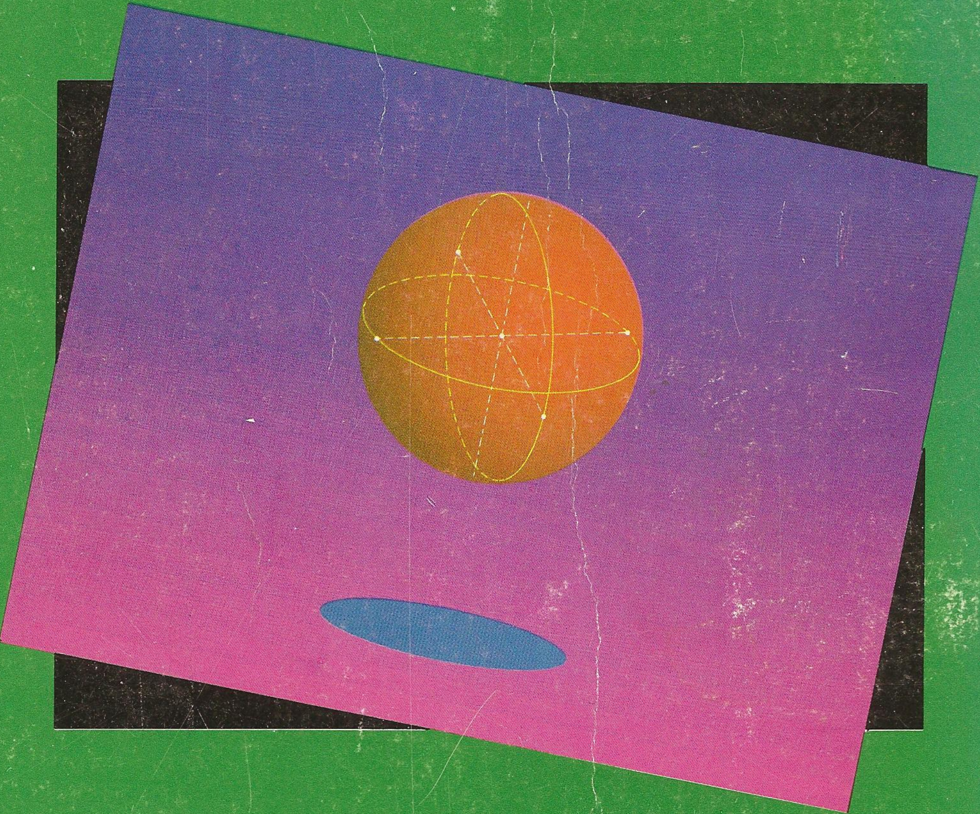
هندسهٔ مقدماتی

از دیدگاه پیشرفته

تألیف: اِدوین اِ. موئیز

مبتکران
شرکت خدمات
آموزشی و فرهنگی
۵ تیر
۱۳۶۵



مترجمین:
دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری

هندسهٔ مقدماتی

از دیدگاه پیشرفته

تألیف: اِدوین اِ. موئیز

ترجمهٔ: دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری

Moise, Edwin E.
Elementary geometry from an advanced standpoint / by Edwin E. Moise. —3rd ed.
p. cm.
ISBN 0-201-50867-2
1. Geometry. I. Title.
QA445.M58 1990
516.2—dc20

ناشر: مبتکران
خیابان طالقانی، نرسیده به‌خیابان شریعتی، کوچهٔ طباطبایی‌مقدم، شمارهٔ ۳۹، طبقهٔ اول
کد پستی ۱۵۶۱۹ تلفن ۷۶۲۸۲۳

نام‌کتاب: هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته

---

* **مؤلف** : اِدوین اِ. موئیز
* **مترجمین** : دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری
* **چاپ اول** : تابستان ۱۳۷۳
* **تیراژ** : ۳۰۰۰ جلد
* **حروفچینی**: کلمه‌پرداز
* **لیتوگرافی** : طراوت

مقدمه

عنوان این کتاب از نظر مؤلف بهترین شرح مختصر برای محتوا و اهداف آن است. این اهداف تا اندازه‌ای با اهداف بیشتر کتابهای «هندسهٔ عالی» یا مبانی هندسه فرق دارد. اختلافی که در اینجا مطرح است نظیر اختلاف بین دو نوع حساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته‌ای است که حالا معمولاً تدریس می‌شود. در بعضی از دوره‌های حساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته مطالبی تدریس می‌شود که ابداً در دوره‌های قبلی نیامده است. دوره‌های دیگری هست که بهتر است آنها را دوره‌های حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی از دیدگاه پیشرفته دانست: هدف آنها رفع ابهامات دوره‌های قبلی و ارائهٔ تعاریف و قضایای معتبر برای مفاهیم و قضایایی است که قبلاً خوانده‌اند. یکی از اهداف کتاب حاضر بررسی مجدد هندسه است.

اگر قبول داریم که هندسهٔ مقدماتی ارزش کاملاً فهمیدن را دارد آنگاه نیاز به‌چنین کاری است و فعلا در هیچ دورهٔ پیش دانشگاهی چنین کاری انجام نمی‌شود. هندسهٔ عالی را معمولاً با این فرض کاملاً مشکوک شروع می کنند که مبانی خوب درک شده است. و دروه‌های مبانی (در حالی که بندرت تدریس می‌شوند) بر مبنای مجموعه‌ای ظریف از اصول بنا می‌شود و آن‌قدر کند پیش می‌رود که مقدار کمی از موضوع را می‌پوشاند. حاصل کار این است که دانشجویان ریاضی معمولاً دورهٔ پیش دانشگاهی (کالج) را در حالی ترک می کنند که درک آنها از هندسهٔ مقدماتی خیلی بهتر از آنچه در دبیرستان داشته‌اند نیست.

در این کتاب هدف آن است که تا سرحد امکان این مطلب مقدماتی و مطالب جنبی آن را روشن سازیم. تجربهٔ خودم از تدریس در کلاسهای خوب نشان می‌دهد که نباید از قبل فرض کنیم مطلبی را بطور دقیق می دانند. بعلاوه سبک و زبان هندسهٔ سنتی تا اندازه‌ای با سبک و زبان بقیهٔ ریاضیات امروز ناسازگار است. بنابراین باید قبل از هر چیز آموخته‌های قبلی را مجدداً تنظیم کرد. (مثلاً فصل ۶، انطباق مثلثها را ببینید.) در بعضی حالات اجبار بیشتری به‌این کار است. مثلاً اگر دانشجو اثبات قضایای نظریهٔ نامساویهای هندسی، بدون استفاده از اصل توازی اقلیدس، را که در فصل هندسهٔ

هذلولوی بکار رفته است نداند؛ این قضایا مناسب نخواهد بود.

به این دلایل کتاب از مقدمات شروع می‌شود. بعضی از فصول برای کلاسهای قوی کاملاً ساده‌اند و می‌توان آنها را بعنوان تکلیف خارج از کلاس تعیین کرد. بقیه از قبیل فصول ۲۰ و ۲۴ مشکل‌ترند. این اختلافات ناشی از ماهیت موضوع است. همیشه نمی‌توان با قدم زدن در طول راهی با شیب ثابت از نقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر رفت.

این ناهمواری در سطح مشکل بودن کتاب را قابل تغییر کرده است. در کلاس با آمادگی خوب می‌توان فصول ۱-۷ را سریع خواند و بیشتر وقت را به‌موادی اختصاص داد که در فصول ۸، ۱۰، ۱۴، ۱۹ و ۲۰ آمده است. در کلاس با آمادگی ضعیف می‌توان فصول ۱-۷ را بدقت خواند و فصولی از قبیل ۱۴ و ۲۰ را حذف کرد و باز هم به‌فصل ۲۵ رسید.

این کتاب واقعاً خود کفاست. آنچه از نظریهٔ معادلات و نظریه اعداد لازم است در فصول ۲۸ و ۲۹ آخر کتاب آمده است. در بحث هندسه خیلی جاها به‌مطالبی از جبر و آنالیز نیاز داریم. این مفاهیم را بطور کامل توضیح داده‌ایم بخاطر آن که حذف توضیحات از یافتن منابع مناسب و خواندنی ساده‌تر است. تنها استثنای آن در فصل ۲۲ است که حدود $\varepsilon-\delta$ را دانسته فرض کرده‌ایم.

در بعضی فصول، بخصوص فصول ۲۰ و ۲۵، شرح کامل مباحثی را آورده‌ایم که معمولاً و عمداً حذف و خلاصه می‌شوند. روشی که به‌وسیلهٔ آن اعداد حقیقی را، به‌منظور اندازه گیری، وارد هندسهٔ ارشمیدسی کرده‌ایم فوق‌العاده مهم و نابدیهی است. درمورد اثبات سازگاری اصول هذلولوی هم همین‌طور است. در اینجا (مثل جاهای دیگر) هدف کتاب توضیح کامل و روشن مفاهیمی است که در بسیاری جاها به‌آن اشاره می‌شود اما کمتر آن را می‌فهمند.

چاپ سوم در موارد زیر با چاپهای اول و دوم فرق دارد.

۱. در مورد شرح حال ریاضیدانان بزرگ: اقلیدس، دکارت، لوباچفسکی، هیلبرت و بیرکهوف با تأکید بر سهم آنها در هندسه مطالبی اضافه کرده‌ام.

۲. بخش ۴.۶، هفت پل کونیگسبرگ جدید است.

۳. بخش ۱۳.۶، ادامهٔ برنامهٔ اقلیدس: هم مساحت بدون مساحت، جدید است.

۴. فصل ۲۸ چاپ اول مثالی از یک میدان مرتب دارد که ارشمیدسی نیست. اگر میدان اقلیدسی باشد یعنی هر عضو مثبت دارای ریشهٔ دوم باشد، مثال قابل توجه‌تر خواهد بود. در فصل ۳۲ جدید مثال اقلیدسی شده است.

معتقدم که با این تغییرات کتاب بهتر می‌شود و مطمئنم که هیچ یک از این تغییرات مضر نیست.

دستنویس این چاپ توسط افراد زیر بطور کامل و با دقت بررسی شده است: کریس کوری از دانشگاه ایالتی اوتا، ریچارد راجرز، از دانشگاه ایالتی وبر، جیمز اسلیفکر، از دانشگاه بین‌المللی فلوریدا، جری ال. یانگ از دانشگاه ایالتی بویسی.
از نظرات آنها استفاده کرده‌ام و لذا از آنها سپاسگزارم.

ای.ای-ام
سپتامبر ۱۹۸۹

فهرست مطالب

فصل ۱

جبر اعداد حقیقی

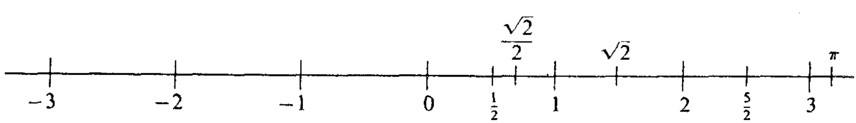
۱.۱ مقدمه

در این کتاب اساساً به هندسه می‌پردازیم. از ابتدا شروع کارمان را بر اصولی قرار می‌دهیم که به دقت مطرح شده‌اند. به گونه‌ای که در این طریق، ما روشی را به کار خواهیم برد که در مطالعه هندسه از زمانی که اقلیدس مقدمات آن را نوشت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اما اصول ما با اصول اقلیدس متفاوت خواهد بود. دلیل اصلی ما برای این اختلاف آن است که هندسه به همان صورتی که در زمان نوشتن مقدمات آن به‌تنهائی استوار بود، در ریاضی مدرن نمی‌تواند به‌تنهائی استوار باشد. در ریاضی مدرن سیستم اعداد حقیقی نقش مرکزی را ایفاء می‌کند و بررسی و درک هندسه نیز اگر به‌اعداد حقیقی اجازهٔ ایفای نقش طبیعی‌شان را بدهیم، بسیار ساده‌تر می‌باشد. بنا به‌همین دلیل، مرحلهٔ اوّل برنامه ما قرار دادن دستگاه اعداد حقیقی روی همان پایهٔ استواری است که قصد داریم برای هندسه فراهم سازیم، که این کار اوّل با بیان فرضیات واضح و سپس بنا کردن هندسه روی آنها صورت می‌گیرد.

۱.۲ جمع و ضرب اعداد حقیقی

ما اعداد حقیقی را همانند نقاطی که روی یک خط مرتب شده‌اند به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



شکل ۱.۱

اعداد حقیقی حداقل شامل همه اعداد زیر می باشند.

(۱) اعداد صحیح مثبت ۱،۲،۳،.....

(۲) عدد صحیح صفر

(۳) اعداد صحیح منفی ...،۳-، ۲-، ۱-

(٤) اعدادی که می‌توان آنها را به‌صورت کسری نوشت که صورت آن عددی صحیح و مخرج آن عددی صحیح و مخالف صفر باشد.

به‌عنوان مثال $-\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، ۱/۱۰۰۰۰۰۰ اعدادی از این گونه هستند. توجه کنید که اعداد نوع چهارم شامل سه نوع اوّل نیز می باشد، زیرا هر عدد صحیح n برابر است با $n/۱$. لذا آنچه تا بحال داریم، اعدادی به‌شکل p/q می باشند که p و q اعداد صحیح و q مخالف صفر است. اینها را اعداد گویا می نامیم. منظور از این جمله چنین نیست که هر نوع دیگری از اعداد باید نامعقول باشد. این تنها اشاره به‌این حقیقت دارد که یک عدد گویا نسبت دو عدد صحیح است.

همانطوری که می دانید، اعداد حقیقیِ بسیار زیادی وجود دارند که به‌این شکل نیستند. بعنوان مثال، $\sqrt{۲}$ نسبت هیچ دو عدد صحیح نمی‌باشد. این گونه اعداد بنام اعداد غیر گویا (گنگ) نامیده می‌شوند.

ما خواص اساسی اعداد حقیقی را به‌صورت اصول بیان می کنیم. یک مجموعه R که اعضاء آن اعداد حقیقی (یا اعداد در صورتی که معنی آن از سیاق مطلب واضح باشد) نامیده می‌شود به‌ما داده شده است. دو عمل جمع و ضرب هم که با + و · نشان داده می‌شوند داده شده است.

لذا ساختمان جبری که با آن سر و کار داریم یک سه‌تائی به‌صورت زیر است

$$[R, \ + \ \cdot]$$

خواص دستگاه به‌صورت زیر است.

ج-۱. R تحت عمل جمع بسته است. بدین معنی که اگر a و b به R تعلق داشته باشند، آنگاه $a+b$ نیز به R تعلق خواهد داشت.

ج-۲. عمل جمع در R دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. بدین معنی که اگر a,b و c به R تعلق داشته باشند آنگاه

$$a+(b+c)=(a+b)+c \ .$$

ج-۳. دقیقاً یک عضو از R که با ۰ نشان داده می‌شود وجود دارد بطوری که برای هر a از R

$$a+0=0+a=a \ .$$

ج-۴. برای هر a در R دقیقاً یک عدد $-a$ در R وجود دارد که قرینه (منهای) a نامیده می‌شود به‌طوری که

$$a+(-a)=(-a)+a=0 \ .$$

ج-۵. عمل جمع R دارای خاصیت جابجائی است. به این معنی که اگر a و b متعلق به R باشند، آنگاه

$$a+b=b+a$$

این اصول ج-۱ تا ج-۵، شماره گذاری شده‌اند، زیرا آنها اصولی هستند که به‌جمع مربوط می‌شوند. حال به‌سراغ عمل ضرب می‌رویم.

ض-۱. R تحت عمل ضرب بسته است. بدین معنی که اگر a و b به R تعلق داشته باشند آنگاه ab نیز متعلق به R است.

(در اینجا و از این به‌بعد، ما حاصلضرب $a \cdot b$ را مختصراً به‌صورت ab نشان می‌دهیم. این فقط به‌خاطر راحتی است و ما مستمراً این کار را نخواهیم کرد. به‌عنوان مثال هنگامی که می‌نویسیم ۲۶ منظورمان بیست و شش است نه دوازده).

ض-۲. عمل ضرب در R دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. بدین معنی که اگر a و b و c به R تعلق داشته باشند آنگاه

$$a(bc)=(ab)c \ .$$

ض-۳. دقیقاً یک عنصر از R که با ۱ نشان داده می‌شود وجود دارد بطوریکه برای هر a در R

$$a\text{۱}=\text{۱}a=a \ .$$

ض-۴. برای هر a در R، به‌غیر از صفر، دقیقاً یک عدد $a^{-\text{۱}}$ که معکوس a خوانده می‌شود وجود دارد به طوری که

$$aa^{-\text{۱}}=a^{-\text{۱}}a=\text{۱} \ .$$

ض-۵. عمل ضرب در R دارای خاصیت جابجائی است. بدین معنی که اگر a و b به R تعلق داشته باشند، آنگاه

$$ab=ba \ .$$

ض-۶. ۱ از ۰ متمایز است.

این اصل ممکن است عجیب به‌نظر برسد امّا لازم است. تحت اصول قبلی، ما هیچ تضمینی برای این موضوع که در R به‌غیر از صفر عددی هست، نداریم. تا کنون اصول در مورد جمع و ضرب جداگانه بود. این دو عمل توسط اصل زیر بهم مربوط می گردند.

ج ض-۱. **قانون توزیعپذیری**. اگر a، b و c متعلق به R باشند آنگاه

$$a(b+c)=ab+ac \ .$$

علاوه بر این اصول، ممکن است شما نیاز به‌دو گزاره زیر را احساس کنید.

ت-۱. اگر

$$c=d \;,\; a=b$$

آنگاه

$$a+c=b+d$$

ت-۲. اگر

$$c=d \;,\quad a=b$$

آنگاه

$$ac=bd \;.$$

در اینجا چنین باید بَرداشت شود که a، b، c و d به R تعلق دارند. امّا این عبارتها در حقیقت اصولی برای دستگاه اعداد حقیقی نیستند. آنها فقط در جهت یادآوری ما از اینکه عمل جمع و ضرب هر دو در چه مورد می‌باشند کمک می کنند. عبارت اوّل چنین می گوید که مجموع دو عدد بستگی به‌آن اعداد دارد و نه به‌حروفی که ما برای نمایش اعداد بکار می‌بریم. قانون دوم ت- ۲، نیز چنین است.

در تمام این کتاب علامت «$=$» همواره به‌معنی «این همان است» می باشد. طبق معمول «$\neq$» به‌معنی «مخالف است با» می‌باشد.

تفریق به کمک منفی‌های داده شده به‌وسیله ج- ٤ تعریف می‌شود. یعنی، طبق تعریف

$$a-b=a+(-b)$$

به‌طور مشابه، عمل تقسیم نیز به کمک معکوسهای داده شده توسط ض- ٤ تعریف می گردد. لذا بنابراین تعریف اگر $b\neq ۰$ آنگاه

$$\frac{a}{b}=a\div b=ab^{-۱}$$

با استفاده از اصولِ فوق تمام قوانین معمولی حاکم بر جمع و ضرب را می‌توان بدست آورد. این کار را به‌صورت زیر شروع می کنیم.

■ **قضیهٔ ۱.** برای هر a، $a۰=۰$

اثبات. بنابر ج- ۳ داریم

$$۱=۱+۰ \;.$$

بنابراین

$$a\cdot۱=a(۱+۰)$$

لذا

$$a=a۱+a۰ \;,$$

$$a=a+a۰ \;,$$

$$(-a)+a=(-a)+(a+a\circ)$$
$$\circ=[(-a)+a]+a\circ$$
$$\circ=\circ+a\circ$$

و

$$\circ=a\circ$$

و اثبات کامل است. (شما باید قادر باشید دلیل هر مرحله را با توجه به‌اصول مربوطه بیان کنید.) □

■ **قضیهٔ ۲.** اگر $ab=\circ$ آنگاه $a=\circ$ یا $b=\circ$

اثبات. فرض کنید $ab=\circ$. کافی است نشان دهیم که اگر $a\neq\circ$ آنگاه $b=\circ$. اگر $a\neq\circ$، آنگاه a معکوسی مانند a^{-1} دارد. بنابراین

$$a^{-1}(ab)=a^{-1}\circ$$
$$=\circ$$

امّا

$$a^{-1}(ab)=(a^{-1}a)b$$
$$=1\cdot b=b\ .$$

بنابراین $b=\circ$، یعنی اثبات کامل است □

البته این همان قضیه‌ای است که در حل معادلات توسط فاکتورگیری از آن استفاده می کنیم. اگر

$$(x-1)(x-2)=\circ\ ,$$

آنگاه $x=1$ یا $x=2$، زیرا حاصلضرب $(x-1)$ و $(x-2)$ در صورتی می‌تواند صفر شود که یکی از عاملهای $(x-1)$ یا $(x-2)$ صفر باشد. شما به‌این قاعده کلی احتیاج دارید تا مطمئن باشید که هیچ فردی با بررسی معادله از راهی دیگر جواب اضافه‌ای برای آن پیدا نمی کند.

■ **قضیهٔ ۳.** صفر هیچ معکوسی ندارد، به‌این معنی که هیچ عددی مانند x وجود ندارد به‌طوری که

$$\circ x=1\ .$$

اثبات. می دانیم که برای هر x، $\circ x=\circ$. اگر برای x ی داشته باشیم $\circ x=1$، نتیجه می گیریم که $1=\circ$. این غیرممکن است، زیرا ض-۶ بیان می کند که $1\neq\circ$. □

این قضیه به‌ما دلیل عدم امکان تقسیم بر صفر را بیان می کند. اگر تقسیم بر صفر معنی داشت در این صورت آن ضرب در «معکوس صفر» می‌بود. از آنجا که چنین معکوسی وجود ندارد، لذا عملی چون تقسیم بر صفر وجود ندارد.

■ **قضیهٔ ۴. قانون حذف در جمع (اسقاط)**ـ اگر $a+b=a+c$، آنگاه $b=c$.

اثبات. اگر

$$a+b=a+c$$

در آن صورت:

$$(-a)+(a+b)=(-a)+(a+c)\ ,$$
$$[(-a)+(a)]+b=[(-a)+a]+c\ ,$$
$$0+b=0+c\ ,$$
$$b=c\ . \quad \square$$

■ **قضیهٔ ۵. قانون حذف در ضرب.** اگر $ab=ac$ و $a\neq 0$، آنگاه $b=c$.

اثبات. اگر $ab=ac$، و $a\neq 0$ آنگاه a دارای معکوسی مانند a^{-1} است.

لذا

$$a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)\ ,$$
$$(a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c\ ,$$
$$1b=1c\ ,$$

و

$$b=c\ . \quad \square$$

■ **قضیهٔ ۶.** برای هر a، $a=(-a)-$

اثبات. طبق تعریف قرینه، عدد $(-a)-$ عددی چون x است به طوری که

$$(-a)+x=x+(-a)=0$$

عدد a دارای این خاصیت است، زیرا

$$(-a)+(a)=a+(-a)=0$$

امّا بنابر ج- ٤ هر عدد درست یک قرینه دارد. بنابراین a قرینهٔ $a-$ است، و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. $\square$

■ **قضیهٔ ۷.** برای هر a و b، $(-a)b=-(ab)$.

اثبات. کافی است نشان دهیم

$$(-a)b+ab=ab+(-a)b=0\ ,$$

زیرا منظور این عبارت چنین می‌باشد که $(-a)b$ قرینهٔ (ab) است. طبق قانون تعویض‌پذیری

(جابجائی)، کافی است نشان دهیم که

$$(-a)b+ab=0 \ .$$

بنا بر قانون توزیع پذیری،

$$(-a)b+ab=[(-a)+a]b \ .$$

از آنجا که $(-a)+a=0$ و $0b=0$ خواهیم داشت

$$(-a)b+ab=0 \ ,$$

و حکم ثابت می‌شود. $\square$

این قضیه به‌ما «قانون علامتها» را ارائه می‌دهد که تحت آن $(-2)4=-8$ و $(-7)4=-28$

■ **قضیهٔ ۸.** برای هر a و b، $(-a)(-b)=ab$.

اثبات.

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]=-[(-b)a]=-[-(ba)]=ba=ab \ .$$

(دلیل هر مرحله را بیان کنید.) $\square$

البته این قانون دوم علامتها است که چنین می گوید $(-3)(-4)=12$

■ **قضیهٔ ۹.** معکوس حاصلضرب برابر است با حاصلضرب معکوسها. بدین معنی که برای هر $b\neq 0$ ، $a\neq 0$ ، $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$.

اثبات. کافی است نشان دهیم $(ab)(a^{-1}b^{-1})=1$.

اکنون

$$(ab)(a^{-1}b^{-1})=a[b(a^{-1}b^{-1})]=a[b(b^{-1}a^{-1})] =$$
$$a[(bb^{-1})a^{-1}]=a[1a^{-1}]=aa^{-1}=1 \ . \quad \square$$

■ **قضیهٔ ۱۰.** قرینهٔ مجموع برابر است با مجموع قرینه‌ها. یعنی،

$$-(a+b)=(-a)+(-b) \ .$$

اثبات. کافی است نشان دهیم $(a+b)+[(-a)+(-b)]=0$.

برای جلوگیری از پرانتزهای بیش از حد، فقط در این اثبات توافق می کنیم که $-x$ را به x' نشان دهیم.

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)]&=(a+b)+(a'+b')=a+[b+(a'+b')]\\&=a+[b+(b'+a')]=a+[(b+b')+a']\\&=a+[0+a']=a+a'=0 \ .\end{aligned}$$

دقت کنید که اثبات این قضیه دقیقاً مشابه با اثبات قضیهٔ قبلی است. □

به‌طور یقین ما می‌توانیم اثبات قضایایی نظیر قضیهٔ فوق را بطور نامحدود ادامه دهیم. در حقیقت، اگر جهت تفکّر لحظه‌ای تأمل کنید چنین در می‌یابید که هر بار که شما محاسبات جبری را انجام داده‌اید عملاً قضیه‌ای از این نوع را اثبات کرده‌اید. بعنوان مثال، هنگامی که از $x^۲-a^۲$ فاکتورگیری و به $(x-a)\ (x+a)$ می‌رسید، چنین ادعا می‌کنید که قضیهٔ زیر برقرار است.

■ **قضیهٔ ۱۱**. برای هر x و a داریم

$$(x-a)(x+a)=x^۲-a^۲ \ .$$

(ثابت کنید؟)

معادله‌ای را که برای تمام اعداد حقیقی برقرار است یک اتحاد جبری می‌نامند. با این زبان دو قانون شرکت‌پذیری چنین بیان می‌کنند که معادلات $a+(b+c)=(a+b)+c$ ، $a(bc)=(ab)c$ اتحادهای جبری هستند، قانون توزیع‌پذیری بیان می‌کند که معادله $a(b+c)=ab+ac$ یک اتحاد جبری است، و غیره.

در تمرینهای بعدی شما می‌توانید از دو قانون شرکت‌پذیری بدون توضیح استفاده کنید. در حقیقت، از آنجا که دسته‌بندی جملات یا فاکتورها موضوع مهمی نیستند، به‌هیچ‌وجه نیاز نداریم به‌دسته‌بندی اشاره کنیم.

ما می‌توانیم از $a+b+c$ و یا $(a+b)+c$ و همین‌طور به‌صورت مشابه برای ضرب استفاده می‌کنیم و همین کار را نیز برای ضرب n تائی، به‌شکل $a_۱a_۲\cdots\ a_n$ نیز می‌توانیم انجام دهیم. اگرچه برهان و توجیه آن مشکل‌تر از چیزی است که شما ممکن است فکر کنید. (بخش ۱.۱۰ را ببینید) طبق معمول $a^۲$ یعنی، aa، $a^۳$ یعنی aaa و غیره. به‌طور مشابه ۲ یعنی ۱ + ۱ و ۳ یعنی ۱ + ۲ = ۱ + ۱ + ۱، و غیره.

مجموعه مسائل ۱.۲

نشان دهید که معادلات زیر اتحادهای جبری هستند. تمام احکام باید مانند قضایا در نظر گرفته شوند و باید براساس همان اصول و قضایایی که تا به‌حال اثبات شده است، ثابت شوند. برای هر مرحله از اثبات دلیلی ذکر کنید.

۱. $b(-a)=-(ab)$

۲. $(-a)(-b)=ba$

۳. $a(b+c)=ca+ba$

۴. $a(b-c)=ab-ac$

۵. $-۰=۰$

۶. $a-0=a$

۷. $a^3b=ba^3$ (سعی کنید اثبات خیلی کوتاهی ارائه دهید.)

۸. $a+a=2a$

۹. $(-a)+(-a)=(-2)a$

۱۰. $a^2(b^2+c^2)=a^2b^2+a^2c^2$

۱۱. $a^2(b^2-c^2)=-a^2c^2+a^2b^2$

۱۲. $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$

۱۳. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

۱۴. اگر ۱ عدد داده شده توسط ض-۳ باشد. طبق معمول چنین تعریف می کنیم که

$$2=1+1\ ,\quad 3=2+1\ ,\quad 4=3+1$$

با استفاده از اصول این بخش ثابت کنید

$$2+2=4$$

(یا، اگر تمایل دارید، ثابت کنید که ۲+۲=۴)

قسمت‌های بعدی سؤالهای قابل بحث می باشند.

۱۵. فرض کنید تفریق بعنوان یک عمل در نظر گرفته شود. آیا این عمل از قانون شرکت‌پذیری پیروی می کند. بعبارت دیگر آیا $(a-b)-c=a-(b-c)$ یک اتحاد جبری است؟ و اگر نیست، تحت چه شرایطی معادله برقرار است؟ (لازم نیست این سؤال را براساس اصول مطرح شده جواب دهید بلکه شما آزاد هستید تا آنچه را در مورد جبر می‌دانید بکار ببرید).

۱۶. فرض کنید تقسیم بعنوان یک عمل در نظر گرفته شود. آیا این عمل از قانون شرکت‌پذیری پیروی می کند. بدین معنی که آیا معادله $(a/b)/c=a/(b/c)$ یک اتحاد جبری است. اگر نیست، تحت چه شرایطی معادله برقرار است؟

۱۷. آیا تفریق از قانون تعویض‌پذیری پیروی می کند؟ تقسیم چطور؟

جوابهای سه سؤال قبل اشاره بر این مطلب دارد که چرا ما در هنگام فرموله کردن خواص اساسی اعداد حقیقی، تفریق و تقسیم را بعنوان عملهای اساسی در نظر نگرفتیم.

۱۸. اصل ض-۶ (که می گوید $1\neq 0$) ممکن است غیر ضروری به‌نظر برسد، آیا چنین است؟ آیا می‌توان براساس اصول دیگر چنین ثابت کرد که اصلاً عددی غیر از صفر وجود دارد؟

۱۹. فرض کنید تنها عضوهای R صفر و یک باشند، و جمع و ضرب نیز توسط جدولهای زیر تعریف شده باشند. کدامیک از اصول برقرار می‌مانند.

$+$	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰

$\cdot$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

۲۰ـ فرض کنید ج-۳ را با عبارت زیر جای گزین کنیم:

ج- ′۳. حداقل یک عضو صفر از R وجود دارد بطوریکه برای هر a، $a=\circ+a=a+\circ$ نشان دهید که ج-۳ را می‌توان بر مبنای ج- ′۳ و اصول دیگر به‌عنوان یک قضیه ثابت کرد. برای این کار کافی است نشان دهید که اگر برای هر a، $a=\circ+a=a+\circ$ و $a=\circ'+a=a+\circ'$، آنگاه $\circ'=\circ$

۲۱. مانند مسئله قبل فرض کنید که ج-٤ را توسط عبارت زیر جای گزین کنیم:

ج - ′۴. به‌ازای هر عدد a حداقل یک عدد مانند $-a$ وجود دارد به‌طوری که $a+(-a)=(-a)+a=\circ$ نشان دهید که ج-٤ را می‌توان به‌عنوان یک قضیه ثابت کرد. برای این کار باید نشان دهید که اگر $a+x=x+a=\circ$، آنگاه $x=-a$.

۱.۳ میدانها

ساختمان جبری که در تمام اصول بخش قبل صدق می کند میدان نامیده می‌شود. چون توضیح دادیم که R نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی است، شاید در بیان تعریف ابتدائی میدان ارزش داشته باشد اجازه دهیم که میدان می‌تواند دستگاه اعداد حقیقی نباشد.

یک مجموعه F، که اعضاء آن اعداد نامیده می‌شوند، با دو عمل + و · که جمع و ضرب نامیده می‌شوند مفروض است. ساختمان $[F,+,\cdot]$ یک میدان نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشد.

ج- ۱. F تحت عمل جمع بسته باشد.

ج- ۲. عمل جمع در F شرکت‌پذیر باشد.

ج- ۳. F شامل درست یک عدد ۰ هست که به‌ازای هر a در F داریم

$$a+\circ=\circ+a=a \ .$$

ج- ۴. برای هر a در F درست یک قرینهٔ $-a$ در F وجود داشته باشد به طوری که

$$a+(-a)=(-a)+a=\circ \ .$$

ج- ۵. عمل جمع در F دارای خاصیت جابجائی (تعویض‌پذیری) باشد.

ض- ۱. F تحت عمل ضرب بسته باشد.

ض- ۲. عمل ضرب در F دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد.

ض- ۳. F شامل درست یک عضو ۱ هست به‌طوری که به‌ازای هر a در F داریم $a=۱a=a۱$.

ض- ۴. هر $a\neq\circ$ در F درست شامل یک معکوس $a^{-۱}$ باشد به‌طوری که

$$aa^{-۱}=a^{-۱}a=۱ \ .$$

ض-۵. عمل ضرب در F دارای خاصیت جابجائی باشد.
ض-۶. $1\neq 0$.
ج ض-۱. به‌ازای هر a، b و c در F داشته باشیم

$$a(b+c)=ab+ac\ .$$

تمام قضایای بخش قبل فقط براساس اصول فوق اثبات شدند و در نتیجه تمام این قضایا نه تنها در دستگاه اعداد حقیقی بلکه در هر میدانی برقرارند. به‌عنوان مثال، تمامی آنها در دستگاه جبری توصیف شده توسط مسئله ۱۹ از مجموعهٔ مسائل ۲-۱ برقرار می‌باشند.

مجموعه مسائل ۱.۳

هدف از این مجموعه مسائل فقط روشن ساختن معنی اصول یک میدان است. در پاسخ گوئی سئوالات زیر، شما مجازید از آنچه در جبر می‌دانید استفاده کنید. در بخش بعد کتاب، ما به‌ریاضی «رسمی» خود که براساس اصول می‌باشد برمی گردیم.

۱. فرض کنیم F مجموعه اعداد به‌شکل $p/2^q$ باشد که p و q اعداد صحیح هستند و $q\geqslant 0$. این اعداد بنام اعداد گویای دو تائی[1] نامیده می‌شوند. آیا این اعداد گویای دوتائی تحت تعاریف عمومی + و · تشکیل یک میدان را می‌دهند؟ کدامیک از اصول در صورت وجود، صادق نمی‌باشد.

۲. فرض کنیم F مجموعهٔ تمام اعداد مختلط با قدر مطلق برابر یک باشد. آیا طبق تعریف‌های عمومی + و ·، F تشکیل یک میدان می‌دهد؟ کدامیک از اصول میدان، در صورت وجود، صادق نمی‌باشد. (البته شما می‌توانید فرض کنید که مجموعهٔ تمام اعداد مختلط تشکیل یک میدان می‌دهد. در حقیقت چنین است)

۳. سؤال فوق را برای مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی مثبت بررسی کنید.

۴. فرض کنید که $\sqrt{2}$ غیر گویاست. نشان دهید که اگر a و b اعداد گویا باشند و $a+b\sqrt{2}=0$، آنگاه $a=b=0$

۵. نشان دهید که اگر a، b، c و d گویا باشند و $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ آنگاه $a=c$ و $b=d$

۶. فرض کنیم F مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به‌شکل $a+b\sqrt{2}$ باشد که a و b گویا هستند. آیا $[F,+,\cdot]$ یک میدان است؟

۷. ساختمان جبری $[F,+,\cdot]$ **یک حلقهٔ جابجائی (تعویض‌پذیر) با عضو واحد**[2] خوانده می‌شود اگر در تمام اصول میدان به‌جز احتمالاً در ض-٤ صدق کند. واضح است که هر میدان یک حلقهٔ جابجائی با عضو واحد است امّا هر حلقهٔ جابجائی با عضو واحد یک میدان نیست. دقیقاً یکی از

۱- dyadic rationals

۲- Commutative ring with unity

ساختمانهای جبری که در مسائل قبل شرح دادیم تشکیل یک حلقه تعویض‌پذیر با عضو واحد را می‌دهد امّا میدان نیست. آن کدام است؟

۸. در جبر اعداد حقیقی قضیه زیر برقرار است.

■ **قضیه.** اگر $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ آنگاه دستگاه معادلات

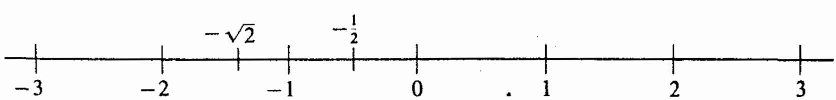
$$a_1x+b_1y=c_1 \quad , \quad a_2x+b_2y=c_2$$

دقیقاً توسط یک زوج اعداد $(x\,،\,y)$ برقرار می‌باشند.
آیا این قضیه برای هر حلقهٔ جابجائی با عضو واحد برقرار است؟ آیا در هر میدانی صادق است؟

۹. صفحهٔ مختصاتی با نقاط مشخص شده توسط زوج اعداد (x,y) را در نظر بگیرید. جمع دو نقطهٔ (u,v) و (x,y) را توسط نقطهٔ $(u+x \;,\; v+y)$ تعریف می‌کنیم. آیا این دستگاه در ج-۱ تا ج-۵ صدق می‌کند؟ آیا می‌توان ضرب دو نقطه را نیز به‌همان صورت تعریف کرد تا یک میدان داشته باشیم؟ اگر چنین است، چگونه؟

۱.۴ ترتیب دراعداد حقیقی

به‌خاطر داریم که، به‌طور غیر رسمی، می‌توان تصور کرد که اعداد حقیقی روی یک خط به‌صورت زیر مرتب شده باشند:



شکل ۱.۲

«وقتی می‌نویسیم $a<b$ بیان آن با استفاده از شکل این است که در روی محور عادی a در سمت چپ b قرار دارد. بنابراین $-۲<۱$ و $-۱۰۰۰۰۰۰<\frac{۱}{۱۰}$. قوانین حاکم بر رابطهٔ $>$ به‌شرح زیر است.

ت-۱. اصل تثلیث.

هر زوج از اعداد حقیقی مانند a و b در یک و فقط یکی از شرایط زیر صدق می‌کند $a<b$ ، $a=b$ ، $b<a$.

ت-۲. تعدی

اگر $a<b$ و $b<c$، آنگاه $a<c$.

عبارت $a<b$ چنین خوانده می‌شود «a کوچکتر از b است». هنگامی که می‌نویسیم $b>a$، طبق تعریف بدین معنی است که $a<b$ و زمانی که می‌نویسیم

$$a \leqslant b$$

بدین معنی است که $a<b$ یا $a=b$. رابطهٔ $>$ به‌وسیله شرایط زیر با جمع و ضرب ارتباط پیدا می کند.

ض ت-۱. اگر $a>0$ و $b>0$، آنگاه $ab>0$.

ج ت-۱. اگر $a<b$، آنگاه برای هر c، $a+c<b+c$.

از این چهار شرط (همراه با اصول موضوعه دیگر) تمام قوانین حاکم بر نامساویها را می‌توان بدست آورد. اجازه بدهید چند مثال بزنیم.

■ **قضیهٔ ۱**. هر دو نامساوی را می‌توان با هم جمع کرد. بدین معنی که اگر $a<b$ و $c<d$ آنگاه $a+c<b+d$

اثبات. بنا بر ج ت-۱، $a+c<b+c$

بنابر ج ت-۱، $b+c<b+d$

(از حالا به بعد ما از قانون جابجائی و اصول مشابه بدون شرح استفاده خواهیم کرد) بنابر ت-۲، داریم

$$a+c<b+d ،$$

و اثبات کامل است. □

■ **قضیهٔ ۲**. $a<b$ اگر و فقط اگر $b-a>0$.

اثبات. اگر $a<b$ آنگاه بنابر ج ت-۱، $a-a<b-a$. بنابراین $b-a>0$. برعکس، اگر $b-a>0$ آنگاه $b-a+a>a$ یعنی $b>a$. □

■ **قضیهٔ ۳**. اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی کند. یعنی اگر $a<b$، و $c>0$، آنگاه $ac<bc$.

اثبات. چون $a<b$، داریم $b-a>0$.

بنابراین از ض ت ۱ نتیجه می گیریم $c(b-a)>0$. لذا $bc-ac>0$؛ و بنا بر قضیه ۲، $ac<bc$. □

■ **قضیهٔ ۴**. اگر $a>0$، آنگاه $-a<0$

اثبات. اگر $a>0$ آنگاه از ج ت-۱، داریم $a-a>0-a$، لذا $0>-a$ یا $-a<0$. □

■ **قضیهٔ ۵**. اگر $a<0$ آنگاه $-a>0$

اثبات. اگر $a<0$ آنگاه بنا بر قضیهٔ ۲، $0-a>0$. بنابراین $-a>0$. □

■ **قضیهٔ ۶**. $1>0$.

(در اینجا سؤال این نیست که آیا عدد حقیقی ۱ بزرگتر از عدد حقیقی ۰ است، هر کسی می داند که چنین است. سؤال این است که آیا عبارتِ $1>0$ از تعاریف و اصولی که تا بحال زیر هم نوشته‌ایم ناشی می گردد. اگر این عبارت از آنها نتیجه نمی‌شود لذا ما به‌اصل دیگری نیاز داریم).

اثبات. فرض کنید که قضیه نادرست باشد. از آنجا که می‌دانیم $1\neq 0$، از ت-۱، چنین نتیجه می‌شود که $1<0$. از قضیهٔ ۵ نتیجه می گیریم که $-1>0$. بنابر ض ت-۱، $(-1)^2>0$. چون $(-1)^2=1$، داریم $1>0$، که متناقض با فرض $1<0$ است. □

■ **قضیهٔ ۷**. اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب کنیم جهت نامساوی برعکس می‌شود. بدین معنی که اگر $a<b$ و $c<0$، آنگاه $ac>bc$.

اثبات. اگر $a<b$، آنگاه بنا بر قضیه ۲، $b-a>0$.

اگر $c<0$، آنگاه بنا بر قضیه ۵. $-c>0$.

بنابراین طبق ض ت-۱، $-bc+ac>0$

لذا بنا بر قضیه ۲، $ac>bc$. □

فرض کنید نامساویی شامل عدد مجهول x به‌شکل زیر داشته باشیم

$$2x-5<7x+3$$

هر عدد مانند x یا در نامساوی صدق می کند یا در آن صدق نمی کند. بعنوان مثال $x=1$ نامساوی را برقرار می‌سازد زیرا $-3<10$ اما $x=-2$ در نامساوی صدق نمی کند، زیرا $-9<-11$. عبارتهایی از این نوع را که شامل متغیری[1] است که می‌توان هر چه را بخواهیم جای گزین آن کنیم یک **گزاره‌نما**[2] نامیده می‌شود. هنگامی که ۱ را جای گزین x می کنیم به‌عبارت $-3<10$ می‌رسیم که صحیح است. وقتی ۲ − را جایگزین x می کنیم به‌عبارت $-9<-11$ که نادرست است می‌رسیم. مجموعهٔ تمام اعدادی را که وقتی به‌جای x قرار می‌دهیم عبارت صحیحی حاصل می‌شود، مجموعهٔ جواب گزاره‌نما می‌نامیم. در زیر چند مثال را می بینید.

گزاره‌نما	مجموعهٔ جواب
$x+2=7$	$\{5\}$
$x=x+0$	**R**
$x^2-4=0$	$\{-2, 2\}$
$x+2=2+x$	**R**

۱- letter

۲- open sentence

در ستون سمت راست، $\{۵\}$ عبارتست از مجموعه‌ای که تنها عضو آن ۵ است و $\{۲،-۲\}$ مجموعه‌ای با عضوهای ۲ − و ۲ می‌باشد. هرگاه بخواهیم یک مجموعهٔ متناهی را با نشان دادن تمام عضوهای آن مشخص کنیم از همان نماد استفاده می‌شود. بعنوان مثال

$$\{۱،۳،۵،۷،۹\}$$

مجموعهٔ تمام اعداد صحیح و مثبت فرد کمتر از ۱۰ می‌باشد. آکولادها برای نشان دادن مجموعه‌ها بکار می‌روند، نه برای دنباله‌ها و لذا ترتیب نشان دادن عضوها در مجموعه‌ها اهمیتی ندارد. برای مثال،

$$\{۱،۳،۵،۷،۹\} = \{۷،۳،۹،۱،۵\} ,$$

دو مجموعه نشان داده شده دقیقاً یکی هستند. البته گاهی اوقات اتفاق می‌افتد که یک گزاره‌نما هرگز جملهٔ درستی نشود، مهم نیست که چه مقداری را به‌جای x قرار دهیم. برای مثال، معادله $(x+۱)^۲ = x^۲+۲x$ هیچ جوابی ندارد. در این حالت، مجموعهٔ جواب یک مجموعه تهی است، یعنی مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد. برای اجتناب از اشتباه با عدد صفر مجموعه تهی به‌وسیله $\emptyset$ نشان داده می‌شود. در زیر مثالهای بیشتری وجود دارد:

گزاره‌نما	مجموعهٔ جواب
$x^۲+۲x+۲=(x+۱)^۲$	$\emptyset$
$x^۲=۰$	$\{۰\}$
$x<x$	$\emptyset$
$۲x=x$	$\{۰\}$

نماد ساده‌ای برای مجموعهٔ جواب یک گزاره‌نما وجود دارد. وقتی می‌نویسیم

$$\{x \mid x^۲=۰\} ,$$

یعنی مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی x به طوری که $x^۲=۰$. بنابراین

$$\{x \mid x^۲=۰\}=\{۰\}$$
$$\{x \mid x^۲-۵x+۶=۰\}=\{۲،۳\} ,$$

و غیره.

حل کردن یک معادله یا نامعادله به‌معنی پیدا کردن مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای متناظر آن است. برای نامعادلات، جواب معمولاً به‌شکل گزاره‌نمای دومی در می‌آید که ساده‌تر و آسانتر قابل شرح نسبت به گزاره‌نمای اولی است. عملیات ساده کردن می‌تواند بدین صورت باشد: اگر

$$(۱) \quad ۲x-۵<۷x+۳$$

آنگاه بنا بر ج ت-۱ داریم

$$(۲) \ , \ -۵x-۵<۳$$

و

$$(۳) \quad -۵x<۸$$

بنابر قضیهٔ ۷، داریم

$$(٤) \quad . \ x> -\frac{۸}{۵}$$

(طرفین را در عدد منفی، $-\frac{۱}{۵}$ ضرب کرده‌ایم). بنابراین هر عدد x که در (۱) صدق کند در (٤) نیز صدق می کند. بعکس اگر (٤) برقرار باشد، (۳) نیز برقرار است. اگر (۳) برقرار باشد آنگاه (۲) نیز برقرار است و اگر (۲) برقرار باشد آنگاه (۱) نیز برقرار است.

نامساویهای (۱) و (٤) هم‌ارز (معادل) نامیده می‌شوند. به‌این معنی که هر عددی که در یکی از آنها صدق کند در دیگری نیز صدق می کند. عبارت (٤) جواب (۱) نامیده می‌شود.

عملیاتی را که انجام دادیم می‌توان به‌صورت مختصر زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & ۲x-۵<۷x+۳ \ , \\ \Longleftrightarrow \ & -۵x-۵<۳ \ , \\ \Longleftrightarrow \ & -۵x<۸ \ , \\ \Longleftrightarrow \ & x>-\frac{۸}{۵} \ . \end{aligned}$$

فلشِ دو طرفه[۱] در سمت چپ را باید چنین خواند: «معادل است با». وقتی می‌نویسیم

$$۲x-۵<۷x+۳ \Longleftrightarrow x>-\frac{۸}{۵}$$

منظورمان این است که گزاره‌نماهائی که توسط علامت $\Longleftrightarrow$ بهم مربوط گشته‌اند دقیقاً دارای یک مجموعهٔ جواب می‌باشند. مزیّت اختصار این است که در هر مرحله نوشتن آنچه را که دقیقاً ما در فکرمان داریم ساده‌تر می‌سازد. (وقتی رشته‌ای طولانی از فرمولها را می نویسیم، ارتباط منطقیِ مورد نظر بین آنها برای بیان و یادآوری ساده نمی‌باشد.) نتیجهٔ کارمان روی مسئله فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\{x \mid ۲x-۵<۷x-۳\}=\{x \mid x>-\frac{۸}{۵}\}$$

«از فلش یکطرفه برای نشان دادن این که یک شرط مستلزم دیگری است استفاده می کنیم. بعنوان مثال وقتی می‌نویسیم

$$x>۲ \Longrightarrow x^۲>٤$$

۱- double-headed arrow

منظورمان این است که اگر $x>۲$، آنگاه $x^۲>٤$. این گفته صحیح است زیرا اگر $x>۲$، آنگاه بر طبق قضیهٔ ۳، $x^۲>۲x$. همچنین طبق قضیهٔ ۳، اگر $x>۲$، آنگاه $۲x>٤$ و لذا طبق ت-۲، $x^۲>٤$، که قرار بود اثبات شود.

دقت کنید این صحیح نیست که

$$x>۲ \iff x^۲>٤$$

زیرا هر عدد کوچکتر از ۲ − در نامساوی دوم صدق می کند امّا در نامساوی اول صدق نمی کند. (بعنوان اوّلین مرحله در اثبات فوق، نشان دادیم که $x>۲ \implies x^۲>٤$. آیا درست است که $x>۲ \implies x^۲>۲x$ ؟ چرا یا چرا نه؟)

قدر مطلق یک عدد x توسط $|x|$ نشان داده می‌شود. که توسط دو شرط زیر تعریف می گردد.

(۱) اگر $x\geqslant ۰$، آنگاه $|x|=x$

(۲) اگر $x<۰$، آنگاه $|x|=-x$

برای مثال، $|۲|=۲$ زیرا $۲\geqslant ۰$ و $|-۲|=-(-۲)=۲$ زیرا $-۲<۰$. بعبارت دیگر قدر مطلق یک عدد مثبت همان عدد مثبت است و قدر مطلق یک عدد منفیِ x عدد مثبت متناظر با آن یعنی $-x$ می باشد.

■ **قضیهٔ ۸**. برای هر x، $|x|\geq ۰$.

اثبات.

(۱) اگر $x\geqslant ۰$، آنگاه $|x|\geqslant ۰$ زیرا در این حالت $|x|=x$

(۲) اگر $x<۰$، آنگاه $-x>۰$. بنابراین $|x|>۰$ زیرا $|x| = -x$. □

■ **قضیهٔ ۹**. برای هر x, $|-x|=|x|$.

اثبات.

(۱) اگر $x\geqslant ۰$، آنگاه $-x\leqslant ۰$. بنابراین $|x|=x$

و

$$|-x|=-(-x)=x$$

لذا در این حالت، $|-x|=|x|$

(۲) اگر $x<۰$، آنگاه $-x>۰$ بنابراین $|x|=-x$ و $|-x|=-x$ لذا در این حالت نیز $|-x|=|x|$. □

■ **قضیهٔ ۱۰** . برای هر x، $|x|\geqslant x$

اثبات. اگر $x\geqslant ۰$ حکم صحیح است زیرا $x\geqslant x$، اگر $x<۰$، آنگاه $|x|>x$، زیرا $|x|\geqslant ۰$.

□

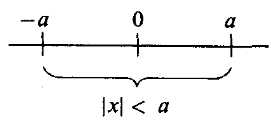
■ **قضیهٔ ۱۱**. برای هر x و y، $|xy|=|x|\cdot|y|$.

اثبات. وقتی x را با $x-$ جایگزین کنیم طرفین معادله بدون تغییر می‌ماند، بنابراین می‌توان فرض کرد که $x\geqslant 0$. بنا به همین دلیل می‌توان فرض کرد که $y\geqslant 0$. اگر $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$ معادله به‌شکل $xy=xy$ در می‌آید. □

هنگامی که یک **نامساوی مضاعف** $a<b<c$ را می‌نویسیم،
منظورمان این است که هر دو نامساوی $a<b$ و $b<c$ درست می‌باشند.

■ **قضیهٔ ۱۲**. فرض کنیم $a>0$. در این صورت $|x|<a$
اگر و فقط اگر $-a<x<a$.

در صحبت از روی شکل، این قضیه چنین می گوید که اعدادی که نامساوی $|x|<a$ را برقرار می‌سازند اعداد بین $a-$ و a می‌باشند، به‌صورت زیر:



شکل ۱.۳ .

اثبات.

(۱) اگر $x\geqslant 0$ آنگاه $|x|<a$ ایجاب می کند که $x<a$. بنابراین در صورتی که $0\leqslant x<a$ نامساوی $|x|<a$ صحیح است.

(۲) اگر $x<0$، آنگاه $|x|<a$ به‌این معنی است که $-x<a$ یا $-a<x$. لذا $|x|<a$ صحیح است هر گاه $-a<x<0$.

بنابراین $|x|<a$ برقرار است. وقتی که $-a<x<a$. برعکس، به‌ساد گی می‌توان بررسی کرد که اگر $|x|<a$، آنگاه $-a<x<a$. (دو حالت هست که باید بررسی گردد، همانند شرائط (۱) و (۲) در فوق). بنابراین

$$|x|<a \iff -a<x<a \,. \quad \square$$

■ **قضیهٔ ۱۳**. برای هر a و b، $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

اثبات.

حالت اوّل. فرض کنید $a+b\geqslant 0$ در این حالت $|a+b|=a+b$

بنا بر قضیه ۱۰، $a\leqslant|a|, b\leqslant|b|$

بنابراین

$$a+b\leqslant|a|+|b|$$

و از آنجا که در حالت اول $a+b=|a+b|$، قضیه برقرار است.

حالت دوم. فرض کنید $a+b<0$، لذا $(-a)+(-b)>0$. طبق نتیجه حاصل از حالت اوّل داریم

$$|(-a)+(-b)|\leqslant|-a|+|-b|$$

اما بنا بر قضیه ۹، می‌دانیم که

$$|-a-b|=|a+b| \ , \quad |-a|=|a| \ , \quad |-b|=|b| \ .$$

با جای گذاری بدست می‌آید

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

و اثبات کامل است. $\square$

مجموعه مسائل ۱.۴

۱. نشان دهید که اگر $a>0$، آنگاه $a^{-1}>0$.

۲. نشان دهید که اگر $a<0$، آنگاه $a^{-1}<0$.

۳. $x>0$ و $y>0$ داده شده‌اند نشان دهید که $x=y \implies x^3=y^3$ آیا برای هر x و y صادق است؟

۴. نامعادلات زیر را حل کنید. جواب باید به‌یکی از صورتهای زیر باشد.

$$\text{——} \iff \text{————— یا } \{x \mid \dots\}=\{x \mid \text{—}\} \ .$$

(a) $5-3x>17+x$

(b) $5x-3<17x+1$

(c) $x+5>6-x$

(d) $|x|<1$

(e) $|x-3|<2$

(f) $|x-5|<5$

۵. آیا درست است که برای هر x، $|x^2|=|x|^2$. چرا؟

۶. آیا درست است که برای هر x، $|x^3|=|x|^3$. چرا؟

۷. نشان دهید که برای هر x، $x^2-2x+1\geqslant0$

۸. برای چه اعدادی از x (در صورت وجود) هریک از شرائط زیر برقرار می‌باشد.

(a) $|x^2-5x+6|=|x-3||x-2|$

(b) $|x^2-5x+6|=x^2-5x+6$

(c) $|x-5|=|2x-3|$

(d) $|x+1|=|1-x|$.

(e) $\sqrt{x^2+1}=x$

(f) $\sqrt{x^{۲}-۱}=x$

(g) $|۲x-۱|+|x+۳|\geqslant|۳x+۲|$

(h) $|۷x+۳|+|۳-x|\geqslant ۶|x+۱|$

۹. به‌صورت نمودار روی محور عددی مکانهائی را مشخص کنید که شرایط زیر را برقرار می‌سازند.

(a) $|x|<۲$

(b) $|x-۲|<\frac{۱}{۲}$

(c) $|۲x-۳|<\frac{۱}{۲}$

(d) $|x|<۲$ و همچنین $|x-۲|<۱$

(e) $|۲-۲x|<\frac{۱}{۲}$

(f) $|x-۲|<\frac{۱}{۴}$ و $x>۲$

۱۰. نشان دهید که اگر $b\neq ۰$، آنگاه

$$\left|\frac{۱}{b}\right|=\frac{۱}{|b|}\ .$$

۱۱. نشان دهید که اگر $b\neq ۰$، آنگاه

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

۱۲. نشان دهید برای هر a و b، $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

۱۳. نشان دهید برای هر a و b، $|a+b|\geqslant|a|-|b|$.

۱۴. برای چه اعدادی از a کسرِ $\frac{a}{|a|}$ تعریف شده است؟ مقدار کسر برای مقادیر مختلف a برابر چه مقدار است؟

۱.۵ روابط ترتیبی و میدانهای مرتب

تا اینجا ما به‌شرح خواص دستگاه اعداد حقیقی نسبت به‌جمع، ضرب و ترتیب پرداختیم. دستگاهی که در تمام اصولی که تا کنون بیان کرده‌ایم صدق می کند، یک میدان مرتب نامیده می‌شود. ما تعریف یک میدان مرتب را در حالت کلی به‌صورت زیر تکرار می کنیم.

مجموعه F داده شده است. فرض کنیم $*$ یک رابطه‌ای باشد که در F تعریف شده، و در دو شرط زیر صدق می کند.

ت-۱. هر زوجِ از اعضاء F در یکی و فقط یکی از شرایط $a*b$، $a=b$ و $b*a$ صدق می کنند.

ت-۲. اگر $a*b$ و $b*c$، آنگاه $a*c$.

در این صورت $*$ یک رابطهٔ ترتیبی نامیده می‌شود.

روابط ترتیبی معمولاً توسط علامتِ $>$ نشان داده می‌شوند. اما ما به‌یک علامتگذاری کلی‌تر مانند $*$ نیاز داریم زیرا امکان دارد که بخواهیم دربارهٔ دو رابطه مختلف که روی یک مجموعه تعریف شده‌اند صحبت کنیم.

حال فرض کنید که میدان

$$[F,+,\cdot]$$

را داشته باشیم. و نیز فرض کنید که رابطهٔ ترتیبی $<$، داده شده است که روی F تعریف شده و در دو شرط زیر صدق می کند.

ض ت- ۱. اگر $a>0$ و $b>0$، آنگاه $ab>0$.

ج ت- ۱. اگر $a<b$ آنگاه برای هر c، $a+c<b+c$

در این صورت ساختمان $[F,+,\cdot,<]$ یک میدان مرتب نامیده می شود.

لذا آنچه که تا کنون در مورد دستگاه اعداد حقیقی گفته‌ایم این است که تشکیل یک میدان مرتب را می دهد.

باید تأکید کرد که یک میدان مرتب فقط میدانی نیست که بطریقی تحت نظمی مرتب شده باشد. برای اینکه بدانیم یک میدان مرتب داریم نیاز داریم که بدانیم رابطهٔ ترتیب $<$ توسط شرایط ض ت- ۱ و ج ت- ۱ به ضرب و جمع مربوط است.

در بخش قبل تمامی قضایا براساس شرایط ت- ۱، ت- ۲، ض ت- ۱ و ج ت- ۱ اثبات شدند. بنابراین تمامی این قضایا در هر میدان مرتب برقرار است. شما در استفاده از آنها برای حلِ مسائل زیر آزاد می باشید.

مجموعه مسائل ۱.۵

۱. در مسئله ۶ از مجموعه مسائل ۱.۳، نشان دادید که اعداد حقیقیِ به‌شکل $a+b$ که در آن a و b گویا می باشند، تشکیل یک میدان را می دهد. آیا تحتِ روابط معمولی ترتیب این یک میدان مرتب است؟ چرا یا چرا نه؟

۲. میدان F را که در مسأله ۱۹ از بخش ۱.۲ تعریف شد در نظر بگیرید در اینجا $F=\{0,1\}$، جمع و ضرب نیز طبق جدول زیر تعریف شده‌اند.

+	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰

.	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

آیاامکان تعریف یک‌رابطهٔ ترتیب به‌نحوی که این دستگاه به‌یک‌میدان‌مرتب تبدیل شود، وجود دارد؟

۳. نشان دهید که می توان یک رابطه ترتیبی برای مجموعهٔ نقاط (x,y) در صفحهٔ محورهای مختصات تعریف کرد. (برای تحقیق ت- ۲ لازم است در چهار حالت بحث کنید.)

۴. فرض کنیم $\mathbf{R}^4$ مجموعهٔ تمام چهارتایی‌های (w,x,y,z) از اعداد حقیقی باشد. آیا می‌توان رابطهٔ ترتیبی روی $\mathbf{R}^4$ تعریف کرد؟

۵. نشان دهید که می‌توان برای اعداد مختلط یک رابطهٔ ترتیب تعریف کرد.
۶. نشان دهید که امکانِ تعریف رابطهٔ ترتیب برای اعداد مختلط بطوری که میدان مرتبی حاصل شود، وجود ندارد. [راهنمایی: فرض کنید چنین ترتیبی تعریف شده باشد. نشان دهید هریک از شرایط $i>0$ و $i<0$ منجر به‌نقض یکی از اصول یا قضایای مربوط به‌میدان مرتب می‌شود.]

۱.۶ اعداد صحیح مثبت و اصل استقراء[1]

می‌دانیم که $1>0$. و با شروع از ۱ و جمع کردن با عدد ۱ به‌تعداد دلخواه، بقیه اعداد صحیح و مثبت بدست می‌آید. لذا چند عدد صحیح و مثبت اولیه به‌صورت زیر هستند

$$۱ ,$$
$$۲=۱+۱ ,$$
$$۳=۲+۱=۱+۱+۱ ,$$
$$۴=۳+۱=۱+۱+۱+۱ ,$$

و به‌همین ترتیب ادامه دارد. فرض کنیم N مجموعهٔ تمام اعداد صحیح و مثبت باشد. (در اینجا N نشاندهندهٔ "Natural" یعنی طبیعی است، اعداد صحیح مثبت معمولاً به‌عنوان اعداد طبیعی نام برده می‌شوند) توضیحات مقدماتی فوق در مورد دست یافتن به‌اعداد صحیح مثبت با اضافه کردن ۱ به‌دیگر اعداد صحیح مثبت الگوی یک تعریف دقیق از مجموعهٔ N را پیشنهاد می کنند. مجموعهٔ N توسط سه شرط زیر تعریف می‌شود.

(۱) ۱ به N تعلق دارد.

(۲) N تحت عمل جمع کردن با ۱ بسته است. بدین معنی که اگر n به N تعلق داشته باشد، آنگاه $n+1$ نیز به N تعلق دارد.

(۳) دربین تمام مجموعه‌هایی که در شرایط (۱) و (۲) صدق می کنند، N کوچکترین است. به‌این معنی که، N اشتراک یا قسمت مشترک تمامی مجموعه‌هایی است که در (۱) و (۲) صدق می کنند. از شرط (۳) ما بلافاصله به‌نتیجه زیر می‌رسیم.

■ **قضیهٔ ۱. اصل استقراء.** فرض کنیم S مجموعه‌ای از اعداد باشد. اگر (۱) S شامل ۱ باشد و (۲) S تحت عمل جمع با ۱ بسته باشد، آنگاه (۳) S شامل تمام اعداد صحیح مثبت خواهد بود.

برهان بسیار ساده است. چون N کوچکترین مجموعه‌ای است که در (۱) و (۲) صدق می کند، چنین نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ دیگری همانند آن شامل N می‌باشد.

حال ببینیم چطور اصل استقراء به‌شکلی که بیان کردیم بکار گرفته می‌شود.

■ **قضیهٔ A.** برای هر عدد صحیح مثبت n، مجموع مجذورات اولین n عدد مثبت برابر است با

---
[1] Induction principle

$(n+1)(2n+1)$ $(\frac{n}{6})$. یعنی برای هر n داریم

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \cdot$$

اثبات به‌استقراء به‌صورت زیر است. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد صحیح و مثبتی باشد که رابطهٔ زیر برای آن صادق باشد

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \cdot$$

لذا، اگر بگوییم ۱ متعلق به S است بدین معنی است که

$$1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2\times1+1)$$

و اگر بگوییم ۲ متعلق به S است بدین معنی است که

$$1^2+2^2 = \frac{2}{6}(2+1)(2\times2+1)$$

و بهمین ترتیب برای بقیه.

نشان خواهیم داد که (۱) ۱ متعلق به S است و (۲) S تحت عمل جمع با ۱ بسته است.

(۱)ـ S شامل ۱ است زیرا تساوی

$$1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2\times1+1)$$

درست است.

(۲)ـ برای اثبات (۲)، باید نشان دهیم که اگر عدد صحیح مفروض n متعلق به S باشد، آنگاه $n+1$ نیز متعلق به S است. و لذا باید نشان دهیم که اگر

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \tag{a}$$

آنگاه

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) \tag{b}$$

(تساوی اوّل به‌ما می گوید که n متعلق به S است و تساوی دوّم بیان می کند که $n+1$ متعلق به S است)

فرض کنیم (a) برقرار باشد، در نتیجه

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 \tag{c}$$

$$= \frac{n+1}{6}(2n^2+n+6n+6)$$

$$= \frac{n+۱}{۶}(۲n^۲+۷n+۶)$$

$$= \frac{n+۱}{۶}(n+۲)(۲n+۳)$$

و لذا (b) برقرار است.

و این همان روش اثبات براساس قضیهٔ ۱ می‌باشد. شما همیشه ثابت می‌کنید که یک گزاره‌نمای معیّنی به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n عبارت درستی است. همیشه با فرض S بعنوان مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت در مجموعهٔ جواب شروع می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که این مجموعه S در شرائط (۱) و (۲) از قضیهٔ ۱ صدق می‌کند. آنگاه از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌گیرید که مجموعهٔ جواب S شامل تمامی اعداد صحیح مثبت می‌باشد.

شکل دیگر اصل استقراء ممکن است به‌صورت زیر آشناتر به‌نظر برسد.

■ **قضیهٔ ۲**. فرض کنیم

$$p_۱،\ p_۲،\ \cdots$$

دنباله‌ای از گزاره‌ها باشد (یک گزارهٔ p_n برای هر عدد صحیح مثبت n). اگر

(۱) $p_۱$ درست باشد و

(۲) برای هر n، p_n، $p_{n+۱}$ را نتیجه دهد،

آنگاه

(۳) تمام گزاره‌های $p_۱،p_۲،\cdots$ درست می‌باشند.

برای مثال، می‌توانیم حالتی که P_n نشان دهنده عبارت زیر باشد را در نظر بگیریم

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲ = \frac{n}{۶}(n+۱)(۲n+۱)$$

بنابراین چند گزارهٔ اوّل دنباله بصورت زیر خواهند بود:

$$p_۱:\quad ۱^۲ = \frac{۱}{۶}(۱+۱)(۲\times۱+۱)\ ,$$

$$p_۲:\quad ۱^۲+۲^۲ = \frac{۲}{۶}(۲+۱)(۲\times۲+۱)\ ,$$

$$p_۳:\quad ۱^۲+۲^۲+۳^۲ = \frac{۳}{۶}(۳+۱)(۲\times۳+۱)\ ,$$

و بهمین ترتیب ادامه دارد.

قضیهٔ ۲ از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود. برای اثبات، همان روشی را شروع می‌کنیم که همواره در بکارگیری قضیهٔ ۱ آغاز کردیم. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت n باشد که برای آنها

p_n درست است. اکنون عبارت (۱) چنین بیان می کند که S شامل ۱ است. عبارت (۲) چنین بیان می کند که S تحت عمل جمع با ۱ بسته است. بنا بر قضیهٔ ۱، S شامل تمام اعداد صحیح مثبت است. بنابراین تمام گزاره‌های $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ صحیح می باشند و این حکمی است که قرار بود اثبات شود. شکل سوّمی از اصل استقراء، معروف به **اصل خوش ترتیبی** وجود دارد که برای بعضی از منظورها مفید است. آن بیان می کند، **هر مجموعهٔ غیر تهی از اعداد صحیح مثبت دارای عضو ابتدا است.** برای اثبات آن ما احتیاج به یک سری نتایج مقدماتی داریم.

■ **قضیهٔ ۳.** فرض کنیم n عدد صحیح مثبتی باشد. در این صورت $n=1$ یا عدد صحیح و مثبت kای هست که $n=k+1$.

اثبات. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبتی باشد که در شرایط قضیه صدق می کند. در آن صورت ۱ متعلق به S است. اگر n متعلق به S باشد و $n=1$ آنگاه $n+1$ متعلق به S است، با $k=1$. اگر n متعلق به S باشد و $n\neq 1$، آنگاه برای یک عدد صحیح مثبت k، $n=k+1$ و $n+1=(k+1)+1$ بنابراین $n+1$ به S تعلق دارد. بنابراین طبق اصل استقراء قضیه برقرار است. □

■ **قضیهٔ ۴.** ۱ کوچکترین عدد صحیح مثبت است. یعنی، اگر $n\neq 1$، آنگاه $n>1$.

اثبات. اگر $n\neq 1$ آنگاه برای یک عدد صحیح مثبت k، $n=k+1$. بنابراین طبق قضیه ۲ بخش ۱.٤، $n-1=k>0$، و $n>1$. □

■ **قضیهٔ ۵.** برای هر عدد صحیح مثبت n، $n+1$ کوچکترین عدد صحیح مثبت بزرگتر از n است.

اثبات. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد صحیحی باشد که حکم برای آن برقرار است.

(۱) ۱ به S تعلق دارد. اثبات: فرض کنید عدد صحیح مثبتی مانند p وجود داشته باشد به‌طوری که

$$1<p<1+1\ .$$

از آنجا که $p>1$، نتیجه می گیریم که برای عدد صحیح و مثبتی مانند k، $p=k+1$ لذا $p-1=k>0$. بنابراین $0<p-1<1$ و لذا $0<k<1$، که متناقض با قضیه ٤ است.

(۲) اگر n متعلق به S باشد، آنگاه $n+1$ به S تعلق دارد. اثبات مانند حالت (۱) است. فرض کنید که $n+1$ متعلق به S نباشد. در آن صورت عدد صحیح مثبتی مانند p وجود دارد به‌طوری که

$$n+1<p<(n+1)+1\ ,$$

و برای عدد صحیح مثبتی مانند k، $p=k+1$. بنابراین

$$n<p-1=k<n+1\ ,$$

و n متعلق به S نمی باشد.

بنا بر اصل استقراء، قضیه برقرار است. □

■ **قضیهٔ ۶. اصل خوش ترتیبی.** هر مجموعهٔ غیر تهی از اعداد صحیح مثبت دارای کوچکترین عضو است.

