را در سه نقطه C', B', A' قطع کنند. اگر ثابت کنیم ارتفاع‌های مثلث ABC عمود منصف‌های مثلث $A'B'C'$ هستند، از آنجا که پیش تر ثابت کردیم عمود منصف‌های هر مثلث همرس اند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز همرس خواهند بود.



$$\left.\begin{array}{l} AB' \parallel BC \\ B'C \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow ABCB' \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow BC = AB'$$

$$\left.\begin{array}{l} AC' \parallel BC \\ BC' \parallel AC \end{array}\right\} \Rightarrow ACBC' \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow BC = AC'$$

از مجموعه‌ی دو رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت : $AB' = AC'$

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel B'C' \\ AH \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp B'C'$$

بنابراین AH هم عمود و هم منصف پاره‌خط $B'C'$ است بنابراین عمود منصف $B'C'$ می‌باشد و به همین ترتیب سایر ارتفاع‌ها نیز عمود منصف دیگر اضلاع مثلث $A'B'C'$ خواهند بود.

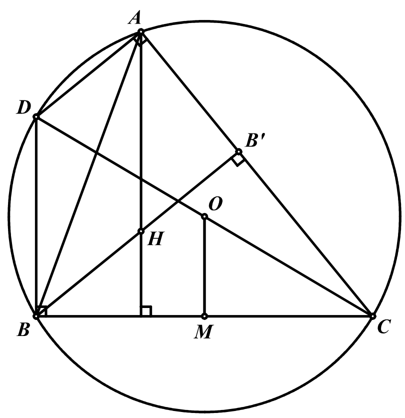
تعریف : محل همرسی ارتفاع‌های مثلث را مرکز ارتفاعی مثلث گویند که با H نمایش داده می‌شود.

قضیه‌ی ۳- ۲ : نقطه قرینه مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به هر یک از اضلاع مثلث، روی دایره محیطی مثلث قرار دارد.

اثبات این قضیه در مسأله‌ی ۲ بخش ۲ — ۱ آمده است.

قضیه‌ی ۳- ۳ : فاصله‌ی هر رأس از مرکز ارتفاعی مثلث برابر است با دو برابر فاصله مرکز دایره‌ی محیطی از ضلع مقابل آن رأس.

حکم: $AH = ۲OM$



رأس C را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی را در D قطع کند.

$$OM \parallel DB \Rightarrow \frac{OM}{BD}=\frac{OC}{DC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow DB=۲OM$$

برای اثبات حکم باید ثابت کنیم $DB=AH$ یا به عبارت دیگر باید نشان دهیم چهارضلعی $AHBD$ متوازی الاضلاع است.

$$\left.\begin{array}{r} DB \perp BC \\ AH \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow DB \parallel AH$$

$$\left.\begin{array}{r} D\hat{A}C=۹۰^\circ \Rightarrow DA \perp AC \\ BH \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow DA \parallel BH$$

پس چهارضلعی $AHBD$ متوازی الاضلاع است و $DB=AH$ و از آنجا که داشتیم $DB=۲OM$ پس خواهیم داشت $AH=۲OM$.

تعریف : مثلث ارتفاعیه هر مثلث، مثلثی است که از وصل کردن پای ارتفاع‌های آن مثلث به‌یکدیگر بدست می‌آید.

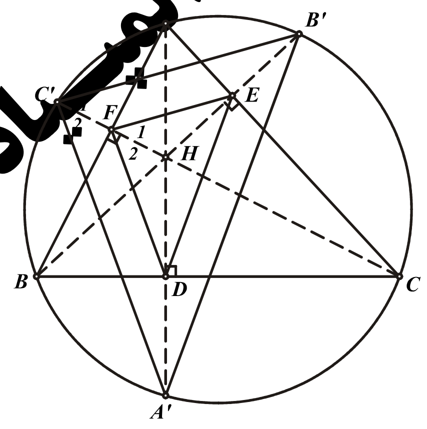
قضیه‌ی ۳- ٤ : ارتفاع‌های هر مثلث حاده الزاویه، نیمسازهای مثلث ارتفاعیه نظیر آن مثلث هستند.

اثبات این قضیه در مسأله‌ی ۹ بخش ۲-۳ آمده است.

مسأله ۳-۱ : ارتفاع‌های AD, BE, CF از مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث را در نقاط A', B', C' قطع کنند. ثابت کنید:

الف) اضلاع مثلث $A'B'C'$ با اضلاع مثلث ارتفاعیه دو به دو موازی اند.

ب) ارتفاع‌ها، نیمسازهای رئوس مثلث $A'B'C'$ هستند.



الف) می‌دانیم نقاط C', B', A' قرینه‌های مرکز ارتفاعی نسبت به اضلاع هستند . بنابراین

$$\frac{HE}{EB'}=\frac{HD}{DA'}=۱ \Rightarrow DE \parallel A'B'$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد : $FE \parallel B'C'$, $DF \parallel A'C'$

ب) با توجه به قسمت (الف) و قضیه‌ی پیش خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} FE \parallel B'C' \Rightarrow \hat{C}_1' = \hat{F}_1 \\ DF \parallel A'C' \Rightarrow \hat{C}_2' = \hat{F}_2 \\ \hat{F}_1 = \hat{F}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \hat{C}_1' = \hat{C}_2'$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد : $\hat{B}_1' = \hat{B}_2' \quad , \quad \hat{A}_1' = \hat{A}_2'$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) سه دایره‌ی برابر از نقطه‌ی H می‌گذرند. ثابت کنید H مرکز ارتفاعی مثلثی است که رئوسش بر سه نقطه‌ی دیگر برخورد دو به دو دایره‌ها منطبق است.

۲) ثابت کنید که اگریکی از اضلاع مثلثی بر خط ثابتی در صفحه و مرکز ارتفاعی آن بر نقطه ای ثابت قرار گیرد آنگاه دایره‌ی محیطی این مثلث هم از نقطه ای ثابت می‌گذرد.

۳) در مثلث ABC، H مرکز ارتفاعی و M وسطیکی از اضلاع می‌باشد. HM را از طرف M امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در K قطع کند. ثابت کنید M وسط HK است.

۴) متوازی الاضلاع $ABCD$ را در نظر گرفته، دایره‌ی محیطی مثلث ABC و قطر BOB' از این دایره را رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط AC بر DB' عمود است.

۵) خطی که مرکز ارتفاعی مثلث ABC را به وسط ضلع BC از آن وصل می‌کند، دایره‌ی محیطی آن را در نقاط A_1 , A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABC , A_1BC , A_2BC رئوس‌یک مثلث قائم الزاویه هستند.

۶) ثابت کنید قرینه‌ی مرکز ارتفاعی نسبت به‌یک رأس و قرینه‌ی آن رأس نسبت به وسط ضلع مقابل و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث بر یک استقامت هستند.

۷) نشان دهید مثلثی که رأس‌های آن پای ارتفاع وارد بر قاعده و نقاط وسط ارتفاع‌های وارد بر دو ضلع دیگر ازیک مثلث مفروض هستند، با مثلث مفروض متشابه است و دایره‌ی محیطی این مثلث از مرکز ارتفاعی و وسط قاعده‌ی مثلث مفروض می‌گذرد.

۸) ثابت کنید تصاویر مرکز ارتفاعی مثلث روی دو نیمساز داخلی و خارجی یک زاویه‌ی آن مثلث، روی خطی قرار دارند که از وسط ضلع روبروی آن زاویه می‌گذرد.

۹) نقاط A', B', C' را به ترتیب بر اضلاع BC , AC , AB از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که دو مثلث ABC , $A'B'C'$ بایکدیگر متشابه باشند $(\hat{A}=\hat{A}' , \hat{B}=\hat{B}')$ نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ بر مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC منطبق است.

۱۰) ارتفاع‌های مثلث ABC دایره‌ی محیطی مثلث را در نقاط A', B', C' قطع می‌کنند. همچنین اضلاع مثلث‌های ABC , $A'B'C'$ یکدیگر را به ترتیب در نقاط M , N , P , Q , R , S قطع می‌کنند. ثابت کنید خطوط MQ , NR , PS یکدیگر را در مرکز ارتفاعی مثلث ABC قطع می‌کنند.

۱۱) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABC , BCD , CDA , DAB را به ترتیب H_d , H_a , H_b , H_c می‌نامیم. ثابت کنید خطوط AH_a , BH_b , CH_c , DH_d دریک نقطه همرس بوده ویکدیگر را نصف می‌کنند.

۱۲) خط دلخواه ℓ از مرکز ارتفاعی مثلث ABC می‌گذرد. اگر خطوط ℓ_a , ℓ_b , ℓ_c قرینه‌های خط ℓ نسبت به اضلاع مثلث باشند، ثابت کنید این سه خط همرس اند.

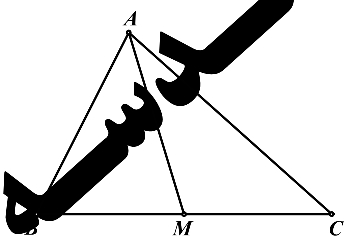
۳–۲ میانه

هدف بخش : در این بخش به بیان برخی موارد از مهمترین خواص میانه‌ها و مثلث میانه ای پرداخته و بایکی از مهمترین نقاط موجود در مثلث‌یعنی مرکز ثقل مثلث آشنا می‌شویم و در پایان نیز وضعیت مرکز ثقل، مرکز ارتفاعی و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث نسبت به‌یکدیگر را بررسی می‌کنیم.

تعریف : میانه نظیر هر رأس مثلث، پاره خطی است که آن رأس را به وسط ضلع مقابل آن وصل می‌کند.

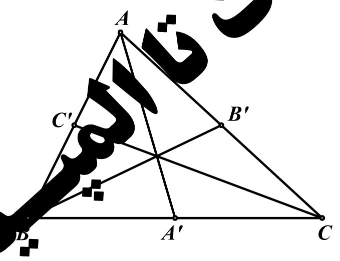
مسأله ۳–۲ : هر میانه مساحت مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

پیش تر می‌دانیم که $\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}=\frac{BM}{CM}$ و از آنجا که AM میانه‌ی مثلث ABC است $\frac{BM}{CM}=1$ و بنابراین $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=1$ و مساحت دو مثلث ABM, ACM بایکدیگر برابرند.



قضیه ۳– ۵: میانه‌های هر مثلث دریک نقطه همرس اند.

بنابر مسأله ۱–۱۱ می‌دانیم که هر دو میانه مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند بنابراین میانه‌های CC', BB' میانه AA' را به نسبت ۲ به ۱ و دریک نقطه قطع می‌کنندیعنی دریک نقطه همرس اند.



تعریف: محل همرسی میانه‌های مثلث را مرکز ثقل مثلث گویند که همواره با G نمایش داده می‌شود.

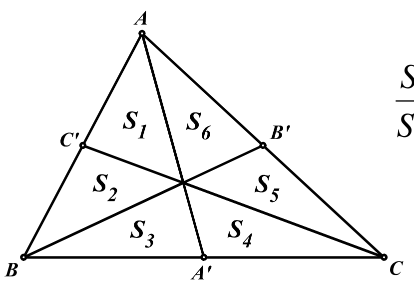
مسأله۳–۳ : میانه‌های هر مثلث آن مثلث را به شش مثلث با مساحت‌های‌یکسان تقسیم می‌کنند.

اگر مساحت این شش مثلث را به ترتیب S_1 تا S_6 بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AC'}{C'B}=1\Rightarrow S_1=S_2$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$S_5=S_6\ ,\ S_3=S_4$$



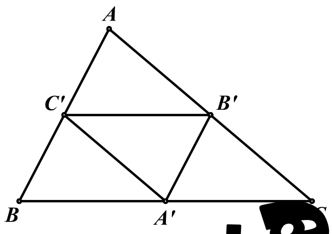
$$S_{ABA'}=S_{ACA'}\Rightarrow S_1+S_2+S_3=S_4+S_5+S_6\Rightarrow S_1+2S_2=2S_5+S_1\Rightarrow S_2=S_5$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد $S_1 = S_4$, $S_3 = S_6$ و از مجموعه آنچه بدست آمد نتیجه می‌شود :

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$$

تعریف : مثلث میانه ای هر مثلث، مثلثی است که اوساط اضلاع آن مثلث را به‌یکدیگر متصل می کند.

مسأله ۳-٤ : نشان دهید مثلث میانه ای هر مثلث، با سه مثلث دیگر که در کنار آن بوجود می‌آیند همنهشت است.

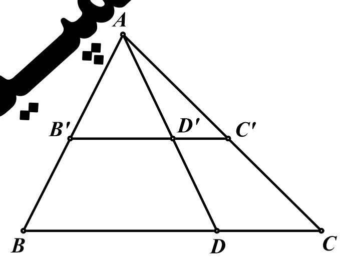


ضلع $A'B'$ اوساط دو ضلع مثلث ABC را به‌یکدیگر متصل کرده است و بنابر قضیه‌ی تالس با ضلع AB موازی است. پس $AB \parallel A'B'$ و به همین ترتیب $BC \parallel B'C'$, $AC \parallel A'C'$. بنابراین هریک از چهارضلعی‌های $AB'A'C'$, $BC'B'A'$, $CA'C'B'$ به دلیل توازی اضلاع روبرو متوازی الاضلاع هستند. در نتیجه هر چهار مثلث به حالت تساوی سه ضلع بایکدیگر همنهشت اند.

مسأله ۳-۵ : الف) مرکز ثقل مثلث ABC، مرکز ثقل مثلث میانه ای آن نیز می‌باشد.

ب) مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC (نقطه‌ی O) مرکز ارتفاعی مثلث میانه ای آن نیز می‌باشد.

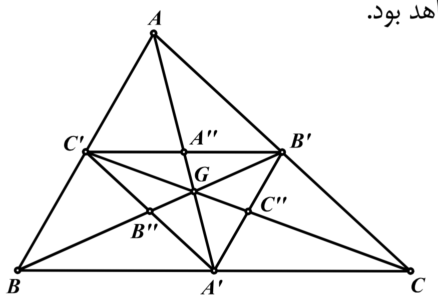
الف) لم: اگر خط AD ضلع BC را به نسبت دلخواهی قطع کند هر خط دلخواه موازی با BC نیز به همین نسبت تقسیم خواهد کرد.



حکم: $\frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'}$

$$\left.\begin{array}{l} B'D' \parallel BD \Rightarrow \overset{\Delta}{AB'D'} \sim \overset{\Delta}{ABD} \Rightarrow \frac{BD}{B'D'} = \frac{AD}{AD'} \\ D'C' \parallel DC \Rightarrow \overset{\Delta}{AD'C'} \sim \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \frac{DC}{D'C'} = \frac{AD}{AD'} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BD}{B'D'} = \frac{DC}{D'C'} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'}$$

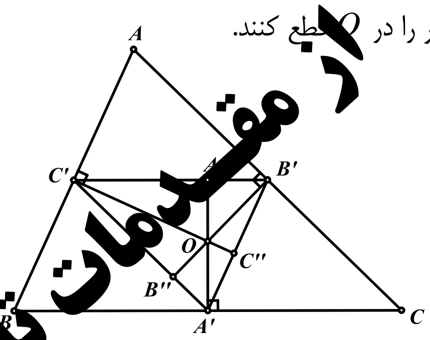
برای اثبات قسمت (الف) میانه‌های مثلث ABC را رسم می‌کنیم تایکدیگر را در G قطع کنند. اگر ثابت کنیم این خطوط میانه‌های مثلث $A'B'C'$ نیز هستند محل تقاطع آن‌ها (نقطه‌ی G) مرکز ثقل مثلث $A'B'C'$ نیز خواهد بود.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{C'A''}{A''B'}=\dfrac{BA'}{A'C}\\[2mm] \dfrac{B'A'}{A'C}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{C'A''}{A''B'}=1$$

و به همین ترتیب نتیجه می‌شود $\frac{A'B''}{B''C'}=1, \frac{B'C''}{C''A'}=1$ بنابراین $C'C'', B'B'', A'A''$ میانه‌های مثلث میانه ای هستند و نقطه‌ی G مرکز ثقل آن می‌باشد.

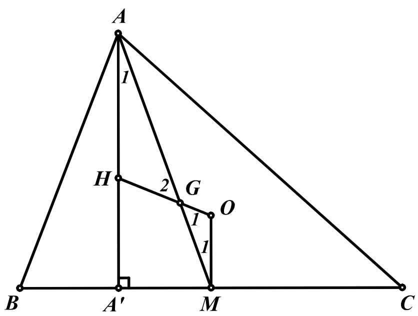
ب) عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا اضلاع مثلث میانه ای را در C'', B'', A'' ویکدیگر را در O قطع کنند.



$$\left.\begin{array}{l}B'C'\parallel BC\\ A'A''\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow A'A''\perp B'C'$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت $C'C''\perp A'B'$ ، $B'B''\perp A'C'$. بنابراین عمودمنصف‌های مثلث ABC ارتفاع‌های مثلث $A'B'C'$ هستند و نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC، مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ می‌باشد.

قضیه ۳-۶ : در هر مثلث ABC مرکز دایره‌ی محیطی (O) مرکز ثقل (G) و مرکز ارتفاعی (H) هم خط اند که به خط گذرنده از این سه نقطه خط اویلر مثلث گفته می‌شود.



می‌دانیم که O, G, H به ترتیب محل برخورد عمودمنصف‌ها، میانه‌ها و ارتفاع‌های مثلث هستند. برای اثبات هم خطی O, G, H میانه AM را در نظر گرفته و از نقاط O, H بـه نقطـه‌ی G وصـل مـی‌کنـیم و نـشان می‌دهیم خطوط OG, HG هم رأستا هستند . اما برای اثبات هم رأستایی خطوط GH, OG از آنجا کـه خطـوط GM, AG روی میانه و هم رأستا هستند با اثبات برابری زوایای G_1, G_2 مـی‌تـوان نتیجـه گرفـت ایـن دو زاویـه متقابل به رأس بوده و خطوط OG, GH نیز هم رأستا هستند.

حال طبق خواص مطرح شده در مورد G, H داریم :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{AG}{GM}=\frac{2}{1}\\ &\frac{AH}{OM}=\frac{2}{1}\\ &AA' \parallel OM \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{M}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{H}G \sim M\overset{\Delta}{O}G \Rightarrow \hat{G}_1=\hat{G}_2$$

نکته : از تشابه فوق نتیجه می‌شود $\frac{HG}{GO}=\frac{2}{1}$ و بنابراین مرکز ثقل مثلث همواره پاره خط OH را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) در مثلث ABC، G مرکز ثقل مثلث و H پای‌یک ارتفاع می‌باشد. HG را از طرف G امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در K قطع کند. ثابت کنید: $KG = 2HG$

۲) فرض کنید K معرف نقطه‌ی قرینه‌ی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC نسبت به ضلع BC باشد. ثابت کنید که خط اویلر مثلث ABC پاره خط AK را نصف می‌کند.

۳) نشان دهید خطی که از مرکز ثقل مثلث به نقطه‌ی P بر روی دایره‌ی محیطی وصل شود، از وسط خطی می‌گذرد که مرکز ارتفاعی مثلث را به روبروی قطری P وصل می‌کند.

۴) خطی که به موازات میانه‌ی AA' از مثلث ABC رسم می‌شود، اضلاع BC, CA, AB را به ترتیب در نقاط H, N, D قطع می‌کند. ثابت کنید که نقاط متقارن H نسبت به نقاط وسط NC, BD، نسبت به رأس A متقارن اند.

۵) از G مرکز ثقل مثلث ABC خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB, AC را به ترتیب در A_b, A_c قطع کند. به همین ترتیب از G خطی به موازات CA رسم می‌کنیم تا BC, BA را به ترتیب در B_c, B_a قطع کند و از G خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا CA, CB را به ترتیب در C_a, C_b قطع کند. ثابت کنید که دو مثلث $A_b B_c C_a$, $A_c B_a C_b$ همنهشت اند.

۶) نقطه‌ی دلخواه M را بر روی نیمساز رأس A از مثلث ABC انتخاب می‌کنیم و عمودهای MR, MQ را به ترتیب بر اضلاع AB, AC رسم می‌کنیم. اگر عمود مرسوم از M بر BC، پاره خط QR را در N قطع کند ثابت کنید N روی میانه نظیر رأس A قرار دارد.

۷) فرض کنید همه‌ی زوایای داخلی مثلث ABC کمتر از 120° باشد و P نقطه ای در درون مثلث ABC باشد به طوری که هریک از زاویه‌های APB, BPC, CPA برابر 120° است. ثابت کنید که خطوط اویلر مثلث‌های APB, BPC, CPA دریک نقطه همرس اند.

۸) اگر a, b, c طول اضلاع مثلث ABC و m_a طول میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد ثابت کنید:

$$m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 \quad m_a^2 = \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

۹) (قضیه استوارت) اگر در مثلث ABC، قاطع AD به طول d، پاره خط BCرا به طول‌های x, y $(BD = x \ , CD = y)$ تقسیم کند خواهیم داشت :

$$a(d^2 + xy) = b^2 x + c^2 y$$

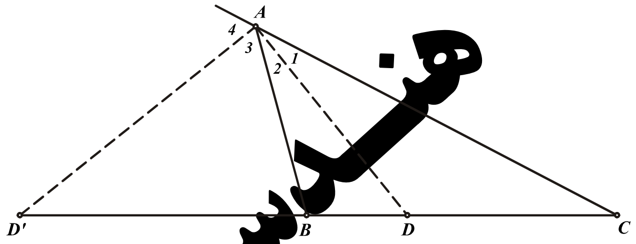
۱۰) در مثلث ABC، به قرینه‌ی میانه‌ی ضلع BC نسبت به نیمساز زاویه‌ی A، زیر میانه‌ی ضلع BC گفته می‌شود. اگر AK زیر میانه‌ی مثلث ABC باشد ثابت کنید $\frac{BK}{CK} = (\frac{AB}{AC})^2$. همچنین اگر E, F به ترتیب تصاویر نقطه‌ی K بر اضلاع AB, AC باشد ثابت کنید: $\frac{KE}{KF} = \frac{AB}{AC}$

۳–۳ نیمساز و دوایر محاطی

هدف بخش : در این بخش به بررسی خواص نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث خواهیم پرداخت و بـا دوایـر محـاطی مثلث، یکی از مباحث مهم هندسه مسطحه که ناشی از خواص نیمسازها می‌باشد آشنا خواهیم شد.

تعریف : نیمساز خطی است که از رأس زاویه گذشته و آن را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند. هر رأس مثلث دارای دو نیمساز است، یکی نیمساز خود زاویه که به آن نیمساز داخلی مثلث گفته می‌شـود و دیگـری نیمـساز زاویـه‌ی خارجی آن رأس از مثلث که به آن نیمساز خارجی مثلث گفته می‌شود.

مسأله۳–٦ : نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس از مثلث همواره بریکدیگر عمودند.

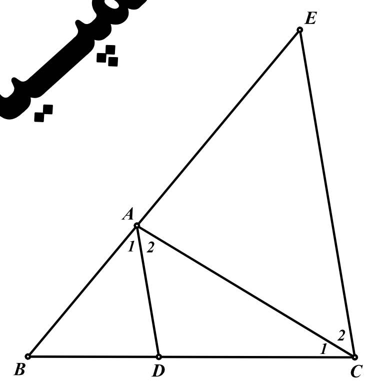


نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر رأس A را رسم می‌کنیم تـا ضلع BC و امتـداد آن را در D, D' قطـع کنند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{A}_3=\hat{A}_4\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+\hat{A}_4=2\hat{A}_2+2\hat{A}_3=180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2+\hat{A}_3=90^\circ \Rightarrow D\hat{A}D'=90^\circ$$

قضیه ۳–۷ : نیمساز هر زاویه از مثلث ضلع مقابل آن را به نسبت طول دو ضلع دیگر مثلث قطع می‌کند.



حکم: $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$

از رأس C خطی موازی نیمساز AD از مثلث ABC رسم می‌کنیم تا امتداد ضـلع AB را در E قطـع کند. طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE} \qquad (1)$$

بنابراین برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $AE = AC$

$$\left.\begin{array}{r} AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲ \\ AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{E} \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_۲ = \hat{E} \Rightarrow AE = AC$$

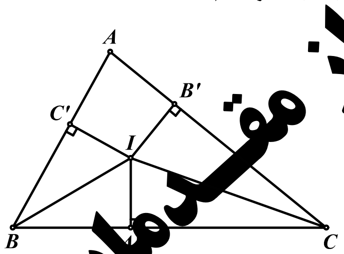
و با قرار دادن AC به جای AE در رابطه‌ی (۱) حکم نتیجه می‌شود.

نکته : درقضیه‌ی فوق اگر D را محل تلاقی نیمساز خارجی زاویه‌ی A با امتداد ضلع BC در نظر بگیریم باز هم حکم صادق خواهد بود و اثبات آن نیز مشابه فوق است.

قضیه ۳-۸ : در هر مثلث، نیمسازهای داخلی دریک نقطه همرس اند.

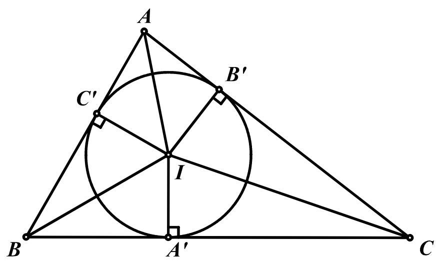
محل برخورد نیمسازهای زوایای B , C را I می‌نامیم و پای عمودهای وارد از I بر اضلاع را C',B',A' می‌نامیم. می‌دانیم که نیمساز، مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه به‌یک فاصله اند. از آن جا که I روی نیمساز زوایای B و C قرار دارد خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{r} IA' = IC' \\ IA' = IB' \end{array}\right\} \Rightarrow IB' = IC'$$



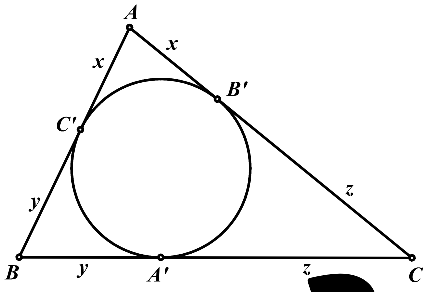
بنابراین I روی نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ نیز قرار دارد، بنابراین هر سه نیمساز دریک نقطه همرس اند.

محل همرسی نیمسازهای داخلی همواره از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. بنابراین در صورتی که دایره ای به مرکز نقطه‌ی همرسی نیمسازها و به شعاع فاصله آن از هریک از اضلاع رسم کنیم، این دایره بر هر سه ضلع مثلث مماس خواهد شد، که نقاط مماس همان پای عمودهای وارد از I بر اضلاع مثلث هستند.



تعریف : دایره‌ی محاطی داخلی مثلث، دایره‌ای است که بر هر سه ضلع مماس می‌باشد و مرکز آن نیز محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است که همواره با I نشان داده می‌شود و شعاع آن را نیز با r نمایش می‌دهند.

می‌دانیم که مماس‌های مرسوم ازیک نقطه بر دایره بایکدیگر برابرند بنابراین در هر مثلث ABC مانند شکل روبرو، قطعات روی اضلاع دو به دو بایکدیگر برابرند که آن‌ها را همواره با x , y و z نمایش می‌دهیم بدین ترتیب محیط مثلث برابر $۲(x+y+z)$ می‌باشد که بنا بر قرار داد $x+y+z$ را برابر P تعریف کرده و محیط مثلث را با $۲P$ نمایش می‌دهیم‌یا به عبارت دیگر P همواره برابر نصف محیط است.



مسأله۳-۷ : اگر c,b,a به ترتیب طول اضلاع مقابل رئوس C,B,A باشند ثابت کنید:

$z=P-c$, $y=P-b$, $x=P-a$

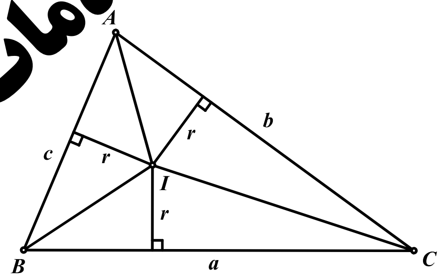
با توجه به آنچه در قسمت فوق گفته شد داریم:

$$P-a=(x+y+z)-(y-z)=x$$

و دو مورد دیگر نیز به سادگی مورد فوق اثبات می‌شوند.

مسأله۳-۸ : نشان دهید مساحت مثلث همواره برابر است با حاصل ضرب شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث در نصف محیط آن .

حکم: $S=Pr$

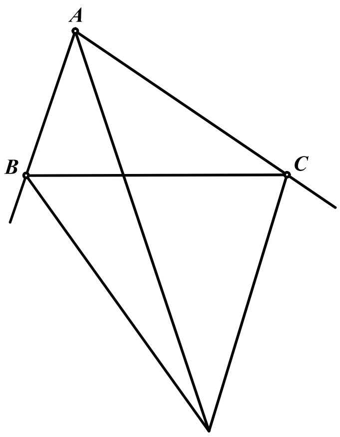


$$S=S_{ABI}+S_{BCI}+S_{ACI}$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}r.c+\frac{۱}{۲}r.a+\frac{۱}{۲}r.b=\frac{۱}{۲}r(c+a+b)$$

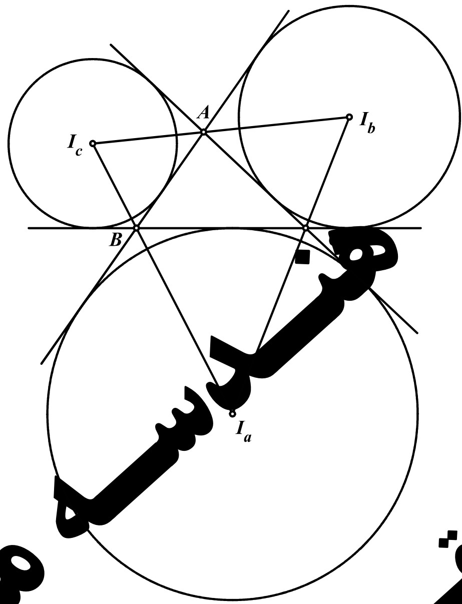
$$\Rightarrow S=rP$$

قضیه ۳-۹ : در هر مثلث، نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم دریک نقطه همرس اند.



اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۳-۸ است که به خود شما واگذار می‌شود.

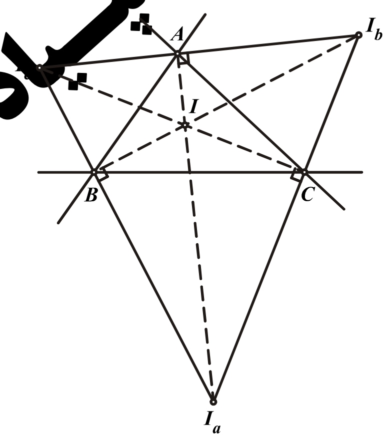
محل همرسی دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم همواره از سه ضلع مثلث‌یا امتداد آن‌ها به‌یک فاصله است. بنابراین در صورتی که دایره ای به مرکز آن و به شعاع فاصله اش از هریک از اضلاع رسم کنیم، این دایره بریک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس خواهد شد که نقاط مماس همان پای عمودهای وارد از مرکز دایره (محل تلاقی نیمسازهای خارجی) بر اضلاع مثلث هستند. هر مثلث سه دایره با این ویژگی‌ها دارد که در شکل زیر این دوایر و مراکز آن‌ها مشخص شده اند.



تعریف: دوایر محاطی خارجی مثلث، دایره‌هایی هستند که بریک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماسند و مرکز آن‌ها نیز نقاط تلاقی دو به دو نیمسازهای خارجی مثلث است که همواره مانند شکل بالا با $I_c\ , I_b\ , I_a$ نمایش داده می‌شوند و شعاع‌های آن‌ها را نیز به ترتیب با $r_c\ , r_b\ , r_a$ نشان می‌دهند.

مسأله۳-۹ : اگر $I_c\ , I_b\ , I_a$ مراکز دوایر محاطی خارجی مثلث ABC باشند نشان دهید مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC بر مرکز ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ منطبق است.

حکم: $I_{ABC} = H_{I_aI_bI_c}$

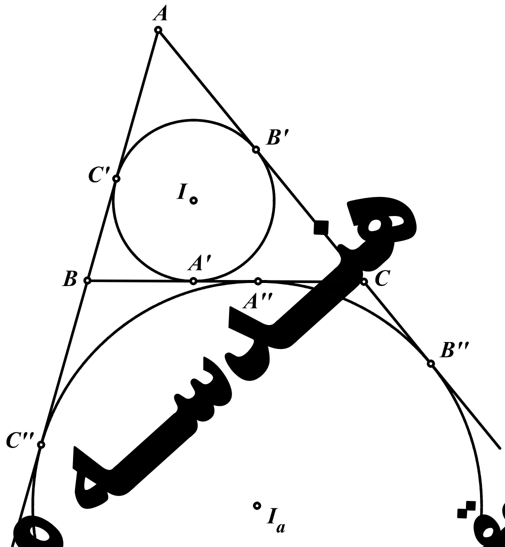


اگر همه‌ی نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث ABC را مطابق شکل رسم کنیم، نیمسازهای داخلی‌یکدیگر را در I قطع خواهند کرد و هر نیمساز داخلی نیز با دو نیمساز خارجی دیگر همرس خواهند بود و از آنجا که نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه بریکدیگر عمودند پاره خط‌های $I_cC\ ,\ I_bB\ ,\ I_aA$ ارتفاع‌های مثلث $I_aI_bI_c$ بوده و I نیز مرکز ارتفاعی و مثلث ABC نیز مثلث ارتفاعیه مثلث $I_aI_bI_c$ می‌باشند.

مسأله۳–۱۰ : دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط C', B', A' بر اضلاع متناظر مثلث ABC مماس است. دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با مرکز I_a را رسم می‌کنیم و محل تماس آن با اضلاع‌یا امتداد اضلاع را مطابق شکل C'', B'', A'' می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $P_{ABC} = AB'' = AC''$ (P نصف محیط است)

ب) $BA' = CA''$



الف) از آنجا که طول مماس‌های مرسوم از نقطه بر دایره بایکدیگر برابر است داریم:

$$\left.\begin{array}{l} CA'' = CB'' \\ BA'' = BC'' \end{array}\right\} \Rightarrow BC = CB'' + BC''$$

$$\Rightarrow AB + AC + BC = AB + AC + CB'' + BC''$$

$$\Rightarrow ۲P_{ABC} = AC'' + AB''$$

دو خط AC'', AB'' مماس‌های مرسوم از A بر دایره‌ی محاطی خارجی بوده و بایکدیگر برابرند. بنابراین :

$$\Rightarrow ۲P_{ABC} = ۲AB'' = ۲AC'' \Rightarrow P_{ABC} = AB'' = AC''$$

ب) اگر طول اضلاع مقابل رئوس متناظر را c, b, a بنامیم، طبق مسأله۳–۷ و قسمت (الف) داریم :

$$\left.\begin{array}{l} BA' = y = P - b \\ A''C = CB'' = AB'' - AC = P - b \end{array}\right\} \Rightarrow BA' = A''C$$

نکته : بنابر قسمت (ب) مسأله فوق نقاط A'', A' از وسط ضلع BC به‌یک فاصله اند و نقاطی با این خاصیت دو نقطه هم نوا خوانده می‌شوند.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) از رأس A از مثلث ABC عمودهای AM, AN را بر نیمسازهای خارجی رئوس B, C فرود می‌آوریم . ثابت کنید که طول پاره خط MN برابر نصف محیط مثلث ABC است.

۲) AD، نیمساز داخلی زاویه‌ی A در مثلث ABC رسم شده است. در نقطه‌ی A مماس ℓ را بر دایره‌ی محیطی مثلث رسم می‌کنیم . ثابت کنید که خط رأست مرسوم از D به موازات ℓ، بر دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC مماس است.

۳) ثابت کنید اگر D نقطه ای در درون مثلث ABC باشد و خطهای AD, BD, CD به ترتیب از مرکز دایره‌های محیطی مثلث‌های BDC, CDA, ADB بگذرند، آنگاه D مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC است.

۴) در مثلث ABC مرکز دایره‌ی محاطی را I و وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی را M می‌نامیم. ثابت کنید : $MB = MC = MI$

۵) در مثلث ABC ضلع BC دو برابر ضلع AB است. ثابت کنید که میانه‌ی AD نیمساز زاویه ای است که ضلع AC با میانه‌ی AE از مثلث ABD تشکیل می‌دهد.

۶) P, Q, R, S تصاویر رأس A روی نیمسازهای داخلی و خارجی زوایای B, C از مثلث ABC می‌باشند . ثابت کنید چهار نقطه‌ی مذکور روی‌یک خط واقع اند.

۷) ثابت کنید هر دو نقطه از چهار مرکز دوایر محاطی خارجی و داخلی، با دو رأس غیر هم خط از مثلث روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش وسط‌یکی از کمان‌های دایره‌ی محیطی است که آن دو رأس دو انتهای آن هستند.(بطوری که نقاط C, B, I_c, I_b روی‌یک دایره و به همین ترتیب A, B, I_a, I_b؛ C, A, I_c, I_a؛ I_a, C, B, I؛ I_b, A, C, I؛ I_c, B, A, I نیز هر کدام روی‌یک دایره می‌باشند.)

۸) ثابت کنید:

الف) مجموع شعاع‌های دوایر محاطی خارجی مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و چهار برابر شعاع دایره‌ی محیطی.

ب) مجموع فاصله‌های مرکز دایره‌ی محیطی از سه ضلع مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره‌ی محیطی و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث.

۹) اگر d فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و d_a فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث باشد، ثابت کنید:

$$d^2 = R(R-2r) \ , \ d_a^2 = R(R+2r_a)$$

۱۰) اگر JJ' قطری از دایره‌ی محاطی داخلی باشد که بر OI، خط واصل مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی عمود باشد، ثابت کنید که محیط مثلث OJJ' با قطر دایره‌ی محیطی مثلث مفروض برابر است.

۱۱) ثابت کنید نسبت مساحت یک مثلث به مساحت مثلثی که توسط نقاط تماس اضلاع مثلث با دایره‌ی محاطی داخلی آن تعیین می‌شود، برابر است با نسبت قطر دایره‌ی محیطی مثلث به شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن.

۱۲) دایره‌ای که از D، پای ارتفاع AD و نقاط I و I_a، مراکز دوایر محاطی داخلی و خارجی از مثلث ABC می‌گذرد، AD را در L هم قطع می‌کند. نشان دهید که AL با قطر دایره‌ی محیطی مثلث ABC برابر است.

۱۳) خطی که پای نیمساز داخلی AD از زاویه‌ی A در مثلث ABC را به نقطه‌ی K، محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع AC وصل می‌کند، خطی را که در نقطه‌ی A بر AC عمود است در نقطه‌ی F قطع می‌کند. ثابت کنید که $AF = h_a$ (h_a طول ارتفاع نظیر رأس A می‌باشد.)

۱۴) فرض کنید BE و CF نیمسازهای داخلی مثلث ABC و K نقطه‌ای دلخواه روی پاره‌خط EF باشد. ثابت کنید مجموع فواصل نقطه‌ی K از اضلاع AB و AC برابر فاصله‌ی نقطه‌ی K از ضلع BC است.