اثبات. فرض کنیم K یک زیر مجموعهٔ غیر تهی از N باشد. اگر K شامل ۱ باشد، آنگاه K کوچکترین عضو دارد، یعنی ۱، و لذا چیزی برای اثبات وجود ندارد. فرض کنیم K شامل ۱ نباشد. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت n باشد که برای آن K شامل هیچ یک از اعداد صحیح n,...,۱،۲ نباشد. (برای مثال، اگر K مجموعهٔ {...,۱۰،۲۰،۳۰} باشد، S مجموعهٔ {۱،۲،۳،...،۹} خواهد بود. پانزده به S تعلق ندارد زیرا، ۱۵>۱۰ و ۱۰ به K تعلق دارد.)

می‌دانیم که (۱) S شامل ۱ است زیرا K شامل ۱ نیست. اگر این صحیح باشد که (۲) S تحت عمل جمع با ۱ بسته است، آنگاه S شامل تمام اعداد صحیح مثبت و لذا K تهی است. بنابراین S نباید تحت عمل جمع با ۱ بسته باشد. لذا عدد صحیحی مانند n وجود دارد به‌طوری که n به S تعلق دارد امّا $n+1$ به‌آن متعلق نیست.

یعنی K شامل هیچ یک از اعداد n,...,۲ ،۱ نیست ولی شامل $n+1$ هست. لذا نتیجه می‌شود که $n+1$ کوچکترین عضو K است. □

در مثالی که در فوق بیان شد، واضح است که کوچکترین عضو K، ۱۰ است. شما می‌توانید بررسی کنید که ۱۰ عددی است که وقتی اثبات کلی را برای مجموعه خاص K به کار می‌بریم بدست می‌آید.

انتخاب بین قضیهٔ ۱ و ۲ تنها بر حسب ذوق و سلیقه می‌باشد. اما موارد زیادی هست که استفاده از اصل خوش ترتیبی ساده‌تر از هر کدام از آنها است. (بعنوان مثال، بخش تئوری اعداد را ببینید.)

در مجموعهٔ مسائل بعدی (و از آنجا به‌بعد)، وقتی چیزی را با استقراء ثابت می‌کنید، انتظار می‌رود که شما از یکی از صورتهای اصل استقراء که در این بخش داده شده، استفاده کنید. لذا اثبات شما باید به‌یکی از صورتهای زیر باشد.

اگر S باشد ..... آنگاه

(۱) ۱ به S تعلق دارد. اثبات: ....

(۲) برای هر n، اگر n متعلق به S باشد، آنگاه $n+1$ به S متعلق است. اثبات: ......

«طبق اصل استقراء، قضیه ثابت می‌شود.»

یا:

برای هر n، اگر p_n گزاره‌ای باشد که...... آنگاه:

(۱) P_1 درست است. اثبات: ....

(۲) برای هر n، p_n نتیجه می‌دهد p_{n+1}. اثبات: ....

بنابراین، تمام گزاره‌های p_n درست می‌باشند که همان چیزی است که قرار بود ثابت شود. اگر شما از هر کدام از صورتها استفاده کنید خواننده قادر خواهد بود که به‌شما بگوید از کدام اصل استفاده می کنید. غالباً، «اثباتها به‌وسیله استقراء» طوری نوشته می‌شوند که برای خواننده هیچ اشاره‌ای به‌صورت اصل استقرائی که استفاده شده ندارد.

مجموعه مسائل ۱.۶

۱. به‌استقراء نشان دهید که برای هر $n>0$،

$$1+2+\cdots+n = \frac{n}{2}(n+1) .$$

۲. نشان دهید که مجموع اولین n عدد فرد صحیح برابر n^2 است. یعنی

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2 .$$

۳. نشان دهید که برای هر $n>0$،

$$1^3+2^3+\cdots n^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 .$$

۴. فرض کنید به‌ازای هر عدد حقیقیِ مثبت x عدد صحیح مثبتی وجود دارد که $n>x$. (این مطلب صحیح است، این نتیجه‌ای از خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی است که در بخش ۱.۸ آن را شرح می‌دهیم). نشان دهید که برای هر عدد حقیقی مثبت x، عدد صحیح نامنفی n وجود دارد به‌طوری که $n\leqslant x<n+1$.

۵. حال نشان دهید که برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیحی چون n وجود دارد به‌طوری که $n\leqslant x<n+1$.

*۶. بازی معروف به برجهای هانوئی (Towers of Hanoi) به‌صورت زیر بازی می‌شود. سه میله A، B و C شبیه میله‌های بازی میخ و حلقه داریم. روی میله A، دسته‌ای از n دیسک که از پایین تا بالای میله اندازه‌شان کوچک می‌شود روی هم قرار دارند. آنها را از بالا به‌پائین با شماره‌های $1, 2, \ldots, n$ می‌نامیم. حرکت مجاز در بازی برداشتن بالاترین دیسک از یک میله و گذاشتن آن بالای دستهٔ یک میلهٔ دیگر است بشرطی که در هیچ مرحله‌هایی اجازه نداریم دیسکی را روی دیسکی کوچکتر قرار دهیم. (لذا در نهایت دقیقاً دو حرکت مجاز داریم: دیسک ۱ را می‌توانیم به‌میلهٔ B یا میلهٔ C حرکت دهیم) هدف بازی حرکت تمام دیسکها به‌میلهٔ B است. نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت n، بازی را می‌توان کامل انجام داد.

*۷. اگر p_n تعداد حرکتهای مورد نیاز برای بازی کامل با n دیسک باشد. نشان دهید که برای هر n،

$$p_{n+1} = 2p_n+1 .$$

۸ـ فرض کنیم $p_1=1$، و برای هر n، $p_{n+1}=2p_n+1$ داده شده باشند. نشان دهید که

$$p_n = 2^n - 1 .$$

(از آنجا که $2^{10}=1024$، چنین بر می‌آید که برای بازی با ۲۰ دیسک بیشتر از یک میلیون حرکت لازم است.)

۱.۷ اعداد صحیح واعداد گویا

اگر ما عدد ۰ و قرینه تمام عددهای در N را به‌مجموعهٔ N اضافه کنیم همه اعداد صحیح حاصل می‌شود. مجموعهٔ اعداد صحیح را با $\mathbf{Z}$ نشان می‌دهیم. لذا

$$Z = \{\dots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$$

اگر عدد x را به‌توان به‌صورت p/q بیان کرد که در آن p و q هر دو عدد صحیح و $q\neq ۰$ است، در آن صورت x را یک عدد گویا می‌نامیم. مجموعهٔ تمام اعداد گویا را با $\mathbf{Q}$ نشان می‌دهیم (در اینجا $\mathbf{Q}$ بیانگر quotient، خارج قسمت است، اعداد گویا، آنهایی هستند که خارج قسمت اعداد صحیح می‌باشند.).

حال مایل هستیم این واقعیت مشهور، که اعداد گویا تشکیل میدان می‌دهند را ثابت کنیم. با روشهائی که ما در این فصل به کار بردیم، این برهان شامل یک مشکل غیر منتظره است. با دنبال کردن روشی که عکس روش معمول است، ما اعداد صحیح مثبت را بر حسب اعداد حقیقی تعریف کرده‌ایم؛ و در این مرحله ما رسماً نمی‌دانیم که مجموع و حاصل‌ضَرب اعداد صحیح همیشه عددهای صحیح هستند. این را می‌توان اثبات کرد، اما اثبات را به‌انتهای فصل موکول می‌کنیم؛ و در ضمن آن بسته بودن اعداد صحیح را به‌عنوان یک اصل در نظر می‌گیریم.

بس-اصل بسته بودن. اعداد صحیح تحت عمل جمع و ضرب بسته هستند.

حال قضیهٔ بعدی ساده‌تر می‌باشد.

■ **قضیه ۱** . اعداد گویا تشکیل یک میدان مرتب می‌دهند.

اثبات. ما هر کدام از اصول میدان را جداگانه بررسی خواهیم کرد.

ج-۱ . بسته بودن تحت عمل جمع.

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{q\cdot r}{q\cdot s}=\frac{۱}{q\cdot s}(p\cdot s+qr)=\frac{p\cdot s+q\cdot r}{q\cdot s}$$

که یک عدد گویا است.

ج-۲ . چون عمل جمع به‌طور کلی در اعداد حقیقی دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، نتیجه می‌گیریم که بویژه جمع برای اعداد گویا نیز دارای خاصیت شرکت‌پذیری است.

ج-۳ . صفر گویا است، زیرا $\frac{۰}{۱}=۰$

ج-۴ . اگر عدد گویای p/q مفروض باشد، خواهیم داشت $-(p/q)=(-p)/q$، که گویا است.

ج-۵ . از آنجا که جمع برای تمام اعداد حقیقی تعویض‌پذیر است، برای اعداد گویا نیز تعویض‌پذیر خواهد بود.

ض-۱. $(p/q)(r/s)=(pr)/(qs)$ که گویا است.
ض-۲. صحت موارد ج-۲ تا ج-۵ را ببینید.
ض-۳. ۱ گویا است زیرا $\frac{1}{1}=1$.
ض-۴. اگر $(p/q)\neq 0$ آنگاه $p\neq 0$ بنابراین $(p/q)^{-1}=q/p$ که عددی گویا است.
ض-۵. صحت موارد ج-۲، ج-۵ و ض-۲ را ببینید.
ج ض-۱. قانون پخشی برای اعداد گویا برقرار است، زیرا برای تمام اعداد حقیقی برقرار است.
□

بنابراین Q یک میدان را تشکیل می‌دهد. و رابطهٔ ترتیب >، که برای اعداد حقیقی داده شده، بویژه برای اعداد گویا بکار می‌رود و بقیه اصول ترتیب نیز بطور اتوماتیک برقرار می‌باشند.

سرانجام به‌منظور آماده‌سازی برای حل بعضی از مسائل زیر، اگر یک عدد گویا باشد، مساوی p/q، آنگاه می‌توان آن را به‌صورت کسری با کوچکترین عاملها بیان کرد، به‌این معنی که، p و q را می‌توانیم چنان انتخاب کنیم که عامل مشترک صحیح مثبتی بغیر از ۱ نداشته باشند. لذا، بعنوان مثال، اگر $x=p/q$، آنگاه x را می‌توان بصورت کسر r/s که در آن r و s هر دو با هم زوج و یا بر سه قابل قسمت و یا..... نباشند بیان کرد. در حقیقت ما در اینجا از قضیه‌ای در تئوری اعداد که در ضمیمهٔ B در انتهای کتاب اثبات می‌شود، استفاده می‌کنیم.

مجموعه مسائل ۱.۷

۱. عدد صحیح مثبت n زوج است اگر $n=2k$ که k یک عدد صحیح است؛ و n فرد است اگر $n=2j+1$ که j یک عدد صحیح است. نشان دهید هر عدد صحیح مثبت یا فرد است یا زوج. [راهنمایی: فرض کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد مثبتی باشد که فرد یا زوج هستند. آنچه لازم است نشان دهیم این است که $S=N$. بررسی کنید که S در شرایط (۱) و (۲) از قضیهٔ ۱ بخش ۶-۱ صدق می‌کند.]
۲. نشان دهید که اگر n فرد باشد، آنگاه n^2 فرد است.
۳. نشان دهید که اگر n زوج باشد، آنگاه n^2 زوج است.
۴. نشان دهید اگر $\sqrt{2}=p/q$، آنگاه p زوج است.
۵. نشان دهید اگر $\sqrt{2}=p/q$، آنگاه q نیز زوج است.
۶. نشان دهید که $\sqrt{2}$ برای هیچ دو عدد صحیح p و q برابر با p/q نیست.
۷. نشان دهید هر عدد صحیح مثبت n دارای یکی از سه صورت $3k$، $3j+1$ یا $3m+2$ است.
۸. نشان دهید اگر $n=3j+1$، آنگاه n^2 نیز به‌همین صورت است.
۹. نشان دهید اگر $n=3m+2$ آنگاه n^2 به‌صورت $3k+1$ است.
۱۰. نشان دهید اگر n^2 بر ۳ بخش‌پذیر است آنگاه n نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۱. نشان دهید که $\sqrt{۳}$ گویا نیست.

۱۲. حال از همان روش اثبات استفاده کرده، سعی کنید ثابت کنید $\sqrt{٤}$، گویا نیست. در جائی باید اثبات به‌هم بخورد، زیرا قضیه در آن‌جا بی‌معنی خواهد بود. کجا اثبات به‌هم می‌خورد؟

۱۳. نشان دهید اگر a گویا و x غیر گویا باشد، $a+x$ غیر گویا است.

۱۴. نشان دهید اگر a و b گویا باشند و $b\neq ۰$ و x غیر گویا باشد آنگاه $a+bx$ غیر گویا است.

نتایج دو مسئله قبل نشان می‌دهد که اعداد غیر گویا کمیاب نیستند: اگر یکی از آنها داده شده باشد، می‌توانیم تعداد بسیار دیگری را پیدا کنیم.

*۱۵. فرض کنیم P و n اعداد صحیح مثبت باشند، نشان دهید همواره می‌توان n را به‌صورت زیر نوشت.

$$n=pq+r \text{ ،}$$

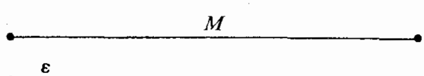
که در آن $۰ \leqslant r < p$. (دو تا از تمرینهای قبل صحت مطلب را برای $p=۲$ و $p=۳$ تصدیق می‌کنند).

۱.۸ اصل ارشمیدس؛[۱] اصل کمال اقلیدس

ممکن است چنین به‌نظر برسد که اصول یک میدان مرتب توصیف کاملی از دستگاه اعداد حقیقی باشد، اما این دور از واقعیت است، تا کنون اصول ما در واقع امکانات عجیبی را مجاز می‌داند (فصل ۳۲ را ببینید) ما در اینجا به‌بحث در مورد آنها نمی‌پردازیم بلکه فقط اصولی که آنها را غیر محتمل می‌سازد، بیان می‌کنیم.

در تمام این بخش، F یک میدان مرتب می‌باشد.

آسانترین راه برای درک معنیِ قضیهٔ بعد، در نظر گرفتن آن بصورت هندسی است. فرض کنید دو پاره‌خط مانند زیر داده شده باشند:



شکل ۱.۴

حالت جالب آن است که پاره‌خط اولی خیلی بلند و پاره‌خط دومی خیلی کوتاه باشد. معقول است اگر فرض کنیم که با گذاشتن تعداد کافی از کپی‌های پاره‌خط دوم پشت سر هم به‌پاره‌خطی بزرگتر

۱- Archimedean Postulate, Euclidean Completeness

از پاره‌خط اول برسیم. و این مطلب صرفنظر از این که پاره‌خط اول چقدر بلند باشد یا پاره‌خط دوم چه اندازه کوتاه باشد، باید درست باشد. اگر طولهای پاره‌خط‌ها همانطور که در شکل نشان داده شده است، اعداد حقیقی M و ε باشند و به‌تعداد n کپی از پاره‌خط دوم کافی باشد، آنگاه داریم $n\varepsilon > M$.
(این همان تصوری است که ارشمیدس در ذهن خود داشت، هنگامی که گفت، اگر شما یک اهرم به‌اندازه کافی بلند و یک تکیه گاه برای قرار دادن اهرم روی آن به‌او می دادید، می‌توانست دنیا را حرکت دهد. فرض کنیم ε وزن ارشمیدس و M وزن دنیا باشد. ارشمیدس یک اهرم به‌اندازه کافی بلند می‌خواست که به‌او مزیت مکانیکی با نسبت n به ۱ را بدهد، به‌طوری که، $n\varepsilon > M$.)

صورت جبری این مطلب در ذیل بیان شده است.

A. **اصل ارشمیدس.** فرض کنیم M و ε هر دو عدد حقیقی مثبتی باشند. در این صورت یک عدد صحیح و مثبت n وجود دارد به‌طوری که

$$n\varepsilon > M\ .$$

میدان مرتبی که در این شرط صدق می کند میدان ارشمیدسی نامیده می‌شود. از این به‌بعد فرض می کنیم که دستگاه اعداد حقیقی یک میدان مرتب ارشمیدسی تشکیل می دهند.

توجه کنید که اگر یک عدد صحیح معین n رابطه $n\varepsilon > M$ را به‌ما بدهد، آنگاه هر عدد صحیح بزرگتری نیز چنین خاصیتی را دارد. بنابراین هم‌ارز این اصل می‌تواند تا جائی ادامه یابد که بگوئیم برای هر عدد صحیح n بزرگتر یا مساوی یک عدد معین n_0 داریم $n\varepsilon > M$.

حتی آخرین اصل ما، هنوز برای هیچ یک از اهداف جبر یا هندسه کافی نیست. آسانترین راه برای درک آن مشاهدهٔ این مطلب است که میدان اعداد گویا Q در تمام اصول ما تا اینجا صدق می کند، و در Q عدد ۲ دارای هیچ ریشهٔ دوّمی نیست. ما نیاز به‌این مطلب داریم که بدانیم میدان عددی ما به‌نحوی کامل است که اجازهٔ عملیات جبری را به‌ما می‌دهد. تا مدت زمان زیادی که باقی مانده است. دانستن این مطلب کافی است که هر عدد صحیح مثبت دارای یک ریشه دوّم است.

اگر $a > 0$، آنگاه x یک ریشه دوم a است اگر $x^2 = a$. واضح است که اگر x یک ریشه دوم a باشد، آنگاه $-x$ نیز یک ریشه دوم a است. بنابراین، اگر یک عدد دارای یک ریشه دوم باشد، باید دو ریشه دوم داشته باشد.

از طرف دیگر، هیچ عددی مانند a دارای دو ریشه مثبت متمایز x_1 و x_2 نمی‌باشد. اگر چنین باشد، باید داشته باشیم

$$x_1{}^2 = a = x_2{}^2\ ,\ \ x_1{}^2 - x_2{}^2 = 0\ ,\ \ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

در اینجا $x_1 - x_2 \neq 0$، چون $x_1 \neq x_2$ و $x_1 + x_2 > 0$ زیرا $x_2 > 0$ و $x_1 > 0$.
لذا حاصلضرب $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ نمی‌تواند صفر بشود.

یک میدان مرتب را اقلیدسی می‌نامند اگر در شرط زیر صدق کند.

C-1. **اصل کمال اقلیدس.** هر عدد صحیح و مثبت یک ریشه دوم مثبت دارد.

ما این را به‌خاطر نقشی که در هندسه دارد اصل اقلیدس نامیدیم. نهایتاً این اصل ما را مطمئن می‌سازد که دایره‌ها خط‌ها را می‌برند، و دایره‌ها یکدیگر را می‌برند، به‌همان طریقی که انتظار داریم.

همانطور که در بالا نشان داده شد چنین نتیجه می‌شود که هر $a>0$ دارای دقیقاً یک ریشه دوم مثبت است، که آنرا با $\sqrt{a}$ نشان می‌دهند. ریشهٔ دوم دیگر a، $-\sqrt{a}$ است. ما توافق می کنیم که $\sqrt{0}=0$.

این واژه‌ها ممکن است گیج کننده باشند. عبارات زیر را در نظر بگیرید.

(۱) x یک ریشه دوم a است.

(۲) $x=\sqrt{a}$.

دوّمی تنها یک رونوشت مختصر از اوّلی نیست. عبارت (۱) تنها بدین معنی است که $a=x^2$.

عبارت دوم نه تنها به‌این معنی است که $x^2=a$ بلکه همچنین $x\geqslant 0$. اگر بخواهیم کامل صحبت کنیم. هرگز درست نخواهد بود که از «ریشهٔ دوم a» حرفی بزنیم بجز وقتی که $a=0$ است. زیرا هر عدد $a\neq 0$ یا دارای دو ریشه دوم است، یا اصلاً دارای ریشه دوم نیست. (در دستگاه اعداد حقیقی). یک راه برای جلوگیری از این اشتباه خواندنِ علامت $\sqrt{a}$ به‌صورت «ریشهٔ a» است. این به‌افراد هشدار می‌دهد که شما یک فرمول را می‌خوانید.

بعدها، ما به‌اصل کمال دیگری نیاز خواهیم داشت تا بعنوان مثال ما وجود π را تضمین کنیم. ما این بحث را تا زمانی که به‌آن نیاز پیدا کنیم، به‌تعویق می‌اندازیم.

بررسیهای به‌ظاهر پر ارزش بعدی به‌طور شگفت‌انگیزی مفید از کار در می‌آیند.

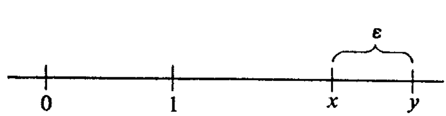
■ **قضیهٔ ۱.** برای هر عدد حقیقیِ a یک عدد صحیح $a<n$ و یک عدد صحیح $a>m$ وجود دارد.

اثبات. برای رسیدن به n می‌توانیم فرض کنیم $a>0$. در اصل ارشمیدس، $M=a$ و $\varepsilon=1$ می گیریم. در این صورت یک عدد n بدست می‌آید به‌طوری که $n\cdot 1>a$، که همان عدد مورد نظر است. برای بدست آوردن $m<a$، $n>-a$ انتخاب می کنیم، و فرض می کنیم $m=-n$. □

■ **قضیهٔ ۲.** بین هر دو عدد حقیقی، حداقل یک عدد گویا وجود دارد.

(واضح است که بیشتر وجود دارد)

اثبات. فرض کنیم $x<y$. اگر عدد گویای r وجود داشته باشد به‌طوری که $x+n<r<y+n$، آنگاه یک عدد گویای $r'=r-n$ بین x و y وجود دارد. می‌توانیم فرض کنیم که $1<x<y$.

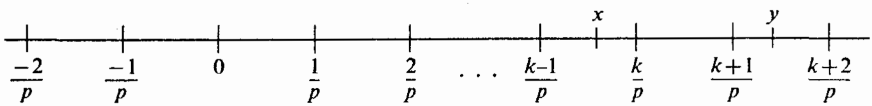


شکل ۱.۵.

فرض کنیم $\varepsilon = y - x$. بنابر اصل ارشمیدس، برای عددی صحیح مانند p، داریم $p\varepsilon > ۱$.
لذا

$$\frac{۱}{p} < \varepsilon \cdot$$

حال اعداد گویای با مخرج p تمام محور اعداد را به پاره‌خط‌هائی به‌طول $۱/p$ تقسیم می کنند، مانند شکل زیر:



شکل ۱.۶.

اگر k/p اولین آنهایی باشد که در سمت راست x قرار دارد آنگاه k/p باید بین x و y باشد، زیرا

$$\frac{۱}{p} < \varepsilon = y - x \cdot$$

یا به‌طور دقیقتر، فرض کنیم

$$K = \{n \mid \frac{n}{p} > x\} \cdot$$

بنا بر اصل خوش ترتیبی، K دارای کوچکترین عضو k است.
بنابراین $k/p > x$، اما $(k-۱)/p \leqslant x$
لذا

$$\frac{k}{p} \leqslant x + \frac{۱}{p} \leqslant x + \varepsilon$$

$$\leqslant x + (y - x) = y \cdot$$

بنابراین

$$x < \frac{k}{p} < y$$

که باید ثابت می‌شد. □

در استفاده از اصل ارشمیدس برای اثبات این قضیهٔ به‌ظاهر مقدماتی ما هیچ نوع شوخی نمی کنیم، اصل مورد نیاز است. میدانهای مرتبی هستند که اقلیدسی هستند امّا ارشمیدسی نمی‌باشند. (فصل ۳۲ را ببینید). در این میدانها، قضایای ۱ و ۲ صحیح نیستند. در آنها بعضی از مقادیر x و y بزرگتر از هر عدد صحیحی هستند و به‌طبع بزرگتر از هر عدد گویایی می‌باشند. برای خیلی از اهداف هندسه ما برای غیر متحمل شمردن این موارد نیاز به‌اصل ارشمیدس داریم.

مجموعه مسائل ۱.۸

۱. نشان دهید اگر $y > x > 0$، آنگاه $x^2 < y^2$. آیا اگر فقط می‌دانستیم که $x < y$ نتیجه قبلی حاصل می‌شد؟ چرا؟

۲. نشان دهید اگر x و $y > 0$، $x^2 < y^2$، آنگاه $x < y$.

۳. نشان دهید اگر $0 < a < b$، آنگاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

۴. نشان دهید عددی به‌صورت $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ وجود دارد.

۵. همان مسئله ۴، برای $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

۶. همان مسئله ۴ برای $\sqrt{(3-\sqrt{2}) \;/\; (7-\sqrt{13})}$

۷. نشان دهید $\sqrt{\sqrt{2}}$ را نمی‌توان به‌صورت $a+b\sqrt{2}$ که در آن a و b گویا هستند، بیان کرد.
[راهنمایی: شما به‌قضیه‌ای از مسائل ۳-۱ نیاز دارید.]

۸. به‌ازای هر x، فرض کنیم C_x مجموعه تمام اعداد گویای کوچکتر از x باشد. نشان دهید اگر $C_x = C_y$، آنگاه $x = y$.

۹. نشان دهید اگر p^3 زوج باشد، آنگاه p نیز زوج است.

۱۰. نشان دهید که $\sqrt[3]{2}$ غیر گویاست.

۱۱. نشان دهید که $\sqrt[3]{2}$ را نمی‌توان به‌صورت $a+b\sqrt{2}$ که در آن a و b گویا هستند، نوشت.

۱۲. نشان دهید که برای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد صحیح n_0 وجود دارد به‌طوری که

$$n > n_0 \implies \frac{1}{n} < \varepsilon \cdot$$

۱.۹ زبان و نمایش مجموعه‌ها

تا اینجا ما با زبان مجموعه‌ها به‌صورت نسبتاً محتاطانه با کمترین نماد گذاری خاصی استفاده می کردیم.

اگرچه یک مختصر نویسی استانداردی وجود دارد، با وجود این به‌خاطر کاربرد وسیع و امکان مختصر و مفید نوشتن روی دفترچه‌ها و تخته‌سیاه ارزش یاد گیری را دارد.

در تمام این بخش، حروف بزرگ نشان دهنده مجموعه‌ها می‌باشند. اگر a یک عضو A باشد، آنگاه می‌نویسیم $a \in A$.

علامت $\in$ چنین خوانده می‌شود «متعلق است به». وقتی می‌نویسم $a \notin A$، منظور این است که a به A تعلق ندارد. اگر هر عضو از A عضو B نیز باشد، آنگاه A را زیر مجموعهٔ B می‌نامند، و می‌نویسیم

$$A \subset B \;,$$

$$B \supset A \cdot$$

توجه کنید در اینجا امکان $A=B$ نیز مجاز است، یعنی، هر مجموعه زیر مجموعه‌ای از خودش است.

اشتراک A و B مجموعه‌ای است از تمام چیزهایی که عضو A و عضو B هستند. اشتراک توسط $A\cap B$ نشان داده می‌شود. (خوانده می‌شود «A طاق B» زیرا علامت $\cap$، تقریباً شبیه طاق است). لذا

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ و } x\in B\}$$

در مورد استفاده از لغت اشتراک باید آگاه بود. وقتی صحبت از اشتراک A و B می کنیم و می‌نویسیم $A\cap B$، امکان آن که $A\cap B$ مجموعه $\varnothing$ باشد نیز وجود دارد. اما هنگامی که می گوییم دو مجموعه A و B اشتراک دارند، همواره منظورماز این است که A و B حداقل یک عضو مشترک دارند.

این اختلاف در کاربرد، بین اسم و فعل، منطقی نیست امّا مناسب است و تقریباً عمومی و چیز زیادی در مورد آن نمی‌توان انجام داد.

اجتماع A و B مجموعهٔ تمام اشیائی است که یا عضو A یا عضو B یا عضو هر دوی آنها می‌باشند.

اجتماع توسط $A\cup B$ نشان داده می‌شود. (خوانده می‌شود **A** ناو B، زیرا این نماد تقریباً مانند یک ناو به‌نظر می‌رسد.) لذا؛

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\} \cdot$$

(در اینجا، و هر جای دیگری در ریاضیات وقتی می گوئیم «یا .... یا ....»، امکان شرایط بیان شده برای هر دو مجاز است. اما اگر واقعاً منظورمان این باشد که «... امّا نه هر دو» باید شرط مورد نظر را بگوئیم.)

تفاضل دو مجموعهٔ A و B مجموعهٔ تمام اشیایی است که به A تعلق دارند اما به B متعلق نیستند. تفاضل را با $A-B$ نشان می‌دهند. (خوانده می‌شود A منهای B) لذا

$$A-B = \{x \mid x\in A \text{ و } x\notin B\} \cdot$$

بعضی از کتابهای نوشته شده در استفاده از این نماد گذاری خیلی آزادانه عمل می کنند. امّا این کتاب از آن نوع نیست. بیشتر وقتها ما از کلمات استفاده خواهیم کرد. البته در مفهومهائی که به‌وسیله نمادهای، $\in$، $\notin$، $\subset$، $\supset$، $\cap$، $\cup$ و $-$، نشان داده می‌شوند به‌طور ثابت استفاده خواهیم کرد.

مجموعهٔ مسائل زیر فقط برای تمرین شما در نوشتن و تشریح نمادها بیان شده است. این مسائل را باید براساس برداشت عمومی شما از اینکه مجموعه‌ها چگونه عمل می کنند، انجام داد.

در این کتاب ما در تلاش برای پرداختن به‌مجموعه‌ها با استفاده از اصول بصورت صوری نیستیم.

در آخر، دو علامت اختصاری که به‌صورت معمول و مفید بر روی تخته‌سیاه استفاده می‌شود بیان می کنیم:

(۱) $\exists$ بدین معنی است که «وجود دارد»

(۲) $\ni$ بدین معنی است که «به‌طوری که»

بعنوان مثال، اصل کمال اقلیدس $C-1$ می‌تواند به‌صورت زیر بیان گردد:

اگر $a\in R$ و $a>0$، آنگاه $\exists x \ni x>0$ و $x^2=a$.

نماد $\nexists$ بدین معنی است که «وجود ندارد».

مجموعه مسائل ۱.۹

کدامیک از عبارات زیر برای تمام مجموعه‌های $A,B,C,\cdots$ برقرار است؟

۱. $A\subset A\cup B$

۲. $A\supset A\cap B$

۳. $A\subset A\cap B$

۴. $A\cap(B-A) = \emptyset$

۵. اگر $A\subset B$، آنگاه $x\in A \Longrightarrow x\in B$

۶. اگر $A\subset B$ و $B\subset C$، آنگاه $A\subset C$

۷. یا $A\subset B$ یا $\exists a\ni a\in A$ و $a\notin B$.

۸. $A-B\subset A$

۹. اگر $A=A\cap B$، آنگاه $A\subset B$

۱۰. اگر $A\subset B$، آنگاه $A=A\cap B$

۱۱. اگر $A=A\cup B$، آنگاه $B\subset A$

۱۲. $(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$

۱۳. $(A-B)\cap(A\cup B)=A\cap B$

۱.۱۰ ـ مجموع و حاصلضرب n تائی
تعمیم قانون شرکت پذیری

شکل خاصی در قوانین شرکت پذیری برای جمع و ضرب وجود دارد. وقتی که عملیات جبری انجام می‌دهیم، آنها به‌همین صورت که هستند برای تأئید مواردی که در بارهٔ آنها صحبت کردیم، و کارهائی که انجام دادیم، کافی نمی‌باشند. در انتهای بخش ۲ـ۱ تذکر دادیم که نوشتن حاصلضرب سه تایی abc کاملاً صحیح است، زیرا $(ab)c$ همواره همان عدد $a(bc)$ است و بطور مشابه آن برای جمع. هر چند در عمل پس از خواندن فصل اوّل از هر کتابی شما مجموع n تایی را برای $n>3$ به‌صورت

$$a_1+a_2+\cdots+a_n ،$$

و حاصلضرب n تایی را به‌صورت

$$a_1 a_2 \cdots a_n \text{ ،}$$

می‌نویسید.

ما به دلخواه، پرانتز را در این جمع‌ها و ضربها نوشته یا حذف می کنیم. تمام اینها درست است اما هنوز با عمل‌هائی که برای زوج اعداد (a,b) و قوانین شرکت‌پذیری برای سه‌تائی‌های (a,b,c) در نظر گرفته‌ایم ارتباطی برقرار نشده است.

جای تأسف بود اگر ریاضی دو قسمت می‌شد، در یک طرف اصول و تعاریف، در طرف دیگر محتوای ریاضی. پس اجازه دهید بین اصول و کارهائی که قرار است انجام دهیم پلی بزنیم.

کلید مسأله ما مفهوم استقراء است. آنچه در یک میدان داده شده است حاصلضرب دوتائی ab، برای هر a و b در میدان است. فرض کنید a_1، a_2، و a_3 داده شده باشند. حاصلضرب سه‌تائی را توسط رابطه زیر تعریف می کنیم

$$a_1 a_2 a_3 = (a_1 a_2) a_3 \ .$$

و به‌طور مشابه، تعریف می کنیم

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 a_2 a_3) a_4 \text{ ،}$$

که پرانتز سمت راست توسط معادلهٔ قبلی تعریف شده است. به‌طور کلی،

$$a_1 a_2 \cdots a_n \ a_{n+1} = (a_1 a_2 \cdots a_n) a_{n+1} \ .$$

به‌این معنی است که برای تشکیل حاصلضرب $(n+1)$ تایی، در ابتدا حاصلضرب n تایی (از n عامل اولیه) را تشکیل می‌دهیم و سپس نتیجه را در آخرین عامل ضرب می کنیم.

این تعریف معتبر ما از حاصلضرب n تایی است. اما روش دیگری هست که می‌توانستیم از آن استفاده کنیم. امکان داشت حاصلضرب سه‌تایی را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$a_1 a_2 a_3 = a_1 (a_2 a_3) \ .$$

سپس می‌توانستیم در حالت کلی بگوئیم

$$a_1 a_2 \cdots a_n \ a_{n+1} = a_1 (a_2 a_3 \cdots a_n \ a_{n+1}) \text{ ؛}$$

به‌عبارت دیگر برای تشکیل حاصلضرب $(n+1)$ تایی می‌توانستیم در ابتدا حاصلضرب n عامل آخر را تشکیل داده و سپس نتیجه را در اولین عامل ضرب کنیم. در حقیقت اوّلین چیزی که نیاز داریم ثابت کنیم این است که انتخاب بین دو روش هیچ فرقی با هم ندارند. در قضیهٔ بعدی کمی علامت گذاری‌ها را تغییر می‌دهیم تا از رسیدن به‌عبارتهای عجیب برای $n=1$ و $n=2$ اجتناب ورزیم.

■ **قضیهٔ ۱.** برای هر عدد صحیح مثبت n،

$$aba_1a_2\cdots a_n=a(ba_1a_2\cdots a_n)$$

اثبات. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبتی باشد که رابطهٔ فوق برای آنها برقرار است. به‌استقراء نشان می‌دهیم که S شامل تمامی اعداد صحیح است. بنابراین نیاز داریم دو مطلب را نشان دهیم؛

(۱) S شامل ۱ است

(۲) S تحت عمل جمع با ۱ بسته است.

اثباتِ (۱). S شامل ۱ است اگر $aba_1=a(ba_1)$.

حال، طبق تعریف، $aba_1=(ab)a_1$، و طبق قانون معمولی شرکت‌پذیری برای سه‌تائی‌ها $(ab)a_1=a(ba_1)$. بنابراین S شامل ۱ است. □

اثبات (۲). در اینجا باید نشان دهیم اگر S شاملِ n باشد آنگاه S شامل $n+1$ نیز هست. بدین معنی که اگر،

$$aba_1a_2\cdots a_n=a(ba_1a_2\cdots a_n) \qquad (i)$$

آنگاه

$$aba_1a_2\cdots a_n\ a_{n+1}=a(ba_1a_2\cdots a_na_{n+1}) \qquad (ii)$$

این را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم. داریم (طبق تعریف)

$$aba_1a_2\cdots a_n\ a_{n+1}=(aba_1a_2\cdots a_n)a_{n+1}،$$

بنابر (i)، عبارتِ سمت راست برابر است با

$$=\ [a(ba_1a_2\cdots a_n)]a_{n+1}\ .$$

بنابر قانون شرکت‌پذیری، برابراست با

$$=\ a[(ba_1a_2\cdots a_n)a_{n+1}]\ .$$

طبقِ تعریفِ حاصلضربِ $(n+2)$ تایی، عبارت سمت راست برابر است با

$$=\ a(ba_1a_2\cdots a_n\ a_{n+1})\ .$$

بنابراین (ii) برقرار است. □

به کمک این قضیه، قضیه بعدی را ثابت می‌کنیم.

■ **قضیهٔ ۲. قانون کلی شرکت‌پذیری.** در هر حاصلضرب n تایی، با درج هر زوج از پرانتزها، مقدار حاصلضرب بدون تغییر باقی می‌ماند.

اثبات. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد صحیح n باشد که درج پرانتز در هر حاصلضرب

n تایی حاصل آن را تغییر ندهد.

برای اثبات این قضیه، کافی است نشان دهیم که

(۱) S شامل ۱ است و

(۲) S تحت عمل جمع با ۱ بسته است.

اثبات (۱). معلوم است که برای هر a، $a_1=(a_1)$. بنابراین S شامل ۱ است.

اثبات (۲). اگر حاصلضرب $(n+1)$ تایی $a_1a_2\cdots a_n\ \ a_{n+1}$ داده شده باشد، فرض کنید یک زوج پرانتز را درج کنیم، سه حالت وجود دارد که باید در نظر بگیریم.

(i) پرانتز را در جائی بعد از a_1 باز کنیم، مانند

$$a_1a_2\cdots a_i(a_{i+1}\cdots a_k)\cdots a_{n+1}$$

(در اینجا امکان $k=n+1$ نیز مجاز است)

(ii) پرانتز را در جائی قبل از a_{n+1} به بندیم.

(iii) پرانتزها کل حاصلضرب را در بر بگیرند.

آشکار است که در حالت (iii) چیزی برای اثبات وجود ندارد. در حالت (i)، بنا بر قضیه (۱)،

$$a_1a_2\cdots a_i(a_{i+1}\cdots a_k)\cdots a_{n+1}=a_1[a_2\cdots a_i(a_{i+1}\cdots a_k)\cdots a_{n+1}]\ ,$$

که برابر است با

$$=\ a_1[a_2\cdots a_{n+1}]\ ,$$

زیرا S شامل n است، و این هم بنا به‌قضیه ۱ می‌شود

$$=\ a_1a_2\cdots a_{n+1}\ ,$$

لذا در حالت (i)، اگر S شامل n باشد، نتیجه می گیریم که S شامل $n+1$ نیز می‌باشد.

در حالت (ii)، داریم

$$a_1a_2\cdots a_i(a_{i+1}\cdots a_k)\cdots a_{n+1}\ ,$$

که $k<n+1$، اما $i+1$ ممکن است برابر ۱ باشد. طبق تعریف حاصلضرب $(n+1)$ تایی، می‌شود

$$=\ [a_1a_2\cdots(a_{i+1}\cdots a_k)\cdots a_n]a_{n+1}\ ;$$

که این نیز به‌نوبه خود می‌شود

$$=\ [a_1a_2\cdots a_n]a_{n+1}\ ,$$

زیرا S شامل n است؛ که این بنا بر حاصلضرب $(n+1)$ تایی برابر است با

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \; a_{n+1} \cdot$$

این، اثبات استقرائی ما را کامل می کند. □

کارهایی که معمولاً ما با حاصلضرب n تایی انجام می دهیم می تواند توسط کاربردهای متوالی این قضیه تأئید شود. برای مثال:

$$ab \frac{1}{b} c \frac{1}{c} d = ad \cdot$$

اثبات. عبارتِ سمت چپ برابر است با

$$a(b \frac{1}{b})(c \frac{1}{c}) \; d \;,$$

با دو بار به کار بردن قضیهٔ ۲، برابر است با

$$\begin{aligned} &= a \cdot 1 \cdot 1 \cdot d \\ &= (a 1)(1 d) \\ &= ad \cdot \end{aligned}$$

ما مجموع n تایی را دقیقاً به‌همان طریق تعریف و طبق همان اثبات نتیجه می گیریم که مجموع n تایی در قانون کلی شرکت‌پذیری صدق می کند. به‌این معنی که درج یک زوج پرانتز در مجموع n تایی،

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

حاصل جمع را تغییر نمی‌دهد. سرانجام مشاهده می کنیم که همواره داریم

$$a(b_1 + b_2 + \cdots b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots ab_n \cdot$$

اثبات به‌وسیله یک استقراء ساده است. برای $n = 1$ داریم، $ab_1 = ab_1$. فرض کنیم رابطه زیر برقرار باشد

$$a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1}) &= a[(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + b_{n+1}] \\ &= a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + ab_{n+1} \\ &= (ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n) + ab_{n+1} \\ &= ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n + ab_{n+1} \cdot \quad \square \end{aligned}$$

۱.۱۱ بسته‌بودن اعداد صحیح تحت جمع و ضرب

در بخش ۷ـ۱ دریافتیم که برای اثباتِ اینکه مجموعهٔ اعداد گویا Q یک میدان را تشکیل می‌دهد، نیاز داشتیم که بدانیم مجموع و حاصلضرب اعداد صحیح همیشه اعداد صحیح می‌باشند. بنا بر تعریف ما از اعداد صحیح لازم است این ثابت شود؛ اثبات فقط یک سری تمرین در استفاده از استقراء می‌باشد.

یاد آوری می‌کنیم که مجموعهٔ N از اعداد صحیح مثبت به‌وسیله سه‌شرط زیر تعریف شد:

(۱) N شامل ۱ است،

(۲) N تحت عمل جمع با ۱ بسته‌است، و

(۳) از تمام مجموعه‌های اعدادی که در شرط‌های (۱) و (۲) صدق می‌کنند، N کوچکترین است.

برای بدست آوردن مجموعهٔ Z اعداد صحیح، عدد صفر و نیز قرینه‌های تمام عددهای صحیح مثبت را به N اضافه می‌کنیم.

■ **قضیهٔ ۱.** اگر a و n اعداد صحیح مثبت باشند، آنگاه $a+n$ نیز چنین است.

اثبات. فرض کنیم a ثابت و S مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت n باشد به‌طوری که $a+n\in N$. در این صورت (۱) $1\in S$، زیرا N تحت عمل جمع با ۱ بسته‌است، و (۲) اگر $n\in S$، آنگاه $n+1\in S$. زیرا اگر $a+n\in N$، داریم

$$a+(n+1)=(a+n)+1 ,$$

که به N تعلق دارد. □

■ **قضیهٔ ۲.** اگر a و n اعداد صحیح مثبت باشند، آنگاه an نیز چنین است.

اثبات. اگر a ثابت و $S=\{n \mid an\in N\}$، آنگاه

(۱) $1\in S$، زیرا $a1=a$. (۲) اگر $n\in S$، آنگاه $n+1\in S$. زیرا

$$a(n+1)=an+a1=an+a ,$$

که جمع دو عدد صحیح مثبت است. □

■ **قضیهٔ ۳.** اگر x و y اعداد صحیح باشند، آنگاه xy نیز چنین است.

اثبات. اگر $x,y>0$، از قضیهٔ ۲ نتیجه حاصل می‌شود. اگر $x>0$ و $y<0$، آنگاه

$$xy=-[x(-y)]$$

که قرینه عدد صحیح مثبت $x(-y)$ است. حالت $x<0$، $y>0$ به‌همان صورت است. اگر $x,y<0$ آنگاه xy عدد صحیح مثبت $(-x)(-y)$ است. سرانجام، اگر $x=0$ یا $y=0$ داریم $xy=0$، که یک عدد صحیح است. این قضیه بسته بودن تحت عمل ضرب را تأمین می‌کند. □

عمل جمع به‌طور عجیبی مشکل‌تر است.

قضیهٔ ۴. اگر $n\in Z$، آنگاه $n-1\in \mathbf{Z}$.

اثبات.

(۱) اگر $n>1$، آنگاه برای مقداری مانند k در N، $n=k+1$. (قضیهٔ ۶ از بخش ۱-۶).

بنابراین $n-1=k\in \mathbf{Z}$

(۲) اگر $n=1$، آنگاه $n-1=0\in \mathbf{Z}$.

(۳) اگر $n=0$، آنگاه $n-1=-1\in \mathbf{Z}$.

(۴) اگر $n<0$، آنگاه $n=-k$، که $k>0$. بنابراین $n-1=(-k)+(-1)=-(k+1)$، که قرینه یک عدد صحیح مثبت است. □

قضیهٔ ۵. اگر $a\in Z$ و $n\in N$، آنگاه $a-n\in Z$.

اثبات. فرض کنیم $S=\{n \mid a-n\in Z\}$. در آن صورت (۱) $1\in S$ ، بنا بر قضیه ۴، و (۲) اگر $n\in S$، آنگاه $n+1\in S$. زیرا اگر $a-n\in Z$، آنگاه

$$a-(n+1)=(a-n)-1 ،$$

که بنا بر قضیه ۴، به $\mathbf{Z}$ متعلق است. □

قضیهٔ ۶. اگر $x,y\in Z$، آنگاه $x+y\in Z$.

اثبات.

حالت ۱. اگر $x=0$ یا $y=0$، تلویحاً برقرار است.

حالت ۲. اگر $x,y>0$، آنگاه $x+y\in N$، و لذا به Z نیز تعلق دارد.

حالت ۳. اگر $x,y<0$، آنگاه $x+y=-[(-x)+(-y)]$ که قرینهٔ عدد صحیح مثبت $(-x)+(-y)$ است.

حالت ٤. اگر $x<0<y$، فرض می کنیم $n=-x$. در این صورت $n>0$، و $x+y=y-n$. بنا بر قضیه ۵ می‌دانیم که $y-n\in Z$. □

این تحقیقها خسته کننده، اما ضروری هستند. ما نیاز داریم در مورد اعداد صحیح، اعداد حقیقی و ارتباط بین آنها بدانیم. یک روش انجام این کار آن است که ابتدا اعداد صحیح را در نظر گرفته و سپس اعداد حقیقی را از روی آنها بسازیم. (برای این روش، بعنوان مثال، «مبانی آنالیز» نوشته ادموند لنداو، را ببینید [1]). در این فصل ما در ابتدا اصول اعداد حقیقی را بیان کردیم و سپس از بالا به پائین حرکت کردیم تا به‌اعداد صحیح برسیم. روند اخیر بسیار سریعتر و آسانتر است. اما هیچ روشی نمی‌تواند مشکلات تکنیکی ما را به‌صفر تقلیل دهد.

فصل ۲

هندسه وقوع در صفحه و فضا

به‌خاطر دارید که وقتی بحث اعداد حقیقی را از نقطه‌نظر اصولی بیان کردیم، با سه چیز شروع کردیم:

یک مجموعه $\mathbf{R}$ (که اعضای آن را اعداد نامیدیم) و دو قانون ترکیب (که آنها را جمع و ضرب نامیدیم و به $+$ و $\cdot$ نشان دادیم).

بنابراین، در بخش ۲ـ۱، ساختمانی را که به کار بردیم، عبارت بود از سه‌تائی $[\mathbf{R},+,\cdot]$، که $\mathbf{R}$ یک مجموعه بود، و $+$ و $\cdot$ دو عمل که در $\mathbf{R}$ تعریف شده بودند.

کمی بعدتر، فرض کردیم که یک رابطه ترتیب $>$ داریم، که در $\mathbf{R}$ تعریف شده و تابع چندین شرط بود.

بنابراین، در پایان فصل ۱، ساختمانی را که به کار بردیم عبارت بود از چهار تائی $[\mathbf{R},+,\cdot,>]$ و تمام اصول ما بر حسب این چهار شی بیان شد.

اکنون همین تدبیر را در بررسی اصولی هندسه در صفحه و فضا دنبال خواهیم کرد.

در این طرحی که به کار می‌بریم، فضا را به‌عنوان یک مجموعه S در نظر می گیریم؛ که نقطه‌های فضا اعضاء این مجموعه خواهند بود. همچنین دسته‌هائی از زیر مجموعه‌هائی از S خواهیم داشت، که آنها را خط ها می‌نامیم، و همچنین دسته‌های دیگر از زیر مجموعه‌های S، که آنها را صفحه‌ها می‌نامیم. بنابراین ساختمانی را که با آن شروع می کنیم، سه‌تائی

$$[S,L,P]$$

می‌نامیم، که اعضای S، L و P به‌ترتیب نقاط، خطها و صفحه‌ها نامیده می‌شوند.

بعداً، به‌این ساختمان چیزهائی اضافه می کنیم، مثل آنچه در قسمت آخر فصل ۱ به‌ساختمان جبری اضافه کردیم.

عجالتاً، هنوز، اصول ما بر حسب مجموعه‌های S، L و P بیان می‌شوند. آنچه در فوق بیان

کردیم معادل آن است که بگوئیم اصطلاحهای نقطه، خط و صفحه را تعریف نشده می پذیریم.

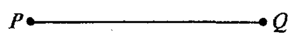
در این ریاضیات رسمی، اصولی را به کار می بریم؛ و تنها چیزهائی را که ادعا می کنیم که در مورد نقطه، خط، و صفحه می دانیم آن چیزی خواهد بود که دراصول بیان شده است. ولی به‌طور غیر رسمی ایده خوبی است که به‌یاد آوریم خط‌ها و صفحه‌ها چه نوع چیزهایی می باشند.

یک خط از هر دو طرف به‌طور نامتناهی امتداد می یابد، مانند شکل زیر:

شکل ۲.۱

در اینجا گذاشتن فلشها نشان دهنده این هستند که خط در جایی که شکل آن متوقف می‌شود، توقف نمی‌کند.

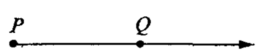
همچنین ما اصطلاح دیگری به‌نام پاره‌خط را برای شکلهای به‌صورت زیر خواهیم داشت.



شکل ۲.۲

اگر نقاط انتهائی P و Q باشند، آنگاه این شکل پاره خطی از P به Q نامیده می‌شوند.

برای یک «خط» فقط امتداد دادن آن به‌طور نامتناهی از یک طرف کافی نیست.



شکل ۲.۳

شکلی مانند این یک پرتو (نیم خط) نامیده می شود. به‌طور مشابه یک صفحه به‌طور نامتناهی از هر طرف امتداد می یابد.

بنابراین کف اطاق شما نمایش یک صفحه نیست، حتی اگر کاملاً صاف باشد. آن قسمتی از صفحه را تشکیل می دهد.

اگر منطقی صحبت کنیم، وقتی که این شکلها را رسم می کنیم، خود را جلو انداخته‌ایم. به‌هیچ‌وجه اصول این بخش تقریباً کافی نیستند که مطمئن شویم خط‌ها مانند تصاویر به‌نظر می‌رسند، چنانچه در مجموعه مسائل بعدی خواهید دید.

اولین اصل ما صرفاً یک یادآوری است.

L-۰. همه خط‌ها و صفحه‌ها مجموعه‌هائی از نقاط می‌باشند.

اگر خط **L** یک زیر مجموعه‌ای از صفحه **E** باشد، آنگاه گوئیم **L در E واقع است**. (همین جمله در حالت کلی نیز به کار می‌رود، بدین معنی که یک مجموعه زیر مجموعه‌ای از دیگری است).

اگر نقطه P به‌خط L متعلق باشد، آنگاه گوئیم **P روی L واقع است** یا L از نقطه P می گذرد. به‌طور مشابه، اگر نقطه P متعلق به صفحه E باشد، آنگاه گوئیم P در E واقع است یا صفحه E از نقطه P می گذرد. (در اینجا ما فقط زبان آشنای هندسی را بر حسب ابزارهای تئوری مجموعه‌ها که در اصول‌هایمان استفاده می‌شود تعریف می کنیم).

منظور ما از شکل مجموعه‌ای از نقاط است.

نقاطی را که روی یک خط قرار دارند نقاط **هم خط**، و نقاطی را که روی یک صفحه قرار دارند نقاط **هم صفحه** می‌نامیم.

I ـ ۱. به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز، دقیقاً یک خط شامل آن دو وجود دارد.
اگر P و Q دو نقطه باشند، آنگاه خط شامل آنها را به $\overleftrightarrow{PQ}$ نشان می‌دهیم.
فلشها به‌منظور یادآوری نمایش خط است که در شکلها به کار می‌رود

I ـ ۲. به‌ازای هر سه نقطه متمایز غیر واقع بر یک خط، دقیقاً یک صفحه شامل آنها وجود دارد.
اگر سه نقطه P، Q و R مفروض باشند، آنگاه صفحه شامل آنها را به $\overleftrightarrow{PQR}$ نشان می‌دهیم.

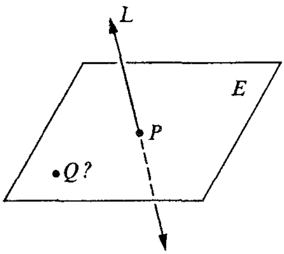
I ـ ۳. اگر دو نقطه در یک صفحه واقع باشند، آنگاه خط شامل آنها در آن صفحه واقع است.

I ـ ۴. اگر دو صفحه یکدیگر را ببرند، آنگاه محل تلاقی آنها یک خط است.
اگر آنچه را که تاکنون بیان کردیم با دقت مرور کنیم، خواهیم دید که اصول $I-0$ تا I-4 در هندسه‌ای که دقیقاً یک نقطه P در S موجود است، صدق می کنند. و این نقطه P هم یک خط و هم یک صفحه است.
برای جلوگیری از این حالت، بلافاصله اصل دیگری را بیان می کنیم.

I ـ ۵. هر خط حداقل شامل دو نقطه است. هر صفحه حداقل شامل سه نقطه غیر واقع بر یک خط است. و S حداقل شامل چهار نقطه غیر واقع بر یک صفحه می‌باشد.
(در سرتاسر این کتاب، اگر بگوئیم «P و Q نقاطی هستند» اجازه داریم که بگوئیم ممکن است $P=Q$. امّا اگر بگوئیم «دو نقطه» منظور ما آن است که واقعاً دو نقطه داریم؛ بدین معنی که، دو نقطه باید متمایز باشند؛ به‌طور مشابه برای صفحه‌ها و غیره. گاهی مواقع ممکن است مانند آنچه در I − ۱ داشتیم بگوئیم «دو نقطه متمایز» امّا این صرفاً برای تأکید است.)

■ **قضیهٔ ۱.** دو خط متمایز یکدیگر را حداکثر در یک نقطه می‌برند.

اثبات. فرض کنیم L_1 و L_2 دو خط باشند، و فرض کنیم اشتراک آنها شامل دو نقطه P و Q باشد. بنابر اصل I − ۱ این غیر ممکن است، زیرا I − ۱ می گوید دقیقاً یک خط وجود دارد، و بنابراین فقط یک خط، شامل P و Q است. □



شکل ۲.۴

قضیه ۲. اگر خطی صفحه‌ای را که شامل آن نیست قطع کند، آنگاه اشتراک آنها تنها یک نقطه است.

اثبات. فرض کنیم خط L صفحه E را قطع کند. بنا بر فرض داریم که $L\cap E$ شامل حداقل یک نقطه P است؛ باید ثابت کنیم $L\cap E$ شامل نقطه دیگری مانند Q نیست.

فرض کنیم نقطه دومی مانند Q در $L\cap E$ موجود باشد؛ در این صورت بنا بر قضیه ۱، $L=\overleftrightarrow{PQ}$ و بنابر I−۳، $\overleftrightarrow{PQ}$ در E واقع است.

لذا L در E واقع است، که متناقض با فرض است. □

قضیه ۳. یک خط و یک نقطه غیر واقع بر آن خط مفروض‌اند، دقیقاً یک صفحه وجود دارد که شامل هر دوی آنها است.

بیان مجدد. فرض کنیم L یک خط، و فرض کنیم P نقطه‌ای غیر واقع بر L باشد. در این صورت یک و فقط یک صفحه وجود دارد که شامل $L\cup P$ است.

(در اینجا طرحی را معرفی می کنیم که بعداً مناسب خواهد بود. هر وقت که بتوانیم، ما قضایا را با تعداد کم یا هیچ نمادی به‌زبان فارسی روان بیان خواهیم کرد. در این روش، قضایا ساده‌تر خوانده شده و به‌خاطر سپرده می‌شوند. بیان مجدد، ما را به‌نمادی مجهز می‌سازد که در اثبات به کار می‌رود، و در بعضی حالتها می‌تواند، بعضی ابهام‌ها و سردرگمی‌ها را برطرف سازد.)

اثبات. (۱) بنا بر I−۵، L حداقل شامل دو نقطه Q و R می باشد. (۲) P، Q و R روی یک خط نیستند.

به‌دلیل آن که بنا بر I−۱، L تنها خطی است که شامل Q و R است؛ و L شامل P نیست. بنابراین هیچ خطی شامل P و Q و R نیست.

(۳) بنا بر (۲) و I−۲ یک صفحه $E=\overleftrightarrow{PQR}$ وجود دارد، که شامل P، Q و R است. همچنین بنا بر I−۳، E شامل L است.

بنابراین حداقل یک صفحه شامل $L\cup P$ وجود دارد. اگر دو صفحه وجود داشته باشند، آنگاه هر دوی آنها شامل P، Q و R می باشند. که بنا بر I−۲ غیر ممکن است. زیرا P، Q و R هم خط نیستند. □

قضیه ۴. اگر دو خط متقاطع باشند، آنگاه درست یک صفحه شامل آن دو وجود دارد.

فرض کنیم L و L' دو خط متقاطع باشند

گزاره‌های زیر مراحل اصلی اثبات می‌باشند. شما می‌توانید برای هر مرحله دلیل آن را بیان کنید.

(۱) $L\cap L'$ نقطه‌ای مانند P است.

(۲) L' شامل یک نقطه Q است که $Q\neq P$.

(۳) یک صفحه E شامل L و Q وجود دارد.

(۴) E شامل $L \cup L'$ است.

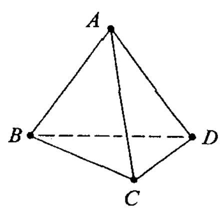
(۵) صفحه دیگری شامل $L \cup L'$ وجود ندارد. □

قضیه‌هائی از نوع فوق را که ثابت کردیم **قضایای وقوع** می‌نامند؛ چنین قضیه‌ای با سئوالی سر و کار دارد که آیا دو مجموعه اشتراک دارند (و اگر دارند، چگونه) یا سئوالی که آیا یک مجموعه در دیگری واقع است.

قضایای وقوع به‌طور مداوم مورد استفاده قرار گرفته‌اند، اما اصول وقوع که این قضایا بر مبنای آنها بنا شده‌اند در توصیف هندسه فضایی زیاد به کار نمی‌روند، همان‌طور که مساله زیر نشان می‌دهد.

مجموعه مسائل ۱.۲

۱. دستگاه $[S, L, P]$ را در نظر می گیریم، که S درست شامل چهار نقطه A، B، C و D است. خطها مجموعه‌هائی با درست دو نقطه، و صفحه‌ها مجموعه‌هائی با درست سه نقطه هستند. تصوری از این «فضا» در شکل زیر نشان داده شده است:



شکل ۵ـ۲

به‌خاطر داشته باشید که در اینجا نقاطی را که به‌حساب می‌آوریم فقط A، B، C و D هستند. تحقیق کنید که تمام اصول هندسه وقوع در این دستگاه برقرارند.

۲. فرض کنیم p_1، p_2، p_3، p_4 و p_5 پنج نقطه باشند، که هر سه نقطه هم خط نیستند. چند خط که هریک شامل دو نقطه از این پنج نقطه است وجود دارند؟

۳. اگر هر چهار نقطه از این پنج نقطه هم صفحه نباشند، چند صفحه که هریک شامل سه نقطه از این پنج نقطه است وجود دارند.

۴. n نقطه p_1، p_2، ....، p_n که همگی متمایزاند مفروض‌اند، به‌طوری که هر سه نقطه هم خط نیستند و هر چهار نقطه هم صفحه نیستند. چند خط شامل هر دو نقطه از آنها وجود دارد؟ چند صفحه شامل هر سه نقطه وجود دارد؟

۵. نشان دهید که تحت اصول وقوع، S نمی‌تواند یک خط باشد.

۶. نشان دهید که حداقل یک صفحه وجود دارد.

۷. نشان دهید که حداقل دو صفحه وجود دارد.

فصل ۳

فاصله و انطباق

۳.۱ مفهوم تابع

لغت تابع معمولی ترین لغتی است که در ارتباط با حساب دیفرانسیل و انتگرال و تکامل یافته‌های مختلف آن به کار می رود، اما مفهومی که اغلب بدون ذکر آن، تقریباً در همه ریاضیات مطرح است. در حقیقت، در دو فصل اول این کتاب پر از تابع بوده است، چنان که اکنون خواهیم دید.

(۱) در یک میدان **F**، به‌هر عضو a یک عضو قرینه منحصر بفرد، $-a$، متناظر می‌شود.
در اینجا یک تابع $F \longrightarrow \mathrm{F}$ را داریم که تحت آن برای هر a

$$a \longmapsto -a$$

(ما نماد $\longrightarrow$ را بین مجموعه‌ها و نماد $\longmapsto$ را بین عضوهای مجموعه‌ها به کار می بریم.)

(۲) در یک میدان مرتب **F**، به‌هر عضو x، عدد منحصر بفرد $|x|$ متناظر می‌شود، که قدر مطلق x نامیده می‌شود.

قانون تناظر این است که اگر $x \geqslant 0$، آنگاه عدد متناظر به x خود x است، و اگر $x < 0$، آنگاه عدد متناظر به x، $-x$ است. بنابراین یک تابع

$$F \longrightarrow F ،$$

داریم که تحت آن برای هر x

$$x \longmapsto |x|$$

(۳) فرض کنیم **F** یک میدان مرتب اقلیدسی باشد. همچنین فرض کنیم F^+ مجموعه همه عضوهای از F باشد که نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) هستند. در آنجا به‌هر عضو a از F^+ عضو منحصر بفرد $\sqrt{a}$ از F^+ متناظر است.

(اصل کمال اقلیدسی و تعریف $\sqrt{a}$ را به‌یاد آورید.)

در اینجا یک تابع

$$F^{+} \longrightarrow F^{+} ،$$

داریم که تحت آن برای هر a از $\mathbf{F}^{+}$

$$a \longmapsto \sqrt{a}$$

(٤) عمل جمع در یک میدان $\mathbf{F}$ می‌تواند به‌صورت یک تابع در نظر گرفته شود، در صورتی که مفهوم ضرب دو مجموعه را داشته باشیم برای هر دو مجموعه A، B حاصلضرب $A\times B$ عبارت است از مجموعه همه زوج‌های مرتب (a,b)، که $a\in A$ و $b\in B$. امکان $A=B$ نیز مجاز است.

بنابراین، وقتی نقطه P از صفحه محورهای مختصات را با یک مختصات (x,y) مشخص می کنیم، ما به P یک عضو از حاصلضرب $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ از اعداد حقیقی با خودشان را مربوط می کنیم.

حالا عمل جمع را در میدان F در نظر بگیرید.

تحت این عمل، در آنجا برای هر زوج (a,b) از اعداد در F یک عدد $a+b$ متناظر است، که مجموع آنها نامیده می‌شود.

این را می‌توان به‌عنوان یک تابع،

$$F\times F \longrightarrow F$$

در نظر گرفت که برای هر (a,b) از $F\times F$

$$(a,b) \longmapsto a+b$$

آشکارا ضرب نیز می‌تواند به‌همین روش در نظر گرفته شود. توجه کنید که در این حالتها همیشه سه چیز مورد بحث وجود دارد:

اولاً، یک مجموعه A از اشیائی که به‌چیزهائی متناظر می‌شوند؛ ثانیاً، یک مجموعه B که شامل اشیائی است که با عضوهای A متناظراند؛ و ثالثاً، خود تناظر است، که هر عضو A را به‌عضو یکتائی از B نظیر می کند. مجموعه A **دامنه تعریف** یا به‌طور ساده **دامنه** نامیده می‌شود. مجموعه B برد (قلمرو) نامیده می‌شود. تناظر خودش تابع نامیده می‌شود. در مثالهایی که بررسی کرده‌ایم اینها به‌صورت زیر می‌باشند.

جدول ۳.۱

دامنه	برد	قانون
F	F	$a \longmapsto -a$
F	F	$a \longmapsto \lvert a\rvert$
F^{+}	F^{+}	$a \longmapsto \sqrt{a}$
$F\times F$	F	$(a,b) \longmapsto a+b$

در ستون سوم، تابع را به‌وسیله قانون تناظر توصیف کرده‌ایم.

یک مثال مشکل‌تر می‌تواند تابعی باشد که به‌هر عدد حقیقی مثبت لگاریتم معمولی آن را نظیر می‌کند.

در اینجا دامنه یعنی A مجموعه همه اعداد حقیقی مثبت است، برد یعنی B مجموعه همه اعداد حقیقی است، و قانون تناظر $x \longmapsto \mathrm{Log}_{۱۰}x$ است. در اینجا عبارت $\mathrm{Log}_{۱۰}x$ یک مثالی از نماد تابعی است. اگر خود تابع را به‌وسیله f نشان دهیم، آنگاه $f(x)$ نشان دهنده شی متناظر با x است. برای مثال اگر f تابع قدر مطلق باشد، آنگاه

$$f(۱)=۱,\ \ f(-۱)=۱,\ \ f(-۵)=۵$$

و غیره.

به‌طور مشابه، اگر g «تابع ریشه دوم مثبت باشد» آنگاه

$$g(٤)=\ ۲,\ \ g(۱٦)=٤,\ \ g(۸)=۲g(۲)=۲\sqrt{۲}$$

و غیره.

همچنین اگر بخواهیم، می‌توانیم نماد تابعی را برای جمع به کار ببریم. (که معمولاً نمی‌خواهیم) اگر S «تابع عمل جمع» باشد آنگاه

$$S(a,b)=a+b\ ،$$

مثلاً

$$S(۲,۳)=۵\quad ،\ S(۵,٤)=۹$$

و غیره. به‌طور مشابه اگر P «تابع حاصلضرب» باشد، آنگاه

$$p(a,b)=ab$$

مانند

$$p(۵,٤)=۲۰\quad \text{و}\quad p(۷,۵)=۳۵$$

به‌طور کلی، یک تابع f اگر سه چیز را توصیف کنیم تعریف می‌شود.

(۱) یک مجموعه A، که دامنه نامیده می‌شود،

(۲) یک مجموعه B که برد نامیده می‌شود، و

(۳) یک قانون تناظر که تحت آن هر عضو a از A به‌یک عضو یکتای b از B متناظر شود.

اگر $a\in A$، آنگاه $f(a)$ نشان دهنده عضو متناظر آن از B است. تابع f، دامنه A، و برد B را به‌وسیله نوشتن، $f{:}A \longrightarrow B$، نشان می‌دهیم، و گوئیم که **f یک تابع از A بتوی B** است.

ترکیب توابع را به همان روش آشنای حساب دیفرانسیل تعریف می کنیم. بنابراین، فرض کنیم $f:A\longrightarrow B$ و $g{:}B\longrightarrow C$، ترکیب $g(f)$ تابعی از $A\longrightarrow C$ است که تحت آن، برای هر

a از A، $a \longmapsto g\ (f(a))$.

برای مثال، اگر توابع S و P را برای نشان دادن مجموع‌ها و حاصلضرب‌ها به کار ببریم، آنگاه $S\ (p(a,b)\ ,\ P(a,c))$ یعنی $ab+ac$، و $P\ (a,\ S(b,c))$ یعنی $a(b+c)$.

سرانجام، دو نوع تابع خاص را تعریف می کنیم که دارای ویژگی‌های مهمی می باشند.

اگر هر b از B، برای حداقل یک a از A برابر $f(a)$ باشد، آنگاه گوئیم که f تابعی از A بروی B است. اگر هر b از B، برای دقیقاً یک a از A برابر $f(a)$ باشد، آنگاه گوئیم که f یک **تناظر یک به‌یک بین A و B است**، و می نویسیم

$$f{:}A \leftrightarrow B$$

برای مثال، تابع $f{:}R \longrightarrow R$، $x \longmapsto x^3$ یک تناظر یک به‌یک است. تابع $g{:}R \longrightarrow R$ $x \longmapsto x^2$، یک تناظر یک به‌یک نیست زیرا، در برد، هر عدد حقیقی مثبت دو بار ظاهر می‌شود، و اعداد منفی ابداً ظاهر نمی‌شوند. تابعی که تحت آن $x \longmapsto -x$ یک تناظر یک به‌یک است. (اثبات؟) کافیست نشان دهید که برای هر y دقیقاً یک عدد x هست که $y=-x$.

همین‌طور، تابع $x \longrightarrow 1/x$ یک تناظر یک به‌یک است؛ در اینجا $A=B=\{x\ |\ x\neq 0\}$

اگر f یک تناظر یک به‌یک باشد، آنگاه یک تابع

$$f^{-1}{:}B \leftrightarrow A\ ،$$

وجود دارد که **معکوس** تابع f نامیده می‌شود، به‌طوری که وارون f عمل می کند. یعنی، $f^{-1}(b)=a$ اگر $f(a)=b$. نماد f^{-1}، «معکوس f» تلفظ می‌شود. وقتی گوئیم یک تابع معکوس دارد، به‌معنی آن است که تنها به‌روش دیگری گفته باشیم که تابع یک تناظر یک به‌یک است.

تابع $f{:}A \longrightarrow B$ مفروض است.

تصویر A مجموعه همه اعضاء B است که به‌صورت مقادیر تابع f ظاهر شده‌اند. بنابراین تصویر عبارت است از

$$\{b\ |\ a\in A\ \text{و}\ b=fa)\}\ .$$

به بیان دیگر، تصویر، کوچکترین مجموعه‌ای است که به‌عنوان برد تابع می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

برای مثال، اگر تابع $f{:}\ R \longrightarrow R$ برای هر x به‌وسیله شرط $f(x)=x^2$ تعریف شود، آنگاه برد تابع R مجموعه تمام اعداد حقیقی است، و تصویر، مجموعه همه اعداد حقیقی نامنفی است.

این سئوال مطرح می‌شود که چرا توابع را طوری تعریف می کنیم که برد آن مجموعهٔ بزرگتری از تصویر باشد. می‌توانیم تعریفی داشته باشیم به‌طوری که هر تابعی برو (پوشا) باشد. اما چنین تعریفی غیرقابل کنترل است.

برای مثال، فرض کنیم که تابعی را در حساب دیفرانسیل با ضابطه

$f(x)=x^{4}-7x^{3}+3x^{2}-17x+3$ تعریف کنیم. این یک تابع از **R** بتوی **R** است. برای پی بردن به تصویر تابع، باید پیدا کنیم که این تابع در کجا مینیمم خود را اختیار می کند؛ این یک مساله در حساب دیفرانسیل است، که به یک مساله مشکل جبر منجر می‌شود.

اگر ما لازم داشته باشیم که تصویر تابعی را برای تعریف مناسب آن بشناسیم، بدون اینکه اول مساله حساب دیفرانسیل حل کنیم نمی‌توانیم آن را بیان کنیم؛ و این یک عمل ناشیانه است. (تعریف هائی را که در این بخش ارائه دادیم استاندارد می‌باشند، اما در بعضی از کتابهای جبر مدرن، تعریف‌های مختلفی بیان شده‌اند، مانند ذیل).

تابع $f:A \longrightarrow B$ مفروض است. B هم دامنه تابع نامیده می‌شود. اگر $f(a)=f(b)$ نتیجه دهد $a=b$، آنگاه f **یک به یک** است. اگر $f(A)=B$ یعنی، اگر B تصویر باشد آنگاه f برو (پوشا) است. اگر هر دو شرط برقرار باشند، آنگاه f دو سوئی (یک به یک و پوشا) است، و f یک نگاشت دوسوئی نامیده می‌شود. بنابراین یک نگاشت دو سوئی یک تناظر یک به یک است.

مجموعه مسائل ۳.۱

۱. نمادهای تابعی $s(a,b)$ و $p(a,b)$ را برای جمع ها و ضرب‌ها به کار ببرید، و قوانین شرکت پذیری، تعویض پذیری، و توزیع پذیری را برای میدان مرتب دوباره‌نویسی کنید. حال اصول ض ت-۱ و ج ت-۱ که در یک میدان مرتب ساختمان میدان را به‌رابطه ترتیبی مربوط می کند را بازنویسی کنید.

۲. می‌دانیم که **Z** مجموعه همه اعداد صحیح است. برای هر i, j در **Z**، فرض کنیم $f(i,j)$ بزرگترین دو عدد i و j باشد. آیا این توضیحات یک تابع را تعریف می کند؟ اگر چنین است، دامنه و برد آن کدام‌اند؟

۳. فرض کنیم $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ به‌وسیله شرط $f(x)=x^{2}$ تعریف شود. آیا f یک معکوس دارد؟ چرا یا چرا نه؟

۴. فرض کنیم $\mathbf{R}^{+}$ مجموعه همه اعداد حقیقی نامنفی باشد.
فرض کنیم $g:\mathbf{R}^{+} \longrightarrow \mathbf{R}^{+}$ با شرط $g(x)=x^{2}$ تعریف شده باشد. آیا g یک معکوس دارد؟ چرا یا چرا نه؟

۵. همین سؤال، برای $f:\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$، $f(x)=\mathrm{Sin}x$.

۶. فرض کنیم A بازه بسته $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ باشد. یعنی

$$A=\{x \mid x\in R \text{ و } -\frac{\pi}{2}\leqslant x \leqslant\frac{\pi}{2}\}.$$

فرض کنیم $B=[-1,1]=\{x \mid x\in R \text{ و } -1\leqslant x\leqslant 1\}$.
و فرض کنیم $g:A \longrightarrow B$ تابعی باشد که با شرط $g(x)=\mathrm{Sin}x$ تعریف شده است. آیا g وارون دارد؟ چرا یا چرا نه؟

۳.۲ تعبیر توابع و رابطه‌ها به‌وسیله تئوری مجموعه‌ها

در بخش قبلی با مثالهای متعدد، توضیح دادیم که وقتی مردم درباره توابع صحبت می کنند صحبت آنها در مورد چه چیزی است. و در حقیقت مفهوم تابع، به‌فرمی که آن را توضیح دادیم، تقریباً برای تمام کاربردهائی که بعداً به‌آن می‌رسیم کافی خواهد بود.

چنانچه، شما دوباره بخش قبل را به‌دقت مرور کنید، خواهید فهمید که در هیچ جا تعریف صریحی از تابع نداده‌ایم.

ما شرایطی را که تحت آن یک تابع تعریف می‌شود توضیح دادیم، اما نگفتیم که تابع چه چیزی است. حالا می خواهیم آن را انجام دهیم. اما ابتدا مقدماتی را برای نشان دادن مفهومی که پشت تعریف تابع است بیان می کنیم.

ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که دامنه یک مجموعه متناهی است، مثلاً،

$$A=\{۰,۱,۲,۳,٤,۵\} \ .$$

برای هر تابع f با دامنه A، می‌توانیم با ارائه مقدارهای تابع جدول کامل زیر را بنویسیم.

a	۰	۱	۲	۳	٤	۵
$f(a)$	۰	۱	٤	۳	٤	۱

دستگاهی وجود دارد که در ساختن جدول مورد استفاده قرار گرفته است؛ و ممکن است شما قادر باشید که این دستگاه را کشف کنید که چه بوده است.

اما حتی اگر نتوانستید آن را کشف کنید، تابع به‌وسیله جدول تعریف شده است. برای تعریف یک تابع، شما باید تعیین کنید که برای هر عضو دامنه A، مقدار تابع چقدر باید باشد، اما لازم نیست که این مطلب را صراحتاً بیان کنید، در واقع، اگر انواع توابعی را که در حساب دیفرانسیل مهم بودند به‌خاطر آورید، شما خواهید دید که آن تعاریف وقت زیادی را از ما گرفتند.

عبارت $\mathrm{Sin}x$ یک فرمول برای تابع سینوس نیست، بلکه تنها یک نمایش (نام) برای تابع سینوس است؛ و معنی واقعی $\mathrm{Sin}x$ را به‌طور مفصل با کلمات توضیح می‌دهد. برای یک تابع مانند سینوس، شما می‌توانستید فقط یک جدول جزئی از مقادیر مانند زیر بنویسید، زیرا دامنه A مجموعه تمام اعداد حقیقی بود، که نامتناهی است. با وجود این، تحت این تعریف، یک تناظر تعریف شده بود که به‌وسیله آن برای هر عدد حقیقی x از R یک عدد حقیقی یکتای y متناظر بود که $\mathrm{Sin}x$ نامیدیم.

از روی یک جدول متناهی، مانند آنچه در فوق نوشته‌ایم، خواندن مجموعه زوج های مرتبی که تابع را تعریف می کنند آسان است. هر ستون جدول یک زوج مرتب (a,b) را به‌ما می‌دهد به‌طوری که a در A و b عضو متناظر آن از B است. از جدول ما برای f زوج های زیر بدست می‌آیند.

$$(۰,۰),\ (۱,۱),\ (۲,٤),\ (۳,۳),\ (٤,٤),\ (۵,۱)$$

اگر مجموعه A نامتناهی باشد، آنگاه جدول هم نامتناهی است.

یک جدول جزئی برای سینوس ممکن است مانند ذیل باشد.

x	۰	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$
Sinx	۰	۰	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۰	−۱

از این جدول می‌توانیم یک گردایهٔ جزئی از زوج‌های مرتب را بخوانیم.

$$\{(0,0),\ (\pi,0),\ (\frac{\pi}{2},1),\ (\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}),\ (\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}),\ (-\pi,0),\ (\frac{\pi}{2},-1)\}\ .$$

اگر ما مجموعه تمام زوج‌های مرتب از نوع $(x,\mathrm{Sin}x)$ را تشکیل می‌دادیم، آنگاه این گردایهٔ نامتناهی به‌طور کامل تابع سینوس را تعریف می‌کرد. به‌طور مشابه، هر تابعی می‌تواند به‌وسیله مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف شود. اگر دامنه تابع متناهی باشد، آنگاه این مجموعه نیز متناهی است، و اگر A نامتناهی باشد، آنگاه این مجموعه نیز نامتناهی است. اگر مجموعه‌ای یک تابع را تعریف کند، آنگاه هر a از A باید مولفه اول دقیقاً یک زوج مرتب باشد، زیرا تابع به a یک مقدار یکتا نسبت می‌دهد. بنابراین فرض کنیم $f: A \longrightarrow B$ یک تابع باشد، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب (a,b) داریم که، (۱) $a \in A$، (۲) $b \in B$ و (۳) هر عضو A مؤلفه اول دقیقاً یک زوج مرتب در مجموعه می‌باشد. و به‌عکس، فرض کنیم یک مجموعه از زوج‌های مرتب (a,b)، در شرط‌های (۱)، (۲) و (۳) صدق کند، در این صورت همواره یک تابع $f: A \longrightarrow B$ داریم.

این مشاهدات مبنای تعریف زیر هستند. در این تعریف، فقط می‌گوئیم که تابع یک نوع مجموعه از زوج‌های مرتب است که شرح دادیم.

تعریف. فرض کنیم A و B مجموعه‌هائی باشند. یک **تابع با دامنه A و برد B** یک مجموعه f از زوج‌های مرتب (a,b) است، به‌طوری که

(۱) برای هر (a,b) از f، $a \in A$؛

(۲) هر a از A مولفه اول دقیقاً یک زوج مرتب (a,b) از f است؛ و

(۳) برای هر (a,b) در f، $b \in B$.

وقتی می‌نویسیم $b = f(a)$، به‌این معنی است که (a,b) به‌مجموعه f تعلق دارد. از اینجا به‌بعد، ما با تابع دقیقاً مانند قبل رفتار می‌کنیم.

با طرحی نظیر طرح فوق می‌توان تعریف صریحی برای مفهوم یک رابطه که روی مجموعه‌ای مانند A تعریف شده است ارائه داد. ما این مفهوم را به‌طور غیررسمی به کار می‌بریم، می‌نویسیم $a<b$ به‌این معنی که a رابطه $>$ با b دارد، و، به‌طور کلی‌تر، می‌نویسیم $a*b$ به‌این معنی که a با b رابطه $*$ دارد. اکنون، فرض کنیم یک رابطه $*$، روی مجموعه A تعریف شده باشد، می‌توانیم مجموعه‌ای به‌صورت $\{(a,b) \mid a*b\}$ تشکیل دهیم. به‌عکس به‌ازای هر مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب از اعضاء A گوئیم $a*b$ اگر زوج مرتب (a,b) متعلق به‌مجموعه باشد. در تعریف زیر، می‌گوئیم که رابطه عبارت است از مجموعه.

البته، یادآوری می کنیم که، $A\times A$ مجموعه تمام زوج مرتب‌های اعضای A است.

تعریف. هر رابطه که روی مجموعه A تعریف شده باشد زیر مجموعه‌ای از $A\times A$ است.

برای مثال، فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳\}$ و فرض کنیم، $*=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳)\}$.
در این صورت $*$ یک رابطه است. (در حقیقت، رابطه معمولی $>$ است.)

البته، لازم نیست رابطه ها را با نمادهای خاصی نشان دهیم. به‌عنوان مثال، اگر مانند قبل $A=\{۱,۲,۳\}$، می توانیم فرض کنیم $G=\{(۲,۱),(۳,۱),(۳,۲)\}$. بنابراین $۲G۱$، $۳G۱$، و $۳G۲$، زیرا $(۲,۱)$، $(۳,۱)$، و $(۳,۲)$ متعلق به G هستند. (در حقیقت، G رابطه $<$ است.)

مجموعه مسائل ۳.۲

۱. فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,٤\}$، و فرض کنیم

$$G=\{(٤,۲),(٤,۱),(٤,۳),(۲,۱),(۲,۳),(۱,۳)\}$$

آیا G یک رابطه است؟ آیا G یک رابطه ترتیبی است؟

۲. فرض کنیم A مانند قبل باشد، و فرض کنیم G مجموعه تمام زوج‌های مرتب (a,b) باشد به‌طوری که a و b متعلق به A باشند و $a\neq b$. آیا G یک رابطه است؟ آیا G یک رابطه ترتیبی است؟

۳. آیا مجموعه زیر یک تابع است؟ اگر چنین است، دامنه و برد آن چیست؟

$$\{(۰,۰),(۱,۱),(۲,٤),(۳,۲),(٤,۲),(۵,٤),(٦,۱)\}$$

آیا می‌توانید تشخیص دهید که این رابطه با چه قانونی ساخته شده است؟

۴. آیا مجموعه زیر یک تابع است؟

$$\{(۰,۱),(۱,۰),(۰,۰)\}$$

۵. فرض کنیم f مجموعه تمام زوج‌های مرتب (x,y) باشد به‌طوری که x و y متعلق به $\mathbf{R}$ هستند و $y=x^۲$. آیا این یک تابع است؟

۶. همان سؤال قبلی، برای مجموعه تمام زوج مرتب‌های (x,y) به‌طوری که x و y متعلق به $\mathbf{R}$ هستند و $x=y^۲$.

۷. یک دستگاه مختصات قائم را در صفحه با همان مفهوم معمولی هندسه تحلیلی در نظر می گیریم. هر نقطه دارای یک زوج مختصات (x,y) است. برای اهداف این سئوال، فرض کنیم بین نقاط و زوج های مرتبی که آنها را مشخص می کنند فرقی قائل نشویم. بنابراین هر شکل، یعنی، هر مجموعه نقاط به‌صورت گردایه‌ای از زوج های مرتب از اعداد حقیقی است. تحت چه شرایطی، در صورت وجود، شکلهای زیر نمایش تابع ها هستند؟

(a) یک مثلث (b) یک نقطه منفرد

(c) یک خط (d) یک دایره

(e) یک نیم دایره، شامل نقاط انتهائی آن (f) یک بیضی

به‌طور کلی، یک شکل در صفحه مختصات در چه شرط هندسی باید صدق کند تا یک تابع باشد؟

۳.۳ تابع فاصله

تا کنون، ساختمانی را که در هندسه‌مان داشتیم سه‌تائی

$$[S, L, P]$$

بود. حالا می‌خواهیم با معرفی مفهوم فاصله این ساختمان را گسترش دهیم. به‌هر زوج از نقاط یک عدد حقیقی متناظر خواهد بود که فاصله بین آنها نامیده می‌شود. بنابراین یک تابع فاصله d می‌خواهیم که در اصول زیر صدق کند.

D-۰. d یک تابع است $d: S\times S \longrightarrow \mathbf{R}$.

D-۱. برای هر P، Q، $d(P,Q)\geqslant 0$.

D-۲. $d(P,Q)=0$ اگر و فقط اگر $P=Q$.

D-۳. برای هر P، Q از S، $d(P,Q)=d(Q,P)$.

اولین اصل را D_0 شماره گذاری کردیم زیرا در اثبات‌ها هرگز به‌آن استناد نخواهیم کرد؛ فقط بیان می‌کند که d چه چیزی است. البته، $d(P,Q)$ فاصله بین P و Q نامیده میشود، و، به‌اختصار $d(P,Q)$ را به‌صورت ساده PQ می‌نویسیم. (بعضی مواقع مکرراً فاصله‌ها را به کار میبریم لذا باید ساده‌ترین نمادی را که در دسترس است به‌آن اختصاص دهیم.)

هر مفهوم قابل قبولی برای فاصله باید در D-۱ تا D-۳ صدق کند. همچنین لازم است داشته باشیم

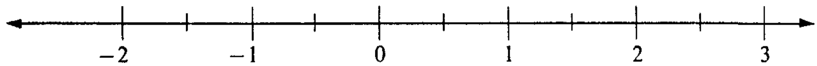
$$PQ+QR\geqslant PR \text{ ،}$$

که تقریباً بیان می‌کند کوتاهترین فاصله بین دو نقطه خط راست است. اما همان‌طور که اتفاق می‌افتد، ما احتیاج نداریم که این را به‌صورت اصل بیان کنیم زیرا بوسیله سایر اصول هندسه که بعداً بیان می‌شوند می‌توان آن را ثابت کرد.

از این پس، تا اخطار بعدی، تابع فاصله قسمتی از ساختمان ما خواهد بود. بنابراین در حال حاضر نمایش ساختمان ما به‌صورت زیر است؛

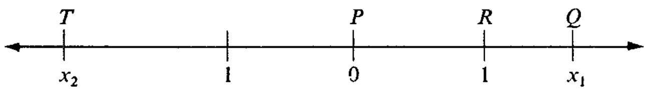
$$[S,\ L,\ P,\ d]$$

تابع فاصله به‌وسیله اصل خط کش D-۴، به‌بقیه هندسه متصل می‌شود، که به‌زودی آن را بیان خواهیم کرد. معمولاً تصور می‌کنیم که اعداد حقیقی روی یک خط مانند شکل زیر مرتب شده‌اند:



شکل ۳.۱

اگر خط‌ها در هندسه ما، یعنی اعضای L، واقعاً «مانند خط‌ها رفتار کنند»، آنگاه باید قادر باشیم همان روش را به‌عکس به کار ببریم و نقاط روی هر خط L را با اعداد علامت گذاری کنیم، به‌همان روشی که نقاط روی محور xها را در هندسه تحلیلی علامت گذاری می کنیم:



شکل ۳.۲

اگر این کار به‌روش معمول انجام شود، آنگاه یک تناظر یک به یک،

$$f:L \longleftrightarrow R$$

بین نقاط روی خط L و مجموعه اعداد حقیقی داریم.

این تناظر یک به‌یک ما را به‌یک **دستگاه مختصات** می‌رساند، مفهومی که به‌زودی آن را تعریف خواهیم کرد. ضمناً، اگر $x=f(P)$، x را مختص P می‌نامیم. در شکل، مختص‌های P، Q، R و T به‌ترتیب ۰، x_1، ۱، و x_2 می باشند. اگر این مختص‌ها به‌روش معمول به‌فاصله نسبت داده شوند، آنگاه $PT=|x_2|$ و $PQ=|x_1|$

در واقع، P و Q درهرجای L که واقع باشند همیشه خواهیم داشت؛

$$QT=|x_2-x_1| \ .$$

(شما می‌توانید در حالت‌هائی که $x_2<x_1<0$، $x_2<0<x_1$، و $0<x_2<x_1$ آن را تحقیق کنید. بدون آن که به کلیت خللی وارد شود می‌توانید فرض کنید $x_2<x_1$، زیرا وقتی x_1 و x_2 تعویض شوند، در هر دو طرف معادله فوق تغییری حاصل نمی‌شود.) آشکار است که به کمک بحث فوق هیچ چیزی را نمی‌توانیم ثابت کنیم، زیرا اصولی را که تا کنون بیان کرده‌ایم، ابداً هیچ ارتباطی بین تابع فاصله و خط‌ها برقرار نمی کنند. تمام تلاش ما به‌خاطر این بوده است که نشان دهیم تعریف واصل زیر معقول‌اند.

تعریف. فرض کنیم

$$f:L \leftrightarrow R$$

تناظر یک به‌یک بین خطی مانند L و اعداد حقیقی باشد. اگر برای همه‌ی نقاط P، Q از L، داشته باشیم

$$PQ=|f(P)-f(Q)|،$$

آنگاه f یک **دستگاه مختصات** برای خط L است. برای هر نقطه P از L، عدد $x=f(P)$ **مختص** P نامیده می‌شود.

D-٤ اصل خط‌کش. هر خط یک دستگاه مختصات دارد.

اصل D-٤، اصل خط‌کش نامیده می‌شود زیرا، عملاً، ما را به یک خط‌کش نامتناهی مجهز می‌کند که می‌توانیم آن را روی هر خطی قرار داده و در طول خط هر فاصله‌ای را اندازه‌گیری کنیم. این نوع خط‌کش در هندسه کلاسیک اقلیدسی موجود نیست. وقتی در هندسه کلاسیک از ترسیمات با خط‌کش و پرگار صحبت می‌کنیم، این ابزار ترسیم مجرد اولیه یک خط‌کش واقعی نیست، زیرا روی آن هیچ گونه نشانه‌ای وجود ندارد. مناسب است که از آن فقط به‌عنوان یک خط‌کش غیر مدرج صحبت کنیم. شما می‌توانید از آن برای رسم خطی که از دو نقطه متمایز می‌گذرد استفاده کنید، اما شما نمی‌توانید از آن در اندازه‌گیری فاصله‌ها با اعداد استفاده کنید، یا حتی بگوئید دو فاصله PQ و RT یکی هستند.

معروفیت، D-٤ آن است که فقط بیان می‌کند که هر خط حداقل یک دستگاه مختصات دارد. ولی به‌سادگی می‌توان نشان داد که، برای هر خط دستگاههای زیاد دیگری نیز وجود دارد.

■ **قضیه ۱**. اگر f یک دستگاه مختصات برای خط L باشد، و به‌ازای هر نقطه P از خط L،

$$g(P)=-f(P)$$

آنگاه g نیز یک دستگاه مختصات برای خط L است.

اثبات. واضح است که شرط $g(p)=-f(P)$ یک تابع $L\longrightarrow \mathbf{R}$ را تعریف می‌کند. و این تابع یک به‌یک است، زیرا اگر $x=g(P)$ ، از آن نتیجه می‌گیریم که $-x=f(P)$، و $P=f^{-1}(-x)$. بنابراین P به‌صورت منحصر بفرد به‌وسیله x تعیین می‌شود. تحقیق فرمول فاصله باقی می‌ماند.

فرض کنیم $x=g(P)$، $y=g(Q)$ باید ثابت کنیم $PQ=|x-y|$.

می‌دانیم $-x=f(P)$ و $-y=f(Q)$. چون f یک دستگاه مختصات است، در نتیجه $PQ=|(-x)-(-y)|$. بنابراین $PQ=|y-x|=|x-y|$.

و اثبات کامل است. □

قضیه ۱ این مطلب را بیان می‌کند که اگر در یک دستگاه مختصات جهت را برعکس کنیم، آنگاه دستگاه دیگری بدست می‌آید. همچنین می‌توانیم مختص‌ها را از چپ یا از راست، در هر جهتی که مایل باشیم جابه‌جا کنیم.

■ **قضیه ۲**. فرض کنیم f یک دستگاه مختصات برای خط L باشد، همچنین فرض کنیم a یک

عدد حقیقی باشد، و به‌ازای هر P از L، داشته باشیم

$$g(P)=f(P)+a \cdot$$

آنگاه $g:L \longrightarrow \mathbf{R}$ یک دستگاه مختصات برای L است.
اثبات خیلی شبیه اثبات قضیه قبلی است. قضایای (۱) و (۲) را ترکیب می کنیم، قضیه زیر بدست می آید.

قضیه ۳. قضیه استقرار خط کش.
فرض کنیم L یک خط باشد، و همچنین فرض کنیم P و Q دو نقطه دلخواهی روی L باشند. در این صورت خط L دستگاه مختصاتی دارد که در آن مختص P صفر و مختص Q عددی مثبت است.

اثبات. فرض کنیم f دستگاه مختصات دلخواهی برای خط L باشد. فرض کنیم $a=f(P)$؛ و برای هر نقطه T از L، فرض کنیم $g(T)=f(T)-a$.

در این صورت g یک دستگاه مختصات برای L است، و $g(P)=0$. اگر $g(Q)>0$، آنگاه g دستگاهی است که جستجو می کردیم. اگر $g(Q)<0$، فرض کنیم برای هر $T \in L$، $h(T)=-g(T)$. در این صورت h در شرایط قضیه صدق می کند. □

مجموعه مسائل ۳.۳

۱. نشان دهید D-۱، D-۲، D-۳ نتایجی از اصل خط کش هستند.

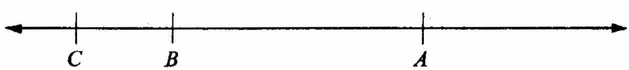
۳.۴ بینیت

یکی از ساده‌ترین مفهوم‌ها در هندسه بینیت برای نقاط روی یک خط است. در حقیقت، به‌نظر می رسد که اقلیدس آن را بقدری بدیهی می‌دانسته که ابداً آن را تجزیه و تحلیل نکرده و در اثباتهایش بدون اشاره‌ای از آن استفاده کرده است.

به‌طور نادقیق، روی خط L نقطه B بین A و C است، اگر این نقاط مانند شکل زیر واقع شده باشند:

شکل ۳.۳

یا مانند شکل زیر:



شکل ۳.۴

(البته، به‌طور منطقی، شکل دوم غیر ضروری است، زیرا روی یک خط روشی وجود ندارد که بیان کند از چپ به‌راست یا از بالا به پائین.)

آنچه ما در به کار بردن بینیت به‌طریق ریاضی احتیاج داریم، یک تعریف دقیق است که آنچه را عقل سلیم از بینیت انتظار دارد در برداشته باشد یک چنین تعریف به‌صورت زیر است.

تعریف.

فرض کنیم A، B و C سه نقطه هم خط باشند. اگر $AB+BC=AC$، آنگاه B بین A و C است. در این حالت می‌نویسیم $A-B-C$.

چنانچه خواهیم دید، این تعریف ما را قادر می‌سازد تا خواصی را که بینیت باید داشته باشد ثابت کنیم.

■ **قضیه ۱ـB.** اگر $A-B-C$، آنگاه $C-B-A$.

این واضح است. اگر $AB+BC=AC$، آنگاه $CB+BA=CA$.

بقیه قضایای اساسی بینیت اساساً به‌اصل خط‌کش وابسته‌اند.

بینیت برای اعداد حقیقی به‌روشی که انتظار داریم تعریف می‌شود؛ y بین x و z است اگر $x<y<z$ یا $z<y<x$.

در این حالت می‌نویسیم $x-y-z$.

لم ۱. یک خط L با دستگاه مختصات f و سه نقطه A، B، C به ترتیب به‌مختص‌های x، y، z روی آن مفروض‌اند. اگر $x-y-z$، آنگاه $A-B-C$.

اثبات. (۱) اگر $x<y<z$، آنگاه

$$AB=|y-x|=y-x\text{ ،}$$

زیرا $y-x>0$. به‌همین دلیل $BC=|z-y|=z-y$ و $AC=|z-x|=z-x$.

بنابراین

$$AB+BC=(y-x)+(z-y)=z-x=|z-x|=AC$$

لذا $A-B-C$.

(۲) اگر $z<y<x$، با استدلال مشابهی بدست می‌آید $C-B-A$، که مثل قبل از آن نتیجه می‌شود که $A-B-C$.

■ **قضیه ۲ـB.** از هر سه نقطه روی یک خط دقیقاً یکی بین دو تای دیگر است.

اثبات.

(۱) فرض کنیم f یک دستگاه مختصات برای خط باشد؛ و فرض کنیم x و y و z مختص‌های نقاط A، B، C باشند. یکی از دو عدد x، y، z بین دو تای دیگر است. بنا بر لم ۱، این بدان معنی

است که نقطه متناظر آن A، B یا C بین دو نقطه دیگر است.

(۲) اکنون احتیاج داریم ثابت کنیم که اگر $A-B-C$، آنگاه هیچکدام از شرایط $B-A-C$ و $A-C-B$ برقرار نیستند. اگر $B-A-C$، داریم

$$BA+AC=BC\ .$$

امّا فرض کرده‌ایم $A-B-C$ یعنی $AB+BC=AC$. با جمع این دو رابطه، داریم

$$BA+AC+AB+BC=BC+AC\ ،$$

یا $2AB=0$

بنابراین $AB=0$. این غیر ممکن است، زیرا $A\neq B$. اثبات آن که هر دوی $A-B-C$ و $A-C-B$ نمی‌توانند با هم برقرار باشند عیناً مانند قبل است.

حال چهار نقطه A، B، C، D از یک خط L را در نظر می گیریم. در لیست زیر، چهار حالت ممکن سه تائی‌ها که می‌توان از اینها ساخت نشان داده شده است؛ مقابل هر سه‌تائی لیست سه حالت ممکنِ رابطه بینیت داده شده است.

A,B,C:	$\overline{A-B-C},$	$A-C-B,$	$B-A-C,$
A,B,D:	$\overline{A-B-D},$	$A-D-B,$	$B-A-D,$
A,C,D:	$\overline{A-C-D},$	$A-D-C,$	$C-A-D,$
B,C,D:	$\overline{B-C-D},$	$B-D-C,$	$C-B-D,$

وقتی می‌نویسم $A-B-C-D$،

منظور ما آن است که همه رابطه‌های بینیت $A-B-C$، $A-B-D$، $A-C-D$ و $B-C-D$ که بالای آنها خط کشیده شده است برقرارند، اما هیچکدام از هشت رابطه دیگر برقرار نیستند. (بنابراین $A-B-C-D$ یک صورت مختصر و کافی است)

به خاطر آوردن این طرح ساده است؛ روابطی که برقرارند، روابطی هستند که با برداشتن یک حرف از $A-B-C-D$ حاصل می‌شوند. □

■ **قضیه ۳-B** . هر چهار نقطه روی یک خط را می‌توان به‌ترتیبی با A، B، C و D نام گذاری کرد به‌طوری که $A-B-C-D$.

اثبات. فرض کنیم f یک دستگاه مختصات برای خطی که شامل چهار نقطه P، Q، R، S است باشد. مختصات این نقاط چهار عدد حقیقی هستند؛ و آنها به‌ترتیبی ظاهر شده‌اند که

$$\omega<x<y<z\ .$$

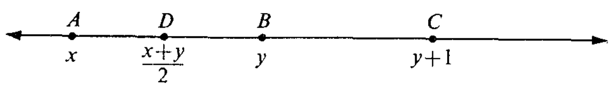
در اینجا ω، x، y، z عبارت‌اند از $f(P)$، $f(Q)$، $f(R)$ و $f(S)$، اما لزومی ندارد که به‌ترتیب باشند. فرض کنیم

$$A=f^{-1}(\omega),\ B=f^{-1}(x),\ C=f^{-1}(y),\ D=f^{-1}(z)\ .$$

از نامساوی‌های مضاعف $\omega<x<y$، $\omega<x<z$، $\omega<y<z$، $x<y<z$، (بنا بر لم ۱) رابطه‌های بینیت $A-B-C$، $A-B-D$، $A-C-D$، $B-C-D$ بدست می‌آید. بنابراین، برای هر سه نقطه از چهار نقطه، یک رابطه بینیت داریم؛ و بنا به‌قضیه ۲ $-B$ برای هر سه نقطه فقط یک رابطه بینیت برقرار است. بنابراین لیست ما کامل است، و $A-B-C-D$، که باید ثابت می‌شد. □

■ **قضیه ۴ـB** . اگر A و B دو نقطه دلخواه باشند، آنگاه (۱) نقطه‌ای مانند C وجود دارد به‌طوری که $A-B-C$، و (۲) نقطه‌ای مانند D وجود دارد به‌طوری که $A-D-B$.

اثبات. برای خط $\overleftrightarrow{AB}$ که شامل A و B است دستگاه مختصات f را انتخاب می کنیم.



شکل ۳.۵

بدون آنکه به کلیت برهان خللی وارد شود فرض می کنیم $x<y$. (قضیه ۱، بخش ۳.۳ را ببینید)

مانند شکل، فرض کنیم $C=f^{-1}(y+1)$.

پس $A-B-C$، زیرا $x<y<y+1$. دوباره مانند شکل، فرض می کنیم

$$D=f^{-1}\left(\frac{x+y}{2}\right)\ .$$

چون $x<y$، داریم $2x<x+y<2y$. (چرا؟) بنابراین $x<\frac{x+y}{2}<y$، لذا $A-D-B$. □

در چند فصل بعدی، می‌خواهیم بینیت را فقط با ارجاع به‌قضایای این قسمت به کار ببریم، بدون آن که به‌تعریف برگردیم. (دلیل آن را کمی بعد توضیح خواهیم داد.) اگر قضیه بدیهی زیر را نیز اضافه کنیم، نتیجه می گیریم که قضایای فوق کافی هستند.

■ **قضیه ۵ـB**. اگر $A-B-C$، آنگاه A، B و C سه نقطه متمایزاند که روی یک خط واقع‌اند.

البته، بنا بر تعریف اصلی رابطه $A-B-C$ این برقرار است.

برای تسهیل در مراجعه، ما خواص اصلی بینیت را در لیست زیر بیان می کنیم.

B-۱. اگر $A-B-C$، آنگاه $C-B-A$.

B-۲. از هر سه نقطه روی یک خط، دقیقاً یکی بین دو تای دیگر است.

B-۳. هر چهار نقطه روی یک خط می‌توانند با ترتیبی A، B، C و D نامیده شوند، به‌طریقی که $A-B-C-D$.

B-۴. اگر A و B دو نقطه دلخواه باشند، آنگاه

(۱) نقطه‌ای مانند C وجود دارد به طوری که $A-B-C$، و

(۲) نقطه‌ای مانند D وجود دارد به طوری که $A-D-B$،

B-۵. اگر $A-B-C$، آنگاه A و B و C سه نقطه متمایز روی یک خط می‌باشند.

مجموعه مسائل ۳.۴

۱. نشان دهید اگر $A-B-C$ و $B-C-D$، آنگاه $A-B-D$ و $A-C-D$.

۲. نشان دهید اگر $A-B-C$ و $A-D-C$، آنگاه $A-B-D-C$، $A-D-B-C$، یا $B=D$.

۳. چهار مهره کروی به‌رنگهای متمایز مفروض‌اند. به‌چند طریق مختلف می‌توان آنها را در یک شیار به‌ترتیب از چپ به‌راست قرار داد؟ (این یک مساله ترتیب است)

۴. چهار مهره مانند مساله ۳ مفروض‌اند. به‌چند طریق مختلف می‌توان آنها را روی یک میله صلب متقارن قرار داد؟ (این یک مساله بینیت است.)

۵. چهار مهره مانند مسائل قبل مفروض‌اند. به‌چند طریق مختلف می‌توان آنها را در یک نخ قرار داده گردنبندی چهار مهره‌ای ساخت؟ (این مساله بینیت روی یک دایره است، و جواب آن نشان می‌دهد که ایده بینیت روی دایره اختصاصی‌تر از آن است که می‌توان فکر کرد.)

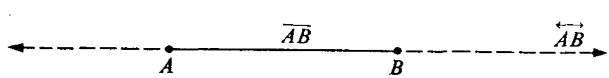
۶. عکس لم ۱ را که در زیر بیان شده است ثابت کنید.

■ **لم ۲**. خط L با دستگاه مختصات f، و سه نقطه A، B و C به‌ترتیب با مختص‌های x، y و z مفروض‌اند. اگر $A-B-C$، آنگاه $x-y-z$.

۷. در این قسمت، رابطه بینیت برای اعداد حقیقی را به‌این صورت تعریف کردیم که $x-y-z$ اگر $x<y<z$ یا $z<y<x$. نشان دهید، برای این رابطه بینیت، شرطهای $B-1$ تا $B-4$ برقراراند.

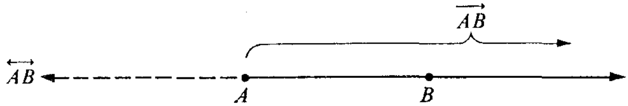
۳.۵ پاره‌خطها، نیم‌خطها، زوایا، ومثلثها

اگر A و B دو نقطه باشند، آنگاه پاره‌خط بین A و B مجموعه نقاط Aو B و همه نقاط بین A و B است. بنا بر B-۵، این پاره‌خط روی خط $\overleftrightarrow{AB}$ واقع است، و شکل زیر را داریم. پاره‌خط با دو انتهای A و B را به $\overline{AB}$ نشان می‌دهند.



شکل ۳.۶

اگر A و B دو نقطه باشند، آنگاه نیم خط (پرتو) از A مارّبر B مثل شکل زیر است؛



شکل ۳.۷

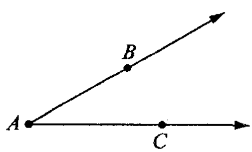
این نیم خط را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهند.

به‌عبارت دقیقتر؛ نیم خط $\overrightarrow{AB}$ عبارت است از مجموعه همهٔ نقاط C از خط $\overleftrightarrow{AB}$ به‌طوری که A بین B و C واقع نباشد. نقطه A را ابتدای نیم خط $\overrightarrow{AB}$ می‌نامند. اگر این تعریف واضح به‌نظر نمی‌رسد، بهتر است آن را با شکل مقایسه کنید تا از سازگاری این تعریف و تعریف غیر منطقی که کدام نقاط خط روی نیم خط واقع‌اند اطمینان حاصل کنید.

بسادگی می‌توان دید که $\overrightarrow{AB}$ عبارت است از اجتماع (۱) پاره‌خط $\overline{AB}$، و (۲) مجموعه همه نقاط C به‌طوری که $A-B-C$.

اگر این تعریف اخیر برای شما طبیعی‌تر به‌نظر می‌رسد، شما می‌توانید آنرا تعریف یک نیم‌خط درنظر بگیرید.

به‌طور غیر دقیق یک زاویه شکلی است مانند این:



شکل ۳.۸

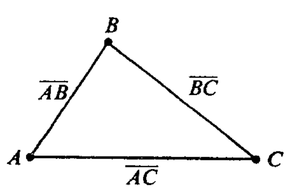
به‌طور دقیقتر، یک زاویه شکلی است مرکب از اجتماع دو نیم خط که دارای یک ابتدا باشند، اما روی یک خط واقع نباشند. اگر یک زاویه اجتماع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشد، آنگاه این نیم‌خط‌ها **اضلاع** زاویه و نقطه A **رأس** زاویه نامیده می‌شوند؛ و خود زاویه را با نماد $\angle ABC$ نشان می‌دهیم.

توجه داشته باشید که همواره داریم $\angle BAC = \angle CAB$.

سرانجام، اگر A، B و C سه نقطه غیر هم‌خط باشند، آنگاه مجموعه

$$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

یک مثلث نامیده می‌شود.

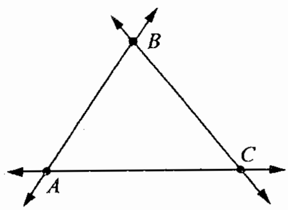


شکل ۳.۹

سه پاره‌خط $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ را اضلاع مثلث و نقاط A، B و C را رأسهای مثلث می‌نامیم. مثلث خودش با نماد $\triangle ABC$ نشان داده می‌شود.

زاویه‌های $\triangle ABC$ عبارت‌اند از $\angle BAC$، $\angle ACB$ و $\angle ABC$.

توجه داشته باشید که $\triangle ABC$ شامل هیچ یک از این سه زاویه نیست، زیرا اضلاع زاویه نیم‌خط و اضلاع مثلث پاره‌خط می‌باشند. اگر همه زاویه‌ها را رسم کنیم شکل مانند زیر خواهد بود.



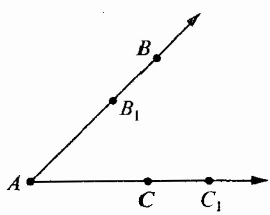
شکل ۳.۱۰

قضایای زیر ساده به‌نظر می‌رسند، اما بعضی چنین نیستند.

■ **قضیه ۱.** اگر A و B هر دو نقطه دلخواه باشند، آنگاه $\overline{AB}=\overline{BA}$.

■ **قضیه ۲.** اگر C نقطه‌ای از $\overrightarrow{AB}$ به‌غیر از A باشد، آنگاه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$

■ **قضیه ۳.** اگر B_1 و C_1 نقاطی روی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ به‌غیر از A باشند، آنگاه $\angle BAC=\angle B_1AC_1$.



شکل ۳.۱۱

■ **قضیه ۴.** اگر $\overline{AB}=\overline{CD}$، آنگاه نقاط A، B به‌ترتیبی همان نقاط C، D هستند. (یعنی، نقاط انتهائی پاره‌خط به‌طور منحصر بفرد بوسیله پاره‌خط معین می‌شوند)

■ **قضیه ۵.** اگر $\triangle ABC=\triangle DEF$، آنگاه نقاط A، B و C به‌ترتیبی همان نقاط D، E و F هستند. (یعنی، رأسهای یک مثلث به‌طور منحصر بفرد بوسیله مثلث معین می‌شوند.)

اگر تعریف‌های $\overline{AB}$، $\overrightarrow{AB}$، $\angle BAC$، و $\triangle ABC$ را مرور کنیم خواهیم دهید که مبنای تعریف همه آنها از روی مفهوم بینیت است. بنابراین اثبات‌های قضایای ۱ تا ۵ باید اساساً از روی

قضایای ۱-B تا ۵-B باشند.

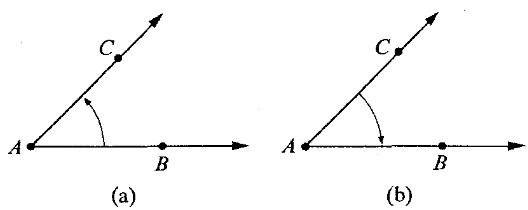
یک لغت هشدار دهنده:

در اینجا و از این به‌بعد، نماد = به‌یک و فقط به‌یک مفهوم به کار می‌رود؛ بدین معنی که «این دقیقاً همان است.» بنابراین، وقتی می‌نویسیم $\overline{AB}=\overline{BA}$ منظور ما آن است که مجموعه‌های $\overline{AB}$ و $\overline{BA}$ دقیقاً عضوهای یکسان دارند. (این همان است.)

سرانجام، چند توضیح در باره روشی که مفهوم زاویه را تعریف کردیم بیان می کنیم. با این تعریف، یک زاویه به‌سادگی مجموعه‌ای است که اجتماع دو نیم‌خط غیر واقع بر یک خط با ابتدای مشترک می‌باشد.

زوایا با این برداشت برای هندسه اقلیدسی کاملاً مناسب هستند.

بعداً در هندسه تحلیلی و مثلثات، احتیاج داریم که در باره زوایای جهت‌دار صحبت کنیم به‌طوری که بین ضلع اول و دوم تمایز قائل شویم، مانند شکل‌های زیر:



شکل ۳.۱۲

یک زاویه، با این برداشت، یک مجموعه نقاط نیست، بلکه ترجیحاً یک دو تائی مرتب $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ از نیم‌خط‌ها است؛ بنابراین $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ متمایز از $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$ است.

برای زوایای جهت‌دار، امکان آنکه دو ضلع روی یک خط باشند نیز وجود دارد، و همچنین ممکن است دو ضلع یکی باشند. ما این مفهوم مشکل‌تر زاویه را به کار نبرده‌ایم، زیرا در حال حاضر از آن استفاده نمی کنیم. برای مثال، زوایای مثلث هرگز شامل دو نیم‌خط که روی یک خط واقع باشند نیست، و روش طبیعی برای جهت دادن به‌آنها وجود ندارد. برای اهداف این کتاب، دلایل خوبی برای کنار زدن زوایای صفر و زوایای نیم صفحه وجود دارد؛ اولاً، این جمله‌ها اضافی هستند: زاویه صفر صرفاً یک نیم‌خط است. و زاویه نیم صفحه یک خط است. ثانیاً، زاویا، نیم‌خط‌ها، و خط‌ها در روشهای مهمی شکلهای متمایزی هستند، و اگر برای هر سه لغت زاویه را به کار ببریم آنگاه دائماً گرفتار بحث در حالتهای خاص خواهیم بود. (برخلاف عقیده عوام اقلیدس نیز زاویه‌های نیم‌صفحه را به کار نبرد.)

مجموعه مسائل ۳.۵

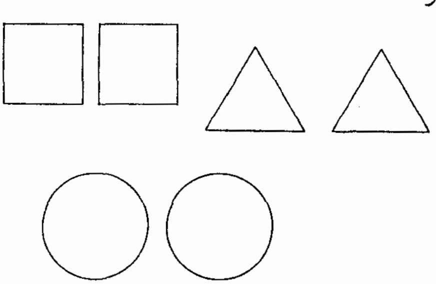
۲. نشان دهید، برای یک نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ می‌توان دستگاه مختصاتی روی $\overleftrightarrow{AB}$ در نظر گرفت به‌طوری که

$$\overrightarrow{AB}=\{p \mid f(p)\geqslant 0\}$$

۳. قضیه ۲ را ثابت کنید.
۴. قضیه ۳ را ثابت کنید.
*۵. فرض کنیم A و B دو نقطه باشند، و فرض کنیم D، E و F سه نقطه غیر هم‌خط باشند. اگر $\overleftrightarrow{AB}$ فقط شامل یکی از نقاط D، E یا F باشد، آنگاه هریک از خطهای $\overleftrightarrow{DE}$، $\overleftrightarrow{DF}$، $\overleftrightarrow{EF}$ خط $\overleftrightarrow{AB}$ را حداکثر در یک نقطه می‌برند.
*۶. اگر $\triangle ABC=\triangle DEF$، آنگاه هریک از خطهای $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{BC}$، $\overleftrightarrow{AC}$ شامل دو نقطه از نقاط D، E و F است.
*۷. نشان دهید برای هر $\triangle ABC$، داریم $\overleftrightarrow{AB}\cap\triangle ABC=\overline{AB}$. یعنی تنها نقاطی از خط $\overleftrightarrow{AB}$ که روی مثلث واقع‌اند نقاط پاره‌خط $\overline{AB}$ می‌باشند.
*۸. ثابت کنید؛ اگر $\triangle ABC=\triangle DEF$، آنگاه هریک از اضلاع مثلث $\triangle ABC$ شامل دو نقطه از نقاط D، E و F است.
۹. نشان دهید A بین هیچ دو نقطه‌ای از $\triangle ABC$ واقع نیست.
۱۰. قضیه ۵ را ثابت کنید.

۳.۶ انطباق پاره‌خطها

مفهوم ذاتی انطباق برای هر دو شکل در حالت کلی همیشه یکی است. دو شکل F و G **قابل انطباق‌اند** اگر یکی بتواند چنان حرکت کند تا بر دیگری منطبق شود.
بنابراین دو مثلث متساوی‌الاضلاع که اندازه‌های اضلاع آنها یکی باشد همواره قابل انطباق‌اند؛ دو دایره که دارای یک شعاع باشند همیشه قابل انطباق‌اند؛ دو مربع که اندازه‌های اضلاع آنها برابر باشند قابل انطباق‌اند، و غیره.



شکل ۳.۱۳

به‌همین روش، دو پاره‌خط که دارای یک طول باشند همیشه قابل انطباق‌اند.

شکل ۳.۱۴

در اینجا، منظور ما از **طول پاره‌خط** فاصله بین دو نقطه انتهائی آن است.

مساله ما، در مطالعه ریاضی انطباق این است که مفهوم را به‌صورتی نسبتاً دقیق با قاعده و قانون بیان کنیم که بتوانیم چیزهائی در باره آن ثابت کنیم. در این بخش در حالتی که شکلها پاره‌خط باشند آن را انجام خواهیم داد. بعداً در حالتی که این شکلها زوایا باشند آن را انجام خواهیم داد، و کمی دیرتر آن را در مورد شکلها شرح می‌دهیم. سرانجام، در فصل حرکت صلب انطباق را به‌صورتی نسبتاً جامع بیان می‌کنیم که برای هر دو مجموعه از نقاط کارایی داشته باشد.

اکنون با یک تعریف رسمی شروع می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو پاره‌خط باشند. اگر $AB=CD$، آنگاه دو پاره‌خط قابل انطباق نامیده می‌شوند، و چنین می‌نویسیم $\overline{AB}\cong\overline{CD}$.

بر مبنای این تعریف، بسادگی می‌توان حقایق آشنا و نسبتاً سادهٔ قابلیت انطباق پاره‌خطها را ثابت کرد.

روی یک مجموعه A رابطه $\sim$ را یک رابطه **هم‌ارزی** می‌نامیم اگر شرایط زیر قرار باشند.

(۱) خاصیت انعکاسی، برای هر a، $a\sim a$.

(۲) خاصیت تقارنی، اگر $a\sim b$، آنگاه $b\sim a$.

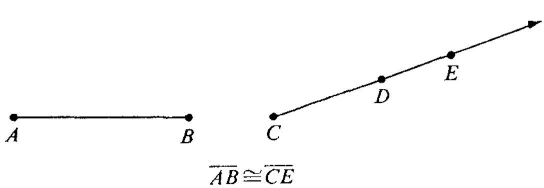
(۳) خاصیت تعدی، اگر $a\sim b$ و $b\sim c$، آنگاه $a\sim c$.

■ **قضیه ۱ـC.** برای پاره‌خط‌ها، انطباق یک رابطه هم ارزی است.

یعنی، هر پاره‌خط با خودش قابل انطباق است؛ اگر $\overline{AB}\cong\overline{CD}$، آنگاه $\overline{CD}\cong\overline{AB}$؛ اگر $\overline{AB}\cong\overline{CD}$ و $\overline{CD}\cong\overline{EF}$، آنگاه $\overline{AB}\cong\overline{EF}$. چرا؟

■ **قضیه ۲ـC. قضیه ساختن پاره‌خط.**

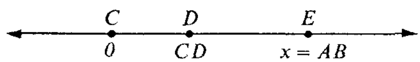
پاره‌خط $\overline{AB}$ و یک نیم خط $\overrightarrow{CD}$ مفروض‌اند. دقیقاً یک نقطه E روی $\overrightarrow{CD}$ وجود دارد. به‌طوری که $\overline{AB}\cong\overline{CE}$.



شکل ۳.۱۵

یعنی، با شروع از ابتدای یک نیم خط، شما می‌توانید پاره‌خطی به‌هر طولی که مایل باشید جدا کنید، و پاره‌خط حاصل منحصر بفرد است.

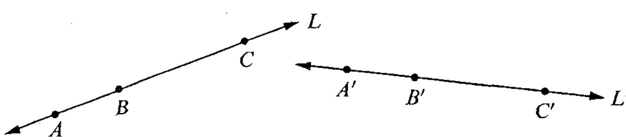
اثبات. بنابر قضیه استقرار خط کش، دستگاه مختصاتی مانند f برای خط $\overleftrightarrow{CD}$ انتخاب می کنیم به‌طوری که $f(C)=0$ و $f(D)>0$.



شکل ۳.۱۶

مطابق شکل، نشان داده‌ایم عدد CD برابر مختص نقطه D می باشد. و این درست است، زیرا $f(D)>0$. اگر E نقطه‌ای از $\overrightarrow{CD}$ باشد، آنگاه $\overline{CE}\cong\overline{AB}$ اگر و فقط اگر مانند شکل $f(E)=AB$. بنابراین $\overline{CE}\cong\overline{AB}$ اگر و فقط اگر $E=f^{-1}(AB)$. دقیقاً یک نقطه $f^{-1}(AB)$ وجود دارد، و بنابراین دقیقاً یک نقطه E وجود دارد. □

قضیه زیر این نتیجه را بیان می کند، که اگر پاره‌خطهای قابل انطباق را انتها به‌انتها قرار دهیم پاره‌خط های حاصل نیز قابل انطباق‌اند.



شکل ۳.۱۷

■ **قضیه C-۳. قضیه جمع - پاره‌خط‌ها.**
اگر (۳) $\overline{AB}\cong\overline{A'B'}$، (۲) $A'-B'-C'$ ، (۱) $A-B-C$
و (۴) $\overline{BC}\cong\overline{B'C'}$
آنگاه (۵) $\overline{AC}\cong\overline{A'C'}$.

یک عکس قضیه فوق به‌صورت زیر است.

■ **قضیه C-۴ . قضیه تفاضل - پاره‌خط‌ها.**
اگر (۱) $A-B-C$ ، (۲) $A'-B'-C'$ (۳) $\overline{AB}\cong\overline{A'B'}$ و (۴) $\overline{AC}\cong\overline{A'C'}$، آنگاه $\overline{BC}\cong\overline{B'C'}$.

این قضایا به‌راحتی با توجه به‌تعریف بینیت ثابت می‌شوند. آنها را ثابت کنید.

توجه کنید که ما قضیه ۴ـC را یک عکس قضیه ۳ـC نامیدیم. قضیه عکس دیگری نیز برای قضیه C-۳ داریم. دلیل آن این است که بیشتر قضایا بیش از یک عکس دارند. (البته هر کدام ممکن است صحیح باشد یا نباشد.) برای احکامی به‌فرم $P \Longrightarrow Q$، که در آن P و Q گزاره‌هائی هستند ساده می‌باشد. عکس گزارهٔ شرطی $p \implies Q$، گزاره شرطی $Q \implies P$ است.

یک قضیه ممکن است به‌صورت زیر بیان شود:

«اگر (a)، (b) و (c)، آنگاه (d)، (e) و (f).»

یعنی

$$[(a) \text{ و } (b) \text{ و } (c)] \implies [(d) \text{ و } (e) \text{ و } (f)] \cdot$$

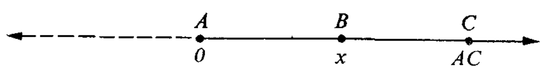
در این حالت، هر گزاره‌ای که از عوض کردن یکی از قسمتهای فرض با یکی از قسمتهای حکم بدست آید یک عکس این گزاره نامیده می‌شود. بنابراین، قضیه C-٤ از قضیه C-۳ به‌این صورت بدست آمده است که جای (۵) از حکم را با جای (٤) از فرض عوض کرده‌ایم.

قضیه C-۳ بیش از سه عکس دارد. شما می‌توانید آنها را بیان کرده و ببینید کدامیک صحیح‌اند.

اگر $A-B-C$ ، و $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، آنگاه B را نقطه وسط $\overline{AC}$ می‌نامیم. قضیهٔ زیر به‌ما حق می‌دهد که B را نقطهٔ وسط بنامیم.

■ **قضیه ۵ـC. هر پاره‌خط درست یک نقطه وسط دارد.**

اثبات. پاره‌خط $\overline{AC}$ مفروض است. بنا بر قضیه استقرار خط کش، دستگاه مختصاتی مانند f روی خط $\overleftrightarrow{AC}$ انتخاب می کنیم، به‌طوری که $f(A)=0$ و $f(C)>0$.



شکل ۳.۱۸

اگر B بین A و C باشد، آنگاه $AB=|x-0|=x$ و $BC=|AC-x|=AC-x$.

بنابراین، در حالتی که $A-B-C$، شرط $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ معادل شرط $x=AC-x$ است، یا $2x=AC$، یا $x=AC/2$

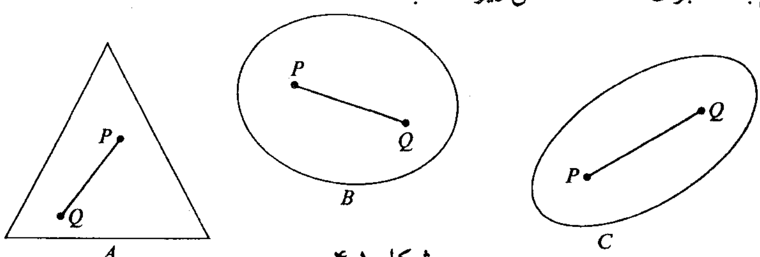
دقیقاً یک چنین عدد حقیقی x وجود دارد، و بنابراین دقیقاً یک چنین نقطه B وجود دارد. □

فصل ۴

جداپذیری در صفحه و فضا

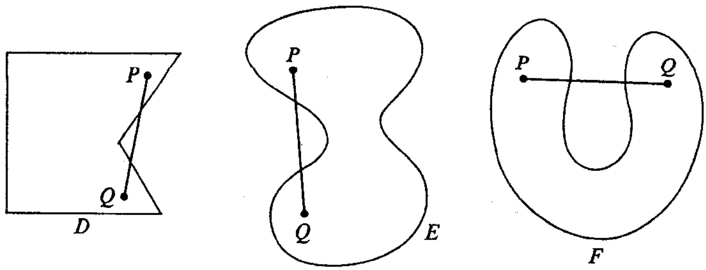
مجموعه محدب و جداپذیری

یک مجموعه A را محدب می‌نامیم اگر برای هر دو نقطه P و Q از A، تمام پاره‌خط $\overline{PQ}$ نیز در A واقع باشد. برای مثال، سه شکل زیر محدب هستند.



شکل ۴.۱

در اینجا هریک از مجموعه‌های A، B و C یک ناحیه در صفحه است. برای مثال، A اجتماع یک مثلث و مجموعه همه نقاطی است که درون مثلث واقع‌اند. ما با رسم پاره‌خط‌های $\overline{PQ}$ نشان داده‌ایم که مجموعه‌های A، B و C محدب هستند. از طرف دیگر، هیچ یک از مجموعه‌های D، E و F در زیر محدب نیستند:

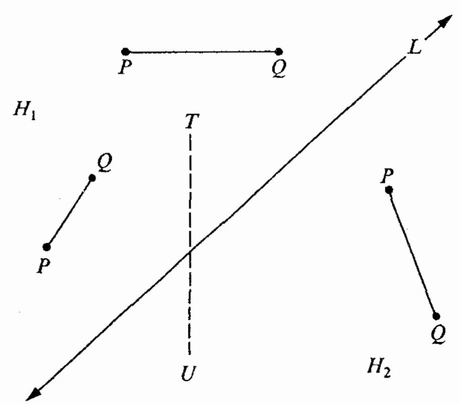


شکل ۴.۲

برای نشان دادن این که مجموعه D محدب نیست، شما باید نشان دهید دو نقطه P و Q وجود دارند که هر دو متعلق به D هستند، به‌طوری که $\overline{PQ}$ در D قرار ندارد. می‌توانید این روش را برای هر سه مجموعه فوق به کار ببرید.

یک مجموعه محدب ممکن است باریک و کوچک باشد. مثلاً هر پاره‌خط $\overline{PQ}$ یک مجموعه محدب است. در حقیقت، یک مجموعه با فقط یک نقطه مجموعه‌ای محدب است. (چون چنین مجموعه‌ای که شامل هیچ دو نقطه‌ای نیست، از آن نتیجه می گیریم که هر دو نقطهٔ آن دارای هر خاصیتی که ذکر کنیم می باشد). همچنین ممکن است یک مجموعه محدب خیلی بزرگ باشد. برای مثال، تمام فضای S یک مجموعه محدب است؛ و همه خط‌ها و صفحه‌ها محدب هستند. (ثابت کنید)

خط L در صفحه E مفروض است، قسمتهائی از E که در دو طرف خط L واقع‌اند هر دو مجموعه‌هائی محدب هستند.



شکل ۴.۳

در شکل ٤.٣، H_1 قسمتی از صفحه است که در بالا و سمت چپ خط L واقع است، و H_2 قسمتی از صفحه است که در پائین و سمت راست خط L واقع‌اند. مجموعه‌های H_1 و H_2 **نیم صفحه** نامیده می‌شوند. مانند قبل، با نشان دادن چند پاره‌خط به‌عنوان نمونه محدب بودن آنها را تشریح کرده‌ایم. البته توجه داشته باشید که اگر T متعلق به H_1 و U متعلق به H_2 باشند، آنگاه پاره‌خط $\overline{TU}$ همیشه خط را می برد. آنچه را که در بحث فوق بیان کردیم در هندسه مسطحه مطلبی اساسی است. اصل زیر این مطلب را در بردارد.

PS-۱. اصل جداپذیری صفحه.

یک خط و یک صفحه شامل آن مفروض است، مجموعه همه نقاط صفحه که روی خط واقع نیستند اجتماع دو مجموعه جدا از هم است به‌طوری که

(۱) هریک از این مجموعه‌ها محدب است، و

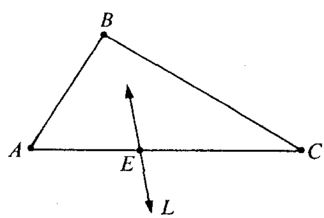
(۲) اگر P متعلق به‌یکی از این مجموعه‌ها و Q متعلق به‌مجموعه دیگر باشد، آنگاه

پاره‌خط $\overline{PQ}$ خط را می‌برد.

اکنون می‌توانیم از روی این اصول تعریف‌ها را بیان کنیم. اگر E و L یک صفحه و یک خط به‌صورتی باشند که در اصل فوق آمده است، و H_1 و H_2 دو مجموعه‌ای باشند که بوسیله این اصل بدست می‌آیند، آنگاه هریک از مجموعه‌های H_1 و H_2 را یک **نیم صفحه** می‌نامیم، و خط L **مرز** هریک از آنها نامیده می‌شود.

واضح است که روش طبیعی وجود ندارد که تصمیم بگیریم که نیم صفحه‌ها کدامیک می‌بایست اول ذکر می‌شد، امّا به‌جز این سئوال ترتیب دو نیم صفحه به‌طور منحصر بفردی بوسیله E و L معین می‌شوند. برای اثبات آن ملاحظه می کنیم که اگر $P\in H_1$، آنگاه نقاط H_1 نقطه P و نقاط Q هستند به‌طوری که $\overline{PQ}\cap L=\emptyset$ همین طور؛

$$H_2=\{Q \mid Q\in E-L \ \text{و}\ \overline{PQ}\cap L\neq\emptyset\} .$$



شکل ۴.۴

■ قضیه ۱. اصل پاش.

مثلث $\triangle ABC$ و خط L در یک صفحه مفروض‌اند. اگر L شامل نقطه E بین A و C باشد، آنگاه L یکی از اضلاع $\overline{AB}$ یا $\overline{BC}$ را می‌برد.

(پاش این گزاره را به عنوان یک اصل به‌جای اصل **PS-۱** در فوق به کار برد)

اثبات. اثبات به برهان خلف است. فرض کنیم چنین نباشد، در این صورت (۱) A و B در یک طرف L واقع‌اند، و (۲) B و C نیز در یک طرف L واقع‌اند. بنابراین (۳) A و C در یک طرف L واقع‌اند. امّا این امکان ندارد، زیرا $A-E-C$. □

مجموعه مسائل ۴.۱

قضایای زیر را ثابت کنید. در تمام این قضایا، باید توجه کنیم که E، L، H_1 و H_2 صفحه، خط و دو نیم صفحه‌ای هستند که به‌وسیله اصل **PS-۱** داده می‌شوند. اثباتها به‌نوعی هستند که ممکن است کلاً برای شما ناآشنا باشند. آشکارا، در **PS-۱** از مفهوم پاره‌خط‌ها استفاده می‌شود، و پاره‌خط‌ها بر حسب بینیت تعریف می‌شوند. بنابراین شما مجبورید به‌غیر از اصل جداپذیری صفحه به‌تعداد کمی

از اصول (قضایا) متوسل شوید. در اثباتها به کار بردن اصل خط کش یا قضیه استقرار خط کش مجاز نیست؛ به‌جای آنها از قضیه‌های B-۱ تا B-۵ که از روی آنها ثابت شده‌اند استفاده شود.

۱. **قضیه ۲**. مجموعه‌های $H_۱$ و $H_۲$ هر دو تهی نیستند.

۲. **قضیه ۳**. هیچ یک از مجموعه‌های $H_۱$ و $H_۲$ تهی نیست.

۳. **قضیه ۴**. $H_۱$ حداقل شامل دو نقطه است.

۴. **قضیه ۵**. $H_۱$ حداقل شامل سه نقطه غیر هم‌خط است.

۵. **قضیه ۶**. E به‌طور منحصر بفرد بوسیله $H_۱$ تعریف می‌شود. یعنی، هر نیم صفحه فقط در یک صفحه واقع است.

۶. **قضیه**. ۷. خط L به‌صورت منحصر بفرد به‌وسیله $H_۱$ معین می‌شود. یعنی، هر نیم صفحه فقط یک مرز دارد.

۷. **قضیه ۸**. اگر A و B محدب باشند، آنگاه $A \cap B$ نیز محدب است.

۸. **قضیه ۹**. اگر G مجموعه‌ای از مجموعه‌های محدب g_i باشد، آنگاه اشتراک همه مجموعه‌های g_i یک مجموعه محدب است.

غلاف محدب یک مجموعه A عبارت است از اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل A.

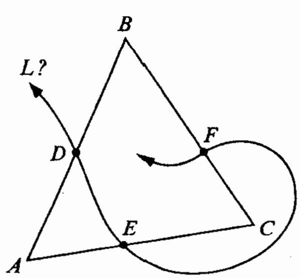
۹. **قضیه ۱۰**. اگر A مجموعه‌ای از نقاط باشد، آنگاه غلاف محدب A یک مجموعه محدب است.

۱۰. **قضیه ۱۱**. $H_۱ \cup L$ محدب است.

۱۱. **قضیه ۱۲**. هر نیم‌خط محدب است.

۱۲. فرض کنیم A مجموعه‌ای از نقاط باشد. فرض کنیم B اجتماع همه پاره‌خطهای به‌فرم $\overline{PQ}$ باشد، که در آن P و Q به A تعلق دارند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که B محدب است؟ چرا یا چرا نه؟

۱۳. **قضیه ۱۳**. مثلث $\triangle ABC$ و خط L در یک صفحه مفروض‌اند. اگر L شامل هیچ رأس مثلث نباشد، آنگاه L نمی‌تواند هر سه ضلع مثلث را قطع کند.



شکل ۴.۵

۱۴. نشان دهید اگر اصل پاش به‌عنوان یک اصل در نظر گرفته شود، آنگاه قضیه ۱۳ را می‌توان به‌عنوان یک قضیه ثابت کرد.

۱۵. نشان دهید اگر **اصل پاش** به‌عنوان اصل به کار برده شود، آنگاه می‌توان **اصل جداپذیری صفحه** را به‌عنوان یک قضیه ثابت کرد.

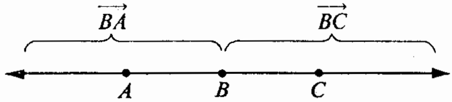
۴.۲ قضایای وقوع که بر مبنای اصل جداپذیری صفحه ثابت می‌شوند.

اگر مانند اصل جداپذیری صفحه $E-L=H_1 \cup H_2$، آنگاه مجموعه‌های H_1 و H_2 را نیم صفحه‌های خط L یا طرفین خط L می‌نامیم. توجه کنید هر خط در هر صفحه‌ای که شامل آن است دو طرف دارد، اما اگر P و Q در یک طرف خط L باشند، به‌خودی خود مستلزم هم صفحه بودن L، P و Q است. از طرف دیگر، وقتی می گوئیم P و Q در فضا در طرفین مختلف خط L هستند ممکن است فقط مستلزم این باشد که هیچ صفحه‌ای شامل P، Q و L نیست. اگر مانند اصل جداپذیری صفحه، $E-L=H_1 \cup H_2$، آنگاه H_1 و H_2 را طرفین **متقابل خط** L می‌نامیم؛ و اگر P متعلق به H_1 و Q متعلق به H_2 باشند، گوئیم P و Q در طرفین متقابل خط L هستند. دو قضیه زیر به‌سادگی ثابت می‌شوند.

■ **قضیه ۱**. اگر P و Q در طرفین متقابل خط L باشند، و Q و T نیز در طرفین متقابل خط L باشند، آنگاه P و T در یک طرف خط L واقع‌اند.

■ **قضیه ۲**. اگر P و Q در طرفین متقابل خط L باشند، و Q و T در یک طرف خط L باشند، آنگاه P و T در طرفین متقابل خط L واقع‌اند.

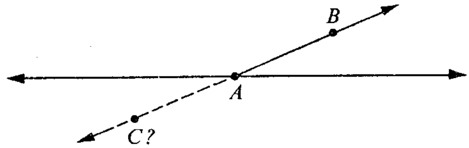
اصطلاح مشابهی را برای طرفین نقطه روی یک خط به کار می‌بریم. یعنی، اگر $A-B-C$، آنگاه نیم‌خط‌های $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را نیم‌خط‌های متقابل می‌نامیم.



شکل ۴.۶

■ **قضیه ۳**. اگر خط و نیم خطی غیر واقع بر آن مفروض باشند بطوری که ابتدای نیم خط روی آن خط باشد، آنگاه همه نقاط نیم‌خط، به‌جز ابتدای آن، در یک طرف آن خط واقع‌اند.

اثبات. فرض کنید L و $\overrightarrow{AB}$ به‌ترتیب نمایش خط و نیم‌خط باشند، که $A \in L$.



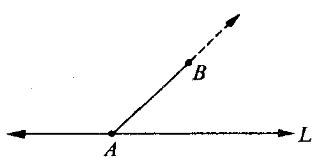
شکل ۴.۷

فرض کنیم $\overrightarrow{AB}$ شامل نقطه‌ای مانند C باشد به‌طوری که B و C در طرفین متقابل خط L باشند (در صفحه‌ای که شامل L و $\overleftrightarrow{AB}$ است).

پس $\overline{BC}$ خط L را در نقطه‌ای می‌برد، و این نقطه باید A باشد، زیرا $\overline{BC}$ روی $\overleftrightarrow{AB}$ واقع است، و $\overleftrightarrow{AB}$ خط L را فقط در نقطه A می‌برد. بنابراین $C-A-B$. اما این غیر ممکن است. بنا به‌تعریف، نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ مجموعه همه نقاط C از خط $\overleftrightarrow{AB}$ است که برای آنها $C-A-B$ صحیح نیست. لذا همه نقاط نیم‌خط، به‌جز A، در یک طرف خط L واقع‌اند، یعنی طرفی که شامل B است. □

مشابه این قضیه برای پاره‌خط‌ها به‌صورت زیر است.

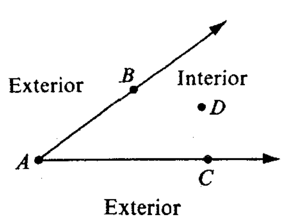
■ **قضیه ۴.** فرض کنیم L یک خط و A نقطه‌ای واقع بر L و B نقطه‌ای غیر واقع بر L باشد. در این صورت همه نقاط $\overline{AB}-A$ در یک طرف خط L واقع‌اند.



شکل ۴.۸

این صحیح است زیرا $\overline{AB} - A$ در $\overrightarrow{AB} - A$ واقع است.

زاویه $\angle BAC$ مفروض است.



شکل ۴.۹

به طور غیر دقیق، درون یک زاویه مجموعه همه نقاطی است که داخل آن قرار دارند، و برون آن مجموعه همه نقاطی است که خارج آن واقع اند. ما می‌توانیم این مفهوم را به‌طور دقیق به‌صورت زیر بیان کنیم.

درون $\angle BAC$ عبارت است از اشتراک طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ که شامل B است، و طرفی از $\overleftrightarrow{AB}$ که شامل C است.

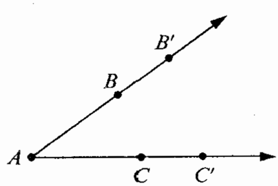
بنابراین نقطهٔ D درون $\angle BAC$ است.

(۱) اگر D و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ باشند، و

(۲) اگر D و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ باشند.

برای اینکه این تعریف معتبر باشد باید فقط به‌زاویه‌ای وابسته باشد که با آن شروع کرده‌ایم نه وابسته به‌نقاط B و C که به‌طور اتفاقی برای نمایش زاویه انتخاب کرده‌ایم.

بنابراین در شکل زیر، نگران کننده خواهد بود اگر از تعریف ما دو تا درون مختلف برای $\angle B'AC'$ و $\angle BAC$ بدست آید:



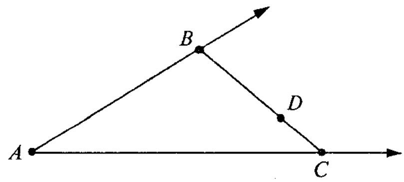
شکل ۴.۱۰

اما قضیه ۳ نشان می‌دهد، که تعریف ما فقط به‌زاویه بستگی دارد، زیرا B و B' در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$، و C' و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ واقع اند.

زاویه‌ای مانند $\angle ABC$ مفروض است، دقیقاً یک صفحه E شامل آن وجود دارد. برون زاویه مجموعه همه نقاطی از E است که نه روی زاویه و نه در درون زاویه واقع اند.

■ **قضیه ۵. هر ضلع مثلث به‌جز نقاط انتهایی آن درون زاویهٔ مقابل آن است.**

در اینجا یک اصطلاح معمول را به کار برده‌ایم؛ و آن این است که، در مثلث $\triangle ABC$ ، $\angle A = \angle BAC$ زاویه مقابل به‌ضلع $\overline{BC}$ است.



شکل ۴.۱۱

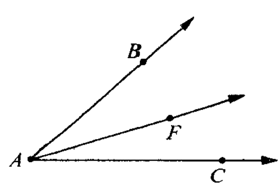
اثبات.