۱۵) اگر a، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند و d_a طول نیمساز زاویه‌ی A باشد، ثابت کنید:

$$d_a^۲ = bc - \frac{a^۲bc}{(b+c)^۲}$$

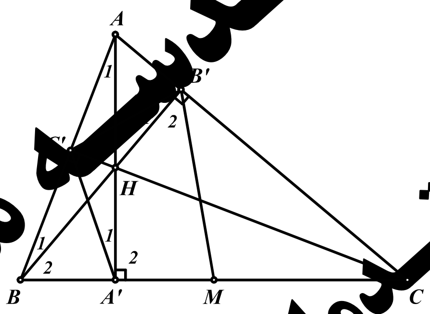
۱۶) پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث قائم‌الزاویه ABC $(A = ۹۰^\circ)$ را H می‌نامیم. اگر I، $I_۱$ و $I_۲$ به ترتیب مراکز دوایر محاطی مثلث‌های ABC، ABH و ACH باشند، نشان دهید: $AI = I_۱I_۲$

۳ – ۴ دایره نه نقطه

هدف بخش: در بخش‌های پیشین با دایره‌های محاطی و محیطی مثلث و مراکز این دایره‌ها آشنا شدیم. یکی دیگر از مهم‌ترین دایره‌های موجود در هر مثلث دایره نه نقطه مربوط به آن می‌باشد که در این بخش با آن و برخی از مهم‌ترین خواص آن آشنا خواهیم شد.

برای درک بهتر دایره نه نقطه بجای طرح مستقیم بحث، با مطرح کردن دو مسأله مرحله به مرحله بـه بررسی موضوع می‌پردازیم.

مسأله ۳ – ۱۱: ثابت کنید نقطه‌ی M وسط ضلع BC، روی دایره‌ی محیطی مثلث ارتفاعیه مثلث ABC قرار دارد.



حکم مسأله به معنای محاطی بودن چهارضلعی $A'MB'C'$ می‌باشد و برای اثبات این حکم نیز راه‌های مختلفی می‌توان یافت. اما در این مقطع ما برای اثبات حکم نشان می‌دهیم دو زاویه $C'A'M$ و $C'B'M$ مکمل یکدیگرند. از آنجا که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $BB'C$، میانه برابر نصف وتر است داریم:

$$B'M = BM \Rightarrow \widehat{B'_2} = \widehat{B_2}$$

$$\widehat{AB'H} + \widehat{AC'H} = 180^\circ \Rightarrow AB'HC' \text{ محاطی } \Rightarrow \widehat{B'_1} = \widehat{A_1}$$

$$\widehat{BA'H} + \widehat{BC'H} = 180^\circ \Rightarrow BA'HC' \text{ محاطی } \Rightarrow \widehat{A'_1} = \widehat{B_1}$$

$$\widehat{A'_2} = \widehat{AA'B} = 90^\circ$$

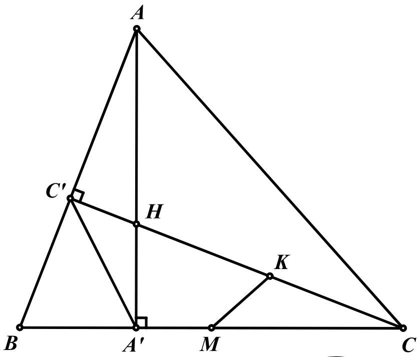
با جمع کردن طرفین روابط فوق با یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow \widehat{C'B'M} + \widehat{C'A'M} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{B_2} + \widehat{AA'B} = 180^\circ$$

بنابراین مجموع دو زاویه‌ی $C'B'M$ و $C'A'M$ برابر مجموع زوایای داخلی مثلث ABA' بـوده و برابر 180° است.

نتیجه: به همین طریق می‌توان نشان داد که اوساط اضلاع دیگر مثلث نیز روی دایره‌ی محیطی مثلث ارتفاعیه قراردارند و به عبارت دیگر شش نقطه‌ی اوساط اضلاع و پای ارتفاع‌های هر مثلث روی یک دایره قرار دارند.

مسأله ۳ – ۱۲ : در مسأله‌ی پیش اگر وسط پاره‌خط CH را K بنامیم، ثابت کنید نقطه‌ی K نیز روی دایره‌ی گذرنده از پای ارتفاع‌ها و اوساط اضلاع قرار دارد.



برای اثبات حکم مسأله باید نشان دهیم نقطه‌ی K با حداقل سه نقطه از نقاط واقع بر دایره‌ی فوق هم‌دایره است. در این مقطع ثابت می‌کنیم نقطه‌ی K با سه نقطه‌ی M، A' و C' هم‌دایره است. (شما می‌توانید سه نقطه‌ی دیگر انتخاب کنید و راه حل دیگری ارائه دهید) به عبارت دیگر نشان می‌دهیم چهارضلعی $MA'C'K$ محاطی است. با توجه به خواص چهارضلعی‌های محاطی خواهیم داشت:

$$\widehat{BC'H}+\widehat{BA'H}=180^\circ \Rightarrow BC'HA' \text{ محاطی } \Rightarrow CH.CC'=CA'.CB$$

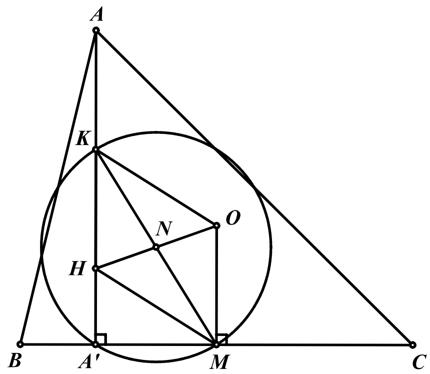
$$\Rightarrow \frac{CH}{2}.CC'=CA'.\frac{CB}{2} \Rightarrow CK.CC'=CA'.CM$$

و با توجه به خاصیت پنجم چهارضلعی‌های محاطی، چهارضلعی $C'KMA'$ محاطی می‌باشد.

نتیجه: به همین طریق می‌توان نشان داد که وسط AH و BH نیز روی دایره‌ی گذرنده از اوساط اضلاع و پای ارتفاع‌های مثلث قرار دارند و به عبارت دیگر این نه نقطه‌ی اوساط اضلاع، پای ارتفاع‌ها و اوساط AH، BH و CH هم دایره‌اند.

تعریف: دایره نه نقطه مثلث، دایره‌ای است که از اوساط اضلاع، پای ارتفاع‌ها و اوساط AH، BH و CH می‌گذرد.

قضیه‌ی ۳ – ۱۰ : مرکز دایره نه نقطه‌ی هر مثلث (N) روی خط اویلر آن و وسط OH قرار دارد.



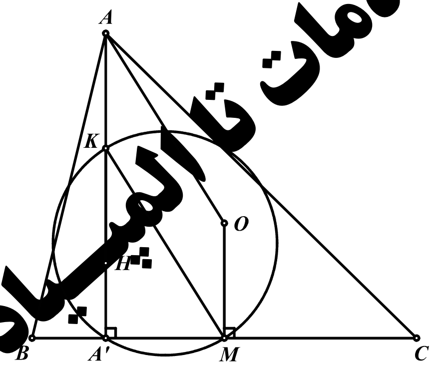
می‌دانیم که دایره نه نقطه مطابق شکل از نقاط M وسط ضلع BC و A' پای ارتفاع نظیر رأس A و K وسط AH می‌گذرد و از آن جا که زاویه‌ی محاطی $\widehat{KA'M}$ برابر ۹۰° است بنابراین KM قطر دایره نه نقطه بوده و نقطه‌ی N مرکز دایره نه نقطه مثلث در وسط KM قرار دارد. پس برای اثبات حکم باید نشان دهیم خط اویلر مثلث (خط OH) پاره‌خط MK را نصف می‌کند.

$$\left.\begin{aligned} KH &= \frac{۱}{۲}AH \\ OM &= \frac{۱}{۲}AH \end{aligned}\right\} \Rightarrow KH = OM$$

$$\left.\begin{aligned} KH &\perp BC \\ OM &\perp BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow KH \parallel OM$$

از آن جا که دو ضلع روبه‌رو یعنی KH و OM با یکدیگر موازی و مساوی هستند می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی $KHMO$ یک متوازی الاضلاع است و قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین اولاً OH از وسط قطر KM گذشته و مرکز دایره نه نقطه (N) روی OH قرار دارد، ثانیاً نقطه‌ی N مرکز دایره نه نقطه یعنی محل برخورد اقطار متوازی‌الاضلاع، وسط OH قرار دارد.

مسأله ۳ – ۱۳: شعاع دایره نه نقطه هر مثلث برابر نصف شعاع دایره‌ی محیطی آن می‌باشد.



برای اثبات حکم فوق کافی است نشان دهیم قطر KM از دایره نه نقطه با شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC (AO) برابر است.

$$AK = OM = \frac{۱}{۲}AH \ , \ AK \parallel OM$$

از آن جا که دو ضلع AK و OM از چهارضلعی $AKMO$ با یکدیگر موازی و مساوی هستند، بنابراین این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع بوده و در نتیجه $AO = KM$ می‌باشد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) ارتفاع مرسوم بر ضلع BC از مثلث ABC، دایره‌ی محیطی آن را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. ثابت کنید که فاصله‌ی مرکز دایره‌ی نه نقطه تا ضلع BC، برابر $\frac{۱}{۴}AD$ است.

۲) در مثلث ABC، AH ارتفاع مرسوم از رأس A بر ضلع BC و M و N تصاویر نقاط B و C روی نیمساز داخلی زاویه‌ی A هستند. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محیطی مثلث HMN روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC قرار دارد.

۳) از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی در راستای دلخواه، و از هر رأس خطی عمود بر این خطوط رسم می‌کنیم. به این ترتیب سه مستطیل حاصل می‌شود که اضلاع AB، CA و BC قطرهای آن‌ها هستند. ثابت کنید که سه قطر دیگر این مستطیل‌ها در نقطه‌ای روی دایره‌ی نه نقطه مثلث ABC همرس‌اند.

۴) فرض کنید ℓ معرف خطی دلخواه باشد که از مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گذرد و A'، B' و C' تصویر نقطه‌های A، B و C روی ℓ باشند. ثابت کنید عمودهای وارد از نقاط A'، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB، در یک نقطه روی دایره‌ی نه نقطه مثلث ABC همرس‌اند.

۵) اگر O و H به ترتیب مرکز دایره‌ی محیطی و ارتفاعی مثلث ABC باشند، ثابت کنید که دوایر نه نقطه‌ی سه مثلث AOH، BOH و COH در دو نقطه متقاطع‌اند.

۶) دایره‌ای که به قطر BC رسم می‌کنیم اضلاع AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کند. خط دلخواهی که از E می‌گذرد، دایره‌ی محیطی مثلث AEF و دایره به قطر BC را در نقاط P و Q (غیر از E) قطع می‌کند. ثابت کنید وسط پاره‌خط PQ روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC قرار دارد.

۷) فرض کنید نقاط D، E و F پای ارتفاع‌های مثلث ABC باشند. ثابت کنید خط‌های اویلر سه مثلث AEF، BDF و CDE در یک نقطه روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC همرس‌اند.

۸) خط دلخواه ℓ را از N مرکز دایره نه نقطه‌ی مثلث ABC می‌گذرانیم. از چهار نقطه‌ی A، B، C و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC عمودهایی بر خط ℓ رسم می‌کنیم. ثابت کنید مجموع طول‌های این چهار عمود رسم شده بر ℓ، با در نظر گرفتن جهت همواره برابر صفر است.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) ثابت کنید در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌ی A، خطی که اوساط اضلاع AB و BC را به هم وصل می‌کند و خط واصل نقطه‌های تماس دایره‌ی محاطی با اضلاع BC و AC، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲) در مثلث ABC، پاره‌خط‌های AD و BE را به ترتیب روی پاره‌خط‌های AC و BC برابر ضلع AB جدا می‌کنیم. اگر O و I به ترتیب مراکز دایره‌ی محیطی و دایره‌ی محاطی مثلث ABC باشند، ثابت کنید:

الف) $DE \perp OI$

ب) شعاع دایره‌ی محیطی مثلث CDE برابر OI است.

۳) دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط B_1 و C_1 بر اضلاع AB و AC مماس است و دایره‌ی محاطی خارجی نیز در نقاط B_2 و C_2 بر امتداد اضلاع AB و AC مماس است. فرض کنید M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد و خط AM، پاره‌خط‌های B_1C_1 و B_2C_2 را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. ثابت کنید که چهارضلعی $BECF$، متوازی‌الاضلاع است.

۴) نقاط A'، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{CC'B}=\widehat{BB'A}=\widehat{AA'C}$. نشان دهید مرکز دایره‌ی محیطی مثلثی که از برخورد پاره‌خط‌های AA'، BB' و CC' تشکیل می‌شود بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC منطبق است.

۵) در مثلث ABC، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی را نسبت به نقطه‌ی وسط ضلع BC قرینه می‌کنیم تا نقطه‌ی T حاصل شود. از نقطه‌ی D وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC به T وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در K قطع کند. ثابت کنید مجموع طول دو تا از پاره‌خط‌های KA، KB و KC برابر طول سومی است.

۶) نقطه‌ی دلخواه D را روی ضلع BC از مثلث ABC در نظر می‌گیریم و دایره‌ای را رسم می‌کنیم که بر ضلع BC و پاره‌خط AD و بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس باشد. ثابت کنید:

الف) خطی که از محل تماس دایره‌ی مذکور با دو پاره‌خط BC و AD می‌گذرد، از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC نیز می‌گذرد.

ب) خط‌المرکزین دو دایره‌ای که به روش بالا در طرفین AD رسم می‌شوند از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC می‌گذرد.

فصل چهارم

همرسی و هم‌خطی

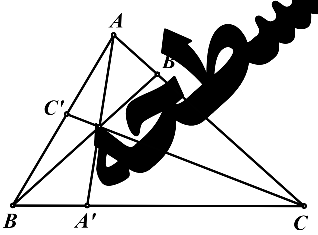
۴–۱ سوا، منلائوس، دزارگ

هدف بخش: بسیاری از همرسی یا هم خطی‌ها در یک یا چند مثلث اتفاق می‌افتند. قضایای سوا و منلائوس از کاربردی‌ترین قضایا در اثبات اینگونه مسایل می‌باشند. همچنین در حل بسیاری از مسایل ناگزیر از تبدیل مسایل همرسی و هم‌خطی به یکدیگر هستیم که قضیه‌ی دزارگ نیز یکی از مهم‌ترین ایده‌ها در این حوزه می‌باشد. در این بخش با انواع کاربردهای این قضایا آشنا خواهیم شد.

تعریف: خط سوایی خطی است که از یک رأس مثلث گذشته و ضلع مقابل یا امتداد آن را در یک نقطه قطع می‌کند.

قضیه سوا ٤ – ١: در مثلث ABC سه خط سوایی AA'، BB' و CC' همرس‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=1$$



توجه داشته باشید در صورتی که A'، B' و C' بر امتداد اضلاع قرارداشته باشند نیز همچنان رابطه‌ی فوق برقرار است.

ابتدا فرض می‌کنیم سه خط سوایی فوق در نقطه‌ای مانند P همرس باشند و نشان می‌دهیم رابطه‌ی فوق برقرار است. برای این منظور هرکدام از نسبت‌های فوق را به طور جداگانه به نسبت مساحت‌ها تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{ABA'}}{S_{ACA'}}=\frac{S_{PBA'}}{S_{PCA'}} \Rightarrow \frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{ABA'}-S_{PBA'}}{S_{ACA'}-S_{PCA'}}=\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}$$

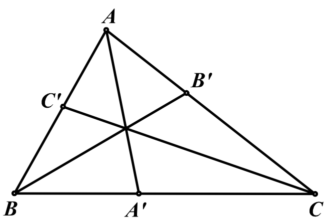
و به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}\ ,\ \frac{CB'}{B'A}=\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}$$

$$\Rightarrow \frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}.\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}.\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}=1$$

طرف دوم قضیه نیز با استفاده از برهان خلف و صورت طرف اول به راحتی قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ٤ – ۱: ثابت کنید نیمسازهای داخلی هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند.



می‌دانیم که نیمساز هر رأس مثلث، ضلع مقابل را بـه نـسبت اضـلاع مجـاور آن رأس قطع می‌کند. در نتیجه داریم:

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}=۱$$

بنابراین طبق قضیه سوا نیمسازهای مثلث در یک نقطه همرس‌اند.

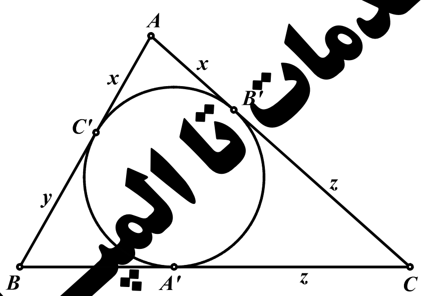
توجه داشته باشید که اثبات همرسی میانه‌های مثلث نیز بوسیله‌ی قضیه‌ی سوا به همین سادگی صورت می‌گیرد.

مسأله ٤– ۲:

الف) اگر A'، B' و C' محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث بـا اضـلاع BC، AC و AB باشـند، نشان دهید خطوط AA'، BB' و CC' در یک نقطه همرس‌اند.

ب) اگر A''، B'' و C'' محل تماس دایره‌های محاطی خارجی نظیر رئوس A، B و C با اضلاع مقابـل آن‌ها باشند، نشان دهید خطوط AA''، BB'' و CC'' در یک نقطه همرس‌اند.

الف)

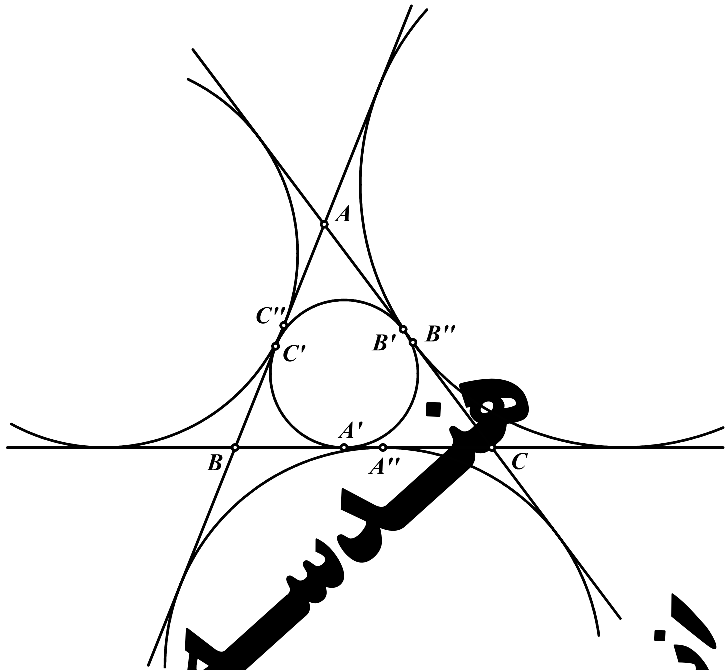


$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=۱$$

بنابراین طبق قضیه‌ی سوا خطوط AA'، BB' و CC' همرس‌اند.

ب) طبق مسأله‌ی ۳ – ۱۰ می‌دانیم:

$$AC' = BC'' \;,\;\; BA' = CA'' \;,\;\; AB' = CB''$$



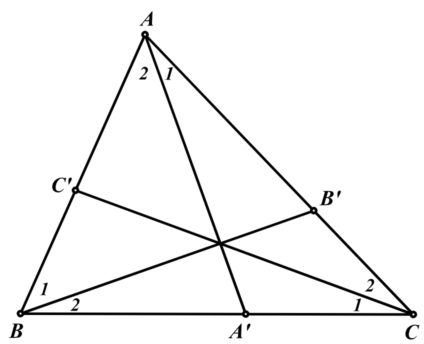
بنابر روابط فوق و طبق قسمت (الف) خواهیم داشت:

$$\frac{AC''}{C''B}\cdot\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB''}{B''A}=\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{AB'}{B'C}=۱$$

بنابراین طبق قضیه‌ی سوا خطوط AA''، BB'' و CC'' در یک نقطه همرسند، که محل همرسی آن‌ها نقطه‌ی ناگِل گفته می‌شود.

صورت سینوسی قضیه سوا: در مثلث ABC سه خط سوایی AA'، BB' و CC' همرس‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\frac{\sin \widehat{A_۱}}{\sin \widehat{A_۲}}\cdot\frac{\sin \widehat{B_۱}}{\sin \widehat{B_۲}}\cdot\frac{\sin \widehat{C_۱}}{\sin \widehat{C_۲}}=۱$$



برای اثبات قضیه‌ی فوق کافی است نشان دهیم که رابطه‌ی فوق با رابطه‌ی صورت معمولی سوا هم‌ارز است به عبارت دیگر:

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1 \Leftrightarrow \frac{\sin\widehat{A_1}}{\sin\widehat{A_2}}\cdot\frac{\sin\widehat{B_1}}{\sin\widehat{B_2}}\cdot\frac{\sin\widehat{C_1}}{\sin\widehat{C_2}}=1$$

برای این منظور هریک از نسبت‌های رابطه‌ی اول را با استفاده از لم مسأله‌ی ۶ بخش ۳-۲ به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{\sin\widehat{C_2}}{\sin\widehat{C_1}}\cdot\frac{AC}{BC}$$

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{\sin\widehat{A_2}}{\sin\widehat{A_1}}\cdot\frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{\sin\widehat{B_2}}{\sin\widehat{B_1}}\cdot\frac{BC}{AB}$$

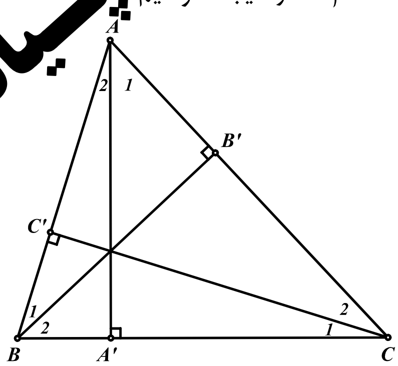
با ضرب کردن طرفین روابط فوق در یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\frac{\sin\widehat{A_2}}{\sin\widehat{A_1}}\cdot\frac{\sin\widehat{B_2}}{\sin\widehat{B_1}}\cdot\frac{\sin\widehat{C_2}}{\sin\widehat{C_1}}$$

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1 \Leftrightarrow \frac{\sin\widehat{A_1}}{\sin\widehat{A_2}}\cdot\frac{\sin\widehat{B_1}}{\sin\widehat{B_2}}\cdot\frac{\sin\widehat{C_1}}{\sin\widehat{C_2}}=1$$

مسأله ۴-۳: ثابت کنید ارتفاع‌های هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند.

از آن جا که $\widehat{AB'B}=\widehat{AA'B}=90^\circ$ چهارضلعی $AB'A'B$ محاطی است. بنابراین $\widehat{A_1}=\widehat{B_2}$ و به طریق مشابه داریم $\widehat{A_2}=\widehat{C_1}$ و $\widehat{B_1}=\widehat{C_2}$ در نتیجه خواهیم داشت:

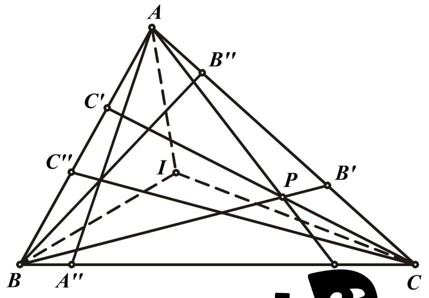


$$\frac{\sin\widehat{A_1}}{\sin\widehat{A_2}}\cdot\frac{\sin\widehat{B_1}}{\sin\widehat{B_2}}\cdot\frac{\sin\widehat{C_1}}{\sin\widehat{C_2}}=\frac{\sin\widehat{A_1}}{\sin\widehat{C_1}}\cdot\frac{\sin\widehat{B_1}}{\sin\widehat{A_1}}\cdot\frac{\sin\widehat{C_1}}{\sin\widehat{B_1}}=1$$

بنابراین طبق قضیه‌ی سوای سینوسی ارتفاع‌های AA'، BB' و CC' همرس‌اند.

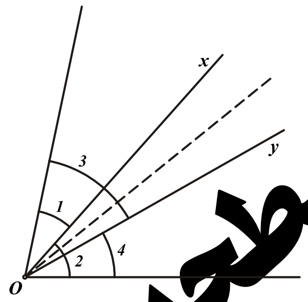
توجه داشته باشید که اثبات همرسی نیمسازها نیز بوسیله‌ی صورت سینوسی سوا بسیار ساده‌تر است.

مسأله ٤ – ٤ : خطوط سوایی AA'، BB' و CC' از مثلث ABC در نقطه‌ی P همرس‌اند. اگر خطوط سوایی AA''، BB'' و CC'' به ترتیب قرینه‌ی خطوط AA'، BB' و CC' نسبت به نیمسازهای رئوس A، B و C باشند، نشان دهید خطوط AA''، BB'' و CC'' نیز در یک نقطه همرس‌اند. (این نقطه‌ی همرسی، مزدوج هم زاویه‌ی نقطه‌ی P نامیده می‌شود.)



$$\frac{\sin \widehat{CAA'}}{\sin \widehat{BAA'}} \cdot \frac{\sin \widehat{ABB'}}{\sin \widehat{CBB'}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCC'}}{\sin \widehat{ACC'}} = ١$$: فرض

$$\frac{\sin \widehat{CAA''}}{\sin \widehat{BAA''}} \cdot \frac{\sin \widehat{ABB''}}{\sin \widehat{CBB''}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCC''}}{\sin \widehat{ACC''}} = ١$$: حکم



با کمی دقت می‌توان دریافت چنانچه خطوط OX و OY قرینه‌ی یکدیگر نسبت به نیمساز زاویه‌ی O باشند آنگاه $\widehat{O_1} = \widehat{O_4}$ و $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$ می‌باشد.
بنابراین در مسأله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\widehat{CAA'} = \widehat{BAA''} \quad , \quad \widehat{BAA'} = \widehat{CAA''}$$

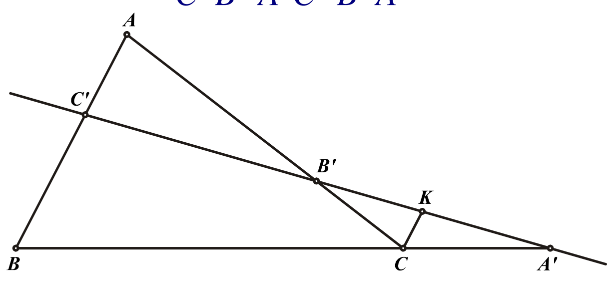
$$\widehat{ABB'} = \widehat{CBB''} \quad , \quad \widehat{CBB'} = \widehat{ABB''}$$

$$\widehat{BCC'} = \widehat{ACC''} \quad , \quad \widehat{ACC'} = \widehat{BCC''}$$

با جایگزینی تساوی‌های فوق در فرض مسأله، به راحتی حکم مسأله نتیجه خواهد شد.

قضیه‌ی منلائوس ٤ -٢: در مثلث ABC، سه نقطه‌ی A'، B' و C' به ترتیب واقع بر اضلاع BC، AC و AB و یا امتداد آن‌ها، بر یک استقامت‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = ١$$



توجه داشته باشید که چنانچه A'، B' و C' بر امتداد اضلاع قرارداشته باشند همچنان رابطه‌ی فوق صادق است.

ابتدا فرض می‌کنیم که نقاط A'، B' و C' بر یک استقامت باشند و نشان می‌دهیم که رابطه‌ی فوق برقرار است. برای این منظور از نقطه‌ی C خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا خط $A'B'C'$ را در K قطع کند.

$$\overset{\Delta}{A'KC} \sim \overset{\Delta}{A'C'B} \Rightarrow \frac{BA'}{A'C}=\frac{C'B}{KC}$$

$$\overset{\Delta}{B'KC} \sim \overset{\Delta}{B'AC'} \Rightarrow \frac{CB'}{B'A}=\frac{KC}{AC'}$$

$$\Rightarrow \frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=\frac{AC'}{C'B}.\frac{C'B}{KC}.\frac{KC}{AC'}=١$$

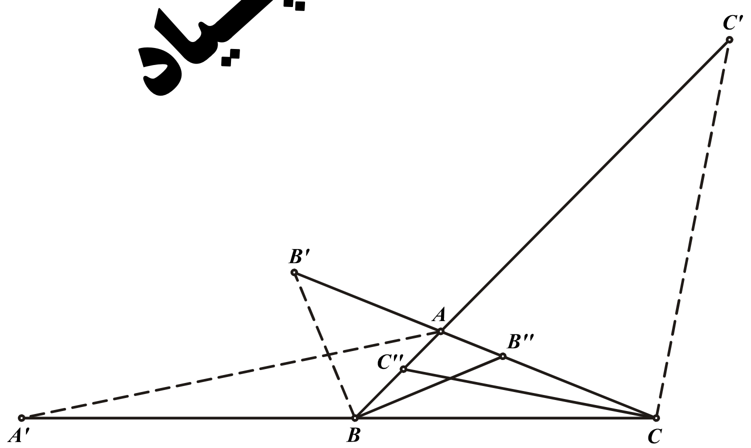
طرف دوم قضیه نیز با استفاده از برهان خلف به سادگی قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.

نکته: از آنجا که رابطه‌های بکار رفته در دو قضیه‌ی سوا و منلائوس مانند یکدیگر می‌باشند باید توجه داشته باشید چنانچه برای سه نقطه‌ی A'، B' و C' روی اضلاع مثلث ABC یا بر امتداد آن‌ها، این رابطه برقرار باشد در صورتی که هر سه نقطه‌ی A'، B' و C' بر اضلاع قرار داشته و یا یک نقطه بر ضلع و دو نقطه‌ی دیگر بر امتدادهای اضلاع واقع باشند، رابطه‌ی فوق مربوط به قضیه‌ی سوا می‌باشد و در صورتی که هر سه نقطه‌ی A'، B' و C' بر امتداد اضلاع قرار داشته و یا یک نقطه بر امتداد ضلع و دو نقطه‌ی دیگر بر ضلع‌های مثلث واقع باشند رابطه‌ی فوق مربوط به قضیه‌ی منلائوس می‌باشد.

مسأله ٤–٥: در هر مثلث غیر متساوی‌الساقین ABC ثابت کنید:

الف) محل تلاقی نیمسازهای خارجی رئوس مثلث با اضلاع مقابل همواره بر یک استقامت قرار دارند.

ب) محل تلاقی نیمسازهای داخلی رئوس B و C با اضلاع مقابل و نیمساز خارجی رأس A با ضلع مقابلش، با یکدیگر هم‌خطاند.



الف) برای حل مسأله بوسیله‌ی قضیه‌ی منلائوس باید نشان دهیم:

$$\text{حکم}: \frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=١$$

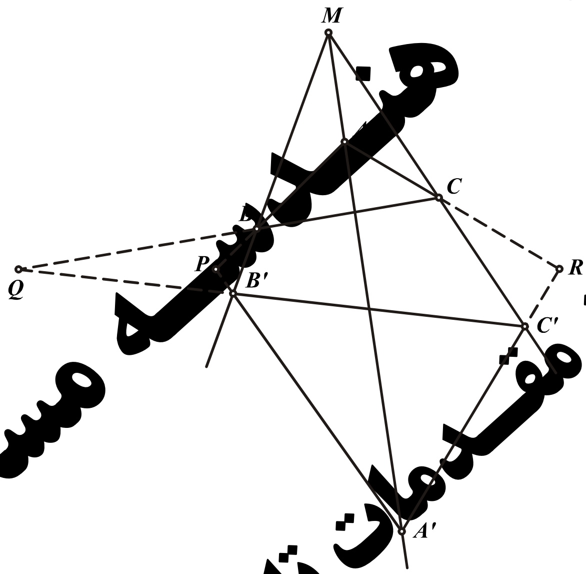
طبق خواص نیمسازها داریم:

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{AB}{AC},\ \frac{AC'}{C'B}=\frac{AC}{BC},\ \frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AB}$$
$$\Rightarrow \frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=\frac{AC}{BC}.\frac{AB}{AC}.\frac{BC}{AB}=1$$

بنابراین نقاط A'، B' و C' با یکدیگر هم‌خطاند.

ب) اثبات این قسمت نیز مشابه قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

قضیه‌ی دزارگ ۴-۳ : اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ خطوط AA'، BB' و CC' همرس باشند آنگاه نقاط تلاقی اضلاع متناظر با یکدیگر هم خط هستند و بالعکس.



محل همرسی AA'، BB' و CC' را M و محل تلاقی اضلاع متناظر با یکدیگر را P، Q و R می‌نامیم. بنابر قضیه‌ی منلائوس برای مثلث MBC و قاطع $QB'C'$ داریم:

$$\frac{MB'}{BB'}.\frac{BQ}{CQ}.\frac{CC'}{MC'}=1$$

همچنین برای مثلث MAB و قاطع $PA'B'$ داریم:

$$\frac{BB'}{MB'}.\frac{AP}{BP}.\frac{MA'}{AA'}=1$$

و برای مثلث MAC و قاطع $RA'C'$ داریم:

$$\frac{MC'}{CC'}.\frac{CR}{AR}.\frac{AA'}{MA'}=1$$

با ضرب سه رابطه‌ی فوق در یکدیگر خواهیم داشت:

$$\frac{BQ}{CQ}.\frac{CR}{AR}.\frac{AP}{BP}=1$$

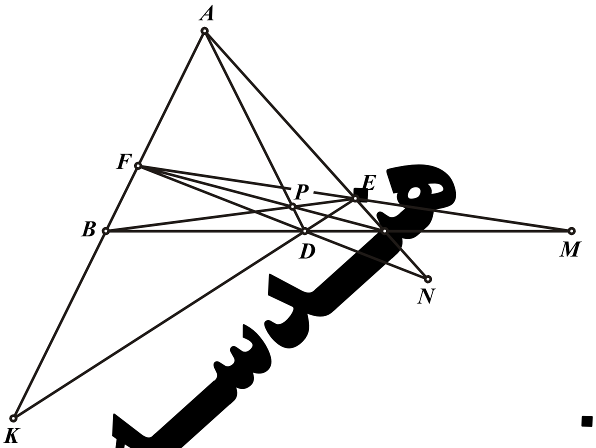
پس بنابر قضیه‌ی منلائوس برای مثلث ABC نقاط P، Q و R روی یک استقامت قرار دارند.

اثبات عکس قضیه نیز به خود شما واگذار می‌شود.

نکته: چنانچه دو ضلع متناظر مثلث‌ها با یکدیگر موازی باشند خط گذرنده از محل تلاقی دیگر اضلاع متناظر با یکدیگر، با این دو ضلع موازی خواهد بود.

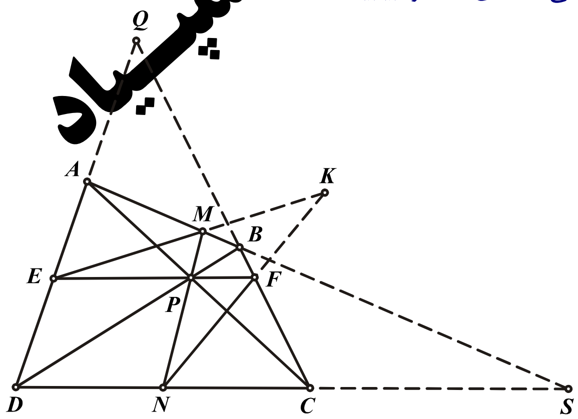
تعریف: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با شرایط فوق را دو مثلث همسان و نقطه‌ی M را مرکز همسانی و خط QPR را محور همسانی دو مثلث می‌نامند.

مسأله ٤-٦: خطوط سوایی AD، BE و CF از مثلث ABC در نقطه‌ی P همرس‌اند. نشان دهید نقاط (EF , BC) و (FD , CA) و (DE , AB) بر یک استقامت‌اند.



دو مثلث ABC و DEF با یکدیگر همسان هستند و نقطه‌ی P نیز مرکز همسانی این مثلث‌ها می‌باشد. بنابراین طبق قضیه‌ی دزارگ، دو مثلث فوق محور همسانی نیز دارند پس سه نقطه‌ی $M=(EF , BC)$ و $K=(DE , AB)$ و $N=(FD , AC)$ بر روی یک خط راست قرار دارند.

مسأله ٤-٧: چهارضلعی $ABCD$ مفروض است بطوری که اضلاع روبروی آن موازی نیستند. اقطار AC و BD یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. نقاط M، F، N و E طوری روی اضلاع AB، BC، CD و DA تغییر می‌کنند که خطوط MN و EF از نقطه‌ی P می‌گذرند. اگر EM و FN یکدیگر را در K قطع کنند، مکان هندسی نقطه‌ی K را بیابید.



دو مثلث AME و CNF با یکدیگر همسان بوده و نقطه‌ی P مرکز همسانی این مثلث‌ها می‌باشد. بنابراین طبق قضیه‌ی دزارگ، دو مثلث فوق دارای محور همسانی نیز هستند. پس سه نقطه‌ی $S=(AM , CN)$ و $Q=(AE , CF)$ و $K=(EM , FN)$ بر یک استقامت قرار دارند و به عبارت دیگر نقطه‌ی K همواره روی SQ قرار دارد. از طرف دیگر با بازگشت همین راه حل ثابت می‌شود که هر نقطه روی خط SQ خاصیت نقطه‌ی K را دارد. بنابراین مکان هندسی نقطه‌ی K خط SQ می‌باشد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) فرض کنید P معرف نقطه‌ای دلخواه در صفحه‌ی مثلث ABC باشد و A_1 و A_2 پای عمودهای وارد از P بر نیمسازهای داخلی و خارجی A از مثلث ABC باشند. به همین نحو B_1، B_2، C_1 و C_2 را تعریف می‌کنیم. ثابت کنید خطهای A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲) ثابت کنید برای اینکه قطرهای AD، BE و CF از شش‌ضلعی $ABCDEF$، که در دایره‌ای محاط شده است، در یک نقطه به هم برسند، شرط لازم و کافی این است که برابری $AB.CD.EF=BC.DE.FA$ برقرار باشد.

۳) فرض کنید I مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC و A_0، B_0 و C_0 نقطه‌های تماس این دایره به ترتیب با اضلاع BC، AC و AB باشند. روی نیم‌خط‌های IA_0، IB_0 و IC_0 به ترتیب، نقطه‌های A'، B' و C' را به فاصله‌های برابر از I اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که خطهای AA'، BB' و CC' همرس‌اند.

۴) ثابت کنید که مماس‌های مرسوم از رأس‌های مثلث بر دایره‌ی محیطی آن، اضلاع مقابل آن را در سه نقطه‌ی هم خط قطع می‌کنند.

۵) دایره‌ای ضلع AB از مثلث ABC را در نقطه‌های C_1 و C_2، ضلع AC را در نقطه‌های B_1 و B_2 و ضلع BC را در نقطه‌های A_1 و A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به هم برسند خطهای AA_2، BB_2 و CC_2 هم در یک نقطه متقاطع‌اند.

۶) روی اضلاع AB، AC و BC از مثلث ABC نقاط C_1، B_1 و A_1 را اختیار می‌کنیم. فرض کنید C_2 نقطه‌ی برخورد خطوط AB و A_1B_1، A_2 نقطه‌ی برخورد خطوط BC و B_1C_1 و B_2 نقطه‌ی برخورد خطوط AC و A_1C_1 باشد. ثابت کنید اگر خطوط AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه همرس باشند، آنگاه نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بر یک خط راست واقع‌اند.

۷) خط راستی، ضلع‌های AB و AC و امتداد ضلع BC از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط F، E و D قطع می‌کند. ثابت کنید که وسط پاره‌خط‌های AD، BE و CF بر یک خط راست واقع‌اند. (به عبارت دیگر اوساط اقطار هر چهارضلعی کامل هم‌خط‌اند. در هر چهارضلعی کامل امتداد اضلاع روبرو یکدیگر را قطع می‌کنند و دارای سه قطر است. در شکل مسأله BE، FC و AD اقطار چهارضلعی کامل $FECB$ هستند.)