(۱) ابتدا قضیه ٤ را برای خط $\overleftrightarrow{AC}$ و پاره‌خط $\overline{BC}$ به کار می‌بریم. بنا بر قضیه ٤، $\overline{BC}-C$ در طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ واقع است که شامل B است.

(۲) سپس قضیه ٤ را برای خط $\overleftrightarrow{AB}$ و پاره‌خط $\overline{BC}$ به کار می‌بریم. بنا بر قضیه ٤، $\overline{BC}-B$ در طرفی از $\overleftrightarrow{AB}$ واقع است که شامل C است.

(۳) بنا بر (۱) و (۲)، $\overline{BC}-\{B,C\}$ درون $\angle BAC$ واقع است. □

■ **قضیه ۶.** اگر F درون $\angle BAC$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{AF}-A$ درون زاویه $\angle BAC$ واقع است.



شکل ۴.۱۲

اثبات.

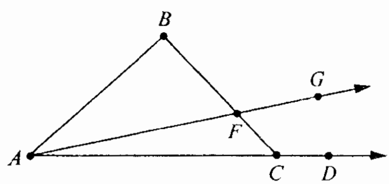
(۱) بنا بر تعریف درون زاویه، F و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ واقع‌اند. بنا بر قضیه ۳، $\overrightarrow{AF}-A$ در طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ که شامل F است واقع می‌باشد. بنابراین $\overrightarrow{AF}-A$ در طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ که شامل B است واقع می‌باشد.

(۲) بنا بر تعریف درون زاویه، F و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ واقع‌اند. بنا بر قضیه ۳، $\overrightarrow{AF}-A$ در

طرفی از $\overleftrightarrow{AB}$ که شامل F است واقع می‌باشد. بنابراین $\overrightarrow{AF}-A$ در طرفی از $\overleftrightarrow{AB}$ که شامل C است واقع می‌باشد.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $\overrightarrow{AF}-A$ درون $\angle BAC$ واقع است. □

■ قضیه ۷. $\triangle ABC$ مفروض است، فرض کنیم F، D و G نقاطی باشند به‌طوری که $B-F-C$، $A-C-D$، و $A-F-G$ در این صورت G درون زاویه $\angle BCD$ واقع است.



شکل ۴.۱۳

اثبات.

(۱) چون $A-F-G$، G روی $\overleftrightarrow{AF}$ واقع است، و A بین G و F قرار ندارد. بنابراین G روی $\overrightarrow{AF}$ و چون $G\neq A$ لذا G روی $\overrightarrow{AF}-A$ واقع است.

(۲) بنا بر قضیه ۵، F درون $\angle BAC$ قرار دارد. پس بنا بر قضیه ۶، نتیجه می‌گیریم $\overrightarrow{AF}-A$ درون $\angle BAC$ واقع است.

بنابراین G و B در یک طرف خط $\overleftrightarrow{AC}(=\overleftrightarrow{CD})$ واقع‌اند. (۳) A و G در دو طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ واقع‌اند، و A و D در دو طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ واقع‌اند. بنابراین G و D در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ واقع‌اند.

بنابر (۲) و (۳)، G درون $\angle BCD$ است. □

در سرتاسر این فصل از شکل استفاده کرده‌ایم تا بهتر در جریان اثبات باشیم. همه مؤلفین از شکل استفاده می‌کنند، چه آنها را به‌خواننده نشان دهند و چه نشان ندهند. ولی باید دقت کنید که مطمئن شوید شکلها فقط نقش مجازشان را ایفا می‌کنند. در کتابهای مقدماتی رسم بر این است که خواننده مطمئن باشد اثباتها وابسته به‌شکل نیستند، ولی تقریباً همیشه این قول را زیر پا می‌گذارند. (اینکه در دورهٔ مقدماتی باید به‌چنین قولهایی پای‌بند بود سؤال دیگری است و جواب آن احتمالاً باید منفی باشد). ولی در یک بررسی ریاضی باید فرض و حکم طوری بیان شوند که برای روشن ساختن آنها نیازی به‌شکل نباشد و همین‌طور اثباتها باید بر پایهٔ اصول و قضایای قبلی باشد. این نکته مخصوصاً به کتاب حاضر مربوط می‌شود. زیرا در اغلب بررسیهای غیر رسمی هندسه رسم بر این است که روابط بینیت و خواص جدا سازی را فقط با شکل بیان می‌کنند بدون اینکه حتی آن را ذکر کنند.

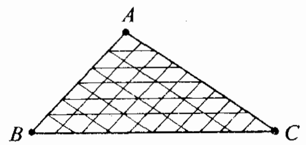
شما ممکن است بتوانید وضعی را بخاطر آورید که در هندسهٔ مقدماتی به‌قضیهٔ ۷ نیاز بود.

درون $\triangle ABC$ بوسیله اشتراک سه مجموعه زیر تعریف می‌شود:

(۱) طرفی از $\overleftrightarrow{AB}$ که شامل C است.

(۲) طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ که شامل B است.

(۳) طرفی از $\overleftrightarrow{BC}$ که شامل A است.



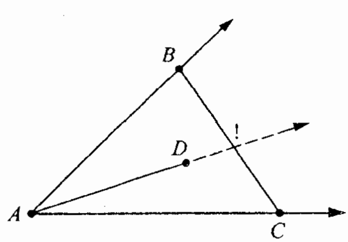
شکل ۴.۱۴

■ **قضیه ۸.** درون یک مثلث همواره یک مجموعه محدب است. (ثابت کنید)

■ **قضیه ۹.** درون یک مثلث اشتراک درون‌های زوایای آن است. (ثابت کنید)

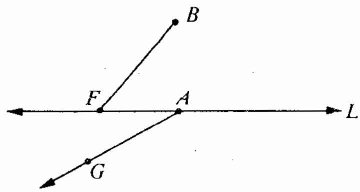
۴.۳ دنبالـه قضایای وقوع

در شکل زیر، فرض می کنیم D در درون $\angle BAC$ باشد. همان‌طور که در شکل می‌بینیم ظاهراً واضح است که $\overrightarrow{AD}$ باید ضلع $\overline{BC}$ را ببرد، اما اثبات آن بر مبنای اصولی که تاکنون بیان کرده‌ایم ساده نبوده بلکه مشکل است. ابتدا به‌نتایجی مقدماتی نیاز داریم.



شکل ۴.۱۵

■ **قضیه ۱.** فرض کنیم L یک خط باشد، همچنین فرض کنیم A و F دو نقطه (متمایز) روی L، و B و G نقاطی در دو طرف L باشند. در این صورت $\overline{FB}$ نیم‌خط $\overrightarrow{AG}$ را قطع نمی کند.



شکل ۴.۱۶

اثبات.

(۱) بنا بر قضیه ۳ در بخش ۴.۲، $\overrightarrow{AG}-A$ در طرفی از L که شامل G است واقع می باشد.

(۲) بنا بر قضیه ٤ در بخش ۴.۲، $\overline{FB}-F$ در طرفی از L که شامل B است واقع می باشد.

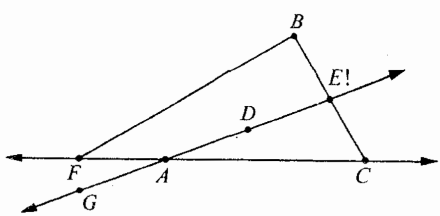
(۳) بنا بر (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که $\overrightarrow{AG}-A$، $\overline{FB}-F$ را قطع نمی کند. بنابراین $\overline{FB}$ و $\overrightarrow{AG}$ نمی‌توانند یکدیگر را ببرند، مگر محتملاً در نقطه A یا F.

اما این ممکن نیست: A روی $\overline{FB}$ قرار ندارد و F روی $\overrightarrow{AG}$ واقع نیست. لذا قضیه ثابت است.

□

قضیه زیر صورتی قوی‌تر از اصل پاش است.

■ **قضیه ۲.** در $\triangle FBC$، فرض کنیم A نقطه‌ای بین F و C باشد، و فرض کنیم D نقطه‌ای باشد به‌طوری که D و B در یک طرف $\overleftrightarrow{FC}$ واقع‌اند. در این صورت $\overrightarrow{AD}$، پاره‌خط $\overline{FB}$ یا $\overline{BC}$ را می برد.



شکل ۴.۱۷

اثبات.

(۱) فرض کنیم G نقطه‌ای باشد به‌طوری که $G-A-D$. پس G و D در دو طرف $\overleftrightarrow{FC}$ واقع‌اند، و لذا G و B در دو طرف $\overleftrightarrow{FC}$ واقع‌اند. واضح است که

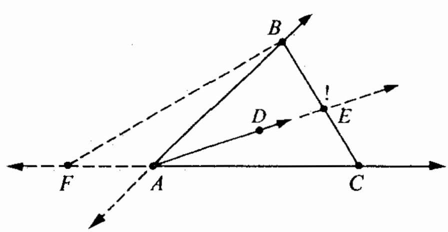
$$\overleftrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cup\overrightarrow{AG}$$

(۲) قضیه ۱ را برای خط $\overleftrightarrow{FC}$، پاره‌خط $\overline{FB}$، و نیم‌خط $\overrightarrow{AG}$ به کار می‌بریم. در نتیجه $\overrightarrow{AG}$، پاره‌خط $\overline{FB}$ را نمی‌برد.

(۳) دقیقاً به‌همین روش، نتیجه می‌گیریم که $\overrightarrow{AG}$ پاره‌خط $\overline{BC}$ را نیز نمی‌برد.

(٤) بنا بر اصل پاش می‌دانیم که خط $\overleftrightarrow{AD}$ یکی از $\overline{FB}$ یا $\overline{BC}$ را می‌برد. چون $\overrightarrow{AG}$ هیچکدام از این پاره‌خط‌ها را نمی‌برد، در نتیجه $\overrightarrow{AD}$ یکی از آنها را می‌برد، و این چیزی است که باید ثابت می‌کردیم. □

■ **قضیه ۳ـ قضیه قطعه بر.** اگر D درون $\angle BAC$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{AD}$، $\overline{BC}$ را در نقطه‌ای بین B و C می‌برد.



شکل ۴.۱۸

اثبات.

(۱) فرض کنیم F نقطه‌ای باشد به‌طوری که $F-A-C$. پس $\overleftrightarrow{FC}=\overleftrightarrow{AC}$، و F و C در دو طرف $\overleftrightarrow{AB}$ واقع‌اند.

(۲) چون D درون $\angle BAC$ است، در نتیجه B و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}(=\overleftrightarrow{FC})$ هستند. از این بنا بر قضیه ۲ نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{AD}$، $\overline{FB}$ یا $\overline{BC}$ را می‌برد.

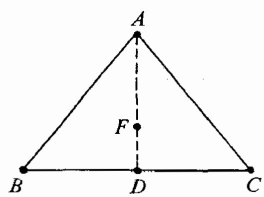
(۳) چون F و C در دو طرف $\overleftrightarrow{AB}$ هستند و C و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که F و D در دو طرف $\overleftrightarrow{AB}$ واقع‌اند.

(٤) اکنون قضیه ۱ را برای خط $\overleftrightarrow{AB}$، پاره‌خط $\overline{FB}$، و نیم خط $\overrightarrow{AD}$ به کار می‌بریم. بنا بر قضیه ۱، $\overrightarrow{AD}$، $\overline{FB}$ را نمی‌برد.

(۵) از (۲) و (٤) نتیجه می‌گیریم که $\overrightarrow{AD}$، $\overline{BC}$ را در نقطه‌ای مانند E متمایز از B می‌برد. اگر $E=C$، آنگاه A، D و C هم‌خط هستند، که این نادرست می‌باشد. بنابراین $B-E-C$، و اثبات کامل است. □

شما ممکن است به‌خاطر داشته باشید که یکی از اولین قضیه‌های هندسه مسطحه که بیشتر افراد یاد می‌گیرند، با زوایای مجاور به‌قاعده در مثلث متساوی‌الساقین سر و کار دارد.

همیشه اینها مساوی‌اند، یعنی قابل انطباق‌اند به‌مفهومی که در این کتاب آن را بعداً تعریف خواهیم کرد. یعنی اگر $\overline{AB}\cong\overline{AC}$، آنگاه $\angle B\cong\angle C$.



شکل ۴.۱۹

اگرچه از زمان بسیار قدیم اثبات خوبی برای این قضیه می‌دانستند، در قرنهای اخیر رسم شده بود که آن را بی‌جهت به‌روشهای پیچیده‌ای ثابت کنند. و احتمالاً بدتر از آنها اثباتی است که با گفته زیر شروع می‌شود.

(۱) $\angle BAC$ را نصف می‌کنیم.

(۲) «فرض کنیم» D نقطه‌ای باشد که نیم‌خط نصف کننده یعنی $\overrightarrow{AF}$ قاعده را می‌برد، و (۳) نشان می‌دهیم که $\triangle ADB$ و $\triangle ADC$ قابل انطباق هستند.

البته، استفادهٔ امیدوار کننده از کلمه «فرض کنیم» جای گزینی برای اثبات اینکه $\overrightarrow{AF}$ ضلع $\overline{BC}$ را می‌برد نمی‌باشد.

این روش اثبات اساساً به **قضیهٔ قطعه بر** بستگی دارد.

چنانچه خواهیم دید، برای این قضیهٔ ساده‌ای که مورد بحث ما است به‌قضیه قطعه‌بر نیازی نداریم.

مجموعه مسائل ۴.۳

۱. **قضیه ۴**. یک مثلث و خطی در یک صفحه مفروض‌اند اگر خط درون مثلث را قطع کند، آنگاه

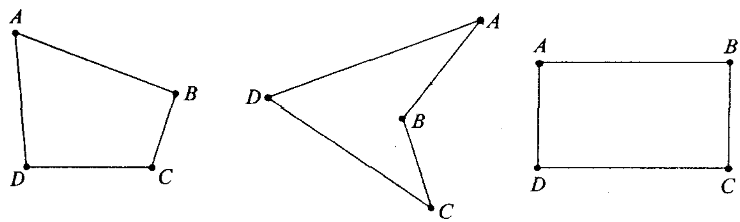
حداقل یکی از اضلاع مثلث را می برد.

۴.۴ چهار ضلعی های محدب

چهار نقطه A، B، C و D مفروض اند، به طوری که همه آنها در یک صفحه واقع اند، اما هیچ سه نقطه هم‌خط نیستند. اگر پاره‌خطهای $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، و $\overline{DA}$ یکدیگر را فقط در نقاط انتهائی قطع کنند آنگاه اجتماع آنها یک **چهار ضلعی** نامیده می‌شود، و آنرا به $\square ABCD$ نشان می‌دهیم.

از این نماد نباید برداشت کرد که هر چهار ضلعی مربع است. همین طور از نماد $\triangle ABC$ نباید برداشت کرد که هر مثلث متساوی‌الاضلاع یا متساوی‌الساقین است.

زاویه‌های A، B، C و D در $\square ABCD$ عبارتند از $\angle DAB$، $\angle ABC$، $\angle BCD$، و $\angle CDA$.



شکل ۴.۲۰

اضلاع $\square ABCD$ عبارت‌اند از $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، و $\overline{DA}$. دو ضلع را که در یک انتها مشترک‌اند، اضلاع مجاور می‌نامیم؛ دو ضلع را که مجاور نیستند، دو ضلع مقابل می‌نامیم.

دو زاویه چهار ضلعی مجاور هستند اگر اشتراک آنها شامل یک ضلع چهار ضلعی باشد، و دو زاویه را که مجاور نباشند، مقابل می‌نامیم.

قطرهای $\square ABCD$ عبارت‌اند از پاره‌خط های $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.

یک چهار ضلعی محدب نامیده می‌شود اگر هریک از اضلاع آن در نیم صفحه‌ای باشد که به‌وسیله ضلع مقابل آن معین می‌شود.

توجه کنید که اگر A و B در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ باشند، آنگاه تمام نقاط $\overline{AB}$ در همان طرف خط $\overleftrightarrow{CD}$ می باشند. (عکس آن نیز واضح است.) بنابراین $\square ABCD$ یک چهار ضلعی محدب است اگر و فقط اگر هر چهار شرط زیر برقرار باشند.

(۱) A و B در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ واقع باشند.

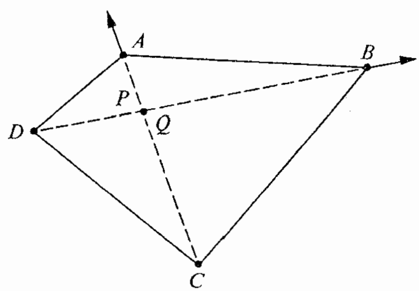
(۲) B و C در یک طرف $\overleftrightarrow{DA}$ واقع باشند.
(۳) C و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ واقع باشند.
(٤) D و A در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ واقع باشند.

توجه داشته باشید که به کار بردن لغت محدب در هندسه لغتی ناجور است، هیچ چهار ضلعی تشکیل یک مجموعه محدب به‌مفهومی که در قسمت ۱ـ٤ تعریف کردیم نمی‌دهد. ولی همه جا از آن استفاده می‌شود.

قضیه زیر همه جا شناخته شده است، اما به‌ندرت اثبات شده است.

■ **قضیه ۱.** قطرهای یک چهار ضلعی محدب همواره یکدیگر را می‌برند.

اثبات. فرض کنیم $\square ABCD$ یک چهار ضلعی محدب باشد. باید نشان دهیم قطر $\overline{AC}$ قطر $\overline{BD}$ را می‌برد.



شکل ۴.۲۱

بنا بر شرط‌های (۱) و (۲) فوق، نتیجه می‌گیریم که B درون $\angle ADC$ است. لذا، بنا بر قضیه قطعه‌بر، $\overrightarrow{DB}$ پاره‌خط $\overline{AC}$ را در نقطه‌ای مانند P می‌برد.

به‌طور مشابه، از شرط‌های (۱) و (٤) نتیجه می‌گیریم که A درون $\angle BCD$ است. لذا بنا بر قضیه قطعه‌بر، $\overrightarrow{CA}$ پاره‌خط $\overline{BD}$ را در نقطه‌ای مانند Q می‌برد.

چون هریک از این نیم‌خط‌ها و پاره‌خط‌ها روی خط نظیرشان قرار دارند، نتیجه می‌گیریم که خطهای $\overleftrightarrow{DB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ یکدیگر را در P و همچنین در Q می‌برند. لذا $P=Q$. چون P روی $\overline{AC}$ و Q روی $\overline{BD}$ واقع‌اند، در نتیجه $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ یک نقطه مشترک دارند، و اثبات کامل است. □

اگر این فصل را مرور کرده و ملاحظه کنید که چه مقدار آن برای اثبات قضیه فوق لازم است، متوجه خواهید شد که چرا معمولاً در هندسه‌های مقدماتی این اثبات را حذف می‌کنند.

مجموعه مسائل ۴.۴

۱. عکس قضیه ۱ را ثابت کنید. یعنی، نشان دهید اگر قطرهای یک چهار ضلعی یکدیگر را ببرند، آنگاه چهار ضلعی محدب است.

۲. نشان دهید اگر هر رأس یک چهار ضلعی درون زاویه مقابل آن باشد، آنگاه چهار ضلعی محدب است. (در $\square ABCD$ اگر رأس A باشد، آنگاه زاویه مقابل آن $\angle BCD$ است. همین طور برای رأسهای دیگر.)

۳. نشان دهید برای هر چهار ضلعی (محدب یا غیر محدب)، خطهای شامل قطرها همواره یکدیگر را می‌برند.

۴. نشان دهید هر چهار ضلعی (محدب یا غیر محدب) ضلعی مانند $\overline{XY}$ دارد به‌طوری که دو رأس دیگر در یک طرف خط $\overleftrightarrow{XY}$ قرار دارند.

۵. عکس قضیه‌ای را که در مساله ۲ بیان شده است ثابت کنید.

۴.۵ جدا کردن فضا به‌وسیله صفحه‌ها

وضعیت صفحه‌ها در فضا، با توجه به‌خواص جداپذیری، خیلی شبیه وضعیت خط‌ها در صفحه است. بنابراین ما اصل، تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی را بیان کرده و تحقیق آنها را به‌عهده خواننده می‌گذاریم.

SS-۱. اصل جداپذیری فضا.

به‌ازای هر صفحه در فضا مجموعه همه نقاطی که روی صفحه قرار ندارند اجتماع دو مجموعه H_1 و H_2 است به‌طوری که

(۱) هریک از این مجموعه‌ها محدب است. و

(۲) اگر P متعلق به یکی از این مجموعه‌ها و Q متعلق به‌مجموعه دیگر باشد، آنگاه پاره‌خط $\overline{PQ}$ صفحه را می‌برد.

دو مجموعه H_1، H_2 را که در SS-۱ توصیف کردیم **نیم فضاها**، یا **طرفین صفحه** E می‌نامیم، و E **وجه** هریک از آنها نامیده می‌شود. مانند حالت نیم صفحه‌ها، هیچ روش طبیعی وجود ندارد که تصمیم بگیریم کدامیک از آنها می‌بایست اول ذکر می‌شد؛ امّا به‌جز ترتیب، مجموعه‌های H_1 و H_2 به‌طور منحصر بفرد به‌وسیله E معین شده‌اند. به‌این دلیل که اگر $P\in H_1$، آنگاه

$$H_1=\{Q \mid P=Q \text{ یا } \overline{PQ}\cap E=\emptyset\}\ ،$$

و

$$H_2=\{Q \mid \overline{PQ}\cap E\neq\emptyset\}$$

قضیه‌های زیر صرفاً مروری مناسب برای فضایای بخش ۴.۱ می‌باشند.

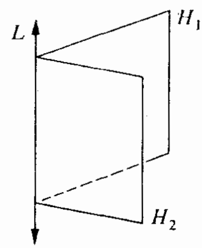
■ **قضیه ۱**. مجموعه‌های H_1 و H_2 هر دو تهی نیستند.

■ **قضیه ۲**. هیچ یک از مجموعه‌های H_1، H_2 تهی نیست.

■ **قضیه ۳**. هریک از مجموعه‌های H_1 و H_2 شامل حداقل چهار نقطه غیر هم صفحه می باشند.

■ **قضیه ۴**. E به‌طورمنحصربفرد به‌وسیله H_1 معین می‌شود، یعنی، هرنیم‌فضا فقط یک‌وجه دارد.

یک زاویه دو وجهی (فرجه) شکلی مانند زیر است:



شکل ۴.۲۲

به‌عبارت دقیقتر، اگر دو نیم صفحه H_1 و H_2 دارای یک مرز L باشند، امّا در یک صفحه نباشند، آنگاه $H_1 \cup H_2 \cup L$ یک **زاویه دو وجهی** یا **فرجه** نامیده می‌شود.

خط L یال فرجه نامیده می‌شود، و مجموعه‌های $H_1 \cup L$ و $H_2 \cup L$ اضلاع فرجه نامیده می‌شوند. (توجه کنید که درست مانند اضلاع زاویه که شامل نقاط ابتدائی مشترک آنها است، اضلاع یک فرجه نیز شامل یال مشترک آنها است.)

قضیه زیر مانند قضیه ۳، بخش ٤.۲ است.

■ **قضیه ۵**. فرض کنیم H یک نیم صفحه با مرز L باشد، و فرض کنیم E صفحه‌ای شامل L باشد امّا شامل H نباشد،

در این صورت تمام نقاط H در یک طرف E واقع‌اند.

فرجهٔ $D=H_1 \cup H_2 \cup L$ مفروض است. فرض کنیم E_1 و E_2 به ترتیب صفحه‌هائی شامل H_1 و H_2 باشند. در این صورت **درون** D عبارت است از اشتراک (۱) طرفی از E_1 که شامل H_2 است و (۲) طرفی از E_2 که شامل H_1 است.

■ **قضیه ۶**. درون یک فرجه همواره یک مجموعه محدب است.

قضیه ۷. اگر P و Q روی اضلاع مختلف یک فرجه باشند، آنگاه هر نقطه بین P و Q در درون فرجه واقع است.

التبه، این بخش به‌زحمت چیزی بیش از آشنائی با مسائل زیر است.

مجموعه مسائل ۴.۵

۱. قضایای ۱ تا ۷ را ثابت کنید.

۴.۶ هفت پل کونیگسبرگ

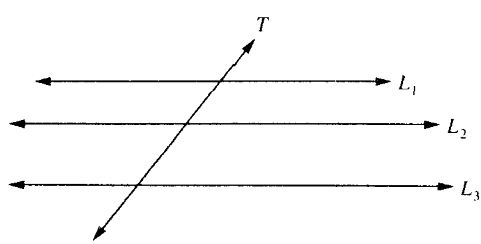
جداپذیری صفحه و بینیت در بین آخرین مفهوم‌های هندسی بودند که باید به‌دقت بررسی می‌شدند؛ تعاریف و اصول فقط در حدود یکصد سال قدمت دارند. وقتی که وضعیت ساده و حقایق واضح هستند ما می‌توانیم بدون اطلاع از آن آزادانه صحبت کنیم. به‌عنوان مثال، اقلیدس در نیافت که بعضی از عبارتها را تعریف نشده به کار برده است، و او جداپذیری صفحه و بینیت را بدون آنکه صریحاً ذکری از آنها بکند، به کار برده است.

مبانی هندسه در قرن نوزدهم مورد تحقیق قرار گرفت، زیرا سادگی هندسه پایان یافته بود. برای مثال قضیه زیر را در نظر بگیرید.

قضیه. فرض کنیم خطهای L_1، L_2 و L_3 در یک صفحه باشند، به‌طوری که هیچ دو خط یکدیگر را نمی‌برند.

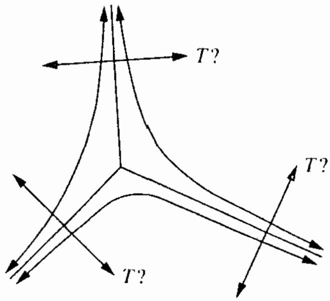
در این صورت خطی مانند T وجود دارد که هر سه خط را می‌برد.

یک شکل متقاعد کننده است:



شکل ۴.۲۳

اما این «قضیه» بدون شک عمیق است اگر اصل توازی اقلیدس برقرار باشد این قضیه درست است، اما در هندسه نااقلیدسی نادرست است. در صفحه نااقلیدسی، ممکن است خط‌ها به‌شکل زیر باشند.



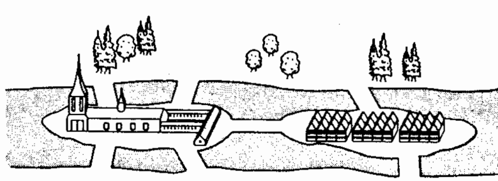
شکل ۴.۲۴

در اینجا هر دو تا از این خط‌ها در یک طرف سومی قرار دارد، بنابراین هیچ خطی مانند T تمام آنها را نمی‌برد. فصلهای ۹ و ۲٤ را ببینید.

در حقیقت جداپذیری برای اولین بار در قرن هجدهم مورد مطالعه قرار گرفت، در حالتی که واقعیت‌ها واضح نبودند. داستان آن به‌قرار زیر است.

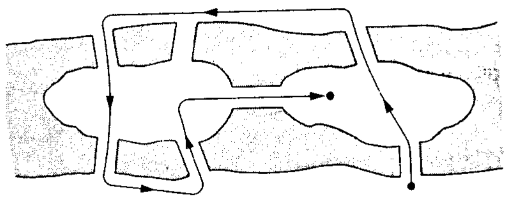
شهر کونیگسبر گ در ساحل دریای بالتیک، در دهانه رودخانه پِرِگِل واقع است.

در رودخانه دو جزیره وجود دارد، که مانند شکل زیر، توسط هفت پل به‌خشکی اصلی و به‌یکدیگر مرتبط شده‌اند.



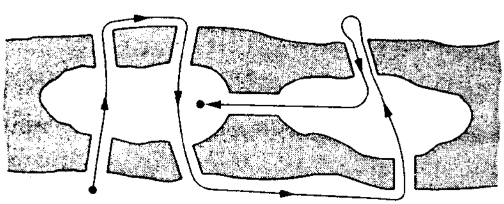
شکل ۴.۲۵

مردمی که در اطراف این جزیره‌ها قدم می‌زدند، دریافته بودند که اگر آنها مثلاً از ساحل جنوبی رودخانه شروع کنند، نمی‌توانند قدم زدنشان را طوری برنامه‌ریزی کنند که از روی هر پل دقیقاً یک بار عبور کنند، چنین به‌نظر می‌رسید که باید حداقل یک پل را نادیده بگیرند:



شکل ۴.۲۶

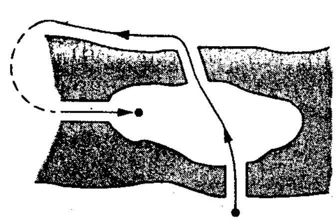
یا از پلی دو بار عبور کنند:



شکل ۴.۲۷

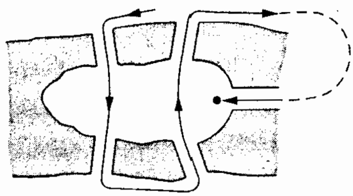
مردم متقاعد شده بودند که نمی‌توانند از روی هر پل دقیقاً یک بار بگذرند، اما هیچکس مطمئن نبود. سرانجام در سال ۱۷۳۵، فردی مساله را برای لئونارد اویلر ریاضیدان بزرگ سوئیسی فرستاد. اویلر چنین کشف کرد که ممکن است مردم به‌این تلاش خاتمه دهند. او برای مساله به‌تحلیلهای زیر رسید.

ابتدا جزیره شرقی را در نظر بگیرید:



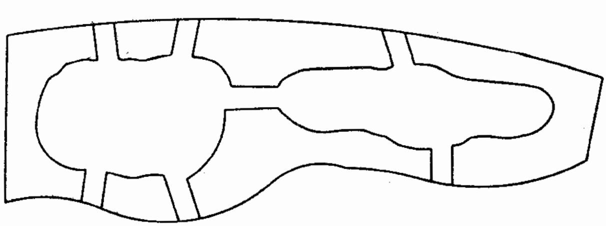
شکل ۴.۲۸

سه پل وجود دارند که به‌آن منتهی می‌شوند. چون شما طبق مساله از ساحل جنوبی شروع کرده‌اید، باید از جائی خارج از جزیره شرقی شروع کرده باشید. از آنجا که شما برای هریک از سه پل دقیقاً یک بار عبور انجام می‌دهید در پایان به‌جزیره شرقی می‌رسید.
مانند آن است که، اگر چراغها خاموش باشند و شما سه بار کلید را بزنید در آن صورت چراغها روشن هستند).
حال جزیره غربی را در نظر بگیرید.



شکل ۴.۲۹

پنج پل وجود دارند که به‌آن منتهی می‌شوند، و پنج عددی فرد است. بنابراین، چون شما خارج از جزیره غربی شروع کرده‌اید، در پایان نیز باید به‌جزیره غربی برسید. (این شبیه به‌پنج بار زدن کلید چراغ است: اگر در ابتدا چراغ خاموش باشد، در پایان روشن است.)
امّا این بدین معنی است که «قدم زدن کونیگسبرگ» غیر ممکن است، زیرا شما به‌یکبار نمی‌توانید به‌دو مکان برسید. اگر قدم زدن از ساحل شمالی یا یکی از جزیره‌ها شروع شود، اثبات به‌همان روش است.
حل اویلر برای این مسأله حادثه بسیار مهمی بود، زیرا این اولین باری بود که کسی مسائلی از این نوع را حل می‌کرد. توجه کنید، اگر شما نقشه جزایر را روی یک صفحه لاستیکی رسم کنید، می‌توانید لاستیک را از هر طرف که دوست دارید بکشید بدون آنکه تغییری در مساله داده شود.

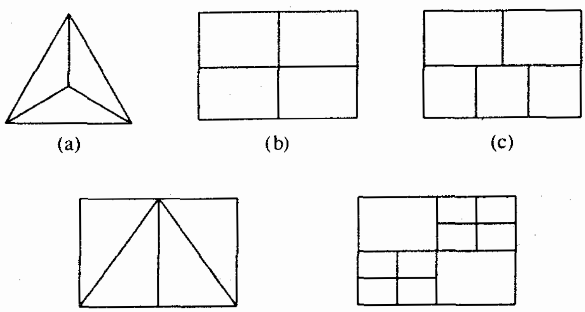


شکل ۴.۳۰

از تحلیل اویلر برای «**قدم زدن کونیگسبرگ**» یک شاخه کلی از ریاضیات توسعه یافت، که به‌مسائلی از این نوع می‌پردازد، این شاخه ریاضیات را **توپولوژی** می‌نامند.

مجموعه مسائل

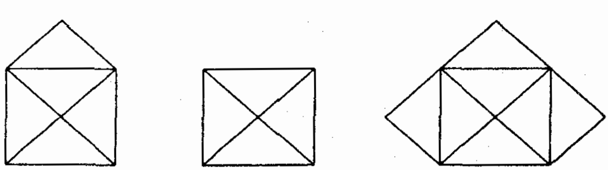
۱. در این مساله، شما **برنده** هستید اگر بتوانید هر پاره‌خط از شکل را دقیقاً یک بار بدون آنکه مداد خود را از روی کاغذ بردارید رسم کنید. شکلها را روی قطعه کاغذی رسم کنید، و ببینید آیا می‌توانید کشف کنید که کدام دو شکل از پنج شکل ممکن است شما را برنده کند. آیا راهی برای ترسیم شکلهائی که همیشه باخت برای آنها است وجود دارد؟



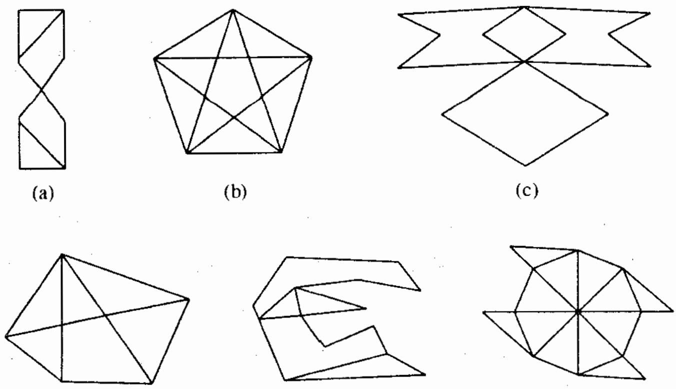
(a) (b) (c)

(d) (e)

۲. از سه شکل زیر، دو شکل را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ و یا رسم دوبارهٔ پاره‌خطی می‌توان رسم کرد، در حالی که سومی را نمی‌توان با این شرایط رسم کرد. کدام دو شکل را می‌توان به‌این روش رسم کرد؟ سعی کنید هرشکل‌را بدون برداشتن مداد یا رسم دوبارهٔ پاره‌خطی بکشید. آیا روش ساده‌تری برای رسیدن به‌نتیجه وجود دارد؟

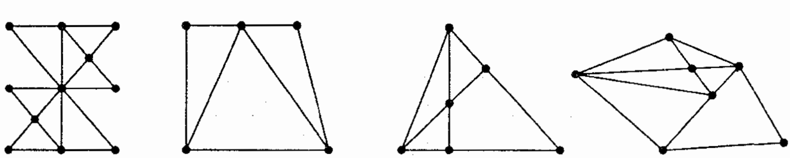


۳. کدامیک از شکلها را می‌توان بدون رسم مجدد هیچ پاره‌خطی رسم کرد.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

۴. شکلی از نوع شکلهائی را که در زیر نشان داده شده‌اند یک **شبکه** می‌نامند، و هر نقطه که به‌وسیله یک خال بزرگ نشان داده شده است یک رأس نامیده می‌شود. یک رأس را بر حسب تعداد پاره‌خطهای منتهی به‌آن، زوج یا فرد می‌نامند.

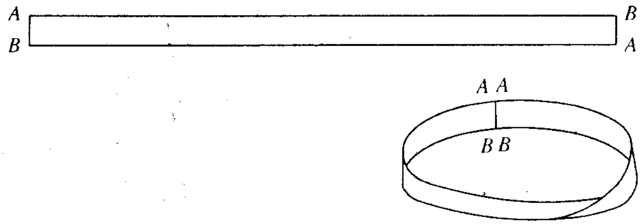


(a) (b) (c) (d)

کدامیک از شکلها را می‌توان بدون ترسیم مجدد پاره‌خطی رسم کرد.؟

۵. **نوار موبیوس**. (The Möbius Strip)

ممکن است شما تا بحال نوار موبیوس را دیده باشید، قطعه‌ای از کاغذ که تنها یکطرف و یک مرز (لبه) دارد. ساختن آن آسان است. نوار نسبتاً بلندی از یک ورق کاغذ معمولی به‌عرض حدود ۸ سانتی را ببرید. بهتر است که قطعه‌ای از نوار یک ماشین حساب به‌طول حدود ۶۰ سانتی‌متر را انتخاب کنید. همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است، پس از چرخاندن نوار به‌اندازهٔ نیم دور، دو سر آن را به‌هم بچسبانید.



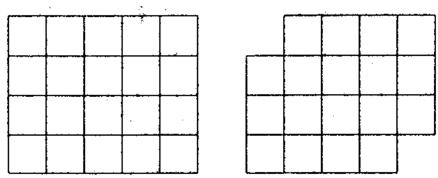
شما می‌توانید چند خاصیت عجیب نوار موبیوس را بررسی کنید. به‌عنوان نمونه، مدادی را در وسط و در جهت طول نوار بکشید بدون آنکه مرز نوار را قطع کند یا رسم مجدد، تا به‌نقطه شروع برسیم، خطی را که رسم می‌شود خط وسط بنامید.

(a) با قیچی نوار موبیوس را در طول خط وسط ببرید. چه اتفاقی می‌افتد؟

(b) نوار (یا نوارهائی) را انتخاب کنید، و دوباره در طول خط وسط (یا خطهای وسط) آن را ببرید. چه چیزی بدست می‌آید؟

(c) حال همان عملیات را برای بار سوم انجام دهید و نتایج را مشاهده کنید.

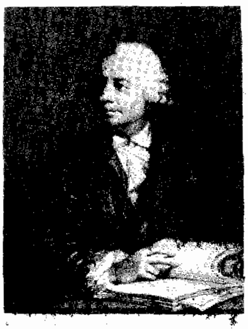
۶. **مسأله دو مینو.** شکل سمت چپ در زیر از ۲۰ مربع تشکیل شده است اگر هر مربع نصف اندازه یک دو مینو بود، آنگاه می‌توانستید شکل را با دقیقاً ۱۰ **دومینو** بپوشانید یا فرش کنید.



امّا فرض کنید دو مربع را حذف کنیم (معادل یک دو مینو)، و شکل سمت راست بالا به‌دست آید. آیا می‌توانیم این شکل را با ۹ دو مینو فرش کنیم؟

۷. آیا یک مربع 5×5 را می‌توان با دو مینوهائی فرش کرد؟ اگر یکی از مربعهای کوچکی را که در یک گوشه است برداریم، آیا می‌توان شکل حاصل را با دو مینوهائی فرش کرد؟

۸. اگر یک صفحه معمولی 8×8 بازی شطرنج را انتخاب کرده و (مانند مسئله ۶) یک جفت مربعهای واقع در دو گوشه مقابل را برداشته یا حذف کنیم، آیا شکل حاصل را می‌توان با دومینوهائی فرش کرد؟ (باید یک شکل بسازید، یا بهتر است از یک صفحه شطرنج و دومینوهای واقعی استفاده کنید.)



لئونارد اویلر: ۱۷۸۳-۱۷۰۷

حلّ مسئله هفت پُلِ کونیگسبرگ توسط اویلر مثالی از بینش و نبوغ اوست. قبل از زمان او هیچگاه این نوع مسائل را مربوط به‌ریاضی نمی‌دانستند. از آن موقع، ریاضی در جهتهای غیرقابل انتظاری، رشد سریعی کرده است. تحلیل اویلر از مسئله پُلِ کونیگسبرگ اولین راهنما برای شاخه‌ای جدید از ریاضی بود که اکنون توپولوژی نامیده می‌شود و در قرن بیستم به‌بیشترین ترقی رسیده و هنوز در حال پیشرفت است. اویلر نه تنها باهوش بلکه کوشا نیز بود. ریاضیاتی که برای اولین بار در مقالاتش نوشته بقدری است که تاکنون به‌زحمت می‌توان همتائی برای او یافت.

مجموع کارهای ریاضی او بیشتر از ۶۰ جلد بزرگ را در برمی گیرد. در سن ۲۸ سالگی بینائی یک چشمش را از دست داد و در سن ۵۰ سالگی کاملاً نابینا شد. اما حافظهٔ او شگفت‌آور بود. او تمام شعرهای حماسی را حفظ بوده و همواره می‌توانست محاسبات طولانی را در مغزش انجام دهد و به‌خاطر همین قادر بود در بقیه عمرش با همان سرعت قبلی به کارش ادامه دهد.

فصل

۵

اندازهٔ زاویه‌ای

شما به‌خاطر دارید که بررسی و مطالعه هندسه را با ساختار (ساختمان) زیر شروع کردیم

$$[S, L, P] \cdot$$

بعداً تابع فاصله $d{:}S\times S \longrightarrow R$ را ضمیمه این ساختار کردیم ساختمان زیر بدست آمد

$$[S, L, P, d] \cdot$$

بینیت، و همچنین انطباق برای پاره‌خط‌ها را بر حسب فاصله بین نقاط تعریف کردیم.

اکنون می‌خواهیم با معرفی اندازه برای زوایا این ساختار را کامل کنیم. که خواهید دید که همان اندازه درجه آشنا است. وضعیت در اینجا خیلی شبیه به‌وضعیتی است که برای فاصله بیان شد. ما می‌توانیم به‌همان خوبی رادیان یا هر ضریب ثابتی از درجه‌ها یا رادیان‌ها را به کار ببریم؛ اما چون همه این اندازه‌ها برای زوایا اساساً یکسان عمل می‌کنند، ممکن است یک بار و برای همیشه، به‌خاطر ساده کردن بحث یکی از آنها را انتخاب کرده و از این به بعد همیشه آن را به کار ببریم.

(در آنالیز، اندازه رادیان الزامی است، و اندازه درجه خارج از بحث است، اما در هندسه مقدماتی هر واحد اندازه به‌همان خوبی دیگری است.)

اندازه زاویه یک تابع m خواهد بود، که برای زوایا تعریف می‌شود، و اعداد حقیقی مقادیر این تابع می‌باشند. فرض کنیم A مجموعه همه زوایا باشد. می‌خواهیم ساختمان زیر را مطالعه کنیم.

$$[S, L, P, \mathrm{d}, \mathrm{m}]$$

که در آن

$$m{:}A \longrightarrow R$$

یک تابع از زوایا به‌توی اعداد حقیقی است.

در نمایش معمولی تابعی، برای نشان دادن اندازه $\angle ABC$ می‌نویسیم

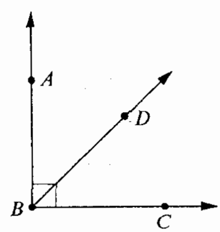
$$m(\angle ABC)$$

اما چون هیچ امکانی برای اشتباه آن با ضرب نیست ما پرانتز را حذف می کنیم و فقط می‌نویسیم

$$m\angle ABC$$

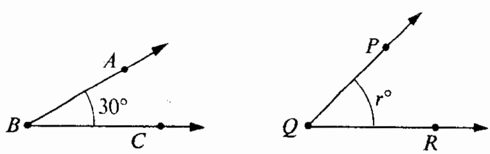
چون فقط یک تابع اندازه برای زوایا انتخاب کرده‌ایم، می‌توانیم فقط بنویسیم

$$m\angle ABC = ۹۰ \ , \ m\angle DBC = ۴۵ \ .$$



شکل ۵.۱

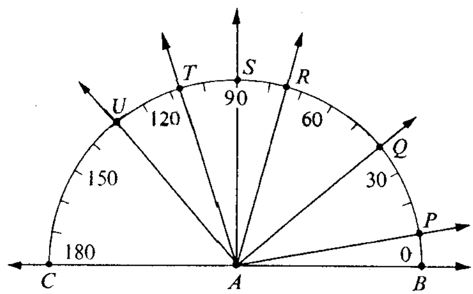
ما نمی‌نویسیم $m\angle ABC = ۹۰^\circ$، زیرا مقادیر تابع m صرفاً اعداد حقیقی هستند؛ تنها خود آنها را می‌نویسیم و نیازی نداریم که روی آنها علامت کوچکی قرار دهیم تا نشان دهد که از کجا آمده است. از طرف دیگر، در علامت گذاری روی شکلها مناسب است از علامت درجه تنها بخاطر این که نشان دهد برخی حروف یا اعداد اندازهٔ زوایا برحسب درجه‌اند استفاده کنیم.



شکل ۵.۲

شکلهای فوق بیان می کنند که
$m\angle ABC = ۳۰$ و، $m\angle PQR = r$.

اصول حاکم بر تابع m فقط تعبیرهای مجردی برای خواص آشنای نقاله‌اند. اگر مانند شکل زیر لبهٔ نقاله‌ای را روی مرز نیم صفحه H قرار دهیم می‌توانیم اندازه تعداد زیادی از زوایا را بخوانیم.



شکل ۵.۳

به‌عنوان مثال،
$m\angle PAB = ۱۰$ ،$m\angle QAB = ٤۰$ ،$m\angle RAB = ۷۵$

همچنین با کم کردن اعداد بدست آوریم که

$m\angle QAP = ٤۰ - ۱۰ = ۳۰$, $m\angle SAR = ۹۰ - ۷۵ = ۱۵$, $m\angle CAU = ۱۸۰ - ۱۳۰ = ۵۰$

و غیره.

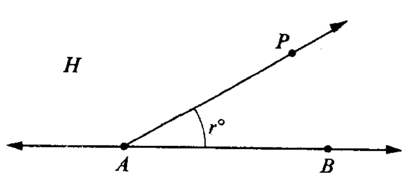
این موارد و کاربردهای دیگر نقاله در اصول زیر منعکس شده‌اند.

M-۱. m یک تابع $A \longrightarrow R$ است، که در آن A مجموعه تمام زوایا، و R مجموعه تمام اعداد حقیقی است.

M-۲. برای هر زاویه $\angle A$، $m\angle A$ بین صفر و ۱۸۰ است. ($۰ < m\angle A < ۱۸۰$)

M-۳. اصل ساختن زاویه.

فرض کنیم $\overrightarrow{AB}$ نیم‌خطی روی مرز نیم صفحه H باشد. به‌ازای هر عدد حقیقی r بین ۰ و ۱۸۰، دقیقاً یک نیم‌خط $\overrightarrow{AP}$ که P در H است وجود دارد، به‌طوری که $m\angle PAB = r$.

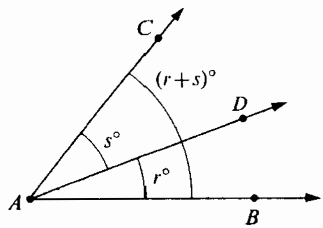


شکل ۵.۴

M-۴. اصل جمع زاویه.

اگر D نقطه‌ای درون $\angle BAC$ باشد، آنگاه

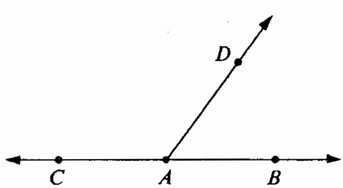
$$m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC \ .$$



شکل ۵.۵

(البته، این خاصیتی از تابع m است که وقتی اندازه یک زاویه را به‌وسیله کم کردن محاسبه می‌کنیم از آن استفاده می‌شود.)

دو زاویه مجانب‌اند، اگر مانند شکل زیر باشند:



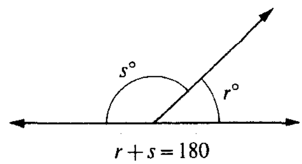
شکل ۵.۶

به‌این معنی که، اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ دو نیم‌خط متقابل باشند، و $\overrightarrow{AD}$ هر نیم‌خط سومی باشد، آنگاه $\angle DAB$ و $\angle DAC$ تشکیل دو زاویه مجانب را می‌دهند. اگر $m\angle ABC + m\angle DEF = ۱۸۰$، آنگاه دو زاویه را مکمل نامند.

توجه کنید که این تعریف هیچ چیزی در مورد این که زوایا کجا هستند نمی‌گوید؛ این تعریف فقط با اندازه‌های آنها سر و کار دارد.

M‌-۵. اصل مکمل

اگر دو زاویه مجانب باشند، آنگاه مکمل یکدیگراند.



شکل ۵.۷

درست به همان صورت که انطباق پاره‌خط‌ها را بر حسب فاصله تعریف کردیم، انطباق زوایا را نیز بر حسب اندازه تعریف می کنیم. یعنی، اگر

$$m\angle ABC = m\angle DEF \text{ ،}$$

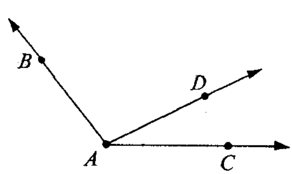
آنگاه دو زاویه قابل انطباق‌اند، و می‌نویسیم

$$\angle ABC \cong \angle DEF \text{ .}$$

اگر دو زاویه مجانب قابل انطباق باشند، آنگاه هریک از آنها را یک **زاویه قائمه** می‌نامند. اگر $\angle ABC$ یک زاویه قائمه باشد، و $m\angle ABC = r$، آنگاه داریم $r = ۹۰$؛ دلیلش آن است که چون زاویه‌های مجانب همیشه مکمل هستند، باید داشته باشیم $r + r = ۱۸۰$. عکس آن نیز صحیح است (و آسان).

بنابراین یک زاویه، زاویه‌ای قائمه است اگر و فقط اگر اندازه آن ۹۰ باشد.

قضایای زیر تقریباً شبیه چند قضیهٔ اول انطباق درباره پاره‌خط‌ها می‌باشند. برای دیدن این شباهت، ملاحظه می کنیم که یک نوع رابطه بینیت برای نیم‌خط‌هائی که دارای یک ابتدا باشند می‌توان تعریف کرد؛ می‌توانیم بگوئیم که $\overrightarrow{AD}$ **بین** $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ است اگر $\overrightarrow{AD} - A$ درون $\angle BAC$ واقع باشد.



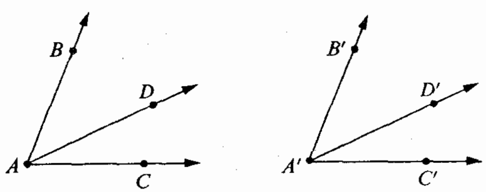
شکل ۵.۸

این شباهت کامل نیست، زیرا برای هر سه نیم‌خط که دارای یک ابتدا باشند این که یکی از آنها بین دو تای دیگر است صحیح نیست. (مثال؟) با وجود این، قضایای زیر را داریم.

■ **قضیه ۱. برای زوایا، انطباق یک رابطه هم‌ارزی است.**

■ **قضیه ۲. قضیه ساختن ـ زاویه.**
زاویه $\angle ABC$ و نیم‌خط $\overrightarrow{B'C'}$، مفروض‌اند، و فرض کنیم H یک نیم صفحه باشد که مرز آن شامل $\overrightarrow{B'C'}$ است. در این صورت دقیقاً یک نیم‌خط $\overrightarrow{B'A'}$، که A' در H است وجود دارد، به‌طوری که $\angle ABC\cong\angle A'B'C'$.

■ **قضیه ۳. قضیه جمع ـ زاویه.**
اگر (۱) D درون $\angle BAC$ باشد، (۲) D' درون زاویه $\angle B'A'C'$ باشد، (۳) $\angle BAD\cong\angle B'A'D'$، و (٤) $\angle DAC\cong\angle D'A'C'$، آنگاه (۵) $\angle BAC\cong\angle B'A'C'$.



شکل ۵.۹

■ **قضیه ۴. قضیه تفاضل ـ زاویه.**
اگر (۱) D درون $\angle BAC$ باشد، (۲) D' درون $\angle B'A'C'$ باشد، (۳) $\angle BAD\cong\angle B'A'D'$، و (٤) $\angle BAC\cong\angle B'A'C'$، آنگاه (۵) $\angle DAC\cong\angle D'A'C'$.

اگر این قضیه‌ها را به‌زبان اندازه زاویه‌ای بر گردانیم، با استفاده از تعریف انطباق زوایا، خواهیم دید که آنها نتایجی بدیهی از اصول تابع m هستند.

دو نیم خط عمود بر هم نامیده می‌شوند اگر اجتماع آنها زاویه‌ای قائمه باشد. اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ عمود بر هم باشند، آنگاه می‌نویسیم $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$. در این حالت همچنین گوئیم خطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بر هم عموداند، و می‌نویسیم $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{AC}$.

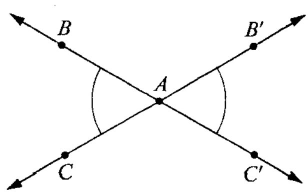
دو پاره‌خط $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ عمود بر هم هستند اگر خطهای شامل آنها بر هم عمود باشند. همین عبارت و همین نمایش را برای یک پاره‌خط و یک خط، همچنین یک خط و یک نیم‌خط و غیره به کار می‌بریم. بنابراین $\overleftrightarrow{AB}\perp\overline{PQ}$ بدین معنی است که $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{PQ}$؛ و این نیز از جهت دیگر بدین معنی

است که اجتماع این دو خط شامل یک زاویه قائمه است.

یک زاویه که اندازه آن کوچکتر از ۹۰ باشد زاویه حاده نامیده می‌شود، و یک زاویه با اندازه بزرگتر از ۹۰ زاویه منفرجه نامیده می‌شود. دو زاویه متمم نامیده می‌شوند اگر مجموع اندازه‌های آنها ۹۰ باشد.

اگر $m\angle BAC < m\angle B'A'C'$، آنگاه گوئیم $\angle BAC$ از $\angle B'A'C'$ **کوچکتر است**، و می‌نویسیم $\angle BAC < \angle B'A'C'$. توجه کنید که نسبت «کوچکتری» یک رابطه ترتیبی نیست؛ کاملاً ممکن است که دو زاویه متفاوت باشند، بدون آنکه یکی از آنها کوچکتر از دیگری باشد. در حقیقت، وقتی که زاویه‌ها قابل انطباق باشند این وضع پیش می‌آید.

دو زاویه را **متقابل به‌رأس** گوئیم، اگر اضلاع آنها نیم‌خطهای متقابل یکدیگر باشند، مانند شکل زیر:



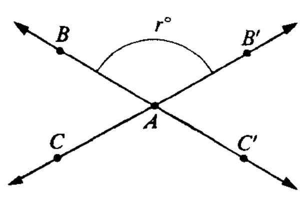
شکل ۵.۱۰

در این جا $\angle BAC$ و $\angle B'A'C'$ دو زاویه متقابل به‌رأس‌اند. به‌طور دقیقتر، اگر $B-A-C'$، $C-A-B'$، و خطهای $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AB'}$ متمایز باشند، آنگاه $\angle BAC$ و $\angle B'A'C'$ دو زاویه متقابل به‌رأس‌اند.

■ **قضیه. ۵. قضیه زاویهٔ متقابل به‌رأس.**

اگر دو زاویه متقابل به‌رأس باشند، آنگاه این دو زاویه قابل انطباق‌اند.

به‌بیان دیگر. اگر $B-A-C'$، $C-A-B'$، و خطهای $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AB'}$ متمایز باشند، آنگاه $\angle BAC \cong \angle B'AC'$.



شکل ۵.۱۱

اثبات. فرض کنیم $r=m\angle BAB'$.
چون $B-A-C'$، در نتیجه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC'}$ نیم‌خط های متقابل هستند. بنابراین $\angle BAB'$ و $\angle B'AC'$ مجانب‌اند. لذا این دو زاویه مکمل‌اند، و داریم

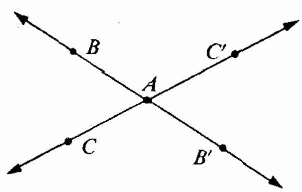
$$m\angle B'AC'=180-r \ .$$

همین طور، $C-A-B'$، و $\angle BAC$ و $\angle BAB'$ مجانب‌اند، بنابراین این دو زاویه نیز مکمل‌اند و داریم

$$m\angle BAC=180-r.$$

در نتیجه $m\angle BAC=m\angle B'AC'$، و $\angle BAC\cong\angle B'AC'$، و اثبات کامل است. □

اگر فکر می کنید که دستگاهی که قضیه را با آن بیان و ثابت کردیم غیر ضروری است قضیه را با در نظر داشتن شکل زیر ثابت کنید.



شکل ۵.۱۲

نکته در اینجاست که اگر بخواهیم چیزی را در بارهٔ زوایای متقابل به‌رأس ثابت کنیم باید تعریفی از زوایای متقابل به‌رأس داشته باشیم که بقدر کافی دقیق باشد تا بتوان از آن استفاده کرد.

■ قضیه ۶. اگر یکی از زاویه‌های دو خط متقاطع قائمه باشد، آنگاه هر چهار زاویه قائمه‌اند. اثبات؟

فصل ۶

قابلیت انطباق مثلثها

۶.۱ مفهوم قابلیت انطباق

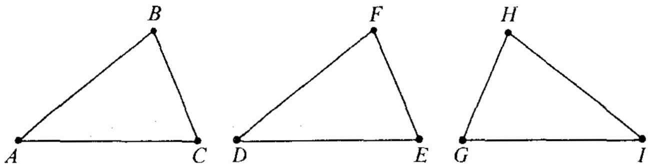
همان طور که در فصل ۳ توضیح دادیم مفهوم ذاتی قابلیت انطباق برای همهٔ انواع شکلها یکی است. برداشت این است که در هر حالت شکل اول را بدون اینکه اندازه و ریخت آن تغییر کند بتوان حرکت داد تا بر شکل دوم منطبق شود. دو روش ریاضی برای بررسی قابلیت انطباق موجود است. یک راه این است که آن را تعریف نشده بگیریم و برای تشریح خواص اساسی آن به‌اندازهٔ کافی اصل بیان کنیم و سپس به‌اثبات قضایایی که ممکن است درست باشند بپردازیم. در فصول آتی نشان خواهیم داد که چگونه این روش اصول موضوعی به کار می‌رود. ولی حالا طرح دیگری به کار می‌بریم: قابلیت انطباق را برحسب فاصله و اندازهٔ زاویه‌ای تعریف می کنیم و تنها برمبنای یک اصل دیگر اقدام به‌اثبات قضایا می کنیم.

روش اول برای قابلیت انطباق را روش ترکیبی، و روش دوم را که به‌زودی بکار خواهیم برد، روش متریک می‌نامند. قبلاً روش متریک را در ساده‌ترین حالات، که در آنها اشکال مورد بحث پاره‌خط و زاویه بود، بکار برده‌ایم. تعاریف اصلی ما به‌صورت زیر خواهند بود.

(۱) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، **بنا بر تعریف، اگر** $AB=CD$.

(۲) **بنابر تعریف،** $\angle BAC \cong \angle PQR$ **اگر** $m\angle BAC = m\angle PQR$.

اکنون حالتی را بررسی می کنیم که اشکال مثلث‌اند. در شکلهای زیر واضح است که هر سه مثلث قابل انطباقند. یعنی هریک از آنها را می‌توان روی هریک از دو شکل دیگر قرار داد بطوریکه دقیقاً منطبق شوند.



شکل ۶.۱

بنابراین برای اینکه اولی را روی دومی قرار دهیم باید A را روی D، B را روی F و C را روی E قرار دهیم. این پیکان‌ها حرکت را با یک تناظر یک‌بیک بین رئوس مثلث اول و مثلث دوم بیان می‌کنند:

$$A \leftrightarrow D \text{ ، } B \leftrightarrow F \text{ ، } C \leftrightarrow E \,.$$

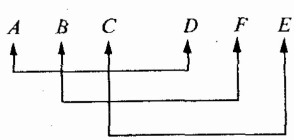
به‌طور مشابه، مثلث دومی را می‌توان با مثلث سومی بوسیلهٔ تناظر زیر جور کرد

$$D \leftrightarrow I \text{ ، } \quad E \leftrightarrow G \text{ ، } \quad F \leftrightarrow H \,.$$

توجه کنید که نکتهٔ خاصی در نامگذاری این توابع یا استفاده از نماد تابعی برای آنها نیست؛ در هریک از این دو مجموعه تنها سه عضو موجود است و بنابراین می‌توان تابع را کاملاً قراردادی بیان کرد، فقط هر سه زوج متناظر را می‌نویسیم. حتی می‌توان آن را خلاصه‌تر کرد. اولین تناظر را در یک سطر چنین می‌نویسیم:

$$ABC \leftrightarrow DFE \,.$$

در اینجا باید متوجه بود که حرف اول سمت چپ با حرف اول سمت راست، حرف دوم با حرف دوم و حرف سوم با حرف سوم متناظر است؛ مانند این:



شکل ۶.۲

اگر تناظر یک به یکی بین رئوس دو مثلث داده شده باشد طبعاً تناظری بین اضلاع و زوایا القا می‌شود. بنابراین اگر تناظر

$$ABC \leftrightarrow DFE ,$$

داده شده باشد تناظر القا شده بین اضلاع عبارتست از

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DF} \text{ و } \overline{BC} \leftrightarrow \overline{FE} \text{ و } \overline{AC} \leftrightarrow \overline{DE} \cdot$$

و تناظر القا شده بین زوایا عبارتست از

$$\angle A \leftrightarrow \angle D \text{ و } \angle B \leftrightarrow \angle F \text{ و } \angle C \leftrightarrow \angle E \cdot$$

(در اینجا طبق معمول علامت اختصاری $\angle A$ را برای $\angle BAC$، $\angle B$ برای $\angle ABC$ و غیره بکار برده‌ایم.) اگر تناظری بین رئوس داده شده باشد وقتی صحبت از تناظر اضلاع یا تناظر زوایا شود همیشه منظور ما تناظر القا شده‌ای است که در بالا نشان دادیم.

البته وقتی در حالتی که دو مثلث قابل انطباق باشند، هر تناظر یک به یک بین رئوس دو مثلث طرح قابل اجرایی برای حرکت دادن یک مثلث روی دیگری را بیان نمی کند. مثلاً تناظر

$$ABC \leftrightarrow FED$$

قابل اجرا نیست. مثلثها را به‌این طریق نمی‌توان بر هم منطبق کرد. برای آزمون اینکه آیا تناظر بین رئوس کارایی دارد باید ببینیم که آیا اضلاع و زوایای متناظر هم قابل انطباقند؟ در واقع این تعریف رسمی ما برای قابلیت انطباق است.

تعریف. مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ و تناظر یک به یک

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

بین رئوس داده شده‌اند. اگر هر زوج اضلاع متناظر قابل انطباق، و هر زوج زوایای متناظر نیز قابل انطباق باشند، آنگاه این تناظر یک انطباق است. یعنی تناظر

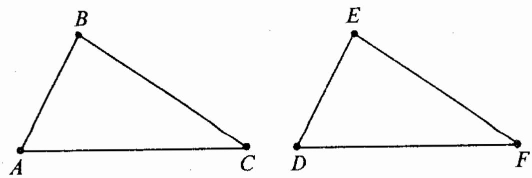
$$ABC \leftrightarrow DEF$$

یک قابلیت انطباق است اگر هر شش شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{array}{ll} \overline{AB} \cong \overline{DE} \text{ و } & \angle A \cong \angle D \text{ و } \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \text{ و } & \angle B \cong \angle E \text{ و } \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ و } & \angle C \cong \angle F \cdot \end{array}$$

اگر $ABC \leftrightarrow DEF$ یک انطباق باشد آنگاه می‌نویسیم

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \cdot$$



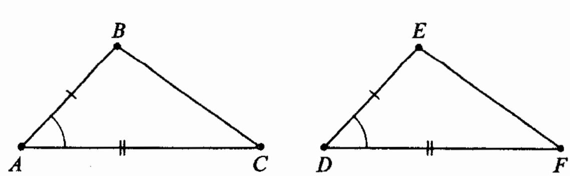
شکل ۶.۳

دو مثلث قابل انطباقند هرگاه تناظر یک به یکی بین رئوس آنها باشد که در شش شرط قابلیت انطباق صدق کند. توجه کنید که عبارت $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ نه فقط مبین آن است که $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ قابل انطباقند بلکه نحوهٔ قابلیت انطباق را نیز بیان می کند؛ یعنی تحت تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$.

بنابراین، اگر بخواهیم بگوئیم که دو مثلث قابل انطباقند، نمی‌توانیم از خلاصه‌نویسی استفاده کنیم و باید آن را با کلمات بگوئیم؛ ولی این ضعفی نیست زیرا در هندسهٔ مثلثها مفهوم قابلیت انطباق مذکور به‌ندرت اتفاق می‌افتد. تقریباً همیشه وقتی صحبت از قابلیت انطباق مثلثها می‌شود درصدد آنیم که در مورد اضلاع و زوایای نظیر نتایجی بدست آوریم یعنی آنچه حقیقتاً در ذهن ماست یک تناظر می‌باشد. ایدهٔ اصلی در اینجا ایدهٔ قابلیت انطباق نیست بلکه ایدهٔ یک قابلیت انطباق است.

اگر بخواهید نشان دهید که یک تناظر یک قابلیت انطباق است لزومی ندارد که هر شش زوج نظیر را بررسی کنید. مثلاً فرض کنید دو ضلع و زاویهٔ شامل آنها از مثلثی با اجزای نظیر از مثلث دوم، بطوری که در شکل زیر نشان داده شده، قابل انطباق باشند.

$$ABC \leftrightarrow DEF \text{ و } \overline{AB} \cong \overline{DE} \text{ و } \angle A \cong \angle D \quad \overline{AC} \cong \overline{DF} \cdot$$



شکل ۶.۴

باید بتوان نتیجه گرفت که $ABC \leftrightarrow DEF$ یک قابلیت انطباق است. در واقع این اصل قابلیت انطباق اصلی ما است.

اصل ض ز ض. تناظری بین دو مثلث (یا بین یک مثلث و خودش) مفروض است. اگر دو ضلع و زاویهٔ شامل آنها از مثلث اول با اجزای نظیرش از مثلث دوم قابل انطباق باشند، آنگاه تناظر یک قابلیت انطباق است.

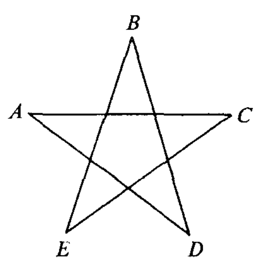
در اینجا **ض ز ض** نمایش **ضلع زاویه ضلع** است. از این ببعد به‌این اصل، اصل ض ز ض یا فقط ض ز ض اطلاق خواهد شد.

مجموعه مسائل ۶.۱

در هندسهٔ استنتاجی این مسائل نه بیان می‌شوند و نه بنا است که حل شوند. شما باید بررسی کنید که آیا این تناظرهای به‌ظاهر قابلیت انطباق حقیقتاً قابلیّت انطباق‌اند.

۱. همهٔ قابلیت انطباقهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع و خودش را بنویسید.

۲. شکل زیر یک ستارهٔ پنج نقطه‌ای است. همهٔ قابلیت انطباقهای بین این ستاره و خودش را بنویسید. توافق می کنیم که یک قابلیت انطباق صرفاً طرح جور کردنی است که قابل اجرا است و همچنانکه با یک نماد کوتاه مکانی را که نقاط A، B، C، D و E ستاره با آنها متناظر می‌شوند مشخص کنیم به‌اندازهٔ کافی تشریح خواهد شد. پس یکی از قابلیت‌های انطباق که می‌خواهیم عبارتست از $ABCDE \leftrightarrow CDEAB$.



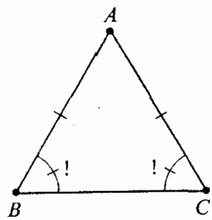
شکل ۶.۵

۳. مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ABC$ مفروض است. یعنی $AB=AC$ اما $AB \neq BC$. چند قابلیت انطباق بین $\triangle ABC$ و خودش وجود دارد؟

۶.۲ قضایای اصلی قابلیت انطباق

مثلث **متساوی‌الساقین** مثلثی است که لااقل دو ضلع آن قابل انطباقند. مثلثی که متساوی‌الساقین نباشد **مختلف‌الاضلاع** نامیده می‌شود. اگر هر سه ضلع قابل انطباق باشند آنگاه مثلث متساوی‌الاضلاع است. اولین و ساده‌ترین نتیجهٔ اصل ض ز ض به‌صورت زیر است.

■ **قضیه ۱. قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین.** اگر دو ضلع مثلثی قابل انطباق باشند، آنگاه زوایای مقابل آنها قابل انطباقند.



شکل ۶.۶

یعنی در مثلث متساوی‌الساقین زوایای مجاور به‌قاعده قابل انطباقند. در اینجا منظور ما از زوایای مجاور به‌قاعده زوایای مقابل به‌دو ضلع قابل انطباق است.

نشانه گذاری روی شکل تصویر کاملی از قضیه را ارائه می‌دهد. نشانه‌های روی اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ یعنی اینکه این دو ضلع بنا به‌فرض قابل انطباقند. نشانه‌های روی $\angle B$ و $\angle C$ با علامت تعجب، یعنی اینکه حکم، قابلیت انطباق دو زاویه است. در سراسر این کتاب علامت تعجب در شکلها به‌همین روش برای بیان حکم‌ها بکار خواهد رفت.

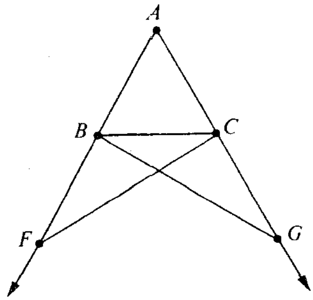
بیان دیگر. در مثلث $\triangle ABC$ اگر $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ آنگاه $\angle B \cong \angle C$.

اثبات. تناظر $ABC \leftrightarrow ACB$ را در نظر بگیرید.

تحت این تناظر $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{AC}$، $\overline{AC} \leftrightarrow \overline{AB}$ و $\angle A \leftrightarrow \angle A$. بنابراین دو ضلع و زاویه شامل آنها با اجزای نظیرش قابل انطباقند. پس بنابر (ض ز ض) تناظر یک قابلیت انطباق است $\triangle ABC \cong \triangle ACB$. بنابر تعریف قابلیت انطباق $\angle B \cong \angle C$، که می‌خواستیم ثابت کنیم.

□

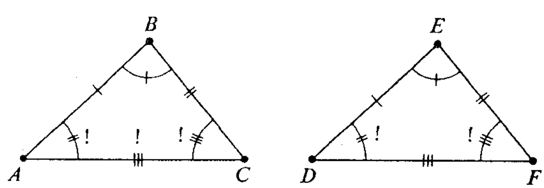
این قضیهٔ مشهور **پل حمار** است. عبارت پل حمار به‌معنی پل الاغها است و از شکلی که در اثبات اقلیدس آمده تداعی شده است.



شکل ۶.۷

اثبات اقلیدس طولانی بوده و بیش از یک صفحهٔ چاپی است. اثبات فوق اساساً منصوب به پاپوس است گرچه پاپوس از این صورت ض ز ض که ما بکار می بریم استفاده نکرد. مدت زیادی نگذشته ـ یا آن طور که نقل می کنند ـ که یک برنامه به کامپیوتر دادند تا اثباتهایی برای قضایای سادهٔ هندسه پیدا کند. موقعی که قضیه پل حمار را به‌ماشین دادند سریعاً اثبات پاپوس را روی نوار چاپ کرد. گفته می شود که این امر موجب حیرت افرادی شد که مسئله را کد گذاری کرده بودند؛ اثبات پاپوس برای آنها جدید بود. البته ماوقع این بود که اصل ض ز ض به‌شکل زیر کد گذاری شده بود:

«اگر (۱) A، B و C هم‌خط نباشند، (۲) D، E و F هم‌خط نباشند؛ (۳) $\overline{DE} \cong \overline{AB}$؛ (٤) $\overline{EF} \cong \overline{BC}$ و (۵) $\angle DEF \cong \angle ABC$؛ آنگاه (٦) $\overline{DF} \cong \overline{AC}$؛ (۷) $\angle DFE \cong \angle ACB$ و (۸) $\angle EDF \cong \angle BAC$.»



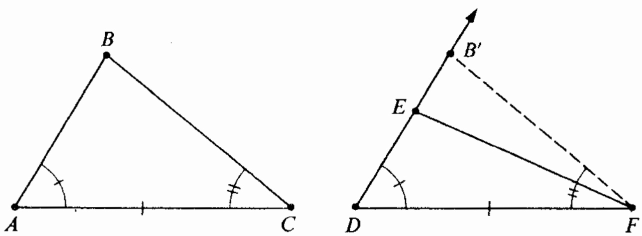
شکل ۶.۸

این نوعِ زبانی است که مردم با ماشین‌ها صحبت می کنند. نمی‌توان تصدیق بلاتصور یا پیش‌داوری را به‌ماشین‌ها تلقین کرد؛ و بنابراین، اگر بخواهید این ایده را به‌ماشین بدهید که مثلثهای (شکل ٦.٨) در اصل ض ز ض متفاوتند، باید آن را صریحاً بگویید. هیچ کسی چنین کاری نکرده و لذا ماشین به‌روش ساده‌لوحانه‌اش، ظریف‌ترین و زیباترین اثبات را ارائه داده است.

نتیجه ۱ـ۱. هر مثلث متساوی‌الاضلاع متساوی‌الزاویه است. یعنی در هر مثلث متساوی‌الاضلاع هر سه زاویه قابل انطباقند. اثبات؟

■ **قضیه ۲. قضیه ز ض ز. تناظر یک به یکی بین دو مثلث (یا بین یک مثلث و خودش) داده شده است. اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث اول با اجزای نظیرش از مثلث دوم قابل انطباق باشند، آنگاه تناظر یک قابلیت انطباق است.**

بیان دیگر. مثلثهای $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ و تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$ مفروض‌اند. اگر $\angle A \cong \angle D$، $\angle C \cong \angle F$ و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$، آنگاه $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



شکل ۶.۹

اثبات.

(۱) بنا بر قضیه ۲ ـ C بخش ۳.۶ نقطه‌ای مانند B' روی نیمخط $\overrightarrow{DE}$ هست که $\overline{DB'} \cong \overline{AB}$.

(۲) بنا بر (ض ز ض)، داریم $\triangle ABC \cong \triangle DB'F$.

(۳) بنا بر تعریف قابلیت انطباق، داریم $\angle DFB' \cong \angle ACB$.

(٤) بنا بر قضیه ۲ بخش ۵.۱ نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{FB'} = \overrightarrow{FE}$.

(۵) بنابراین $B' = E$ زیرا خطوط $\overleftrightarrow{DE}$ و $\overleftrightarrow{FE}$ در فقط یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

(٦) پس بنا بر (۲) داریم $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ که باید ثابت می‌شد. □

از این قضیه نتیجه‌ای می‌گیریم که عکس قضیهٔ ۱ است.

نتیجه ۱ـ۲. اگر دو زاویه از مثلثی قابل انطباق باشند آنگاه اضلاع روبروی آنها قابل انطباقند.

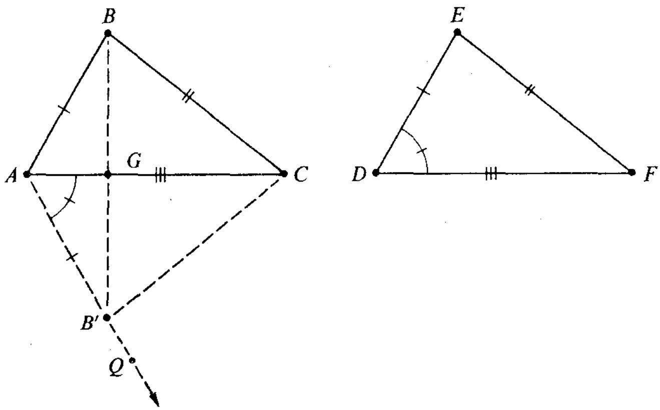
نتیجهٔ زیر عکس نتیجه ۱.۱ است.

نتیجه ۲ـ۲. هر مثلث متساوی‌الزاویه متساوی‌الاضلاع است.

اثبات سومین قضیهٔ قابلیت انطباق مشکل‌تر است.

■ **قضیه ۳. قضیه ض ض ض. تناظر یک به یکی بین دو مثلث (یا بین یک مثلث و خودش) مفروض است. اگر هر سه زوج اضلاع متناظر قابل انطباق باشند، آنگاه تناظر یک قابلیت انطباق است.**

بیان دیگر. مثلثهای $\triangle ABC$، $\triangle DEF$ و تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$ مفروض‌اند. اگر $\overline{AB} \cong \overline{DE}$، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ آنگاه تناظر یک قابلیت انطباق است.



شکل ۶.۱۰

اثبات. قبل از اینکه وارد جزئیات شویم، نحوهٔ اثبات را توضیح می‌دهیم. ابتدا زیر ضلع $\triangle ABC$ مثلثی قابل انطباق با $\triangle DEF$ می‌سازیم و آن را $\triangle AB'C$ می‌نامیم؛ به‌طوری که B' در طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ است که B قرار ندارد و $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$. سپس نشان می‌دهیم که $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$. بدین ترتیب نتیجه خواهد شد $\triangle ABC \cong \triangle DEF$، که باید ثابت می‌شد. اثبات کامل به‌روش زیر است.

(۱) بنا بر قضیهٔ ساختن زاویه (قضیهٔ بخش ۵.۱) نیمخطی مانند $\overrightarrow{AQ}$ هست که Q در طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ است که B قرار ندارد و

$$\angle CAQ \cong \angle EDF \; .$$

(۲) بنا بر قضیهٔ ساختن پاره‌خط (قضیه ۲ـC بخش ۳.۶) نقطه‌ای مانند B' روی $\overrightarrow{AQ}$ هست که

$$\overline{AB'} \cong \overline{DE} \; .$$

(۳) چون از قبل می‌دانیم که $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ از (ض ز ض) نتیجه می‌شود که

$$\triangle AB'C \cong \triangle DEF \; .$$

(بدین ترتیب قسمت اول برنامهٔمان را تکمیل کرده‌ایم.)

(٤) $\overline{BB'}$ خط $\overleftrightarrow{AC}$ را در نقطه‌ای مانند G می‌برد (زیرا B و B' در دو طرف $\overleftrightarrow{AC}$ اند).

اثبات حالا به‌چند حالت برمی گردد. (الف) $A-G-C$ (مثل شکل ٦.١٠) (ب) $A=G$ (ج) $G-A-C$. البته دو حالت دیگر $G=C$ و $A-C-G$ هم موجود است اما اساساً همان (ب) و (ج) می‌باشند.

با اثبات حالت (الف) شروع می کنیم.

(٥) $\angle ABG \cong \angle AB'G$ (بنا بر قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین)

(٦) $\angle CBG \cong \angle CB'G$ (به‌همان دلیل)

(٧) G درون $\angle ABC$ است. (چون در حالت (الف) داریم $A-G-C$ این مطلب از قضیهٔ ٤ بخش ٤.٢ نتیجه می‌شود).

(٨) G درون $\angle AB'C$ است (به‌همان دلیل)

(٩) بنا بر (٥)، (٦)، (٧) و (٨) و قضیهٔ ٣، بخش ٥.٣، نتیجه می‌شود که

$$\angle ABC \cong \angle AB'C \ ,$$

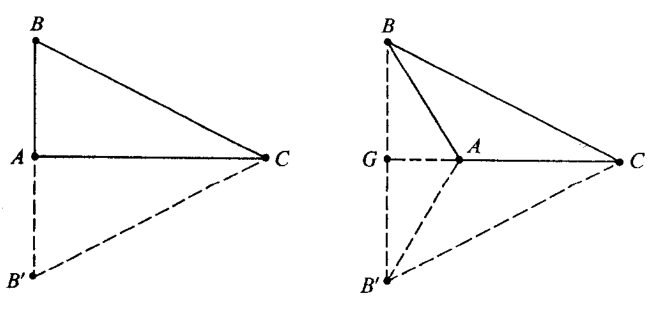
(١٠) بنا بر (ض ز ض) نتیجه می‌شود که

$$\triangle ABC \cong \triangle AB'C \ .$$

(١١) بنا بر (٣) و (١٠)، داریم

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \ . \quad \square$$ (دلیل؟)

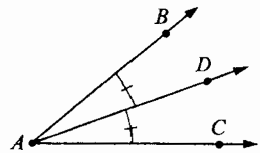
برای حالتهای (ب) و (ج) شکلها چنین خواهند بود:



شکل ٦.١١

این حالات را بعنوان مسئله می گذاریم.

صرف‌نظر از جزئیات، **نیمساز** یک زاویه نیمخطی است در درون آن که زاویه را به‌دو قسمت قابل انطباق تقسیم می کند، مثل این:

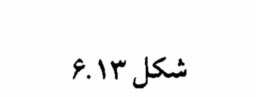


شکل ۶.۱۲

یعنی $\overrightarrow{AD}$ زاویهٔ $\angle BAC$ را **نصف** می کند اگر (۱) D درون $\angle BAC$ باشد و (۲) $\angle DAC \cong \angle BAD$.

■ **قضیه ۴**. هر زاویه درست یک نیمساز دارد.

اثبات. $\angle ABC$ مفروض است. بدون اینکه از کلیت کاسته شود فرض می کنیم که $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (همیشه می‌توان روی دو ضلع زاویه دو نقطهٔ هم فاصله از رأس انتخاب کرد.)

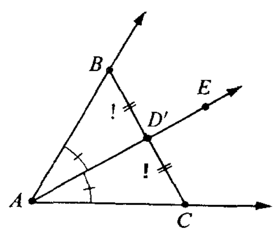


شکل ۶.۱۳

فرض کنید D نقطهٔ وسط $\overline{BC}$ باشد، پس D درون $\angle BAC$ است. (چرا؟) و بنا بر قضیهٔ ض ض ض، $\triangle ADB \cong \triangle ADC$. بنابراین $\angle CAD \cong \angle BAD$؛ و لذا $\overrightarrow{AD}$ زاویهٔ $\angle BAC$ را نصف می کند.

بدین ترتیب نشان داده‌ایم که هر زاویه حداقل یک نیمساز دارد. این نصف قضیه ما است. حال باید نشان دهیم که $\angle BAC$ حداکثر یک نیمساز دارد. برای این کار کافی است نشان دهیم که هر نیمساز $\angle BAC$ از نقطهٔ D وسط $\overline{BC}$ می گذرد.

فرض کنید که $\overrightarrow{AE}$ زاویهٔ $\angle BAC$ را نصف کند. پس E درون $\angle BAC$ است. بنا بر قضیه قطعه‌بر (قضیه ۳ بخش ٤.۳) ضلع $\overrightarrow{AE}$ ضلع $\overline{BC}$ را در نقطه‌ای بین B و C مانند D' می‌برد. بنابر اصل (ض ز ض) داریم $\triangle AD'C \cong \triangle AD'B$. پس $\overline{D'C} \cong \overline{D'B}$ و D' نقطهٔ وسط $\overline{BC}$ است. چون $\overline{BC}$ فقط یک نقطهٔ وسط دارد، در نتیجه $\angle BAC$ فقط یک نیمساز دارد، که باید ثابت می‌کردیم. □



شکل ۶.۱۴

مجموعه مسائل ۶.۲

۱. اثبات قضیهٔ ض ض ض را کامل کنید.

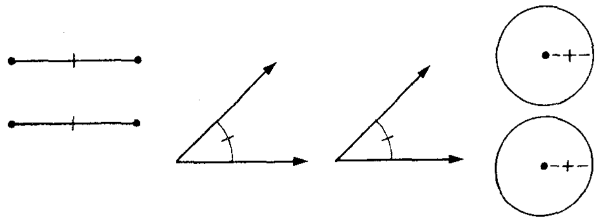
※ ۲. فرض کنید «اصل ض ز ض خاص» بدین صورت باشد که در اصل ض ز ض شرط متمایز بودن مثلثها اضافه شده است. نشان دهید که می‌توان صورت کلی اصل ض ز ض را از اصل ض ز ض خاص نتیجه گرفت.

۶.۳ توضیحاتی در مورد اصطلاحات

زبانی که با آن در این کتاب قابلیت انطباق را بررسی می کنیم با زبانی که در بیشتر نوشتجات به کار می‌رود فرق دارد و ارزش آن را دارد که دلایل اختلافات را بررسی کنیم.

قبلاً دلیل اینکه چرا در مورد قابلیت انطباق مثلثها، بخاطر اینکه تناظرها دارای برخی خواص‌اند، صحبت کردیم نه صورت مجرد رابطهٔ قابلیت انطباق. بطور خلاصه دلیلش این بود که اولی منظور و احتیاج را برآورده می کرد.

در مورد پاره‌خطها و زوایا منظور ما از قابلیت انطباق کمی فرق می کند. فرض کنید یک زوج پاره‌خط، یک زوج زاویه، و یک زوج دایره به‌ما داده شده باشد و به‌معنی که از شکلهای زیر برمی‌آید با هم جور باشند:



شکل ۶.۱۵

بنابراین می‌توان وضعیت آنها را به‌دو روش بیان کرد.

(۱) می‌توان گفت (به‌پیروی از بیانات متداول) که پاره‌خطها مساویند و همین برای زوایا و دوایر.

(۲) می‌توان گفت (به‌پیروی از بیانات این کتاب) که در هریک از سه حالت شکلها قابل انطباقند.

همان افرادی که دو پاره‌خط با طولهای برابر را مساوی می‌نامند دو مثلث با مساحت برابر را نیز مساوی می‌نامند.

دو اشکال در مورد استفاده غیر دقیق تساوی برای برابر بودن طول، اندازهٔ زاویه و مساحت وجود دارد. اولین اشکال این است که اگر از تساوی به‌این سبک استفاده کنیم، در زبان کلمه‌ای باقی نمی‌ماند که بتوانیم بگوییم A ـــــ بدون اگرها، اماها یا بدون قید و شرط و طفره رفتن ـــــ همان B است. این رابطهٔ دوم را **یکی بودن منطقی (اتحاد)** می‌نامند. ممکن است درمرحلهٔ اول این طور به‌نظر آید که اگر دو شیئی دقیقاً یکی باشند نمی‌توان دو تا از آنها داشت. اما به‌مجرد آنکه ریاضیات شروع به‌استفاده زیاد از علائم کرد، اتحاد منطقی (یکی بودن منطقی) اهمیت یافت. مثلاً هریک از عبارات

$$\frac{۲\sqrt{۳}+۱}{۱۱} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲\sqrt{۳}-۱}$$

نمایش یک عددند. ناگفته پیداست که بیان آنها فرق دارد اما به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که نمایش یک عدد می‌باشند؛ و این همان منظور ما از نوشتهٔ زیر است

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۳} - ۱} = \frac{۲\sqrt{۳} + ۱}{۱۱}$$

رابطه‌ای که در برابری فوق با علامت = نمایش دادیم اتحاد منطقی است.

مفهوم اتحاد منطقی $A=B$ بقدری مهم است و مهم می‌شود که برای خود عنوانی پیدا کرده است. به این دلیل در ریاضیات امروز (مدرن) کلمه تساوی و علامت = به یک معنی به کار می‌رود: منظور از آنها دقیقاً یکی بودن است.

دومین اشکال در استفادهٔ غیردقیق از کلمه تساوی در آنجاست که ما را در وضعیتی قرار می‌دهد که برای یک مفهوم دو کلمه به کار می‌بریم، در حالیکه یک کلمه کافی است. رابطهٔ هم‌ارزی اصلی در هندسه همان قابلیت انطباق است. ممکن است در رابطه با انواع مختلف شکلها تعاریف تکنیکی مختلفی به کار بریم اما ریشهٔ مفاهیم یکی است: دو شکل قابل انطباقند هر گاه یکی را بتوان با حرکت صلب روی دیگری قرار داد. رابطهٔ هم‌ارزی اصلی در هندسه به‌جایی رسیده است که عنوانی داشته باشد و ظاهراً قابلیت انطباق را بر گزیده‌اند.

بدون شک، به‌این دلایل بود که هیلبرت در کتاب **مبانی هندسه‌اش** اصطلاحی را که ما در این کتاب به کار می بریم قبول کرد. این یک مسألهٔ توضیحی است نه یک مسألهٔ منطقی.

یک اصطلاح خوب کلمات را به‌بهترین نحو با مفاهیم جور می کند، بطوریکه کلمات اصلی در یک تناظر یک‌بیک با مفاهیم اصلی می باشند.

باید بیاد داشت که تعبیر مؤکد ریاضی از کلمهٔ **تساوی** به‌معنی «**درست یکی بودن**» یک استفادهٔ تکنیکی است. در زبان عادی فارسی تساوی را حتی آزادنه‌تر از اقلیدس به کار می برند. مثلاً وقتی می گویند همهٔ مردم در برابر قانون مساوی هستند منظور این نیست که همهٔ مردم یک نفرند یا هریک نسخه‌ای از دیگری است. منظور این است که همهٔ مردم از حقوق، مساوی برخوردارند.

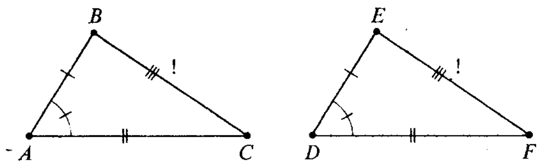
در واقع فقط در ریاضیات و منطق برای مفهوم «یکی بودن» به‌علامتی نیاز داریم و حتی در ریاضیات و منطق هم به‌آن نیازی نبود تا اینکه استفادهٔ زیاد از علائم پیشرفت کرد. این پیشرفت خیلی بعد از اقلیدس حاصل شد و زمانی که نامناسب بودن اصطلاح اقلیدس معلوم شد بر عادت چندین ساله به‌حفظ اصطلاح اقلیدس فائق آمد.

۶.۴ مستقل بودن اصل ض‌زض

دیده‌ایم که قضیهٔ ز ض ز و قضیهٔ ض ض ض را می‌توان برمبنای اصل ض‌زض ثابت کرد. این سؤال مطرح می‌شود که آیا اصل ض ز ض را می‌توان یک قضیه نمود یعنی آن را برمبنای اصولی که قبل از آن آمده است ثابت کرد.

از یک سری ملاحظات کلی عکس آن مطرح می‌شود. اگر اصل خط کش را دوباره در نظر بگیریم می بینیم که هر دفعه با یک خط سروکار دارد. به‌نظر نمی‌رسد که بین فاصله‌ها در امتداد یک خط و فاصله‌ها در امتداد خط دیگری رابطه‌ای باشد. اولین اصلی که چنین رابطه‌ای را بیان می کند ض

ز ض است؛ ض‌ز ض در بین مطالب دیگر بیان می کند که اگر $\overline{AB} \cong \overline{DE}$، $\angle A \cong \angle D$ و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ آنگاه $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.



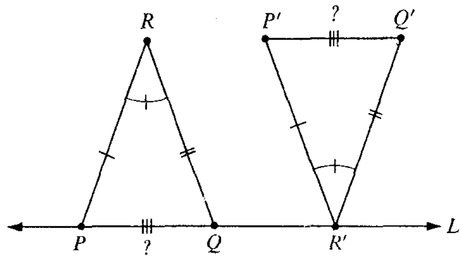
شکل ۶.۱۶

اینجا، جز در حالات خیلی خاص فاصله‌های BC و EF در امتداد خطوط مختلفی اندازه گیری می‌شوند.

بعلاوه ملاحظه می کنیم که در اصول تابع اندازهٔ زاویه اصلاً ذکری از فاصله نمی‌شود. از این بررسیها به‌این نکته پی می‌بریم که ض ز ض حقیقتاً اطلاع جدیدی به‌ما می‌دهد.

فرض کنید برای یک ساختار ریاضی دسته‌ای از اصول مانند $P_۱$ و $P_۲$ و .... و P_n داده شده باشد. گویند P_n از اصول دیگر $P_۱$، ....، P_n مستقل است هر گاه دستگاه ریاضی باشد که $P_۱$ و $P_۲$ و .... و $P_{n-۱}$ برقرار باشد اما P_n برقرار نباشد. مثلاً این اصل که اعضای $a \neq ۰$ دارای عضو معکوس $a^{-۱}$ اند از بقیهٔ اصول میدان مستقل است. ساده‌ترین راه اثبات آن توجه به‌این مطلب است که اعداد صحیح در همهٔ اصول میدان بجز این اصل صدق می کند. با ارائهٔ مثالی از همین نوع نشان می‌دهیم که ض ز ض از اصول قبلی هندسهٔ متریک مستقل است.

یک ساختمان $[S, P, L, d, m]$ را که در همهٔ اصول هندسهٔ متریک صدق می کند در نظر می گیریم. این دستگاه را می‌توان فضای سه‌بعدی مختصاتی با تعاریف معمولی فاصله و اندازهٔ زاویه تصور کرد. تابع فاصلهٔ جدید d' را با مختصر تغییری در تابع فاصلهٔ معمولی d تعریف می کنیم. به‌روش زیر عمل می کنیم. خط خاصی مانند L را به تصادف انتخاب می کنیم. توافق می کنیم که اگر P و Q هر دو روی L باشند $d'(P,Q) = ۲\, d(P,Q)$ و در غیر این صورت $d'(P,Q)$ همان فاصلهٔ قدیمی $d(P,Q)$ باشد. واضح است که d' روی هر خط بجز احتمالاً روی L در اصل خط کش صدق می کند. و روی L هم اصل خط کش برقرار است. اگر دستگاه مختصاتی مانند f برای d قدیم کارایی داشته باشد آنگاه می‌نویسیم $f'(P) = ۲f(P)$ ودستگاه مختصات جدید برای d' کارایی دارد.



شکل ۶.۱۷

حال اصل ض ز ض برای m قدیم و d' جدید برقرار نیست (شکل ۶.۱۷) باید داشته باشیم $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$ زیرا $d'(R, P) = d'(R', P')$، $\angle R \cong \angle R'$ و $d'(R,Q) = d'(R',Q')$. اما قابلیت انطباق برای مثلثها برقرار نیست، زیرا $d'(P,Q) = 2d'(P',Q')$.

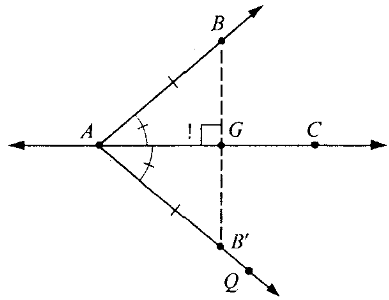
همچنین می‌توان مستقل بودن ض ز ض را با تغییر ندادن d و تعریف اندازهٔ زاویه‌ای جدید m' برای زوایای با رأس در نقطهٔ مشخصی مانند P نشان داد. اما مثالهای نوع دوم توضیح و آزمودن آنها مشکل‌تر است.

۶.۵ وجود خطوط عمود

ممکن است توجه کرده باشید که در حالت (الف) قضیه ض ض ض داشتیم $\overleftrightarrow{GB} \perp \overleftrightarrow{AC}$. دلیل آن چنین است. بنابر ض ز ض داریم $\triangle AGB \cong \triangle AGB'$. بنابراین $\angle AGB \cong \angle AGB'$. چون این دو زاویه مکمل یکدیگرند $\angle AGB$ بر مکمل خود قابل انطباق است و لذا زاویه‌ای قائمه می‌باشد. بنابراین اثبات ما برای قضیهٔ ض ض ض بطور ضمنی شامل اثبات این مطلب است که از هر نقطه خارج هر خط می‌توان خطی رسم کرد که بر خط مفروض عمود باشد. این مطلب ضمنی را بصورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

■ **قضیهٔ ۱**. اگر خطی و نقطه‌ای در خارج آن مفروض باشد آنگاه خطی هست که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد و بر خط مفروض عمود است.

اثبات. فرض کنید L آن خط و B نقطه‌ای در خارج آن باشد. فرض کنید A و C دو نقطهٔ دلخواه روی L باشند. بنابر قضیه ساختن زاویه، نقطه‌ای مانند Q هست که (۱) B و Q در دو طرف Lاند، و (۲) $\angle BAC \cong \angle QAC$.



شکل ۶.۱۸

بنا بر قضیهٔ ساختن پاره‌خط، نقطه‌ای مانند B' روی $\overrightarrow{AQ}$ هست که $\overline{AB}\cong\overline{AB'}$ چون B و B' در دو طرف $L=\overleftrightarrow{AC}$اند، $\overline{BB'}$ خط L را در نقطه‌ای مانند G می‌برد. اکنون دو حالت اتفاق می‌افتد:

(۱) $G\neq A$. در این حالات بنابر ض ز ض داریم $\triangle AGB \cong \triangle AGB'$. بنابراین $\angle AGB\cong\angle AGB'$. چون این دو زاویه مکمل یکدیگرند هریک از آنها یک زاویهٔ قائمه است، پس $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{AC}$، که می‌خواستیم.

(۲) $G=A$. در این حالت $\angle BGC \cong \angle BAC$ و $\angle QAC \cong \angle B'GC$. بنابراین $\angle BGC \cong \angle B'GC$؛ و مثل حالت (۱) نتیجه می‌شود که $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{AC}$. □

توجه کنید که حالت (۲) ناخوشایند است زیرا A و C را روی L به تصادف انتخاب کرده‌ایم. اما این امکان دارد که ما پای عمود را برگزیده باشیم.

همچنین توجه کنید که اگر از اصل ساختن زاویه $(M-۳)$ با توانائی کامل آن استفاده کنیم، بسادگی می‌توانیم نشان دهیم که اگر L خطی در صفحهٔ E و A نقطه‌ای روی L باشد همیشه خطی در E هست که شامل A است و بر L عمود است. ولی تا بحال به‌این مطلب توجه داشته‌ایم که از «اصول نقاله» استفاده نکنیم و در عوض از چند قضیهٔ اولی که برمبنای آنها می‌باشد، استفاده کنیم و لذا تاکنون قضیهٔ فوق را رسماً بیان نکرده‌ایم. (قضیهٔ ٤ بخش ۸.۳ را ببینید.)

فصل ۷

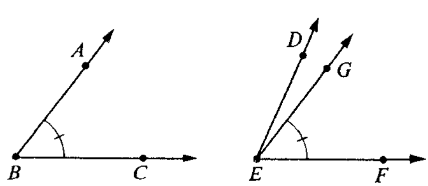
نامساوی‌های هندسی

تا به‌حال، در مطالعه هندسه، فقط با انطباق از مثلث سروکار داشته‌ایم؛ قضایائی داشتیم که بیان می‌کردند تحت بعضی شرایط ما می‌توانیم نتیجه بگیریم که دو پاره‌خط (یا دو زاویه) قابل انطباق‌اند.

اکنون شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آنها بتوانیم بگوئیم پاره‌خطی از پاره‌خط دیگر بزرگتر است، یا یک زاویه بزرگتر از زاویه دیگر است.

ابتدا، نامساوی‌های بین زوایا را به‌وسیله اندازه‌های آنها تعریف می‌کنیم. یعنی، $\angle ABC < \angle DEF$ اگر $m\angle ABC < m\angle DEF$. البته، واضح است که همین ایده را به‌سادگی می‌توان برحسب انطباق، بدون هیچ توجهی به‌منشأ مفهوم انطباق تعریف کرد.

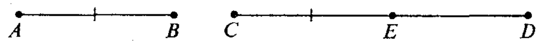
می‌توان گفت که $\angle BAC < \angle DEF$ اگر نقطه‌ای مانند G، درون $\angle DEF$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\angle ABC \cong \angle GEF$.



شکل ۷.۱

مشابه آن، برای پاره‌خط‌ها، گوئیم $\overline{AB}$ کوچکتر از $\overline{CD}$ است $(\overline{AB}<\overline{CD})$ اگر فاصله AB کمتر از فاصله CD باشد. یا ممکن است نادیده بگیریم که مفهوم انطباق از کجا آمده است، و

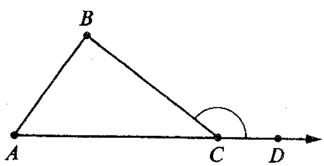
بگوئیم اگر نقطه‌ای مانند E، بین C و D وجود داشته باشد به‌طوری که $\overline{CE} \cong \overline{AB}$، آنگاه $\overline{AB}<\overline{CD}$.



شکل ۷.۲

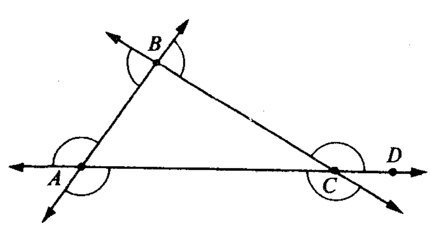
اکنون به بررسی نامساوی‌های هندسی در یک مثلث ثابت می‌پردازیم.

در شکل زیر، زاویه $\angle BCD$ یک **زاویه خارجی** $\triangle ABC$ نامیده می‌شود. به‌عبارت دقیقتر، اگر $A-C-D$، آنگاه $\angle BCD$ یک **زاویه خارجی** $\triangle ABC$ **است**.



شکل ۷.۳

همان‌طور که در شکل زیر نشان داده شده است، هر مثلث شش زاویه خارجی دارد، و این شش زاویه تشکیل سه زوج زاویه متقابل به‌رأس می‌دهند.

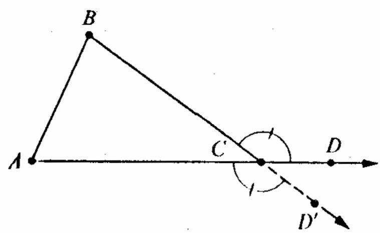


شکل ۷.۴

البته، نتیجه می گیریم که در هر رأس دو زاویه خارجی همیشه قابل انطباق‌اند. زاویه‌های $\angle A$ و $\angle B$ در $\triangle ABC$ زوایای داخلی غیرمجاور زاویه خارجی به‌رأس C نامیده می‌شوند؛ به‌طور مشابه $\angle A$ و $\angle C$ زوایای داخلی غیرمجاور زاویه خارجی به‌رأس B می‌باشند؛ و همین طور برای حالت سوم.

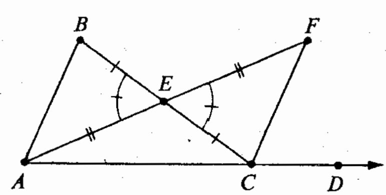
■ **قضیه ۱.** در هر مثلث هر زاویه خارجی از هریک از زوایای داخلی غیرمجاور آن بزرگتر است.

بیان دیگر. $\triangle ABC$ مفروض است. اگر $A-C-D$، آنگاه $\angle BCD > \angle B$.
ابتدا مشاهده می کنیم که بیان دیگر واقعاً تمام منظور قضیه را می‌رساند.



شکل ۷.۵

اگر درستی بیان مجدد را ثابت کنیم، آنگاه نشان داده‌ایم که زاویه خارجی دیگر رأس C نیز بزرگتر از $\angle B$ است، زیرا دو زاویه خارجی رأس C قابل انطباق‌اند. تنها به‌وسیله تعویض نمادها، همچنین نتیجه می گیریم که $\angle ACD' > \angle A$؛ و این بدان معنی است که زاویه خارجی رأس C از هر زاویه داخلی غیرمجاور آن بزرگتر است. اکنون به‌اثبات «بیان دیگر» می پردازیم.
فرض کنیم E وسط $\overline{BC}$ باشد.



شکل ۷.۶

بنا بر قضیه ۲-C، نقطه‌ای مانند F وجود دارد به‌طوری که $A-E-F$ و $\overline{EA} \cong \overline{EF}$.
$\triangle AEB$ و $\triangle FEC$ را در نظر می گیریم. اکنون بنا به‌فرض برای E، $\overline{EB} \cong \overline{EC}$؛ و بنا به‌فرض برای F، $\overline{EA} \cong \overline{EF}$؛ و $\angle AEB \cong \angle FEC$، زیرا زوایای متقابل به‌رأس قابل

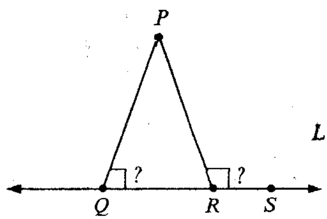
انطباق‌اند. بنابرض-ز-ض نتیجه می گیریم که تناظر $AEB \leftrightarrow FEC$ یک انطباق است؛ یعنی، $\triangle AEB \cong \triangle FEC$. بنابراین، $\angle B \cong \angle BCF$.

بنابر قضیه ۷، بخش ۴.۲، می‌دانیم که F درون $\angle BCD$ واقع است. لذا $\angle BCF < \angle BCD$؛ و بنابراین $\angle B < \angle BCD$، و اثبات کامل است. □

نتیجه ۱-۱. خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن منحصر به‌فرد است.

بیان دیگر. فرض کنیم L یک خط باشد، و P نقطه‌ای غیرواقع بر L باشد. در این صورت فقط یک خط وجود دارد که از P می گذرد و بر خط L عمود است.

اثبات. فرض کنیم که دو خط وجود داشته باشند که از P گذشته و بر L عموداند، و L را در دو نقطه Q و R قطع کرده‌اند. نشان خواهیم داد که این امکان ندارد.



شکل ۷.۷

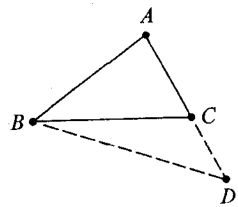
فرض کنیم S نقطه‌ای روی L باشد به‌طوری که $Q-R-S$ سپس $\angle PRS$ یک زاویه خارجی $\triangle PQR$؛ و $\angle PQR$ یکی از زوایای داخلی غیر مجاور آن است. این غیر ممکن است، زیرا هر دو زاویه $\angle PQR$ و $\angle PRS$ قائمه هستند. (قضیه ۶ از بخش ۵.۱ را ببینید.) □

■ **قضیه ۲.** اگر دو ضلع مثلثی قابل انطباق نباشند، آنگاه زاویه‌های مقابل آنها قابل انطباق نیستند، و زاویه بزرگ‌تر مقابل به‌ضلع بزرگ‌تر است.

بیان دیگر. $\triangle ABC$ مفروض است. اگر $\overline{AB} > \overline{AC}$، آنگاه $\angle C > \angle B$.

اثبات. فرض کنیم D نقطه‌ای روی $\overrightarrow{AC}$ باشد، به‌طوری که $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. سپس همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، $A-C-D$، زیرا $\overline{AD} \cong \overline{AB} > \overline{AC}$. چون زوایای مجاور به‌قاعده در مثلث متساوی‌الساقین قابل انطباق‌اند، داریم

$$\angle ABD \cong \angle D \qquad (1)$$



شکل ۷.۸

چون $A-C-D$، بنابر قضیه ۵ بخش ٤.۲ نتیجه می گیریم که C درون زاویه $\angle ABD$ واقع است. بنابراین $\angle ABC<\angle ABD$، (۲)؛ لذا $\angle ABC<\angle D$، (۳).

چون $\angle ACB$ یک زاویه خارجی از $\triangle BCD$ است، داریم $\angle D<\angle ACB$، (٤).

بنابر (۳) و (٤)، $\angle ABC<\angle ACB$. پس، در $\triangle ABC$ داریم $\angle B<\angle C$، که اثبات را کامل می کند. □

■ **قضیه ۳. اگر دو زاویه از مثلثی قابل انطباق نباشند، آنگاه اضلاع مقابل آنها نیز قابل انطباق نیستند، و ضلع بزرگتر مقابل به‌زاویه بزرگتر است.**

بیان دیگر. $\triangle ABC$ مفروض است. اگر $\angle B<\angle C$، آنگاه $\overline{AC}<\overline{AB}$.

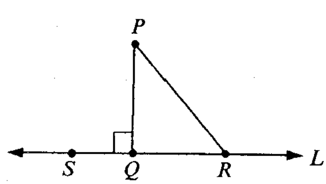
اثبات. (۱) اگر $\overline{AB} \cong \overline{AC}$، آنگاه بنا به‌قضیه مثلث متساوی‌الساقین نتیجه می گیریم که $\angle B \cong \angle C$؛ و این نادرست است.

(۲) اگر $\overline{AC}>\overline{AB}$، آنگاه بنا بر قضیه ۲ نتیجه می گیریم که $\angle B>\angle C$؛ و این نیز نادرست است.

تنها امکان باقی‌مانده این است که $\overline{AC}<\overline{AB}$، و اثبات کامل است. □

■ **قضیه ۴. کوتاهترین پاره‌خطی که یک نقطه را به یک خط وصل می کند پاره‌خط عمود بر خط است.**

بیان دیگر. فرض کنیم L یک خط، و P نقطه‌ای غیرواقع بر L باشد، اگر Q پای عمود مرسوم از P بر خط L باشد، آنگاه به‌ازای هر نقطه دیگر R روی L داریم، $\overline{PQ}<\overline{PR}$.



شکل ۷.۹

اثبات. فرض کنیم S نقطه‌ای روی L باشد به‌طوری که $S-Q-R$.

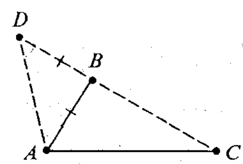
پس $\angle PQS$ یک زاویه خارجی از $\triangle PQR$ است. بنابراین $\angle PQS > \angle PRQ$. چون $\overline{PQ} \perp L$، مشخص است که $\angle PQS \cong \angle PQR$؛ لذا $\angle PQR > \angle PRQ$. پس بنا بر قضیه قبلی، نتیجه می گیریم که $\overline{PR} > \overline{PQ}$، و اثبات کامل است. □

■ قضیه ۵. نامساوی مثلثی.

در هر مثلث، مجموع اندازه‌هاي هر دو ضلع از اندازه ضلع سوم بزرگتر است.

بیان دیگر. اگر A، B، و C روی یک خط نباشند، آنگاه $AB+BC>AC$.

اثبات. فرض کنیم D نقطه‌ای روی $\overrightarrow{CB}$ باشد به‌طوری که $C-B-D$ و $BD=BA$. پس $CD=AB+BC$.



شکل ۷.۱۰

اکنون بنا بر قضیه ۵ بخش ۴.۲، نقطه B درون $\angle DAC$ واقع است؛ بنابراین $\angle DAB<\angle DAC$ (۲).

چون $\triangle BAD$ متساوی‌الساقین است، $BA=BD$، در نتیجه، $\angle BAD \cong \angle D$؛ بنابراین $\angle D<\angle DAC$ (۳).

با به کار بردن قضیه ۳ در $\triangle ADC$، داریم $\overline{CD}>\overline{AC}$؛ که می توان آن را بر حسب فاصله به‌صورت زیر بیان کرد،

(٤) $CD>AC$

بنا بر (۱) و (٤)، داریم $AB+BC>AC$، و اثبات کامل است. □

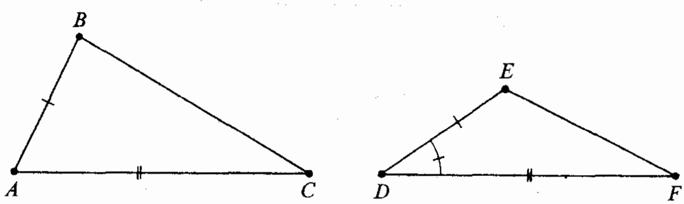
توجه کنید که این قضیه بر حسب فاصله بیان و ثابت شد، و از بیان قضیه بر حسب انطباق پاره‌خطها مناسب‌تر بود.

در اینجا از روش چند فصل قبل منحرف شده‌ایم. دلیل این انحراف در بخش بعد توضیح داده خواهد شد. (سؤالاتی که در اینجا مطرح می‌شوند پیچیده‌تر از آن هستند که شما فکر کنید.)

■ قضیه ۶. قضیه لولا.[۱]

اگر دو ضلع یک مثلث به‌ترتیب با دو ضلع مثلث دومی قابل انطباق باشند، و زاویه شامل آن دو ضلع از مثلث اول بزرگ‌تر از زاویه شامل آن دو ضلع در مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع مقابل به‌آن زاویه از مثلث اول بزرگ‌تر از ضلع مقابل به‌آن زاویه از مثلث دوم است.

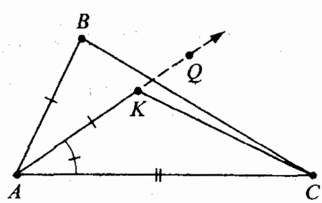
بیان دیگر. مثلثهای $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مفروض‌اند. اگر $\overline{AB}\cong\overline{DE}$، $\overline{AC}\cong\overline{DF}$، و $\angle A>\angle D$، آنگاه $\overline{BC}>\overline{EF}$.



شکل ۷.۱۱

اثبات.

(۱) ادعا می کنیم که نقطه‌ای مانند K درون $\angle BAC$ وجود دارد، به‌طوری که $\triangle AKC \cong \triangle DEF$.



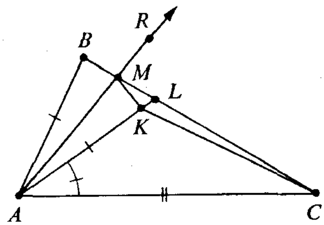
شکل ۷.۱۲

برای نشان دادن آن، ابتدا در طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ که B واقع است نقطه‌ای مانند Q انتخاب می کنیم به‌طوری که $\angle QAC \cong \angle EDF$. (بنا بر قضیه-ساختن زاویه بدست می‌آید.) چون $\angle A>\angle D$، Q درون $\angle BAC$ است؛ علاوه بر آن هر نقطه از $\overrightarrow{AQ}-A$ درون $\angle BAC$ است. فرض کنیم K نقطه‌ای روی $\overrightarrow{AQ}$ باشد به‌طوری که $\overline{AK} \cong \overline{DE}$، بنا بر ض-ز-ض، داریم

۱. The Hinge Theorem

$\triangle AKC \cong \triangle DEF$، که همان چیزی است که می‌خواستیم.

(۲) سپس، فرض کنیم $\overrightarrow{AR}$ نیمساز $\angle BAK$ باشد.



شکل ۷.۱۳

(قضیه ٤ از بخش ٦.٢ را ببینید، که طبق آن هر زاویه دقیقاً یک نیمساز دارد.) بنا بر قضیه قطعه‌بر، $\overrightarrow{AK}$ ضلع $\overline{BC}$ را در نقطه‌ای مانند L می‌برد؛ و با استفاده دیگری از قضیه قطعه‌بر، $\overrightarrow{AR}$، پاره‌خط $\overline{BL}$ را در نقطه‌ای مانند M می‌برد.

(۳) بنا بر ض-ز-ض، داریم $\triangle AKM \cong \triangle ABM$. بنابراین $MB=MK$. بنا بر قضیه ۵، می‌دانیم که

$$CK<CM+MK \quad .$$

لذا

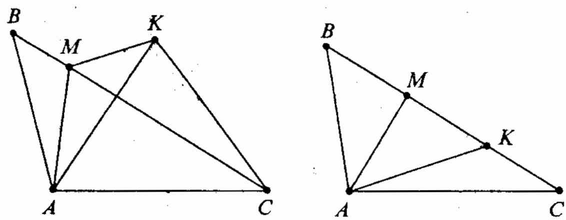
$$CK<CM+MB،$$

زیرا $MB=MK$. اکنون $CM+MB=CB$، زیرا $C-M-B$. و $CK=EF$، زیرا $\triangle AKC \cong \triangle DEF$. بنابراین سرانجام بدست می‌آید $EF<CB$، که همان چیزی است که می‌خواستیم. □

اثبات فوق به صورتی که آمده است صحیح و کامل می‌باشد، امّا برمبنای دلایلی ظریفتر از آن است که به‌آن ظنین شوند.

در آخرین شکلهای داده شده، نمایش تمام حالتهای ممکن نشان داده نشده است. شکلها ممکن است شبیه یکی از شکلهای زیر باشند. اثباتی که داده شد کلمه به کلمه برای شکل سمت چپ در زیر کارآیی دارد، و برای شکل سمت راست در زیر فقط لازم است دلیل دیگری برای نامساوی $CK<CM+MK$ ارائه دهیم.

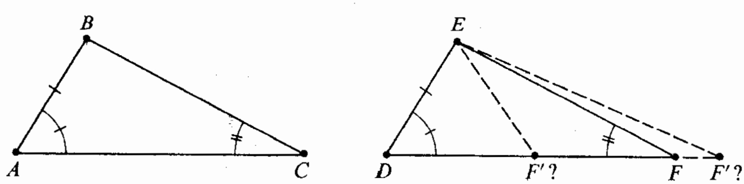
سرانجام، مشاهده می کنیم که قضیه ض-ز-ز را تنها با استفاده از قضیه اساسی زاویه خارجی می‌توان ثابت کرد، بدون آن که از اصل توازی یا قضیه‌هائی که برمبنای آن هستند استفاده کنیم.



شکل ۷.۱۴

■ **قضیه ۷. قضیه ض-ز-ز. فرض کنیم یک تناظر بین دو مثلث داده شده است. اگر دو زاویه و یک ضلع از مثلث اول با اجزاء نظیرش از مثلث دوم قابل انطباق باشند، آنگاه این تناظر یک انطباق است.**

بیان دیگر. $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مفروض‌اند، و $ABC \leftrightarrow DEF$. اگر $\overline{AB} \cong \overline{DE}$، $\angle A \cong \angle D$، و $\angle C \cong \angle F$، آنگاه $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



شکل ۷.۱۵

(توجه داشته باشید حالتی را که ضلع مفروض بین دو زاویه قراردارد قبلاً به‌وسیله ز ض ز ثابت شده است.)

اثبات. فرض کنیم F' نقطه‌ای روی $\overrightarrow{DF}$ باشد، به‌طوری که $\overline{DF'} \cong \overline{AC}$. بنا بر ض-ز-ض داریم

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF'$$

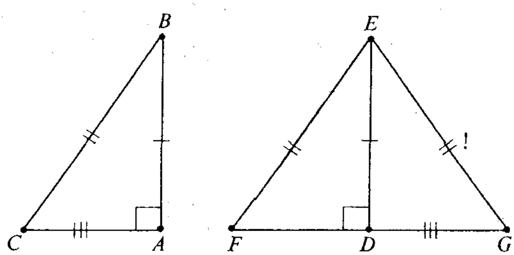
بنابراین $\angle F' \cong \angle C \cong \angle F$. اما باید یکی از حالتهای $D-F-F'$ (۱)، $D-F'-F$ (۲)، یا $F=F'$ (۳) را داشته باشیم: اگر $D-F-F'$، آنگاه $\angle F$ یک زاویه خارجی $\triangle EFF'$ است، لذا $\angle F > \angle F'$، که نادرست است. اگر $D-F'-F$، آنگاه $\angle F'$ یک زاویه خارجی $\triangle EFF'$ است، و $\angle F' > \angle F$، که این نیز نادرست است. بنابراین $F'=F$، و

$\triangle DEF \cong \triangle ABC$، که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

یک مثلث ، مثلث قائم‌الزاویه نامیده می‌شود اگر یکی از زاویه‌های آن زاویه قائمه باشد. بنا بر نتیجه ۱ـ۱ می‌دانیم که هر مثلث حداکثر یک زاویه قائمه دارد. در یک مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به‌زاویه قائمه **وتر** نامیده می‌شود، و دو ضلع دیگر ساق‌ها نامیده می‌شوند. قضیه زیر به‌اصل توازی بستگی ندارد.

■ **قضیه ۸. قضیه وتر ـ ساق. یک تناظر بین دو مثلث قائم‌الزاویه داده شده است. اگر وتر و یک ساق یکی از مثلثها با اجزاء نظیرش از مثلث دیگر قابل انطباق باشند، آنگاه این تناظر یک انطباق است.**

بیان دیگر. $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مفروض‌اند، به‌طوری که $m\angle A = m\angle D = ۹۰$، $\overline{AB} \cong \overline{DE}$، و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. آنگاه $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



شکل ۷.۱۶

اثبات. فرض کنیم G نقطه‌ای باشد به‌طوری که $F-D-G$ و $\overline{DG} \cong \overline{AC}$. بنا بر اصل زوایای مکمل، $\angle EDG$ یک زاویه قائمه است، و $\angle EDG \cong \angle BAC$. بنا بر ض‌ـ‌ز‌ـ‌ض داریم $\triangle DEG \cong \triangle ABC$. در نتیجه $\overline{EG} \cong \overline{BC}$ بنابراین $\overline{EG} \cong \overline{EF}$. بنا بر قضیه مثلث متساوی‌الساقین (قضیه ۱ بخش ۶.۲) داریم $\angle F \cong \angle G$ پس طبق قضیه ض ز ز، $\triangle DEG \cong \triangle DEF$. بنابراین $\triangle DEF \cong \triangle ABC$، که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

فصل

۸

روش اقلیدس: انطباق بدون فاصله

۸.۱ اصول ترکیبی[۱] (اصول هندسه محض)

بنا به‌آنچه تا کنون در این کتاب عمل کرده‌ایم، مشاهده می کنیم که اعداد حقیقی نقش اصلی را بازی می کنند.

یادآوری می کنیم که ساختمان $[S,L,P,d,m]$ است که در آن d و m توابع با مقادیر حقیقی هستند که به‌ترتیب برای زوج‌های نقاط و زوایا تعریف شده‌اند.

مفاهیم انطباق پاره‌خطها، بینیت برای نقاط روی یک خط، و انطباق زوایا، بر حسب فاصله و اندازه زوایا به‌صورت زیر تعریف شدند.

۱. $A-B-C$ به‌این معنی است (بنا بر تعریف) که A، B و C نقاطی متمایز روی یک خط می باشند، و

$$AB+BC=AC$$

(که در آن PQ فاصله $d(P\text{و}Q)$ بین P و Q است)

۲. پاره‌خط $\overline{AB}$ اجتماع A و B و همه نقاط بین A و B است.

۳. $\overline{AB}\cong\overline{CD}$ به‌این معنی است (بنا بر تعریف) که $AB=CD$.

۴. $\angle A\cong\angle B$ به‌این معنی است (بنا بر تعریف) که $m\angle A=m\angle B$.

تحت این روش، تقریباً همه خواص اصلی بینیت و انطباق برای پاره‌خط‌ها و زوایا را توانستیم به‌عنوان قضیه ثابت کنیم؛ فقط اصل ض ز ض استثناء بود.

این روش برای معرفی هندسه یک روش کلاسیک نیست. این روش در حدود سال ۱۹۳۰ بوسیله

---

۱. The Synthetic Postulates

جرج دیوید بیرکهوف[1] ، پیشنهاد شد، و اخیراً عمومی و فراگیر شده است. روش کلاسیک، مانند آنچه در کتاب اصول اقلیدس یا در مبانی هندسه دیوید هیلبرت دیده می‌شود کاملاً متفاوت است؛ اختلاف اساسی در آن است که ابداً در کتاب اقلیدس اعداد حقیقی در ابتدا ظاهر نمی‌شوند و آخر سر هم در لفافه ظاهر می‌شوند. (فصل ۲۰ را ببینید.)

روش اقلیدسی در هندسه روش ترکیبی (هندسه محض) نامیده می‌شود. روش بیر کهوف در هندسه روش متریک نامیده می‌شود، زیرا در آن اندازه گیری به کار می‌رود.

حال مختصری در مورد این که چگونه روش اقلیدس-هیلبرت به کار می‌رود صحبت می کنیم.

البته در شروع کار ساختمان $[S, L, P]$ را داریم.

دراین روش قضایای هندسه وقوع دقیقاً مانند فصل ۲ بررسی می‌شوند. بلافاصله بعد ازآن اختلاف ظاهر می‌شود. به‌جای اضافه کردن توابع حقیقی d و m، اشیاء زیر را به‌این ساختمان اضافه می کنیم.

۱. یک اصطلاح تعریف نشده بینیت، برای دسته‌های سه‌تائی از نقاط. به‌همان روشی که d، m را مفروض گرفتیم این را نیز مفروض می گیریم، با این شرط که در اصولی که متعاقباً بیان می‌شوند صدق کند. پاره‌خطها مانند قبل، از روی بینیت تعریف می‌شوند. همین‌طور برای نیم‌خط‌ها و زوایا.

سپس به‌ساختمانمان مفهومهای زیر را اضافه می کنیم:

۲. یک رابطه تعریف نشده انطباق برای پاره‌خطها، و

۳. یک رابطه تعریف نشده، برای زوایا که آن هم انطباق نامیده می‌شود.

هیچ گونه عیبی نخواهد داشت که برای این دو رابطه تعریف نشده انطباق، همان نماد $\cong$ را به کار ببریم.

اگر این شرایط بینیت را به β نشان دهیم. آنگاه ساختمان زیر را داریم

$$[S, L, P, \beta \cong] .$$

حالا برای اثبات قضایائی در مورد بینیت و انطباق هنوز اصولی را نیاز داریم تا بتوانیم خواص آنها را بررسی کنیم. این اصول در سه دسته به‌صورت زیر می باشند.

اصول بینیت

B-۱. اگر $A-B-C$، آنگاه $C-B-A$.

B-۲. از هر سه نقطه متمایز روی یک خط، درست یکی از آنها بین دوتای دیگر است.

B-۳. هر چهار نقطه روی یک خط را می‌توان به‌ترتیبی، A و B و C و D نام‌گذاری کرد، به‌طوری که $A-B-C-D$

B-٤. اگر A و B دو نقطه دلخواه باشند، آنگاه

(۱) نقطه‌ای مانند C وجود دارد به‌طوری که $A-B-C$، و

---

۱. G. D. Birkhoff

(۲) نقطه‌ای مانند D وجود دارد به‌طوری که $A-D-B$.

B-۵ اگر $A-B-C$، آنگاه A، B و C سه نقطه متمایز روی یک خط‌اند.

این گزاره‌ها، همان قضایائی هستند که در بخش ۳.۴ برمبنای اصل خط‌کش ثابت شدند، که در آن بینیت بر حسب فاصله تعریف شده بود.

اصول انطباق برای پاره‌خطها

C-۱. برای پاره‌خط‌ها، انطباق یک رابطه هم‌ارزی است.

C-۲. **اصل ساختن-پاره‌خط.**

پاره‌خط $\overline{AB}$ و نیم‌خط $\overrightarrow{CD}$ مفروض‌اند. درست یک نقطه E روی $\overrightarrow{CD}$ وجود دارد به‌طوری که $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

C-۳. **اصل جمع-پاره‌خط.**

اگر (۱) $A-B-C$، (۲) $A'-B'-C'$، (۳) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$، و (۴) $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$، آنگاه (۵) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

C-۴. **اصل تفریق-پاره‌خط.**

اگر (۱) $A-B-C$، (۲) $A'-B'-C'$، (۳) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$، و (۴) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$، آنگاه (۵) $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

C-۵. هر پاره‌خط درست یک نقطه وسط دارد؛ یعنی برای هر پاره‌خط $\overline{AB}$ دقیقاً یک نقطه C وجود دارد به‌طوری که $A-C-B$ و $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

آنچه در فوق بیان کردیم قضایائی هستند که در بخش ۳.۶ ثابت شده‌اند، که در آن انطباق پاره‌خط‌ها از روی فاصله تعریف شده بود.

اصول جداسازی و بیان طرفین خط، درون زاویه‌ها و غیره درست مانند فصل ٤ هستند.

اصول انطباق برای زوایا

C-٦. برای زوایا، انطباق یک رابطه هم ارزی است.

C-۷. **اصل ساختن-زاویه.**

فرض کنیم $\angle ABC$ یک زاویه باشد، فرض کنیم $\overrightarrow{B'C'}$ یک نیم‌خط، و H یک نیم صفحه‌ای باشد که مرز آن شامل $\overrightarrow{B'C'}$ است. آنگاه درست یک نیم‌خط $\overrightarrow{B'A'}$ که A' در H است وجود دارد به‌طوری که $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

C-۸. **اصل جمع-زاویه.** اگر (۱) D درون‌زاویه $\angle BAC$، (۲) D' درون‌زاویه $\angle B'A'C'$ (۳) $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$، و (٤) $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$، آنگاه (۵) $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

C-۹. **اصل تفریق-زاویه.** اگر (۱) D نقطه‌ای درون زاویه $\angle BAC$، (۲) D' نقطه‌ای درون زاویه $\angle B'A'C'$، (۳) $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$، و (٤) $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$، آنگاه (۵)

$\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.

آنچه در فوق بیان کردیم، قضایایی هستند که در بخش ۵.۱، ثابت شده‌اند، که در آن انطباق زوایا بر حسب تابع اندازه زاویه‌ای m تعریف شده بود. سرانجام، اصل ض-ز-ض درست مانند قبل بیان می‌شود.

حالا این سؤال را در نظر می گیریم که اگر به‌دلایلی بخواهیم بدون استفاده از توابع حقیقی d و m پیش رویم چه مقدار از کارمان در بخش‌های قبل را باید دوباره انجام دهیم.

در جواب می توان گفت که تقریباً هیچ یک از آنها نیاز به‌دوباره کاری ندارد، زیرا تا فصل قبل که در مورد نامساوی‌های هندسی است هر گز به‌تعریفهای بینیت و انطباق استناد نکرده‌ایم، به‌جز در اولین مرحله که قضایای اساسی را ثابت می کردیم. قضایائی که اکنون می‌خواهیم آنها را به‌صورت اصل بپذیریم.

دفعه بعد که به‌فصول اولیه برمی گردید. ممکن است این گزاره را مو به‌مو بررسی کنید. اولین جائی که به‌زحمت خواهید افتاد در انتهای فصل پنجم است، که ما اندازه زاویه‌ای را برای اثبات زاویه متقابل به‌رأس به کار بردیم. قضیه ۱ بخش ۸.۳ را می‌توان به‌جای اندازه زاویه‌ای در این اثبات به کار برد. دومین مشکل در پایان فصل ششم است، که خاطرنشان کردیم نصف قضیه را به‌تعویق می‌اندازیم قضیه‌ای که طبیعتاً در مورد وجود عمودهای بر خط L از نقطه P، در یک صفحه مفروض، انتظار داریم.

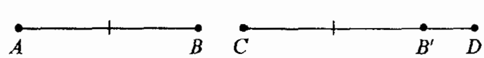
نشان دادیم (قضیه ۱، بخش ۶.۵) که وقتی P روی L واقع نیست، یک عمود همیشه وجود دارد. هنوز لازم است براساس اصول این فصل ثابت کنیم، که وقتی P روی L قرار دارد، همان نتیجه بدست می‌آید؛ و هنوز لازم است بر همان مبنای اصولی ثابت کنیم که همه زوایای قائمه قابل انطباق‌اند.

بررسی روش ترکیبی (اصل موضوعه‌ای) قابلیت انطباق با بررسی ترکیبی (اصل موضوعه‌ای) نامساویها شروع می‌شود. بخش‌های زیر را ببینید.

۸.۲ قوانین نامساوی‌ها برای پاره‌خط‌ها

در ابتدا باید توضیح دهیم، بدون ذکر فاصله‌ها، وقتی می گوئیم یک پاره‌خط کوتاهتر از دیگری است، یا یک زاویه کوچکتر از دیگری است منظور چیست. قبلاً تعریف‌های مناسبی در فصل ۷ پیشنهاد کرده‌ایم.

تعریف. $\overline{AB}<\overline{CD}$ اگر نقطه‌ای مانند B'، بین C و D، وجود داشته باشد به‌طوری ک $\overline{AB}\cong\overline{CB'}$.



شکل ۸.۱

خواص اساسی رابطه $>$ عبارت‌اند از

(I) برای هر زوج از پاره‌خط‌های $\overline{AB}$، $\overline{CD}$، دقیقاً یکی از شرایط زیر برقرار است:

$$\overline{AB}<\overline{CD} \ ، \ \overline{AB}\cong\overline{CD} \ ، \ \overline{CD}<\overline{AB} \ .$$

(II) اگر $\overline{AB}<\overline{CD}$ و $\overline{CD}<\overline{EF}$، آنگاه $\overline{AB}<\overline{EF}$.

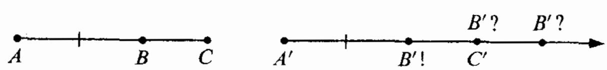
(III) اگر $\overline{AB}\cong\overline{A'B'}$، $\overline{CD}\cong\overline{C'D'}$ و $\overline{AB}<\overline{CD}$، آنگاه $\overline{A'B'}<\overline{C'D'}$.

توجه کنید که (I) و (II) خیلی شبیه شرایط ت-۱ و ت-۲ برای رابطه ترتیبی هستند، با این تفاوت که همه جا $\cong$ به‌جای $=$ به کار رفته است. اکنون می‌خواهیم (I)، (II)، و (III) را تحقیق کنیم.

■ **قضیه ۱.** اگر $A-B-C$ و $A-C-D$، آنگاه $A-B-C-D$.

اثبات. می‌دانیم که A، B، C، و D می‌توانند در یک ترتیب Z، Y، X، W مرتب شوند، به‌طوری که $W-X-Y-Z$. در اینجا W نمی‌تواند B یا C باشد، زیرا W بین هیچ دو نقطه از سه نقطه دیگر قرار ندارد. به‌همین دلیل، Z نمی‌تواند B یا C باشد. بنابراین در ترتیبی Z و W باید A و D باشند. چون $W-X-Y-Z$ و $Z-Y-X-W$ یک مطلب را بیان می‌کند، می‌توانیم فرض کنیم $W=A$، و $Z=D$. در نتیجه $A-X-Y-D$، که در آن X و Y، عبارت‌اند از B، و C. نمی‌توانیم داشته باشیم $A-C-B-D$، زیرا $A-B-C$. بنابراین داریم $A-B-C-D$، که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

■ **قضیه ۲.** اگر $A-B-C$ و $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$، آنگاه نقطه‌ای مانند B' وجود دارد به‌طوری که $A'-B'-C'$ و $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.



شکل ۸.۲

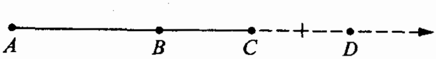
اثبات. بنا بر اصل ساختن پاره‌خط، ۲-C، می‌دانیم دقیقاً یک نقطه B' روی نیم خط $\overrightarrow{A'C'}$ وجود دارد به‌طوری که $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$. اکنون سه امکان وجود دارد:

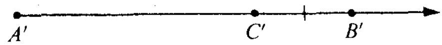
(۱) $B'=C'$، (۲) $A'-C'-B'$، (۳) $A'-B'-C'$.

نشان خواهیم داد که (۱) و (۲) هر دو غیرممکن‌اند. در نتیجه (۳) برقرار است.

(۱) فرض کنیم $B'=C'$. در این صورت نیم‌خط $\overrightarrow{AC}$ شامل دو نقطه X است (مثلاً $X=B$ و $X=C$) به‌طوری که $\overline{A'C'} \cong \overline{AX}$. این متناقض با اصل ساختن پاره‌خط، ۲-C، است.

(۲) فرض می‌کنیم $A'-C'-B'$. بنا بر اصل ساختن پاره‌خط نقطه‌ای مانند D روی نیم‌خط متقابل به $\overrightarrow{CA}$ وجود دارد به‌طوری که $\overline{C'B'} \cong \overline{CD}$.





شکل ۸.۳

در نتیجه $A-C-D$ ، $A'-C'-B'$ ، $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$، و $\overline{CD} \cong \overline{C'B'}$. بنابراین، بنا بر اصل جمع پاره‌خط، داریم $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. چون $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$، بدست می‌آید $\overline{AD} \cong \overline{AB}$، که متناقض با شرط یکتایی در اصل ساختن پاره‌خط است. □

■ **قضیه ۳.** اگر $\overline{AB} < \overline{CD}$، و $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$، آنگاه $\overline{AB} < \overline{C'D'}$.

اثبات. نقطه‌ای مانند B' داریم به‌طوری که $C-B'-D$ و $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$. بنا بر قضیه ۲، نقطه‌ای مانند B'' وجود دارد به‌طوری که $C'-B''-D'$ و $\overline{CB'} \cong \overline{C'B''}$. اما $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$. بنابراین $\overline{AB} \cong \overline{C'B''}$، و $\overline{AB} < \overline{C'D'}$، که باید ثابت می‌شد. □

■ **قضیه ۴.** اگر $\overline{AB} < \overline{CD}$، و $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$، آنگاه $\overline{A'B'} < \overline{CD}$.

اثبات. حتی بدون استفاده از قضیه‌های قبلی اثبات ساده است، آن را ثابت کنید؟ از ترکیب اینها با هم قضیه زیر بدست می‌آید:

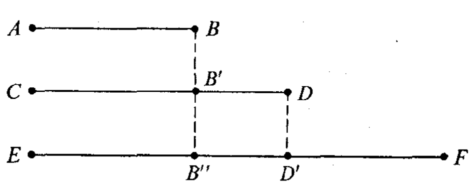
■ **قضیه ۵.** اگر $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$، $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$، و $\overline{AB} < \overline{CD}$، آنگاه $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$

البته این شرط (III) است. □

■ **قضیه ۶.** برای هر پاره‌خط $\overline{AB}$، رابطه $\overline{AB} < \overline{AB}$ هرگز برقرار نیست.

اثبات. اگر برای نقطه‌ای مانند B' بین A و B، $\overline{AB} \cong \overline{AB'}$، آنگاه این متناقض اصل ساختن پاره‌خط، $C-۲$، است. □

■ **قضیه ۷.** اگر $\overline{AB} < \overline{CD}$ و $\overline{CD} < \overline{EF}$، آنگاه $\overline{AB} < \overline{EF}$.



شکل ۸.۴

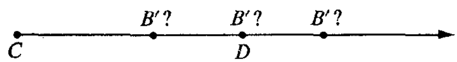
اثبات. D' را طوری اختیار می کنیم که $E-D'-F$ و $\overline{CD} \cong \overline{ED'}$ (شکل ۸.٤). بنا بر قضیه ۳، نقطه‌ای مانند B'' وجود دارد به‌طوری که $E-B''-D'$ و $\overline{AB} \cong \overline{EB''}$. چون $E-B''-D'$ و $E-D'-F$، بنا بر قضیه ۱ نتیجه می گیریم که $E-B''-D'-F$، لذا

$E-B''-F$. بنابراین $\overline{AB}<\overline{EF}$، که باید ثابت می‌شد. این شرط (II) است. □

■ **قضیه ۸.** برای هر زوج پاره‌خط‌های $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$، درست یکی از شرایط زیر برقرار است:

$$\overline{AB}<\overline{CD}\ ،\ \overline{AB}\cong\overline{CD}\ ،\ \overline{CD}<\overline{AB}\ .$$

اثبات. نقطه‌ای مانند B' روی $\overrightarrow{CD}$ وجود دارد، به‌طوری که $\overline{CB'}\cong\overline{AB}$.



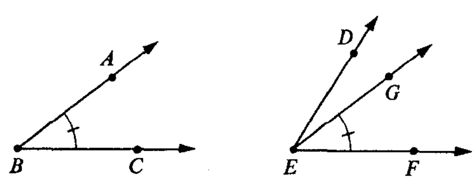
شکل ۸.۵

اگر $C-B'-D$، آنگاه $\overline{AB}<\overline{CD}$ (۱). اگر $B'=D$، آنگاه $\overline{AB}\cong\overline{CD}$ (۲). اگر $C-D-B'$، آنگاه بنا بر قضیه ۲ نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای مانند D' بین A و B وجود دارد، به‌طوری که $\overline{AD'}\cong\overline{CD}$. بنابراین $\overline{CD}<\overline{AB}$ (۳). لذا حداقل یکی از شرایطی که بیان شد برقرار است. و هیچ دوتائی از این شرط‌ها نمی‌توانند برقرار باشند. اگر $\overline{AB}<\overline{CD}$ و $\overline{AB}\cong\overline{CD}$، آنگاه بنا بر قضیه ٤ نتیجه می‌گیریم که $\overline{CD}<\overline{CD}$، که متناقض با قضیه ٦ است. به‌همین ترتیب اگر $\overline{AB}\cong\overline{CD}$ و $\overline{CD}<\overline{AB}$، به‌تناقض می‌رسیم.

سرانجام، اگر $\overline{AB}<\overline{CD}$ و $\overline{CD}<\overline{AB}$، آنگاه بنا بر قضیه ۷ نتیجه می‌گیریم که $\overline{AB}<\overline{AB}$، که متناقض با قضیه ٦ است. □

حالا (I)، (II)، و (III) را تحقیق کرده‌ایم. بررسی نامساوی‌ها برای زوایا در روش ترکیبی (محض) خیلی شبیه است، و وارد جزئیات نخواهیم شد. آن به‌صورت زیر شروع می‌شود.

تعریف. $\angle ABC$ و $\angle DEF$ مفروض‌اند. اگر نقطه‌ای مانند G درون $\angle DEF$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\angle ABC\cong\angle GEF$، آنگاه $\angle ABC<\angle DEF$.



شکل ۸.۶

خواص اساسی این رابطه دقیقاً شبیه (I)، (II)، و (III) در فوق است.

(IV) برای هر زوج از زاویه‌های $\angle A$، $\angle B$، درست یکی از شرایط زیر برقرار است:

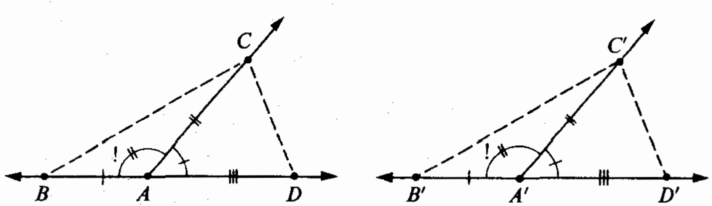
$\angle A < \angle B$ و $\angle A \cong \angle B$ و $\angle B < \angle A$.

(V) اگر $\angle A < \angle B$ و $\angle B < \angle C$، آنگاه $\angle A < \angle C$.
(VI) اگر $\angle A \cong \angle A'$، $\angle B \cong \angle B'$ و $\angle A < \angle B$، آنگاه $\angle A' < \angle B'$.
اثبات‌ها بدیهی نیستند.

۸.۳ زاویه‌های قائمه از نظر ترکیبی

اولین قدم در دستیابی به‌زاویه‌های قائمه اثبات قضیه زیر است، که رابطه نزدیکی با $C-8$ دارد.

■ **قضیه ۱**. اگر (۱) $\angle BAC$ و $\angle CAD$ مجانب باشند، (۲) $\angle B'A'C'$ و $\angle C'A'D'$ مجانب باشند، و (۳) $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$، آنگاه (۴) $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.