۸) نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 را به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC و نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 را بر اضلاع B_1C_1، A_1C_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ اختیار می‌کنیم. می‌دانیم که خطوط AA_1، BB_1 و CC_1 همرس‌اند. ثابت کنید که خطوط AA_2، BB_2 و CC_2 همرس‌اند اگر و فقط اگر A_1A_2، B_1B_2، C_1C_2 همرس باشند.

۹) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن، سه مثلث متساوی الساقین $A'BC$، $B'CA$ و $C'AB$ را طوری رسم می‌کنیم که این سه مثلث با هم متشابه باشند و داشته باشیم $A'B=A'C$، $B'A=B'C$ و $C'A=C'B$. ثابت کنید سه خط AA'، BB' و CC' همرس‌اند.

۱۰) جفت نقاط D و D'؛ E و E'؛ F و F' را به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC و متقارن نسبت به اوساط اضلاع متناظر انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید که دو مثلث DEF و $D'E'F'$ هم‌ارزند. (دو مثلث با مساحت‌های برابر را دو مثلث هم‌ارز یا معادل گویند.)

۱۱) دایره‌ای که به مرکز نقطه‌ای روی عمود منصف ضلع BC از مثلث ABC رسم می‌شود اضلاع AB و AC را به ترتیب در جفت نقاط P و P'، Q و Q' قطع می‌کند. خطوط PQ و $P'Q'$، خط BC را به ترتیب در نقاط K و K' قطع می‌کنند. ثابت کنید K و K' از نقطه‌ی وسط ضلع BC به یک فاصله‌اند.

۱۲) اگر سه خط سوایی AD، BE و CF در نقطه‌ی P همرس باشند، ثابت کنید: $\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}$

۱۳) سه خط موازی توسط سه مورب موازی در نقاط A، B، C؛ A'، B'، C'؛ A''، B''، C'' قطع شده‌اند. نشان دهید که خطوط $B''C$، $C'A''$ و AB' همرس‌اند.

۱۴) دو خط سوایی BE و CF یکدیگر را در نقطه‌ای روی ارتفاع AD از مثلث ABC قطع می‌کنند. ثابت کنید DA نیمساز زاویه‌ی EDF است.

۱۵) دایره‌ی به قطر ارتفاع AD از مثلث ABC، اضلاع AC و AB را در E و F قطع می‌کند. تصویر رأس A بر خط EF را A' می‌نامیم. B' و C' را به طور مشابه تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که خطوط AA'، BB' و CC' همرس‌اند

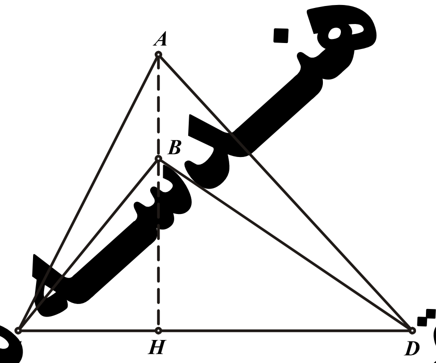
۱۶) در مثلث ABC نیم دایره‌ای را چنان محاط می‌کنیم که قطر آن بر ضلع BC باشد و بر اضلاع AC و AB به ترتیب در نقاط E و F مماس باشد. اگر محل تقاطع دو خط BE و CF را K بنامیم ثابت کنید که AK بر BC عمود است.

۴ – ۲ قضیه کارنو

هدف بخش: در برخورد با برخی از انواع مسایل مربوط به همرسی خطوط، ناگزیر از استفاده از روابط طولی بـرای حـل آن‌ها هستیم. یکی از کاربردی‌ترین قضایا در این حوزه، قضیه‌ی کارنو است که در این بخش با آن آشنا خـواهیم شد.

مسأله ٤–٨ : نشان دهید خط گذرنده از نقاط A و B بر پاره خط CD عمود است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 \qquad (۱)$$



برای اثبات مسأله‌ی فوق ابتدا فرض می‌کنیم رابطه‌ی (۱) برقرار باشد و نشان می‌دهیم AB بر CD عمود است.

اگر H_a و H_b به ترتیب پای عمودهای وارد از نقاط A و B بر خط CD باشند، طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$AC^2 - AD^2 = AH_a^2 + H_aC^2 - AH_a^2 - H_aD^2 = H_aC^2 - H_aD^2$$

$$BC^2 - BD^2 = BH_b^2 + H_bC^2 - BH_b^2 - H_bD^2 = H_bC^2 - H_bD^2$$

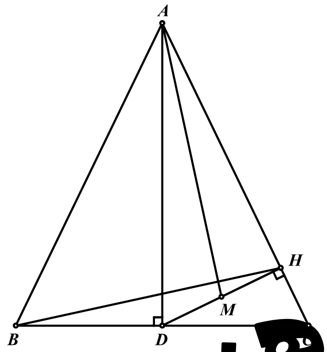
با جایگزینی دو رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&H_aC^2 - H_aD^2 = H_bC^2 - H_bD^2 \\
&\Rightarrow (H_aC + H_aD)(H_aC - H_aD) = (H_bC + H_bD)(H_bC - H_bD) \\
&\Rightarrow H_aC - H_aD = H_bC - H_bD \\
&\Rightarrow H_aC + CD - H_aD = H_bC + CD - H_bD \\
&\Rightarrow 2H_aC = 2H_bC \Rightarrow H_aC = H_bC
\end{aligned}$$

بنابراین نقاط H_a و H_b بر یکدیگر منطبق هستند و AB بر CD عمود است.

اثبات طرف دوم مسأله نیز با توجه به قضیه‌ی فیثاغورث بسیار واضح است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ٤-٩ : ارتفاع AD از مثلث متساوی الساقین ABC $(AB=AC)$ را رسم می‌کنیم. اگر H پای عمود وارد از نقطه‌ی D بر ضلع AC باشد و نقطه‌ی وسط DH را M بنامیم، نشان دهید AM بر BH عمود است.



با توجه به مسأله‌ی پیش، برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم: $AB^{2}-AH^{2}=MB^{2}-MH^{2}$.

طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$AB^{2}-AH^{2}=AD^{2}+DB^{2}-AD^{2}+DH^{2}=DB^{2}+DH^{2} \qquad (1)$$

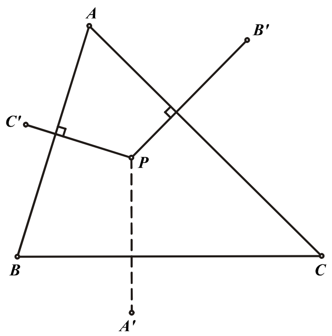
و بنا بر قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث BMD داریم:

$$MB^{2}-MH^{2}=MD^{2}+DB^{2}-2MD.DB.\cos\widehat{BDM}-MH^{2}$$
$$=DB^{2}+2MD.DB.\cos\widehat{CDH}$$
$$=DB^{2}+2MD.DH=DB^{2}+DH^{2}$$
$$\Rightarrow MB^{2}-MH^{2}=DB^{2}+DH^{2} \qquad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $AB^{2}-AH^{2}=MB^{2}-MH^{2}$

قضیه کارنو ٤-٤ : خطوط عمود وارد از نقاط A'، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC در یک نقطه همرس‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$AC'^{2}-C'B^{2}+BA'^{2}-A'C^{2}+CB'^{2}-B'A^{2}=0$$



برای اثبات قضیه‌ی فوق فرض می‌کنیم رابطه‌ی بالا برقرار بوده و خطوط عمود وارد از نقاط B' و C' بر اضلاع AC و AB یکدیگر را در P قطع کنند و نشان می‌دهیم خط گذرنده از نقاط A' و P بر ضلع BC عمود است.

طبق مسأله‌ی پیش، از آنجا که خطوط PB' و PC' به ترتیب بر اضلاع AC و AB عمود هستند داریم:

$$AC'^2 - C'B^2 = PA^2 - PB^2$$

$$CB'^2 - B'A^2 = PC^2 - PA^2$$

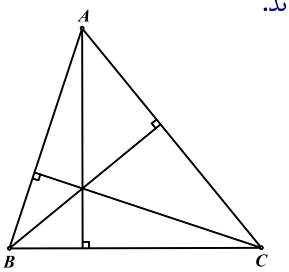
با جایگزینی دو رابطه‌ی فوق در فرض قضیه خواهیم داشت:

$$BA'^2 - A'C^2 = PB^2 - PC^2$$

بنابراین طبق مسأله‌ی پیش خط $A'P$ بر ضلع BC عمود است.

نکته: توجه داشته باشید که نقاط A'، B' و C' می‌توانند روی اضلاع مثلث نیز قرار داشته باشند که در این صورت حالت خاصی از قضیه حاصل می‌شود که البته کاربرد زیادی نیز دارد.

مسأله ۴ – ۱۰: نشان دهید در هر مثلث ارتفاع‌های نظیر رئوس در یک نقطه همرس‌اند.

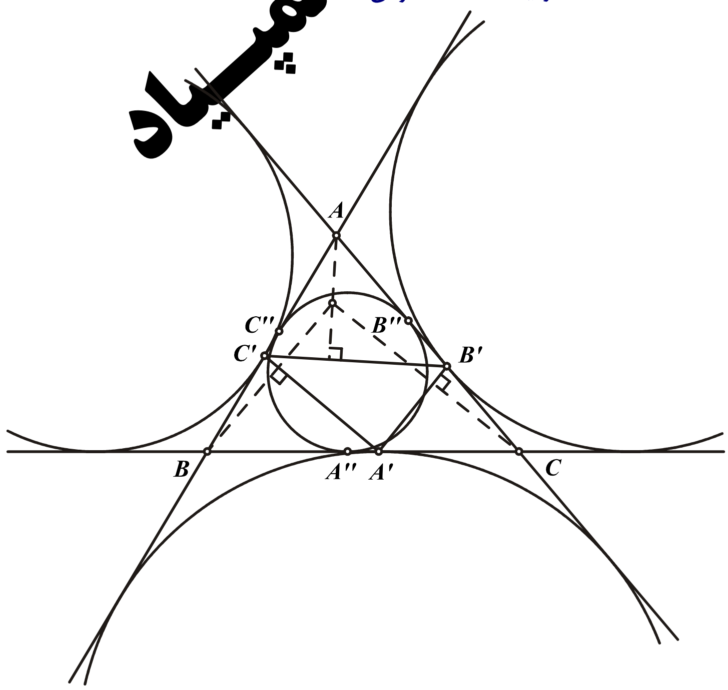


در قضیه‌ی کارنو چنانچه A' را روی رأس A و B' و C' را نیز روی رئوس B و C در نظر بگیریم، رابطه‌ی کارنو به صورت زیر برقرار است:

$$AC^2 - CB^2 + BA^2 - AC^2 + CB^2 - BA^2 = 0$$

بنابراین طبق قضیه‌ی کارنو خطوط عمود وارد از نقاط A، B و C به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB در یک نقطه همرس‌اند.

مسأله ۴–۱۱: اگر A'، B' و C' محل تماس دایره‌های محاطی خارجی نظیر رئوس A، B و C با اضلاع مقابل آن‌ها باشند، نشان دهید خطوط عمود وارد از رئوس A، B و C به ترتیب بر اضلاع $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$ از مثلث $A'B'C'$ در یک نقطه همرس‌اند.



طبق قضیه‌ی کارنو برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:

$$B'A^2 - AC'^2 + C'B^2 - BA'^2 + A'C^2 - CB'^2 = 0$$

اما طبق مسأله ۳–۱۰ داریم:

$$B'A = B''C \quad , \quad AC' = BC'' \quad , \quad C'B = C''A \quad , \quad BA' = CA''$$

$$A'C = A''B \quad , \quad CB' = AB''$$

با جایگزینی روابط فوق در حکم مسأله نتیجه می‌شود:

$$B''C^2 - BC''^2 + C''A^2 - CA''^2 + A''B^2 - AB''^2 = 0$$

و از آنجا که پاره‌خط‌های رابطه‌ی فوق دو به دو با یکدیگر برابرند درستی حکم بالا کاملاً روشن است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) ثابت کنید که اگر عمودهای وارد از نقطه‌های A'، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC در یک نقطه متقاطع باشند، آنگاه عمودهای وارد از نقطه‌های A، B و C به ترتیب بر خط‌های $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$ هم، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲) ثابت کنید که عمودهای مرسوم بر اضلاع مثلث در نقاط تماس دوایر محاطی خارجی با اضلاع مثلث، همرس‌اند.

۳) فرض کنید A'، B' و C' معرف پای عمودهای وارد از رئوس A، B و C از مثلث ABC بر خط ℓ باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A'، B' و C' به ترتیب بر BC، AC و AB، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۴) مثلث متساوی الاضلاع ABC و نقطه‌ی داخلی D مفروض‌اند. فرض کنید A'، B' و C' به ترتیب معرف مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های BCD، CAD و ABD باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از رأس‌های A، B و C به ترتیب بر $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۵) فرض کنید AD، BE و CF ارتفاع‌های مثلث ABC و A'، B' و C' تصویرهای A، B و C به ترتیب روی EF، DF و DE باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A'، B' و C' به ترتیب بر BC، AC و AB در یک نقطه متقاطع‌اند.

۶) رئوس مثلث $A'B'C'$ بر روی ارتفاع‌های مثلث ABC قرار دارد. اگر از وسط اضلاع مثلث $A'B'C'$ عمودهایی بر اضلاع متناظر مثلث ABC رسم کنیم، نشان دهید که این سه عمود همرس‌اند.

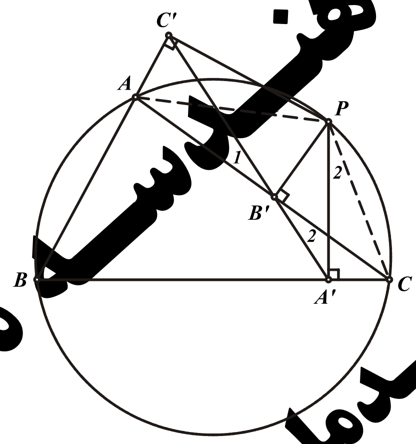
۷) پاره‌خط BE را بر امتداد ضلع AB از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر ضلع BC جدا می‌کنیم. عمودی که از E بر BE اخراج می‌شود نیمساز زاویه‌ی DAB را در K قطع می‌کند. ثابت کنید خط KC بر قطر BD عمود است.

۸) نقطه‌ی P را روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. عمودهای PD و PE را بر اضلاع AC و BC فرود آورده و اوساط AE و BD را M و N می‌نامیم. نشان دهید MN بر DE عمود است.

۴ – ۳ خط سیمسون

هدف‌بخش : یکی از جالب‌ترین هم خطی‌های واقع در دایره، قضیه‌ی خط سیمسون است که به خاطر شهرت بیش از حدش در اکثر کتب هندسه مسطحه مورد بحث قرار گرفته است. ما نیز در این بخش به تبیین این قضیه و کنکاش در برخی خواص و مسایل مربوط به خط سیمسون می‌پردازیم.

قضیه خط سیمسون ٤– ٥: فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه و A' ، B' و C' پای عمودهای مرسوم از P بر اضلاع (یا امتداد اضلاع) BC، AC و AB از مثلث ABC باشند. در این صورت A' ، B' و C' هم‌خطاند اگر و فقط اگر P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد.



ابتدا فرض می کنیم P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC واقع باشد. برای اثبات هم‌خطی B' و C' نقاط A' و C' را به نقطه‌ی B' وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم خطوط $A'B'$ و $B'C'$ هم راستا هستند و برای این منظور کافی است نشان دهیم $B'_1 = B'_2$ از آنجا که $\widehat{AC'P}+\widehat{AB'P}=۱۸۰^\circ$ چهارضلعی $AC'PB'$ محاطی بوده و بنابراین $\widehat{B'}_1=\widehat{P}_1$ و چون $\widehat{PA'C}=\widehat{PB'C}=۹۰^\circ$ چهارضلعی $PB'A'C$ نیز محاطی بوده و بنابراین $\widehat{B'}_2=\widehat{P}_2$. چهارضلعی $APCB$ محاطی است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{PAC'}=\widehat{PCB}\\ \widehat{PC'A}=\widehat{PA'C}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{A}PC' \sim \overset{\Delta}{C}PA' \Rightarrow \widehat{P}_1=\widehat{P}_2$$

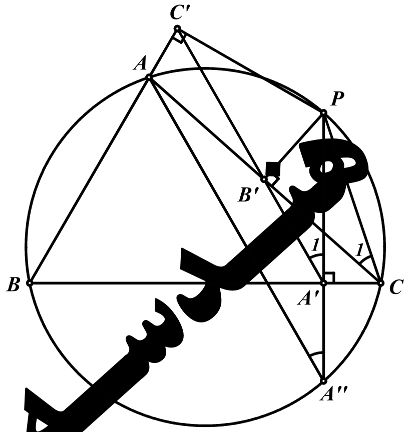
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B'}_1=\widehat{P}_1\\ \widehat{B'}_2=\widehat{P}_2\\ \widehat{P}_1=\widehat{P}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{B'}_1=\widehat{B'}_2$$

پس خطوط $A'B'$ و $B'C'$ هم راستا بوده و نقاط A'، B' و C' هم خطاند.

طرف دوم این قضیه نیز با استفاده از طرف اول و برهان خلف به سادگی قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.

تعریف: خط $A_1B_1C_1$ را خط سیمسون نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC می‌نامند.

مسأله ۴-۱۲ : نقطه‌ی P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC مفروض است. نقاط A'، B' و C' تصویرهای نقطه‌ی P بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC می‌باشند و امتداد PA'، PB' و PC' دایره‌ی محیطی را بار دیگر در A''، B'' و C'' قطع می‌کند. نشان دهید AA''، BB'' و CC'' با خط سیمسون نظیر نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC موازی می‌باشند.

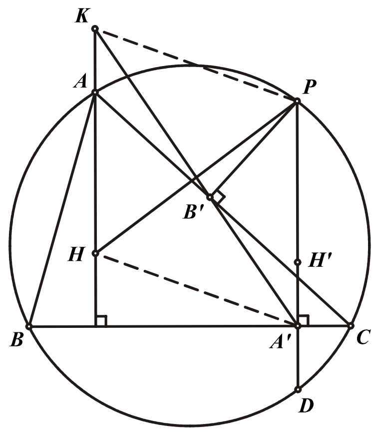


از آنجا که چهارضلعی $PB'A'C$ محاطی است داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{A'_1}=\widehat{C_1}\\ \widehat{A''}=\widehat{C_1}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A''}=\widehat{A'_1} \Rightarrow A''A \parallel A'C'$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد BB'' و CC'' نیز با خط سیمسون نقطه‌ی P موازی هستند.

مسأله ۴-۱۳ : اگر P نقطه‌ای روی دایره‌ی محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، ثابت کنید خط سیمسون نظیر نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC، پاره‌خط PH را نصف می‌کند.



عمودهای PA' و PB' را بر اضلاع BC و AC فرود می‌آوریم و خط سیمسون $A'B'$ را امتداد می‌دهیم تا ارتفاع نظیر رأس A را در K قطع کند. اگر H' مرکز ارتفاعی مثلث PBC و D محل تلاقی امتداد PA' با دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد آنگاه برای اثبات حکم مسأله کافی است نشان دهیم چهارضلعی $KHA'P$ متوازی الاضلاع است.

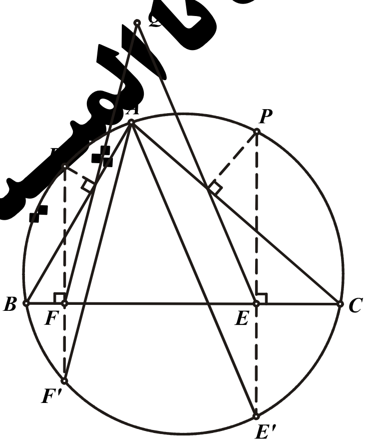
از طرفی AH و PH' هر دو ۲ برابر فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی از ضلع BC بوده و داریم $AH = PH'$. از طرف دیگر چون H' مرکز ارتفاعی مثلث PBC است پس $A'D = A'H'$ و همچنین از آنجا که $AD \parallel KA'$ و $A'D \parallel AK$ بنابراین چهارضلعی $AKA'D$ متوازی الاضلاع است و داریم $A'D = AK$.

$$\left.\begin{array}{l} A'D = A'H' \\ A'D = AK \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A'H' = AK \\ PH' = AH \end{array}\right\} \Rightarrow A'H' + PH' = AK + AH \Rightarrow PA' = KH$$

و چون $PA' \parallel KH$ بنابراین چهارضلعی $KHA'P$ متوازی الاضلاع است.

نکته: توجه داشته باشید این خاصیت خط سیمسون، که همواره PH را نصف می‌کند در حل مسایل مربوط به خط سیمسون بسیار مهم و کاربردی است.

مسأله ٤– ١٤: دو نقطه‌ی P و P' روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC مفروض‌اند. نشان دهید زاویه‌ی بین خطوط سیمسون نظیر نقاط P و P' نسبت به مثلث ABC برابر نصف کمان PP' است.



عمودهای PE و PF را بر BC فرود آورده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در E' و F' قطع کنند. بنابر مسأله‌ی ۴–۱۲ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AF' \parallel QF \\ AE' \parallel QE \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{FQE} = \widehat{F'AE'} = \dfrac{\overset{\frown}{F'E'}}{۲} \\ P'F' \parallel PE' \Rightarrow \overset{\frown}{F'E'} = \overset{\frown}{P'P} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{FQE} = \dfrac{\overset{\frown}{P'P}}{۲}$$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) مثلث ABC و نقطه‌ی P روی دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و A' پای عمود وارد از P بر ضلع BC و K محل تلاقی خط سیمسون نظیر نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC و ارتفاع AD باشند، نشان دهید PK با $A'H$ موازی است.

۲) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در دایره‌ی (O) محاط شده‌اند. نشان دهید زاویه‌ی بین خطوط سیمسون هر نقطه‌ی دلخواه P روی دایره‌ی (O) نسبت به این دو مثلث، همواره مقداری ثابت است.

۳) دایره‌ی (O) و سه وتر PA، PB و PC از آن مفروض‌اند. سه دایره‌ی (PA)، (PB) و (PC) را به قطر این سه وتر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را دو به دو در سه نقطه‌ی D، E و F قطع کنند. نشان دهید این سه نقطه هم‌خطاند.

۴) مثلث متغیری دایره‌ی محیطی و مرکز ثقل ثابتی دارد. نشان دهید که خط سیمسون نقطه‌ی مفروض P روی دایره‌ی محیطی نسبت به این مثلث، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

۵) چهار خط دو به دو ناموازی در صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید دوایر محیطی چهار مثلثی که از تقاطع سه به سه این خطوط بوجود می‌آیند در یک نقطه همرس هستند. این نقطه به نقطه‌ی میشل معروف است.

۶) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. اگر A'، B' و C' پای ارتفاع‌ها و A''، B'' و C'' محل تلاقی امتداد ارتفاع‌ها با دایره‌ی محیطی مثلث باشند نشان دهید:

الف) خطوط سیمسون نظیر نقاط A''، B'' و C'' نسبت به مثلث ABC به ترتیب با خطوط مماس بر دایره در نقاط A، B و C موازی می‌باشند.

ب) اضلاع مثلث حاصل از تلاقی خطوط سیمسون نظیر نقاط A''، B'' و C'' نسبت به مثلث ABC با اضلاع مثلث ارتفاعیه مثلث ABC دو به دو موازی‌اند.

۷) اگر خط سیمسون نقطه‌ی P از روبروی قطری P در دایره‌ی محیطی مثلث بگذرد، نشان دهید که این خط سیمسون از مرکز ثقل مثلث نیز می‌گذرد.

۸) از نقطه‌ی P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC، عمودهایی بر اضلاع BC، AC و AB رسم می‌کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در نقاط L، M و N و دایره‌ی محیطی را در A'، B' و C' قطع کنند. خط سیمسون LMN خطوط $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$ را به ترتیب در L'، M' و N' قطع می‌کند. ثابت کنید که خطوط AL'، BM' و CN' همرس‌اند.

۹) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. اگر P، Q و R به ترتیب پای عمودهای وارد از D بر AB، BC و CA باشند و داشته باشیم $PR=QR$، ثابت کنید نیمسازهای زاوایای $\widehat{ABC}$ و $\widehat{CDA}$ روی خط AC یکدیگر را قطع می‌کنند. (المپیاد ریاضی جهانی سال ۲۰۰۳)

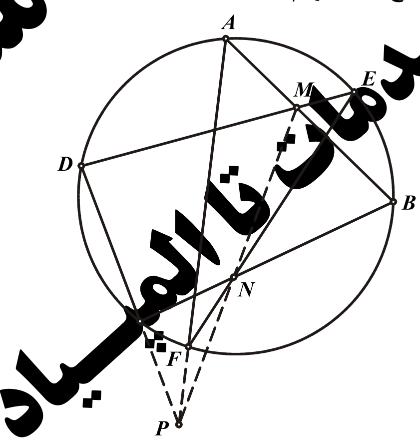
۴ – ۴ قضیه پاسکال

هدف بخش: معمولاً در مسایلی که همرسی خطوط یا هم خطی نقاط در یک دایره اتفاق می افتد بسیاری از قـضایای مربوط به همرسی و هم‌خطی، کارآیی خود را از دست می‌دهند. در این مواقع قضیه‌ی پاسکال مـی‌توانـد ابـزاری بسیار مناسب و قدرتمند برای اثبات همرسی‌ها یا هم‌خطی‌ها باشد. این قضیه صورتی ساده اما کاربردی مبتکرانـه و زیبا دارد که در این بخش با آن آشنا خواهیم شد.

قضیه پاسکال ٤–٦ : در هر شش ضلعی محاطی، محل برخورد اضلاع مقابل یا امتداد آن‌هـا همـواره بـر یـک خـط راست قرار دارند. به عبارت دیگر اگر اضلاع یک شش ضلعی محاطی را بـه ترتیـب $a , b, \dots , f$ بنـامیم نقـاط محل برخورد اضلاع $(a \ , \ d)$ محل برخورد اضلاع $(b \ , \ e)$ و محل برخورد اضلاع (c , f) همواره هـم خـط خواهند بود.

البته در این قضیه شش ضلعی محاطی می‌تواند محدب یا مقعر و بنابراین خود متقاطع باشند.

اثبات قضیه: در شش ضلعی $ABCDEF$ ، $(AB , DE) = M$ و $(BC , EF) = N$ مـی‌باشـد. MN را امتـداد می‌دهیم تا امتداد AF را در P قطع کند داریم:



(۱)

$$\frac{PM}{PN}=\frac{S_{MAF}}{S_{NAF}}=\frac{\frac{1}{2}.AM.AF.\sin\widehat{MAF}}{\frac{1}{2}.FN.AF.\sin\widehat{AFN}}=\frac{AM}{FN}.\frac{\sin\widehat{MAF}}{\sin\widehat{AFN}}=\frac{AM}{FN}.\frac{BF}{AE}$$

به همین ترتیب اگر CD، MN را در P_1 قطع کند خواهیم داشت:

$$\frac{MP_1}{P_1N}=\frac{DM}{NC}.\frac{CE}{BD} \qquad (۲)$$

با توجه به تشابه دو مثلث AME و MDB با یکدیگر و همچنین دو مثلث BNF و CNE با یکدیگر خواهیم داشت:

$$\frac{DM}{BD}=\frac{AM}{AE}\ ,\ \frac{BF}{FN}=\frac{CE}{NC}\ \Rightarrow \frac{DM}{BD}\cdot\frac{CE}{NC}=\frac{AM}{AE}\cdot\frac{BF}{FN} \qquad (۳)$$

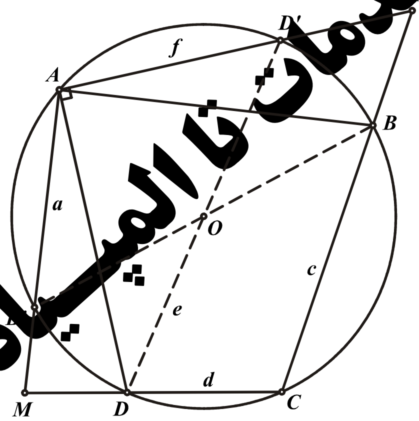
با جایگزینی روابط (۱) و (۲) در رابطه‌ی (۳) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{MP_1}{NP_1}=\frac{MP}{NP}\Rightarrow \frac{MN}{NP_1}=\frac{MN}{NP}\Rightarrow NP_1=NP$$

بنابراین نقطه‌ی P_1 بر P منطبق بوده و محل برخورد خطوط AF و CD روی خط MN قرار دارد.

نکته: تعمیم قضیه‌ی پاسکال به این عبارت است که این قضیه نه فقط برای دایره، بلکه برای هر سطح مقطع مخروطی، مانند بیضی یا هذلولی صادق است.

مسأله ٤-١٥ : چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. عمودی بر ضلع AB در نقطه‌ی A اخراج می‌کنیم تا ضلع CD را در M قطع کند و عمودی نیز بر ضلع AD در نقطه‌ی A اخراج می‌کنیم تا ضلع BC را در N قطع کند. نشان دهید MN از مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی $ABCD$ می‌گذرد.

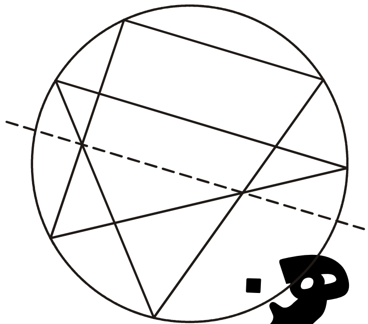


نقاط برخورد AM و AN با دایره را به ترتیب B' و D' می‌نامیم. از آنجا که زوایای $\widehat{BAB'}$ و $\widehat{DAD'}$ قائمه می‌باشند بنابراین BB' و DD' قطرهای دایره بوده و محل برخود آن‌ها، نقطه‌ی O مرکز دایره می‌باشد. طبق قضیه‌ی پاسکال در شش ضلعی محاطی $AB'BCDD'$ نقاط $(a\ ,\ d)=M$، $(b\ ,\ e)=O$ و $(c\ ,\ f)=N$ هم خط می‌باشند. بنابراین MN از نقطه‌ی O می‌گذرد.

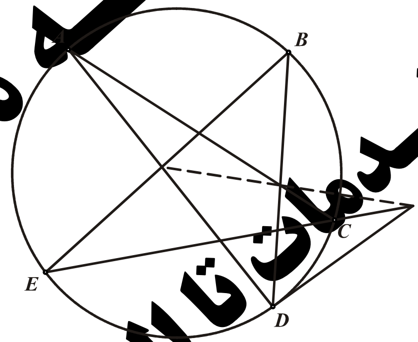
نکته: توجه داشته باشید که ترتیب رئوس در ذکر نام شش ضلعی کاملاً تعیین کننده است به عبارت دیگر دو شش ضلعی $ABCDEF$ و $BACDEF$ کاملاً متفاوتند.

در بررسی کاربردهای مختلف قضیه‌ی پاسکال دو حالت خاص مهم آن را هرگز نباید از نظر دور داشت که عبارتند از:

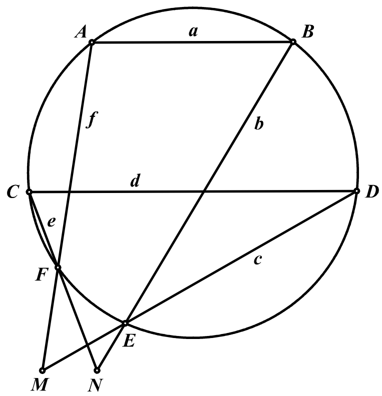
۱- در صورتی که دو ضلع مقابل در یک شش ضلعی محاطی با یکدیگر موازی باشند (یکدیگر را در بی‌نهایت قطع کنند) خط گذرنده از محل تلاقی دیگر اضلاع مقابل به هم نیز با این خطوط موازی خواهد بود.



۲- در صورتی که طول هر کدام از اضلاع شش ضلعی برابر صفر شود، آن ضلع به خطی مماس بر دایره تبدیل می‌شود و همچنان قضیه‌ی پاسکال صادق خواهد بود. شش ضلعی مربوط به آن را به صورت $ADDBEC$ نمایش می‌دهیم.

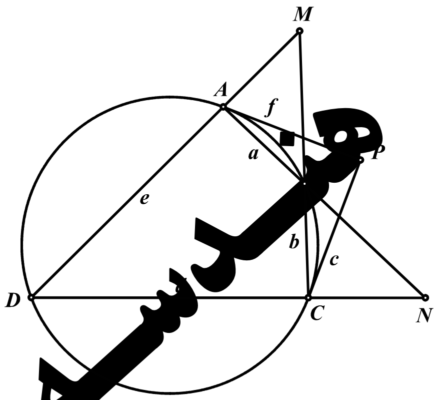


مسأله ٤ -١٦ : AB و CD دو وتر موازی در دایره هستند و E و F نیز دو نقطه‌ی دلخواه بر روی دایره می‌باشند. اگر $M = (AF , DE)$ و $N = (BE , CF)$ نشان دهید: $MN \parallel AB$



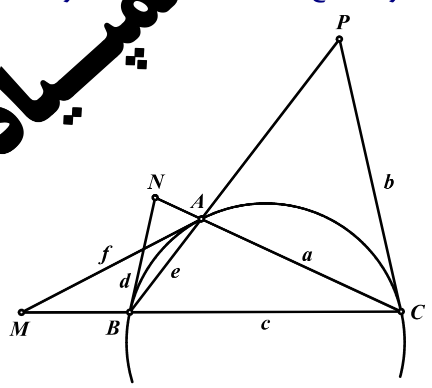
با توجه به قضیه‌ی پاسکال در شش ضلعی محاطی $ABEDCF$ از آنجا که دو ضلع روبروی AB و CD با یکدیگر موازی می‌باشند بنابراین خط گذرنده از نقاط $N = (b\ ,\ e)$ و $M = (c\ ,\ f)$ نیز با AB و CD موازی خواهد بود.

مسأله ٤ – ١٧: چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. اگر امتداد اضلاع مقابل دو به دو یکدیگر را در M و N و خطوط مماس بر دایره در نقاط A و C یکدیگر را در P قطع کنند نشان دهید نقاط M، N و P هم‌خطاند.



با توجه به قضیه‌ی پاسکال در شش ضلعی محاطی $AABCCD$ نقاط $N = (a\ ,\ d)$، $M = (b\ ,\ e)$ و $P = (c\ ,\ f)$ بر یک خط راست قرار دارند.

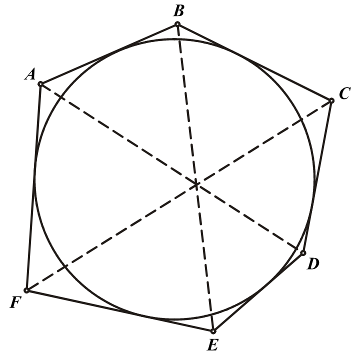
مسأله ٤ – ١٨: در مثلث ABC در رئوس A، B و C مماس‌هایی بر دایره‌ی محیطی مثلث رسم می‌کنیم تا اضلاع مقابل آن را به ترتیب در M، N و P قطع کنند. ثابت کنید M، N و P هم خطاند.



طبق قضیه‌ی پاسکال در شش ضلعی محاطی $AABBCC$ نقاط $N = (a\ ,\ d)$، $P = (b,\ e)$ و $M = (c\ ,\ f)$ با یکدیگر هم خطاند.

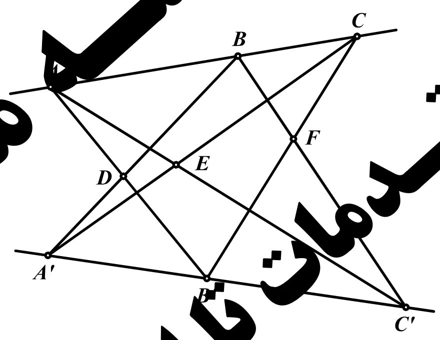
قضیه‌ی پاسکال دوگانی مشهور به قضیه‌ی بریانشن دارد که به شرح زیر می‌باشد:

قضیه بریانشن ۴ – ۷: در هر شش ضلعی محیطی، خطوط واصل رأس‌های مقابل در یک نقطه همرس‌اند.

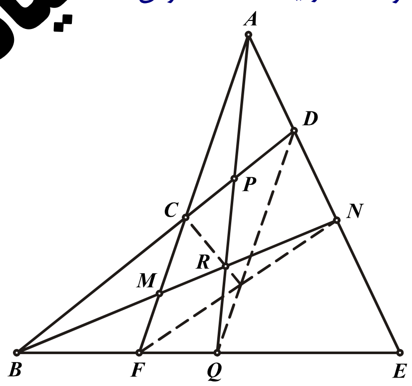


همچنین قضیه‌ی پاپوس نیز حالت خاصی از تعمیم قضیه‌ی پاسکال می‌باشد که به دلیل کاربرد بسیار محدود آن تنها به اشاره‌ای از آن بسنده می‌کنیم.

قضیه پاپوس ۴ –۸: اگر نقاط A، B و C با یکدیگر و نقاط A'، B' و C' نیز با یکدیگر هم خط باشند، نقاط $D=(AB' , A'B)$، $E=(AC',A'C)$ و $F=(BC' , B'C)$ نیز با یکدیگر هم‌خط خواهند بود.



مسأله ۴ –۱۹: سه خط گذرنده از نقطه‌ی A سه خط گذرنده از نقطه‌ی B را مطابق شکل در نه نقطه قطع می‌کنند. نشان دهید خطوط DQ، FN و CR در یک نقطه همرس‌اند.



می‌دانیم سه نقطه‌ی A، D و N با یکدیگر و سه نقطه‌ی B، F و Q نیز با یکدیگر هم‌خط‌اند بنابراین طبق قضیه‌ی پاپوس نقاط $C=(AF , BD)$، $R=(AQ , BN)$ و (DQ , FN) نیز با یکدیگر هم‌خط‌اند و به عبارت دیگر خط CR با خطوط DQ و FN همرس است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) نقاط B' و C' را به ترتیب روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC در نظر می‌گیریم. اگر خطوط BB' و CC' دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند ثابت کنید خط مماس بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC در نقطه‌ی A و خطوط $B'C'$ و MN در یک نقطه همرس‌اند.

۲) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. نقاط E و F را به ترتیب روی اضلاع AB و CD در نظر می‌گیریم. اگر DE و AF دایره‌ی محیطی چهارضلعی محاطی $ABCD$ را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند نشان دهید خطوط EF، MN و BC در یک نقطه همرس‌اند.

۳) چهارضلعی $ABCD$ مفروض است به طوری که $\widehat{DAB}=\widehat{ABC}=\widehat{BCD}$ می‌باشد. اگر نقاط O و H به ترتیب مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشند، نشان دهید نقاط H، O و D بر یک خط راست واقع‌اند.

۴) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. دایره‌ای را چنان رسم می‌کنیم که در نقاط D و E به ترتیب بر اضلاع AB و AC مماس بوده و همچنین در نقطه‌ی P بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس داخل باشد. ثابت کنید نقطه‌ی وسط پاره‌خط DE بر مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC منطبق می‌باشد.

۵) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. نقطه‌ی P درون چهارضلعی چنان قرار گرفته که $\widehat{DAP}+\widehat{BCP}=\widehat{CBP}+\widehat{CDP}=90^\circ$ می‌باشد. اگر نقاط E و O به ترتیب محل تلاقی اقطار چهارضلعی و مرکز دایره‌ی محیطی آن باشند، نشان دهید نقاط E، P و O هم خطاند.