شکل ۸.۷

اثبات. بدیهی است که بدون هیچ اشکالی می‌توان فرض کرد

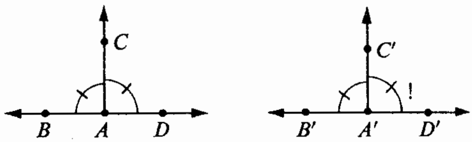
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \text{ و } \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \text{ و } \overline{AD} \cong \overline{A'D'} \text{ ،}$$

زیرا اگر نقاط B'، C'، D' به‌این طریق انتخاب شده باشند، تمام شش نیم‌خط به‌همان خوبی نمایش داده می‌شوند.
بنابر ض ز ض، داریم $\triangle ADC \cong \triangle A'D'C'$. بنابراین $\angle ADC \cong \angle A'D'C'$؛ و لذا $\angle BDC \cong \angle B'D'C'$. بنا بر ض ز ض نتیجه می‌شود که $\triangle BDC \cong \triangle B'D'C'$. بنابراین $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. بنا بر قضیه ض-ض-ض، $\triangle BAC \cong \triangle B'A'C'$. بنابراین $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$، که باید ثابت می‌شد. □

■ **قضیه ۲. هر زاویه قابل انطباق با یک زاویه قائمه نیز یک زاویه قائمه است.**

بیان دیگر. فرض کنیم (۱) $\angle CAD$ و $\angle BAC$ دو زاویه مجانب باشند، و (۲) $\angle BAC \cong \angle CAD$. فرض کنیم (۳) $\angle B'A'C'$ و $\angle C'A'D'$ دو زاویه مجانب باشند، و (۴)

$\angle B'A'C' \cong \angle BAC$. آنگاه (۵) $\angle B'A'C' \cong \angle C'A'D'$.

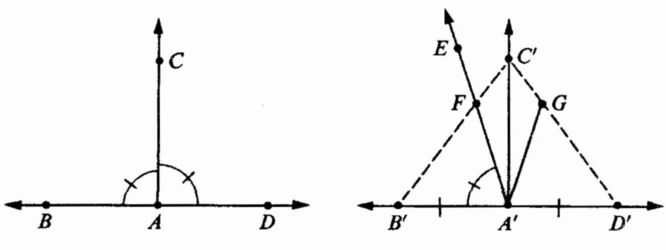


شکل ۸.۸

باید این بیان مجدد را به دقت تجزیه و تحلیل کنید تا ببینید که واقعاً بیان دیگری از قضیه ۲ است. چنانچه قضیه را به روش فوق بنویسیم، اثبات بدیهی است. بنابر قضیه قبل، $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$. بنابر (۲)، $\angle BAC \cong \angle CAD$. بنابراین، $\angle B'A'C' \cong \angle BAC \cong \angle C'A'D'$ و $\angle B'A'C' \cong \angle C'A'D'$، که باید ثابت می‌شد.

■ **قضیه ۳. همه زوایای قائمه قابل انطباق‌اند.**

بیان دیگر، فرض کنیم که $\angle BAC$ و $\angle CAD$ دو زاویه مجانب و قابل انطباق باشند. فرض کنیم $\angle B'A'C'$ و $\angle C'A'D'$ دو زاویهٔ مجانب و قابل انطباق باشند. در این صورت $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.



شکل ۸.۹

اثبات. ابتدا ملاحظه می‌کنیم همانطور که در شکل نشان داده شده است، می‌توان نقاط B'، و D' را چنان انتخاب کرد که $\overline{A'D'} \cong \overline{A'B'}$، در نتیجه، بنا بر ض ز ض، $\triangle A'D'C' \cong \triangle A'B'C'$، لذا داریم $\angle D' \cong \angle B'$.

فرض کنیم $\overrightarrow{A'E}$ نیم‌خطی باشد، که E در همان طرفی از $\overleftrightarrow{A'D'}$ است که C' واقع است، به‌طوری که

$$\angle B'A'E \cong \angle BAC \cdot$$

اگر ثابت کنیم $\overrightarrow{A'E}=\overrightarrow{A'C'}$؛ نتیجه خواهد شد که $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.
اگر $\overrightarrow{A'C'} \neq \overrightarrow{A'E}$، آنگاه E درون یکی از زاویه‌های $\angle B'A'C'$ و $\angle D'A'C'$ واقع است ـ مثلاً $\angle B'A'C'$. در این صورت $\overrightarrow{A'E}$ پاره‌خط $\overline{B'C'}$ را در نقطه‌ای مانند F می‌برد، به‌طوری که $B'-F-C'$. بنا بر تعریف $>$ (برای پاره‌خط‌ها)، $\overline{B'F} < \overline{B'C'}$. چون $\overline{B'C'} \cong \overline{D'C'}$، بنابر (III) از بخش ۸.۲ نتیجه می گیریم $\overline{B'F} < \overline{D'C'}$، در نتیجه نقطه‌ای مانند G وجود دارد به‌طوری که $D'-G-C'$ و $\overline{D'G} \cong \overline{B'F}$. بنا بر ض‌ـ‌ز‌ـ‌ض داریم

$$\triangle B'A'F \cong \triangle D'A'G \cdot$$

بنابراین

$$\angle B'A'F \cong \angle D'A'G \cdot$$

اما بنابر قضیه ۱، می‌دانیم که $\angle CAD \cong \angle D'A'E$. لذا

$$\angle D'A'E \cong \angle CAD \cong \angle BAC \cong \angle B'A'E \cong \angle D'A'G \cdot$$

اکنون موقعیت زیر را داریم.
(۱) G و E هر دو در طرفی از $\overleftrightarrow{A'D'}$ واقع‌اند که شامل C' است.
(۲) $\angle D'A'E \cong \angle D'A'G$.
(۳) $\overrightarrow{A'E}$ و $\overrightarrow{A'G}$ متمایزاند، زیرا E و G در دو طرف $\overleftrightarrow{A'C'}$ واقع‌اند (طرف‌هائی که بترتیب شامل B' و D' می‌باشند).
بنا بر $C-7$، این امکان ندارد، زیرا این اصل بیان می کند که شرط‌های (۱) و (۲) یک نیم‌خط یکتائی را معین می کنند. □

این اثبات از مبانی هیلبرت گرفته شده و توضیحات زیادی به‌آن افزوده شده است. پیچید گی‌هایی را که در این اثبات ظاهر شد ناشی از آن است که در موضوعی به‌پیچید گی هندسه تصمیم گرفتیم اصول را به‌حداقل برسانیم.

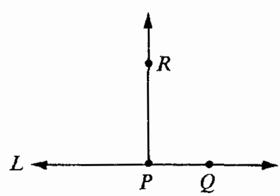
(اقلیدس به‌صورت اصل بیان کرد که همه زوایای قائمه قابل انطباق‌اند، و هیلبرت نشان داد که اصل غیر ضروری است.) اصول هیلبرت، در مبانی، به‌طور قابل ملاحظه‌ای ضعیف‌تر از اینهائی هستند که در بخش ۸.۱ داده شد. در این کتاب هدف ما ارائه ضعیف‌ترین اصول نیست که بتواند کارساز باشد، بلکه ارائه یک روش کارآمد و معتبر است.

■ **قضیه ۴**. صفحه E، خط L واقع در E و نقطه P از E مفروض‌اند درست یک خط در E وجود دارد که شامل P و عمود بر L است.

اثبات. برای حالتی که P روی L واقع نیست درستی این قضیه را از قبل می‌دانیم. (قضیه ۱،

بخش ۶.۵ را بینید؛ اثبات این قضیه اساساً به‌روش ترکیبی بود، فقط برمبنای $C-۷$ و نه بر مبنای فاصله و اندازه زاویه‌ای.) همچنین بنا بر قضیه ۱، بخش ۶.۵ می‌دانیم که زاویه‌هائی وجود دارند که قائمه هستند.

فرض کنیم Q نقطه‌ای روی L به‌غیر از P باشد. بنا بر $C-۷$، نقطه‌ای مانند R روی E در طرفی از L وجود دارد، به‌طوری که $\angle QPR$ قابل انطباق بر زاویه قائمه‌ای باشد. بنا بر قضیه ۲، نتیجه می‌شود که $\angle QPR$ یک زاویه قائمه است، و بنابراین $\overleftrightarrow{PR} \perp L$. اگر دو نیم‌خط $\overrightarrow{PR}$، $\overrightarrow{PR'}$ به‌این صورت وجود داشته باشند، آنگاه خواهیم داشت $\angle QPR \cong \angle QPR'$، زیرا همه زوایای قائمه قابل انطباق‌اند. این بنابر $C-۷$، امکان ندارد. □



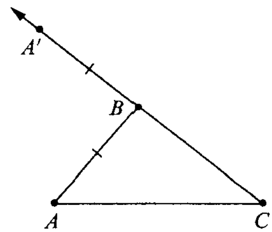
شکل ۸.۱۰

توجه داشته باشید که در روش متریک بلافاصله می‌بینیم که $\angle A$ یک زاویه قائمه است اگر و فقط اگر $m\angle A = ۹۰$. لذا، در روش متریک همه قضیه‌های این بخش به‌قدری بدیهی هستند که نیازی به‌بیان صریح آنها نیست.

۸.۴ شکل ترکیبی نامساوی مثلثی- جمع دسته‌های قابل انطباق

اگر تعریف‌های روش ترکیبی از نامساوی‌ها، برای زوایا و پاره‌خط‌ها را بپذیریم، و فصل ۷ را از این دیدگاه دوباره بررسی کنیم، ملاحظه می‌کنیم که این نظریه اساساً مانند روش قبل عمل می‌کند، تا اینکه به‌نامساوی مثلثی برسیم. (قضیه ۵ از بخش ۷.۱) مسائل ما با اثبات شروع نمی‌شوند، در حقیقت اولین مساله‌ها بیان قضیه بدون ذکر فاصله‌ها است. قضیه زیر از نظر منطقی صحیح است، اما خیلی طبیعی نیست.

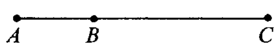
■ **قضیه ۱.** $\triangle ABC$ مفروض است، نقطه‌ای مانند A' وجود دارد به‌طوری که $\overline{A'B} \cong \overline{AB}$، $A'-B-C$، و $\overline{A'C} > \overline{AC}$.



شکل ۸.۱۱

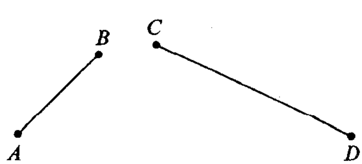
این واقعاً مفهوم را می‌رساند، زیرا به‌زبان غیرمنطقی می گوید، که اگر $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ را طوری دنبال هم قرار دهیم که یک سر یکی بر یک سر دیگری قرار گیرد، تشکیل پاره‌خطی را می‌دهند که از $\overline{AC}$ بلندتر است. (شکل ۸.۱۱)

توجه کنید که مشکل دستیابی به‌این قضیه در روش ترکیبی این است که با مفهوم جمع سروکار دارد. در هندسه متریک، وضعیت ساده است، زیرا جمع با اعداد حقیقی صورت می گیرد. در هندسه ترکیبی، اگر بخواهیم مفهومی را روشن کنیم، لازم است درباره آن بیشتر صحبت کنیم، زیرا «مجموع» دو پاره‌خط را فقط وقتی می‌توان بعنوان یک پاره‌خط در نظر گرفت که پاره‌خطها انتها به‌انتها باشند. مانند شکل زیر:



شکل ۸.۱۲

در اینجا معقول است که $\overline{AC}$ را «مجموع» $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ بنامیم. اما اگر پاره‌خط‌ها به‌شکل زیر باشند:



شکل ۸.۱۳

مشخص نیست چه پاره‌خطی باید مجموع آنها باشد.
ساده‌ترین روش در این مورد به‌صورت زیر است.

$\overline{AB}$ مفروض است، فرض کنیم $[\overline{AB}]$ مجموعه همه پاره‌خط‌هائی باشد که با $\overline{AB}$ قابل انطباق‌اند. واضح است که، اگر $\overline{CD} \cong \overline{AB}$، آنگاه $[\overline{CD}] = [\overline{AB}]$. مجموعه‌های $[\overline{AB}]$ کلاسهای (دسته‌های) قابل انطباق نامیده می‌شوند. آنچه که تاکنون خاطرنشان کرده‌ایم آن است که یک دسته قابل انطباق به‌وسیله هریک از اعضایش مشخص می‌شود.

اکنون فرض کنیم پاره‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ داده شده‌اند. در این صورت همواره نقطه‌های X، Y، Zای وجود دارند به‌طوری که

$$X-Y-Z \text{ ، } \overline{XY} \cong \overline{AB} \text{ ، } \overline{YZ} \cong \overline{CD} \ .$$

موارد زیر برمبنای اصول انطباق به‌سادگی بررسی می‌شوند.

(۱) اگر X'، Y'، Z' سه نقطه دلخواه دیگری باشند که در همان شرایط فوق صدق کنند، آنگاه بنا بر اصل جمع-پاره‌خط نتیجه می‌گیریم که $\overline{XZ} \cong \overline{X'Z'}$. یعنی دسته انطباق $[\overline{XZ}]$ مستقل از انتخاب X، Y، و Z است.

(۲) فرض کنیم $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ و $\overline{C'D'} \cong \overline{CD}$. فرض کنیم X، Y، و Z برای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$، مانند فوق انتخاب شده باشند؛ و فرض کنیم X'، Y'، و Z' برای $\overline{A'B'}$ و $\overline{C'D'}$، انتخاب شده باشند.

در این صورت $\overline{X'Z'} \cong \overline{XZ}$. یعنی، دسته انطباق $[\overline{XZ}]$ فقط به‌دسته‌های انطباق $[\overline{AB}]$ و $[\overline{CD}]$ بستگی دارد؛ از انتخاب پاره‌خط‌های نمایش دهنده $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ مستقل است.

اکنون می‌توان جمع را تعریف کرد، البته، نه بین پاره‌خط‌ها، بلکه بین دسته‌های انطباق. $[\overline{AB}]$ و $[\overline{CD}]$ مفروضند، X، Y، و Z را طوری اختیار می‌کنیم که

$$X-Y-Z \text{ و } \overline{XY} \cong \overline{AB} \text{ و } \overline{YZ} \cong \overline{CD} \ .$$

در این صورت، بنا بر تعریف،

$$[\overline{AB}] + [\overline{CD}] = [\overline{XZ}] \ .$$

ملاحظات (۱) و (۲) نشان می‌دهند که این تعریف با معنی است. دسته انطباق $[\overline{XZ}]$ مستقل از انتخاب $\overline{AB}$، $\overline{CD}$، X، Y و Z است؛ و فقط به‌دسته‌های انطباق $[\overline{AB}]$ و $[\overline{CD}]$ بستگی دارد.

سرانجام، یادآوری می‌کنیم که (III) از بخش ۸.۲ بیان می‌کند که اگر $\overline{AB}<\overline{CD}$، آنگاه هر پاره‌خط در $[\overline{AB}]$ از هر پاره‌خط در $[\overline{CD}]$ کوچکتر است. بنابراین می‌توانیم تعریف کنیم

$$[\overline{AB}] < [\overline{CD}]$$

به‌این معنی که هر پاره‌خط قابل انطباق با $\overline{AB}$ از هر پاره‌خط قابل انطباق با $\overline{CD}$ کوچکتر است.

اکنون می‌توانیم بیان طبیعی‌تری از نامساوی مثلثی را ارائه دهیم.

■ **قضیه ۲**. برای هر مثلث $\triangle ABC$، داریم

$$[\overline{AB}] + [\overline{BC}] > [\overline{AC}] \cdot$$

روش ترکیبی محض از جهتی یک روش ظریف‌تر است. اما اگر تعریف‌ها را به‌دقت بنویسیم، و قضیه‌هایمان را واقعاً ثابت کنیم، آنگاه ظرافت روش ترکیبی را باید به‌قیمت پیچیدگی تکنیک آن بدست آورد. تحت روش متریک، یک بررسی کاملاً منطقی بسیار ساده‌تر است.

۸.۵ خلاصه تمایزهای بین روش متریک و روش ترکیبی

حالا دو روش بررسی هندسه را که اصولاً مختلف‌اند توصیف کرده‌ایم. ممکن است به‌منظور خلاصه‌نویسی و مرور در جدولی چگونگی اختلاف دو روش را نشان دهیم. (جدول ۸.۱)

مفاهیم و گزاره‌های اساسی را در اولین ستون سمت راست نشان داده‌ایم، و در دو ستون بعدی چگونگی بررسی آنها را نشان داده‌ایم.

جدول ۸.۱

	روش متریک	روش ترکیبی
۱. ساختمان داده شده	$[S,L,P,d,m]$	$[S,L,P,\beta,\cong]$
۲. فاصله	در ساختمان داده شده است	هرگز ذکر نشده است.
۳. اندازه برای زوایا	در ساختمان داده شده است	هرگز ذکر نشده است.
٤. انطباق برای پاره‌خط‌ها	برحسب فاصله تعریف می‌شود	در ساختمان داده شده است.
۵. انطباق برای زوایا	برحسب اندازه‌زاویه‌ای تعریف می‌شود	در ساختمان داده شده است.
٦. خواص انطباق	در قضیه‌ها بیان می‌شود.	در اصول بیان می‌شود.
۷. جمع	با عددهای AB انجام می‌شود.	بادسته‌های انطباق $[\overline{AB}]$ انجام می‌شود.
۸. نامساوی‌ها	بین عددها تعریف می‌شود، $AB<CD$	بین دسته‌های انطباق تعریف می‌شود، $[\overline{AB}]<[\overline{CD}]$

از این به‌بعد، به‌جز در فصل ۲۰، ساختمان متریک $[S,L,P,d,m]$ را به کار می‌بریم.

اقلیدس Euclid

(سه قرن قبل از میلاد مسیح)

اقلیدس یکی از مشهورترین ریاضیدانان یونان و شاید موفق‌ترین نویسندهٔ علمی است که تا کنون زندگی می کرده است. کتاب او، «مبانی»، رساله‌ایی[1] در باب هندسه و تئوری اعداد است. برای بیشتر از ۲۰۰۰ سال هر دانش‌آموزی هندسه را از کتاب اقلیدس یاد گرفته است. و در تمام این زمانها، «مبانی» بعنوان الگویی برای برهان منطقی عمل می کرده است.

هیچ کس تا به‌امروز نمی‌داند که چقدر از هندسهٔ کتاب مبانی از زمان اقلیدس ریشه می گیرد. بخشی از آن ممکن است بر پایه کتاب‌های قبل از آن باشد و بخشی از مهمترین نظریات آن را به گمان مربوط به‌اُودکسوس Eudoxus. که حدوداً در همان زمان زندگی می کرد، می‌دانند. در هر صورت، از تمام کتابهایی که از ابتدا تا حال برای ما بوده، مبانی اولین کتابی است که هندسه را بصورت مرتب و منظم و روند منطقی با شروع فرضیات ساده و بنا کردن هندسه روی انها با برهان منطقی ارائه می‌دهد. این همواره یک روش پایه‌ای در ریاضی بوده است. چیز قابل توجه که این کشف خیلی زود و استفادهٔ از آن بسیار خوب بوده است. منطق همان نقشی را در ریاضی دارد که آزمایش در فیزیک. در ریاضی و فیزیک شما ممکن است به‌نظریه‌ای برسید که‌فکر می کنید درست است. اما در فیزیک شما بهتر است به‌آزمایشگاه بروید و آن را آزمایش کنید و در ریاضی بهتر است شما بیشتر فکر کنید و سعی کنید به برهانی برای آن برسید.

در حالی که روش عمومی اقلیدس در اینجا پایدار می‌مانند، اصول او و تئوریهای براساس آنها خیلی مورد استفادهٔ وسیع نیستند. از زمان توسعهٔ جبر استفاده از اعداد برای اندازه گیری چیزها بصورت اساسی شده است. این روند در مبانی به‌چشم نمی‌خورد زیرا در زمان اقلیدس جبر تقریباً ناشناخته بود.

جرج دیوید بیرکهف

George David Birkhoff
(۱۸۸۴-۱۹۴۴)

ج. د. بیر کهف یکی از پر ذوق‌ترین و فعالترین ریاضیدانان عصر خود است. در زمان عمرش او ۱۹۰ مقالهٔ تحقیقاتی در رشته‌های مختلفی از ریاضی محض و کاربردی نوشت. و کارهای او سه کتاب بزرگ را تشکیل می دهد. همچنین او چند کتاب دربارهٔ ریاضی و تئوری نسبیت نوشت. اصول موضوع استفاده شده برای هندسه در این کتاب یکسری اصول اصلاح شده توسط بیر کهف می باشند. برای چندین قرن، نظریهٔ[۱] اندازه پذیری برای پاره‌خطها و زوایا، هر دو، در هندسه یک اندیشهٔ[۲] مرکزی بوده است.

اصول بیر کهف این تصوّر را به بهترین وجه معرفی می‌نماید، آنها روشهایی را بیان می کنند که در حقیقت هر کسی استفاده می کند، لذا، هر چند اصول بیر کهف در بین نظریه‌های بزرگ او نیستند ولی معهذا آنها سهم زیادی در روشن ساختن مطلب دارند.

---

۱. most versatile Idea

۲. Productive

فصل ۹

سه هندسه

۹.۱ مقدمه

این فصل کاملاً ضروری است و بخشی از استنتاجهای بقیهٔ کتاب را تشکیل نمی‌دهد. در واقع هیچ چیزی را در این فصل ثابت نمی کنیم؛ اما هر چیزی را که مطرح می کنیم بعداً بطور کاملتری بررسی خواهیم کرد. با وجود این اگر شمائی از انواع هندسه‌هایی که قضایا یمان برای آنها بکار خواهد رفت ارائه دهیم از جهاتی مفید خواهد بود.

برای سهولت، توجه‌مان را به هندسه مسطحه معطوف می‌داریم. مفاهیم مورد بحث را با صرف کاری قابل ملاحظه می‌توان به سه بعدی تعمیم داد.

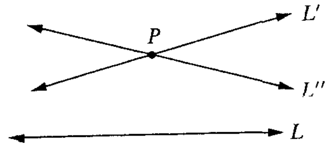
دو خط را **موازی** نامند هرگاه در یک صفحه واقع باشند اما همدیگر را قطع نکنند. در **صفحهٔ اقلیدسی** اصل توازی معمولی برقرار است.

اصل توازی اقلیدسی. اگر خط L و نقطهٔ P در خارج از آن مفروض باشد، یک و تنها یک خط مانند L' وجود دارد که شامل نقطه P و موازی خط L است.

این اصل مبین آن است که همیشه موازیها موجود و منحصر به‌فرد می باشند.

برای یک مدت طولانی-در واقع دو هزار سال-این گزاره را یک قانون طبیعت می‌دانستند. ولی در قرن نوزدهم بوسیلهٔ لوباچفسکی، بویوئی و گاوس این مسئله کشف شد که می‌توان با پذیرفتن وجود موازیها و انکار یکتائی آنها یک نظریهٔ سازگار ریاضی بدست آورد.

اصل توازی لوباچفسکی. اگر خط L و نقطهٔ P در خارج آن مفروض باشد، لااقل دو خط مانند L' و L'' وجود دارند که شامل نقطه P و موازی L می باشند.



شکل ۹.۱

این تصویر پذیرفتنی به‌نظر نمی‌رسد زیرا عادت کرده‌ایم که از صفحهٔ کاغذ برداشت اقلیدسی داشته باشیم. اما این یک واقعیت است، چنانچه خواهیم دید که می‌توان روی اصل لوباچفسکی یک نظریهٔ ریاضی بنا کرد. و چنین نظریه‌ای کاربردهایی در فیزیک دارد.

حتی صورت سومی هم وجود دارد. نه تنها یکتایی بلکه وجود موازیها را هم می‌توان انکار کرد.

اصل توازی ریمانی. هیچ دو خط واقع در یک صفحه با هم موازی نیستند.

این اصول سه نوع «هندسه مسطحه» به‌ما می‌دهد، اقلیدسی، لوباچفسکی و ریمانی. البته در هریک از سه نظریه به‌اصول دیگری نیاز داریم ولی ما فقط اختلاف بارز آنها را انتخاب کردیم. در این کتاب بحث اصلی ما اولین هندسه و در کنار آن دومی و بندرت سومین هندسه خواهد بود.

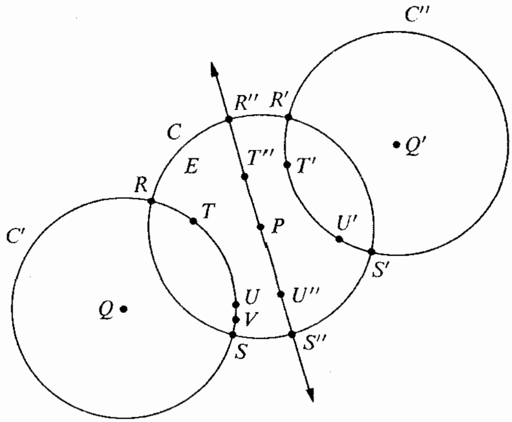
در بخشهای زیر مثالهای واقعی یا **مدلهایی** از این نوع هندسه‌ها ارائه می‌دهیم و اختلافات فاحش آنها را مشخص می‌کنیم، در خواندن بقیّهٔ کتاب بیشتر وقتها بایستی یکی از این مدلها را بیاد داشته باشید و گاهی به‌فکر دو مدل باشید.

۹.۲ مدل پوآنکاره برای هندسهٔ لوباچفسکی

در این بخش فرض می‌کنیم دستگاه ریاضی هست که در اصول هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی صدق می‌کند و با استفاده از هندسه اقلیدسی دستگاه ریاضی تشریح می‌کنیم که اصل توازی اقلیدسی در آن برقرار نیست اما بقیّهٔ اصول هندسهٔ اقلیدسی در آن برقرار است.

دایرهٔ ثابتی مانند C را در صفحهٔ اقلیدسی در نظر بگیرید. صرفاً بخاطر سهولت فرض می‌کنیم که شعاع برابر با ۱ باشد. فرض کنید E درون C باشد.

منظور ما از Lـ دایره (L به‌احترام لوباچفسکی) دایره‌ای مانند C' است که بر C عمود می‌باشد. وقتی دو دایره را عمود برهم نامیم که در هر نقطهٔ تقاطع مماسهای بر دو دایره بر هم عمود باشند. اگر در یک نقطهٔ تقاطع مانند R این وضع پیش آید در S نقطهٔ تقاطع دیگر نیز همین وضع پیش خواهد آمد. اما برای اثبات آن متوقف نمی‌شویم زیرا این فصل کاملاً توصیفی است و اثباتها بعداً گفته خواهد شد. نقاط Lـ صفحه، نقاط درون C یعنی E خواهد بود. Lـ خط به‌این دو معنی بکار خواهد رفت (۱) اشتراک E و یک Lـ دایره؛ (۲) اشتراک E و یک قطر C.



شکل ۹.۲

مسلم است که

۱ـI۰. هر دو نقطهٔ E روی درست یک Lـخط واقعند.

می‌خواهیم یک نوع «هندسه مسطحه» تعریف کنیم که در آن «صفحه» مجموعهٔ E و خطوط Lـخطها باشند. قبلاً می‌دانیم که در هندسهٔ جدید منظور ما از خط و نقطه چیست. سپس نیاز به تعریف فاصله و اندازهٔ زاویه‌ای داریم.

به‌ازای هر دو نقطهٔ X و Y، خواه روی C خواه در درون C، فرض کنید XY فاصلهٔ اقلیدسی معمولی آنها باشد. توجه کنید که اگر R، S، T و U مثل شکل فوق باشند آنگاه R و S نقاطی از Lـصفحهٔ ما نیستند اما نقاطی از صفحهٔ اقلیدسی که از آن شروع کرده‌ایم می‌باشند. بنابراین همهٔ فاصله‌های TS، TR، US و UR تعریف شده‌اند و I۰۱ مبین آن است که اگر T و U داده شده باشند R و S معین می‌شوند. یک و تنها یک Lـخط هست که از T و S می گذرد و این Lـخط، دایرهٔ C را در نقاط R و S می برد. با استفاده از این چهار فاصلهٔ TS، RS، US، UR فاصلهٔ جدید $d(T,U)$ را در صفحهٔ E با ضابطهٔ زیر تعریف می کنیم:

$$d(T,U) = \left| \log_e \frac{TR/TS}{UR/US} \right| .$$

با لبداهه اصل زیر را داریم.

۰ـD۰. d تابعی از $E\times E$ بتوی $\mathbf{R}$ است یعنی، $d:E\times E \longrightarrow \mathbf{R}$

حال نظری به‌اصل خط کش D۰۴ می‌اندازیم. روی Lـخط دلخواه L نقطهٔ U را انتخاب کرده از این ببعد ثابت می گیرم. به‌ازای هر نقطهٔ T روی L، فرض کنید

$$f(T) = \mathrm{Log}_e \frac{TR/TS}{UR/US} .$$

یعنی، $f(T)$ با حذف قدر مطلق در فرمول $d(T,U)$ بدست می‌آید. حال تابع زیر را داریم،

$$f:L \longrightarrow \mathbf{R}$$

نشان خواهیم داد که f یک دستگاه مختصات روی L است. اگر V نقطهٔ دیگری روی L باشد، آنگاه

$$f(V) = \mathrm{Log}_e \frac{VR/VS}{UR/US}.$$

فرض کنید $x=f(T)$ و $y=f(V)$ در این صورت

$$|x-y| = \left| \mathrm{Log}_e \frac{TR/TS}{UR/US} - \mathrm{Log}_e \frac{VR/VS}{UR/US} \right| = \left| \log_e \frac{TR/TS}{VR/VS} \right|$$

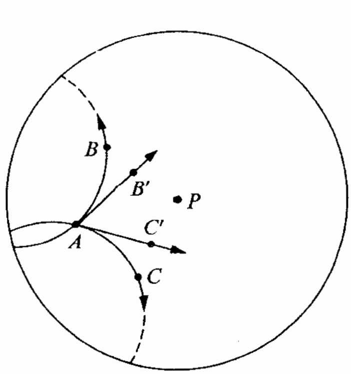
زیرا تفاضل لگاریتمها برابر است با لگاریتم خارج قسمت. بنابراین

$$|x-y| = d(T,V)$$

که نشان می‌دهد تابع جدید فاصله در اصل خط کش صدق می کند.

چون $D.4$ برقرار است، بقیه اصول فاصله خود بخود برقرارند (مسئلهٔ ۱ بخش ۳.۳ را ببینید.) بینیّت، پاره‌خطها، نیمخطها و بقیّه را درست مثل فصل ۳ تعریف می کنیم. تمام قضایای فصل ۳ در هندسهٔ جدید برقرار است زیرا هندسهٔ جدید برمبنای اصولی بنا شده است که اثبات قضایا بر آن استوار بود. همین امر برای فصل ٤ برقرار است، بسادگی می‌توان خود را متقاعد کرد که اصل جداسازی صفحه در E برقرار است.

برای بررسی قابلیت انطباق زوایا به‌تابع اندازهٔ زاویه‌ای نیاز داریم. اگر یک «Lـ زاویه» در هندسهٔ جدیدمان داده شده باشد، با استفاده از دو نیمخط مماس، زاویه‌ای در هندسهٔ قدیم می‌سازیم:



شکل ۹.۳

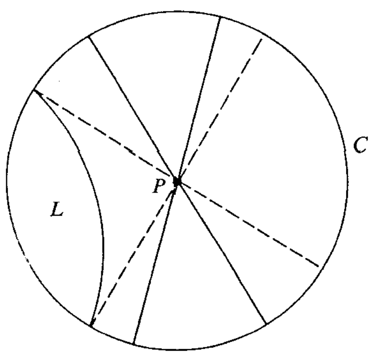
اندازهٔ زاویهٔ $\angle BAC$ یعنی $m\ \angle BAC$ را اندازهٔ (به‌معنی قدیم) زاویهٔ اقلیدسی $\angle B'A'C'$ تعریف می کنیم.

مسلّماً ساختمان حاصل

$$[E, L, d, m]$$

در همهٔ اصول فصلهای ۲ تا ٦ به‌انضمام اصل (ض ز ض) صدق می کند. اثبات این مطلب وقت گیر است، ولی به‌اطّلاعاتی از هندسهٔ اقلیدسی بیش از آنچه تا بحال خوانده‌ایم نیاز دارد.

اگر از برقراری اصول مطمئن باشیم، از آن نتیجه می گیریم که قضایا نیز برقرار خواهند بود. بنا براین همهٔ نظریهٔ قابلیت انطباق و نامساویهای هندسی برای مدل پوآنکارهٔ هندسهٔ لوباچفسکی به کار می‌رود.



شکل ۹.۴

از طرف دیگر بوضوح دیده می‌شود که اصل توازی اقلیدسی برای مدل پوآنکاره برقرار نیست. مثلاً L ـ خط L را که از P مرکز دایرهٔ C نمی گذرد (ش ۹٤) در نظر بگیرید. از P تعدادی نامتناهی L ـ خط می گذرد که موازی L اند.

هندسهٔ لوباچفسکی (**هندسهٔ هذلولوی** نیز نامیده می‌شود) نوعی از هندسه است که با مدل پوآنکاره نمایش داده شد. در چنین هندسه‌ای، که اصل توازی معمولی برقرار نباشد، تعداد زیادی از قضایای معمولی حذف می‌شود. تعدادی از این نوع قضایای هندسهٔ لوباچفسکی را که با قضایای نظیر در هندسهٔ اقلیدسی کاملاً متفاوتند بیان می کنیم.

(۱) هیچ چهار ضلعی مستطیل نیست. (چهار ضلعی وجود ندارد که مستطیل باشد) در واقع اگر یک چهار ضلعی دارای سه زاویهٔ قائمه باشد

زاویهٔ چهارم آن همیشه حاده است.

(۲) در هر مثلث مجموع اندازه‌های زوایای آن همیشه بطور اکید از ۱۸۰ کمتر است.
(۳) دو مثلث متشابه وجود ندارد مگر در حالتی که قابل انطباق باشند.
سومین قضیه مستلزم آن است که دو شکل ریخت‌شان کاملاً یکی نیست مگر آنکه اندازهٔشان هم یکی باشد. بنابراین در هندسهٔ هذلولوی **مدلهای مقیاس دقیق** غیرممکن هستند. در واقع، هریک از سه قضیهٔ فوق هندسهٔ هذلولوی را مشخص می کنند. اگر نامساوی مجموع زوایا

$$m\,\angle A + m\,\angle B + m\,\angle C < ۱۸۰$$

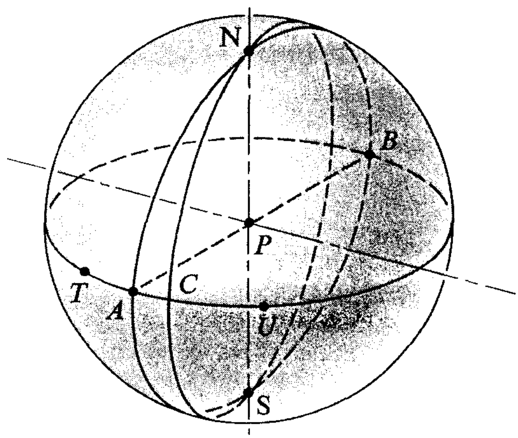
برقرار باشد، حتی برای یک مثلث، آنگاه هندسهٔ ما هندسهٔ هذلولوی است؛ اگر تساوی مجموع زوایا برقرار باشد، حتی برای یک مثلث، آنگاه هندسه اقلیدسی است؛ و همین طور برای (۱) و (۳). در رابطه با اطلاعاتی که از فضای فیزیکی داریم این مطلب دارای نتیجهٔ کنجکاوانه‌ای است. اگر فضای فیزیکی هذلولوی باشد، که ممکن است هم باشد، از نظر تئوری می‌توان آن را با اندازه گیری نشان داد. مثلاً، فرض کنید با خطای کمتر از ۰٫۰۰۰۳ هریک از زوایای مثلثی را اندازه گرفته‌اید و مجموع زوایا برابر با $۱۷۹^\circ ۵۹' \ ۵۹٫۹۹۹''$ شده است. اختلاف بین این عدد و ۱۸۰° برابر $۰٫۰۰۱''$ است. این اختلاف نمی‌تواند ناشی از خطای اندازه گیری باشد، زیرا کل خطاهای اندازه گیری از $۰٫۰۰۰۳''$ بیشتر نیست. بنابراین تجربه ثابت می کند که فضایی که در آن زند گی می کنیم هذلولوی است. (البته، برقراری بقیهٔ اصول را تضمین می کند.)
از طرف دیگر، با هیچ اندازه گیری دقیقی نمی‌توان ثابت کرد که فضا اقلیدسی است. نکته در اینجاست که در هر اندازه گیری فیزیکی امکان خطا هست. بنابراین هیچ‌وقت نمی‌توان با اندازه گیری نشان داد که معادله

$$r + s + t = ۱۸۰$$

دقیقاً برقرار است، در حالی که برای اثبات اقلیدسی بودن فضایی که در آن زند گی می کنیم به‌آن نیاز داریم.
بنابراین دو امکان وجود دارد: ۱) در فضای فیزیکی اصل توازی اقلیدسی برقرار نیست یا ۲) حقیقت فضای فیزیکی همیشه ناشناخته خواهد بود.

۹.۳ الگوی کروی برای هندسهٔ ریمانی

فرض کنید V سطح یک کره در فضا باشد. فرض می کنیم شعاع کره برابر با ۱ باشد. دایرهٔ عظیمه دایره‌ایست که اشتراک V با صفحه‌ای گذرنده از مرکز آن می‌باشد. اگر T و U دو نقطهٔ دلخواه از V باشند آنگاه کوتاهترین مسیر روی سطح که T را به U وصل می کند کمانی از یک دایرهٔ عظیمه است.



شکل ۹.۵

می‌توان با انتخاب دوایر عظیمه بعنوان خطوط نوعی «هندسهٔ مسطحه» را روی کره تعریف کرد. در این طرح فاصلهٔ بین هر دو نقطه را طول کوتاهترین مسیر بین آن دو نقطه می گیریم. دستگاه حاصل برخی از خواص مورد انتظار ما از هندسهٔ مسطحه را دارا است. مثلاً هر خط صفحهٔ ما را به‌دو نیمصفحه تقسیم می کند، که هریک از آنها محدب است. اما اصل توازی اقلیدسی برقرار نیست. زیرا هر دو خط همدیگر را قطع می کنند. هندسه ما خواص عجیب دیگری نیز دارد.

(۱) دو نقطه لزوماً یک خط را معین نمی کنند. مثلاً قطبهای شمال و جنوب N و S روی تعدادی نامتناهی دایرهٔ عظیمه واقعند.

برای هر دو انتهای هر قطر کرهٔ V همین امر برقرار است. چنین نقاطی را متقاطر می‌نامند. (به‌بیان دقیق‌تر دو نقطهٔ A و B از V را متقاطر نامند هرگاه پاره‌خط $\overline{AB}$ از مرکز V بگذرد.)

(۲) در حالی که خطوط L در هیچ نقطه‌ای به‌انتها نمی‌رسند اما با وجود این طول آنها متناهی است. در واقع چون شعاع V برابر با ۱ است، بزرگترین فاصلهٔ بین هر دو نقطه برابر با π است. بنابراین اصل خط کش نمی‌تواند برقرار باشد.

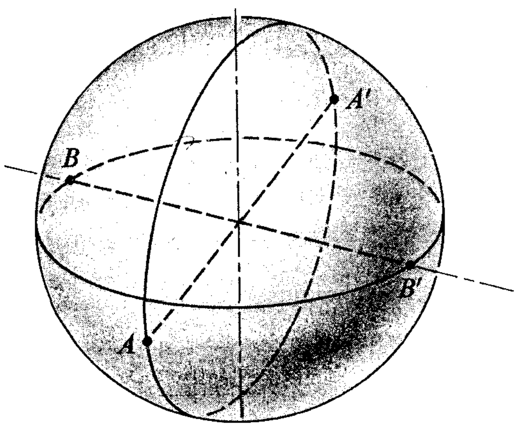
(۳) بینیّت بگونه‌ای که با آن آشنا هستیم به‌هم می‌ریزد. در واقع لزومی ندارد که برای سه نقطهٔ مفروض روی یک خط یکی بین دو تای دیگر باشد. ممکن است داشته باشیم $AB=BC=AC$.

(۴) از هر نقطه خارج هر خط خطی عمود بر آن خط موجود است ولی لزوماً یکتا نیست. عملاً هر خطی که قطب‌شمال را به‌نقطه‌ای از خط استوا وصل کند بر خط استوا عمود است.

(۵) بعضی مثلثها دو زاویهٔ قائمه دارند. (در شکل ۹.۵ مثلث $\triangle ANC$ در هر دو نقطه A و C زاویهٔ قائمه دارد.)

(۶) قضیهٔ زاویهٔ بیرونی برقرار نیست. (همان مثال را ببینید.)

از این خواص عجیب تنها اولی را می‌توان برطرف کرد. این کار را با تغییر الگو به‌روش زیر انجام می‌دهیم. اگر دو نقطهٔ A و B متقاطر باشند، آنها را یکی می گیریم. به‌عبارت دقیق‌تر در هندسهٔ جدیدمان نقطه عبارتست از دو نقطهٔ متقاطر کرهٔ V. اگر A نقطه‌ای از کرهٔ V باشد آنگاه $\overline{A}$ نمایش زوج $\{A$ و $A'\}$ خواهد بود که در آن A' انتهای دیگر قطر شامل A است. نقاط صفحهٔ ریمانی E عبارت خواهند بود از زوجهای $\overline{A}$.



شکل ۹.۶

اگر L یک دایرهٔ عظیمه روی V باشد، آنگاه $\overline{L}$ مجموعهٔ همهٔ نقاط $\overline{A}$ است که A روی L است. مجموعه‌های $\overline{L}$ خطوط E خواهند بود.

فاصله بین دو نقطهٔ $\overline{A}$ و $\overline{B}$، $d(\overline{A},\overline{B})$ طول کوتاهترین کمان از A (یا A') تا B (یا B') است. توجه کنید که این فاصله ممکن است از طول کوتاهترین کمان از A تا B کوچکتر باشد.

درهندسه‌جدیدمان دو نقطهٔ $\overline{A}$ و $\overline{B}$ همیشه خط یکتایی را مشخص می کنند. دلیل آن این است که اگر A و B روی کره متقاطر باشند $\overline{A}$ و $\overline{B}$ یکی خواهد بود.

البته اصل توازی اقلیدسی هنوز برقرار نیست؛ دو خط جدید هم همیشه در درست یک نقطه همدیگر را قطع می کنند. باز هم خطوط با طول متناهی‌اند؛ حال بیشترین فاصلهٔ ممکن بین دو نقطه $\pi/2$ است. بینیت هنوز هم برقرار نیست. خطوط عمود هنوز هم یکتا نیستند؛ هنوز هم مثلثهایی با دو زاویهٔ قائمه داریم و قضیهٔ زاویهٔ بیرونی هنوز هم برقرار نیست.

در واقع برای اینکه ترتیبی بدهیم تا هر دو نقطه خطی را معین کنند، خاصیت دیگری مطرح

کرده‌ایم: هیچ خطی صفحهٔ ریمانی ما را جدا نمی کند. در واقع اگر $\overline{L}$ یک خط و $\overline{A}$ و $\overline{B}$ دو نقطه در خارج $\overline{L}$ باشند همیشه کمانی واقع در یک خط مانند $\overline{L}'$ هست که $\overline{A}$ را به $\overline{B}$ وصل می کند و $\overline{L}$ را قطع نمی کند.

در این کتاب اساساً با هندسهٔ اقلیدسی سروکار خواهیم داشت، اما به‌هندسهٔ هذلولوی هم توجهٔ زیادی خواهیم کرد زیرا به‌هندسهٔ اقلیدسی جلوه می بخشد. نکته در اینجاست که این دو نوع هندسه آن‌قدر وجه مشترک دارند که وقتی به‌مرحلهٔ تمایز می‌رسند اختلاف بین آنها آموزنده است. از طرف دیگر اختلاف بین هندسهٔ ریمانی و هندسهٔ اقلیدسی بقدری اساسی است که اولی کاری تکنیکی است و بدور از هدف اصلی ما. از این ببعد با آن سروکار نخواهیم داشت.

۹.۴ سؤالاتی در رابطه با بررسیهای بعد

در این فصل، سؤالاتی بیش از آنچه جواب دادیم مطرح کردیم.

(۱) گفته‌ایم که الگوی پوآنکاره برای هندسهٔ هذلولوی در همهٔ اصول هندسهٔ اقلیدسی بجز اصل توازی اقلیدسی صدق می کند. این امر باید ثابت شود و با بحث لفظی خود در بخش ۹.۲ آن را ثابت نکرده‌ایم.

بررسی این اصول کاری طولانی است. خواننده باید مطلع باشد که این نوع تحقیق و بررسی را عمداً در بیشتر نوشتجات مطرح نمی کنند. اگر الگوهای هندسهٔ هذلولوی خواص مشترک‌شان با هندسهٔ اقلیدسی صرفاً خواص بدیهی است که در کتابهای نسبتاً متداول بررسی می‌شود، در خور ارزشی است که به‌حق و معمولاً به‌آن می‌دهند.

(۲) اگر برای الگوی پوآنکاره اصول را بیازماییم خواهیم دانست که از نظر منطقی هندسهٔ هذلولوی به‌همان خوبی هندسهٔ اقلیدسی است. الگو را برمبنای هندسهٔ اقلیدسی ساخته‌ایم. بنابراین اگر دستگاه ریاضی موجود باشد که در اصول اقلیدسی صدق می کند آنگاه دستگاهی هست که در اصول لوباچفسکی صدق می کند.

(۳) جملهٔ شرطی (۲) باقی ماند. آیا دستگاهی هست که در اصول اقلیدس صدق کند؟ برای اثبات آن باید الگویی بنا کنیم. خواهیم دید که اگر دستگاه اعداد حقیقی مفروض باشد این کار عملی است.

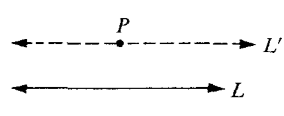
فصل ۱۰

هندسه مسطحه مطلق

۱۰.۱ شرایط کافی برای توازی

دو خط را **موازی** نامند هرگاه در یک صفحه واقع باشند و همدیگر را قطع نکنند. علامت اختصاری $L_2 || L_1$ را به‌معنی موازی بودن دو خط L_1 و L_2 بکار خواهیم برد. بعداً برای سهولت کار دو پاره‌خط را موازی خواهیم نامید هرگاه خطوط شامل آنها موازی باشند. همین جمله را برای خط و پاره‌خط، پاره‌خط و نیمخط، و غیره بکار خواهیم برد، درست مثل همان کاری که در مورد تعامد کردیم.

اصل توازی اقلیدس را در فصل بعد معرفی می کنیم و از آن ببعد، بجز در فصل هندسه نااقلیدسی، بکار خواهیم برد. اصل توازی، بصورتی که معمولاً بیان می‌شود، این است که به‌ازای هر خط و هر نقطهٔ غیرواقع بر آن درست یک خط هست که از آن نقطه می گذرد و با آن خط موازی است.

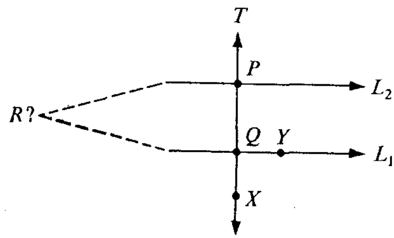


شکل ۱۰.۱

با وجود این، خواهیم دید، که از قضایای ۱ و ۲ نصف گزاره فوق را می‌توان برمبنای اصولی که قبلاً بیان شده است ثابت کرد.

قضیه ۱. اگر دو خط در یک صفحه واقع و بر خطی عمود باشند آنگاه موازیند.

بیان دیگر، اگر $L_۱$ و $L_۲$ و T سه خط واقع در صفحه‌ای مانند E و $L_۱ \perp T$ و $L_۲ \perp T$ آنگاه $L_۱ || L_۲$.



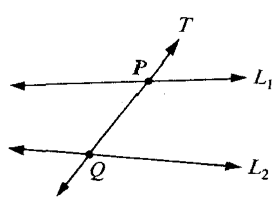
شکل ۲.۱۰

اثبات. فرض کنید $L_۱$ و $L_۲$ خط T را بترتیب در نقاط P و Q ببرند. فرض کنید $L_۱$ و $L_۲$ موازی نباشند و R نقطه‌ای باشد که در آن همدیگر را می‌برند. پس دو خط عمود بر T هست که از نقطهٔ R می‌گذرد و این با نتیجه ۱ـ۱ فصل ۷ تناقض دارد. □

■ **قضیه ۲. اگر خطی دلخواه و نقطهٔ دلخواهی در خارج آن داده شده باشد، همیشه لااقل یک خط هست که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد و با خط مفروض موازی است.**

اثبات. فرض کنید L و P بترتیب خط و نقطهٔ مفروض باشند و E صفحه‌ای باشد که شامل آنها است. بنا بر قضیه ۱ بخش ۶.۵ خطی مانند T در E هست که از P می‌گذرد و بر L عمود است. بنا بر قضیه ٤ بخش ۸.۳ خطی مانند L' در E هست که از P می‌گذرد و بر T عمود است. بنا بر قضیهٔ قبل $L || L'$، که باید ثابت می‌شد. □

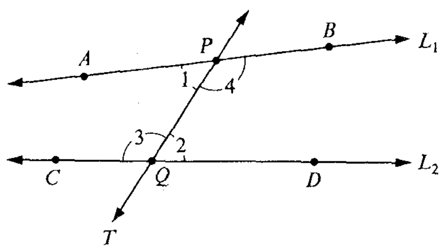
تعمیم ساده‌ای از قضیه ۱ موجود است که آن را در شکل زیر نمایش می‌دهیم، T قاطعی برای خطوط $L_۱$ و $L_۲$ است.



شکل ۳.۱۰

به بیان دقیق‌تر اگر $L_۱$ و $L_۲$ و T سه خط واقع در یک صفحه و T خطوط $L_۱$ و $L_۲$ را بترتیب در دو نقطهٔ (متمایز) P و Q ببرد آنگاه T قاطعی برای $L_۱$ و $L_۲$ است.

در شکل زیر ۱∠ و ۲∠ دو زاویهٔ متبادل داخلی‌اند و ۳∠ و ٤∠ هم متبادل داخلی‌اند.



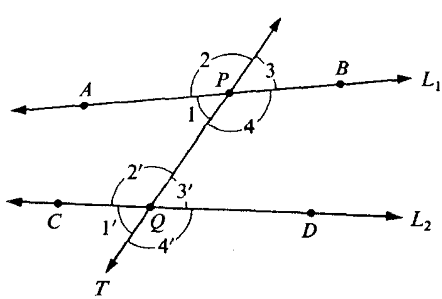
شکل ۱۰.۴

به بیان دقیق‌تر، (۱) اگر T قاطعی برای $L_۱$ و $L_۲$ باشد و $L_۱$ و $L_۲$ را بترتیب در P و Q ببرد و (۲) A و D بترتیب نقاطی از $L_۱$ و $L_۲$ و در دو طرف T باشند آنگاه $\angle APQ$ و $\angle PQD$ زوایای متبادل داخلی‌اند. (با تغییر نماد، این تعریف همچنین بیان می کند که $\angle CQP$ و $\angle QPB$ دو زاویهٔ متبادل داخلی‌اند.)

■ **قضیه ۳.** فرض کنید دو خط و قاطعی مفروض باشند. اگر دو زاویهٔ متبادل داخلی قابل انطباق باشند، آنگاه آن دو خط موازیند.

در اثبات از قضیهٔ زاویهٔ خارجی استفاده می‌شود.

در شکل زیر ۱∠ و ′۱∠ زوایای متناظرند و ۲∠ و ′۲∠ زوایای متناظرند و غیره.



تعریف. اگر $\angle x$ و $\angle y$ دو زاویهٔ متبادل داخلی و $\angle y$ و $\angle z$ زوایای متقابل به‌رأس باشند آنگاه $\angle x$ و $\angle z$ زوایای متناظرند.

■ **قضیه ۴.** فرض کنید دو خط و قاطعی داده شده باشد. اگر یک زوج زوایای متناظر قابل انطباق باشند، آنگاه یک زوج زوایای متبادل داخلی قابل انطباق‌اند.

■ **قضیه ۵.** دو خط و قاطعی مفروض‌اند. اگر یک زوج زوایای متناظر قابل انطباق باشند، آنگاه دو خط موازی‌اند.

۲.۱۰ نامساوی خط شکسته‌ای

نامساوی مثلثی بیان می کند که در هر مثلث مانند ABC داریم

$$AB + BC > AC \cdot$$

اگر شرط غیرواقع بر یک خط یا حتی متمایز بودن را برای A و B و C برداریم نتیجهٔ ضعیف‌تری بدست می‌آید.

■ **قضیه ۱.** به‌ازای هر سه نقطهٔ A و B و C داریم

$$AB + BC \geqslant AC \cdot$$

اثبات. اگر A و B و C همخط نباشند، این رابطه از نامساوی مثلث نتیجه می‌شود. اگر A و B و C همخط باشند یک دستگاه مختصات روی خط می گیریم که شامل آنها باشد و فرض کنید مختصات آنها x، y و z باشد. فرض کنید

$$a = x-y \text{ و } b = y-z \cdot$$

بنابر قضیه ۱۳، بخش ۱.۴ می‌دانیم که

$$|a| + |b| \geqslant |a + b|$$

بنابراین

$$|x-y| + |y-z| \geqslant |x-z| \cdot$$

بنابراین

$$AB + BC \geqslant AC,$$

که باید ثابت می‌شد. از این مطلب قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود.

■ **قضیه ۲. نامساوی خط شکسته‌ای (مسیر)** اگر A_1، A_2، ...، A_n نقاط دلخواهی باشند $(n>1)$ آنگاه

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n \cdot$$

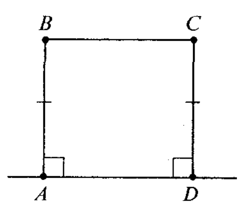
اثبات به‌استقرا است.

در بخش بعد به‌این نتیجه نیاز داریم. برای اولین بار در شرف استفاده از اصل ارشمیدس دستگاه اعداد حقیقی هستیم که در بخش ۱.۸ آمده است. این اصل به‌ما می گوید که اگر $\varepsilon>0$ و $M>0$ آنگاه عدد صحیح مثبتی مانند n هست که $n\varepsilon>M$.

۱۰۰۳ چهار ضلعی ساکری

تعریف چهار ضلعی را از بخش ٤.٤ یادآوری می کنیم. چهار نقطهٔ A و B و C و D مفروضند بطوری که در یک صفحه واقعند و هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند. اگر پاره‌خطهای $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، $\overline{DA}$ فقط در نقاط انتهایی متقاطع باشند آنگاه اتحاد آنها را یک چهار ضلعی می‌نامیم و به $\square ABCD$ نمایش می‌دهیم. پاره‌خطهای $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، $\overline{DA}$ اضلاع $\square ABCD$ و پاره‌خطهای $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطرهای آن هستند. زوایای $\square ABCD$ عبارتند از $\angle ABC$، $\angle BCD$، $\angle CDA$ و $\angle DAB$ و اغلب آنها را مختصراً به $\angle B$، $\angle C$، $\angle D$ و $\angle A$ نمایش می‌دهیم. اگر هر چهار زاویه قائمه باشند آنگاه چهار ضلعی را مستطیل می‌نامند.

بر مبنای اصولی که تا بحال بیان کرده‌ایم، بدون استفاده از اصل توازی، اثبات وجود مستطیل غیرممکن است. اگر به‌روشی موجه در صدد ساختن مستطیل برآییم چهار ضلعی حاصل می‌شود که‌آن را **چهار ضلعی ساکری** می‌نامند.



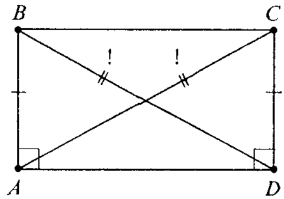
شکل ۱۰.۶

از نشانه‌های روی شکل فوق تعریف آن القا می‌شود. به‌بیان دقیق، $\square ABCD$ یک چهار ضلعی ساکری است اگر $\angle A$ و $\angle D$ قائمه باشند، B و C در یک طرف $\overline{AD}$ و $AB=CD$.

پاره‌خط $\overline{AD}$ **قاعدهٔ پایین** و $\overline{BC}$ **قاعدهٔ بالا** نامیده می‌شود. **زوایای قاعدهٔ پایین** $\angle A$ **و** $\angle D$ و **زوایای قاعدهٔ بالا** $\angle B$ و $\angle C$ می‌باشند.

■ **قضیهٔ ۱**. قطرهای چهار ضلعی ساکری قابل انطباقند.

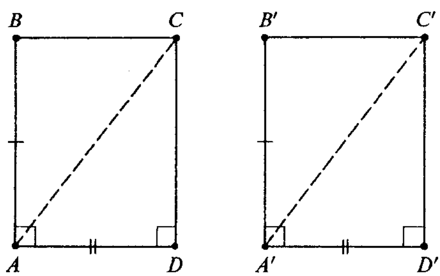
اثبات. بنا بر ض ز ض داریم $\triangle CDA \cong \triangle BAD$. بنابراین $\overline{BD}\cong\overline{AC}$.



شکل ۱۰.۷

قضیهٔ زیر تقریباً مبین این نکته است که چهار ضلعی ساکری بطور هندسی بوسیلهٔ فاصله‌های AD و AB کاملاً معین می‌شود.

■ **قضیهٔ ۲**. فرض کنید $\square ABCD$ و $\square A'B'C'D'$ چهار ضلعی‌های ساکری با قاعده‌های پایین $\overline{AD}$ و $\overline{A'D'}$ و $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ آنگاه $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$ و $\angle B' \cong \angle B$ و $\angle C \cong \angle C'$.



شکل ۱۰.۸

اثبات. مراحل اصلی اثبات به‌طریقهٔ زیر می‌باشند.

(۱) بنا بر ض ز ض $\triangle A'C'D' \cong \triangle ACD$.

(۲) $\angle A' \cong \angle A$ (همهٔ زوایای قائمه قابل انطباقند).

(۳) C در درون $\angle BAD$ و C' در درون $\angle B'A'D'$ است.

(۴) $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.

(۵) $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$.

(۶) $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

(۷) $\angle B' \cong \angle B$.

(۸) $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

(۹) $\angle C \cong \angle C'$. □

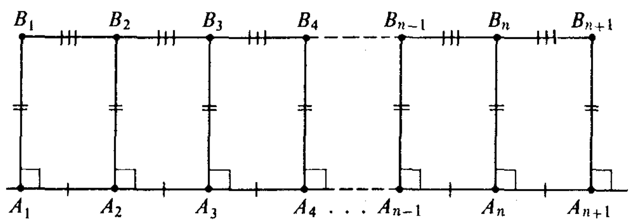
با استفاده از این قضیه برای چهار ضلعی‌های ساکری $\square ABCD$ و $\square DCBA$ نتیجه می گیریم که $\angle C \cong \angle B$. بدین ترتیب قضیهٔ زیر بدست می‌آید.

■ **قضیه ۳**. در هر چهار ضلعی ساکری، زوایای قاعدهٔ بالا قابل انطباقند.

■ **قضیه ۴**. در هر چهار ضلعی ساکری قاعدهٔ بالا قابل انطباق یا بزرگتر از قاعدهٔ پایین است.

بیان دیگر. چهار ضلعی ساکری مانند $\square A_1B_1\ B_2A_2$ با قاعدهٔ پایین $\overline{A_1A_2}$ مفروض است. در این صورت $B_1B_2 \geqslant A_1A_2$.

اثبات. با شروع از چهار ضلعی ساکری مفروض یک دنباله از n چهار ضلعی ساکری، انتها به‌انتها، به‌روش زیر می‌سازیم:



شکل ۹.۱۰

یعنی A_3، A_4، ....، A_{n+1} نقاطی روی خط $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ اند که به‌همان ترتیب بیان شده ظاهر شده‌اند؛ و زوایای $\angle B_2A_2A_3$، $\angle B_3A_3A_4$ و... و غیره زوایای قائمه‌اند؛

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots = A_{n-1}\ A_n = A_n\ A_{n+1}$$

و

$$A_2B_2 = A_3B_3 = \cdots = A_nB_n = A_{n+1}\ B_{n+1}\ .$$

بنا بر قضیهٔ ۲ داریم

$$B_۱B_۲ = B_۲B_۳ = \cdots = B_{n-۱}B_n = B_n\, B_{n+۱}\ .$$

نمی‌دانیم که نقاط $B_۱$، $B_۲$،…، $B_{n+۱}$ همخط‌اند. اما بنا بر نامساوی خط شکسته‌ای می‌دانیم که

$$B_۱B_{n+۱} \leqslant B_۱B_۲ + B_۲B_۳ + \cdots + B_{n-۱}B_n + B_n\, B_{n+۱}\ .$$

چون همهٔ فاصله‌های سمت راست برابر $B_۱B_۲$ می‌باشند، داریم

$$B_۱B_{n+۱} \leqslant n\cdot\ B_۱B_۲\ .$$

به‌همان سبک نتیجه می‌گیریم که

$$A_۱A_{n+۱} \leqslant A_۱B_۱ + B_۱B_{n+۱} + B_{n+۱}\, A_{n+۱} \leqslant A_۱B_۱ + nB_۱B_۲ + A_۱B_۱$$

چون $A_۱A_{n+۱} = nA_۱A_۲$ داریم

$$nA_۱A_۲ \leqslant nB_۱B_۲ + ۲A_۱B_۱,$$

و این نتیجه به‌ازای هر n برقرار است.

حال فرض کنید که قضیهٔ ما نادرست باشد. پس $A_۱A_۲>B_۱B_۲$. بنابراین $A_۱A_۲-B_۱B_۲$ عددی مثبت است. بالبداهه $۲A_۱B_۱$ عددی مثبت است. فرض کنید

$$\varepsilon = A_۱A_۲ - B_۱B_۲ \quad \text{و} \quad M = ۲A_۱B_۱\ .$$

پس $\varepsilon > ۰$ و $M > ۰$ اما به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n داریم $n\varepsilon \leqslant M$. این با اصل ارشمیدس تناقض دارد و اثبات کامل می‌شود. □

مجموعه مسائل ۱۰.۳

۱. نشان دهید که هر چهار ضلعی ساکری محدب است.

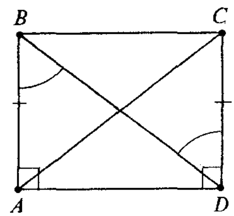
۲. فرض کنید $\square ABCD$ یک چهار ضلعی و E نقطه‌ای باشد که $A-D-E$. فرض کنید B و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$، $AB=CD$ و $\angle BAD \cong \angle CDE$. نشان دهید که چهار ضلعی محدب است.

۱۰.۴ نامساوی اصلی برای مجموع زوایای مثلث

یک قضیهٔ مشهور هندسهٔ اقلیدسی مبین این نکته است که مجموع اندازه‌های زوایای هر مثلث بر حسب درجه برابر با ۱۸۰ است. بدون اصل توازی نشان می‌دهیم که مجموع همیشه کوچکتر یا مساوی

۱۸۰ است. ابتدا به‌مقدماتی نیاز داریم.

■ **قضیه ۱**. در هر چهار ضلعی ساکری مانند $\square ABCD$ (با قاعدهٔ پایین $\overline{AD}$) داریم $\angle BDC \geqslant \angle ABD$.



شکل ۱۰.۱۰

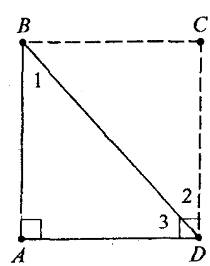
اثبات. می‌دانیم که $BA = DC$ و $BD = BD$. اگر $\angle ABD > \angle BDC$ درست باشد آنگاه از قضیه ٦ بخش ۷.۱ نتیجه می‌شود که $AD > BC$ و این با قضیه ٤ بخش ۱۰.۳ تناقض دارد. بنابراین $\angle ABD \leqslant \angle BDC$، و قضیه ثابت است. □

از این قضیه بلادرنگ نتیجه‌ای برای مثلث قائم‌الزاویه بدست می‌آوریم.

■ **قضیه ۲**. اگر $\triangle ABD$ در A دارای زاویهٔ قائمه باشد آنگاه

$$m\angle B + m\angle D \leqslant ۹۰ \, .$$

اثبات. فرض کنید C نقطه‌ای باشد که $\square ABCD$ یک چهار ضلعی ساکری شود.



شکل ۱۰.۱۱

در این صورت

$$m\angle ۳ + m\angle ۲ = ۹۰,$$

زیرا $\angle ADC$ زاویهٔ قائمه است. بنا بر قضیهٔ قبل $m\angle ۲ \geqslant m\angle ۱$. بنابراین

$$۹۰ - m\angle ۳ \geqslant m\angle ۱ \quad \text{و} \quad m\angle ۱ + m\angle ۳ \leqslant ۹۰,$$

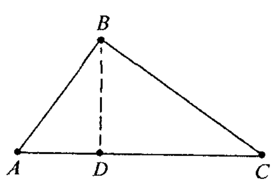
که می‌خواستیم ثابت کنیم. پس داریم:

■ **قضیه ۳.** هر مثلث قائم‌الزاویه فقط یک زاویهٔ قائمه دارد و دو زاویهٔ دیگر آن حاده‌اند.
البته خیلی قبل در آخر فصل ۷ با استفاده از قضیهٔ زاویهٔ بیرونی این مطلب را ملاحظه کرده‌ایم.
ولی در هر صورت برای مقاصد دیگر به‌قضیه ۲ نیاز داریم.
مثل بخش ۷ وتر مثلث قائم‌الزاویه را ضلع روبرو به‌زاویهٔ قائمه (یکتا) تعریف می کنیم. دو ضلع دیگر را ساق می‌نامند.

■ **قضیه ۴.** وتر مثلث قائم‌الزاویه از هر ساق آن بزرگتر است.
زیرا زاویهٔ روبرو به‌وتر بزرگتر است (قضیه ۳ بخش ۷ را ببینید.)

در مثلث هر دو ضلع می‌توانند قابل انطباق باشند. بنابراین نمی‌توان همیشه از بزرگترین ضلع آن صحبت کرد. ولی همیشه می‌توان از یکی از بزرگترین اضلاع، یعنی ضلعی که حداقل به‌درازای هر ضلع دیگر است، صحبت کرد.

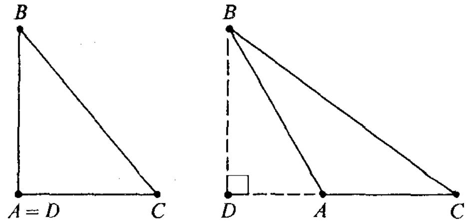
■ **قضیه ۵.** در مثلث ABC، فرض کنید D پای عمود مرسوم از B بر $\overleftrightarrow{AC}$ باشد. اگر $\overline{AC}$ یکی از بزرگترین اضلاع $\triangle ABC$ باشد، آنگاه $A-D-C$.



شکل ۱۲.۱۰

(اگر این قضیه را داشته باشیم اثبات قضیه ض ض ض ساده می‌شود.)

اثبات. فرض کنید قضیه نادرست باشد. پس داریم $D = A$، $D - A - C$، $D = C$ یا $A-C-D$. باید نشان دهیم که همهٔ این حالات غیرممکن است. چون دو حالت آخری اساساً همان دو حالت اولند، کافی است نشان دهیم که $D=A$ و $D-A-C$ غیرممکن است.



شکل ۱۰.۱۳

اگر $A = D$، آنگاه $\triangle ABC$ یک مثلث قائم‌الزاویه در A است. بنابراین $BC > AC$ و $\overline{AC}$ یکی از بزرگترین اضلاع نیست.

اگر $D - A - C$، آنگاه $AC < DC$. همچنین $DC < BC$، زیرا $\overline{BC}$ وتر $\triangle BDC$ است، و $\overline{DC}$ یکی از ساقها است. بنابراین $AC < BC$، و $\overline{AC}$ بزرگترین ضلع $\triangle ABC$ نمی‌باشد. □

بالأخره، می‌توانیم قضیّهٔ زیر را که برای آن تلاش می کردیم ثابت کنیم.

■ **قضیه ۶.** در هر مثلث ABC داریم

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C \leqslant ۱۸۰ \cdot$$

اثبات. بدون اینکه از کلیت کاسته شود، فرض می کنیم $\overline{AC}$ یکی از بزرگترین اضلاع $\triangle ABC$، و $\overline{BD}$ پاره‌خط عمود از B بر خط $\overleftrightarrow{AC}$ باشد. بنا بر قضیهٔ قبل داریم $A - D - C$ یعنی D در درون $\angle ABC$ است. حال قضیهٔ ۲ را برای هریک از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $\triangle ADB$ و $\triangle BDC$ بکار می بریم. پس

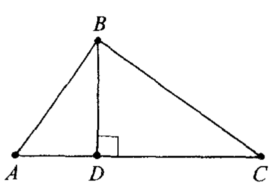


Figure 10.14

$$m\angle A + m\angle ABD \leqslant ۹۰$$

و

$$m\angle DBC + m\angle C \leqslant ۹۰$$

بنابراین

$$m\angle A + m\angle ABD + m\angle DBC + m\angle C \leqslant ۱۸۰ \cdot$$

چون D در داخل $\angle ABC$ است داریم

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle B \cdot$$

در نتیجه

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C \leqslant 180^\circ$$

که باید ثابت می‌شد. □

۵-۱۰ یک کمدی تاریخی

چهار ضلعی های ساکری به‌نام هندسه‌دان ایتالیایی گرولامو ساکری (۱۷۳۳-۱۶۶۷) نامگذاری شد. مانند بیشتر هندسه‌دانان زمان خود از وضعیت اصل توازی راضی نبود و معتقد بود که باید این حکم را به‌صورت یک قضیه ثابت کرد. او کتابی با عنوان اقلیدس بدون نقص نوشت که در آن سعی کرد با اثبات اینکه اصل توازی نتیجه‌ای از اصول دیگر هندسهٔ مجرد است اقلیدس را از هر عیبی مبری سازد. گاهگاهی، پیشرفت ریاضی نمایشهای خنده‌داری در بردارد. این هم یکی از آنهاست.

در مرحلهٔ اول، اثبات ساکری برای اصل توازی فریبنده بود. ولی مراحل اول اثبات درست بود و قضایای مقدماتی جدی و مهم بودند. اگر قسمت اشتباه کتابش را حذف کنید، آنچه برایتان می‌ماند اولین بررسی موضوعی است که حالا هندسهٔ مطلق نامیده می‌شود. یعنی ساکری نظریهٔ هندسی جامعی را پروراند که از کل سؤال اصل توازی مستقل بود. (قسمتهای قبلی این فصل نمونه‌ای از این نوع نظریه است.) به‌خاطر این دستاورد ساکری خیلی مورد احترام است و انصافاً هم باید باشد.

آخرین تمسخر این است که اگر ساکری در روشی که فکر می کرد درست است موفق شده بود، هیچ ریاضیدان امروزی کتابش را دفاع از اقلیدس نمی‌دانست. از دیدگاه جدید، اثبات اصل توازی صرفاً نشان می‌هد که این اصل اضافی است و اضافی بودن حسنی برای مجموعهٔ اصول نیست. سه نکتهٔ مهم هست که یک ریاضیدان امروزی می‌خواهد در مورد اصول بداند.

(۱) اصول باید، به‌هر طریق، سازگار باشند، یعنی هیچ یک از آنها با بقیه تناقض نداشته باشد. اگر این شرط برقرار نباشد، هر نظریهٔ ریاضی که برمبنای این اصول بنا شود جداً هیاهویی بر سر هیچ و پوچ خواهد بود، زیرا در این حالت دستگاه ریاضی وجود ندارد که در این اصول صدق کند. تنها راه نشان دادن سازگاری یک مجموعهٔ اصول این است که نشان دهیم دستگاهی وجود دارد که همهٔ اصول در آن صدق می کند. چنین دستگاهی را یک الگو برای مجموعهٔ اصول می‌نامند.

(۲) وجود یک الگو کافی نیست. از اصول برای تشریح دستگاه ریاضی که در آن صدق می کند استفاده می کنیم یعنی اینکه یک مجموعهٔ اصول وقتی ارزش بیان دارد که دستگاه ریاضی موجود باشد که در آنها صدق می کند و آن‌قدر مهم باشد که به‌مطالعه بیارزد.

(۳) اصول، در صورت امکان، باید مستقل باشند یعنی اینکه نتوان یکی از آنها را بعنوان قضیه‌ای از بقیّه نتیجه گرفت. هر اصلی که بدین طریق قابل استنتاج باشد زاید نامیده می‌شود.

برای اینکه نشان دهید یک اصل زاید است باید آن را برمبنای بقیه ثابت کنید و این کاری بود که ساکری می خواست برای اصل توازی انجام دهد. برای اینکه نشان دهید اصلی از بقیّهٔ اصول مستقل

است باید نشان دهید که دستگاه ریاضی هست که همهٔ اصول در آن برقرار می باشند، اما این اصل در آن صدق نمی کند. (مثلاً بخش ٦.٤ را، که در آن نشان دادیم اصل ض ز ض مستقل از اصول قبلی خود است، ببینید.)

در قرن نوزدهم تکلیف دو سؤال اساسی معلوم شد. ابتدا نشان دادند که اصول هندسهٔ مجرد به انضمام اصل توازی سازگار است ـ البته با پذیرفتن سازگاری دستگاه اعداد حقیقی، بعداً نشان دادند که اصل توازی از بقیّهٔ اصول مستقل است. این کار از تنها راه ممکن آن یعنی کشف هندسه‌هایی که همهٔ اصول مجرد بجز اصل توازی در آنها برقرار باشد انجام پذیرفت.

از دیدگاه امروزی این دو پیشرفت حمایت واقعی از اقلیدس بود. حمایت حامیانش منجر به این شد که ثابت کردند هندسهٔ هذلولوی بنوبهٔ خود موضوع مهمی است.

فصل ۱۱

اصل توازی و تصویر موازی

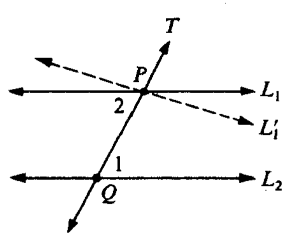
۱۱.۱ یکتائی موازی‌ها

اصل توازی اقلیدس به‌صورت زیر است.

P۰۱. اگر خطی و نقطه‌ای در خارج آن داده شده باشند، فقط یک خط هست که از نقطهٔ مفروض می گذرد و با خط مفروض موازی است.

بلافاصله از این اصل، عکس قضیه ۳ بخش ۱۰.۱ نتیجه می‌شود.

■ **قضیهٔ ۱**. دو خط و قاطعی مفروضند. اگر خطوط موازی باشند، آنگاه هر زوج زاویهٔ متبادل داخلی قابل انطباقند.



شکل ۱ـ۱۱

اثبات. درست یک خط مانند L_1' هست که از P می گذرد و برای آن زوایای متبادل داخلی قابل انطباقند و بنا بر قضیهٔ ۳ بخش ۱ـ۱۰ داریم $L_1' \| L_2$. چون فقط یک چنین خط موازی موجود است، داریم $L_1' = L_1$. بنابراین $\angle 2 \cong \angle 1$، که باید ثابت می‌شد. □

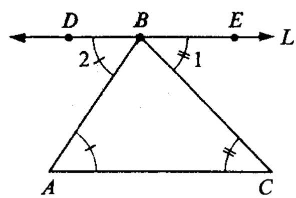
اثبات قضیهٔ زیر کاملاً شبیه این است.

■ **قضیهٔ ۲**. دو خط و قاطعی مفروضند. اگر خطوط موازی باشند آنگاه هر زوج زوایای متناظر قابل انطباق‌اند.

حال نامساوی $m\angle A + m\angle B + m\angle C \leqslant ۱۸۰$ تبدیل به تساوی می‌شود.

■ **قضیه ۳**. در هر مثلث $\triangle ABC$ داریم

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = ۱۸۰ \cdot$$



شکل ۱۱.۲

اثبات. فرض کیند L خطی باشد که از B می گذرد و موازی $\overleftrightarrow{AC}$ است. فرض کنید D و E نقاطی از L باشند که $D-B-E$ و D و A در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ باشند. در این صورت

$$m\angle ۲ + m\angle B = m\angle DBC \cdot$$

و

$$m\angle DBC + m\angle ۱ = ۱۸۰ \cdot$$

بنابراین

$$m\angle ۱ + m\angle B + m\angle ۲ = ۱۸۰$$

بنا بر قضیهٔ ۱

$$m\angle ۱ = m\angle C \text{ و } m\angle ۲ = m\angle A$$

در نتیجه

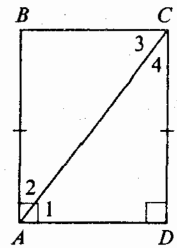
$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = ۱۸۰$$

که باید ثابت می‌شد. □

قضایای زیر نتایج بدیهی‌اند.

■ **قضیه ۴**. در مثلث قائم‌الزاویه زوایای حاده متمم یکدیگرند.

■ **قضیه ۵.** هر چهار ضلعی ساکری یک مستطیل است.



شکل ۱۱.۳

اثبات. بنا بر قضیهٔ ۱، $\angle 4 \cong \angle 2$. چون $AB=CD$ و $AC=AC$ نتیجه می‌شود که $\triangle BAC \cong \triangle DCA$. بنابراین $\angle B \cong \angle D$ و $\angle B$ قائمه است. اثبات قائمه بودن $\angle C$ صرفاً با تغییر نماد بدست می‌آید. پس بالأخره نشان دادیم که مستطیل وجود دارد. □

توجه کردید که در این اثبات برای توضیح نماد از شکل استفاده کردیم. اگر خواننده (یا نویسنده) راه دیگری مثلاً برای توضیح مفهوم زوایای متبادل داخلی به‌نظرش نرسد، ارزش آن را دارد که راه‌ها را همانطور که در فصل قبل انجام دادیم در مورد مسئله اعمال کند. اما یک دفعه که این کار را انجام دادیم حق داریم از زبان خلاصه‌نویسی تصاویر استفاده کنیم.

یک چهار ضلعی را ذوزنقه نامند هرگاه لااقل یک زوج اضلاع متقابل موازی داشته باشد. (بعضی مواقع لازم است دو ضلع مقابل دیگر موازی نباشند اما امری غیرطبیعی است درست مثل اینکه قید کنیم مثلثهای متساوی‌السّاقین متساوی‌الأضلاع نباشند.) اگر هر دو زوج اضلاع مقابل چهار ضلعی موازی باشند چهار ضلعی یک متوازی‌الاضلاع است. اگر دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع قابل انطباق باشند، چهار ضلعی یک لوزی است. اثبات قضایای زیر را حذف می کنیم (نوشتن آنها از خواندن‌شان خیلی سخت‌تر نیست.)

■ **قضیه ۷.** در هر صفحه دو خط موازی با یک خط با هم موازیند.

■ **قضیه ۸.** اگر قاطعی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری هم عمود است.

■ **قضیه ۹.** هر قطر متوازی‌الاضلاع را به‌دو مثلث قابل انطباق تقسیم می کند.

■ **قضیه ۱۰.** در متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل قابل انطباقند.

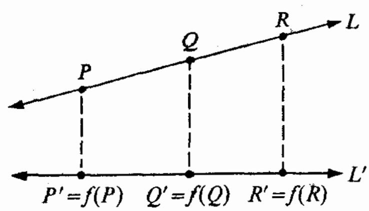
■ **قضیه ۱۱.** قطرهای متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می کنند.

یعنی همدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که وسط هریک از آنهاست. پس برای اثبات ابتدا باید نشان داد که قطرها همدیگر را می‌برند (قضیه ۱ بخش ٤.٤ را ببینید.)

■ **قضیه ۱۲**. هر ذوزنقه یک چهارضلعی محدب است.

۱۱.۲ تصویرهای موازی

بنا بر قضیه ٤ بخش ۸.۲ می‌دانیم که عمود از یک نقطه بر یک خط همیشه موجود و یکتاست.



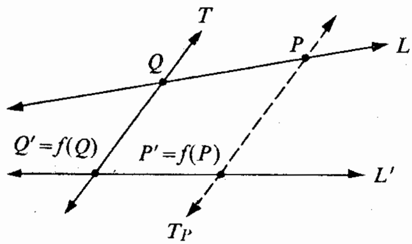
شکل ۱۱.۴

بنابراین اگر دو خط L و L' در یک صفحه داده شده باشند، می‌توانیم تصویر قائم L بتوی L' را تعریف کنیم. این تصویر قائم عبارت است از تابع

$$f{:}L \longrightarrow L'$$

که تحت آن هر نقطهٔ P از L با P' پای عمود از P بر L' متناظر می‌شود یعنی، $P'=f\ (P)$. در واقع می‌توان تصویر قائم را در حالتی که خطوط لزوماً همصفحه نیستند به‌همین خوبی تعریف کرد و تعریف دقیقاً همین است. ولی این حالت کلی مورد نظر ما نیست. همچنین توجه کنید که وجود و یکتایی تصویر قائم به‌اصل توازی بستگی ندارد. ولی برای تعریف و بررسی مفهوم کلی‌تر تصویر موازی به‌این اصل نیاز داریم. در این طرح کلی‌تر بجای اینکه از خط عمود استفاده کنیم تا از P به $P'=f(P)$ برسیم در هر جهتی که بخواهیم اقدام می‌کنیم اما بشرط اینکه برای همهٔ نقاط P روی L از یک جهت استفاده شود. به‌بیان دقیق‌تر، تعریف تصاویر موازی چنین است.

دو خط L و L' و قاطع T مفروضند. (بنا بر تعریف قاطع، هر سه خط در یک صفحه واقعند.) فرض کنید T خطوط L و L' را بترتیب در نقاط Q و Q' ببرد.



شکل ۱۱.۵

فرض کنید $f(Q)$ همان Q' باشد. به‌ازای هر نقطهٔ دیگر P روی L فرض کنید T_p خطی باشد که از P می‌گذرد و با T موازی است.

(۱) اگر T_p موازی L' باشد، آنگاه $T||L'$، که نادرست است، زیرا T قاطعی برای L و L' است. بنابراین T_p خط L' را لااقل در یک نقطه مانند P' می‌برد.

(۲) اگر $T_p=L'$ آنگاه $L'||T$، که نادرست است. بنابراین T_p خط L' را در حداکثر یک نقطه مانند P' می‌برد.

به‌ازای هر نقطهٔ P روی L فرض کنید $f(P)$ نقطهٔ یکتای P' باشد که T_p خط L' را در آن می‌برد. بدین ترتیب تابع

$$f:L \longrightarrow L'$$

تعریف می‌شود. تابع f را تصویر L روی L' در امتداد T می‌نامند.

■ **قضیه ۱**. هر تصویر موازی یک تناظر یک‌بیک است.

اثبات. فرض کنید

$$f:L \longrightarrow L'$$

تصویر L روی L' در امتداد T باشد. (شکل ۱۱.۵ را ببینید). فرض کنید g تصویر L' روی L در امتداد T باشد. بدیهی است که g عمل f را عکس می‌کند یعنی اگر $p=g(p')$ آنگاه $p'=f(p)$. بنابراین f دارای تابع معکوس است

$$f^{-1} = g:L' \longrightarrow L \,.$$

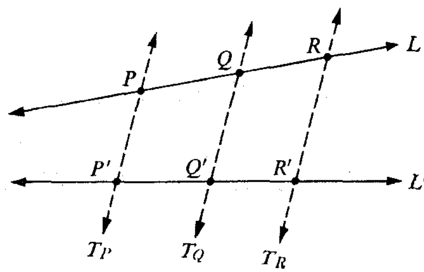
بنابراین f تناظری یک‌بیک $L \leftrightarrow L'$ است، که باید ثابت می‌شد. □

(روش دیگر طرح آن بیان این مطلب است که به‌ازای هر نقطهٔ P' از L' یک و تنها یک نقطه مانند P روی L هست که $P'=f(P)$. در این مرحله ممکن است مرور بحث توابع در بخش ۳.۱ را

مفید بدانید.)

■ **قضیه ۲.** تصاویر موازی بینیّت را حفظ می کنند.

بیان دیگر، فرض کنید $f{:}L \leftrightarrow L'$ یک تصویر موازی باشد. اگر روی L داشته باشیم $P-Q-R$ آنگاه روی L' داریم $P'-Q'-R'$.



شکل ۱۱.۶

در اینجا، البته، $P'=f(P)$، $Q'=f(Q)$ و $R'=f(R)$.

اثبات. فرض کنید T_p، T_Q، T_R بصورتی باشند که در تعریف تصویر موازی آمده است؛ بنابراین

$$T_p \| T_Q \| T_R \cdot$$

در این صورت R و R' در یک طرف T_Q می باشند، زیرا $\overline{RR'}$ خط T_Q را قطع نمی کند. همین طور P و P' در یک طرف T_Q می باشند، اما R و P در دو طرف T_Q می باشند، زیرا $P-Q-R$. با دو دفعه استفاده از قضیه ۲ بخش ٤.۲ نتیجه می شود که P' و R' در دو طرف T_Q می باشند.

بنابراین $\overline{P'R'}$ خط T_Q را در نقطه‌ای مانند X می برد. چون $T_Q \neq L'$ فقط یک چنین نقطهٔ تقاطعی دارند. در نتیجه $X=Q'$. بنابراین Q' روی $\overline{P'R'}$ واقع است و $P'-Q'-R'$، که باید ثابت می شد. □

■ **قضیه ۳. تصاویر موازی قابلیت انطباق را حفظ می کنند.**

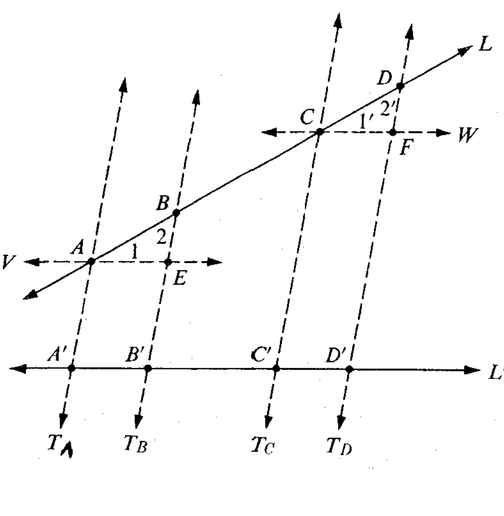
بیان دیگر، فرض کنید $f : L \leftrightarrow L'$ یک تصویر موازی باشد. اگر روی L، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ آنگاه روی L' داریم $\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$.

اثبات.

(۱) اگر $L||L'$، آنگاه $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ اضلاع مقابل یک متوازی‌الاضلاع هستند. بنا بر قضیه ۱۰ بخش ۱۱.۱ نتیجه می‌شود که $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. همین‌طور $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$. بنابراین $\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$ که می‌خواستیم.

(۲) فرض کنید مثل شکل ۱۱.۷ دوخط L و L' موازی‌نباشند. فرض کنید V خطی که از A می گذرد و موازی L' است، T_B را در E ببرد. فرض کنید W خطی که از C می گذرد و موازی L' است، T_D را در F ببرد.

حال $V||W$، و L یک قاطع است. با انتخاب نماد مناسبی برای C و D، $\angle BAE = \angle ۱$ و $\angle DCF = \angle ۱'$ دو زاویهٔ متناظرند. (این امر برای حالتی که در شکل نشان داده شده درست است؛ اگر درست نباشد حروف C و D را باهم عوض می کنیم) بنا بر قضیه ۲ بخش ۱۱.۱ داریم $\angle ۱ \cong \angle ۱'$.



شکل ۱۱.۷

به‌همان دلایل

$$\angle ۲ \cong \angle ۲'.$$

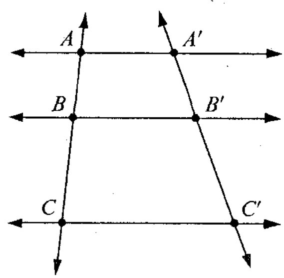
چون بنا به‌فرض $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، بنا بر ز ض ز نتیجه می گیریم که

$$\triangle ABE \cong \triangle CDF \cdot$$

$\overline{AE} \cong \overline{CF}$. اما $\overline{AE} \cong \overline{A'B'}$ و $\overline{CF} \cong \overline{C'D'}$، زیرا این پاره‌خطها اضلاع مقابل

در متوازی‌الاضلاع‌ها هستند. بنابراین $\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$، که باید ثابت می‌شد. □

حال سه خط موازی با دو قاطع، مثل شکل زیر، را در نظر می گیریم.



شکل ۱۱.۸

باید رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}.$$

به‌سبک قضایای قبلی‌مان این مطلب را می‌توانیم به‌این صورت بیان کنیم که تصاویر موازی نسبتها را حفظ می کنند. در واقع این درست است، اما اثبات آن مشکل است و در دو بخش بعد گفته خواهد شد.

این قضیه ارزش کار کردن را دارد زیرا زیر بنای تمام نظریهٔ تشابه مثلثهاست. اثبات آن همانطور که انتظار می رود به‌اصل توازی اقلیدس وابسته است: اگر موازیها یکتا نباشند، حتی تصاویر موازی خوش تعریف نخواهند بود.

۱۱.۳ قضیهٔ مقایسه

روش جبری که برای اثبات حفظ شدن نسبتها تحت تصاویر موازی به کار می بریم برمبنای قضیهٔ زیر است.

■ **قضیه ۱. قضیهٔ مقایسه.** فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند. فرض کنید (۱) هر عدد گویای کوچکتر از x از y نیز کوچکتر باشد و (۲) هر عدد گویای کوچکتر از y از x نیز کوچکتر باشد. در این صورت $x=y$

اثبات بر مبنای قضیه ۲ بخش ۱.۸ ساده است. فرض کنید $x<y$. پس عدد گویایی مانند

p/q بین x و y موجود است. بنابراین

$$x < \frac{p}{q} < y \quad ،$$

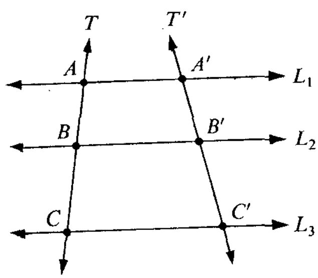
و p/q از y کوچکتر است اما از x کوچکتر نیست. این با (۲) تناقض دارد. همچنین اگر $y<x$، برای عدد گویایی مانند p/q داریم

$$y < \frac{p}{q} < x$$

و این با (۱) تناقض دارد. بنابراین $x=y$، که باید ثابت می‌شد. □

۱۱.۴ قضیهٔ اصلی تشابه

هدف ما در این بخش این است که نشان دهیم تصویر موازی نسبتها را حفظ می کند. ابتدا حالت خاصی را که در شکل زیر نمایش داده شده و در قضیه زیر بررسی شده است در نظر می گیریم،



شکل ۱۱.۹

در اینجا $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ سه خط موازی با قاطعهای مشترک T و T' می باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} .$$

■ **قضیه ۱. قضیهٔ اصلی تشابه.** فرض کنید $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ سه خط موازی با دو قاطع مشترک T و T' باشند که آنها را در نقاط A، B، C و A'، B'، C' بریده‌اند. اگر $A-B-C$ (و $A'-B'-C'$) آنگاه

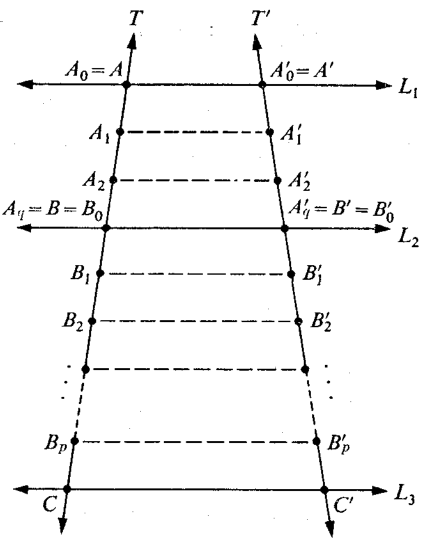
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} .$$

اثبات. فرض کنید

$$x = \frac{BC}{AB} \quad \text{و} \quad y = \frac{B'C'}{A'B'} .$$

فرض کنید p و q دو عدد صحیح مثبت باشند.

(۱) ابتدا $\overline{AB}$ را به q پاره‌خط قابل انطباق تقسیم می کنیم، که مانند شکل زیر انتها به‌انتها باشند:



شکل ۱۱.۱۰

یعنی دنباله‌ای از نقاط

$$A = A_0, A_1, \dots, A_q = B$$

را بترتیبی که بیان شده‌اند روی نیمخط $\overrightarrow{AB}$ می گیریم، بطوریکه طول هریک از پاره‌خطهای حاصل برابر AB/q باشد.

(۲) سپس روی نیمخط $\overrightarrow{BC}$ هم یک دنباله از P پاره‌خط با همان طول AB/q قرار می‌دهیم. نقاط انتهایی این پاره‌خطها عبارتند از

$$B = B_0, \ B_1, \dots, \ B_p .$$

(۳) حال هریک از نقاط A_i، B_j را روی T' در امتداد L_1 تصویر می کنیم. بدین ترتیب نقاط A'_i، B'_j روی T' بدست می‌آیند.

چون همهٔ پاره‌خطهای کوچک روی T قابل انطباقند، داریم

$$\frac{BB_p}{AB} = \frac{p}{q} .$$

چون تصاویر موازی قابلیت انطباق را حفظ می کنند، همهٔ پاره‌خطهای کوچک روی T' قابل انطباقند. بنابراین

$$\frac{B'B'_p}{A'B'} = \frac{p}{q} .$$

حالا می توانیم اثبات را طی دو مرحله بسادگی کامل کنیم.

(٤) فرض کنید که

$$\frac{p}{q} < x = \frac{BC}{AB} .$$

پس

$$p \cdot \frac{AB}{q} < BC .$$

در نتیجه

$$BB_p < BC .$$

بنابراین همانطور که در شکل ۱۱.۱۰ نشان داده شده است

$$B{-}B_p{-}C .$$

و چون تصویر موازی میان بود را حفظ می کند،

$$B'{-}B'_p{-}C' .$$

بنابراین

$$B'B'_p < B'C' \quad \text{و} \quad p \cdot \frac{A'B'}{q} < B'C'$$

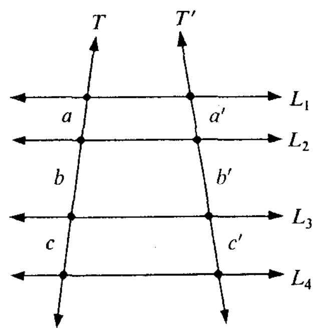
و لذا

$$\frac{p}{q} < \frac{B'C'}{A'B'} .$$

(در اینجا ما صرفاً مراحلی را که از $p/q < BC/AB$ منجر به $B-B_p - C$ شد برعکس کرده‌ایم.) بدین ترتیب ثابت کردیم که اگر $p/q < x$، آنگاه $p/q < y$.

(۵) دقیقاً با همان استدلال نتیجه می گیریم که اگر $p/q < y$، آنگاه $p/q < x$. از قضیهٔ مقایسه نتیجه می‌شود که $x=y$، که باید ثابت می کردیم. $\square$

به‌شیوه‌های مختلف قضیهٔ ۱ را تعمیم می‌دهیم تا به‌حالت کلی برسیم. چهار نقطهٔ دلخواه روی T و نقاط نظیر آن تحت تصویر موازی روی T' را در نظر می گیریم:



شکل ۱۱.۱۱

در اینجا a، b، c و غیره طولهای پاره‌خطهای نشان داده شده‌اند. با دو دفعه استفاده از قضیهٔ ۱ داریم

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{و} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} .$$

بنابراین داریم

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{و} \quad \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} .$$

در نتیجه

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \quad \text{و} \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}\,.$$

آنچه را که ثابت کردیم می‌توانیم به‌صورت زیر بیان کنیم.

■ **قضیهٔ ۲**. اگر دو پاره‌خط از خطی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند آنگاه نسبت طول آنها تحت تصویر موازی حفظ می‌شود.

به‌استناد این قضیه می‌توان قضیهٔ اصلی را بسادگی ثابت کرد.

■ **قضیه ۳**. تصویر موازی نسبتها را حفظ می‌کند.

بیان دیگر. فرض کنید T و T' خطوطی باشند. فرض کنید A، B، C و D نقاط دلخواهی روی T باشند و A'، B'، C' و D' نقاط نظیر آنها تحت یک تصویر موازی روی T' باشند. در این صورت

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

اثبات. فرض کنید $\overline{XY}$ پاره‌خطی روی T باشد که با $\overline{AB}$ یا $\overline{CD}$ نقطهٔ مشترکی ندارد، و فرض کنید $\overline{X'Y'}$ پاره‌خط نظیر روی T' تحت تصویر موازی باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۲ داریم

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{XY}{X'Y'} = \frac{CD}{C'D'}\,.$$

بنابراین

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

و $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$ ، که باید ثابت می‌کردیم. □

فصل ۱۲

تشابه بین مثلثها

۱۲.۱ نسبت‌ها

فرض کنیم دو دنباله

$$a,b,c,\ldots; \quad a',b',c',\ldots$$

از اعداد مثبت مفروضند. اگر رابطه‌های

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \ldots$$

برقرار باشد گوییم دو دنباله متناسب‌اند و می‌نویسیم

$$a,b,c,\ldots \sim a',b',c',\ \ldots$$

نسبت ثابت،

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \ldots,$$

را ثابت تناسب می‌نامند. توجه کنید که تناسب یک رابطهٔ متقارن است. یعنی اگر

$$a,b,c,\ldots \sim a',b',c',\ldots$$

آنگاه

$$a',b',c',\ldots \sim a,\ b,\ c,\ldots$$

و برعکس. ولی توجه کنید که ثابت تناسب به‌ترتیبی که دنباله‌ها نوشته می‌شوند بستگی دارد. اگر ترتیب را عوض کنیم ثابت جدیدی به‌دست می‌آید که عکس ثابت قدیم است.

برای کار کردن با تناسبها، صرفاً آنها را بر حسب روابط بین کسرها بیان می کنیم و سپس قواعد معمولی جبر را به کار می بریم. قضیهٔ زیر نمونه‌ای از آن است.

■ **قضیه.** اگر $a، b \sim c، d$ آنگاه $a، c \sim b، d$ و برعکس.

اثبات. از تناسب اول نتیجه می‌شود که

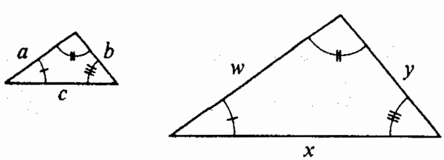
$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \text{ ،}$$

و از دومی نتیجه می‌شود که

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ .}$$

واضح است که این روابط معادلند. □

برای چنین مطلبی، این سؤال مطرح می‌شود که چرا اصلاً این نماد ارزش معرفی دارد. دلیلش این است که رابطه «$\sim$» را اغلب بسادگی می توان از روی شکل نوشت. به‌منظور تشریح، گرچه هنوز به‌آن نرسیده‌ایم، یک زوج مثلث متشابه مثل این دو مثلث را در نظر بگیرید:



شکل ۱۲.۱

اگر طول اضلاع را بترتیب مناسبی بنویسیم، تناسب زیر بدست می‌آید

$$a,b,c \sim w,y,x \text{ .}$$

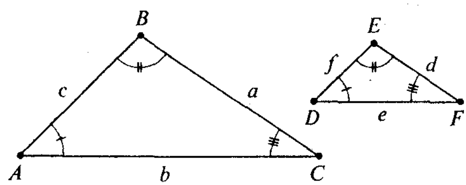
حالا آن را از هندسه به‌جبر برگردانده‌ایم و می‌توانیم به‌روش جبری با کسرها کار کنیم و از روابط زیر شروع کنیم

$$\frac{w}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x}{c} \text{ .}$$

۱۲.۲ تشابه بین مثلثها

مثلثهای $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ و تناظر زیر داده شده‌اند

$$ABC \leftrightarrow DEF \cdot$$



شکل ۱۲.۲

از همان قرارداد معمولی استفاده می کنیم که a طول ضلع روبرو به $\angle A$ باشد و غیره. اگر

$$a,b,c \sim d,\ e,f,$$

آنگاه اضلاع متناظر متناسبند. اگر اضلاع نظیر متناسب و هر زوج زوایای نظیر قابل انطباق باشند آنگاه تناظر را یک تشابه می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \cdot$$

اگر بین دو مثلث تشابهی موجود باشد، گوییم مثلثها متشابه‌اند. (مثل حالت انطباقها و قابل انطباق، مواردی که حقیقتاً منظور ما این است خیلی کم اتفاق می‌افتد.) یادآوری می کنیم که از عبارت

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \quad ،$$

می‌توان ـ بدون هیچ مراجعهٔ دیگری به‌شکل ـ برداشت کرد که سه زاویه قابل انطباقند

$$\angle A \cong \angle D \ \text{و}\ \angle B \cong \angle E \ \text{و}\ \angle C \cong \angle F$$

و سه پاره‌خط هم قابل انطباقند

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \ \text{و}\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \ \text{و}\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \cdot$$

با این روش، از عبارت

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \quad ،$$

می‌توان قابلیت انطباق همان سه زاویه و تناسب زیر را برداشت کرد

$$AB \text{ , } AC \text{ , } BC \sim DE \text{ , } DF \text{ , } EF \cdot$$

برای بدست آوردن نیمه سمت راست این عبارت، هریک از حروف A، B، یا C در سمت چپ را با حرف نظیر آن D، E یا F جایگزین می کنیم. صرفنظر از جزئیات، دو مثلث متشابه‌اند هر گاه دارای یک ریخت باشند اما لزومی ندارد که هم‌اندازه باشند. چنین به‌نظر می‌رسد که ریخت باید تنها به‌وسیلهٔ زوایا معین شود و این درست است.

■ **قضیه۱. قضیه تشابه ززز.** فرض کنید تناظری بین دو مثلث داده شده باشد. اگر زوایای متناظر قابل انطباق باشند، آنگاه تناظر یک تشابه است.

بیان دیگر. مثلثهای $\triangle ABC$، $\triangle DEF$ و تناظر زیر داده شده‌اند،

$$ABC \leftrightarrow DEF \cdot$$

اگر $\angle A \cong \angle D$، $\angle B \cong \angle E$ و $\angle C \cong \angle F$ آنگاه

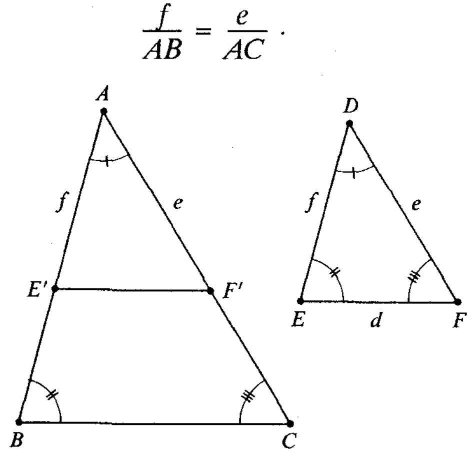
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

اثبات. فرض کنید همانطور که در شکل ۱۲.۳ نشان داده شده است E' و F' نقاطی از $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشند، بطوری که $AE'=f$ و $AF'=e$ بنا بر ض ز ض داریم

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF \cdot$$

بنابراین، $\angle AE'F' \cong \angle E$. چون $\angle E \cong \angle B$ داریم $\angle AE'F' \cong \angle B$؛ در نتیجه $\overleftrightarrow{E'F'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ و A، F' و C تحت تصویر موازی با A، E' و B متناظرند. چون تصاویر موازی نسبتها را حفظ می کند، داریم

$$\frac{f}{AB} = \frac{e}{AC} \cdot$$



شکل ۱۲.۳

درست با همان روش، صرفاً با تغییر نماد، می‌توان نشان داد که

$$\frac{e}{AC} = \frac{d}{BC} \quad ؛$$

بنابراین

$$d, e, f \sim BC, AC, AB,$$

و

$$d, e, f \sim a, b, c \cdot$$

بنابراین اضلاع متناظر متناسب‌اند و تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$ یک تشابه است، که باید ثابت می‌شد. □

البته از قضیهٔ جمع زوایا نتیجه می‌شود که اگر دو زوج زوایهٔ نظیر قابل انطباق باشند، زوج سوم نیز قابل انطباقند. بدین ترتیب قضیهٔ زیر بدست می‌آید.

■ **قضیه ۲. قضیهٔ تشابه زز.** فرض کنید تناظری بین دو مثلث داده شده باشد. اگر دو زوج زاویهٔ نظیر قابل انطباق باشند، آنگاه تناظر یک تشابه است.

قضیهٔ زیر را می‌توان از نظری عکس قضیهٔ ۱ دانست.

■ **قضیه ۳. قضیهٔ تشابه ض ض ض.** دو مثلث و تناظری بین آنها مفروض‌اند. اگر اضلاع نظیر متناسب باشند آنگاه زوایای نظیر قابل انطباقند و تناظر یک تشابه است.

بیان دیگر، مثلثهای $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ و تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$ مفروض‌اند. اگر

$$a, b, c \sim d, e, f$$

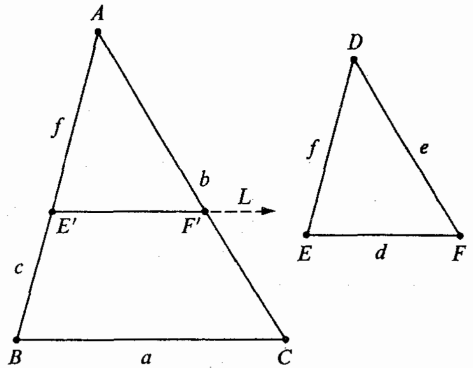
آنگاه

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \cdot$$

اثبات. فرض کنید E' نقطه‌ای از $\overrightarrow{AB}$ باشد که برای آن $AE' = f$ (شکل ۱۲.۴). فرض کنید L خطی باشد که از E' می‌گذرد و با $\overleftrightarrow{BC}$ موازی است. اگر $L \parallel \overleftrightarrow{AC}$ آنگاه $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ که نادرست است. بنابراین L خط $\overleftrightarrow{AC}$ را در نقطه‌ای مانند F' می‌برد. (در شکل $b = AC$ نه AF'.)

حال $\angle AE'F' \cong \angle B$ زیرا دو زاویهٔ متناظرند و $\angle A \cong \angle A$. بنابراین

$$\triangle AE'F' \sim \triangle ABC \; ;$$



شکل ۱۲.۴

در نتیجه

$$f, AF', E'F' \sim c, b, a \ .$$

پس $\frac{c}{f} = \frac{b}{AF'} = \frac{a}{E'F'}$ و $AF' = \frac{bf}{c}$ و $E'F' = \frac{af}{c}$.

اما

$$f, e, d \sim c, b, a \ .$$

در نتیجه

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} = \frac{a}{d} \quad \text{و} \quad e = \frac{bf}{c} \ , \ d = \frac{af}{c} \ .$$

بنابر ض ض ض داریم.

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF \ .$$

بنابراین

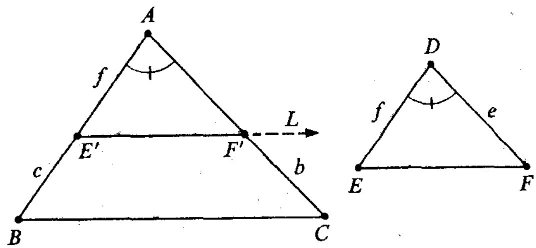
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$، که باید ثابت می‌شد. □

حال قضیه‌ای نظیر ض ز ض داریم.

■ **قضیه ۴. قضیه تشابه (ض ز ض).** تناظری بین دو مثلث داده شده است. اگر دو زوج اضلاع متناظر متناسب باشند و زوایای شامل آن دو ضلع قابل انطباق باشند آنگاه تناظر یک تشابه است.

بیان دیگر، مثلثهای $\triangle ABC$، $\triangle DEF$ و تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$ مفروضند. اگر

$\angle D \cong \angle A$ و $e,f \sim b,c$ آنگاه $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.



شکل ۱۲.۵

اثبات. فرض کنید E' نقطه‌ای روی $\overrightarrow{AB}$ باشد که $AE' = f$ و L خطی باشد که از E' می گذرد و موازی $\overleftrightarrow{BC}$ است. در این صورت L خط $\overleftrightarrow{AC}$ را در نقطه‌ای مانند F' قطع می کند. مراحل اصلی اثبات از اینجا به‌بعد بصورت زیر می‌باشند. شما باید بتوانید دلایل هر حالت را بیان کنید.

(۱) $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$.

(۲) $AF', f \sim b,c$.

(۳) $AF' = e$.

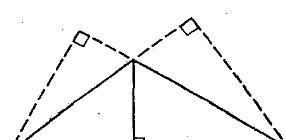
(۴) $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$

(۵) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $\square$

■ **قضیه ۵.** تشابهی بین دو مثلث مفروض است. اگر یک زوج اضلاع متناظر قابل انطباق باشند، آنگاه تناظر یک قابلیت انطباق است.

اثبات؟ در واقع این مطلب یکی از مراحل اثبات قضیهٔ قبل بود.

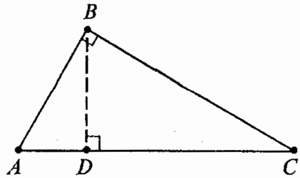
یک ارتفاع مثلث پاره‌خطی است که از یک رأس بر خط شامل ضلع مقابل آن رأس عمود می‌شود.



شکل ۱۲.۶

همانطور که شکل نشان می‌دهد هر مثلث سه ارتفاع دارد. کلمهٔ ارتفاع را برای اندازهٔ این

پاره‌خطهای عمود هم به کار خواهیم برد. در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر همیشه یک ارتفاع داخلی است، مثل شکل زیر:



شکل ۱۲.۷

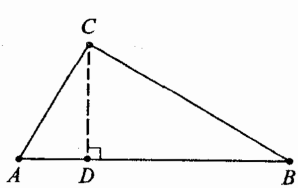
یعنی، اگر $\angle B$ یک زاویهٔ قائمه باشد، و $\overline{BD} \perp \overline{AC}$، آنگاه $A-D-C$ (این مطلب از قضیه ۵ بخش ۱۰.۴ نتیجه می‌شود.) $\square$

۱۲.۳ قضیهٔ فیثاغورس

برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس به یک نتیجهٔ مقدماتی نیاز داریم.

■ **قضیه ۱**. در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر آن را به‌دو مثلث تقسیم می‌کند که هریک از آنها با آن متشابه است.

بیان دیگر. فرض کنید $\triangle ABC$ یک مثلث قائم‌الزاویه باشد که $\angle C$ قائمه است و فرض کنید D پای عمود از C بر $\overleftrightarrow{AB}$ باشد. در این صورت $\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$.



شکل ۱۲.۸

(بخاطر اینکه نحوهٔ بکار بردن این تشابه‌ها را بخاطر بسپارید، کافی است توجه کنید که این تشابه‌ها تنها به‌یک روش می‌توانند بکار روند. در تشابه اول چون $\angle A$ بین $\triangle ACD$ و $\triangle ABC$ مشترک است $A \leftrightarrow A$. همین‌طور باید $C \leftrightarrow D$ زیرا اینها نقاطی هستند که زوایای

قائمه در آنها واقعند. بالاخره باید $B \leftrightarrow C$ زیرا در این مرحله C جای دیگری برای متناظر شدن ندارد. بنابراین تناظر باید $ABC \leftrightarrow ACD$ باشد؛ و همین طور برای تشابه دوم).

اثبات. واضح است که $\angle A \cong \angle A$، و $\angle ACB \cong \angle ADC$ زیرا هر دوی آنها قائمه‌اند. بنا بر قضیه تشابه (زز) داریم

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \cdot$$

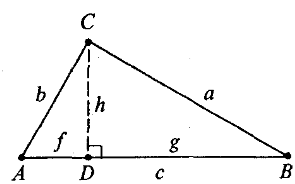
اثبات نیمهٔ دوم قضیه دقیقاً همین است. □

■ **قضیه ۲. قضیهٔ فیثاغورس.** در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازهٔ وتر برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر.

بیان دیگر، فرض کنید $\triangle ABC$ مثلثی قائم‌الزاویه باشد که زاویهٔ قائمهٔ آن در C است. در این صورت

$$a^{2}+b^{2} = c^{2} \cdot$$

در اینجا برای اندازه‌های اضلاع مقابل از نمادهای معمولی استفاده می کنیم (مثلاً اندازهٔ ضلع روبرو به $\angle A$ را به a نشان می‌دهیم.)



شکل ۱۲.۹

اثبات. بنا بر قضیهٔ قبل

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD \cdot$$

بنابراین

$$h,f,b \sim a,b,c \sim g,h,a \cdot$$

f و g را بر حسب a و b و c پیدا می کنیم و از این که $f+g=c$ استفاده می کنیم (پرسش: به‌استناد چه قضیه‌ای می‌توان نتیجه گرفت که $f+g=c$؟)

مرحلهٔ ۱. چون

$$\frac{f}{b} = \frac{b}{c} \quad ,$$

داریم $. f = \dfrac{b^۲}{c}$

و چون

$$\frac{g}{a} = \frac{a}{c} \quad ,$$

داریم

$$g = \frac{a^۲}{c}$$

مرحلهٔ ۲. بنابراین، $c = \dfrac{a^۲+b^۲}{c} = f+g$.

بنابراین $c^۲ = a^۲+b^۲$ که نتیجه مطلوب است. □

در داستانها آمده است که فیثاغورس وقتی این قضیه را ثابت کرد به‌خاطر شکرگزاری صد گاو نر را قربانی کرد. (داستان مشکوک است و معلوم نیست که آیا قضیه را فیثاغورس خودش ثابت کرده است.)

هنریش هانیه، شاعر آلمانی، خاطرنشان کرده است که از آن قربانی ببعد هر وقت حقیقت مهمی کشف می‌شود گاوهای نر بدنشان به‌لرزه می‌افتد.

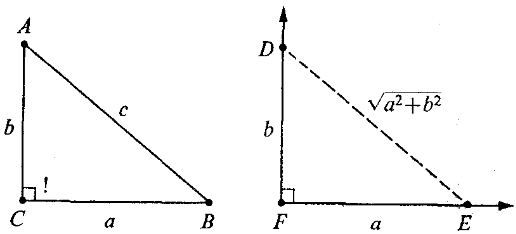
اثباتی که در اینجا آمده اثباتی نیست که در اصول اقلیدس آمده است. در اثبات اقلیدس (که بعداً بررسی می کنیم) از مساحت زیاد استفاده می‌شود. در طول دو هزار سال یا بیشتر قضیهٔ فیثاغورس بسیار غنی شده است. صدها اثبات برای آن نوشته‌اند. عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست و اثبات آن ساده است.

■ **قضیه ۳**. مثلثی با اضلاع a، b و c مفروضند. اگر $a^۲+b^۲=c^۲$ آنگاه مثلث قائم‌الزاویه و زاویهٔ قائمه آن مقابل به‌ضلع با طول c است.

اثبات. مثلث $\triangle ABC$ با $a^۲+b^۲=c^۲$ مفروض است. فرض کنید $\angle E$ زاویه‌ای قائمه و D و E نقاطی روی اضلاع $\angle F$ باشند بطوریکه $FE=a$ و $FD=b$ (شکل ۱۲.۱۰). بنا بر قضیهٔ فیثاغورس

$$DE^۲ = a^۲+b^۲$$

بنابراین $c = \sqrt{a^۲+b^۲} = DE$.



شکل ۱۲.۱۰

پس بنابر ض ض ض $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. در نتیجه $\triangle ABC$ مثلثی قائم‌الزاویه و زاویهٔ قائمهٔ آن در C است. □

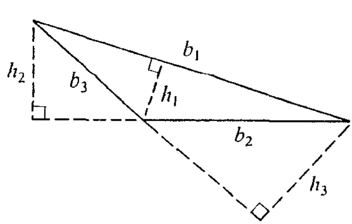
■ **قضیه ۴. قضیه وتر و یک ضلع.** اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری قابل انطباق باشند آنگاه دو مثلث قابل انطباقند.

بیان دیگر. مثلث $\triangle ABC$ با زاویهٔ قائمه در C مفروض است و $\triangle A'B'C'$ با زاویهٔ قائمه در C'. اگر $a=a'$ و $c=c'$ آنگاه $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

این قضیه در بخش ۷.۱ ثابت شد. اثبات آن جزء فصل هفت است زیرا از اصل توازی استفاده نمی‌شود. اما خود قضیهٔ جزء این مبحث است. توجه کنید که قضیه وتر و یک ضلع نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ فیثاغورس است.

قبلاً دیده‌ایم که هر مثلث سه ارتفاع دارد یعنی هر ضلع را که بعنوان قاعده بگیریم یک ارتفاع خواهیم داشت. یک دستور مشهور هست که می‌گوید مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب قاعده و ارتفاع. البته این بدان معنی است که مساحت برابر است با $\frac{1}{2}\,bh$ که در آن b طول یکی از سه ضلع و h ارتفاع نظیر آن است. فرض کنیم که درست باشد، که درست هم هست. در نتیجه بایستی حاصلضرب bh مستقل از انتخاب قاعده باشد. یعنی در شکل زیر باید داشته باشیم

$$b_1h_1 = b_2h_2 = b_3h_3 \,.$$



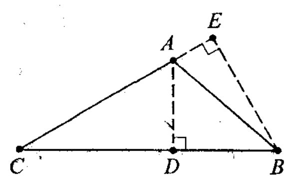
شکل ۱۲.۱۱

اگر نظریهٔ مساحت سطح با استفاده از اصول بنا شده بود، آنگاه با استفاده از مساحت می‌توانیم نشان دهیم که این روابط برقرارند. ولی بعداً، می‌خواهیم ثابت کنیم که اشکال ساده از قبیل مثلث دارای مساحت‌اند، و مساحتها خواص مورد انتظار ما را دارا هستند. برای این منظور می‌خواهیم قضیهٔ زیر را بدون استفاده از مساحت ثابت کنیم.

■ **قضیهٔ ۵.** در هر مثلث، حاصلضرب قاعده و ارتفاع نظیر آن از انتخاب قاعده مستقل است.

بیان دیگر. مثلث $\triangle ABC$ مفروض است. فرض کنید $\overline{AD}$ ارتفاع از A وارد بر $\overleftrightarrow{BC}$ باشد و $\overline{BE}$ ارتفاع از B وارد بر $\overleftrightarrow{AC}$ باشد. در این صورت

$$AD \cdot BC = BE \cdot AC \cdot$$



شکل ۱۲.۱۲

اثبات. فرض کنید همانطور که در شکل نشان داده شده است $E \neq C$ و $D \neq C$. در این صورت $\angle C = \angle C$ و $\angle ADC \cong \angle BEC$، زیرا هردو زاویهٔ قائمه‌اند. بنابراین $\triangle BEC \sim \triangle ADC$. در نتیجه

$$BE \,,\, BC \sim AD \,,\, AC \cdot$$

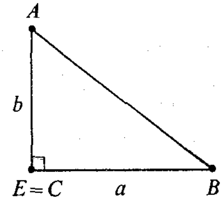
در نتیجه

$$\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} \quad ,$$

و

$AD \cdot BC = BE \cdot AC,$ که باید ثابت می کردیم.

اگر $E = C$، آنگاه $\triangle ABC$ مثلثی قائم‌الزاویه با زاویهٔ قائمه در C و $D = C$.



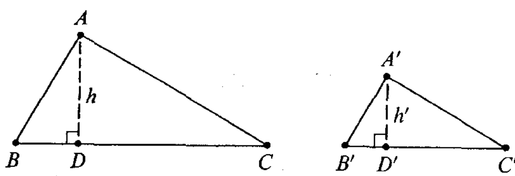
شکل ۱۲.۱۳

در این حالت، قضیه این مطلب ساده را بیان می کند که $ab=ba$.

■ **قضیه ۶.** برای مثلثهای متشابه، نسبت هر دو ارتفاع نظیر برابر است با نسبت هر دو ضلع نظیر.

بیان دیگر. فرض کنید $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ و h اندازه ارتفاع از A تا $\overleftrightarrow{BC}$ و h' اندازه ارتفاع از A' تا $\overleftrightarrow{B'C'}$. در این صورت

$$\frac{h}{h'} = \frac{AB}{A'B'} .$$



شکل ۱۲.۱۴

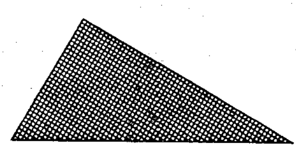
اثبات. فرض کنید $\overline{AD}$ و $\overline{A'D'}$ ارتفاعهایی باشند که اندازهٔ آنها h و h' می‌باشد. اگر $D=B$ آنگاه $D'=B'$ و لازم نیست چیزی را ثابت کنیم. در غیر این صورت $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ و قضیه حاصل می‌شود. □

فصل ۱۳

نواحی چند ضلعی و مساحت آنها

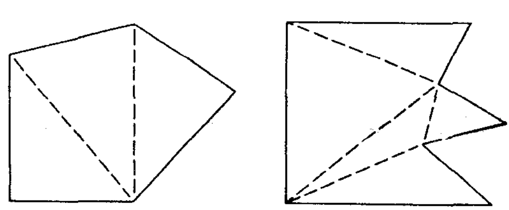
۱۳.۱ اصول مساحت

ناحیهٔ مثلثی عبارت است از شکلی که اتحاد یک مثلث و نقاط درون آن می باشد مثل این:



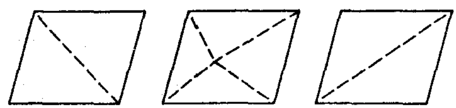
۱۳.۱

اضلاع مثلث را یالهای ناحیه و رئوس مثلث را رئوس ناحیه می نامند.
ناحیهٔ چند ضلعی شکلی نظیر یکی از اینهاست:



شکل ۱۳.۲

به‌بیان دقیق ناحیهٔ چند ضلعی شکلی است که بتوان آن را به‌صورت اتحاد تعدادی متناهی ناحیهٔ مثلثی بیان کرد بطوریکه اگر دو ناحیهٔ مثلثی همدیگر را قطع کنند، اشتراک آنها یالی از هر دو یا رأسی از هر دو باشد. در هر مثال شکل ۱۳.۲ خطوط نقطه‌چین نحوهٔ تقسیم نواحی به‌نواحی مثلثی را بگونه‌ای که شرایط تعریف برقرار باشد، نشان می‌دهد. التبه هیچ یکتایی برای نحوهٔ تقسیم ناحیهٔ چند ضلعی به‌نواحی مثلثی وجود ندارد. در واقع اگر برای شکلی اصولاً این فرایند قابل اجرا باشد، می‌توان این فرایند را برای آن بینهایت بار انجام داد. مثلاً متوازی‌الاضلاع بانضمام درون آن را می‌توان حداقل به‌صورتهای زیر تقسیم کرد:



شکل ۱۳.۳

نظریهٔ مساحت ساده‌ترین آن کار کردن در حالتی است که اشکال ناحیهٔ چند ضلعی باشند. و ساده‌ترین راه برای بنا کردن این نظریه فرض گرفتن یک تابع مساحت است که به‌هر ناحیهٔ مثلثی عدد مثبتی موسوم به‌مساحت آن را نسبت دهد. بنابراین فرض کنید R مجموعهٔ همهٔ نواحی چند ضلعی باشد و به‌ساختمان‌مان تابع $\alpha{:}R \longrightarrow \mathbf{R}$ را بیفزاییم.

پس تا بحال کل ساختمان هندسهٔ ما عبارت است از

$$[S,L,P,d,m,\alpha]$$

و باید اصولی حاکم بر تابع مساحت α بیان کنیم. (در اینجا از حرف یونانی آلفا استفاده می کنیم زیرا حروف انگلیسی را تاکنون برای مقاصد دیگری بکار برده‌ایم. m را برای اندازه بکار برده‌ایم و از این ببعد هم مثلاً A و a در مثلث $\triangle ABC$ را برای این که a طول ضلع مقابل به‌زاویهٔ A است بکار خواهیم برد.)

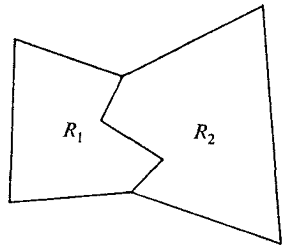
اصول به‌صورت زیر می‌باشند.

A۰۱. α تابعی از R بتوی $\mathbf{R}$ است که در آن R مجموعهٔ همهٔ نواحی چند ضلعی و $\mathbf{R}$ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است.

A۰۲. به‌ازای هر ناحیهٔ چند ضلعی R، $\alpha R>0$.

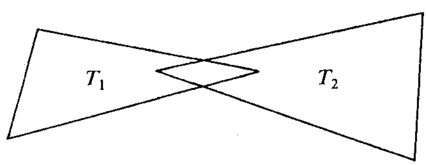
A۰۳. اصل قابلیت انطباق. اگر دو ناحیهٔ مثلثی قابل انطباق باشند آنگاه یک مساحت دارند.

A۰٤. اصل جمع. اگر دو ناحیهٔ مثلثی فقط در یالها **یا** رأسها همدیگر را قطع کنند (یا اصلاً همدیگر را قطع نکنند) آنگاه مساحت اتحاد آنها برابر است با مجموع مساحتهای آنها.



شکل ۱۳.۴

مثلاً، در شکل فوق $\alpha(R_۱ \cup R_۲) = \alpha(R_۱) + \alpha(R_۲)$. البته اگر اشتراک دو ناحیه شامل یک ناحیهٔ مثلثی باشد مساحتها را نمی‌توان به‌این صورت با هم جمع کرد. واضح است که در اینجا $\alpha(T_۱ \cup T_۲)$ از $\alpha T_۱ + \alpha T_۲$ کوچکتر است.



شکل ۱۳.۵

توجه کنید که اگر تابع مساحتی داشته باشیم که در اصل ۱ − A تا ٤ − A صدق می کند و توافق کنیم که همهٔ مساحتها را دو برابر کنیم، آنگاه تابع مساحت دیگری بدست خواهیم آورد که باز در اصول ۱ − A تا ٤ − A صدق می کند. به‌زبان غیراستدلالی مساحتی که بر حسب اینچ مربع اندازه گیری شود در همهٔ اصول صدق می کند و همین طور مساحتی هم که بر حسب ذرع مربع اندازه گیری شود در همهٔ اصول صدق می کند. بنابراین به‌اصلی نیاز داریم که با بیان رابطه‌ای بین مساحت و فاصله، واحد اندازه گیری به‌ما بدهد.

منظور ما از ناحیهٔ مربعی یک مربع و درون آن است. نواحی مستطیلی به‌همین روش تعریف می‌شوند. هریک از احکام زیر، اگر بعنوان اصل گرفته شود، برای تعیین واحد مساحت کافی است.

(۱) اگر یک ناحیهٔ مربعی یالهای آن به‌درازای ۱ باشند مساحت آن برابر است با ۱.

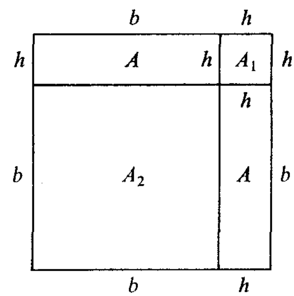
(۲) مساحت ناحیهٔ مستطیلی برابر است با حاصلضرب قاعده و ارتفاع آن.

حکم (۲) بی جهت اصلی قوی است؛ باید بتوانیم دستور مساحت ناحیهٔ مستطیلی را از روی دستور

مساحت ناحیهٔ مربعی بدست آوریم و در واقع کار ساده‌ای است. (مطالب زیر را ببینید). از طرف دیگر (۱) بی جهت ضعیف است: در ابتدای نظریه، منجر به‌اثبات مشکلی برای دستور مساحت ناحیهٔ مربعی به‌یال a می‌شود. (بخش ۱۳.۵ را ببینید). بنابراین حد وسط را می گیریم و از اصل زیر استفاده می کنیم:

A.۵. اگر ناحیه مربعی با یالهای به‌طول a باشد، آنگاه مساحت آن برابر $a^۲$ است.
براین‌مبنا می‌توانیم (۲) را بعنوان یک قضیه ثابت کنیم.

■ **قضیه ۱. دستور مستطیل**: مساحت ناحیهٔ مستطیلی برابر است با حاصلضرب قاعده و ارتفاع آن.



شکل ۱۳.۶

اثبات. مستطیلی با قاعدهٔ b و ارتفاع h مفروض است، مربعی با یال $b+h$ می‌سازیم و آن را همانطور که در شکل فوق نشان داده شده به‌مستطیلها و مربعهایی تقسیم می کنیم. در این صورت

$$(b+h)^۲ = ۲A + A_۱ + A_۲ \,،$$
$$b^۲ + ۲bh + h^۲ = ۲A + h^۲ + b^۲ \,،$$
$$۲bh = ۲A \,،$$

و $A = bh$. □

بعداً خواهید دید که می‌توان نظریه مساحت برای نواحی چند ضلعی را بدون هیچ اصل دیگری ساخت. برمبنای اصولی که قبلاً بیان شد، می‌توان ثابت کرد که تابع مساحتی هست که در A−۱ تا A−۵ صدق می کند. در عین‌حال در فصل حاضر تابع مساحت را مفروض خواهیم گرفت و فرض خواهیم کرد که در A−۱ تا A−۵ صدق می کند و کارایی آن را در مسایل مختلف هندسه نشان خواهیم داد. اولین گام بدست آوردن دستورهایی برای مساحت ساده‌ترین اشکال است.

از این ببعد، برای سهولت، از مساحت مثلث، مساحت مستطیل و امثال آن صحبت خواهیم کرد که

یک خلاصه‌نویسی است. مثلثها و مستطیلها نواحی چندضلعی نیستند و واضح است که نازکتر از آن هستند که مساحتی بزرگتر از صفر داشته باشند. همین‌طور ABC $\alpha\triangle$ را مختصراً ABC و $ABDC$ $\alpha\,\square$ را مختصراً $ABCD$ و غیره خواهیم نوشت. این امر با نماد AB برای طول پاره‌خط $\overline{AB}$ سازگار است. در هر حالت اگر حروفی بدون نشان باشند عبارت حاصل نمایش یک عدد خواهد بود و این عدد بگونه‌ای شکل هندسی نظیر را اندازه می‌گیرد. تکرار می‌کنیم: بنا بر تعریف

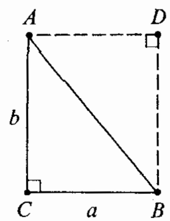
$$ABC = \alpha\triangle ABC\,،$$

و

$$ABCD = \alpha\ \square ABCD\,.$$

۱۳.۲ قضایای مساحت برای مثلثها و چهارضلعی‌ها

■ **قضیه ۱** . مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصلضرب طول‌های ساقهای آن.



شکل ۱۳.۷

$$ABC = \frac{۱}{۲}\,ab$$

اثبات. مثلث $\triangle ABC$ با زاویهٔ قائمه در C مفروض است. فرض کنید D نقطه‌ای باشد که $\square ADBC$ یک مستطیل است. بنابر اصل جمع،

$$ADBC = ABC + ABD\,.$$

بنا بر اصل قابلیت انطباق،

$$ABD = ABC\,.$$

بنابراین $ADBC = ۲ABC$.

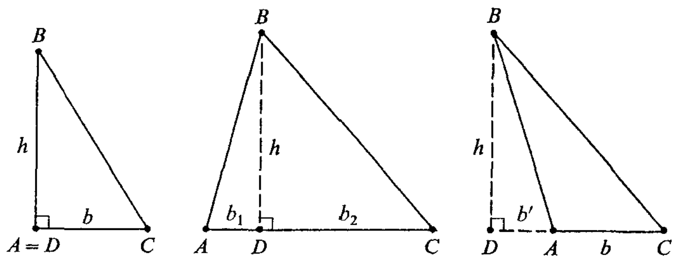
بنا بر دستور مستطیل،

$$ADBC = ab \text{ ،}$$

در نتیجه $۲ABC = ab$ و

$$.ABC = \frac{۱}{۲} ab \quad \square$$

■ **قضیه ۲**. مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب یک قاعدهٔ دلخواه و ارتفاع نظیر آن.



شکل ۱۳.۸

اثبات. مثلث $\triangle ABC$ مفروض است. فرض کنید D پای عمود از B بر $\overleftrightarrow{AC}$ باشد فرض کنید $AC=b$ و $BD=h$ (همانطور که در هریک از شکلهاست). اساساً باید سه حالت در نظر گرفت.

(۱) اگر $A=D$، آنگاه $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است و بنا بر قضیهٔ ۱،

$$ABC = \frac{۱}{۲} bh,$$

(۲) $A-D-C$. فرض کنید $AD=b_۱$ و $DC=b_۲$. بنا بر قضیهٔ ۱،

$$BDA = \frac{۱}{۲} b_۱h \text{ و } BDC = \frac{۱}{۲} b_۲h \text{ .}$$

بنا بر اصل جمع

$$ABC = BDA + BDC$$

بنابراین

$$ABC = \frac{۱}{۲} b_۱h + \frac{۱}{۲} b_۲h = \frac{۱}{۲} (b_۱+ b_۲)h$$

$$= \frac{۱}{۲} bh \text{ ،}$$

که باید ثابت می‌شد.

(۳) $D-A-C$. فرض کنید $b'=AD$. بنا بر قضیهٔ ۱،

$$BDC = \frac{۱}{۲}(b'+b)\ h\ .$$

همچنین بنابر قضیه ۱،

$$BDA = \frac{۱}{۲}b'h\ .$$

بنابر اصل جمع $BDC = BDA + ABC$.

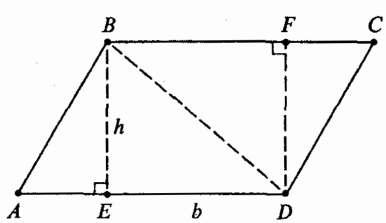
در نتیجه

$$\begin{aligned} ABC &= BDC - BDA \\ &= \frac{۱}{۲}(b'+b)h - \frac{۱}{۲}b'h \\ &= \frac{۱}{۲}bh\ . \end{aligned}$$

و اثبات کامل است. □

■ **قضیه ۳**. مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب یک قاعدهٔ دلخواه و ارتفاع نظیر آن.

$$ABCD = bh\ .$$



شکل ۱۳.۹

اثبات. متوازی‌الاضلاع $ABCD$□ با قاعده $b=AD$ و ارتفاع نظیر $h=BE$ مفروض است. بنا بر اصل جمع

$$ABCD = ABD + BDC\ .$$

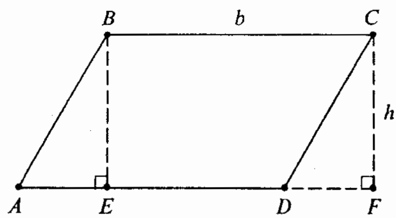
با دو بار استفاده از قضیهٔ ۲،

$$ABD = \frac{1}{2}\,bh \quad \text{و} \quad BDC = \frac{1}{2}\,bh \cdot$$

(جزئیات را بیان کنید. باید بدانیم که $b = BC$ و $h = DE$.) بنابراین

$$ABCD = \frac{1}{2}\,bh + \frac{1}{2}\,bh = bh \cdot \qquad \square$$

ترتیب نتیجه گیریهایی که اغلب دیده‌ایم با این یکی فرق دارد. معمولاً دستور مساحت متوازی‌الاضلاع را اول بدست می‌آوریم و قضیهٔ ۲ را از آن نتیجه می گیریم. در این صورت اثبات قضیه ۳ چنین خواهد بود:



شکل ۱۳.۱۰

(۱) $ABCD = ABE + BCDE$.

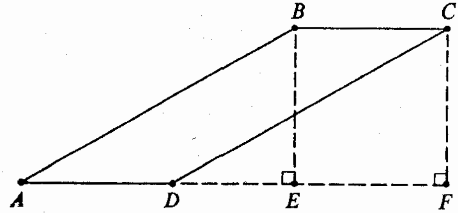
(۲) $ABE = DCF$ زیرا $\triangle ABE \cong \triangle DCF$.

(۳) $ABCD = BCDE + DCF$

(٤) $BCDE + DCF = BCFE$، بنابر اصل جمع.

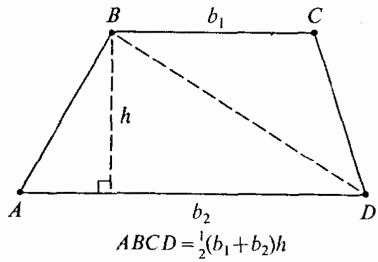
(۵) $BCFE = bh$ بنابر اصل واحد، زیرا $BCFE$ یک مستطیل است.

این اثبات فقط در حالتهایی کارایی دارد که در شکل نشان داده شده است. اگر متوازی‌الاضلاع به‌شکل زیر باشد، آنگاه بحث فوق در اولین مرحله بی‌معنا خواهد شد، زیرا چهار ضلعی مانند $\square BCDE$ وجود ندارد و حتی اگر چهار ضلعیها بتوانند خودشان را ببرند رابطهٔ: $ABCD = ABE + BCDE$ برای مساحت نواحی چند ضلعیهای نظیر برقرار نخواهد بود.



شکل ۱۳.۱۱

■ **قضیه ۴.** مساحت ذوزنقه برابر است با نصف حاصلضرب اندازه ارتفاع ومجموع اندازه‌های دوقاعده.



شکل ۱۳.۱۲

اثبات. مراحل اصلی به‌شکل زیر می باشد:

(۱) $ABCD = ABD + BDC$،

(۲) $ABD = \frac{1}{2} b_2 h$،

(۳) $BDC = \frac{1}{2} b_1 h$،

(٤) $ABCD = \frac{1}{2} (b_1 + b_2)\, h$. □

توجه کنید که قضیه ۳ حالت خاصی از قضیهٔ ٤ است زیرا هر متوازی‌الاضلاع یک ذوزنقه است. همچنین ملاحظه می کنید که اثبات قضیهٔ ٤ دقیقاً همان اثبات قضیهٔ ۳ است. نکته در اینجاست که گرچه در اثبات نادرست قضیهٔ ۳ از این که $\overline{AB}\,||\,\overline{CD}$، استفاده می کنیم و به‌آن نیاز داریم، در اثبات درست چنین نیست.

■ **قضیه ۵.** اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع باشند آنگاه نسبت مساحت آنها برابر است با نسبت قاعدهٔ آنها.

این قضیه بلادرنگ از دستور مساحت نتیجه می‌شود. اگر مثلثهای $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ دارای قاعده‌های b_1 و b_2 و اندازه ارتفاع نظیر برای هریک از آنها مساوی h باشد آنگاه

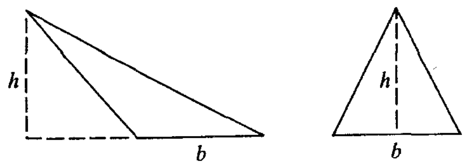
$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{\frac{1}{2} b_1 h}{\frac{1}{2} b_2 h} = \frac{b_1}{b_2}،$$

که باید ثابت می‌شد. تقریباً به‌همان روش، قضیهٔ زیر بدست می‌آید. □

■ **قضیه ۶.** اگر دو مثلث دارای یک قاعده باشند آنگاه نسبت مساحت آنها برابر است با نسبت ارتفاعهای نظیر آنها.

قضیهٔ زیر نتیجه‌ای از هریک از قضایای قبلی است.

■ **قضیه ۷.** اگر دو مثلث دارای یک قاعده و یک ارتفاع باشند آنگاه مساحت آنها یکی است.



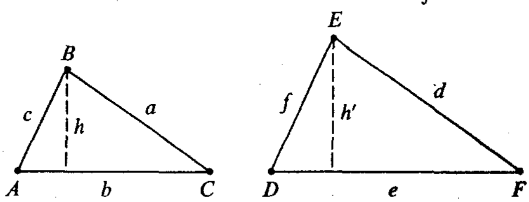
شکل ۱۳.۱۳

■ **قضیه ۸.** اگر دو مثلث متشابه باشند، آنگاه نسبت مساحت آنها برابر است با مربع نسبت اندازه‌های هردوضلع نظیر. یعنی اگر

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF ,$$

آنگاه

$$\frac{ABC}{DEF} = \left(\frac{a}{d}\right)^{۲} = \left(\frac{b}{e}\right)^{۲} = \left(\frac{c}{f}\right)^{۲} .$$



شکل ۱۴.۱۳

اثبات. اگر مثل شکل فوق ارتفاعهای وارد بر $\overline{AC}$ و $\overline{DF}$ اعداد h و h' باشند آنگاه بنا بر قضیه ٦ بخش ۱۲.۳ می‌دانیم که

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} .$$

حال

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{\frac{۱}{۲}\, bh}{\frac{۱}{۲}\, eh'} = \left(\frac{b}{e}\right) \quad \left(\frac{h}{h'}\right)$$

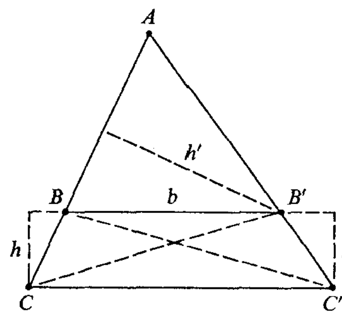
$$= \left(\frac{b}{e}\right)^{۲} = \left(\frac{a}{d}\right)^{۲} = \left(\frac{c}{f}\right)^{۲} ،$$

که باید ثابت می‌شد. □

۱۳.۳ کاربردهای نظریهٔ مساحت: اثبات ساده‌ای برای قضیهٔ اصلی تشابه

نظریه مساحت سطح صرفاً ضمیمه‌ای به‌هندسه‌ای که بر آن بنا شده نیست. اگر از اصول مساحت از ۱$-A$ تا ۵$-A$ بعنوان قسمتی از ابزار اصلی کارمان استفاده کنیم، می‌توانیم بعضی از اثباتها را بنحو چشمگیری ساده کنیم. احتمالاً تکان دهنده‌ترین ساده شدن از این نوع در اثبات قضیهٔ اصلی تشابه است (قضیه ۱، بخش ۱۱.٤)

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که در آن دو قاطع T و T' در نقطه‌ای از L_1 همدیگر را قطع کنند. (همانطور که خواهیم دید از این حالت به‌حالت کلی رسیدن کار ساده‌ای است.) در این صورت تصویر مثل این خواهد بود:



شکل ۱۳.۱۵

می‌دانیم که $\overline{BB'}\,||\,\overline{CC'}$ و می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}$$

در اثبات به کمک مساحت مراحل به‌صورت زیر می‌باشند.