۶) خط دلخواه d اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC را در A_1، B_1 و C_1 قطع کرده است. نقطه‌ی دلخواه M را روی خط d در نظر گرفته و خطوط AM، BM و CM را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در نقاط A_2، B_2 و C_2 قطع کنند. نشان دهید خطوط A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 در نقطه‌ای روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC همرس‌اند.

۷) نیم دایره‌ای به قطر BC مفروض است. از نقطه‌ی A در خارج آن مماس‌های AM و AN را بر نیم دایره رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا امتداد قطر BC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. اگر BN و CM یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند ثابت کنید خط AP بر EF عمود است.

۸) چهارضلعی محاطی و محیطی $ABCD$ مفروض می‌باشد. اگر I، O و E به ترتیب مرکز دایره‌ی محاطی و مرکز دایره‌ی محیطی و محل تلاقی قطرهای چهارضلعی باشند، نشان دهید این سه نقطه بر یک استقامت قرار دارند.

۹) ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم کرده‌ایم. دایره‌ای به قطر AH رسم می‌کنیم تا AB و AC را به ترتیب در M و N قطع کند. مماس‌های مرسوم در نقاط M و N بر این دایره یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. ثابت کنید نقطه‌ی P بر امتداد میانه‌ی نظیر ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد.

۱۰) چهارضلعی محیطی $ABCD$ مفروض است. اگر اضلاع AB، BC، CD و DA به ترتیب در نقاط P، Q، M و N بر دایره‌ی محاطی این چهارضلعی مماس باشند، ثابت کنید خطوط PM، QN، AC و BD در یک نقطه همرس‌اند.

۱۱) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. نقاط دلخواه E و F به ترتیب روی اضلاع AB و CD قرار دارند. محل تلاقی AF و DE را N و محل تلاقی BF و CE را M می‌نامیم. ثابت کنید خط گذرنده از نقاط M و N متوازی‌الاضلاع را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) در مثلث ABC ، AH و AD به ترتیب ارتفاع و نیمساز نظیر رأس A و BH' و BD' بـه ترتیـب ارتفاع و نیمساز نظیر رأس B می‌باشند. I و O به ترتیـب مراکـز دوایـر محـاطی داخلـی و محیطـی مثلـث ABC می‌باشند. ثابت کنید I و H و H' هم خطاند اگر و فقط اگر O ، D و D' هم خـط باشـند.

۲) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در یک دایره محاطی می‌باشـند. محـل برخـورد خطـوط $(A'B', BC)$، $(A'B', AC)$، $(B'C', AC)$، $(B'C', AB)$، $(A'C', AB)$، $(A'C', BC)$ را به ترتیب D ، E ، F ، D'، E'، وF' می‌نامیم. ثابت کنید خطوط DD'، EE' و FF' همرس‌اند.

۳) نقطه P روی دایره (O) قرار دارد و چهارضلعی $ABCD$ در (O) محاط است. ترکیب‌های سه به سـه از رأس‌های چهارضلعی $ABCD$، چهار مثلث را تعیین می‌کنند. چهار خط سیمسون نظیر نقطه P نسبت بـه این چهار مثلث را بدست می‌آوریم و P را روی آن‌ها تصویر می‌کنیم، نشان دهید که ایـن تـصویرها روی یـک خط راست قرار دارند. این خط را می‌توان خط سیمسون نقطه P نـسبت بـه چهارضـلعی محـاطی $ABCD$ نامید.

۴) شعاع OP از دایره محیطی مثلث ABC اضلاع این مثلث را در نقاط A'، B' و C' قطع می‌کند. نـشان دهید نقاط A''، B'' و C'' که تصاویر نقاط A'، B' و C' روی خطوط AP، BP و CP هـستند، روی خط سیمسون P نسبت به ABC قرار دارند.

۵) در مثلث ABC نقاط N و M بـه ترتیـب روی اضـلاع BC و AC طـوری انتخـاب شـده‌انـد کـه: $AM = BN = AB$. اگر O و I به ترتیب مراکز دوایـر محیطـی و محـاطی داخلـی مثلـث ABC باشند، ثابت کنید: $OI \perp MN$

۶) دو مثلث قائم‌الزاویه و متشابه ABE و ACD $(\hat{B} = \hat{C} = ۹۰^\circ$ و $\widehat{EAB} = \widehat{DAC})$ را در خارج مثلـث ABC رسم می‌کنیم. ثابت کنید محـل تقـاطع دو پـاره خـط BD و CE روی ارتفـاع AH قـرار دارد.

۷) نقطه F را بر امتداد ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که داشـته باشـیم $AC = CF$. دایره‌ای که از نقاط A ، C و F می‌گذرد، دایره به قطر BC را در نقطه P قطع می‌کند اگر خطوط BP و CP اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند ثابت کنید D، E و F بـر یـک استقامت‌اند.

۸) دایره‌ای ضلع BC از مثلث ABC را در نقـاط A_1 و A_2 و ضـلع AC را در نقـاط B_1 و B_2 و ضـلع AB را در نقاط C_1 و C_2 قطع کرده‌است. مماس در نقاط A_1 و A_2 بر دایـره مـذکور یکـدیگر در نقطـه‌ی A' قطع می‌کنند و نقاط B' و C' هم بطور مشابه بدست می‌آینـد. ثابـت کنیـد سـه خـط AA', BB' و CC' همرس‌اند.

۹) سه دایره (O_1, r_1), (O_2, r_2) و (O_3, r_3) طوری در مثلث ABC محاط شده‌اند که دو به دو دایره‌های (O_1) و (O_2) در P و دایره‌های (O_1) و (O_3) در Q و دایره‌های (O_3) و (O_2) در R بر یکدیگر مماس هستند و همچنـین دایـره (O_1) بـر اضـلاع AB و AC و دایـره (O_2) بـر اضلاع BC و BA و دایره (O_3) بر اضـلاع CA و CB ممـاس مـی‌باشـند. نـشان دهیـد سـه خـط AR, BQ و CP در یک نقطه همرس‌اند.

۱۰) در مثلث ABC مماس‌های مرسوم از رئس A بر دایره‌ای به قطر BC، در نقـاط P و Q بـر آن دایـره مماس شده‌اند خط واصل PQ را L_A بنامید. اگر L_B و L_C نیز به همین ترتیب تعریف شوند ثابـت کنیـد L_A، L_B و L_C در یک نقطه همرس‌اند.

۱۱) مثلث ABC و دایره محاطی داخلی آن که در نقاط A'، B' و C' بر اضلاع آن مماس است مفـروض‌انـد. اگر سه خط سوای همرس گذرنده از رئوس A, B و C به ترتیب دایره محاطی را برای اولین بـار در نقـاط A'', B'' و C'' قطع کنند، نشان دهید خطوط $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ در یـک نقطـه همـرس‌انـد.

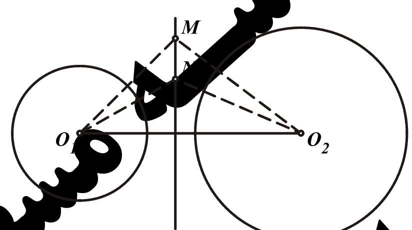
فصل پنجم

دایره‌ها

۵–۱ محور اصلی

هدف بخش: محور اصلی مفهومی جالب و در عین حال کاربردی در دایره‌هاست که از بحث قوت نقطه نسبت به دایره نشأت می‌گیرد. در این بخش بطور مختصر با محور اصلی دو دایره آشنا خواهیم شد و سعی می‌کنیم تا با پرداختن به انواع کاربردهای آن در حل مسایل مختلف هندسه، دیدی کامل و همه جانبه نسبت به این مفهوم مهم هندسی بدست دهیم.

قضیه ۵–۱ : مکان هندسی نقاطی مانند N که قوت آن نسبت به دو دایره مفروض برابر هستند، خطی است عمود بر خطالمرکزین دو دایره.



دو نقطه N و M را طوری در نظر می‌گیریم که قوت آن‌ها نسبت به دو دایره $C_1(O_1,R_1)$ و $C_2(O_2,R_2)$ برابر باشد.

$$P_{C_1}^M = P_{C_2}^M \Rightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2 \Rightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

$$P_{C_1}^N = P_{C_2}^N \Rightarrow NO_1^2 - R_1^2 = NO_2^2 - R_2^2 \Rightarrow NO_1^2 - NO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

و با توجه به دو رابطه فوق نتیجه می‌شود:

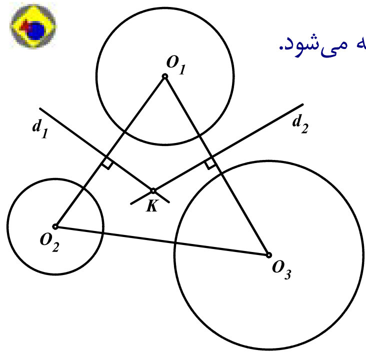
$$MO_1^2 - MO_2^2 = NO_1^2 - NO_2^2$$

بنابراین طبق مسأله ۴–۸ خط MN بر O_1O_2 عمود است. پس اگر نقطه M را ثابت فرض کنیم تمام نقاط مانند N که قوت یکسانی نسبت به دو دایره دارند روی خط عمود وارد از نقطه M بر خطالمرکزین دو دایره قرار دارند. از طرف دیگر با عکس همین راه حل به سادگی ثابت می‌شود که هر نقطه روی عمود وارد از M بر خطالمرکزین دو دایره، قوت یکسانی نسبت به آن دو دارد. بنابراین مکان هندسی نقطه N خطی عمود بر خطالمرکزین دو دایره است.

تعریف: خط MN را که قوت تمام نقاط آن نسبت به دو دایره یکسان است، محور اصلی دو دایره می‌نامند.

اگر دو دایره C_1 و C_2 با یکدیگر هم مرکز باشند، محور اصلی ندارند و اگر در دو نقطـه A و B یکـدیگر را قطع کنند از آنجا که $P_{C_1}^{A}=P_{C_2}^{A}=0$ و $P_{C_1}^{B}=P_{C_2}^{B}=0$، بنابراین هر دو نقطه A و B روی محور اصـلی دو دایره قرار دارند و به عبارت دیگر خط AB محور اصلی دو دایره است.

قضیه ۵-۲: اگر C_1، C_2 و C_3 سه دایره دلخواه در صفحه باشند، محورهای اصلی دو به دو این دوایر در یک نقطـه همرس‌اند که به این نقطه مرکز اصلی سه دایره C_1، C_2 و C_3 گفته می‌شود.

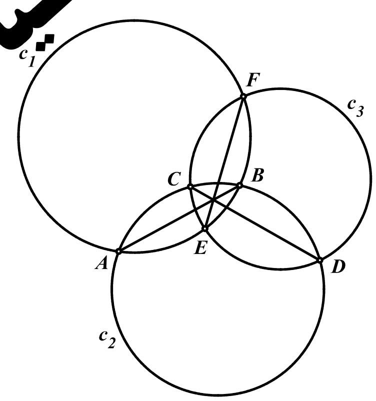


اگر d_1 محور اصلی دوایر C_1، C_2 و d_2 محور اصلی دوایر C_1و C_3 باشد و محل تلاقی d_1 و d_2 را K بنامیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P_{(O_1)}^{K}=P_{(O_2)}^{K} \\ P_{(O_1)}^{K}=P_{(O_3)}^{K} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{(O_2)}^{K}=P_{(O_3)}^{K}$$

بنابراین نقطه K روی محور اصلی دوایر C_2 و C_3 نیـز قـرار دارد و هـر سـه محور اصلی در نقطـه K همرس‌اند.

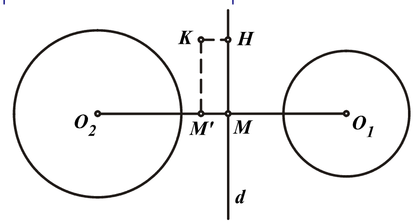
مسأله ۵-۱: سه دایـره C_1، C_2 و C_3 دو بـه دو متقاطع‌اند. اگـر C_1، C_2 یکـدیگر را در A و B، C_2 و C_3 یکدیگر را در C و D و دوایر C_3 و C_1 یکدیگر را در E و F قطع کنند، نشان دهیـد AB و CD و EF در یک نقطه همرس‌اند.



می‌دانیم AB و CD و EF محورهای اصلی دو به دو دوایر هستند و بنابر قضیه پیش در مرکز اصلی سه دایره C_1، C_2 و C_3 همرس‌اند.

قضیه کِیسی ۵-۳: فرض کنید خط d محور اصلی دو دایره $C_1(O_1)$ و $C_2(O_2)$ باشد. اگر K نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد و پای عمود وارد از K بر d را H بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left|P^K_{C_1(O_1)} - P^K_{C_2(O_2)}\right| = 2KH.O_1O_2$$



محل تلاقی خط d و O_1O_2 را M و پای عمود وارد از K بر O_1O_2 را M' می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$P^K_{C_1} - P^H_{C_1} = O_1K^2 - O_1H^2 = O_1M'^2 - O_1M^2$$

$$=(O_1M'-O_1M)(O_1M'+O_1M) = MM'(O_1M'+O_1M) \qquad (1)$$

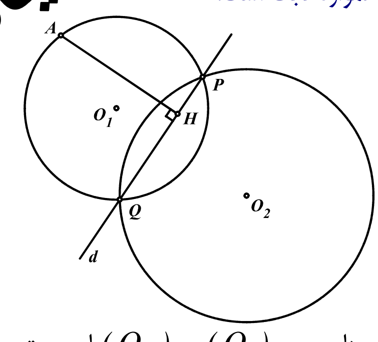
$$P^K_{C_2} - P^H_{C_2} = O_2K^2 - O_2H^2 = O_2M'^2 - O_2M^2$$

$$=(O_2M'-O_2M)(O_2M'+O_2M) = -MM'(O_2M'+O_2M) \qquad (2)$$

از آنجا که H روی محور اصلی دو دایره قرار دارد، داریم $P^H_{C_1} = P^H_{C_2}$ و با کم کردن طرفین روابط (۱) و (۲) از یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$P^K_{C_1} - P^K_{C_2} = MM'[(O_1M'+O_1M)+(O_2M'+O_2M)] = MM'(2O_1O_2) = 2KH.O_1O_2$$

مسأله ۵-۲: نقطه ثابت A و خط d مفروض‌اند. دایره متغیر (O_1) از نقطه A گذشته و خط d را در نقاط P و Q قطع می‌کند. دایره متغیر (O_2) نیز از نقاط P و Q می‌گذرد و قوت نقطه A نسبت به آن مقداری ثابت است. نشان دهید طول O_1O_2 همواره ثابت است.



خط d محور اصلی دو دایره (O_1) و (O_2) است و بنابر قضیه کیسی داریم: $P^A_{(O_2)} - P^A_{(O_1)} = 2AH \cdot O_1O_2$. در عبارت پیش $P^A_{(O_1)} = 0$، همچنین AH و $P^A_{(O_2)}$ مقادیری ثابت هستند، پس O_1O_2 نیز همواره ثابت است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) میانه‌های BB' و CC' از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر دوایر C_1 و C_2 به قطر BB' و CC' یکدیگر را در P و Q قطع کنند، نشان دهید نقاط P و Q و A هم خطاند.

۲) دایره (O') روی دایره (O) مفروض است. وتر متغیر AB از دایره (O) همواره بر دایره (O') مماس می‌باشد. مکان هندسی مرکز دایره محیطی مثلث $AO'B$ را بیابید.

۳) نقطه K و دایره ثابت (O) مفروض‌اند. دایره متغیر (O') از K می‌گذرد و مرکز آن روی دایره (O) قرار دارد. نشان دهید محور اصلی دو دایره (O) و (O') بر دایره ثابت دیگری مماس است.

۴) ذوزنقه $ABCD$ مفروض است. اگر دوایری به قطر AC و BD یکدیگر را در M و N قطع کنند، نشان دهید خط MN از محل تلاقی خط‌های AD و BC می‌گذرد.

۵) نیم دایره‌ای به قطر AB و نقطه M بر روی آن مفروض است. عمود MH را بر AB فرود می‌آوریم و دایره‌ای به قطر MH رسم می‌کنیم تا BM و AM را به ترتیب در P و Q قطع کند. اگر این دایره، نیم دایره به قطر AB را در نقطه K نیز قطع کند، نشان دهید خطوط MK, PQ و AB در یک نقطه همرس‌اند.

۶) A , B , C و D چهار نقطه واقع بر یک خط راست می‌باشند. دو دایره به قطرهای AC و BD در E و F متقاطع‌اند. نقطه P را روی EF در نظر می‌گیریم و BP و CP را امتداد می‌دهیم تا به ترتیب دوایر به قطر BD و AC را به ترتیب در N و M قطع کنند. نشان دهید AM, DN و EF در یک نقطه همرس‌اند.

۷) نقاط P و Q روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC طوری انتخاب شده‌اند که چهار ضلعی $BPQC$ محاطی است. خط d موازی ضلع BC اضلاع AB و AC را در E و F قطع می‌کند. نشان دهید محور اصلی دوایر محیطی مثلث‌های BQF و CPE وقتی d تغییر می‌کند، ثابت است.

۸) ثابت کنید محورهای اصلی دو به دو دوایر محاطی مثلث، نیمسازهای داخلی یا خارجی مثلث میانه‌ای آن هستند.

۹) نقاط D و E را طوری روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC در نظر می‌گیریم که $DE \parallel BC$. نقطه P را درون مثلث ADE در نظر گرفته و محل تلاقی DE با PB و PC را به ترتیب F و G می‌نامیم. نشان دهید AP بر خط‌المرکزین دوایر محیطی مثلث‌های PDG و PEF عمود است.

۱۰) نیم دایره‌ای به قطر AB و مرکز O مفروض است. نقطه M را روی امتداد قطر AB (نزدیک به B) در نظر می‌گیریم و خط دلخواهی از M می‌گذرانیم تا نیم‌دایره را به ترتیب در C و D قطع کند. اگر نقطه دیگر تلاقی دوایر محیطی مثلث‌های OBC و OAD را K بنامیم، نشان دهید MK بر OK عمود است. (المپیاد جهانی بالکان ۱۹۹۶)

۱۱) مثلث ABC مفروض است. از نقطه P واقع در درون مثلث ABC عمودهای PM و PN را بر اضلاع AB و AC فرود می‌آوریم. اگر داشته باشیم $AM \cdot AB = AN \cdot AC$، مکان هندسی نقطه P را بیابید.

۱۲) مثلث ABC مفروض است. دایره (O_1) از A و B گذشته و مرکزش روی AC قرار دارد و دایره (O_2) از A و C گذشته و مرکزش روی AB قرار دارد. ثابت کنید محور اصلی این دو دایره از نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

۱۳) پای ارتفاع‌های نظیر رئوس A ، B و C از مثلث ABC را به ترتیب A' ، B' و C' می‌نامیم. اضلاع AB، AC و BC را امتداد می‌دهیم تا به ترتیب امتدادهای $A'B'$ ، $A'C'$ و $B'C'$ را در A'' و B'' ، C'' قطع کنند. نشان دهید پای عمودهای وارد از نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC بر خطوط AA'' ، BB'' ، CC'' روی دایره محیطی مثلث ABC قرار دارند.

۱۴) دو دایره (O_1) و (O_2) در نقاط A و B متقاطع‌اند. دایره (O) به قطر O_1O_2 دایره (O_1) را در C و D و دایره (O_2) را در E و F قطع می‌کند. نشان دهید خطوط CD ، EF و AB موازی و هم فاصله‌اند.

۱۵) وتر ثابت AB از دایره (O) مفروض است. P نقطه‌ای دلخواه روی AB است. دوایر $C_1(O_1, r_1)$ و $C_2(O_2, r_2)$ را در طرفین این وتر چنان رسم می‌کنیم که در نقطه P بر AB مماس بوده و بر دایره (O) نیز مماس داخل باشند. نشان دهید با تغییر نقطه P مقدار $\frac{r_1}{r_2}$ همواره ثابت است.

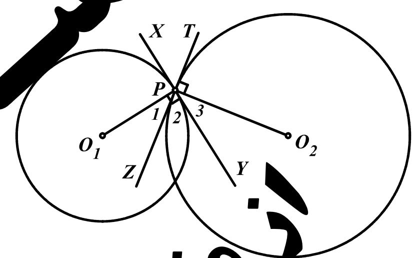
۵-۲ دایره‌های متعامد

هدف بخش: دو دایره متقاطع مانند دو خط همواره در نقطه تقاطعشان با یکدیگر می‌توانند زوایای مختلفی بسازند و در حالتی که این زاویه قائمه باشد دو دایره ویژگی‌های خاصی خواهند داشت که البته به دلیل کاربرد نه چندان گسترده آن، در این بخش بطور خلاصه به مهمترین آن‌ها و برخی کاربردهای آن می‌پردازیم.

تعریف: زاویه بین دو دایره در صورتی که با یکدیگر متقاطع باشند، عبارت است از زاویه بین دو خط مماس بر دایره‌ها در نقطه تقاطع آن‌ها.

البته از آنجا که خط مماس بر دایره در نقطه مماس، بر شعاع دایره عمود است زاویه بین دو دایره را می‌توان با زاویه بین شعاع دایره‌ها در نقطه تقاطع آن‌ها نیز تعریف کرد، چرا که داریم:

$$T\hat{P}Y = 90^\circ + \hat{P}_3 = O_1\hat{P}Y + \hat{P}_3 = O_1\hat{P}O_2$$



تعریف: دو دایره متعامد (عمود بر هم) دو دایره‌ای هستند که با یکدیگر زاویه قائمه می‌سازند.

قضیه ۵-۴: دو دایره $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ در نقاط P و Q متقاطع‌اند. این دو دایره متعامدند اگر و فقط اگر هر کدام از روابط زیر برقرار باشد:

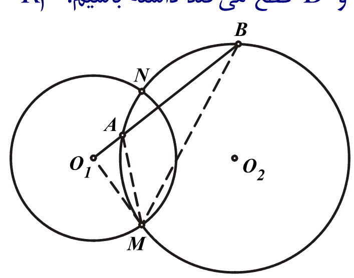
الف) $O_1P \perp O_2P$

ب) $R_1^2 + R_2^2 = O_1O_2^2$

ج) شعاع O_1P بر دایره (O_2) مماس باشد.

رابطه (الف) که به وضوح به معنای تعامد دو دایره است و رابطه (ب) نیز با قضیه فیثاغورث به رابطه (الف) منتج خواهد شد. قسمت (ج) نیز بیانی دیگر از رابطه (الف) می‌باشد، چرا که در صورتی که O_1P بر (O_2) مماس باشد شعاع O_2P بر آن عمود خواهد بود.

مسأله ۵-۳: نشان دهید دو دایره (O_1, R_1) و (O_2, R_2) با یکدیگر متعامدند اگر و فقط اگر برای خط گذرنده از O_1 که دایره (O_2) را در A و B قطع می‌کند داشته باشیم: $O_1A . O_1B = R_1^2$



اگر دو دایره (O_1) و (O_2) بر یکدیگر عمود باشند O_1M بر (O_2) مماس بوده و خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{O_1MA} = \widehat{O_1BM} = \frac{\widehat{AM}}{2}\\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{O_1AM} \sim \overset{\Delta}{O_1BM}$$

$$\Rightarrow \frac{O_1M}{O_1B} = \frac{O_1A}{O_1M} \Rightarrow O_1A \,.\, O_1B = R_1^2$$

و عکس مسأله نیز با برگشت همین راه به سادگی قابل اثبات است.

تعریف: به هر دو نقطه هم خط با O_1 (مانند A و B) که در رابطه $O_1A \,.\, O_1B = R_1^2$ صدق می‌کنند، دو نقطه وارون نسبت به دایره (O_1) گفته می‌شود.

نکته۱: دو نقطه وارون در یک طرف مرکز دایره قرار دارند.

نکته۲: از دو نقطه وارون، یکی داخل و دیگری خارج از دایره قرار دارد.

نکته۳: اگر نقطه‌ای روی دایره قرار داشته باشد، وارون آن بر خود نقطه منطبق است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) دو دایره C_1 و C_2 در A و B متقاطع‌اند. نشان دهید C_1 و C_2 با یکدیگر متعامدند اگر و فقط اگر مجموع دو کمان AB روی این دو دایره برابر 180° باشد.

۲) دو دایره در A و B متقاطع‌اند. خط دلخواه گذرنده از نقطه B دو دایره را در C و D قطع می‌کند. ثابت کنید مثلث ACD قائم‌الزاویه است اگر و فقط اگر دو دایره بر یکدیگر عمود باشند.

۳) نقطه P درون مثلث ABC مفروض است. ثابت کنید دایره محیطی مثلث BCP بر دایره محیطی مثلث ABC عمود است اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\widehat{ABP}+\widehat{ACP}=90^\circ$

۴) دو دایره متعامد C_1 و C_2 در A و B متقاطع‌اند. از نقطه P روی دایره C_1 به A و B وصل می‌کنیم تا C_2 را در C و D قطع کنند. ثابت کنید CD قطر دایره C_2 می‌باشد.

۵) نشان دهید که در مثلث ABC

الف) دایره‌هایی که به قطر AH و BC رسم می‌شوند متعامدند.

ب) دایره IBC بر دایره‌ای که به قطر I_bI_c رسم می‌شود عمود است.

۶) اگر دایره (O) بر دو دایره (O_1) و (O_2) متعامد باشد نشان دهید نقطه O روی محور اصلی دو دایره (O_1) و (O_2) قرار دارد.

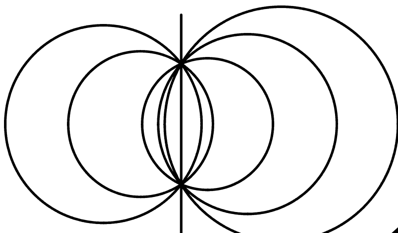
۷) دو قطر عمود بر هم از دو دایره متعامد مفروض‌اند. نشان دهید خط‌هایی که از یک سر یک قطر به دو سر قطر دیگر رسم می‌شوند، از نقاط مشترک دو دایره می‌گذرند.

۵-۳ دایره‌های هم محور

هدف بخش: در بخش اول همین فصل با محور اصلی دو دایره آشنا شدیم. حال زمانی که بیش از دو دایره محور اصلی یکسانی داشته باشند مفهوم جالبی به نام دایره‌های هم محور بوجود می‌آید که البته از آنجا که کاربرد وسیعی در حل مسایل هندسی ندارد، در این بخش بطور خلاصه مروری بر مهمترین خواص و کاربردهای آن خواهیم داشت.

تعریف: گروهی از دایره‌ها را که یک خط ثابت محور اصلی هر دو دایره از این گروه باشد، یک دسته دایره هم محور گویند.

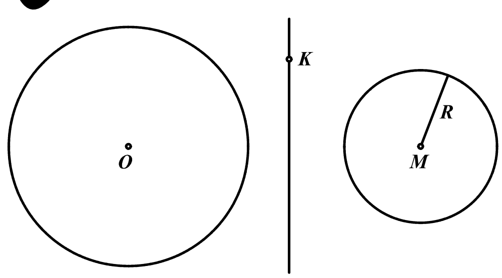
قوت هر نقطه روی محور اصلی دسته دایره نسبت به تمام دایره‌های آن دسته یکسان است بنابراین چنانچه یکی از دوایر، محور اصلی دسته دایره را در دو نقطه قطع کند تمام دایره‌های دسته از این دونقطه خواهند گذشت و چنانچه یکی از این دوایر، محوراصلی را قطع نکند هیچ یک از دایره‌های دسته، محور اصلی را قطع نمی‌کنند.



قضیه ۵- ۵: مراکز دایره‌های یک دسته دایره هم محور هم خطاند.

فرض کنید M مرکز دایره مفروضی از دسته دایره هم محور باشد و O نیز مرکز دایره دلخواه دیگری از این دسته دایره باشد. اگر خط d محور اصلی این دسته دایره باشد OM همواره بر d عمود است بنابراین مراکز دایره‌های مختلف این دسته دایره همواره بر خطی که از M گذشته و بر d عمود می‌شود، قرار دارند که به آن خط مرکزی دسته دایره گفته می‌شود.

مسأله ۵-٤: محور اصلی و یک دایره از یک دسته دایره هم محور مفروض‌اند. اگر ℓ خط مرکزی دسته دایره و M نقطه‌ای دلخواه روی آن باشد، ثابت کنید دایره‌ای به مرکز M که عضو این دسته دایره هم محور باشد، دایره‌ای منحصر بفرد است.



اگر نقطه K را روی محور اصلی دسته دایره در نظر بگیریم داریم:

$$P_{(O)}^{K} = P_{(M)}^{K} \Rightarrow P_{(O)}^{K} = KM^{2} - R^{2}$$

از آنجا که مقادیر $P_{(O)}^{K}$ و KM مشخص و معلوم هستند مقدار R شعاع دایره نیز مشخص خواهد بود و بنابراین دایره $(M\ ,\ R)$ که عضو این دسته دایره هم محور است، دایره‌ای منحصر بفرد است.

نکته: بنابر مسأله پیش یک دسته دایره هم محور را به دو طریق می‌توان نمایش داد:

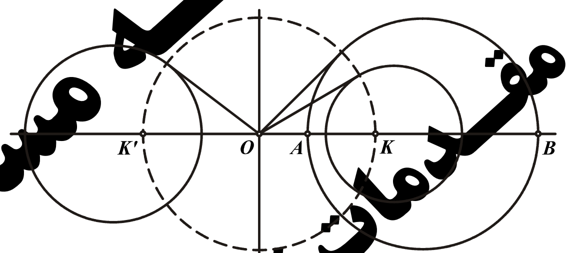
۱- با تعیین یک دایره و محور اصلی آن

۲- با تعیین دو دایره از آن دسته دایره

نقاط حدی

دسته دایره هم محور غیر متقاطع زیر را در نظر بگیرید. خط d محور اصلی دسته دایره بوده و خط مرکزی آن را در O قطع می‌کند.

از آنجا که نقطه O روی محور اصلی دسته دایره قرار داشته و قوت آن نسبت به تمام دایره‌های دسته یکسان می‌باشد، بنابراین طول تمام مماس‌های مرسوم از O بر دایره‌های دسته با یکدیگر برابر است و نقاط مماس، بر دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. چنانچه می‌بینید این دایره بر تمام دایره‌های دسته عمود می‌باشد و خط مرکزی دسته دایره را در نقاط K و K' قطع می‌کند.



تعریف: به نقاط K و K' نقاط حدی دسته دایره هم محور غیر متقاطع گفته می‌شود.

قضیه ٥- ٦: نقاط حدی K و K' نسبت به هر یک از دایره‌های دسته، وارون یکدیگرند.

از آنجا که دایره (O) بر هر یک از دوایر دسته، عمود است پس نقاط K و K' نیز نسبت به هر یک از دایره‌های دسته وارون یکدیگرند.

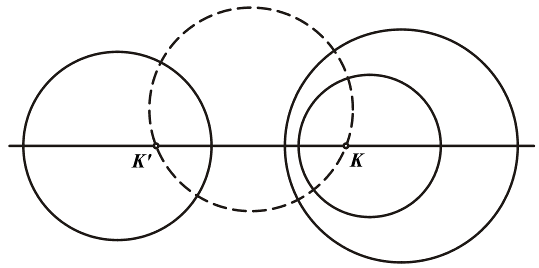
عکس قضیه: اگر دو نقطه K و K' نسبت به هر یک از دایره‌های یک مجموعه از دایره‌ها با مراکز هم خط، وارون یکدیگر باشند، آن مجموعه دایره‌ها یک دسته دایره هم محور تشکیل می‌دهند.

اگر نقطه وسط KK' را O بنامیم، از آنجا که نقاط K و K' نسبت به دایره‌ای به قطر AB وارون یکدیگر هستند داریم:

$$OA\ .\ OB = OK^{2} \Rightarrow P_{C}^{O} = OK^{2}$$

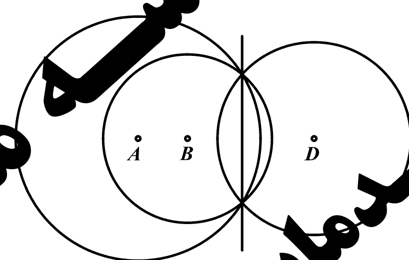
و به همین ترتیب قوت نقطه O نسبت به تمام دایره‌های دیگر این مجموعه برابر OK^{2} است. بنابراین نقطه O روی محور اصلی دو به دو دوایر مجموعه قرار دارد و خط عمود خارج شده از O بر KK' محور اصلی دو به دو دوایر این مجموعه می‌باشد. پس این مجموعه، تشکیل یک دسته دایره هم محور می‌دهند.

مسأله ۵-۵: نشان دهید هر دایره‌ای که از نقاط حدی یک دسته دایره هم محور غیر متقاطع بگذرد، بر همه دایره‌های دسته عمود است.



با توجه به اینکه نقاط حدی K و K' نسبت به هر یک از دایره‌های دسته، وارون یکدیگرند، بنابر مسأله ۵-۳ این دایره بر هر یک از دایره‌های این دسته عمود می‌باشد.

مسأله ۵-۶: نقطه O مرکز دایره $C(O,R)$ روی محور اصلی دسته دایره هم محوری قرار دارد. نشان دهید اگر دایره C با یکی از دایره‌های دسته متعامد باشد آنگاه با همه دایره‌های دسته متعامد است.



فرض کنید دایره C با دایره (A) از این دسته دایره هم محور متعامد باشد که در این صورت $.P^{O}_{(A)} = R^{2}$

با توجه به اینکه O روی محور اصلی دسته دایره قرار دارد خواهیم داشت:

$$P^{O}_{(B)} = P^{O}_{(A)} \Rightarrow P^{O}_{(B)} = R^{2}$$

بنابراین دایره (B) نیز بر دایره C عمود است و به همین ترتیب تمام دوایر این دسته دایره هم محور بر دایره C عمود هستند.

نکته: با توجه به مسأله فوق می‌توان این نتیجه را نیز گرفت که اگر دایره‌ای با دو دایره از یک دسته دایره هم محور متعامد باشد آنگاه بر همه دایره‌های آن دسته عمود خواهد بود.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) نشان دهید محورهای اصلی دایره‌های یک دسته دایره‌ی هم محور، با دایره‌ای که متعلق به این دسته دایره نیست، همرس‌اند و نقطه‌ی همرسی آن‌ها روی محور اصلی دسته دایره قرار دارد.

۲) نشان دهید دایره‌های متعامد با دایره‌های یک دسته دایره‌ی هم محور، یک دسته دایره‌ی هم محور تشکیل می‌دهند.

۳) نشان دهید سه یا بیش از سه دایره که با یک دایره متعامد باشند و مرکزشان روی خط ثابتی قرار داشته باشند، یک دسته دایره‌ی هم محور تشکیل می‌دهند.

۴) نشان دهید که مماس مشترک دو دایره‌ی یک دسته دایره‌ی هم محور غیر متقاطع، از یک نقطه‌ی حدی دسته، با زاویه‌ی قائمه دیده می‌شود.

۵) برای هر رأس یک مثلث، دایره‌ای رسم کرده‌ایم که از آن رأس بگذرد، با دایره محیطی مثلث متعامد باشد، و مرکزش روی ضلع مقابل آن رأس باشد. نشان دهید این سه دایره هم محورند.

۶) مماس‌هایی که در رأس‌های A ، B و C از مثلث حاده‌الزاویه‌ای بر دایره محیطی آن مثلث رسم شده‌اند، به ترتیب اضلاع BC ، AC و AB را در U ، V و W قطع کرده‌اند. ثابت کنید دایره‌هایی که AU ، BV و CW قطرهای آن‌ها هستند هم‌محورند، و محور اصلی آن‌ها خط [illegible] مثلث است.

۷) سه دایره با مراکز ناهم‌خط و یک نقطه مفروض‌اند. سه دایره رسم می‌کنیم که از نقطه‌ی مفروض بگذرند و هر کدام با دو دایره از سه دایره مفروض هم محور باشند. نشان دهید که این سه دایره یک نقطه‌ی مشترک دیگر نیز دارند.

۸) چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D که هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. دو خط AB و CD با یکدیگر در نقطه‌ی E و دو خط BC و DA با یکدیگر در نقطه‌ی F متقاطع‌اند. ثابت کنید سه دایره به قطرهای AC ، BD و EF یا از دو نقطه می‌گذرند یا هر یک از دو تای آن‌ها هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) دایره‌ای به مرکز O از رأس‌های B و C از مثلث ABC می‌گذرد و اضلاع AB و AC را در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر دوایر محیطی مثلث‌های ABC و AMN یکدیگر را دوباره در K قطع کنند، نشان دهید: $\widehat{AKO} = ۹۰^\circ$ (المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۸۵)

۲) مثلث ABC و H مرکز ارتفاعی آن مفروض‌اند. به ترتیب اوساط اضلاع BC, AC و AB را M , N و P می‌نامیم. از A خطی عمود بر MH رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل را در A' قطع کند. اگر نقاط B' و C' را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم، نشان دهید نقاط A', B' و C' بر خطی عمود بر خط اویلر مثلث ABC قرار دارند.

۳) مثلث ABC و میانه AM از آن مفروض‌اند. دایره‌ای به قطر AM رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کند. اگر مماس‌های مرسوم بر دایره در نقاط D و E یکدیگر را در P قطع کنند، نشان دهید: $PB = PC$

۴) دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ در نقاط M و N بر دایره‌ی C مماس داخل‌اند. و مرکز $C_۲$ روی $C_۱$ قرار دارد. وتر مشترک دوایر $C_۱$ و $C_۲$، دایره‌ی C را در نقاط A و B قطع می‌کند. MA و MB نیز $C_۱$ را در نقاط D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید خط DE بر $C_۲$ مماس است. (المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۹۹)

۵) مثلث ABC را در نظر بگیرید. دایره‌ای از رأس‌های B و C می‌گذرد و اضلاع AB و AC را به ترتیب در C' و B' قطع می‌کند. اگر H و H' به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABC و $AB'C'$ باشند، ثابت کنید خطوط BB', CC' و HH' همرسند.

۶) در مثلث ABC، مماس‌های مرسوم از رأس A بر دایره‌ای به قطر BC، در نقاط P و Q بر آن دایره مماس شده‌اند. خط PQ را ℓ_a می‌نامیم. خطوط ℓ_b و ℓ_c بطور مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید خطوط ℓ_a , ℓ_b و ℓ_c همرس‌اند.

۷) دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ مفروض‌اند بطوری که نقطه‌ی A مرکز دایره‌ی $C_۱$ روی $C_۲$ قرار می‌گیرد. BC را وتر مشترک دو دایره می‌گیریم. وتر AD ، BC را در E قطع می‌کند. از نقطه‌ی D، مماس‌های DF و DG را بر $C_۱$ رسم می‌کنیم. ثابت کنید E , F و G روی یک خط راست قرار دارند.

۸) چهار ضلعی $ABCD$ مفروض است. نقطه P درون چهار ضلعی چنان قرار گرفته که داشته باشیم:

$\widehat{DAP}+\widehat{DCP} = \widehat{CBP}+\widehat{CDP} = ۹۰^\circ$. اگر نقاط E و O به ترتیب محل تلاقی اقطار چهار ضلعی و مرکز دایره محیطی آن باشند، نشان دهید نقاط E , P و O هم خطاند.

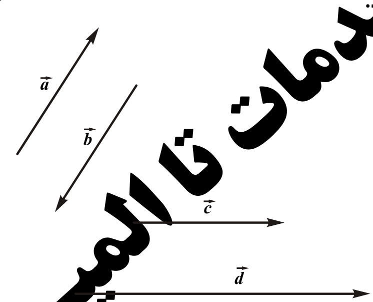
فصل ششم

هندسه برداری

۶– ۱ خواص و کاربردهای بردارها

هدف بخش: هندسه برداری یکی از کاربردی‌ترین مباحث هندسی است که البته معمولاً بیشتر به صورت محض به خواص آن پرداخته می‌شود و به همین دلیل نیز از جذابیت آن کاسته است. اما در این فرصت کوتاه سعی می‌شود با مروری گذرا بر مهم‌ترین خواص بردارها، نگاه دقیق‌تری به کاربرد وسیع آن در ارائه راه حل‌هایی ساده‌تر برای حل مسایل هندسه مسطحه و حتی هندسه فضایی داشته باشیم.

تعریف: بردار پاره‌خطی است دارای اندازه، راستا و جهت که به صورت $\vec{a}$ یا $\overrightarrow{AB}$ نمایش داده می‌شود که نقاط A و B به ترتیب نقاط ابتدا و انتهای آن می‌باشند و اندازه یا طول آن نیز به صورت $|\overrightarrow{AB}|$ نمایش داده می‌شود. بنابراین هر بردار دارای سه خاصیت اساسی اندازه (طول)، راستا و جهت است. مثلاً در بردارهای شکل زیر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در اندازه و راستا یکسان هستند اما جهتی متفاوت دارند و بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{d}$ در راستا و جهت یکسان‌اند اما در اندازه متفاوت‌اند.



نکته: دو بردار هم جهت لزوماً هم‌راستا نیز می‌باشند اما دو بردار هم‌راستا لزوماً هم جهت نمی‌باشند.

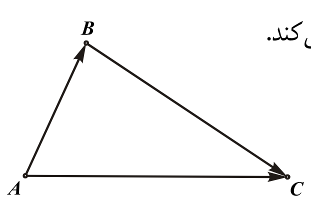
تعریف: دو بردار برابر (هم‌سنگ) دو برداری هستند که در اندازه و راستا و جهت یکسان باشند.

تعریف: دو بردار قرینه دو برداری هستند که در اندازه و راستا و جهت یکسان بوده اما در جهت متفاوت باشند.($\vec{a}=-\vec{b}$)

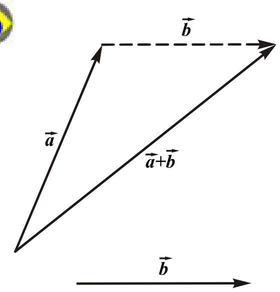
قواعد جمع و تفریق بردارها

حاصل جمع یا تفریق دو یا چند بردار همواره یک بردار است و از قواعد زیر پیروی می‌کند.

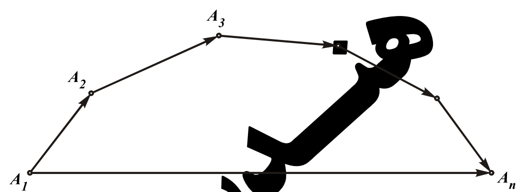
۱- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



بنابراین برای جمع دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کافی است مطابق شکل برداری برابر بردار $\vec{b}$ در انتهای بردار $\vec{a}$ رسم کنیم و طبق قاعده فوق حاصل جمع آن‌ها را بیابیم.



بنابر قاعده فوق مجموع هر n بردار مختلف نیز با رسم آن‌ها در انتهای یکدیگر به صورت شکل زیر خواهد بود:



$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\dots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$$

۲- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (خاصیت جابه‌جایی)

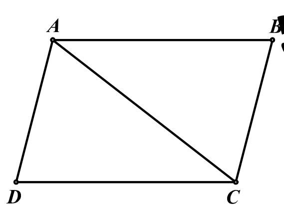
۳- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (خاصیت شرکت پذیری)

۴- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

۵- $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

در مورد تفریق بردارها نیز کافی است با عوض کردن جهت بردار علامت منفی آن را به مثبت تبدیل کنیم و از قوانین جمع بردارها استفاده کنیم $(-\overrightarrow{AB}=+\overrightarrow{BA})$

مسأله ٦– ۱: ثابت کنید هر چهار ضلعی که دو ضلع روبروی آن با یکدیگر موازی و مساوی باشند، یک متوازی‌الاضلاع است.



فرض: $AB \parallel CD\ ,\ AB=CD$

حکم: $AD \parallel BC$

دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ به دلیل یکسان بودن در اندازه و راستا و جهت با یکدیگر برابرند. با تجزیه دو بردار $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{CB}$ خواهیم داشت:

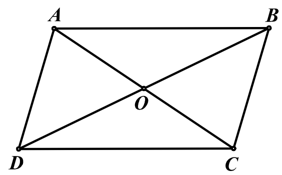
$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow \begin{cases}DA \parallel CB\\ |\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|\end{cases}$$

بنابراین دو بردار DA و CB با یکدیگر برابرند که از آنجا می توان هم‌راستایی ($DA \parallel CB$) و هم اندازه بودن ($|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|$) آن‌ها را نتیجه گرفت.

توجه داشته باشید که فنون مختلف تجزیه یک بردار به مجموع چند بردار از مهم‌ترین و کاربردی‌ترین ایده‌های موجود در هندسه برداری می‌باشد.

مسأله ۶- ۲: ثابت کنید هر چهار ضلعی که اقطار آن یکدیگر را نصف کنند، یک متوازی‌الاضلاع است.

حکم: $AB \parallel CD \ , \ AB = CD$



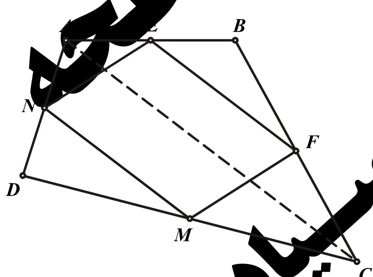
برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ است. دو بردار را تجزیه می‌کنیم، از آن جا که در چهارضلعی $ABCD$ اقطار یکدیگر را نصف می‌کنند، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel DC \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| \end{cases}$$

بنابراین دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ با یکدیگر هم راستا و هم اندازه هستند.

مسأله ۶- ۳: اگر اوساط اضلاع چهارضلعی دلخواه $ABCD$ را E ، F ، M ، N بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $EFMN$ همواره متوازی‌الاضلاع است.

حکم: $EF \parallel MN \ , \ EF = MN$



برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. اگر بردار $\overrightarrow{EF}$ را به دو طریق تجزیه کنیم خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$$

از آنجا که دو بردار $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EA}$ با یکدیگر و دو بردار $\overrightarrow{FB}$ و $\overrightarrow{FC}$ نیز با یکدیگر قرینه‌اند و مجموعی برابر صفر دارند، از جمع کردن دو عبارت فوق خواهیم داشت:

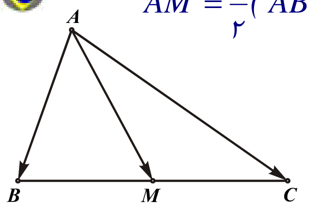
$$۲\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} \qquad (۱)$$

و به همین ترتیب با تجزیه بردار $\overrightarrow{NM}$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\overrightarrow{NM} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC} \qquad (۲)$$

و از دو رابطه (۱) و (۲) نیز می‌توان نتیجه گرفت $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$ و بنابراین دو ضلع EF و MN با یکدیگر موازی و مساوی بوده و چهارضلعی $EFMN$ متوازی‌الاضلاع است.

مسأله ٦- ٤: اگر M وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد، ثابت کنید: $\overrightarrow{AM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



از آنجا که دو بردار $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{CM}$، دو بردار قرینه با مجموع صفر هستند داریم:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

قواعد ضرب عدد در بردار

حاصل ضرب عدد حقیقی k در بردار $\vec{a}$ همواره یک بردار هم‌راستا با بردار $\vec{a}$ و به اندازه، k برابر اندازه بردار $\vec{a}$ می‌باشد. که ممکن است هم جهت $(k > ۰)$ یا در عکس جهت $(k < ۰)$ بردار $\vec{a}$ باشد. ضرب عدد در بردار همواره از قواعد زیر پیروی می‌کند:

۱- $(-۱)\vec{a} = -\vec{a}$

۲- $|k\vec{a}| = |k| . |\vec{a}|$

۳- $k(k'\vec{a}) = k'(k\vec{a})$ (جابه‌جایی ضرب در عدد)

۴- $(k + k')\vec{a} = k\vec{a} + k'\vec{a}$ (شرکت پذیری ضرب در عدد)

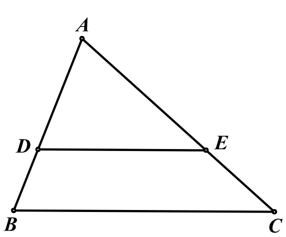
۵- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (شرکت پذیری ضرب در عدد)

نکته: بنابر تعاریف و قواعد فوق دو خط a و b با یکدیگر موازی (هم راستا) هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} = k\vec{b}$ باشد. $(k \in R)$

مسأله ٦- ٥: عکس قضیه تالس را با استفاده از هندسه برداری ثابت کنید.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

با استفاده از ترکیب در مخرج به تناسب جدید روبه رو رسیده و آن را برابر k درنظر می‌گیریم. بنابراین داریم:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AD}| = k\,|\overrightarrow{AB}| \Rightarrow \overrightarrow{DA} = k\,\overrightarrow{BA} \\ |\overrightarrow{AE}| = k\,|\overrightarrow{AC}| \Rightarrow \overrightarrow{AE} = k\,\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

با توجه به عبارات فوق می‌توان بردار $\overrightarrow{DE}$ را به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = k\,\overrightarrow{BA} + k\,\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = k\,\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = k\,\overrightarrow{BC}$$

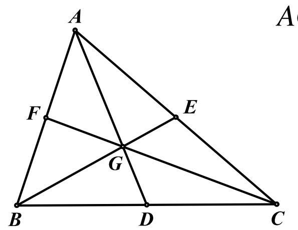
بنابراین دو پاره‌خط DE و BC موازی یکدیگر بوده و نسبت طول آن‌ها نیز برابر k می‌باشد.

تعریف: نقطه G مرکز ثقل n ضلعی (یا چند وجهی) $A_۱A_۲...A_n$ است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\overrightarrow{A_۱G} + \overrightarrow{A_۲G} + ... + \overrightarrow{A_nG} = \vec{o}$$

مسأله ٦- ٦: ثابت کنید محل همرسی میانه‌های مثلث ABC مرکز ثقل مثلث است.

محل همرسی میانه‌ها را G می‌نامیم و ثابت می‌کنیم $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{o}$



$$\overrightarrow{GD} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \Rightarrow ۲\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$$

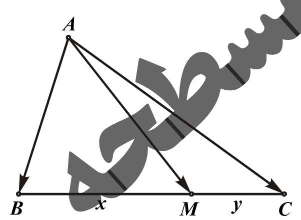
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} + ۲\overrightarrow{DG} \qquad (۱)$$

$$|\overrightarrow{AG}| = ۲|\overrightarrow{GD}| \Rightarrow \overrightarrow{AG} = ۲\overrightarrow{GD} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = -۲\overrightarrow{DG} \Rightarrow \overrightarrow{AG} + ۲\overrightarrow{DG} = \vec{o} \qquad (۲)$$

و از دو رابطه (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت: $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{o}$

قضیه ٦- ۱: اگر خط دلخواه AM ضلع BC از مثلث ABC را به نسبت x به y قطع کند ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+y}\overrightarrow{AC}$$



$$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{MC}|} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,|\overrightarrow{BM}| = x\,|\overrightarrow{MC}| \Rightarrow y\,\overrightarrow{BM} = x\,\overrightarrow{MC} \Rightarrow y\,\overrightarrow{BM} = -x\,\overrightarrow{CM}$$

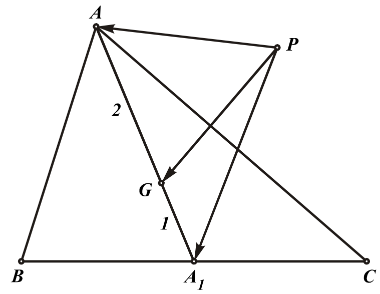
$$\Rightarrow y\overrightarrow{BM} + x\overrightarrow{CM} = \vec{o}$$

اگر $\overrightarrow{AM}$ را به دو صورت زیر نوشته و یکی را در x و دیگری را در y ضرب کرده و با یکدیگر جمع کنیم از آن جا که عبارت فوق برابر صفر می‌باشد خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \Rightarrow y\,\overrightarrow{AM} = y\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \Rightarrow x\,\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AC} + x\,\overrightarrow{CM}\end{array}\right\} \Rightarrow (x+y)\overrightarrow{AM} = y\,\overrightarrow{AB} + x\,\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+y}\overrightarrow{AC}$$

مسأله ۶- ۷: ثابت کنید میانه‌های هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند و یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند.



نقاط G_a، G_b و G_c را به نسبت ۲ به ۱ به ترتیب روی میانه‌های AA_1، BB_1 و CC_1 انتخاب می‌کنیم. و نقطه P را به عنوان قطب ثابت و به دلخواه در صفحه درنظر می‌گیریم. اگر نشان دهیم بردارهای $\overrightarrow{PG_a}$، $\overrightarrow{PG_b}$ و $\overrightarrow{PG_c}$ با یکدیگر برابرند، از آنجا که نقطه ابتدای آن‌ها (P) یکسان است می‌توان نتیجه گرفت نقطه انتهای آن‌ها نیز یکسان بوده و G_a، G_b و G_c بر یکدیگر منطبق‌اند و به عبارت دیگر میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ در یک نقطه قطع می‌کنند.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PG_a}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PA_1}\\ \overrightarrow{PA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PG_a}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\right)$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\Rightarrow \overrightarrow{PG_a}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$$

و به ترتیب مشابه بردارهای $\overrightarrow{PG_b}$ و $\overrightarrow{PG_c}$ نیز برابر $\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ بدست می‌آیند. بنابراین سه بردار $\overrightarrow{PG_a}$ و $\overrightarrow{PG_b}$ و $\overrightarrow{PG_c}$ با یکدیگر برابرند.

توجه داشته باشید که ایده مسأله فوق در حل مسایل همرسی خطوط بسیار کارآمد است.

قواعد ضرب بردار در بردار

به طور کلی ضرب دو بردار به دو صورت داخلی و خارجی تعریف می‌شود. اما در این بخش با توجه به کاربرد آن، تنها به ضرب داخلی می‌پردازیم.

تعریف: حاصل ضرب داخلی دو بردار همواره عددی حقیقی بوده و برابر حاصل ضرب طول دو بردار در کسینوس زاویه بین آن‌ها می‌باشد:
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a},\vec{b}}$$

ضرب داخلی بردارها از قواعد زیر پیروی می‌کند:

۱- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

۲- $k(\vec{a}.\vec{b})=k\vec{a}.\vec{b}$

۳- $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$

۴- $\vec{a}^{2} = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos(0) = |\vec{a}|^{2}$

۵- $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ یا $\vec{a} = \vec{0}$ یا $\vec{b} = \vec{0}$

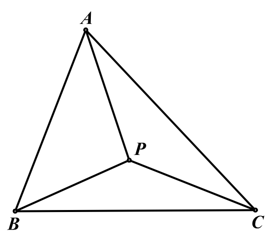
نکته: بنابر قاعده فوق شرط لازم و کافی برای تعامد دو خط a و b، صفر بودن حاصل ضرب داخلی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌باشد.

مسأله ٦- ٨: ثابت کنید ارتفاع‌های مثلث در یک نقطه همرس‌اند.

لم: اگر P نقطه‌ای دلخواه در مثلث ABC باشد نشان دهید رابطه زیر همواره برقرار است:

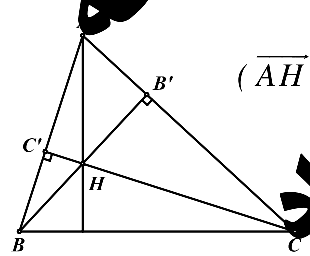
$$(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB})=0$$

اثبات لم: اگر بردار $\overrightarrow{BC}$ را تجزیه کرده و از خواص ضرب داخلی بردارها استفاده کنیم خواهیم داشت:



$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AP}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB}\\
&=-\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB}\\
&=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{AP})+\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP})\\
&=(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB})\\
&=(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA})-(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB})=0
\end{aligned}$$

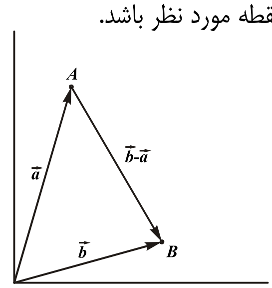
اثبات مسأله: محل تقاطع دو ارتفاع BB' و CC' را H می‌نامیم. طبق لم فوق خواهیم داشت:



$$\left.\begin{aligned}
&(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB})=0\\
&BH\perp CA \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\\
&CH\perp AB \Rightarrow \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow AH\perp BC$$

بنابراین AH نیز ارتفاع نظیر ضلع BC می‌باشد و به عبارت دیگر هر سه ارتفاع در نقطه‌ای مانند H همرس‌اند.

تعریف: بردار مکان هر نقطه، برداری است که ابتدای آن مبداء مختصات و انتهای آن، نقطه مورد نظر باشد.

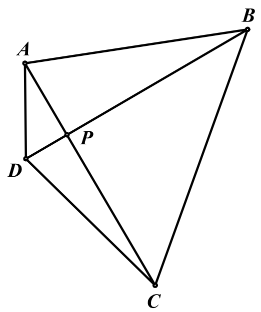


بنابراین اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای مکان نقاط A و B باشند می توان بردار $\overrightarrow{AB}$ را به صورت $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ تجزیه کرد.

توجه داشته باشید که تجزیه بردارهای موجود در صفحه به بردارهای مکان آن‌ها یکی دیگر از ایده‌های مهم هندسه برداری در حل مسایل است.

مسأله ٦– ٩: ثابت کنید قطرهای یک چهارضلعی برهم عمودند اگر و تنها اگر مجموع مربعات اضلاع مقابل با یکدیگر برابر باشند.

حکم: $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^{2}+CD^{2}=AD^{2}+BC^{2}$



برای اثبات حکم فوق کافی است نشان دهیم دو عبارت $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ و $|\overrightarrow{AB}|^{2}+|\overrightarrow{CD}|^{2}=|\overrightarrow{AD}|^{2}+|\overrightarrow{BC}|^{2}$ با یکدیگر یکسان و هم ارزند. اگر بردارهای $\vec{d},\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ را بردارهای مکان رئوس چهارضلعی درنظر بگیریم خواهیم داشت:

$$|\overrightarrow{AB}|^{2}+|\overrightarrow{CD}|^{2}=|\overrightarrow{AD}|^{2}+|\overrightarrow{BC}|^{2}\Rightarrow \overrightarrow{AB}^{2}+\overrightarrow{CD}^{2}=\overrightarrow{AD}^{2}+\overrightarrow{BC}^{2}$$
$$\Rightarrow(\vec{b}-\vec{a})^{2}+(\vec{d}-\vec{c})^{2}=(\vec{d}-\vec{a})^{2}+(\vec{c}-\vec{b})^{2}$$
$$\Rightarrow\vec{b}^{2}+\vec{a}^{2}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{d}^{2}+\vec{c}^{2}-2\vec{d}\vec{c}=\vec{d}^{2}+\vec{a}^{2}-2\vec{a}\vec{d}+\vec{c}^{2}+\vec{b}^{2}-2\vec{b}\vec{c}$$
$$\Rightarrow\vec{a}\vec{b}+\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}-\vec{b}\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}(\vec{b}-\vec{d})-\vec{c}(\vec{b}-\vec{d})=0$$
$$\Rightarrow(\vec{a}-\vec{c}).(\vec{b}-\vec{d})=0\Rightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}=0$$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) ثابت کنید مرکز ثقل هر n ضلعی (یا چند وجهی) یکتا و منحصربه فرد است.

۲) اگر G مرکز ثقل n ضلعی (یا چند وجهی) $A_1A_2...A_n$ بوده و P نیز نقطه‌ای دلخواه باشد، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + ... + \overrightarrow{PA_n})$$

۳) اگر G و G' مراکز ثقل مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ باشند، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$$

۴) سه صفحه موازی a، a'، a'' در فضا مفروض‌اند. سه خط دلخواه درنظر می‌گیریم تا صفحات را قطع کنند. محل تقاطع خطوط با صفحه a را A، B و C و با صفحه a' را A', B', C' و با صفحه a'' را A'', B'', C'' می‌نامیم. اگر G، G'، G'' به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های ABC، $A'B'C'$ و $A''B''C''$ باشند، ثابت کنید G، G'، G'' هم‌خطاند.

۵) با استفاده از هندسه برداری ثابت کنید در هر مثلث نقاط O، G، H هم خط بوده و $HG = 2GO$ می‌باشد. (قضیه اویلر)

۶) ثابت کنید در هر چهارضلعی، میانه‌ها و خطی که اوساط اقطار را به هم وصل می‌کند یکدیگر را نصف می‌کنند. (میانه چهارضلعی پاره‌خطی است که اوساط دو ضلع مقابل را به یکدیگر متصل می‌کند.)

۷) ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات اضلاع با مجموع مربعات اقطار برابر است.

۸) ثابت کنید قطرهای یک چهارضلعی برهم عمودند اگر و تنها اگر میانه‌های آن با یکدیگر برابر باشند.

۹) برای هر نقطه دلخواه P و مستطیل $ABCD$ ثابت کنید:

الف) $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD}$

ب) $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

۱۰) مستطیل‌های $ABDE$، $BCFG$ و $CAHI$ را به طرف خارج روی اضلاع مثلث ABC می‌سازیم. ثابت کنید عمود منصف‌های پاره‌خط‌های HE، DG و FI در یک نقطه همرس‌اند.

۱۱) n ضلعی $A_1A_2...A_n$ مفروض است. مرکز ثقل $n-1$ ضلعی حاصل از کنار گذاشتن رأس A_i را G_i می‌نامیم. ثابت کنید n ضلعی $G_1G_2...G_n$ با n ضلعی $A_1A_2...A_n$ به نسبت $n-1$ متجانس می‌باشد.

۱۲) نقطه دلخواه P را درون مثلث ABC درنظر می‌گیریم. اگر مساحت مثلث‌های PBC، PAC و PAB به ترتیب برابر S_1, S_2, S_3 باشند، نشان دهید: $S_1.\overrightarrow{PA} + S_2.\overrightarrow{PB} + S_3.\overrightarrow{PC} = \vec{o}$

۱۳) دو مربع $ABCD$ و $AEFG$ در رأس A مشترک‌اند. از به هم وصل کردن رئوس نزدیک به هم دو مربع، دو مثلث ایجاد می‌شود. ثابت کنید میانه هر کدام از این دو مثلث ارتفاع دیگری است.

۱۴) از رأس قائمه C در مثلث قائم‌الزاویه ABC خط دلخواهی را رسم می‌کنیم و از رئوس A و B عمودهای AA' و BB' را بر این خط فرود می‌آوریم. اگر C' قرینه C نسبت به وسط $A'B'$ باشد، ثابت کنید:

$$\widehat{AC'B} = 90^\circ$$

۱۵) (قضیه کسینوس‌ها) اگر a، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند ثابت کنید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

۱۶) فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد، نشان دهید برابری زیر برقرار است:

(قضیه‌ی لایبنیتس)
$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

۱۷) اگر در مثلث ABC، H مرکز ارتفاعی باشد. ثابت کنید:

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HA}$$

۱۸) اگر O و I به ترتیب مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC و H مرکز ارتفاعی آن باشند، نشان دهید:

الف) $\overrightarrow{HA}.\tan\hat{A} + \overrightarrow{HB}.\tan\hat{B} + \overrightarrow{HC}.\tan\hat{C} = \vec{o}$

ب) $\overrightarrow{OA}.\sin 2\hat{A} + \overrightarrow{OB}.\sin 2\hat{B} + \overrightarrow{OC}.\sin 2\hat{C} = \vec{o}$

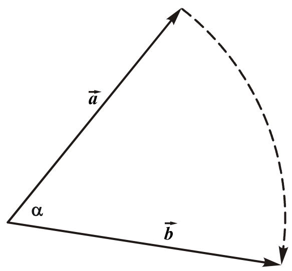
ج) $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{o}$

۱۹) اگر P نقطه دلخواهی باشد و I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC و a، b و c طول اضلاع آن باشند، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{PI} = \frac{a.\overrightarrow{PA} + b.\overrightarrow{PB} + c.\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$$

۶– ۲ بردار دوران

هدف بخش: یکی از مهم‌ترین و قدرتمندترین ابزارهای هندسه برداری در حل مسایل مختلف، بردار دوران است که البته تاکنون کمتر به آن پرداخته‌اند. به همین دلیل بردار دوران را در این بخش به طور جداگانه از سایر ابزارهای هندسه برداری مورد بحث قرار می‌دهیم و برآنیم تا شما را با قدرت فوق‌العاده آن در حل مسایل آشنا سازیم.



برای دوران هر بردار با زاویه α و در جهت ساعتگرد (یا پاد ساعتگرد) باید بردار موردنظر را حول نقطه ابتدای آن و در جهت موردنظر به اندازه α درجه چرخاند تا دوران یافته آن حاصل شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار $\vec b$ دوران یافته بردار $\vec a$ با زاویه α درجه در جهت ساعتگرد می‌باشد که آن را به صورت $\vec b = R_{\vec a}^{\overset{\frown}{\alpha}}$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین دوران همواره طول بردار را ثابت نگه می‌دارد.

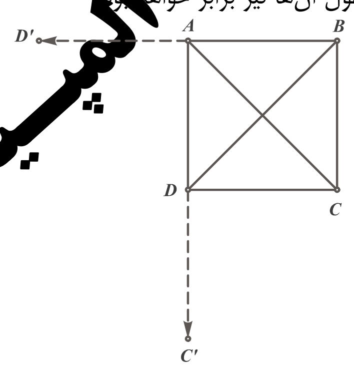
قضیه ٦– ۲: دوران یافته هر بردار با زاویه α درجه و در جهتی خاص برابر است با مجموع دوران یافته‌های بردارهای سازنده آن با زاویه α و در همان جهت.

$$\vec a = \vec a_1 + \vec a_2 + \ldots + \vec a_n \Rightarrow R_{\vec a}^{\overset{\frown}{\alpha}} = R_{\vec a_1}^{\overset{\frown}{\alpha}} + R_{\vec a_2}^{\overset{\frown}{\alpha}} + \ldots + R_{\vec a_n}^{\overset{\frown}{\alpha}}$$

برای فهم بهتر قضیه به مسئله ساده زیر توجه کنید.

مسأله ٦– ۱۰: ثابت کنید اقطار مربع بر یکدیگر عمود و با یکدیگر مساوی هستند.

برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم بردار $\overrightarrow{AC}$ پس از ۹۰ درجه دوران برابر بردار $\overrightarrow{BD}$ خواهد بود که در این صورت زاویه بین آن‌ها ۹۰ درجه و طول آن‌ها نیز برابر خواهد بود.



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

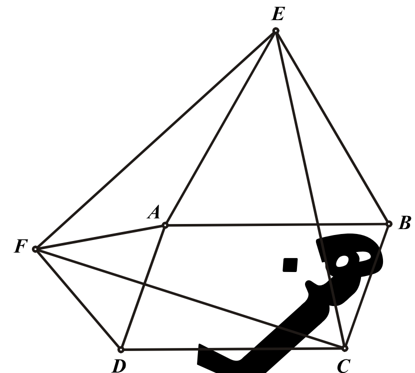
اگر بردارهای سازنده $\overrightarrow{AC}$ را ۹۰ درجه در جهت ساعتگرد دوران دهیم بردار $\overrightarrow{AD}$ به بردار $\overrightarrow{AD'}$ تبدیل می‌شود که با بردار $\overrightarrow{BA}$ برابر است و بردار $\overrightarrow{DC}$ نیز به بردار $\overrightarrow{DC'}$ تبدیل می‌شود که با بردار $\overrightarrow{AD}$ برابر است.

بنابراین داریم:

$$R_{\overrightarrow{AC}}^{\overset{\frown}{90}} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

بنابراین بردار $\overrightarrow{AC}$ پس از ۹۰ درجه دوران بر $\overrightarrow{BD}$ منطبق می‌شود. پس AC و BD بر یکدیگر عمود و با هم مساوی‌اند.

مسأله ۶- ۱۱: مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABE و ADF را روی اضلاع AB و AD از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و در خارج از آن می‌سازیم. ثابت کنید مثلث CEF متساوی‌الاضلاع است.

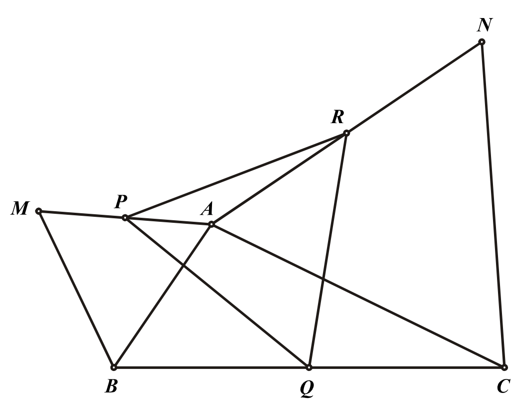


برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم بردار $\overrightarrow{CF}$ پس از ۶۰ درجه دوران در جهت ساعتگرد بر بردار $\overrightarrow{CE}$ منطبق خواهد شد که در این صورت زاویه $\widehat{FCE}$ برابر ۶۰ درجه و طول اضلاع FC و EC نیز با یکدیگر برابر می‌شوند و در نتیجه مثلث FCE متساوی‌الاضلاع خواهد بود. از آنجا که بردارهای $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ با یکدیگر و بردارهای $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{CB}$ نیز با یکدیگر برابرند، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DF}\Rightarrow R^{\overset{\curvearrowright}{60}}_{\overrightarrow{CF}}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}$$

توجه داشته باشید که در استفاده از بردار دوران انتخاب بهترین نحوه تجزیه بردارها، مهمترین قسمت حل مسأله را تشکیل می‌دهد. در تجزیه یک بردار باید همواره سعی کنید بردارهایی را انتخاب کنید که قابلیت انطباق یافتن با زاویه دوران (α) را داشته باشند و بردارهایی که این خاصیت را ندارند به نحوی از این مجموع حذف کنید. به نحوه تجزیه بردارها در مسأله زیر دقت کنید.

مسأله ۶- ۱۲: روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج از آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع MAB و NAC را می‌سازیم. اگر P و Q و R به ترتیب اوساط AM، BC و AN باشند، ثابت کنید مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است.



برای اثبات حکم نشان می‌دهیم $R^{\overset{\frown}{60^\circ}}_{QP} = \overrightarrow{QR}$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP}$$
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}$$

از آن جا که $\overrightarrow{QB} = -\overrightarrow{QC}$ و $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{AP}$، با جمع کردن دو عبارت فوق نتیجه می‌شود:

$$2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CA})$$

$$\Rightarrow R^{\overset{\frown}{60^\circ}}_{QP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CN}) \qquad (1)$$

حال برای اثبات حکم باید ثابت کنیم $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CN})$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AR} \\ \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NR} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CN} \Rightarrow \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CN}) \qquad (2)$$

بنابر دو عبارت (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت $R^{\overset{\frown}{60^\circ}}_{QP} = \overrightarrow{QR}$ است به عبارت دیگر مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی الساقین MAB و NAC ($\hat{M}=\hat{N}=۹۰^{\circ}$) را روی اضلاع مثلث ABC و در خارج از آن می‌سازیم و نقطه وسط ضلع BC را P می‌نامیم. ثابت کنید مثلث MPN قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۲) دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $AB'C'$ در رأس A مشترک‌اند. اگر P، Q و R به ترتیب اوساط BC' ، AC ، AB' باشند، ثابت کنید مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است.

۳) در مثلث ABC ضلع BC ثابت و رأس A متغیر است. در نقطه B عمودی بر AB اخراج می‌کنیم و MB را به اندازه AB روی آن جدا می‌کنیم. در نقطه C نیز عمودی بر AC اخراج کرده و NC را روی آن به اندازه AC جدا می‌کنیم. اگر نقطه وسط MN را P بنامیم، ثابت کنید در صورت تغییر A، نقطه P همواره ثابت است.

۴) سه مثلث متساوی‌الاضلاع OAB، $OA'B'$ و $OA''B''$ در رأس O مشترک‌اند. اگر M، N و P به ترتیب اوساط $A'B$، $A''B'$ و AB'' باشند، ثابت کنید مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است.

۵) روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ و در خارج از آن مربع‌هایی می‌سازیم. اگر مراکز این مربع‌ها را M، N، P و Q بنامیم، ثابت کنید PQ و MN عمود و با یکدیگر مساوی هستند.

۶) بر روی اضلاع مثلث ABC و در خارج از آن دو مربع $ABMN$ و $ACDE$ را می‌سازیم. اگر نقطه وسط DM را P بنامیم ثابت کنید مثلث PBC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۷) روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ به ترتیب مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی یک در میان به سوی خارج و داخل می‌سازیم. رئوس این مثلث‌ها را نقاط X، Y، Z و W می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی $XYZW$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۸) نقطه دلخواه P را روی دایره محیطی مثلث ABC انتخاب می‌کنیم. از نقطه P دو عمود PE و PF را بر BC و AC فرود می‌آوریم و اوساط AE و BF را به ترتیب N و M می‌نامیم. ثابت کنید MN بر EF عمود است.

۹) بر روی اضلاع مثلث ABC ($\hat{A}<۹۰^{\circ}$) دو مربع $ABDE$ و $ACGF$ را می‌سازیم و مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین PBC ($\hat{P}=۹۰^{\circ}$) را نیز روی BC (نزدیک به A) بنا می‌کنیم. ثابت کنید مثلث PEF نیز قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۷۸)

۱۰) مستطیل $ABCD$ مفروض است. عمود BK را بر AC فرود می‌آوریم. اگر M وسط AK و N وسط CD باشند، ثابت کنید: $MN \perp BM$

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. مراکز ثقل مثلث‌های ABC، BCD، CDA، DAB را به ترتیب G_c ,G_b ,G_a ,G_d می‌نامیم. ثابت کنید خطوط DG_d ,CG_c ,BG_b ,AG_a در یک نقطه همرس‌اند و یکدیگر را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم می‌کنند.

۲) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ نقطه D وسط ضلع AB و نقطه E مرکز ثقل مثلث ADC و نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌باشند. ثابت کنید: $EO \perp CD$

۳) نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC قرار دارند. نشان دهید مراکز ثقل مثلث‌های DEF و ABC بر هم منطبق‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}$ (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۷۹)

۴) چهارضلعی $ABCD$ و نقطه دلخواه X مفروض‌اند. مراکز ثقل مثلث‌های ABC، BCD و CDA و DAB را به ترتیب G_c ,G_b ,G_a ,G_d می‌نامیم. d_a خطی است که از رأس A به موازات پاره‌خط XG_a رسم می‌شود. ثابت کنید اگر d_d ,d_c ,d_b را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم این چهار خط در یک نقطه با یکدیگر همرس خواهند بود.

۵) مجموعه S شامل $m+n$ نقطه را به دو مجموعه‌ی m و n عضوی افراز می‌کنیم. اگر G_n ,G_m به ترتیب مراکز ثقل این دو مجموعه باشند، نشان دهید مرکز ثقل S روی خط واصل G_nG_m قرار دارد و پاره‌خط G_nG_m را به نسبت $\frac{n}{m}$ تقسیم می‌کند.

۶) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع با مراکز M، N و P ساخته‌ایم. ثابت کنید مثلث MNP نیز متساوی‌الاضلاع می‌باشد.

۷) ارتفاع AD از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پای عمود وارد از نقطه D بر ضلع AC را E می‌نامیم. نقطه F را چنان روی DE انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $\frac{EF}{FD}=\frac{BD}{DC}$. نشان دهید: $AF \perp BE$

۸) بر روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ و در خارج آن چهار مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم و مراکز آن‌ها را به ترتیب $O_۴ ,O_۳ ,O_۲ ,O_۱$ می‌نامیم. اگر اقطار AC و BD از چهارضلعی با یکدیگر برابر باشند، ثابت کنید:

$$O_۱O_۳ \perp O_۲O_۴$$

۹) اقطار چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. اگر H و H' به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABO و DOC و G و G' به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های ADO و BCO باشند، نشان دهید:

$$HH' \perp GG'$$

۱۰) بر روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متشابه ABD، ACE و BCF را چنان می‌سازیم که $\widehat{DBA}=\widehat{ECA}=\widehat{FBC}, \widehat{DAB}=\widehat{CAE}=\widehat{FCB}$ باشند. اگر D' قرینه‌ی رأس D نسبت به ضلع AB باشد، ثابت کنید چهارضلعی $D'ECF$ متوازی‌الاضلاع است.

۱۱) نقطه‌ای مانند M، بر ضلع AB از مثلث ABC طوری اختیار شده است که خط راستی که مرکز دایره محیطی مثلث ABC را به نقطه‌ی میانه‌ای مثلث BCM وصل می‌کند، بر CM عمود است. اگر $\frac{BC}{BA}=k$، نسبت $\frac{BM}{BA}$ را پیدا کنید.

۱۲) در مثلث ABC، نقاط N و M به ترتیب روی اضلاع BC و AC طوری انتخاب شده‌اند که $AM=BN=AB$. اگر I و O به ترتیب مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC باشند، نشان دهید: $IO \perp MN$

۱۳) مثلث ABC و نقطه‌ی M وسط ضلع BC مفروض است. خط دلخواه ℓ، خطوط AC، AM و AB را به ترتیب در R، Q و P قطع می‌کند. نشان دهید: $\frac{AM}{AQ}=\frac{1}{2}(\frac{AC}{AR}+\frac{AB}{AP})$

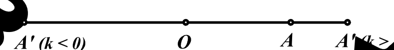
فصل هفتم

تبدیلات هندسی

۷-۱ تجانس

هدف بخش: تجانس همواره به عنوان اولین و رایج‌ترین بحث در تبدیلات هندسی مورد بررسی قرارمی‌گیرد و این نیست مگر به دلیل کاربرد فوق‌العاده آن در حل مسایل هندسه مسطحه. در این بخش با اصول و کاربردهایی چند از آن آشنا می‌شویم.

تعریف: تجانس تبدیلی است از صفحه بر روی آن که هر نقطه مانند A را پس از تجانس به مرکز نقطه O و نسبت k به نقطه‌ای مانند A' تبدیل می‌کند به طوری که نقاط O، A و A' هم خط بوده و $\frac{OA'}{OA}=k$ است. A' را مجانس A به مرکز O و نسبت k می‌نامند.



نکته ۱– مجانس هر نقطه همواره روی خطی قرار دارد که از آن نقطه و مرکز تجانس می‌گذرد.

نکته ۲– اگر نسبت تجانس (k) مثبت باشد نقاط A و A' در یک طرف مرکز تجانس (O) قرار می‌گیرند که به آن تجانس مستقیم گفته می شود.

نکته ۳– اگر نسبت تجانس (k) منفی باشد نقاط A و A' در دو طرف مرکز تجانس (O) قرار می‌گیرند که به آن تجانس معکوس گفته می‌شود.

نکته ٤– اگر $k=۰$ مجانس هر نقطه، مرکز تجانس خواهد بود و اگر $k=۱$ مجانس هر نقطه روی خود آن قرار می‌گیرد.

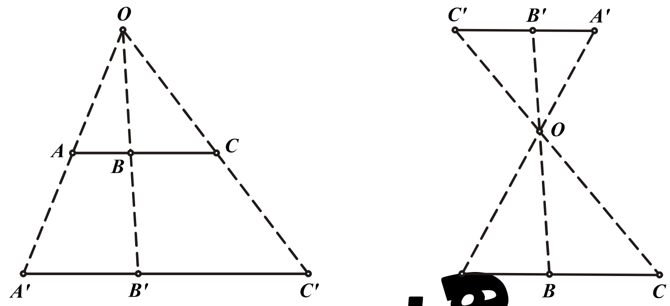
نکته ۵– تجانس به مرکز O و نسبت $k=-۱$ همان قرینه کردن نسبت به نقطه O است.

نکته ٦– اگر $A_۱, A_۲$ مجانس‌های نقطه A نسبت به مرکز O و به نسبت‌های k و $-k$ باشند، آنگاه $A_۱, A_۲$ نسبت به O قرینه یکدیگر خواهند بود.

نکته ۷– اگر $|k|>۱$ نقطه A' نسبت به A از O دورتر خواهد بود در صورتی که اگر $|k|<۱$ باشد نقطه A' نسبت به A فاصله کمتری از O خواهد داشت.

نکته ۸– اگر A' مجانس A به مرکز O و نسبت k باشد، آنگاه A نیز مجانس A' به مرکز O و نسبت $\frac{۱}{k}$ است.

مسأله ۷- ۱: سه نقطه A، B و C با یکدیگر هم خطاند. اگر A', B', C' به ترتیب مجانس‌های آن‌ها به مرکز O و نسبت k باشند، ثابت کنید A', B', C' نیز با یکدیگر هم خطاند و خط $A'B'C'$ با خط ABC موازی است.



$K > 0$ $K < 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \;\Rightarrow\; A'B' \parallel AB \\ \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k \;\Rightarrow\; B'C' \parallel BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow A'B' \parallel B'C'$$

بنابراین سه نقطه A', B', C' روی خطی موازی ABC قرار دارند.

با توجه به بحث فوق مجانس هر نقطه دیگری روی خط ABC، روی خط $A'B'C'$ واقع خواهد شد و به عبارت دیگر مجانس خط ABC خط $A'B'C'$ خواهد بود.

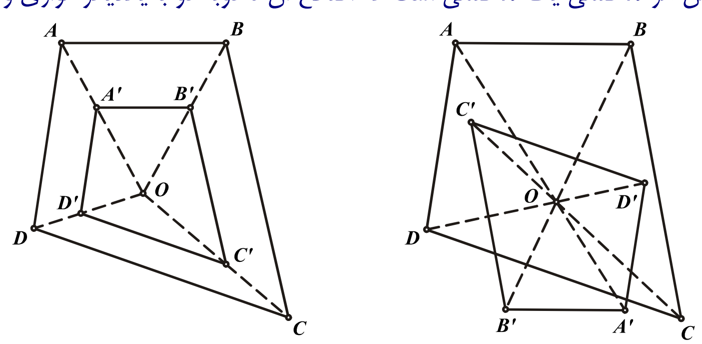
قضیه ۷- ۱: مجانس هر خط در صفحه، خطی است موازی با آن در صفحه

نکته: با کمی تأمل در مسأله پیش متوجه خواهید شد که اگر پاره‌خط $A'C'$ مجانس AC به مرکز O و نسبت k باشد داریم:

$$\frac{A'C'}{AC} = k$$

تجانس در چند ضلعی‌ها

قضیه ۷- ۲: مجانس هر n ضلعی یک n ضلعی است که اضلاع آن‌ها دوبه دو با یکدیگر موازی و متناسب‌اند.



$K > 0$ $K < 0$

با توجه به قضیه پیش، اثبات این قضیه نیز واضح است چرا که هر ضلع n ضلعی پاره‌خطی است که مجانس آن، پاره‌خطی موازی با آن خواهد بود که نسبت طول آن‌ها نیز همان نسبت تجانس است.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}=k$$

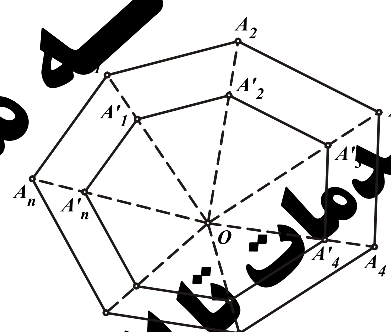
شکل سمت چپ نشان دهنده تجانس مستقیم و شکل سمت راست نشان دهنده تجانس معکوس روی چهارضلعی $ABCD$ است.

عکس قضیه: هر دو n ضلعی با اضلاع دوبه دو موازی و متناسب، با یکدیگر متجانس‌اند.

فرض: $\frac{A_1'A_2'}{A_1A_2}=\frac{A_2'A_3'}{A_2A_3}=\dots=\frac{A_n'A_1'}{A_nA_1}=k$

اگر A_1A_1' و A_2A_2' یکدیگر را در O قطع کنند از آن جا که $A_1A_2\,, A_1'A_2'$ با یکدیگر موازی و به نسبت k متناسب‌اند، نقطه O مرکز تجانس آن‌ها خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{OA_2'}{OA_2}=\frac{A_2'A_3'}{A_2A_3}=k\\ \widehat{OA_2'A'_3}=\widehat{OA_2A_3}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{OA_2'A'_3}\sim\overset{\Delta}{OA_2A_3}$$



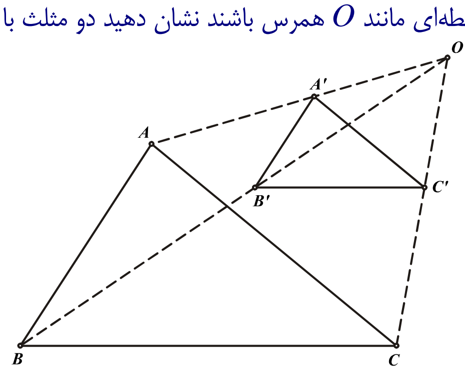
بنابراین خط A_3A_3' نیز از O می‌گذرد و O مرکز تجانس دو ضلع $A_2A_3\,, A_2'A_3'$ به نسبت k می‌باشد.

به همین ترتیب O مرکز تجانس دوبه دو اضلاع و در نتیجه مرکز تجانس دو n ضلعی و به نسبت k می‌باشد.

نکته ۱– در دو چند ضلعی متجانس، خطوطی که رئوس متناظر را به هم وصل می‌کنند در مرکز تجانس دو چند ضلعی همرس‌اند.

نکته ۲– تنها توازی اضلاع برای اثبات تجانس دو مثلث کافی است چرا که در این صورت دو مثلث متشابه و اضلاع آن ها متناسب خواهند بود.

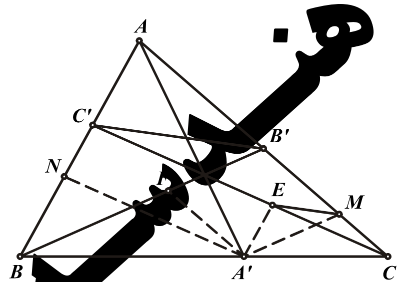
مسأله ۷-۲: برای دو مثلث مفروض ABC و $A'B'C'$ می‌دانیم $AB \parallel A'B'\,, AC \parallel A'C'$. اگر خطوط $AA'\,, BB'\,, CC'$ در نقطه‌ای مانند O همرس باشند نشان دهید دو مثلث با یکدیگر متجانس‌اند.



برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $BC \parallel B'C'$

$$\left.\begin{array}{l} A'B' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OA'}{OA} \\ A'C' \parallel AC \Rightarrow \dfrac{OC'}{OC}=\dfrac{OA'}{OA} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC} \Rightarrow B'C' \parallel BC$$

مسأله ۷-۳: سه خط سوایی AA', BB', CC' از مثلث ABC همرس‌اند. از نقطه A' خطوطی به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا به ترتیب CC' و BB' را در E و F قطع کنند. بار دیگر از نقطه A' خطوطی به موازات BB', CC' رسم می‌کنیم تا به ترتیب AC و AB را در M و N قطع کنند. نشان دهید نقاط E، F، M و N با یکدیگر هم خطاند.

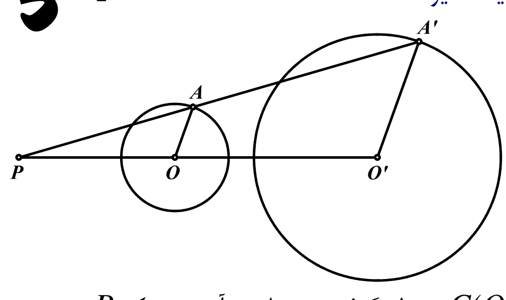


برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم هر یک از پاره‌خط‌های ME، EF، FN با $B'C'$ موازی‌اند.

از آنجا که در دو مثلث $A'EM$ و $BC'B'$ خطوط BA'، $C'E$، $B'M$ در نقطه C همرس بوده و $A'E \parallel BC'$ و $A'M \parallel BB'$ هستند، طبق مسأله پیش می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث با یکدیگر متجانس هستند و EM موازی $B'C'$ می‌باشد. به همین ترتیب NF و EF نیز موازی $B'C'$ خواهند بود.

تجانس در دایره‌ها

قضیه ۷-۳: مجانس هر دایره یک دایره است.



نقطه A را روی دایره $C(O)$ درنظر گرفته و مجانس آن به مرکز P و نسبت k را A' می‌نامیم. اگر مجانس نقطه O مرکز دایره C را نیز O' بنامیم، پاره‌خط $O'A'$ مجانس شعاع OA خواهد بود و خواهیم داشت:

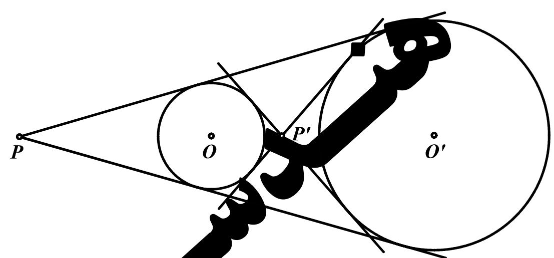
$$\frac{O'A'}{OA}=k \Rightarrow O'A'=k.OA$$

از آن جا که با تغییر A روی دایره $C(O)$ مقدار OA ثابت می‌ماند، بنابراین در عبارت فوق $O'A'$ نیز همواره ثابت است و A' روی دایره‌ای به مرکز O' تغییر می‌کند.

نکته ۱– نسبت تجانس دو دایره برابر نسبت شعاع‌های آن‌هاست.

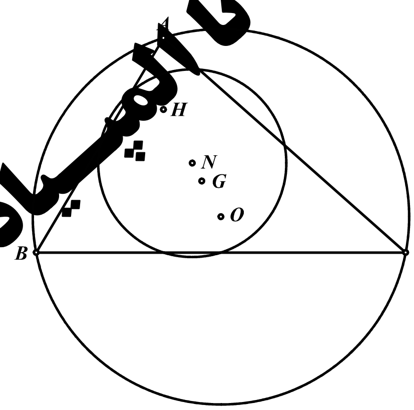
نکته ۲– محل تلاقی مماس‌های مشترک داخلی یا خارجی دو دایره، مرکز تجانس دو دایره است. چرا که هر مماس مشترک دو دایره، دو نقطه مجانس را به یکدیگر وصل می کند پس از مرکز تجانس دو دایره می‌گذرد.

نکته ۳– هر دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ به دو صورت مستقیم و معکوس با یکدیگر متجانس‌اند. که در صورت متخارج بودن دو دایره، محل تلاقی مماس‌های مشترک آن‌ها (P,P')، مراکز این تجانس‌ها خواهند بود.



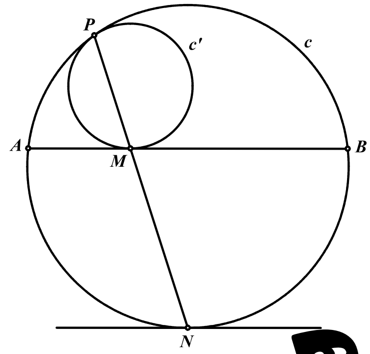
نکته ٤– در صورتی که دو دایره با یکدیگر مماس باشند، نقطه مماس یکی از مراکز تجانس دو دایره خواهد بود.

مسأله ۷–٤: نشان دهید در هر مثلث ABC دایره نه نقطه و دایره محیطی مثلث به مرکز H و نسبت ۱ به ۲ با یکدیگر متجانس‌اند.



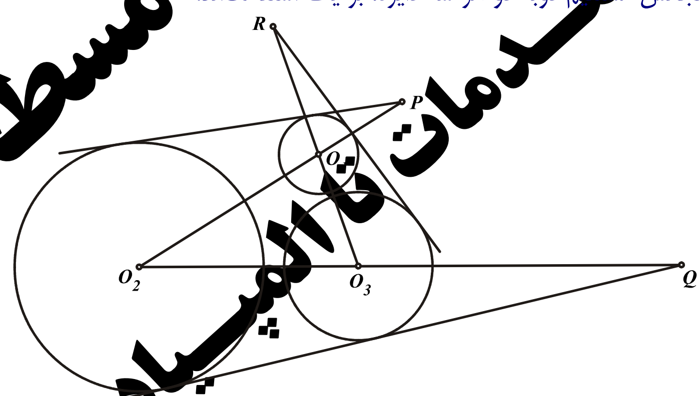
پیش از این می‌دانیم که شعاع دایره محیطی همواره دو برابر شعاع دایره نه نقطه مثلث است و از طرف دیگر H نقطه‌ای روی خط‌المرکزین دو دایره است به طوری که $\frac{HO}{HN}=\frac{۲}{۱}$. یعنی نسبت فاصله H از مراکز دو دایره برابر نسبت شعاع‌ها (نسبت تجانس) در دو دایره است. پس H مرکز تجانس مستقیم دو دایره است. توجه داشته باشید که به همین صورت مرکز ثقل مثلث (G) نیز مرکز تجانس معکوس این دو دایره است.

مسأله ۷-۵: دایره C' در نقطه P بر دایره C مماس داخل است. وتر AB از دایره C در نقطه M بر دایره C' مماس شده است. نشان دهید امتداد خط PM کمان AB را نصف می‌کند.



اگر محل تلاقی PM با دایره C را N بنامیم، P مرکز تجانس دو دایره و در نتیجه N مجانس نقطه M خواهد بود. مجانس خط AB به مرکز P و نسبت $\frac{PN}{PM}$ خط d خواهد بود که از N گذشته و با AB موازی باشد. همچنین از آنجا که AB بر دایره C' مماس است، خط d (مجانس AB) نیز بر دایره C (مجانس دایره C') مماس خواهد بود. بنابراین کمان‌های AN و BN که بین دو خط موازی قرار دارند با یکدیگر برابرند و N وسط کمان AB است.

قضیه ۷-۴: مراکز تجانس مستقیم دوبه دو هر سه دایره، بر یک استقامت‌اند.



سه دایره $C_1(O_1,R_1)$, $C_2(O_2,R_2)$, $C_3(O_3,R_3)$ را درنظر می‌گیریم و مرکز تجانس مستقیم دوایر C_1,C_2 را P و C_2,C_3 را Q و C_1,C_3 را R می‌نامیم. از آنجا که نسبت تجانس دو دایره برابر نسبت شعاع‌های آن‌هاست داریم:

$$\frac{PO_1}{PO_2}=\frac{R_1}{R_2},\frac{QO_2}{QO_3}=\frac{R_2}{R_3},\frac{RO_3}{RO_1}=\frac{R_3}{R_1}\Rightarrow\frac{PO_1}{PO_2}.\frac{QO_2}{QO_3}.\frac{RO_3}{RO_1}=1$$

پس بنابر قضیه منلائوس در مثلث $O_1O_2O_3$ نقاط P، Q و R هم خطاند.

نکته ۱- مشابه فوق می‌توان ثابت کرد دو مرکز تجانس معکوس دوبه دو هر سه دایره با مرکز تجانس مستقیم دو دایره دیگر از همین سه دایره هم خطاند.

نکته ۲- این قضیه برای هر سه شکل متجانسی صادق است. به عبارت دیگر مراکز تجانس دوبه دو هر سه شکل متجانسی با یکدیگر هم خطاند که اثبات آن نیز مشابه فوق است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقطه K بر ضلع BC مماس است. ثابت کنید وسط AK و وسط BC و مرکز دایره محاطی بر یک استقامت‌اند.

۲) دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC بر اضلاع BC، AC و AB به ترتیب در نقاط D، E و F مماس است. D'، قرینه‌ی نقطه‌ی D نسبت به نیمساز داخلی زاویه‌ی A است و نقاط E' و F' نیز به ترتیب مشابه تعریف می‌شوند. اگر M، N و P به ترتیب اوساط اضلاع BC، AC و AB باشند ثابت کنید PF', NE', MD' همرس‌اند.

۳) دایره محاطی داخلی مثلث ABC بر اضلاع BC، AC و AB به ترتیب در نقاط D، E و F مماس است. اگر F', E', D' به ترتیب اوساط کمان‌های BC، AC و AB از دایره محیطی مثلث ABC باشند، ثابت کنید FF', EE', DD' همرس‌اند.

۴) اگر P نقطه‌ای در صفحه‌ی مثلث ABC و G_A، G_B و G_C به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های PBC، PCA و PAB باشند، ثابت کنید AG_A، BG_B و CG_C همرس‌اند.

۵) رئوس A، B و C از مثلث ABC را نسبت به اضلاع روبه‌رو قرینه می‌کنیم تا نقاط D، E و F بدست آیند. F', E', D' پای تصاویر N – مرکز دایره نه نقطه‌ی مثلث ABC– بر اضلاع BC، AC و AB می‌باشند.

ثابت کنید دو مثلث DEF و $D'E'F'$ به مرکز G – مرکز ثقل مثلث ABC– و نسبت ۴ متجانس هستند.

۶) مثلث ABC مفروض است. نقاط A', A'' بر روی AC و AB قرار داشته و $A'A''$ با BC موازی است. نقاط B' و B'' روی AB و BC قرار داشته و $B'B''$ با AC موازی است. نقاط C' و C'' روی BC و AC قرار داشته و $C'C''$ با AB موازی است. نقاط برخورد $B'C''$ با BC را D و $C'A''$ با AC را E و $A'B''$ با AB را F می‌نامیم. ثابت کنید سه نقطه‌ی D، E و F بر یک خط واقع‌اند.

۷) نقاط D، E و F اوساط اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC می‌باشند. قرینه نقطه دلخواه P را نسبت به سه نقطه‌ی D، E و F به ترتیب K، L و M می‌نامیم. ثابت کنید پاره‌خط‌های AK، BL و CM در یک نقطه مانند Q همرس‌اند و در حالتی که نقطه P بر یک دایره حرکت نماید مکان هندسی Q را پیدا کنید.

۸) ثابت کنید که خط‌های سیمسون دو انتهای یک قطر از دایره محیطی مثلث ABC، یکدیگر را روی دایره‌ی نه نقطه ی مثلث مفروض قطع می‌کنند.

۹) مثلث ABC با مساحت S مفروض است. فرض کنید دو مثلث با مساحت‌های S_1, S_2 یکی محاط و دیگری محیط بر مثلث ABC باشند طوری که اضلاع آن‌ها نظیر به نظیر موازی باشند. ثابت کنید: $S^2 = S_1.S_2$

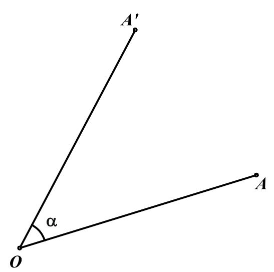
۱۰) می‌دانیم سه خط که هر کدام یک رأس مثلث را به محل تماس دایره‌ی محاطی خارجی با ضلع روبه‌رو وصل می‌کند در یک نقطه به نام نقطه‌ی ناگل همرس‌اند. فرض کنید G مرکز ثقل، I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی، J مرکز دایره محاطی داخلی مثلث میانه‌ای و K نقطه‌ی ناگل مثلث مفروضی باشند. ثابت کنید که نقاط G، I، J و K بر یک خط واقع‌اند و $GK = ۲IG$,$IJ = JK$.

۱۱) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض است. دایره‌ای چنان رسم می‌کنیم که بر اضلاع AB و AC مماس بوده و همچنین در نقطه A' بر دایره محیطی مثلث ABC مماس داخل باشد. نقاط B' و C' نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. نشان دهید سه خط AA', BB', CC' همرس‌اند.

۷– ۲ دوران و تجانس مارپیچی

هدف بخش: پیش‌تر در بخش بردار دوران با مفهوم اولیه دوران آشنا شده‌ایم. در این بخش با تبدیل دوران و تبدیل تجانس مارپیچی که ترکیبی از دو تبدیل تجانس و دوران است آشنا شده و نحوه کاربرد آن‌ها در حل مسایل مختلف را می‌بینیم.

دوران



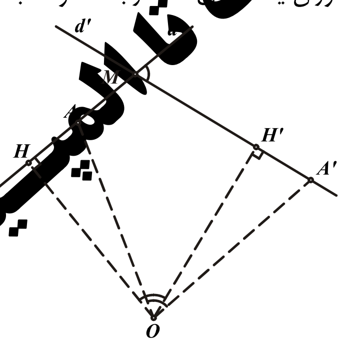
تعریف: دوران تبدیلی است از صفحه بر روی آن که با مشخص بودن مرکز دوران (نقطه O) و زاویه دوران (α) نقطه A را به نقطه A' تبدیل می‌کند به طوری که $OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$

نکته ۱– زاویه دوران همواره جهت‌دار است. یعنی زاویه دوران یا ساعتگرد است و یا پاد ساعتگرد و زوایای ساعتگرد را با علامت منفی و زوایای پاد ساعتگرد را با علامت مثبت نمایش می دهیم. بنابراین جهت α را همواره درنظر داشته باشید.

نکته ۲– در تبدیل دوران تنها نقطه‌ای که پس از تبدیل ثابت مانده و تغییری نمی‌کند، مرکز دوران است.

قضیه ۷– ۵: دوران یافته α درجه خط، یک خط است که با آن زاویه α درجه می‌سازد.

خط d و مرکز دوران O را درنظر می‌گیریم. پای عمود وارد از O بر d را H می‌نامیم و نقطه دلخواه A را روی خط d فرض می‌کنیم. اگر H' و A' دوران یافته‌های α درجه H و A به مرکز O باشند داریم:

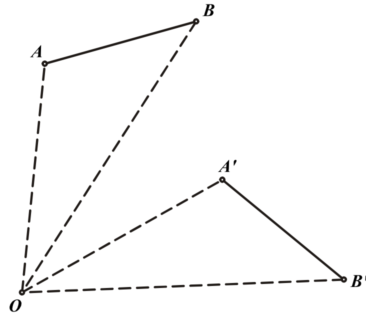


$$\left.\begin{array}{r} \widehat{HOH'} = \widehat{AOA'} = \alpha \Rightarrow \widehat{HOA} = \widehat{H'OA'} \\ OH = OH' \\ OA = OA' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{HOA} = \overset{\Delta}{H'OA'} \Rightarrow \widehat{A'H'O} = 90^\circ$$

بنابراین اگر A هر نقطه‌ای روی خط d باشد A' همواره روی خطی عمود بر OH' در نقطه H' (خط d') خواهد بود. پس هر نقطه روی خط d به نقطه‌ای روی خط d' تبدیل می‌شود و خط d' دوران یافته خط d می باشد. همچنین به دلیل محاطی بودن چهارضلعی $OHMH'$ زاویه بین دو خط، برابر α است.

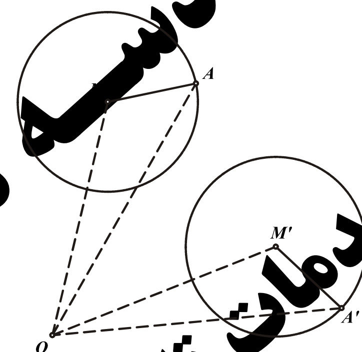
نتیجه: بنابر قضیه فوق تبدیل دوران همواره زوایا را حفظ می‌کند و به عبارت دیگر اگر A'، B'، C' دوران یافته‌های α درجه A، B و C باشند آن گاه $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

قضیه ۷- ٦: تبدیل دوران طول پاره‌خط یا فاصله بین هر دو نقطه را حفظ می‌کند.

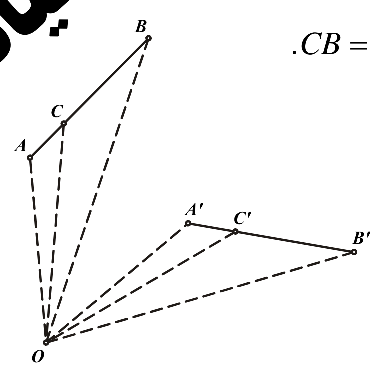


اثبات این قضیه نیز مشابه اثبات قضیه پیش با استفاده از تساوی مثلث‌ها صورت می‌پذیرد که به خود شما واگذار می‌شود.

نتیجه ۱- با توجه به قضیه فوق دوران یافته‌ی هر دایره، دایره‌ای برابر با آن است چون $M'A' = MA$ و با تغییر A روی دایره‌ی (M) طول $M'A'$ ثابت بوده و A' روی دایره‌ای به مرکز M' تغییر خواهد کرد.

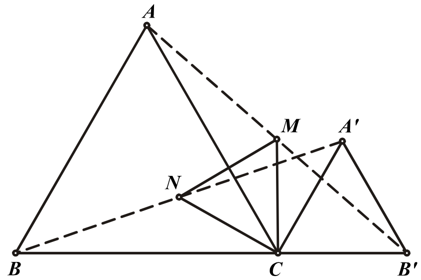


نتیجه ۲- اگر $A'B'$ دوران یافته‌ی AB باشد، نقاط C' و C به ترتیب روی این دو پاره‌خط دوران یافته‌های یکدیگرند اگر و فقط اگر $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$. چرا که اگر C روی AB باشد دوران یافته آن، C' روی $A'B'$ بوده و $AC = A'C'$ و $CB = C'B'$.



نتیجه ۳- دوران یافته هر مثلث، مثلثی است همنهشت با آن و طی این تبدیل تمام نقاط، خطوط و دوایر مربوط به مثلث اول به نقاط، خطوط و دوایر مربوط به مثلث دوم تبدیل می‌شوند. از این جمله نقاط O، G، H و I و خط اویلر و دایره نه نقطه و محیطی دو مثلث است که به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

مسأله ۷-۶: روی امتداد ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C$ را طوری می‌سازیم که A و A' در یک طرف BC قرار گیرند. اگر M و N به ترتیب اوساط پاره‌خط‌های $A'B\,,AB'$ باشند، ثابت کنید MNC متساوی‌الاضلاع است.



با دوران به مرکز نقطه C و با زاویه ۶۰° در جهت پاد ساعتگرد، نقطه B' به A' و نقطه A به B تبدیل می‌شود، پس پاره‌خط $B'A$ به $A'B$ تبدیل می‌شود.

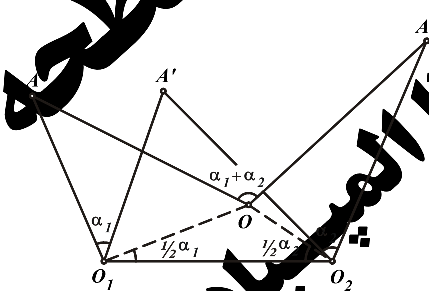
با توجه به نتیجه ۲ قضیه پیش از رابطه‌ی $\frac{B'M}{MA}=\frac{A'N}{NB}$ نتیجه می‌گیریم که نقطه M به N تبدیل می‌شود یعنی $CM=CN$ و $\widehat{MCN}=۶۰^\circ$. در نتیجه مثلث CMN متساوی‌الاضلاع است.

قضیه ۷- ۷: ترکیب دو دوران یکی به مرکز $O_۱$ و زاویه $\alpha_۱$ و دیگری به مرکز $O_۲$ و زاویه $\alpha_۲$ همواره دورانی است با زاویه $\alpha_۱+\alpha_۲$.

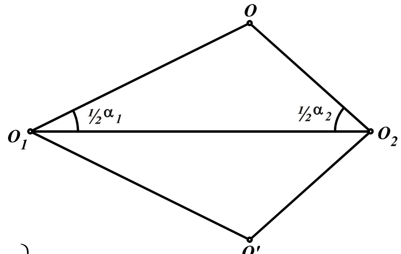
نکته: اگر $\alpha_۱+\alpha_۲=۳۶۰^\circ$ ترکیب دو دوران یک تبدیل انتقال خواهد بود.

قضیه ۷- ۸: اگر O مرکز دوران معادل با ترکیب دو دوران به مراکز $O_۱\,,O_۲$ و با زوایای $\alpha_۱\,,\alpha_۲$ باشد داریم:

$$\widehat{OO_۱O_۲}=\frac{\alpha_۱}{۲} \text{ و } \widehat{O_۱O_۲O}=\frac{\alpha_۲}{۲}$$



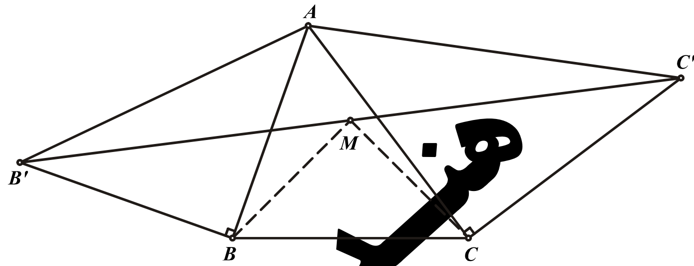
نقطه O را با شرایط مذکور در قضیه، درنظر می‌گیریم. با دوران به مرکز $O_۱$ و زاویه $\alpha_۱$، نقطه O به O' منتقل می‌شود. بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l} O_۱O=O_۱O' \\ \widehat{OO_۱O_۲}=\widehat{O_۲O_۱O'}=\frac{\alpha_۱}{۲} \\ O_۱O_۲=O_۱O_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OO_۱O_۲}=\overset{\Delta}{O'O_۱O_۲} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} O_۲O=O_۲O' \\ \widehat{O_۱O_۲O}=\widehat{O'O_۲O_۱}=\frac{\alpha_۲}{۲} \end{array}\right.$$

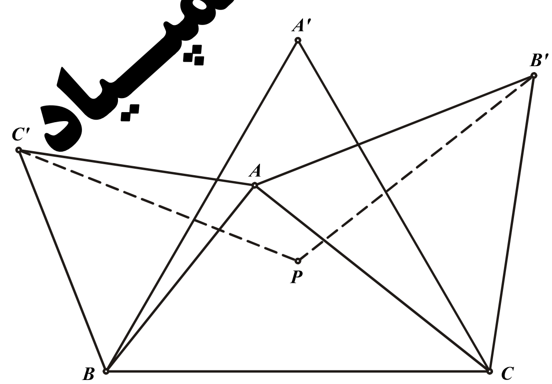
بنابراین با دوران به مرکز O_2 و زاویه α_2، نقطه O' به O منتقل می‌شود. پس دوران معادل با ترکیب این دو دوران نقطه O را به خودش تبدیل می‌کند. در نتیجه این نقطه، مرکز دوران معادل با این ترکیب دوران است.

مسأله ۷- ۷: در مثلث ABC مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ACC', ABB' را خارج آن بنا می‌کنیم به طوری که $\widehat{ABB'} = \widehat{ACC'} = 90^\circ$. ثابت کنید اگر M وسط $B'C'$ باشد مثلث MBC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



با دوران به مرکز C و زاویه 90° در جهت ساعتگرد نقطه‌ی C' به A و با دوران به مرکز B و زاویه 90° در جهت پاد ساعتگرد، نقطه‌ی A به B' تبدیل می شود. ترکیب این دو تبدیل، دورانی است با زاویه 180° که نقطه C' را به B' تبدیل می‌کند. پس مرکز آن وسط پاره‌خط $B'C'$ یعنی نقطه M است. از طرفی طبق قضیه ۷- ۸ داریم: $\widehat{MCB} = \widehat{CBM} = 45^\circ$. بنابراین مثلث MBC متساوی الساقین و قائم‌الزاویه است.

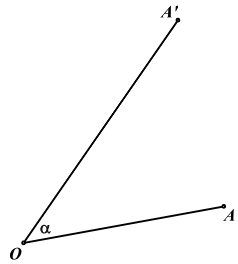
مسأله ۷- ۸: روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC، مثلث‌های متساوی الاضلاع ACB', ABC' را در خارج آن می‌سازیم. اگر $A'BC$ مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد که A و A' در یک طرف BC قرار گرفته باشند و P مرکز ثقل مثلث $A'BC$ باشد، ثابت کنید مثلث $PB'C'$ متساوی‌الساقین است و $\widehat{B'PC'} = 120^\circ$.



با دوران به مرکز C و زاویه 60° در جهت پاد ساعتگرد و سپس دوران به مرکز B و زاویه 60° در جهت پاد ساعتگرد نقطه B' به C' تبدیل می شود. طبق قضیه ۷- ۸ مرکز دوران معادل با این ترکیب دوران نقطه P است زیرا $\widehat{PCB} = \widehat{CBP} = 30^\circ$. پس دوران به مرکز P و زاویه ۱۲۰ درجه، نقطه B' را به C' تبدیل می‌کند. در نتیجه مثلث $PB'C'$ متساوی‌الساقین است و $\widehat{B'PC'} = 120^\circ$.

تجانس مارپیچی

تعریف: تجانس مارپیچی تبدیلی است از صفحه بر روی آن که با مشخص بودن مرکز (نقطه O) و زاویه (α) و نسبت آن (k)، نقطه A را به نقطه A' تبدیل می‌کند، به طوری که $\widehat{AOA'}=\alpha$, $\frac{OA'}{OA}=k$

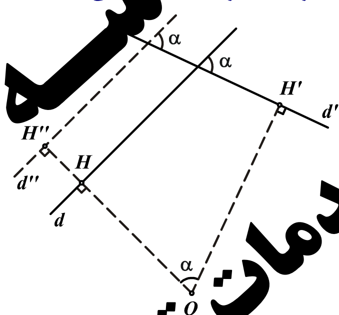


به عبارت دیگر تجانس مارپیچی، ترکیب تجانس و دوران است به این صورت که نقطه A را به مرکز O و با زاویه α دوران می‌دهیم و سپس نقطه حاصل را به نسبت k و به همان مرکز O تجانس می‌دهیم تا نقطه A' حاصل شود.

نکته ۱– در تجانس مارپیچی نیز مانند دوران زاویه α همواره جهت‌دار است.

نکته ۲– در تبدیل تجانس مارپیچی تنها نقطه‌ای که پس از تبدیل ثابت مانده و تغییری نمی‌کند، مرکز تجانس مارپیچی است.

قضیه ۷– ۹: مجانس مارپیچی هر خط با زاویه α و نسبت k خطی است که با آن زاویه α درجه می‌سازد.

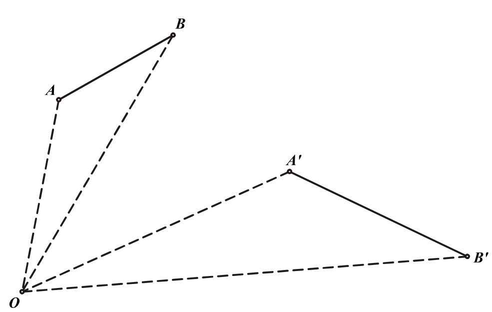


از آنجا که تبدیل تجانس مارپیچی ترکیبی از دو تبدیل تجانس و دوران است و مجانس خط d (خط d'') خطی موازی با آن و دوران یافته d'' نیز (خط d') زاویه α درجه با d'' می‌سازد، بنابراین مجانس مارپیچی خط d (خط d') خطی است که با آن زاویه α درجه می‌سازد.

نتیجه: بنابر قضیه فوق تبدیل تجانس مارپیچی همواره زوایا را حفظ می‌کند، یعنی زاویه بین اجزاء شکل پس از تبدیل ثابت باقی می‌ماند.

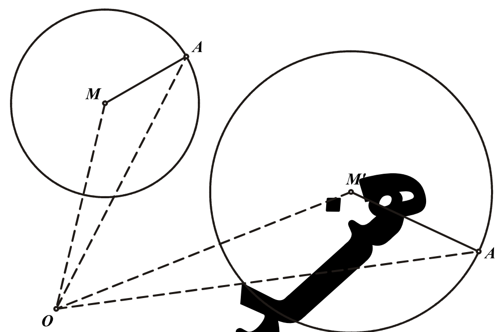
قضیه ۷– ۱۰: تبدیل تجانس مارپیچی به نسبت k، طول پاره‌خط یا فاصله بین هر دو نقطه را k برابر می‌کند.

$$\frac{A'B'}{AB}=k$$

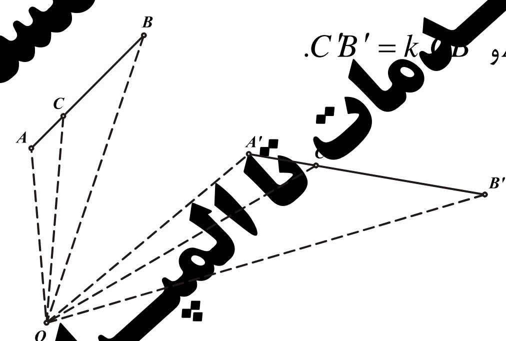


می‌دانیم که دوران، طول را حفظ کرده و تجانس به نسبت k نیز طول را k برابر می‌کند. بنابراین تبدیل تجانس مارپیچی نیز که ترکیبی از دو تبدیل فوق است، طول هر پاره‌خط یا فاصله هر دو نقطه را k برابر می‌کند.

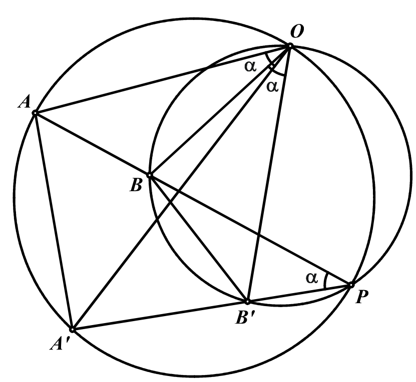
نتیجه ۱– با توجه به قضیه پیش مجانس مارپیچی هر دایره‌ای با زاویه α و نسبت k، دایره‌ای با شعاع k برابر شعاع آن دایره است. چرا که $M'A'=k.MA$ و با تغییر A روی دایره‌ی (M) طول $M'A'$ ثابت بوده و A' روی دایره‌ای به مرکز M' تغییر خواهد کرد.



نتیجه ۲– اگر $A'B'$ مجانس مارپیچی AB باشد، نقاط C' و C به ترتیب روی این دو پاره‌خط تبدیل یافته‌های یکدیگرند اگر و فقط اگر $\frac{AC}{CB}=\frac{A'C'}{C'B'}$. چرا که اگر C روی AB باشد تبدیل یافته آن C' روی $A'B'$ بوده و $A'C'=k.AC$ و $C'B'=k.CB$.



قضیه ۷–۱۱: اگر پاره‌خط $A'B'$ مجانس مارپیچی پاره‌خط AB باشد و محل تلاقی این دو خط P باشد آنگاه مرکز تجانس مارپیچی بر محل برخورد دوایر محیطی مثلث‌های PBB', PAA' قرار دارد.



فرض می‌کنیم زاویه تجانس مارپیچی که AB را به $A'B'$ تبدیل کرده α و نسبت آن k باشد. اگر دوایر محیطی دو مثلث PBB', PAA' یکدیگر را در O قطع کنند داریم:

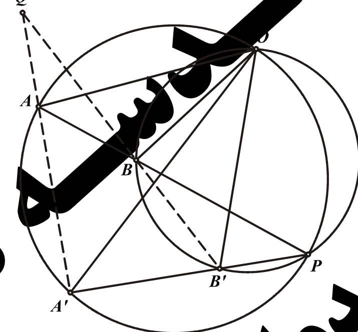
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{OAB}=\widehat{OA'B'}\\ \widehat{OBA}=\widehat{OB'A'}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{OAB}\sim \overset{\Delta}{OA'B'}\Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}=k$$

$$\widehat{AOA'}=\frac{۱}{۲}\widehat{AA'}=\widehat{APA'}=\alpha$$

$$\widehat{BOB'}=\frac{۱}{۲}\widehat{BB'}=\widehat{BPB'}=\alpha$$

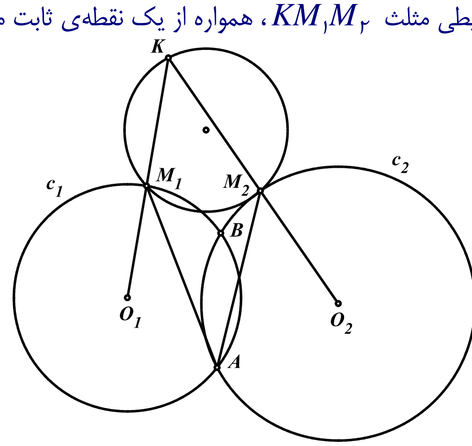
از روابط اخیر نتیجه می‌شود نقطه O، همان مرکز تجانس مارپیچی مذکور است.

نکته: در قضیه پیش، نقطه O مرکز تجانس مارپیچی است که پاره‌خط AA' را به پاره‌خط BB' تبدیل می‌کند.



چرا که طبق قضیه پیش مرکز تجانس مارپیچی که AA' را به BB' تبدیل می‌کند بر محل برخورد دوایر محیطی مثلث‌های $QAB, QA'B'$ قرار دارد و از آنجا که نقطه O همان نقطه میشل (مسأله بخش ۴-۳) چهارضلعی کامل $ABB'A'$ است پس دوایر محیطی مثلث‌های QAB و $QA'B'$ نیز از O می‌گذرند و بنابراین O مرکز تجانس مارپیچی است که AA' را به BB' تبدیل می‌کند.

مسأله ۷- ۹: فرض کنید $C_۱, C_۲$ دو دایره به مرکزهای $O_۱, O_۲$ باشند که در نقطه‌ی A یکدیگر را قطع کرده‌اند. زاویه ثابت α به رأس A را درنظر می‌گیریم. نقاط برخورد اضلاع این زاویه با دایره‌های $C_۱, C_۲$ را به ترتیب $M_۱, M_۲$ و نقطه برخورد خط‌های O_1M_1, O_2M_2 را K می‌نامیم. نشان دهید که وقتی این زاویه حول نقطه A دوران کند، دایره‌ی محیطی مثلث $KM_۱M_۲$، همواره از یک نقطه‌ی ثابت می‌گذرد.



محل برخورد دوم دو دایره C_1, C_2 را B می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \widehat{M_1AB}+\widehat{BAM_2} = \frac{1}{2}\widehat{M_1B}+\frac{1}{2}\widehat{BM_2}\\ \widehat{O_1KO_2}=\widehat{O_1BO_2}-(\widehat{M_1O_1B}+\widehat{BO_2M_2})\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{O_1KO_2}=\widehat{O_1BO_2}-2\alpha$$

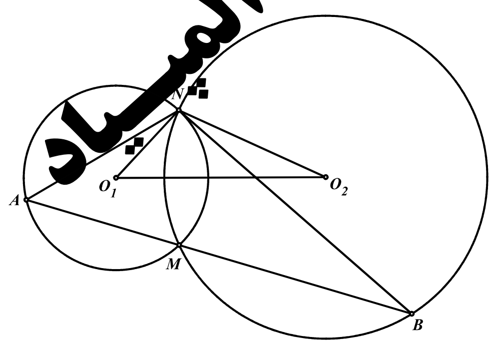
با تغییر زاویه α حول نقطه A، زاویه بین دو پاره‌خط O_1M_1 و O_2M_2 و نسبت آن‌ها ثابت می‌ماند. پس تجانس مارپیچی وجود دارد که پاره‌خط O_1M_1 را به O_2M_2 تبدیل می‌کند. طبق قضیه ۷- ۱۱ دایره محیطی مثلث KM_1M_2 همواره از مرکز این تجانس مارپیچی می‌گذرد.

قضیه ۷- ۱۲: ترکیب دو تجانس مارپیچی به مراکز O_1, O_2 و زوایای α_1, α_2 و نسبت‌های k_1, k_2، یک تجانس مارپیچی است با زاویه $\alpha_1+\alpha_2$ و نسبت $k_1.k_2$.

نکته: قضیه فوق برای n تجانس مارپیچی نیز قابل تعمیم است.

مسأله ۷- ۱۰: سه دایره C_1، C_2 و C_3 در نقطه N همرس‌اند. دومین نقطه برخورد دایره‌های C_1 و C_2، C_2 و C_3، C_3 و C_1 را به ترتیب M_1, M_2, M_3 می‌نامیم. A_1 نقطه دلخواهی روی دایره C_1 است. A_1M_1 با دایره C_2 در نقطه A_2 و A_2M_2 با دایره C_3 در نقطه A_3 و A_3M_3 با دایره C_1 در نقطه A_4 برخورد دارد. ثابت کنید A_4 بر A_1 منطبق است.

لم: دو دایره (O_1, r_1) و (O_2, r_2) در نقاط M و N متقاطع هستند. خط دلخواهی که از M می‌گذرد دو دایره (O_1) و (O_2) را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید با تجانس مارپیچی به مرکز N، زاویه $\widehat{O_1NO_2}$ و نسبت $\frac{r_2}{r_1}$، نقطه A به B تبدیل می‌شود.

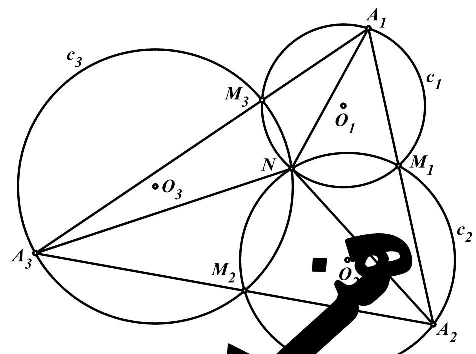


برای اثبات لم نشان می‌دهیم دو مثلث NO_1O_2 , NAB متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{NO_1O_2}=\frac{1}{2}\widehat{NO_1M}=\widehat{NAM}\\ \widehat{NO_2O_1}=\frac{1}{2}\widehat{NO_2M}=\widehat{NBM}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{NO_1O_2}\sim\overset{\Delta}{NAB}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\widehat{O_1NO_2}=\widehat{ANB}\\ \frac{NB}{NA}=\frac{NO_2}{NO_1}=\frac{r_2}{r_1}\end{array}\right.$$

بنابراین لم اثبات شد.

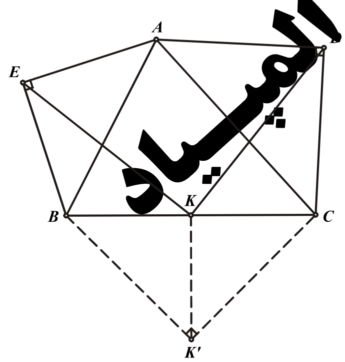
اثبات مسأله: مراکز سه دایره C_1، C_2 و C_3 را به ترتیب O_1، O_2 و O_3 و طول شعاع آن‌ها را R_1، R_2 و R_3 می‌نامیم. سه تجانس مارپیچی به مرکز N و زوایای ساعتگرد $\widehat{O_1NO_2}$، $\widehat{O_2NO_3}$ و $\widehat{O_3NO_1}$ و به نسبت‌های $\frac{R_2}{R_1}$، $\frac{R_3}{R_2}$ و $\frac{R_1}{R_3}$ را به ترتیب T_1، T_2، T_3 می‌نامیم.



طبق لم اثبات شده، با تبدیل T_1، نقطه A_1 به A_2 و با تبدیل T_2 نقطه A_2 به A_3 و با تبدیل T_3 نقطه A_3 به A_4 تبدیل می‌شود. ترکیب این سه تبدیل به همین ترتیبی که ذکر شده، تجانس مارپیچی است با زاویه $\widehat{O_1NO_2}+\widehat{O_2NO_3}+\widehat{O_3NO_1}=360^\circ$ و به نسبت $\frac{R_2}{R_1}.\frac{R_3}{R_2}.\frac{R_1}{R_3}=1$.

یعنی این تبدیل هر نقطه را به خودش منتقل می‌کند (تبدیل همانی است) از طرفی این تبدیل نقطه A_1 را به A_4 تبدیل می کند و در نتیجه A_4 بر A_1 منطبق است.

مسأله ۷- ۱۱: روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC و در خارج آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین DAC و EAB را بنا می‌کنیم ($\widehat{ADC}=\widehat{AEB}=90^\circ$) اگر K وسط ضلع BC باشد ثابت کنید مثلث KDE قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



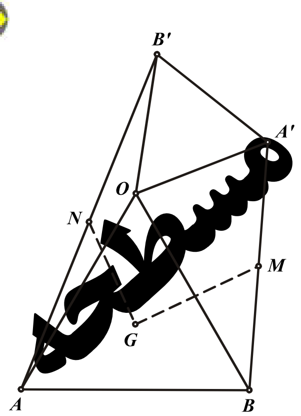
مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین BCK' را در خارج مثلث ABC رسم می‌کنیم به طوری که $\widehat{BK'C}=90^\circ$. با تجانس مارپیچی به مرکز C و زاویه ۴۵ درجه در جهت پاد ساعتگرد و نسبت $\sqrt{2}$، نقطه D به A تبدیل می‌شود و با تجانس مارپیچی به مرکز B و زاویه ۴۵ درجه در جهت پادساعتگرد و نسبت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ نقطه A به E منتقل می‌شود. ترکیب این دو تبدیل، تجانس مارپیچی است با زاویه 90° پاد ساعتگرد و نسبت یک که نقطه D را به E منتقل می‌کند.

از طرف دیگر با تجانس مارپیچی به مرکز C نقطه K به K' و با تجانس مارپیچی به مرکز B، نقطه K' دوباره به K منتقل می‌شود. بنابراین نقطه K مرکز تجانس مارپیچی معادل با ترکیب دو تبدیل اولیه بوده است. در مجموع نتیجه می‌گیریم $\frac{DK}{EK}=1, \widehat{DKE}=90^\circ$ و مثلث KDE قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

قضیه ۷- ۱۳: ترکیب یک تجانس به مرکز O_1 و نسبت K با یک دوران به مرکز O_2 و زاویه α، یک تجانس مارپیچی با زاویه α و نسبت k است.

نکته: در قضیه فوق، اگر تبدیل تجانس را T_1 و تبدیل دوران را T_2 بنامیم، تبدیل $T_1 o T_2$ نیز مانند $T_2 o T_1$ یک تجانس مارپیچی است اما لزوماً این دو تبدیل برابر نیستند.

مسأله ۷- ۱۲: OAB و $OA'B'$ مثلث های متساوی‌الاضلاعی هستند که دارای یک جهت می باشند. نقطه G مرکز ثقل مثلث OAB و نقاط M و N به ترتیب اوساط پاره‌خطهای $AB', A'B$ می‌باشند. ثابت کنید دو مثلث GMB', GNA' متشابه‌اند.



با یک تجانس به مرکز G و نسبت ۲ و سپس یک دوران به مرکز O و زاویه ۶۰ درجه در جهت پاد ساعتگرد، نقطه M به B' تبدیل می‌شود. با این تبدیل نقطه G ثابت می‌ماند بنابراین G مرکز تجانس مارپیچی به زاویه ۶۰ درجه در جهت پاد ساعتگرد و با نسبت ۲ است که M را به B' تبدیل می‌کند یعنی داریم:

$$\widehat{MGB'}=60^\circ, \frac{GB'}{GM}=2 \qquad (1)$$

همچنین با یک تجانس به مرکز A و نسبت ۲ و سپس یک دوران به مرکز O و زاویه ۶۰ درجه در جهت ساعتگرد، نقطه N به A' تبدیل می‌شود. این تبدیل نیز نقطه G را ثابت نگه می‌دارد پس G مرکز تجانس مارپیچی به زاویه ۶۰ درجه در جهت ساعتگرد و نسبت ۲ است که نقطه N را به A' تبدیل می‌کند. یعنی داریم:

$$\widehat{NGA'}=60^\circ, \frac{GA'}{GN}=2 \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که دو مثلث GMB' و GNA' با یکدیگر متشابه‌اند.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABM و ACN را رسم می‌کنیم به طوری که $\widehat{MAB}=\widehat{NAC}=90^\circ$. همچنین روی ضلع BC، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه PBC را طوری رسم می‌کنیم که $\widehat{BPC}=90^\circ$ و نقاط A و P در یک طرف BC باشند. نشان دهید نقاط P، M و N رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه هستند. (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۷۸)

۲) فاصله نقطه P که داخل مربع $ABCD$ قرار دارد، از رئوس A، B و C به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. مساحت مربع $ABCD$ را بدست آورید.

۳) نقطه E در صفحه متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و بیرون آن طوری قرار گرفته که مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است. اگر P نقطه‌ای دلخواه باشد نشان دهید $PC+PD+AD\geq PE$

۴) روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC و در خارج آن مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین DAC و EAB را بنا می‌کنیم ($\widehat{ADC}=\widehat{AEB}=90^\circ$) اگر K وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید مثلث KDE، متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

۵) روی اضلاع AB، BC، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$ و در خارج آن چهار مربع می‌سازیم و مراکز آن‌ها را به ترتیب P، Q، R و S می‌نامیم. ثابت کنید دو پاره‌خط PQ و RS با هم برابر و بر هم عمودند.

۶) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC، CDE و EFG طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که D وسط AG است. ثابت کنید BFD متساوی‌الاضلاع است. (برای نام‌گذاری رئوس مثلث‌ها، جهت ثابتی را درنظر بگیرید)

۷) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع PBC، QCA و RAB روی اضلاع مثلث ABC طوری ساخته شده‌اند که P، Q و R خارج آن قرار دارند. اگر D، E و F مراکز ثقل این مثلث‌ها باشند، ثابت کنید DEF مثلثی متساوی‌الاضلاع است که آن را مثلث ناپلئون مثلث ABC می‌نامیم.

۸) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع OA_1A_2، OB_1B_2 و OC_1C_2 در رأس O مشترک هستند. ثابت کنید اوساط پاره‌خط‌های A_2B_1، B_2C_1 و C_2A_1 رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. (برای نام‌گذاری مثلث‌ها جهت ثابتی را درنظر بگیرید.)

۹) مثلث‌های متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه ABC'، BCA' و CAB' را در خارج مثلث ABC طوری بنا می‌کنیم که داشته باشیم: $\widehat{AC'B}=\widehat{BA'C}=\widehat{CB'A}=90^\circ$. ثابت کنید دو پاره‌خط AA' و $B'C'$ با هم برابر و بر هم عمودند.

۱۰) C_1 و C_2 دو دایره متقاطع در نقاط M و N هستند. A را نقطه‌ای دلخواه بر C_1 می‌گیریم و دومین نقطه برخورد خط AM با دایره C_2 را B، دومین نقطه برخورد خط BN با C_1 را C، دومین نقطه برخورد CM با C_2 را D، و بالاخره دومین نقطه برخورد DN با C_1 را E می‌نامیم. ثابت کنید که طول AE به انتخاب نقطه اولیه A بر C_1 بستگی ندارد.

۱۱) از نقطه دلخواه P بر روی دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، سه خط موازی اضلاع BC، CA و AB رسم می‌کنیم تا به ترتیب خطوط CA، AB و BC را در نقاط D، E و F قطع کنند. ثابت کنید این سه نقطه بر یک خط واقع‌اند.

۱۲) دو مثلث همنهشت ABC و $A'B'C'$ در یک دایره محاط می‌باشند. نقاط برخورد اضلاع متناظر را D، E و F می‌نامیم. ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF متشابه بوده و مرکز ارتفاعی مثلث DEF بر O، مرکز دایره محیطی مثلث ABC منطبق است.

۱۳) نقطه P بر کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار دارد. اگر $I_۱$ و $I_۲$ مراکز دوایر محاطی مثلث‌های PAB و PAC باشند، ثابت کنید دایره محیطی مثلث $PI_۱I_۲$، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

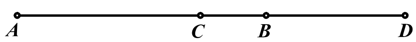
۱۴) P نقطه‌ای داخل چهارضلعی $ABCD$ است به طوری که $\widehat{PAD} = \widehat{PBC}$, $\widehat{PDA} = \widehat{PCB}$. اگر K محل برخورد عمود منصف‌های دو پاره خط AB و CD باشد ثابت کنید $\widehat{DKC} = ۲\widehat{DAP}$.

۱۵) دو دایره مفروض یکدیگر را در نقاط K و L قطع می‌کنند. خط متغیری که از K می‌گذرد دو دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند. اوساط دو کمان BL و AL که K بر آن قرار ندارد را به ترتیب C و D می‌نامیم. ثابت کنید دایره محیطی مثلث CKD از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

۷– ۳ تقسیم همساز یا توافقی

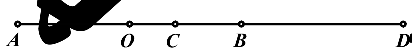
هدف بخش: تقسیم همساز یکی از مباحث پیشرفته هندسه مسطحه است که البته از نوع تبدیلات هندسی نمی‌باشد اما از آنجا که این بحث مدخل و پیش نیاز ورود به تبدیلات مهمی چون قطبی می‌باشد بنابراین در این بخش نگاهی خواهیم داشت به مبانی تقسیم همساز و به دنبال آن برخی خواص و کاربردهای جالب دستگاه‌های توافقی را نیز مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تعریف: چنانچه نقاط C و D پاره‌خط AB را به طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم کنند، این چهار نقطه را یک گستره‌ی همساز یا توافقی می‌نامند و به صورت $(ABCD) = -۱$ نیز نمایش داده می‌شود. همچنین نقاط C و D را مزدوج همساز یا توافقی یکدیگر نسبت به پاره‌خط AB می‌نامند.



$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$$

قضیه ۷–۱۴: اگر داشته باشیم $(ABCD)=-۱$ و نقطه O وسط پاره‌خط AB باشد آنگاه خواهیم داشت $OA^۲=OC.OD$ و بالعکس.



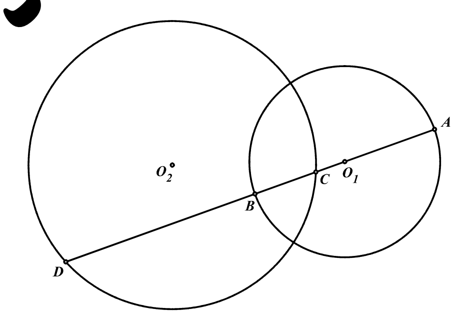
$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}\Rightarrow\frac{OA+OC}{OB-OC}=\frac{OD+OA}{OD-OB}\Rightarrow\frac{OA+OC}{OA-OC}=\frac{OD+OA}{OD-OA}$$

با ترکیب در مخرج روی عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\frac{OA+OC}{۲OA}=\frac{OD+OA}{۲OD}\Rightarrow OA^۲+OA.OD=OA.OD+OC.OD\Rightarrow OA^۲=OC.OD$$

عکس قضیه نیز به همین روش قابل اثبات است که به خودتان واگذار می‌شود.

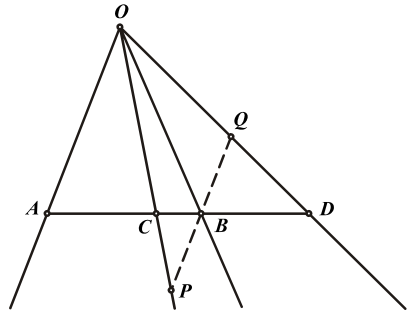
مسأله ۷– ۱۳: ثابت کنید هر خطی که از مرکز یکی از دو دایره متعامد می‌گذرد توسط دو دایره به طور همساز تقسیم می‌شود.



طبق مسأله ۵– ۳ می‌دانیم چنانچه دو دایره $(O_۱)$ و $(O_۲)$ بر یکدیگر عمود باشند داریم $O_۱B^۲=O_۱C.O_۱D$ پس بنابر عکس قضیه پیش از آنجا که $O_۱$ وسط AB است نتیجه می‌شود $(ABCD)=-۱$.

توجه داشته باشید که عکس مسأله فوق نیز صادق است.

قضیه ۷- ۱۵: $(ABCD) = -1$ و نقطه‌ی O خارج از خط AB مفروض‌اند. اگر خطی که از B به موازات OA رسم می‌شود OC و OD را به ترتیب در P و Q قطع کند آنگاه $PB = BQ$



$$BQ \parallel OA \Rightarrow \overset{\Delta}{BQD} \sim \overset{\Delta}{OAD} \Rightarrow \frac{BQ}{OA} = \frac{BD}{AD} \qquad (۱)$$

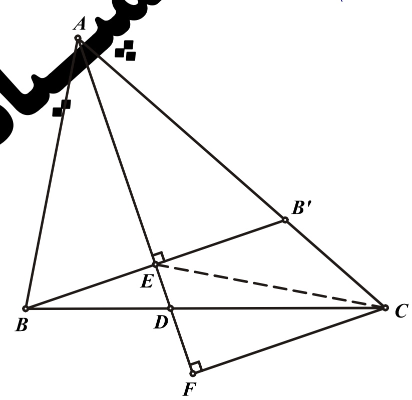
$$BP \parallel OA \Rightarrow \overset{\Delta}{BPC} \sim \overset{\Delta}{OAC} \Rightarrow \frac{BP}{OA} = \frac{BC}{AC} \qquad (۲)$$

$$(ABCD) = -1 \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} \qquad (۳)$$

(۱) و (۲) و (۳) $\Rightarrow \frac{BQ}{OA} = \frac{BP}{OA} \Rightarrow BQ = BP$

توجه داشته باشید که عکس قضیه نیز صادق است یعنی چنانچه $PQ \parallel OA$ و $PB = BQ$ آنگاه $(ABCD) = -1$

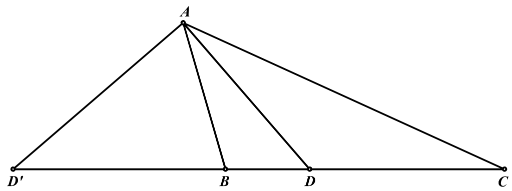
مسأله ۷- ۱۴: اگر D پای نیمساز نظیر رأس A در مثلث ABC باشد و E و F تصاویر نقاط B و C روی AD باشند ثابت کنید $(ADEF) = -1$



اگر BE را امتداد دهیم تا AC را در B' قطع کند، در مثلث ABB' نیمساز AE ارتفاع نیز می‌باشد و بنابراین مثلث ABB' متساوی الساقین بوده و $BE = B'E$.

از آنجا که $BB' \parallel CF$ پس طبق عکس قضیه پیش خطوط CE و CF پاره‌خط AD را به صورت همساز تقسیم می‌کنند چرا که BB' از E به موازات CF رسم شده و $BE = B'E$.

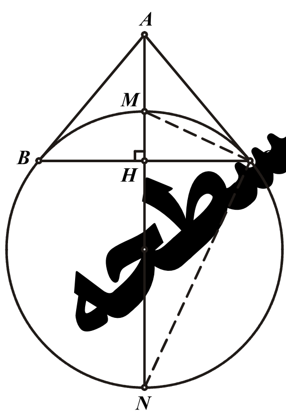
قضیه ۷– ۱۶ : نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس از مثلث، ضلع مقابل را به طور همساز تقسیم می‌کنند.



برای نیمساز داخلی AD داریم $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$ و به همین ترتیب برای نیمساز خارجی AD' نیز می‌دانیم $\frac{BD'}{CD'}=\frac{AB}{AC}$ پس بنابر دو رابطه پیش داریم $\frac{BD}{CD}=\frac{BD'}{CD'}$ و بنابراین $(BCDD')=-۱$

توجه داشته باشید که عکس قضیه نیز برقرار است به این صورت که اگر $(BCDD')=-۱$ و $AD \perp AD'$ آنگاه AD و AD' نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه BAC خواهند بود.

مسأله ۷– ۱۵ : در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع نظیر رأس A قاعده BC را در H و دایره‌ای که در B و C بر ساق‌ها مماس است را در M و N قطع کرده است. ثابت کنید: $(AHMN)=-۱$



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACM}=\frac{\overset{\frown}{CM}}{۲}\\ \widehat{BCM}=\frac{\overset{\frown}{BM}}{۲}\\ \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{ACM}=\widehat{BCM}$$

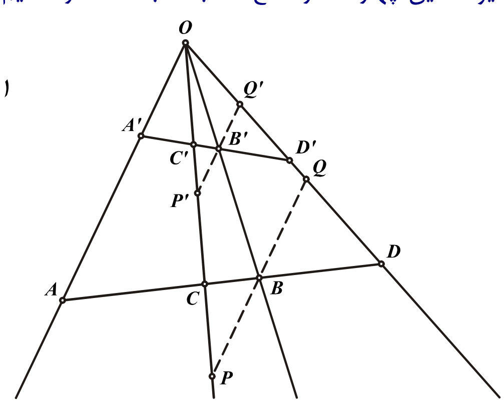
پس CM نیمساز داخلی زاویه C است و از آنجا که $\widehat{MCN}=۹۰^\circ$

بنابراین CN نیز نیمساز خارجی زاویه C است و طبق قضیه پیش داریم $(AHMN)=-۱$

قضیه ۷– ۱۷ : اگر $(ABCD)=-۱$ و O نقطه ای خارج از خط AB باشد آنگاه چهار خط OA، OB، OC و OD هر خط دیگری را نیز که این چهار خط را قطع کند به نسبت همساز تقسیم خواهند کرد.

فرض : $(ABCD)=-۱$

حکم : $(A'B'C'D')=-۱$



از نقاط B و B' خطوطی به موازات OA رسم می‌کنیم تا OC و OD را در Q ، P ، Q' و P' قطع کنند. از آنجا که $(ABCD) = -1$ طبق قضیه ۷- ۱۵ خواهیم داشت $PB = BQ$ ، همچنین به دلیل توازی PQ و $P'Q'$ نتیجه می‌شود $P'B' = B'Q'$. پس بنابر عکس قضیه ۷- ۱۵ می‌توان نتیجه گرفت $(A'B'C'D') = -1$.

تعریف : چهار خط همرس OA ، OB ، OC و OD که توسط یک مورب، و در نتیجه توسط هر موربی در چهار نقطه همساز قطع می شوند را یک دستگاه همساز یا توافقی می‌نامیم که به صورت $O(ABCD) = -1$ نمایش می دهیم. همچنین هریک از این چهار خط را نیز یک شعاع همساز یا توافقی می‌نامیم.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) قاطع d اضلاع مثلث ABC را در M، N و P قطع می‌کند. اگر A'، B' و C' را روی اضلاع طوری انتخاب کنیم که هرکدام به همراه نقطه حاصل از تقاطع d با آن ضلع،ضلع مورد نظر را به نسبت همساز تقسیم کنند، ثابت کنید AA'، BB' و CC' همرس‌اند.

۲) خط d و دو نقطه A و B در طرفین آن مفروض‌اند. نشان دهید نقطه‌ای مانند P روی خط d وجود دارد که خط d نیمساز زاویه APB باشد.

۳) نشان دهید در هر مثلث ABC همواره $A(HOII_b) = -1$ است.

۴) چهار نقطه هم خط A، B، C و D مفروض‌اند. نقاط P و Q را روی این خط طوری پیدا کنید که داشته باشیم $(ABPQ) = -1$ و $(CDPQ) = -1$.

۵) در دایره ای دو وتر AB و AC را رسم می‌کنیم. قطر عمود بر AB، وتر AC را در H و امتداد BC را در K و دایره را در M و N قطع می‌کند. ثابت کنید که M و N، پاره خط HK را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

۶) ثابت کنید در هر ذوزنقه، محل تلاقی دو ساق، محل تلاقی دو قطر و اوساط دو قاعده، چهار نقطه هم خط می‌باشند که یک گستره‌ی همساز را تشکیل می دهند.

۷) D و E را پای نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر رأس A از مثلث ABC در نظر بگیرید. اگر میانه نظیر ضلع BC بر دایره‌ای به قطر DE مماس باشد، ثابت کنید مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

۸) نشان دهید اگر در گستره توافقی $(ABCD) = -1$ همه پاره خطها از یک نقطه‌ی گستره، مثلاً A، اندازه گرفته شوند آنگاه داریم: $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

۹) ثابت کنید در دو دایره متخارج نقاط برخورد مماس‌های مشترک داخلی و خارجی با خط المرکزین دو دایره، نسبت به مرکزهای این دو دایره مزدوج توافقی‌اند.

۱۰) نشان دهید $O(ABCD) = -1$ اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\frac{\sin \widehat{AOC}}{\sin \widehat{BOC}} = \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}$

۱۱) AD و AA' به ترتیب ارتفاع و میانه مثلث ABC هستند. از نقطه A' خطوطی به موازات اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم تا ارتفاع AD را به ترتیب در P و Q قطع کنند. ثابت کنید: $(ADPQ) = -1$

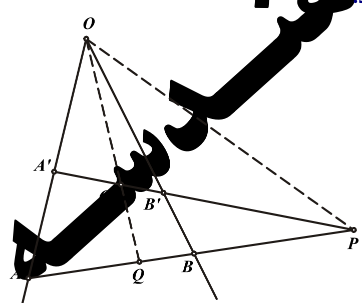
۱۲) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع AC و $\widehat{A} = 2\widehat{C}$ است. در نقطه C عمودی بر ضلع BC خارج می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در F قطع کند. نشان دهید: $\widehat{AMB} = \widehat{FMC}$

۷– ۴ قطب و قطبی

هدف بخش: قطب و قطبی یکی از جالب‌ترین تبدیلات هندسی است که به دلیل تبدیل نقطه و خط به یکدیگر در حل مسایل پیشرفته هندسه مسطحه کاربردی منحصر بفرد دارد. مبحث قطب و قطبی بسط و گسترشی است بر تقسیم همساز که به زیبایی هر چه تمام‌تر شکل یافته و به کار گرفته شده است که دراین بخش با آن آشنا خواهیم شد.

قطب و قطبی نسبت به زاویه

قضیه ۷– ۱۸ : نقطه P و زاویه O مفروض‌اند. خط متغیری از P گذشته و اضلاع زاویه O را در A و B قطع می‌کند. اگر مزدوج همساز نقطه P نسبت به پاره‌خط AB را Q بنامیم ($(ABQP)=-1$) آنگاه مکان هندسی نقطه Q خطی است که از O می‌گذرد.



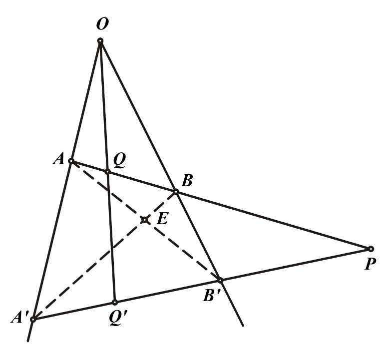
خط ثابت PBA و نقطه Q را به عنوان مزدوج توافقی P نسبت به AB در نظر می‌گیریم. از آنجا که $(ABQP)=-1$ بنابراین $O(ABQP)=-1$ تشکیل یک دستگاه توافقی را می‌دهند. پس هر خط دیگری که از P بگذرد و شعاع‌های همساز OA، OB، OQ را به ترتیب در A'، B' و Q' قطع کند خواهیم داشت $(A'B'Q'P)=-1$ یعنی Q' مزدوج همساز P نسبت به $A'B'$ خواهد بود و به عبارت دیگر تمامی مزدوج همسازهای نقطه P روی شعاع همساز OQ قرار دارند. بنابراین مکان هندسی نقطه Q خطی است که از O می‌گذرد.

تعریف: نقطه P را قطب و خط OQ را قطبی نقطه P نسبت به زاویه O می‌نامند.

نکته ۱– نقطه P تنها یک قطبی نسبت به زاویه O دارد در حالی که خط OQ می‌تواند بی‌نهایت قطب داشته باشد که روی خط OP واقع شده‌اند.

نکته ۲– همواره از قطب و قطبی یکی داخل و دیگری در خارج از زاویه قرار می‌گیرند.

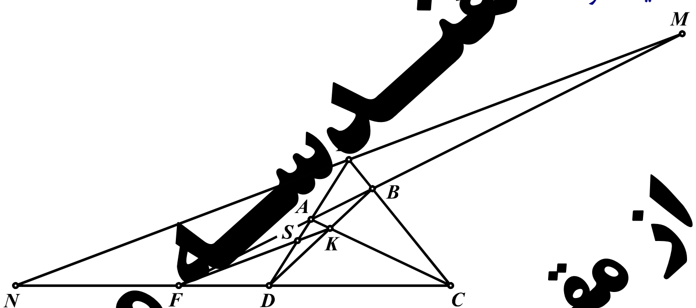
مسأله ۷– ۱۶ : نقطه P و زاویه O مفروض‌اند. دو خط دلخواه از P می‌گذرانیم تا اضلاع زاویه O را در A، B، A' و B' قطع کنند. اگر AB' و $A'B$ یکدیگر را در E قطع کنند، نشان دهید قطبی P نسبت به زاویه O از نقطه E می‌گذرد.



فرض می‌کنیم قطبی P از E نگذشته و AB و $A'B'$ را به ترتیب در Q و Q' قطع کند. در این صورت داریم: $E(A'B'Q'P)=-1$ و $E(ABQP)=-1$ از طرف دیگر شعاع EP در دو دستگاه همساز مشترک و شعاع‌های همساز EA و EB نیز به ترتیب در راستای شعاع‌های EB' و EA' هستند. بنابراین شعاع‌های چهارم این دو دستگاه نیز با یکدیگر هم‌راستا خواهند بود و به عبارت دیگر E روی QQ' یا قطبی نقطه P قرار دارد.

این مسأله با یک بار استفاده از قضایای سوا و منلائوس نیز به سادگی قابل حل است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۷- ۱۷ : چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است به طوری که امتداد اضلاع AB و CD یکدیگر را در F و امتداد اضلاع AD و BC یکدیگر را در E قطع می‌کنند. محل برخورد اقطار چهارضلعی $ABCD$ را K می‌نامیم و از نقطه E خطی به موازات FK رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و CD را به ترتیب در M و N قطع کند. ثابت کنید E وسط MN است.

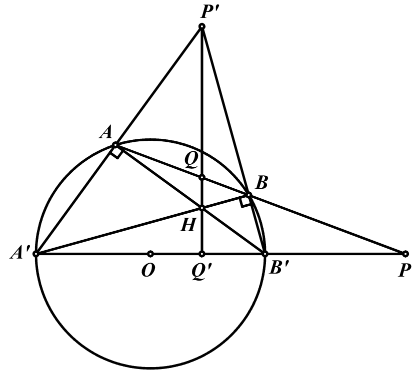


طبق مسأله پیش می‌دانیم که K قطبی نقطه E نسبت به زاویه BFC است و بنابراین $F(ADSE)=-1$ و از آنجا که خط MN به موازات FK رسم شده توسط دو شعاع FA و FD به ترتیب در M و N قطع شده است بنابر قضیه ۷- ۱۵ خواهیم داشت $EM=EN$.

قطب و قطبی نسبت به دایره

قضیه ۷- ۱۹ : نقطه P و دایره (O) مفروض‌اند. خط متغیری از P گذشته و دایره (O) را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر نقطه Q مزدوج همساز نقطه P نسبت به پاره‌خط AB باشد ($(ABQP)=-1$) ، آنگاه مکان هندسی نقطه Q خطی است که بر PO عمود است.

خط ثابت PO را رسم می‌کنیم تا دایره را در B' و A' قطع کند و مزدوج همساز P نسبت به پاره‌خط $A'B'$ را Q' می‌نامیم. اگر نشان دهیم با تغییر خط PBA همواره QQ' بر PO عمود است حکم اثبات شده است.



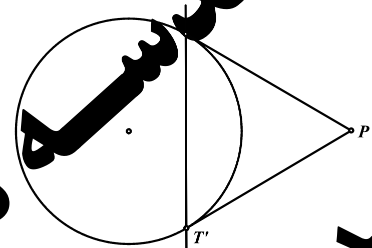
محل تلاقی AA' و BB' را P' و محل تلاقی $B'A$ و BA' را H می‌نامیم. از طرفی می‌دانیم $P'H$ قطبی نقطه P نسبت به زاویه $A'P'B'$ است و بنابراین از نقاط Q و Q' می‌گذرد چرا که داریم $(ABQP)=-1$ و $(A'B'Q'P)=-1$.

از طرف دیگر $\widehat{A'BB'}=\widehat{A'AB'}=90^\circ$ وبنابراین $A'B$ و $B'A$ ارتفاعات مثلث $P'A'B'$ هستند و H نیز مرکز ارتفاعی مثلث است. پس $P'H$ نیز ارتفاع دیگری از مثلث بوده و بر $A'B'$ عمود است. بنابراین QQ' بر PO عمود است و حکم ثابت شده است.

سعی کنید همین حکم را در حالتی که P داخل دایره است با روشی مشابه روش فوق ثابت کنید.

تعریف : نقطه P را قطب و خط $P'Q'$ را قطبی نقطه P نسبت به دایره (O) می‌نامند.

نکته ۱– در شکل فوق هر چه خط PBA را به سمت بالا حرکت دهیم سه نقطه A، B و Q به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند تا جایی که این خط در نقطه T بر دایره مماس شده و سه نقطه A، B و Q در نقطه T بر یکدیگر منطبق می‌شوند. بنابراین نقطه T و همچنین نظیر آن T' نیز روی قطبی نقطه P قرار دارند و به عبارت دیگر خط TT' قطبی نقطه P نسبت به دایره است.



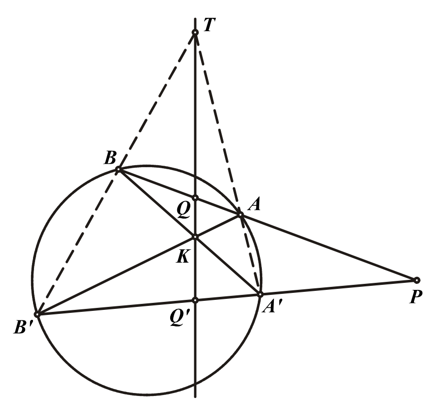
نکته ۲– اگر P روی دایره باشد، قطبی آن خط مماس بر دایره در نقطه P خواهد بود.

نکته ۳– اگر P بر مرکز دایره واقع شود، قطبی نخواهد داشت و همچنین اگر قطبی از مرکز دایره بگذرد قطب نخواهد داشت.

نکته ٤– اگر قطب P خارج دایره باشد قطبی آن با دایره متقاطع است و اگر قطب P داخل دایره باشد، قطبی آن با دایره نامتقاطع است.

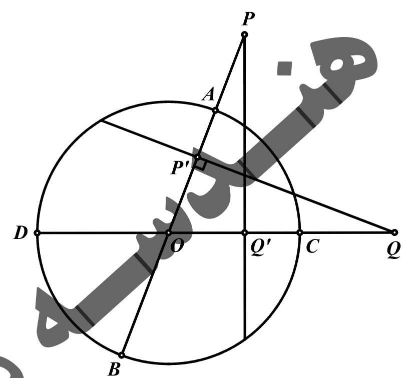
نکته ٥– هر نقطه P تنها یک قطبی نسبت به دایره دارد و بالعکس.

مسأله ۷– ۱۸ : دو خط گذرنده از نقطه P دایره C را در نقاط A، B، A' و B' قطع کرده‌اند. اگر AB' و BA' یکدیگر را در نقطه K قطع کنند، نشان دهید K روی قطبی نقطه P نسبت به دایره C قرار دارد.



اگر AA' و BB' یکدیگر ار در T قطع کنند، طبق مسأله ۷– ۱۶ می‌دانیم که TK قطبی نقطه P نسبت به زاویه $A'TB'$ است. پس اگر TK وترهای AB و $A'B'$ را در Q و Q' قطع کند داریم $(ABQP)=-1$ و $(A'B'Q'P)=-1$ و بنابراین خط QQ' قطبی نقطه P نسبت به دایره C است که از K نیز می‌گذرد. شما می‌توانید این مسأله را در حالت‌های مختلفی که هر کدام از نقاط P و K در داخل یا خارج دایره باشند، حل کنید.

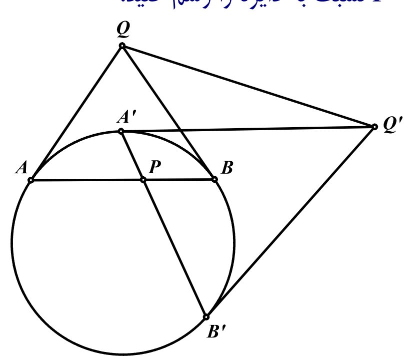
قضیه ۷– ۲۰ : دو نقطه P و Q و دایره (O) مفروض‌اند. اگر قطبی نقطه P نسبت به دایره (O) از نقطه Q بگذرد، قطبی نقطه Q نسبت به دایره (O) نیز از نقطه P می‌گذرد. (P و Q می توانند داخل یا خارج از دایره باشند.)



خطوط PO و QO را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A ، B ، C و D قطع کنند. اگر P' و Q' به ترتیب مزدوج همسازهای نقاط P و Q نسبت به پاره خط‌های AB و CD باشند، از آنجا که O وسط قطرهای AB و CD قرار دارد خواهیم داشت $OP.OP'=R^2=OQ.OQ'$.

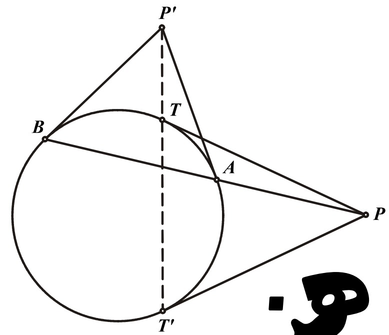
بنابراین چهارضلعی $PP'Q'Q$ محاطی است و $\widehat{PP'Q}=\widehat{PQ'Q}$. اگر قطبی نقطه P از Q بگذرد، $P'Q$ قطبی نقطه P بوده و بر PO عمود خواهد بود. پس $\widehat{PQ'Q}=\widehat{PP'Q}=90^\circ$. بنابراین از آنجا که PQ' از نقطه Q' مزدوج همساز نقطه Q گذشته و بر OQ نیز عمود است می‌توان نتیجه گرفت که PQ' قطبی نقطه Q است و به عبارت دیگر قطبی نقطه Q نیز از P می‌گذرد.

مسأله ۷– ۱۹ : اگر P نقطه‌ای داخل دایره (O) باشد قطبی نقطه P نسبت به دایره را رسم کنید.



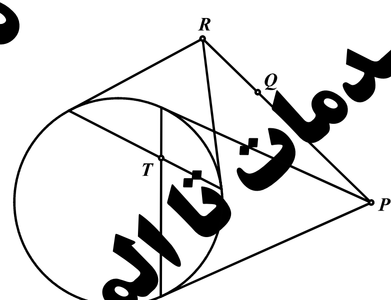
دو وتر دلخواه AB و $A'B'$ را از نقطه P می‌گذرانیم. با رسم مماس‌هایی بر دایره در نقاط A و B و همچنین A' و B' ، قطب‌های خطوط AB و $A'B'$ بدست می‌آید که آن‌ها را Q و Q' می‌نامیم. خط QQ' قطبی نقطه P خواهد بود، چرا که قطبی نقاط Q و Q' از P می‌گذرد و بنابراین قطبی نقطه P نیز از نقاط Q' و Q خواهد گذشت.

مسأله ۷- ۲۰ : نقطه P و دایره (O) مفروض‌اند. خط دلخواهی از نقطه P رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. اگر مماس‌های PT و PT' را از نقطه P بر دایره رسم کنیم، نشان دهید خط TT' و خطوط مماس بر دایره در نقاط A و B در یک نقطه همرس‌اند.



اگر محل تلاقی مماس‌های بر دایره در نقاط A و B را P' بنامیم، برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم قطبی نقطه P یعنی TT' از نقطه P' می‌گذرد. از آنجا که P روی قطبی P' (خط AB) قرار داردبنابراین واضح است که P' نیز روی قطبی P (خط TT') قرار خواهد داشت.

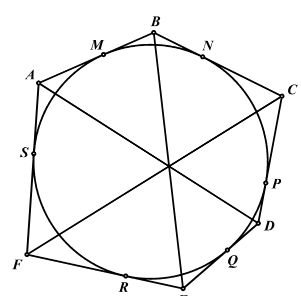
قضیه ۷- ۲۱ : اگر سه نقطه P ، Q و R با یکدیگر هم‌خط باشند، خطوط قطبی آن‌ها نسبت به دایره (O) همرس خواهند بود و بالعکس.



خطوط قطبی دو نقطه P و R را رسم می‌کنیم تا در نقطه T یکدیگر را قطع کنند. در این صورت خط PQR قطبی نقطه T می‌باشد. از آنجا که قطبی نقطه T از نقطه Q می‌گذرد بنابراین قطبی نقطه Q نیز از T خواهد گذشت. پس خطوط قطبی نقاط P، Q و R در T همرس‌اند.

عکس قضیه نیز به سادگی قابل اثبات است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۷-۲۱ (قضیه بریانشن) : اگر شش ضلعی $ABCDEF$ محیطی باشد، نشان دهید قطرهای AD، BE و CF در یک نقطه همرس‌اند.



اگر قطب‌های خطوط AD، BE و CF نسبت به دایره محاطی را به ترتیب K_1، K_2 و K_3 بنامیم، برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم نقاط K_1، K_2 و K_3 هم‌خط‌اند.

محل تماس اضلاع با دایره را به ترتیب M، N، P، Q، R و S می‌نامیم. از آنجا که نقاط D و A روی قطبی نقطه K_1 قرار دارند، نقطه K_1 نیز روی خطوط قطبی نقاط D و A یعنی خطوط PQ و MS قرار خواهد داشت به عبارت دیگر $K_1=(MS\ ,PQ)$ و به همین ترتیب خواهیم داشت $K_2=(MN\ ,RQ)$ و $K_3=(NP\ ,SR)$ و بنابر قضیه پاسکال برای شش ضلعی محاطی $MNPQRS$ نتیجه می‌شود که نقاط K_1، K_2 و K_3 با یکدیگر هم‌خط‌اند. پس حکم ثابت شد.

مثلث‌های خود قطبی

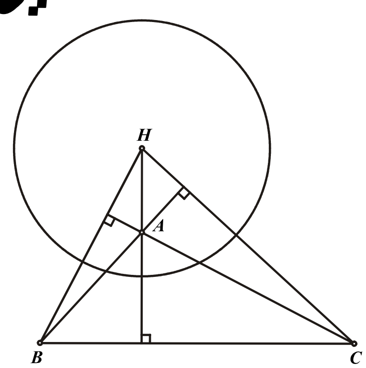
تعریف: یک مثلث را نسبت به یک دایره خود قطبی می‌نامند اگر هر ضلع مثلث خط قطبی رأس مقابل آن ضلع باشد.

قضیه ۷- ۲۲: اگر مثلثی نسبت به یک دایره خود قطبی باشد، مرکز دایره بر مرکز ارتفاعی مثلث منطبق است.

می‌دانیم که خط قطبی همواره بر خط گذرنده از قطب و مرکز دایره عمود است و بنابراین مرکز دایره روی خط عمود وارد از قطب بر قطبی واقع است. پس اگر مثلث ABC نسبت به دایره (O) خود قطبی باشد آنگاه O مرکز دایره، باید روی خط عمود وارد از رئوس بر اضلاع مقابل آن که ضلع‌های مثلث هستند قرار داشته باشد و به عبارت دیگر مرکز دایره بر مرکز ارتفاعی مثلث واقع است.

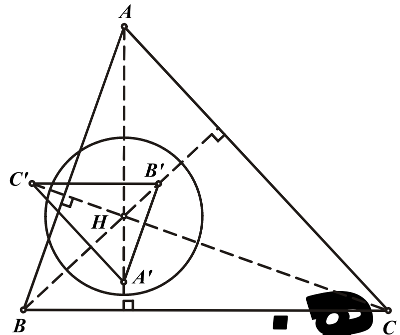
نکته ۱- از سه رأس مثلث خود قطبی، یکی داخل دایره و دو رأس دیگر خارج دایره قرار دارند. چرا که اگر رأس A داخل دایره باشد رئوس B و C روی قطبی A در خارج از دایره خواهند بود و اگر A بیرون دایره باشد و قطبی آن، دایره را در P و Q قطع کند، رئوس B و C مزدوج‌های توافقی P و Q خواهند بود زیرا که قطبی B نسبت به دایره از C می‌گذرد. بنابراین یکی داخل و دیگری خارج دایره خواهد بود.

نکته ۲- هر مثلث خود قطبی همواره یک زاویه منفرجه دارد. چرا که نقطه قطب و قطبی آن، همیشه روی خط عمود وارد از قطب بر قطبی در یک طرف مرکز دایره قرار دارند و این خاصیت تنها در مثلث‌هایی با زاویه منفرجه برقرار است که مرکز ارتفاعی آن‌ها خارج از مثلث قرار دارد. پس هیچ مثلث حاده‌الزاویه‌ای نمی‌تواند خود قطبی باشد.



مسأله ۷- ۲۲: نشان دهید تبدیل یافته قطبی مثلث ABC، نسبت به دایره‌ای به مرکز H مرکز ارتفاعی مثلث، مثلثی است متجانس با مثلث ABC.

قطبی رأس A بر AH عمود بوده و بنابراین با ضلع BC موازی است و به همین ترتیب قطبی هر رأس با ضلع مقابل آن رأس موازی است. پس تبدیل یافته قطبی مثلث ABC با آن مجانس است.



قضیه ۷- ۲۳: ترکیب تبدیل قطبی با تبدیل تجانس تبدیلی است که تمام خواص تبدیل قطبی را دارد.

به عبارت دیگر اگر شکل A را با استفاده از تبدیل قطبی به شکل A' تبدیل کنیم و دوباره شکل A' را با استفاده از تجانس به شکل A'' تبدیل کنیم از آنجا که تبدیل تجانس تنها شکل را به یک نسبت بزرگ یا کوچک می‌کند و تمام زوایا و هم‌خطی‌ها و همرسی‌ها را حفظ می‌کند، بنابراین تمام خواص قطبی که روی شکل A' برقرار است روی A'' نیز برقرار خواهد بود.

نکته: بنابر قضیه فوق می‌توان با استفاده از ترکیب تبدیل قطبی و تجانس، خواص مثلث‌های خود قطبی را برای هر مثلث حاده‌الزاویه نیز تعمیم داده و استفاده کرد. به این صورت که ابتدا مثلث دلخواه ABC را با تبدیل قطبی نسبت به دایره‌ای به مرکز H به مثلث $A'B'C'$ تبدیل می‌کنیم. از آنجا که طبق مسئله ۷- ۲۲ مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC مجانس است، بنابراین با یک تبدیل تجانس می‌توان مثلث $A'B'C'$ را به مثلث ABC تبدیل کرد. حال در مجموع این دو تبدیل، هر رأس مثلث ABC به ضلع مقابل آن و بالعکس تبدیل شده‌اند و این تبدیل تمام خواص تبدیل قطبی را نیز دارد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای که خط‌های قطبی آن نسبت به دو دایره مفروض بر هم عمودند، دایره‌ای است که خط‌المرکزین دو دایره قطر آن است.

۲) فرض کنید H نقطه‌ای روی ارتفاع AD از مثلث ABC باشد. اگر BH و CH اضلاع AC و AB را در E و F قطع کنند ثابت کنید AD نیمساز زاویه EDF است.

۳) نقطه دلخواه P در صفحه مثلث ABC مفروض است. در نقطه P عمودهایی بر PA ، PB و PC خارج می کنیم تا اضلاع مقابل را به ترتیب در A' ، B' و C' قطع کنند. نشان دهید نقاط A' ، B' و C' هم‌خطاند.

۴) نقطه P در صفحه مثلث ABC مفروض است. خط دلخواه l اضلاع BC ، AC و AB یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در A_1 ، B_1 و C_1 قطع کرده است. در نقطه P عمودهایی بر خطوط PA_1 ، PB_1 و PC_1 خارج می‌کنیم تا خط l را به ترتیب در نقاط A_2 ، B_2 و C_2 قطع کنند. نشان دهید خطوط AA_2 ، BB_2 و CC_2 در یک نقطه همرس‌اند.

۵) قطر AB از دایره C مفروض است. نقطه P را روی خط مماس گذرنده از A در نظر گرفته و مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر TH خط عمود وارد از T بر قطر AB باشد، نشان دهید PB پاره خط TH را نصف می‌کند.

۶) دایره (O') از مرکز دایره (O) گذشته و آن را در نقاط A و B قطع می‌کند. از نقطه دلخواه T روی دایره (O') مماس‌های TC و TD را بر دایره (O) فرود می‌آوریم. اگر AB و TO یکدیگر را در P قطع کنند، نشان دهید نقاط C ، D و P هم‌خطاند.

۷) از نقطه M مماس‌های MD و MA و از نقطه N مماس‌های NC و NB را مطابق شکل بر دایره C رسم کرده‌ایم. محل تلاقی امتدادهای MA و BC را P و محل تلاقی امتدادهای NB و AD را Q و محل تلاقی AB و PQ را S می‌نامیم. ثابت کنید نقاط S، M و N بر یک استقامت‌اند.

۸) نیمساز داخلی زاویه A از مثلث ABC ضلع BC و دایره محیطی مثلث ABC را به ترتیب در D و M قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطه D دایره‌ای به مرکز M و شعاع MB را در X و Y قطع کرده است. ثابت کنید خط AD زاویه XAY را نصف می‌کند. (مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۳)

۹) مثلث ABC و نقطه دلخواه P مفروض‌اند. از H مرکز ارتفاعی مثلث ABC عمود بر AP رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل A را در A' قطع کند. نقاط B' و C' را نیز به همین ترتیب مشخص می کنیم. نشان دهید سه نقطه A' ، B' و C' هم‌خطاند.

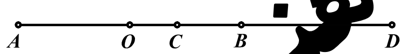
۱۰) قضیه پروانه: در دایره $C(O,R)$ وتر MN مفروض است. از نقطه P وسط این وتر دو وتر دلخواه AB و CD را می‌گذرانیم. اگر AD و BC با MN در نقاط E و F برخورد نمایند، ثابت کنید: $PE = PF$

۱۱) در مثلث ABC ، مماس‌های مرسوم از رأس A بر دایره‌ی به قطر BC ، در نقاط P و Q بر آن دایره مماس شده‌اند. خط PQ را در l_a می نامیم. خطوط l_b و l_c نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید خطوط l_a ، l_b و l_c همرس‌اند.

۷– ۵ انعکاس

هدف بخش: انعکاس یکی از زیباترین و در عین حال قوی‌ترین تبدیلات هندسی است که قدرت فوق‌العاده‌ای در حل بسیاری از مسایل پیشرفته هندسه دارد. البته استفاده از انعکاس در حل مسایل هندسه نیازمند مهارت‌هایی ویژه است که سعی می‌شود تا در این بخش پس از اشاره به اصول و مبانی آن، با برخی از این مهارت‌ها نیز آشنا شویم.

پیش از این می‌دانیم که اگر $(ABCD)=-1$ و O نقطه وسط AB باشد آنگاه $OC.OD=OA^2=k$.



بر همین اساس می‌توان تبدیل هندسی تعریف کرد که با معلوم بودن نقطه O و عدد k نقطه C را به D و بالعکس تبدیل می‌کند.

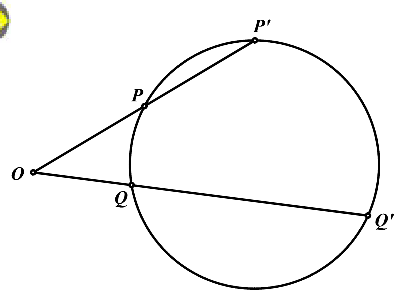
تعریف: اگر نقطه O به عنوان مرکز انعکاس و عدد k به عنوان ثابت انعکاس مفروض باشند، انعکاس تبدیلی است از صفحه بر روی آن که هر نقطه P را به نقطه P' تبدیل می‌کند به طوری که نقاط O، P و P' هم خط بوده و $OP.OP'=k$. در این صورت P' را منعکس P می‌نامیم. واضح است که P نیز منعکس P' است.

نکته ۱ – با توجه به بحث ابتدای بخش اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{k}$ رسم کنیم نقاط P و P' نسبت به آن دایره وارون یکدیگرند. این دایره را دایره انعکاس و $\sqrt{k}$ را شعاع انعکاس می نامند.

نکته ۲ – اگر نسبت انعکاس $+k$ باشد P و P' در یک طرف نقطه O و اگر $-k$ باشد در دوطرف نقطه O قرار خواهند داشت.

نکته ۳ – با توجه به تعریف، منعکس هر خط نسبت به نقطه‌ای روی آن همان خط خواهد بود. چرا که منعکس هر نقطه از خط روی همان خط قرار خواهد گرفت.

مسأله ۷– ۲۳ : اگر P' و Q' منعکس های نقاط P و Q نسبت به نقطه غیر هم‌خط O و با ثابت k باشند نشان دهید:



الف) نقاط P، Q، P' و Q' هم‌دایره‌اند.

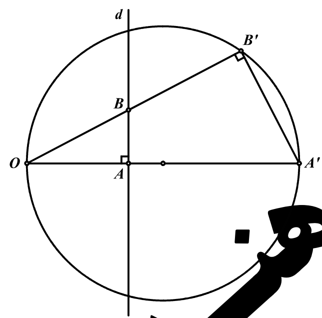
ب) $P'Q'=\dfrac{k.PQ}{OP.OQ}$

الف) با توجه به فرض داریم $OP.OP'=k=OQ.OQ'$ بنابراین چهارضلعی $PP'Q'Q$ محاطی است و نقاط P، P'، Q و Q' هم دایره‌اند.

ب) از آنجا که $\overset{\Delta}{OPQ} \sim \overset{\Delta}{OP'Q'}$ داریم:

$$\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{OQ'}{OP}=\frac{OQ'.OQ}{OP.OQ}=\frac{k}{OP.OQ} \Rightarrow P'Q'=\frac{k.PQ}{OP.OQ}$$

قضیه ۷– ۲٤ : منعکس هر خط نسبت به نقطه‌ای خارج از آن، دایره‌ای است که از مرکز انعکاس می‌گذرد.



فرض کنید می‌خواهیم منعکس خط d نسبت به نقطه O و با ثابت k را بیابیم. پای عمود وارد از O بر خط d را A می‌نامیم و B را نیز نقطه دلخواهی روی d در نظر می‌گیریم. اگر A' و B' به ترتیب منعکس‌های نقاط A و B نسبت به نقطه O باشند از آنجا که چهارضلعی $ABB'A'$ محاطی است نتیجه می‌شود $\widehat{OB'A'}=\widehat{BAA'}=۹۰^\circ$. بنابراین با تغییر B روی خط d ، نقطه B' همواره پاره‌خط OA' را با زاویه ۹۰ درجه می بیند. پس B' همواره روی دایره‌ای به قطر OA' حرکت خواهد کرد یعنی منعکس خط d دایره‌ای به قطر OA' است.

عکس قضیه : منعکس هر دایره نسبت به نقطه‌ای روی آن، یک خط است.

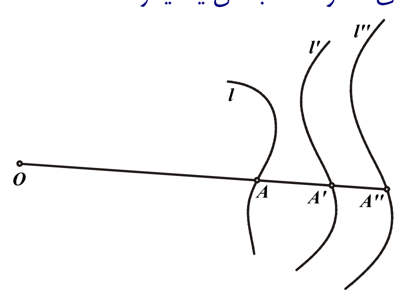
اثبات این قضیه با توجه به اثبات قضیه پیش بسیار ساده است که به خود شما واگذار می‌شود.

نکته ۱– اگر دایره $C(O)$ را نسبت به نقطه P روی آن منعکس کنیم خط حاصل بر PO عمود است.

نکته ۲– هر دایره و خط به دو صورت منعکس یکدیگرند و دو امتداد قطری از دایره که بر خط عمود است مراکز این انعکاس‌ها هستند.

نکته ۳– اگر k مثبت باشد خط و دایره، هر دو در یک طرف مرکز انعکاس و اگر k منفی باشد در دو طرف آن خواهند بود.

مسأله ۷–۲٤ : منحنی l و نقطه O مفروض‌اند. یک‌بار منحنی l را نسبت به مرکز O با ثابت k' منعکس می‌کنیم تا منحنی l' حاصل شود و بار دیگر منحنی l را نسبت به مرکز O و با ثابت k'' منعکس می‌کنیم و آن را l'' می‌نامیم. نشان دهید منحنی‌های l' و l'' مجانس یکدیگرند.

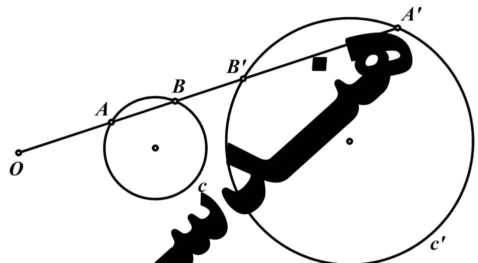


نقطه دلخواه A را روی l در نظر می‌گیریم و منعکس‌های آن را به ترتیب A' و A'' می نامیم. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA.OA''=k'' \\ OA.OA'=k' \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA''}{OA'}=\frac{k''}{k'}$$

از آنجا که k' و k'' مقادیری ثابت هستند پس با تغییر نقطه A روی l همواره A' و A''به نسبت معلوم $\frac{k''}{k'}$ مجانس یکدیگر خواهند بود. بنابراین l'' مجانس l' به نسبت $\frac{k''}{k'}$ و مرکز O می‌باشد.

قضیه ۷– ۲۵ : منعکس دایره‌ای که از مرکز انعکاس نمی گذرد، یک دایره است.



اگر O و k مرکز و ثابت انعکاس باشند و P نیز قوت نقطه O نسبت به دایره C باشد نشان می دهیم منعکس دایره C نسبت به مرکز O و ثابت k دایره‌ای مانند C' است.

خط دلخواهی از O می‌گذرد تا دایره C را در نقاط A و B قطع کند و منعکس‌های آن‌ها نسبت به مرکز O و با ثابت k را به ترتیب A' و B' می نامیم. منعکس دایره C نسبت به مرکز O و با ثابت P خود دایره خواهد شد چرا که $P=OA.OB$ و هر دو نقطه مانند A و B با این انعکاس به یکدیگر تبدیل می‌شوند. حال اگر بار دیگر دایره C را نسبت به مرکز O و با ثابت k منعکس کنیم طبق مسأله پیش شکل حاصل دایره‌ای خواهد بود مجانس دایره C به نسبت $\frac{k}{P}$.

نکته ۱– توجه داشته باشید که A' منعکس A و مجانس B است و به همین ترتیب B' منعکس B و مجانس A است. پس سعی کنید تفاوت دو نقطه منعکس و مجانس در دو دایره را در ذهن خود روشن کنید تا دو نقطه مجانس و منعکس را اشتباه در نظر نگیرید.

نکته ۲– هر دو دایره به دو صورت منعکس یکدیگرند و مراکز تجانس دو دایره (محل برخورد مماس‌های مشترک داخلی و خارجی) مراکز این انعکاس‌ها هستند.

نکته ۳– اگر دو دایره منعکس یکدیگر باشند مراکز آن‌ها منعکس یکدیگر نخواهند بود، بلکه به نسبت خاصی مجانس یکدیگرند.

نکته ٤– اگر نسبت انعکاس برابر قوت مرکز انعکاس نسبت به دایره باشد، منعکس دایره خود آن است.

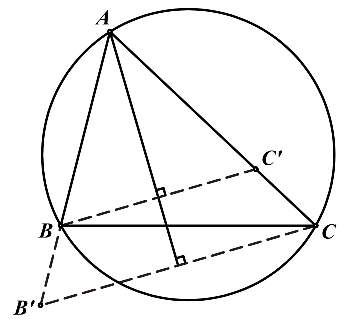
قضیه ۷– ۲٦: تبدیل انعکاس همواره زوایا را حفظ می‌کند.

به عنوان مثال اگر دو خط d_1, d_2 را به مرکز و نسبت خاصی منعکس کنیم زاویه بین این دو خط و زاویه بین منعکس‌های آن‌ها که ممکن است خط یا دایره بشوند، برابر است. اثبات این قضیه در حالات مختلف آن، به سادگی صورت می‌پذیرد که به خود شما واگذار می‌شود.

قضیه ۷- ۲۷ : اگر مثلث ABC را به مرکز A و نسبت $AC.AB$ منعکس کنیم و سپس نسبت به نیمساز زاویه A قرینه سازیم، نقاط B و C به یکدیگر و ضلع BC به دایره محیطی مثلث تبدیل خواهد شد.

اگر B' و C' به ترتیب منعکس‌های B و C باشند خواهیم داشت:

$$AB.AB' = AC.AC' = AB.AC \quad \Rightarrow \quad AB = AC' \,,\, AC = AB'$$



بنابراین مثلث‌های ABC' و ACB' متساوی‌الساقین بوده و نیمساز رأس A، ارتفاع و میانه این مثلث‌ها می‌باشد و B' و C' به ترتیب قرینه های B و C نسبت به این نیمساز خواهند بود. پس با انعکاس مثلث ABC به مرکز A و نسبت $AB.AC$ و تقارن نسبت به نیمساز A رئوس B و C به یکدیگر تبدیل می‌شوند. منعکس ضلع BC نیز دایره خواهد شد که از مرکز انعکاس (A) و منعکس‌های B و C خواهد گذشت، یعنی همان دایره‌های محیطی مثلث ABC.

توجه داشته باشید که تبدیل فوق یعنی ترکیب یک انعکاس به مرکز A و نسبت $AB.AC$ با یک تقارن نسبت به نیمساز زاویه A تبدیل جالبی است که به دلیل خاصیت منحصر به فرد آن کاربرد زیادی در حل مسایل مربوطه دارد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) چهار نقطه در یک صفحه مفروض‌اند. منعکس هر دسته سه‌تایی را نسبت به نقطه‌ی چهارم می یابیم. نشان دهید که چهار مثلث منعکس حاصل متشابه‌اند.

۲) قضیه بطلمیوس: برای هر چهار نقطه‌ی دلخواه A، B، C و D در صفحه ثابت کنید:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

۳) اگر (O,R) و (I,r) به ترتیب دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث باشند، ثابت کنید:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

۴) دو دایره ی ثابت (C_1) و (C_2) یکدیگر را در نقاط E و F قطع می‌کنند. دایره‌ی متغیر (C) بر دوایر (C_1) و (C_2) در نقاط C و D مماس است و خط EF را در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید چهار خط AC، AD، BC و BD از چهار نقطه‌ی ثابت در صفحه عبور می‌کنند.

۵) خط ثابت d از مرکز دایره‌ی ثابت $C(O,R)$ می‌گذرد. دایره‌ی متغیر $C'(O',R')$ از نقطه O می‌گذرد و مرکزش روی خط d قرار دارد. مکان هندسی محل تماس مماس مشترک دو دایره‌ی C و C' را با دایره ی متغیر بیابید.

۶) D نقطه‌ای دلخواه روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC است. ثابت کنید مرکز دایره‌ای که بر دوایر محیطی مثلث‌های ABC، ADC و ABD مماس داخل است، روی AD قرار دارد.

۷) وتر AB از دایره‌ی C مفروض است. دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی K بر یکدیگر مماس خارج‌اند و بر دایره C مماس داخل و بر وتر AB نیز مماس هستند. اگر مماس مشترک C_1 و C_2 در نقطه‌ی K، دایره C را در نقطه‌ی P قطع کند ، (P و K در یک طرف وتر AB قرار دارند) ثابت کنید KP نیمساز زاویه‌ی APB است.

۸) دو نقطه‌ی ثابت A و B و دایره‌ی C مفروض‌اند. قاطعی متغیر از B می‌گذرانیم تا دایره‌ی C را در C و D قطع کند. E و F محل تلاقی دیگر دایره‌ی C با AC و AD می‌باشند. مکان هندسی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث AEF را بیابید.

۹) در مثلث ABC داریم $\hat{B} = 2\hat{C}$ و خط BD نیمساز زاویه $\hat{B}$ است. P را مرکز دایره‌ای می‌گیریم که بر ضلع BC مماس است و همچنین بر دوایر محیطی مثلث‌های ABD و BCD مماس خارج است. ثابت کنید :

$$BP \perp AC$$

۱۰) اگر A' ، B' و C' به ترتیب منعکس‌های نقاط A ، B و C به مرکز H – مرکز ارتفاعی مثلث ABC – و مقدار ثابت k باشند ثابت کنید H مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ است.

۱۱) اگر دایره‌ای بر دو ضلع یک مثلث و بر دایره‌ی محیطی آن مماس داخلی (یا خارجی) باشد ، ثابت کنید خطی که از نقاط تماس آن با اضلاع می‌گذرد، از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی (یا دایره‌ی محاطی خارجی متناظر) نیز می‌گذرد.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) زوایای B و D در چهارضلعی $ABCD$، برابر ۱۳۵° است. عمودهای خارج شده از نقطه‌ی C بر اضلاع BC و DC، امتداد اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع می کنند. دوایر محیطی مثلث‌های ABD و AEF یکدیگر را در P قطع می‌کنند. نشان دهید: $\widehat{APC} = ۹۰^{\circ}$ (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۳۸۱)

۲) در چهارضلعی $ABCD$، دو ضلع AD و BC با هم برابرند. خط متغیری دو ضلع BC و AD را به ترتیب در نقاط Eو F قطع می‌کند به طوری که داریم $CE=AF$. این خط دو قطر AC و BD را نیز در نقاط P و Q قطع می‌کند. اگر محل تقاطع دو قطر AC و BD را K بنامیم نشان دهید که با تغییر خط مذکور، دایره محیطی مثلث KPQ همواره از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد. (المپیاد جهانی ریاضی سال ۲۰۰۵)

۳) ثابت کنید در مثلث ABC، وسط ارتفاع AH و محل تماس دایره محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC و نقطه I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث با یکدیگر هم خطاند.

۴) فرض کنید دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D، E و F به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB مماس باشد. ثابت کنید O و I مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC بر خط اویلر مثلث DEF قرار دارند.

۵) وتر AB از دایره‌ی (O) مفروض است. دو دایره (O_1) و (O_2) با دایره‌ی (O) مماس داخل و بر پاره‌خط AB در نقطه‌ی C مماس می‌باشند. ثابت کنید که نسبت شعاع‌های دو دایره‌ی (O_1) و (O_2) مستقل از مکان نقطه C مقداری ثابت است.

۶) مسأله چاقوی کفاشی: فرض کنید C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد. ثابت کنید شعاع دو دایره‌ای که هر کدام هم بر دو دایره از دوایر به قطرهای AB، ACو BC و هم بر خط عمود بر AB که از C می‌گذرد، مماس است، با یکدیگر برابرند.

۷) نقطه‌ی E را در چهارضلعی محاطی $ABCD$ طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم: $\widehat{EAD} + \widehat{ECD} = \widehat{EBC} + \widehat{EDC} = ۹۰^{\circ}$ اگر O مرکز دایره محیطی چهار ضلعی $ABCD$ و F محل برخورد اقطار AC و AB باشد نشان دهید که نقاط O، E و F هم‌خطاند.

۸) نیم‌دایره‌ای به قطر AB و مرکز O مفروض است. از نقطه‌ی M روی امتداد AB که $MA < MB$، قاطعی رسم می کنیم تا نیم دایره را در نقاط C و D قطع کند به طوری که $MC<MD$. دوایر محیطی مثلث‌های OAC و OBD یکدیگر را در K قطع می‌کنند. ثابت کنید: $\widehat{OKM} = ۹۰^{\circ}$.

۹) دایره محاطی مثلث ABC، در نقاط D، E و F بر اضلاع BC، AC و AB مماس است. AD این دایره را در نقطه‌ی M قطع می کند. نقطه‌ی M را به نقاط B و C وصل می‌کنیم تا دایره محاطی را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند. اگر $AM = MD$، ثابت کنید: $PF \parallel QE$

۱۰) اوساط اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب A'، B' و C' می نامیم. از رأس A عمودی بر $A'H$ رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل را در A_1 قطع کند. اگر B_1 و C_1 را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم نشان دهید سه نقطه A_1، B_1 و C_1 هم‌خطاند و این خط بر خط اویلر مثلث ABC عمود است.

۱۱) نشان دهید عمودهایی که در مرکز دایره محاطی مثلث بر سه نیمساز داخلی این مثلث رسم می شوند ، اضلاع متناظر را در سه نقطه روی خطی که بر OI عمود است قطع می‌کنند.

۱۲) AD، BE و CF ارتفاع های مثلث ABC می‌باشند. از H مرکز ارتفاعی مثلث ABC، خطی موازی EF رسم می‌کنیم تا خط BC را در A' قطع کند. نقاط B' و C' را نیز به طور مشابه تعریف می کنیم. ثابت کنید نقاط A'، B' و C' بر روی خطی که بر OH عمود است قرار دارند.

۱۳) H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و P نقطه دلخواهی در صفحه می‌باشد. ارتفاع AH و خط AP دایره محیطی مثلث ABC را به ترتیب در A_1 و A_2 قطع می کنند. خط A_1A_2 خط BC را در نقطه A' قطع می‌کند. اگر B' و C' نیز به طور مشابه تعریف شوند ثابت کنید نقاط A'، B' و C' بر خطی که بر $P'H$ عمود است ، واقع‌اند. P' مزدوج هم‌زاویه نقطه‌ی P (مسأله ۴-۲) نسبت به مثلث ABC می‌باشد.

۱۴) خط l اضلاع مثلث ABC را در A'، B' و C' قطع کرده است. پای عمودهای وارد از A، B و C بر $A'H$، $B'H$ و $C'H$ را به ترتیب A''، B'' و C'' می‌نامیم. نشان دهید AA''، BB'' و CC'' روی خط عمودی که از H بر l رسم می‌شود همرس‌اند.

منابع

[۱] ای. ف. شاریگین، « مسأله‌هایی در هندسه‌ی مسطحه» ترجمه‌ی ارشک حمیدی، تهران، انتشارات مبتکران، چاپ دوم ۱۳۷۹.

[۲] ناتان آلتشیلر کورت، « هندسه‌ی مسطحه» ترجمه‌ی محمود دیانی، تهران، انتشارات فاطمی، چاپ دوم ۱۳۷۹.

[۳] ولیدشتی، جاوید، « هندسه»

[۴] ای. ام. یاگلم، « تبدیل‌های هندسی» جلد اول، ترجمه‌ی اسدا. . . کارشناس و عمید رسولیان، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۹.

[۵] ای. ام. یاگلم، « تبدیل‌های هندسی» جلد دوم، ترجمه‌ی محمد باقری، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۹.

[۶] اصلاح‌پذیر، بهمن، « المپیاد ریاضی : تبدیلات هندسی»، جلد اول، تهران، انتشارات مبتکران، چاپ اول ۱۳۸۲.

[۷] اصلاح‌پذیر، بهمن، « المپیاد ریاضی : تبدیلات هندسی»، جلد دوم، تهران، انتشارات مبتکران، چاپ اول ۱۳۸۲.

[۸] احمدلو، مهران؛ ارزاقی، محمدعلی، « هندسه در المپیادهای ریاضی ایران و جهان» ، جلد اول، تهران، انتشارات خوشخوان، چاپ اول ۱۳۸۳.

[۹] رستمی، محمدهاشم، « دایره المعارف هندسه» ، جلد اول، تهران، انتشارات مدرسه، چاپ سوم ۱۳۸۲.

[۱۰] رستمی، محمدهاشم، « دایره المعارف هندسه» ، جلد دوم، تهران، انتشارات مدرسه، چاپ دوم ۱۳۸۲.

[۱۱] محمودیان، عباد ا . . ، « المپیاد ریاضی در ایران » ؛ تهران، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم ۱۳۷۶.

[۱۲] محمودیان، عباد ا . . . ، ملا[illegible] کارای، کیوان؛ اخباریفر، مهران، « المپیاد ریاضی در ایران» ، جلد دوم، تهران، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ اول ۱۳۷۹.

[۱۳] مترجمین : آجرلو، امیر؛ خزایی، بهزاد، « مسایل پیشنهادی برای المپیادهای بین المللی ۲۰۰۱–۱۹۹۵»، تهران، انتشارات دانش‌پژوهان جوان، چاپ اول ۱۳۸۱.

[۱۴] مترجم، محمد آبادی، مرتضی، « المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف ۱۹۹۵» ، تهران، انتشارات دانش‌پژوهان جوان، چاپ اول ۱۳۸۳.

[۱۵] تی. آندرسکو، کی، کولایا، « المپیاد ریاضی در نقاط مختلف جهان ۱۹۹۶» ، ترجمه‌ی بیاتی، محسن؛ سلماسیان، محسن، اصفهان، انتشارات فروغ ولایت، چاپ اول ۱۳۷۸.

[۱۶] مترجمین : بهزادی، مهدی؛ زائری، محمد، « المپیادهای ریاضی گوشه و کنار جهان – ۱۹۹۸» ، تهران، انتشارات سلطان، چاپ اول ۱۳۸۰.

[۱۷] انجمن استادان ریاضی بلژیک، « المپیادهای ریاضی بلژیک» ، ترجمه عبدالحسین مصحفی، انتشارات فاطمی.

[۱۸] گروهی از ریاضیدانان شوروی، « برگزیده مسایل هندسه» ترجمه عادل ارشقی، مؤسسه خدمات فرهنگی رسا، چاپ اول ۱۳۷۰.

[۱۹] هـ. س. م. کوکس تیر، س. ل. گرتیرز، « بازآموزی و باز شناخت هندسه» ، ترجمه عبدالحسین مصحفی، انتشارات مدسه، چاپ پنجم ۱۳۶۹.

[۲۰] دوره نشریه المپیاد ریاضی کوشیار.

[۲۱] دوره نشریه دانش پژوه، باشگاه دانش پژوهان جوان

[۲۲] حاجی زاده، نادر؛ کرد حسین؛ بازوی، حسین، « هندسه سال دوم» ، انتشارات خوشخوان، ۱۳۸۱.

[۲۳] حاجی زاده ، نادر؛ بازوی ، صادق، « هندسه ۲» ، انتشارات خوشخوان ۱۳۸۳.

[۲۴] اخباریفر، مهران؛ حمیدی، ارشک؛ محسنی پور، شهرام، « هندسه ۱» انتشارات فاطمی ۱۳۸۳.

[۲۵] هندسه ۱ نظام جدید آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۲۶] هندسه ۲ نظام جدید آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۲۷] جمعی از ریاضیدانان شوروی، « مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف» ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات فردوس.

[۲۸] پ. گوسیا تنیکوف؛ س. رژنی چنکو، « جبر برداری» ترجمه پرویز شهریاری و ابراهیم عادل، انتشارات فاطمی ۱۳۶۹.

[۲۹] راس هانسبرگر؛ « از اردوش تا کی‌یف» انتشارات فاطمی.

[۳۰] آرتور انگل؛ « استراتژی‌های حل مسأله» انتشارات مبتکران.