(۱) $\triangle CBB'$ و $\triangle C'BB'$ دارای یک قاعدهٔ $b=BB'$، و یک ارتفاع نظیر به‌اندازه h می‌باشند بنابراین، $CBB'=C'BB'$.

(۲) دو مثلث پهلو به‌پهلوی $\triangle ABB'$ و $\triangle CBB'$ را در نظر می گیریم و $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ را قاعده‌های آنها می گیریم. در این صورت ارتفاعهای نظیر یکی هستند. در هر حالت ارتفاع برابر است با h' طول عمود مرسوم از B' به $\overleftrightarrow{AC}$. پس بنا بر قضیه ۵ بخش ۱۳.۲ داریم،

$$\frac{ABB'}{CBB'}=\frac{AB}{BC}.$$

(۳) دقیقاً با همان نوع استدلال،

$$\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \quad .$$

(برای بدست آوردن آن در مرحله (۲) فقط جای B و B' و جای C و C' را عوض کنید.)

(٤) بنابراین

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ABB'}{CBB'} = \frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad ,$$

که باید ثابت می‌شد.

حالا حالت کلی را در نظر بگیرید. فرض کنید «T خط ماربر A و موازی T'، خطهای L_2 و L_3 را در B'' و C'' ببرد. در این صورت بنا بر اثبات قبلی

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C''} \quad ،$$

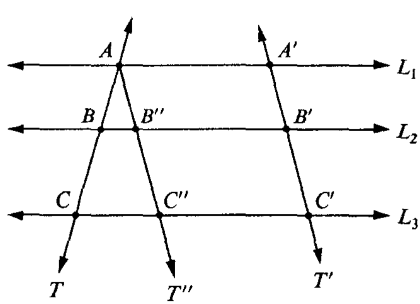
اما داریم

$$AB'' = A'B' \quad \text{و}$$
$$B''C'' = B'\ C' \quad ،$$

زیرا اضلاع متقابل در متوازی‌الاضلاع قابل انطباقند. بنابراین

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و}$$

که باید ثابت می‌شد.



شکل ۱۳.۱۶

این اثبات قضیهٔ اصلی تشابه از نظری ظریف نیست زیرا این گمان را بوجود می‌آورد که قضیه به‌نظریهٔ مساحت وابسته است. همانطور که دیده‌ایم این گمان نادرست است.

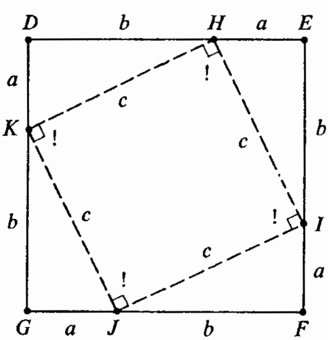
ولی اثبات به وسیله مساحت برتری مهمی دارد، یعنی قضیه را جزئی از هندسهٔ مقدماتی می‌سازد.

اثبات به وسیله مساحت با اثبات اقلیدس برای قضیه شباهت دارد، اما دو اثبات اساساً فرق دارند. بخش ۱۳.۶ را ببینید.

۱۳.۴ کاربردهای دیگری از نظریهٔ مساحت: قضیهٔ فیثاغورس

قضیهٔ فیثاغورس را می‌توان بدون استفاده از مفهوم تشابه ثابت کرد. چنین اثباتی بدین صورت است: مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ با ساقهای a و b و وتر c مفروض است.

مربع $\square DEFG$ را با یال $a+b$ انتخاب می کنیم. همانطور که در شکل نشان داده شده است چهار نسخهٔ قابل انطباق بر $\triangle ABC$ می‌سازیم. (آنها را در گوشه‌های مربع با استفاده از ض ز ض می‌سازیم.) پس $\angle KHI$ یک زاویهٔ قائمه است زیرا $\angle DHK$ و $\angle EHI$ مکمل یکدیگرند. به‌همان دلیل، همهٔ زوایای $\square HIJK$ قائمه‌اند و $\square HIJK$ یک مربع است.



شکل ۱۳.۱۷

بنا بر اصل جمع برای مساحت، مساحت این مربع برابر است با مساحت مربع داخلی بعلاوهٔ مساحتهای چهار مثلث قائم‌الزاویه. چون مثلثهای قائم‌الزاویه همگی قابل انطباقند داریم

$$DEFG = HIJK + ٤ . KDH$$

یا

$$(a+b)^۲ = c^۲ + ٤ . \frac{۱}{۲} ab$$

یا

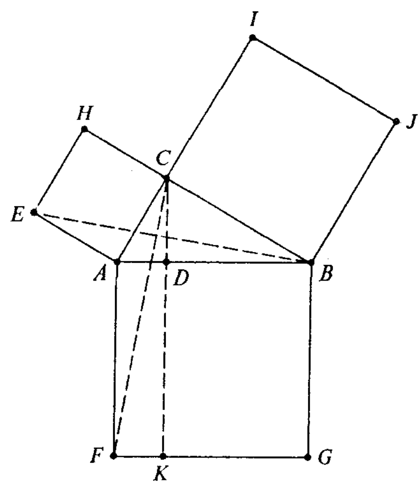
$$a^۲ + ۲ab + b^۲ = c^۲ + ۲ab\,.$$

در نتیجه

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

که باید ثابت می‌شد.

در اثبات اقلیدس نیز از مساحت استفاده می‌شود، ولی با اثبات بالا فرق دارد و بطور قابل ملاحظه‌ای پیچیده‌تر است. مثلث قائم‌الزاویه‌ای مفروض است، او روی هریک از اضلاع مربعی ساخت، بدین صورت:



شکل ۱۳.۱۸

در اینجا $\triangle ABC$ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ قائمه در C است. اشکال بیرونی مربع‌اند و $\overline{CK}$ بر $\overline{AB}$ و $\overline{FG}$ عمود است، و آنها را در D و K قطع می کند. مراحل اصلی اثبات اقلیدس به‌صورت زیر بودند.

(۱) $ADKF = ۲CAF$. (مستطیل و مثلث دارای یک قاعدهٔ AF و یک ارتفاع ADاند.)

(۲) $EHCA = ۲EAB$. (مربع و مثلث دارای یک قاعده EA، و یک ارتفاع ACاند).

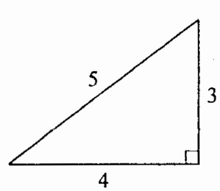
(۳) $\angle FAD \cong \angle EAC$، زیرا هر دو زاویهٔ قائمه‌اند و $\angle CAD \cong \angle CAD$. بنابراین $\angle EAB \cong \angle CAF$. اما $EA=AC$، زیرا $\square EHCA$ مربع است؛ و $AB=AF$، زیرا $\square ABGF$ مربع است. بنا بر ض ز ض، داریم

$$\triangle EAB \cong \triangle CAF\,.$$

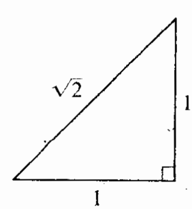
بنابراین
$$EAB = CAF \cdot$$
(٤) از (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که
$$ADKF = EHCA \cdot$$
یعنی، مربع سمت چپ بالا دارای همان مساحت مستطیل سمت چپ پایین است. دقیقاً با همین استدلال برای مربع و مستطیل سمت راست به‌همین نتیجه می‌رسیم:
$$KDBG = BCIJ \cdot$$
یعنی. مربع سمت راست بالا دارای همان مساحت مستطیل سمت راست پایین است.
(۵) چون مساحت مربع پایینی $ABGF$□ برابر است با مجموع مساحتهای مستطیلهای $ADKF$□ و $KDBG$□ در نتیجه مساحت مربع روی وتر برابر است با مجموع مساحتهای مربعهای روی ساقها.

ذات این اثبات با دو اثباتی که قبلاً دیده‌ایم کاملاً فرق دارد، و از نظری زیباتر از آنهاست. یک برتری آن هندسی و مفهومی بودن اثبات اقلیدس است، در حالیکه دو اثبات اول ما محاسباتی است. شکلی که همراه آن آمده یادآور فرض و نماد است، از جهتی، تصویری از کار مهم فیثاغورس است. بطوری که اگر شکل را درک کنید می‌فهمید که چرا قضیه درست است.

ارائهٔ اثبات اقلیدس به‌روش فوق از جهتی گمراه کننده است. این مطلب را القا می کند که اقلیدس در کتاب اصول، قضیهٔ فیثاغورس را همانطور در نظر گرفت که ما در فصل ۱۲ این کتاب درنظر گرفتیم، ولی این امر از حقیقت خیلی بدور است. در قضیه ۲ بخش ۱۲.۳ گفتیم که تحت شرایطی اعداد a و b و c باید در رابطهٔ $a^2+b^2=c^2$ صدق کنند و قضیه در نمایشی از هندسه ظاهر شد که در آن اعداد حقیقی را، مستقل از مفاهیم هندسی، مفروض گرفتیم و برای اندازه گیری اشیای هندسی از آن استفاده کردیم. بدین ترتیب عدد AB را برای اندازهٔ طول پاره‌خط $\overline{AB}$ و عدد ABC را برای اندازهٔ مساحت مثلث $\triangle ABC$ بکار برده‌ایم؛ و غیره.



شکل ۱۳.۱۹



شکل ۱۳.۲۰

در اصول اقلیدس هیچ عددی مستقل از مفاهیم هندسی نیست، البته بجز اعداد صحیح مثبت، که برای شمردن اشیا بکار می‌روند. بنا کردن نظریه‌اش، بگونه‌ای که با استانداردهای باصراحت و بادقت

امروزی سازش داشته باشد، کار پرمشقتی است. یک نمونهٔ آن را در فصل ۸ ارائه داده‌ایم. در آنجا نشان داده‌ایم که بجای استفاده از مفهوم طول پاره‌خطها (طول عددی حقیقی است) می‌توانید از مفهوم **یک طول داشتن** استفاده کنید: دو پاره‌خط دارای یک طول‌اند اگر قابل انطباق باشند، و قابلیت انطباق پاره‌خطها جمله‌ای تعریف نشده است، که در اصولی صدق می کند. تقریبا همین کار را برای نظریهٔ مساحت انجام می‌دهید، اما عملاً مشکل است. بدین دلیل، بخصوص در دوره‌های مقدماتی، رسم بر این است که از دستگاه ساده‌تر هندسهٔ متریک استفاده می کنند.

اغلب این کار بحق انجام می‌شود و درک این که چه پیش می‌آید کار ساده‌ای نیست. ولی یک عکس‌العمل لحظه‌ای ما را قانع می کند که هر وقت شکلی را به‌صورت فوق علامتگذاری می کنیم چه بگوییم و چه نگوییم کار ما در هندسهٔ متریک است.

بخش ۱۳.۶ آشنایی مختصری با نظریهٔ اقلیدسی مساحت سطح را فراهم می‌آورد.

۱۳.۵ صورت ضعیف‌تری از اصل واحد ۵ـ A

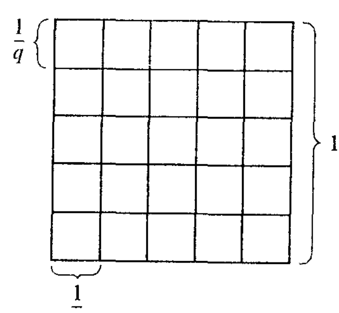
در اصل پنجم مساحت ادعا می کنیم که مساحت مربع برابر است با مجذور طول یک ضلع آن. خاطرنشان کردیم که اصل زیر کافی خواهد بود.

′A۰۵ اگر اضلاع مربعی به‌طول ۱ باشند آنگاه مساحت آن برابر با ۱ است.

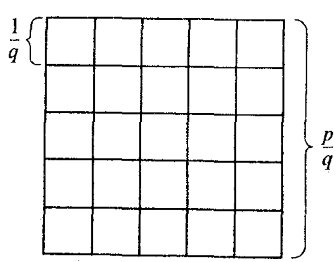
این اصل از جهتی «واحد مساحت» را به‌ما می‌دهد. نشان می‌دهیم که این اصل مستلزم **A۰۵** است.

■ **قضیه ۱**. اگر مربعی دارای یالهای به‌طول $1/q$ باشد (q عدد صحیح مثبتی است)، آنگاه مساحت آن برابر است با $1/q^2$.

اثبات. هر ناحیهٔ مربعی واحد را می‌توان به q^2 ناحیهٔ مربعی تقسیم کرد، بطوریکه همهٔ آنها دارای یال $1/q$ و مساحت A باشند (شکل ۱۳.۲۱). بنابراین $q^2A=1$، و $A=1/q^2$. □



شکل ۱۳.۲۱



شکل ۱۳.۲۲

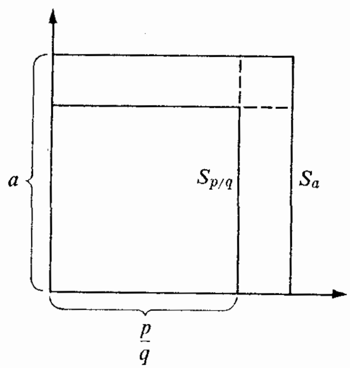
■ **قضیه ۲.** اگر مربعی دارای یالهای با طول گویای p/q باشد، آنگاه مساحت آن برابر است با $p^۲/q^۲$.

اثبات. چنین مربعی را می‌توان به $p^۲$ مربع افراز کرد، که یال هر کدام $۱/q$ باشد. اگر A مساحت آن باشد آنگاه

$$A = p^۲ \cdot \frac{۱}{q^۲} = \frac{p^۲}{q^۲} \ . \quad \square$$

■ **قضیه ۳.** اگر مربعی دارای یالهای بطول a باشد آنگاه مساحت آن برابر است با $a^۲$.

اثبات. مربع S_a با یالهای بطول a مفروض است. به‌ازای هر عدد گویای p/q، فرض کنید $S_{p/q}$ مربع با یال p/q باشد، که یک زاویهٔ مشترک با S_a دارد. مثل این:



شکل ۱۳.۲۳

بسادگی می‌توان دید که هریک از گزاره‌های زیر با گزارهٔ بعدی‌اش معادل است.

(۱) $p/q<a$.

(۲) $S_{p/q}$ در S_a واقع است. (با دو ناحیهٔ مستطیلی و یک ناحیهٔ مربعی که باقی می‌ماند.)

(۳) $\alpha S_{p/q} < \alpha S_a$.

(٤) $\frac{p^۲}{q^۲} < \alpha S_a$.

(۵) $p/q < \sqrt{\alpha S_a}$.

چون (۱) و (۵) معادلند، لذا

$$a = \sqrt{\alpha S_a}$$

بنابراین $a^۲=\alpha S_a$، که باید ثابت می‌شد. $\square$

این بررسی ۸۰۵A از پترلوئس است، که زمانی دانشجوی مؤلف بوده است.

۱۳.۶ ادامهٔ برنامهٔ اقلیدس:

مساحت مساوی داشتن بدون مساحت

در هندسهٔ کاملاً محض هیچ تابع مساحتی از R بتوی $\mathbf{R}$ نداریم. در عوض یک رابطهٔ $\simeq$ بین نواحی صفحهٔ اقلیدسی داریم که در اصولی صدق می کند. $R \simeq S$ یعنی اینکه R و S دارای یک مساحت‌اند. در اصول زیر، باید متوجه بود که

$$R = R_1 \cup R_2$$

مستلزم این است که R_1 و R_2 دو ناحیهٔ چند ضلعی بدون نقطهٔ داخلی مشترکی‌اند که اجتماع آنها R است.

E·۱. $\simeq$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

E·۲. $R_1 \simeq R_1 \cup R_2$ هیچ‌وقت برقرار نیست.

E·۳. اگر R_1 و R_2 دو ناحیهٔ مثلثی قابل انطباق باشند آنگاه $R_1 \simeq R_2$

E·٤. اگر $R_1 \simeq R'_1$ و $R_2 \simeq R'_2$ آنگاه $R_1 \cup R_2 \simeq R'_1 \cup R'_2$

E·۵. اگر $R_1 \cup R_2 \simeq R'_1 \cup R'_2$ و $R_1 \simeq R'_1$؛ آنگاه $R_2 \cong R'_2$.

این گزاره‌ها قسمتی از اهداف اقلیدس موقع نوشتن احکام زیر بود.

E·۱′. هر چیزی با خودش برابر است، اشیای مساوی با یک شیئی با یکدیگر مساویند.

E·۲′. کل از هر جزء آن بزرگتر است.

E·۳′. مثلثهای قابل انطباق مساویند.

E·٤′. هرگاه مقادیر مساوی را با مقادیر مساوی جمع کنیم، مجموعها مساوی خواهد بود.

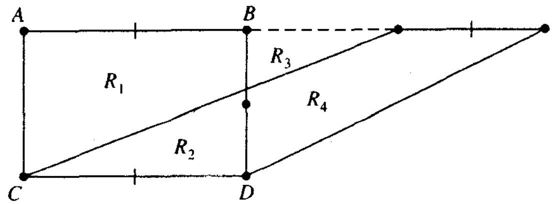
E·۵′. هرگاه دو مقدار مساوی را از دو مقدار مساوی کم کنیم، تفاضلها مساوی خواهد بود.

البته اقلیدس توجه داشت که این گزاره‌ها برای پاره‌خطها و زوایا هم به کار می‌رود.

در این فصل مثل قبل وقتی از مثلثها صحبت می کنیم منظور ما ناحیه‌های مثلثی است و همین‌طور برای متوازی‌الاضلاعها.

■ **قضیه ۱**. فرض کنید S و T متوازی‌الاضلاعهایی با یک قاعده و ارتفاعهای قابل انطباق باشند. در این صورت $S \simeq T$.

اثبات. ابتدا مثل شکل زیر حالتی را در نظر می گیریم که S یک مستطیل باشد.



شکل ۱۳.۲۴

از نماد شکل استفاده می کنیم. بنابراین،

$$S = R_۱ \cup R_۲ \text{ ، } T = R_۲ \cup R_٤ \cdot$$

بنا بر **E۰۳**،

$$R_۱ \cup R_۳ \simeq R_۳ \cup R_٤ \cdot$$

بنا بر **E۰۵**،

$$\cdot R_۱ \simeq R_٤$$

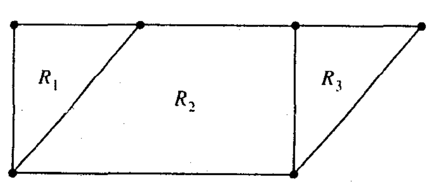
بنا بر **E۰٤**،

$$R_۱ \cup R_۲ \simeq R_۲ \cup R_٤$$

و

$$\cdot S \simeq T \qquad \square$$

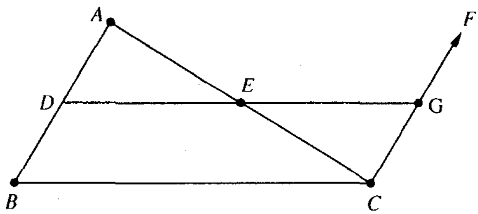
به پیروی از مثال اقلیدس، «حالت جالبی» را نشان داده‌ایم که در آن T روی زاویه‌ای حاده بنا شده است. حالت دیگر ساده‌تر است:



شکل ۱۳.۲۵

در اینجا، $R_۱ \simeq R_۳$؛ $R_۱ \cup R_۲ \simeq R_۲ \cup R_۳$؛ و $S \simeq T$.

■ **قضیه ۲**. فرض کنید U و V مثلثهایی با یک قاعده باشند و ارتفاعهای وارد بر آن قاعده قابل انطباق باشند. در این صورت $U \simeq V$.



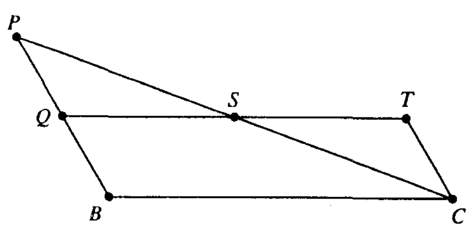
شکل ۱۳.۲۶

اثبات. فرض کنید $U = \triangle ABC$، و $\overline{BC}$ را قاعده گرفته باشیم، و $\overleftrightarrow{DE}$ خط میانگین آن باشد؛ فرض کنید $\overleftrightarrow{CF}$ خطی باشد که از C می گذرد و موازی $\overleftrightarrow{AB}$ است، و G محل تلاقی $\overleftrightarrow{CF}$ و $\overleftrightarrow{DE}$ باشد. در این صورت

$$W = \square DBCG$$

متوازی‌الاضلاع وابسته به‌مثلث $\triangle ABC$ و قاعدهٔ $\overline{BC}$ است.

تحت مفروضات قضیه ۲، فرض کنید X متوازی‌الاضلاع وابسته به V و قاعدهٔ $\overline{BC}$ باشد.



شکل ۱۳_۲۷

در اینجا $V \simeq X \simeq W \simeq U$ و لذا $U \simeq V$. □

با مفروض گرفتن قضیهٔ ۲، می‌توان همانند اقلیدس اقدام کرد و نظریهٔ مساحت-یا بهتر است بگوییم، نظریهٔ مساحت مساوی را شرح و بسط داد.

اصل $\mathbf{E}-5$ «تفریق مساحتها» دقیق است. اقلیدس از صورت هندسی اصل ارشمیدس استفاده نکرد. او عملاً تفریق مساحتها را جایگزین آن کرد.

فصل ۱۴

ساختن یک تابع مساحت

۱۴.۱ مسئله

در فصل قبل فرض کردیم که یک تابع مساحت داده شده باشد که در اصول ۱ − A تا ۵ − A صدق می کند. این کاری منطقی بود، در واقع، در هندسهٔ مقدماتی این تنها روش نسبتاً ساده‌ای است که می‌توان بکار برد.

ولی طبیعی است که بپرسیم آیا این مجموعهٔ پیچیده مفروضات صرفاً امری قراردادی است یا عملاً یک لزوم منطقی. سؤال این است که آیا می‌توان برمبنای بقیهٔ اصول، تابع مساحتی برای نواحی چند ضلعی تعریف کرد و ثابت کرد که تابع ما در اصول ۱ − A تا ۵ − A صدق می کند. جواب آری است.

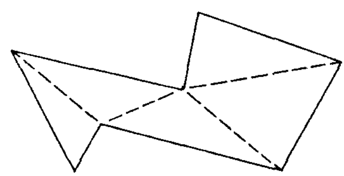
در ارائهٔ چنین تابعی، باید از آنجا شروع کنیم که به‌نوعی از شکلها مساحتی نسبت دهیم. مأیوس کننده است که در ابتدای کار سعی کنیم همه چیز را یکدفعه، با نسبت دادن مساحتی به‌هر ناحیهٔ چند ضلعی، انجام دهیم. باید با تعریف مساحت برای اشکال ساده‌ای شروع کینم و سعی کنیم مساحت اشکال پیچیده‌تر را بر حسب اشکال ساده تعریف کنیم. برای این منظور، مستطیلها موردنظر نیستند زیرا نمی‌توان آنها را بعنوان آجرهای ساختمان، جز برای شکلهای خیلی خاص، بکار برد. مثلاً ناحیهٔ مثلثی را نمی‌توان بصورت اتحاد تعدادی متناهی ناحیهٔ مستطیلی بیان کرد. درست است که از دستور bh برای مساحت مستطیل می‌توان دستور $\frac{1}{2}\,bh$ را برای مساحت مثلث قائم‌الزاویه بدست آورد. اما برای این کار باید فرض کنیم که چیزی بعنوان مساحت مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد و در برنامهٔ فعلی ما، سؤال آخری کل مطلب است.

از این مطلب الهام می گیریم که نقطهٔ شروع باید مثلث باشد نه مستطیل. ساختن تابع مساحت را با بیان این نکته شروع می کنیم که مساحت هر مثلث $\triangle ABC$، بنابر تعریف برابر است با

$$ABC = \frac{1}{2}\,bh\,،$$

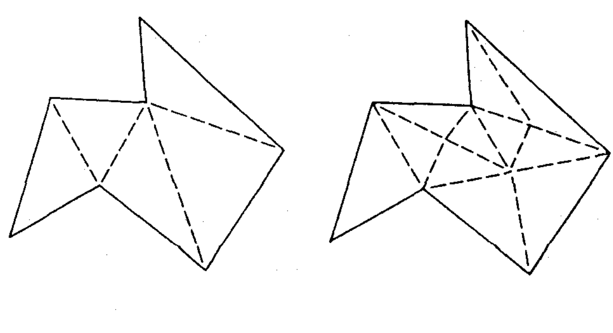
که‌در آن b قاعده‌و h اندازه‌ارتفاع نظیر آن‌است. این دارای معنی است زیرا نشان داده‌ایم (قضیه ۵ بخش ۱۲.۳) که حاصلضرب bh فقط به‌مثلث بستگی دارد و به‌انتخاب قاعده بستگی ندارد.

حال می خواهیم مثلثها را بعنوان آجرهای ساختمان بکار ببریم هر ناحیهٔ چند ضلعی مفروض را می توان به تعدادی متناهی ناحیهٔ مثلثی تقسیم کرد بطوریکه فقط در رئوس و اضلاع همدیگر را ببرند (شکل ١٤.١). برای هریک از این مثلثها، مساحت قبلاً با دستور $\frac{1}{2}\ bh$ تعریف شده است. اگر نظریهٔ مساحت به‌مرحلهٔ عمل رسیده باشد، آنگاه مساحت ناحیه برابر است با مجموع مساحتهای این مثلثها. از این مطلب الهام می گیریم که یک کار آزمایشی انجام دهیم: شاید مسئله‌مان را با تعریف مساحت ناحیه مساوی با مجموع مساحتهای این مثلثها حل کنیم.



شکل ۱۴.۱

ولی یک اشکال وجود دارد. هر ناحیهٔ چند ضلعی را به بینهایت راه می توان به‌تعدادی متناهی ناحیهٔ مثلثی تقسیم کرد.



شکل ۱۴.۲

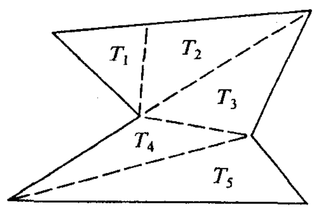
بنا براین، قبل از اینکه بتوانیم مساحت ناحیهٔ چند ضلعی را مساوی مجموع مساحتهای این مثلثها تعریف کنیم، لازم است ثابت کنیم که این مجموع فقط به‌ناحیه‌ای که از آن شروع کرده‌ایم بستگی دارد

و از نحوهٔ تقسیم به‌مثلثها مستقل است.

در اولین برخورد این مسئله بدیهی به‌نظر می‌رسد و بعد از کمی فکر کردن شاید تقریباً غیرممکن به‌نظر آید. همانطور که خواهیم دید واقعیت چیزی بین آنهاست.

۱۴.۲ همتافت و دستور مساحت آن

ناحیهٔ چند ضلعی مفروض R به‌صورت اتحاد تعدادی متناهی ناحیهٔ مثلثی بیان شده است که فقط در اضلاع و رئوس همدیگر را قطع می‌کنند. مجموعهٔ K را که اعضایش این نواحی مثلثی‌اند یک همتافت و یک مثلث‌بندی R می‌نامند.



شکل ۱۴.۳

در این شکل همتافت K عبارت است از مجموعهٔ

$$\{T_۱ \text{ و } T_۲ \text{ و } T_۳ \text{ و } T_٤ \text{ و } T_۵\} \cdot$$

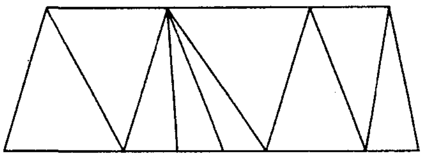
بنابراین R و K اشیائی از دو نوع کاملاً متفاوتند. R مجموعه‌ای نامتناهی از نقاط و K مجموعه‌ای متناهی از نواحی مثلثی است. رئوس و اضلاع T_iها را رئوس و اضلاع K نیز می‌نامند.

می‌خواهیم مساحت مثلث را با فرمول $\frac{1}{2}\, bh$ تعریف کنیم. بخاطر اینکه تابع مساحت که سرانجام بدست خواهیم آورد و دستوری که ابزار کار ماست با هم اشتباه نشوند، این دستور را مساحت فرمولی نامیده اولین تعریف رسمی را بصورت زیر بیان می کنیم.

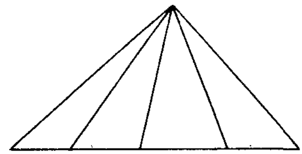
تعریف ۱. مساحت فرمولی مثلث برابر است با نصف حاصلضرب هر قاعده و ارتفاع نظیر آن.

تعریف ۲. مساحت فرمولی همتافت برابر است با مجموع مساحتهای عناصر آن.

همتافت نواری همتافتی است که نظیر یکی از شکلهای زیر باشد.



شکل ۱۴.۴

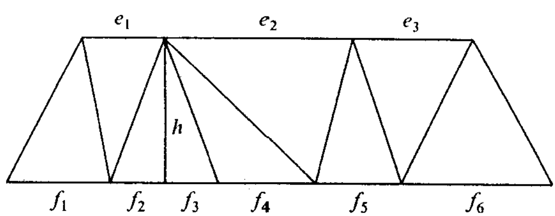


شکل ۱۴.۵

به‌عبارت دقیق‌تر، همتافت K یک همتافت نواری است (۱) اگر K مثلث‌بندی یک ذوزنقه یا یک مثلث باشد، (۲) در حالت ذوزنقه‌ای همهٔ رئوس K روی قاعدهٔ پایین یا قاعدهٔ بالا واقعند و (۳) در حالت مثلثی همهٔ رئوس K روی قاعده یا رأس مقابل آن واقعند.

توجه کنید که اگر مثلث را ذوزنقه‌ای بگیریم که اندازه یک قاعده آن مساوی صفر باشد، این حالتها با هم بررسی می‌شوند. قضیهٔ زیر را باید بدین نحو تعبیر کرد.

■ **قضیه ۱**. مساحت فرمولی یک همتافت نواری برابر است با $\frac{۱}{۲}(b_۱+b_۲)h$ که در آن $b_۱$ و $b_۲$ قاعده‌ها و h ارتفاع است.



شکل ۱۴.۶

اثبات. مجموع مساحتهای فرمولی مثلثهایی که دو رأس روی قاعدهٔ بالا دارند برابر است با

$$\frac{۱}{۲}e_۱h+\frac{۱}{۲}e_۲h+\cdots+\frac{۱}{۲}e_nh\ ,$$

که در آن e_n و... و $e_۲$ و $e_۱$ طول پاره‌خطهایی است که قاعدهٔ بالایی بوسیله رئوس به‌آنها تقسیم می‌شود. مجموع مساحتهای فرمولی مثلثهای دیگر برابر است با

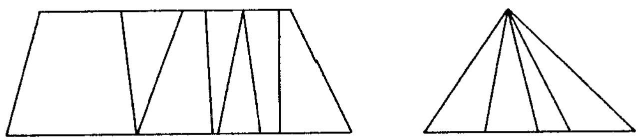
$$\frac{۱}{۲}f_۱h+\frac{۱}{۲}f_۲h+\cdots+\frac{۱}{۲}f_mh\ .$$

بنابراین مساحت فرمولی همتافت برابر است با

$$\frac{1}{2}h(e_1 + e_2 \cdots + e_n) + \frac{1}{2}h(f_1 + f_2 + \cdots + f_m) = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2$$
$$= \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h ،$$

که باید ثابت می کردیم. □

بهتر است که این نتیجه را کمی تعمیم دهیم. تجزیهٔ نواری مثلث یا ذوزنقه عبارت است از تجزیه به‌مثلثها، و ذوزنقه‌ها، به‌صورت زیر:

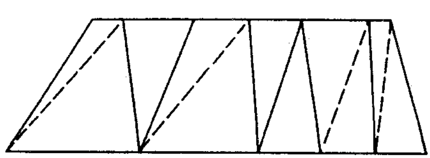


شکل ۱۴.۷

مساحت فرمولی ذوزنقه با $\frac{1}{2}(b_1+b_2)h$ تعریف می‌شود که در آن h ارتفاع و b_1 و b_2 قاعده‌ها هستند. در تجزیهٔ نواری، مثلثها و ذوزنقه‌های آن را قسمتهای آن می‌نامند.

■ **قضیه ۲**. برای هر تجزیهٔ نواری مثلث یا ذوزنقه، مساحت فرمولی شکل اصلی برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی قسمتهای آن.

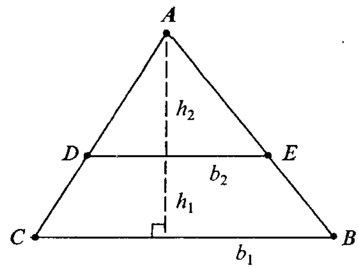
اثبات. اگر هیچ یک از قسمتها ذوزنقه نباشد، این قضیه بی‌درنگ از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود. اگر ذوزنقه‌ای پیدا شد با رسم یک قطر آن را به‌دو مثلث تقسیم می کنیم:



شکل ۱۴-۸

این امر مجموع مساحتهای فرمولی را تغییر نمی‌دهد. بنابراین قضیهٔ ۲ از قضیهٔ ۱ بدست می‌آید. □

■ **قضیه ۳**. اگر A-D-C، $A-E-B$ و $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ آنگاه مساحت فرمولی $\triangle ABC$ برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی $\triangle ADE$ و $\square DEBC$.



شکل ۱۴.۹

اثبات. فرض کنید $b_۱=BC$ و $b_۲=DE$؛ فرض کنید $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاعهای $\square DEBC$ و $\triangle ADE$ باشند. بنابراین قضیه مبین آن است که

$$\frac{۱}{۲}\, b_۲h_۲ + \frac{۱}{۲}\,(b_۱+b_۲)h_۱ = \frac{۱}{۲}\, b_۱\,(h_۱+h_۲)$$

یا

$$b_۲h_۲ + b_۱h_۱ + b_۲h_۱ = b_۱h_۱ + b_۱h_۲$$

یا

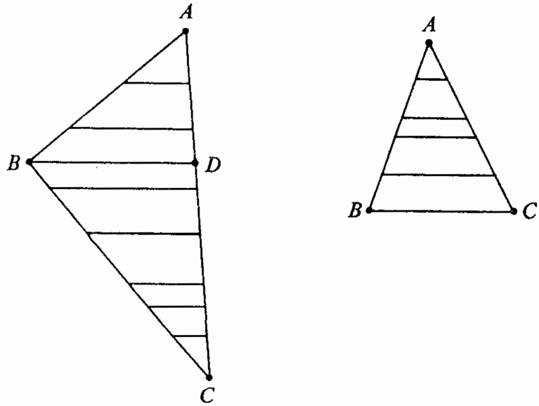
$$b_۲(h_۱+h_۲) = b_۱h_۲$$

یا

$$\frac{h_۱+h_۲}{h_۲} = \frac{b_۱}{b_۲}$$

بنا بر قضیهٔ ۶ بخش ۱۲.۳ این رابطه درست است زیرا $\triangle ACB \sim \triangle ADE$. □

یک تجزیهٔ موازی برای ناحیهٔ مثلثی عبارت است از تجزیه به یک یا دو مثلث و تعدادی متناهی ذوزنقه، مثل یکی از شکلهای زیر. (از تعریف رسمی چشم می پوشیم.)



شکل ۱۴.۱۰

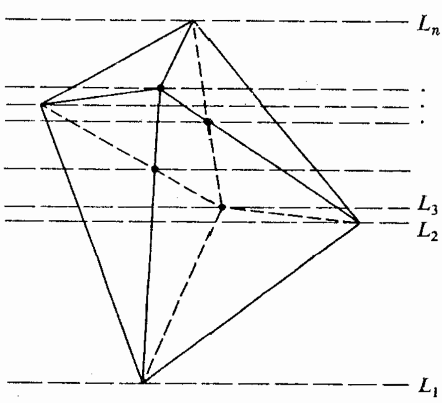
■ **قضیه ۴**. به‌ازای هر تجزیهٔ موازی مثلث، مساحت فرمولی مثلث اول برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی ذوزنقه‌ها و مثلثهای آن تجزیه.

اثبات. برای حالت اول (سمت راست) این مطلب با استفاده مکرر از قضیهٔ قبل بدست می‌آید، از بالا به پایین عمل شود. برای حالت دوم (سمت چپ) ابتدا ملاحظه می کنید که بنا بر قضیهٔ ۱ مساحت فرمولی $\triangle ABC$ برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی $\triangle BDC$ و $\triangle ABD$. (برای استفاده از قضیهٔ ۱ باید شکل را از پهلو نگاه کنیم.) حال نتیجه حالت اول را برای هریک از اینها بکار می بریم. □

حالا می توانیم قضیهٔ اصلی‌مان را ثابت کنیم.

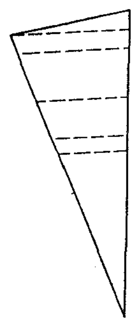
■ **قضیه ۵**. همهٔ مثلث بندیهای یک ناحیهٔ چند ضلعی یک مساحت فرمولی دارند.

اثبات. فرض کنید K_1 و K_2 دو مثلث‌بندی ناحیهٔ چند ضلعی R باشند.



شکل ۱۴.۱۱

در شکل، یالهای $K_۱$ با خطوط پر، و یالهای $K_۲$ با خطوط نقطه‌چین نشان داده شده‌اند. یک خانواده از خطوط موازی $L_۱$، $L_۲$، . . .، L_n را درنظر می گیریم که از همه رئوس $K_۱$، همه رئوس $K_۲$ و همه نقاطی که یالهای $K_۱$ یالهای $K_۲$ را قطع می کنند، می گذرد. (اینها خطوط افقی هستند که درشکل با خطوط نقطه‌چین بلند رسم شده‌اند.) حالا خطوط L_i برای هر مثلث $K_۱$ تجزیه‌های موازی به ما می‌دهد.

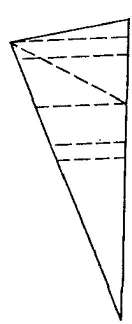


شکل ۱۴.۱۲

این مثلثها و ذوزنقه‌ها را قسمتهای اولیه $K_۱$ می‌نامیم. بنا بر تعریف، مساحت فرمولی $K_۱$ برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی این مثلثها. قضیهٔ ٤ را برای هر مثلث بکار می‌بریم و نتایج را با هم جمع می کنیم. نتیجه می‌شود که:

(۱) مساحت فرمولی $K_۱$ برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی قسمتهای اولیهٔ $K_۱$.

یالهای $K_۲$ برای هر قسمت اولیهٔ $K_۱$ تجزیهٔ نواری به‌ما می‌دهد:



شکل ۱۴.۱۳

این مثلثها و ذوزنقه‌های کوچکتر را قسمتهای ثانویهٔ $K_۱$ می‌نامیم. (در شکل ١٤.١٣ در مثلث نشان داده شده کلاً هشت قسمت ثانویه وجود دارد. در شکل ١٤.١١ در ابتدای اثبات قضیه ۵ کلاً ۳۱

قسمت ثانویه برای $K_۱$ هست.)

حال بنا بر قضیهٔ ۲، می‌دانیم که:

(۲) مساحت فرمولی هر قسمت اولیهٔ $K_۱$ برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی قسمتهای ثانویه که در آن واقعند.

از ترکیب (۱) و (۲)، نتیجه می‌شود که:

(۳) مساحت فرمولی $K_۱$ برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی قسمتهای ثانویهٔ $K_۱$.

با استفاده از همان استدلال برای $K_۲$، نتیجه می‌شود که:

(٤) مساحت فرمولی $K_۲$ برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی قسمتهای ثانویهٔ $K_۲$.

این مطلب همهٔ آنچه را که باید بدانیم به‌ما می گوید زیرا قسمتهای ثانویه $K_۲$ دقیقاً همان قسمتهای ثانویهٔ $K_۱$اند. در نتیجه بنا بر (۳) و (٤)، $K_۱$ و $K_۲$ دارای یک مساحت فرمولی‌اند، و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

بدین‌ترتیب می‌توانیم تعریف زیر را بیان کنیم.

تعریف. αR مساحت ناحیهٔ چند ضلعی R عددی است که مساحت فرمولی هر مثلث‌بندی R می‌باشد.

۱۴.۳ تحقیق اصول مساحت برای تابع α

به‌وضوح، می‌دانیم که

A۰۱ α تابعی از R بتوی $\mathbf{R}$ است.

A۰۲ به‌ازای هر R، $\alpha R>۰$.

A۰۳. هر دو مثلث قابل انطباق دارای یک مساحت‌اند.

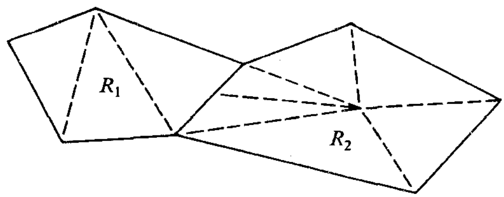
از تعریف α بی‌درنگ این نتایج بدست می‌آید.

A۰٤ اگر دو ناحیهٔ چند ضلعی فقط در یالها و رئوس همدیگر را قطع کنند (یا اصلاً همدیگر را قطع نکنند)، آنگاه مساحت اجتماع آنها برابر است با مجموع مساحت‌های آنها.

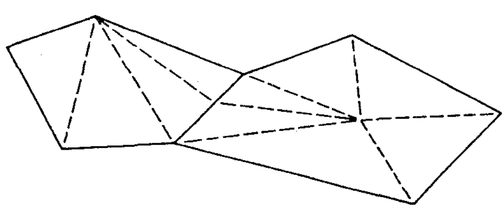
A۰۵. اگر یک ناحیهٔ مربعی با یالهای به‌طول a باشد، آنگاه مساحت آن برابر است با $a^۲$.

دلیلش این است که هر قطر، ناحیهٔ مربعی را به‌دو ناحیهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای تقسیم می کند که هریک از آنها دارای مساحت فرمولی $a^۲/۲$ است. (این شباهت زیادی به‌اثبات قضیهٔ ۱ بخش ۱۳.۲ دارد، فقط حالا بعکس شده است).

درصدد تحقیق A–٤ برمی‌آییم. نواحی $R_۱$ و $R_۲$ با مثلث‌بندیهای $K_۱$ و $K_۲$ مفروض‌اند. فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ فقط در یالها و رئوس همدیگر را قطع کنند. همانطور که در شکل نشان داده شده ممکن است یالهایی از $K_۱$ (یا $K_۲$) شامل بیش از یک یال $K_۲$ (یا $K_۱$) باشد. اگر چنین باشد مثلثهایی در $K_۱$ (یا $K_۲$) را به‌مثلثهای کوچکتری تقسیم می کنیم.



شکل ۱۴.۱۴



شکل ۱۴.۱۵

بدین ترتیب مثلث بندیهای جدید K'_1 و K'_2 بدست می‌آید که K اجتماع آنها مثلث بندی برای $R_1 \cup R_2$ است. حال $\alpha(R_1 \cup R_2) = \alpha R_1 + \alpha R_2$ زیرا مساحت فرمولی K برابر است با مجموع مساحتهای فرمولی K_1 و K_2. بنابراین α در A−۴ صدق می کند.

فصل ۱۵

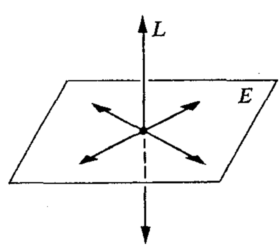
خط‌ها و صفحه‌های عمود برهم در فضا

۱۵.۱ قضیه‌های اساسی

فرض کنیم خطی مانند L و صفحه‌ای مانند E، در نقطه‌ای مانند P متقاطع باشند.

اگر هر خط صفحه E، که از P می گذرد، بر L عمود باشد، آنگاه گوئیم L و E برهم عموداند، و می‌نویسیم $E \perp L$، یا $L \perp E$. در شکل، فرض شده که خط L بر صفحه E عمود است و دو خط در صفحه E را که از نقطه P گذشته‌اند نشان داده‌ایم. هر دوی این خط‌ها بر L عموداند، اگرچه، در شکلی که رسم شده است، چنین به‌نظر نمی‌رسند.

توجه کنید که وقتی می گوئیم $E \perp L$، گزاره‌ای را در مورد یک مجموعه نامتناهی از خط‌ها بیان کرده‌ایم؛ یعنی، همه خطهائی که در E واقع و شامل نقطه P هستند، باید بر L عمود باشند.



شکل ۱۵.۱

اگر منظور ما صرفاً این باشد که E شامل یک خط عمود بر L است، این مطلب مستلزم چیزی نیست. به‌سادگی می‌توانید خودتان را متقاعد کنید که هر صفحه که L را قطع کند شامل چنین خطی است.

به‌زودی ثابت خواهیم کرد که اگر E شامل دو خط عمود بر L باشد، آنگاه $E \perp L$. دو قضیه زیر مقدماتی هستند.

نقطه‌ای مانند A از دو نقطه P و Q به یک فاصله است اگر $AP = AQ$ (شکل ۱۵.۲).

■ **قضیه ۱**. اگر A و B از دو نقطه P و Q به یک فاصله باشند، آنگاه هر نقطه بین A و B نیز همین خاصیت را دارد.

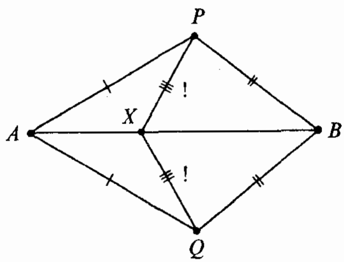
مراحل اصلی اثبات به‌صورت زیر هستند.

(۱) $\triangle PAB \cong \triangle QAB$.

(۲) $\angle PAB \cong \angle QAB$.

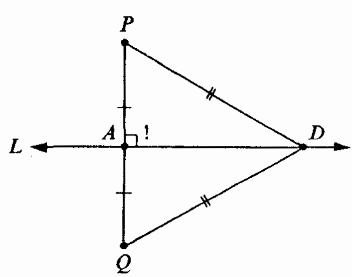
(۳) $\triangle PAX \cong \triangle QAX$.

(۴) $PX = QX$.



شکل ۱۵.۲

■ **قضیه ۲**. اگر خط L شامل نقطه وسط $\overline{PQ}$، و شامل نقطه دیگری به یک فاصله از P و Q باشد، آنگاه $L \perp PQ$.



شکل ۱۵.۳

زیرا بنا بر ض ض ض $\triangle PAD \cong \triangle QAD$. در نتیجه $\angle PAD \cong \angle QAD$، و هر کدام یک زاویه قائمه است.

■ **قضیه ۳**. اگر خطی بر دو خط متقاطع در نقطه تقاطعشان عمود باشد، آنگاه آن خط بر صفحه

شامل آنها عمود است.

بیان دیگر. فرض کنیم دو خط L_1 و L_2 در نقطه A متقاطع باشند، و E صفحه شامل آنها باشد. اگر L خطی باشد که در نقطه A بر L_1 و L_2 عمود است آنگاه هر خط E که از A می گذرد بر L عمود است.

اثبات. فرض کنیم P و Q نقاطی از L باشد به‌طوری که $P-A-Q$ و $AP=AQ$. فرض کنیم L_3 خط سوم دلخواهی از E باشد که از A می گذرد. اکنون هر کدام از خط‌های L_1 و L_2 شامل نقطه‌هائی از E هستند که در دو طرف L_3 واقع‌اند.

فرض کنیم B و C نقاطی از L_1 و L_2 باشند، که در صفحه E و در دو طرف خط L_3 واقع‌اند. پس $\overline{BC}$ خط L_3 را در نقطه‌ای مانند D متمایز از A قطع می کند. اکنون

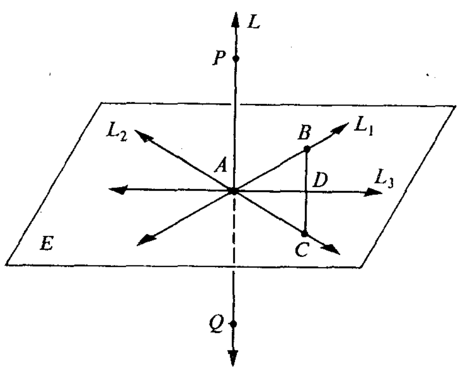
(۱) بنا بر ض-ز-ض، $\triangle PAB \cong \triangle QAB$.

(۲) $PB = QB$.

(۳) همین‌طور، $PC=QC$.

(٤) بنا بر قضیه ۱، $PD=QD$.

(۵) بنا بر قضیه ۲، $\overleftrightarrow{PQ} \perp L_3$. □



شکل ۱۵.۴

عمودمنصف یک پاره‌خط در یک صفحه خطی است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود است. قضیه‌های زیر به‌سادگی ثابت می‌شوند، و به‌عنوان مقدمه‌ای بر (آشنائی با) قضایای نظیر در فضا به کار می‌روند.

■ **قضیه ۴**. اگر L عمودمنصف پاره‌خط $\overline{AB}$ باشد (در صفحه E)، آنگاه تمام نقاط L از A و B به یک فاصله‌اند.

عکس قضیه نیز صحیح است.

■ **قضیه ۵.** فرض کنیم A، B، و P نقاطی از صفحه E باشند. اگر P از A و B به یک فاصله باشد، آنگاه P روی عمودمنصف $\overline{AB}$ است.

از ترکیب این دو قضیه، قضیه زیر بدست می‌آید.

■ **قضیه ۶.** عمودمنصف یک پاره‌خط در یک صفحه مجموعه همه نقاطی از این صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.
قضیه‌ای از این نوع را یک قضیهٔ مکان هندسی (مشخص کننده) می‌نامند.

اگر شرطی را بیان کنید که نقاط متعلق به مجموعه مفروضی در آن صدق کنند و نقاط دیگری در آن صدق نکنند آنگاه یک شکل ـ یعنی مجموعه‌ای از نقاط ـ را مشخص کرده‌اید.
معمولاً اثبات یک قضیه مکان هندسی شامل دو قسمت است. مثلاً، فرض کنیم L عمودمنصف پاره‌خط $\overline{AB}$ در صفحه E باشد و فرض کنیم

$$W = \{P \mid \text{واقع است } E \text{ در } P \text{ ، و } PA = PB\} \quad .$$

قضیه ٤ بیان می‌کند که هر نقطهٔ خط L در W واقع است؛ یعنی، $L \subset W$. قضیه ۵ بیان می‌کند که هر نقطه W روی L واقع است. هر دو با هم این گزاره را بیان می‌کنند که $L = W$؛ و این مضمون قضیه ٦ است.

به‌خاطر استفاده زیاد، قضیه‌هائی مانند قضیه ٦ را قضایای مکان هندسی می‌نامند؛ گاهی اوقات می‌گوئیم «عمودمنصف یک پاره‌خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.» معنی فارسی کلمه مکان ارتباطی با کاربرد این کلمه در اینجا ندارد، زیرا در فارسی این کلمه فقط «جای» معنی می‌دهد که کاملاً با مفهومی که در اینجا به کار می‌بریم تطبیق نمی‌کند. ساده‌ترین راه توصیف کاربردی آن است که بگوئیم، کلمه مکان هندسی عبارت است از یک مجموعه نقاط اگر یک خاصیت ویژه‌ای به‌این مجموعه داده شده باشد. به‌این دلیل کلمه مکان تحت‌اللفظی است. و در فرهنگ لغات پذیرفته شده است.

به‌دنبال بحث عمودمنصف در صفحه، اکنون می‌توانیم با قاطعیت بیشتری بگوئیم؛

عمودمنصف یک پاره‌خط (در فضا) صفحه‌ای است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود است؛

در این تعریف به‌طور ماهرانه‌ای فرض شده است که فقط و فقط یک صفحه وجود دارد که از وسط پاره‌خط گذشته و بر آن عمود است؛ و بنابراین ما ـ یا شما ـ باید این گزاره‌ها را برای توجیه تعریف ثابت کنیم.

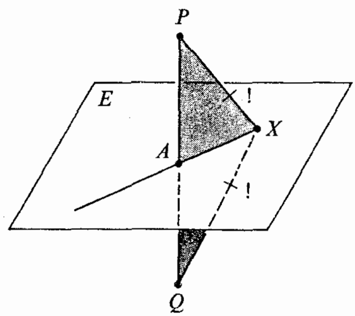
■ **قضیه ۷.** خط L و نقطه P روی L مفروض است. حداقل یک صفحه وجود دارد که در نقطه P بر L عمود است.

■ **قضیه ۸.** خط L و نقطه P روی L مفروض است. فقط یک صفحه وجود دارد که در نقطه P بر L عمود است.

[راهنمائی: L فصل مشترک دو صفحه E_1 و E_2 است.]

اکنون می‌توانیم قضیه‌ها را مانند قضیه‌های ٤، ۵، و ٦ ثابت کنیم.

■ **قضیه ۹.** هر نقطه روی صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.



شکل ۱۵.۵

اثبات. فرض کنیم A نقطه وسط $\overline{PQ}$ باشد، فرض کنیم صفحه E در نقطه A بر $\overline{PQ}$ عمود، و X نقطه دلخواهی از E باشد. اگر $A = X$، آنگاه X از P و Q به یک فاصله است. اگر $X \neq A$، آنگاه بنا بر ض-ز-ض داریم $\triangle QAX \cong \triangle PAX$، بنابراین $PX = QX$، که باید ثابت می‌شد. □

■ **قضیه ۱۰.** هر نقطه که از دو سر پاره‌خطی به یک فاصله باشد روی صفحه عمودمنصف آن پاره‌خط واقع است.

بیان دیگر. فرض کنیم M وسط $\overline{PQ}$ باشد، فرض کنیم E صفحه‌ای عمود بر $\overline{PQ}$ در نقطه M، و X نقطه‌ای باشد به‌طوری که $PX = QX$. در این صورت X روی E واقع است.

اثبات. بنا بر قضیه ۲ در نقطه M، $\overleftrightarrow{MX} \perp \overline{PQ}$.

فرض کنیم F صفحه‌ای باشد که شامل $\overline{PQ}$ و X است. در این صورت صفحه F صفحه E را در خط L قطع می‌کند، و در نقطه M، $L \perp \overline{PQ}$. بنابراین $L = \overleftrightarrow{MX}$، زیرا خط‌های عمود در یک صفحه یکتا هستند. بنابراین X در E واقع است، که باید ثابت می‌شد. □

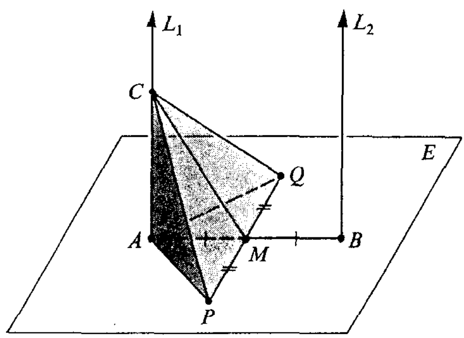
از ترکیب این دو قضیه با هم، مانند بحث قسمت مسطحه، قضیه دو شرطی زیر بدست می‌آید.

■ **قضیه ۱۱**. صفحه عمودمنصف پاره‌خط مجموعه همه نقاطی است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

در بررسی صفحات عمود بر یک صفحه از نقطه‌ای خارج آن به قضیه زیر نیاز داریم.

■ **قضیه ۱۲**. هر دو خط عمود بر یک صفحه در یک صفحه واقع‌اند.

اثبات. فرض کنیم خطهای L_1 و L_2 به‌ترتیب، در نقاط A و B بر صفحه E عمود باشند. فرض کنیم M وسط $\overline{AB}$، و خط L عمودمنصف $\overline{AB}$ در صفحه E باشد، و همچنین فرض کنیم P و Q دو نقطهٔ L باشند که از M به یک فاصله‌اند.



شکل ۱۵.۶

نشان می‌دهیم که هر نقطهٔ L_1 مانند C از P و Q به یک فاصله است. حال $AP = AQ$ زیرا $\overleftrightarrow{AB}$ عمودمنصف $\overline{PQ}$ است. چون $L_1 \perp E$ در نتیجه $\triangle CAP \cong \triangle CAQ$. بنابراین $CP = CQ$.

به‌همین روش نتیجه می‌گیریم که هر نقطهٔ L_2 از P و Q به یک فاصله است. بنابراین L_1 و L_2 در یک صفحه، یعنی، صفحهٔ عمودمنصف $\overline{PQ}$ واقع است. (قضیهٔ ۱۱ را ببینید.) □

بقیّهٔ قضایای این بخش را بدون اثبات بیان می‌کنیم، شما باید بتوانید در هر حالت اثبات را ارائه دهید. (اما برای قضیه ۱۵ احتمالاً به‌راهنماییهای آخر بخش نیاز خواهید داشت.)

■ **قضیه ۱۳**. به‌ازای هر نقطه روی یک صفحهٔ مفروض لااقل یک خط هست که از آن نقطه می‌گذرد و بر صفحه مفروض عمود است.

■ **قضیه ۱۴**. به‌ازای هر نقطه روی یک صفحهٔ مفروض حداکثر یک خط هست که از آن نقطه می‌گذرد و بر صفحه مفروض عمود است.

■ **قضیه ۱۵.** به‌ازای هر نقطه خارج یک صفحهٔ مفروض لااقل یک خط هست که از آن نقطه می‌گذرد و بر آن صفحه عمود است.

■ **قضیه ۱۶.** به‌ازای هر نقطه خارج یک صفحهٔ مفروض حداکثر یک خط هست که از آن نقطه می‌گذرد و بر آن صفحه عمود است.

از ترکیب چهار قضیهٔ قبل قضایای زیر نتیجه می‌شود.

■ **قضیه ۱۷.** به‌ازای هر نقطه و هر صفحه درست یک خط هست که از آن نقطه می‌گذرد و بر آن صفحه عمود است.

■ **قضیه ۱۸.** اگر صفحهٔ E و خط L در نقطهٔ P بر هم عمود باشند، آنگاه E شامل هر خطی است که از P بگذرد و بر L عمود باشد.

مراحل اصلی اثبات قضیه ۱۵ به‌صورت زیر هستند. صفحهٔ E و نقطهٔ P در خارج آن مفروض‌اند؛

(۱) فرض کنید L_1 خط دلخواهی در E باشد.

(۲) فرض کنید E_1 صفحهٔ شامل P و L_1 باشد.

(۳) فرض کنید L_2 خط عمود بر L_1 باشد که از P می‌گذرد و L_1 را در Q قطع کند.

(٤) فرض کنید L_3 خط عمود بر L_1 در نقطهٔ Q و واقع در E باشد.

(۵) فرض کنید E_2 صفحهٔ شامل P و L_3 باشد.

(٦) فرض کنید L خط عمود بر L_3 باشد که از P می‌گذرد و در E_2 واقع است. سپس نشان می‌دهیم که $E \perp L$.

مجموعه مسائل ۱۵.۱

۱. قضایای ۷، ۸، ۱۳، ۱٤، ۱۵، ۱٦ و ۱۸ فوق را ثابت کنید.

۲. نشان دهید اگر خط L شامل دو نقطهٔ همفاصله از P و Q باشد آنگاه هر نقطهٔ L از P و Q به یک فاصله است.

۳. نشان دهید اگر صفحهٔ E شامل سه نقطه باشد که همخط نیستند و از P و Q به یک فاصله‌اند آنگاه همهٔ نقاط E از P و Q به یک فاصله‌اند.

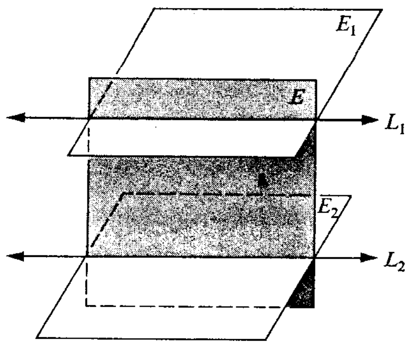
۱۵.۲ خطوط و صفحات موازی در فضا

دو صفحه موازیند اگر نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، اگر صفحات E_1 و E_2 موازی باشند آنگاه می‌نویسیم $E_1 || E_2$. همین‌طور خط L و صفحهٔ E موازیند اگر نقطهٔ مشترکی نداشته باشند؛ این مطلب را مختصراً می‌نویسیم $E \;||\; L$ یا $L \;||\; E$.

نظریهٔ موازیها در فضا کاملاً شبیه نظریهٔ موازیها در صفحه است. به‌هیچ اصل جدیدی نیاز نداریم

و همانطور که خواهید دید اثباتها ساده‌اند.

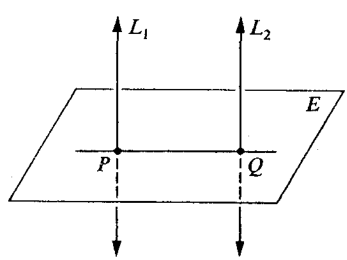
قضیه ۱. اگر صفحه‌ای دو صفحه موازی را قطع کند آنگاه مقطع آن با این صفحات دو خط موازی است.



شکل ۱۵.۷

اثبات. فرض کنید صفحهٔ E دو صفحهٔ موازی $E_۱$ و $E_۲$ را در مجموعه‌های ناتهی $L_۱$ و $L_۲$ قطع کند. بنا بر اصل (I–٤) مجموعه‌های $L_۱$ و $L_۲$ خط می‌باشند. چون E شامل هر دوی آنهاست هم صفحه‌اند و چون $L_۱$ در $E_۱$ واقع است و $L_۲$ در $E_۲$ لذا نقطهٔ مشترکی ندارند. بنابراین $L_۱$ و $L_۲$ موازیند، همان مطلبی که باید ثابت می‌شد. □

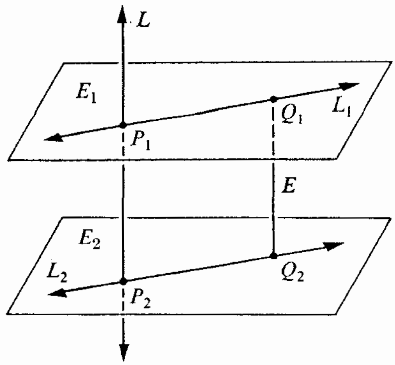
قضیه ۲. دو خط عمود بر یک صفحه موازیند.



شکل ۱۵.۸

اثبات. فرض کنید $L_۱$ و $L_۲$ در نقاط P و Q بر صفحهٔ E عمود باشند. بنابر قضیه ۱۲ بخش ۱۵.۱ خطوط $L_۱$ و $L_۲$ هم صفحه‌اند و چون $\overleftrightarrow{PQ}$ در E واقع است، هریک از آنها بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود است. بنابراین $L_۲ \| L_۱$. (چرا؟) □

■ **قضیه ۳.** اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.



شکل ۱۵.۹

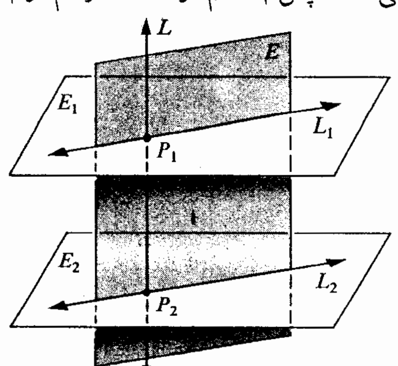
اثبات. فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ دو صفحهٔ موازی و $L_۱$ خطی عمود بر $E_۱$ در $P_۱$ باشد. پس می‌دانیم که هر خط واقع در $E_۱$ و شامل $P_۱$ بر L عمود است. باید دو مطلب را ثابت کرد:

(۱) L صفحهٔ $E_۲$ را (در نقطه‌ای مانند $P_۲$) قطع می کند.

(۲) هر خط واقع در $E_۲$ که شامل $P_۲$ باشد بر L عمود است.

اثبات (۱). فرض کنید $Q_۲$ نقطهٔ دلخواهی در $E_۲$، و $\overline{Q_۱Q_۲}$ پاره‌خط عمود از $Q_۲$ به‌نقطهٔ $Q_۱$ باشد که $Q_۱$ در $E_۱$ واقع است. اگر $Q_۱=P_۱$ مطلبی برای اثبات باقی نمی‌ماند، زیرا در این حالت بنا بر قضیهٔ ۱۴ بخش ۱۵.۱، $L\ =\ \overleftrightarrow{Q_۱Q_۲}$ و در نتیجه L صفحهٔ $E_۲$ را قطع می کند.

پس فرض کنید، $Q_۱\neq\ P_۱$. بنا بر قضیهٔ قبل $\overleftrightarrow{Q_۱Q_۲}\ \ ||\ \ L$. فرض کنید F صفحهٔ شامل L و $\overleftrightarrow{Q_۱Q_۲}$ باشد. چون F صفحهٔ $E_۲$ را قطع می کند مقطع آنها خطی مانند $L_۲$ است. اگر $L_۲\ ||$ آنگاه $\overleftrightarrow{Q_۱Q_۲}\ ||L_۲$ که نادرست است. در نتیجه L و $L_۲$ موازی نیستند و L و $L_۲$ همدیگر را در نقطه‌ای مانند $P_۲$ قطع می کنند. پس $P_۲$ هم در L است و هم در $E_۲$ که باید ثابت می‌شد.



شکل ۱۵.۱۰

اثبات (۲) اکنون می‌دانیم که L صفحهٔ E_2 را در P_2 قطع می کند. فرض کنید L_2 خط دلخواهی در E_2 باشد که از P_2 بگذرد. باید ثابت کنیم که $L_2 \perp L$.

فرض کنید E صفحهٔ شامل L و L_2 باشد. پس E صفحهٔ E_1 را در خطی مانند L_1 قطع می کند. بنا بر قضیهٔ ۱، $L_1 \parallel L_2$. و چون هر خط واقع در E_1 که از P_1 بگذرد بر خط L عمود است، $L_1 \perp L$. بنابراین $L_2 \perp L$ که باید ثابت می‌شد. □

■ **قضیه ۴. هر دو صفحهٔ عمود بر یک خط با هم موازیند.**

اثبات. فرض کنید L در P بر E_1 و در Q بر E_2 عمود باشد. اگر E_1 و E_2 همدیگر را در نقطه‌ای مانند R قطع کنند آنگاه $\triangle PQR$ در هر دو رأس P و Q دارای زوایای قائمه است که غیرممکن می باشد. □

مجموعه مسائل ۱۵.۲

قضایای زیر را ثابت کنید. اثبات‌های آنها نسبتاً کوتاه است.

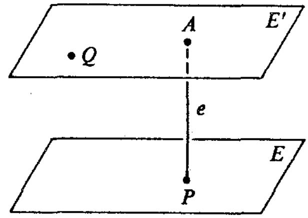
■ **قضیه ۵.** اگر صفحه‌ای بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.

به‌خاطر داشته باشید که اثبات را باید از آنجا شروع کنید که نشان دهید صفحهٔ مفروض خط دوم را قطع می کند.

■ **قضیه ۶.** دو خط موازی با یک خط با یکدیگر موازیند.

■ **قضیه ۷.** دو صفحهٔ موازی همه جا هم فاصله‌اند. یعنی، همهٔ پاره‌خطهای عمود از یکی از دو صفحه بر دیگری قابل انطباقند.

■ **قضیه ۸.** فرض کنید H نیم‌فضایی با وجه E باشد. فرض کنید e عدد مثبت دلخواهی باشد. فرض کنید F مجموعهٔ همهٔ نقاط Q از H باشد که فاصلهٔ قائم آنها از E مساوی e است. در این صورت F یک صفحه است.

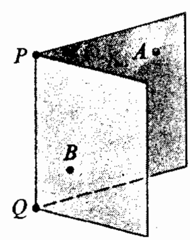


شکل ۱۵.۱۱

[راهنمایی: برای اثبات، فرض کنید P نقطه‌ای از E و $\overline{AP}$ پاره‌خطی عمود بر E باشد، بطوری که $AP = e$. فرض کنید E' صفحه‌ای باشد که از A می‌گذرد و بر $\overline{AP}$ عمود است. نشان دهید که (۱) $F \subseteq E'$ و (۲) $E' \subseteq F$. در نتیجه F یک صفحه یعنی E' است.]

۱۵.۳ اندازه مسطحه فرجه، صفحات عمود برهم

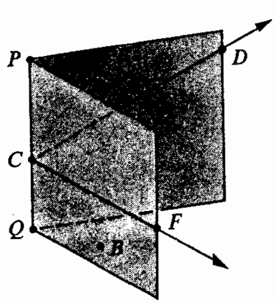
یادآوری می کنیم که فرجه عبارت است ازاجتماع یک خط و دو نیمصفحه که در یک صفحه واقع نیستند، و این خط مرز مشترک آنهاست. این خط را یال فرجه و دو نیمصفحه را اضلاع یا وجه‌های آن می‌نامند.



شکل ۱۵.۱۲

اگر $\overleftrightarrow{PQ}$ یال آن و A و B نقاطی روی دو ضلع آن باشند، آنگاه فرجه را به $\angle A-PQ-B$ نمایش می‌دهند. البته واضح است که با نامگذاری P، Q، A و B فرجه کاملاً معین می‌شود.

بسادگی می‌توان دید که اگر صفحه‌ای مانند E مرز $\overleftrightarrow{PQ}$ را تنها در یک نقطه مانند C قطع کند، آنگاه مقطع E با $\angle A-PQ-B$ یک زاویه است.



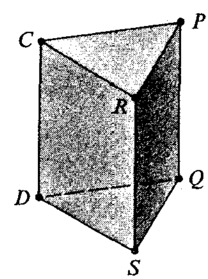
شکل ۱۵.۱۳

در شکل، E عبارت است از صفحه $\overleftrightarrow{CDF}$ که فرجه $\angle A-PQ-B$ را در $\angle DCF$ قطع می کند. اندازهٔ $\angle DCF$ البته به‌وضعیت صفحهٔ E بستگی دارد. در شکل، $\angle DCF$ نسبتاً بزرگ است اما اگر $\angle PCD$ و $\angle PCF$ هر دو خیلی کوچک باشند آنگاه $\angle DCF$ نیز خیلی کوچک خواهد بود.

اگر از نقطه‌ای مانند C روی یال فرجه‌ای یک صفحه مانند E عمود بر یال بگذرد، آنگاه فصل مشترک E با فرجه را زاویهٔ مسطحهٔ آن می‌نامند. با استفاده از زوایای مسطحه اندازهٔ فرجه را بر حسب درجه تعریف می کنیم. برای این منظور به‌قضیهٔ زیر نیاز داریم.

■ **قضیه ۱**. هر دو زاویهٔ مسطحهٔ یک فرجه قابل انطباقند.

اثبات. فرض کنید $\angle C$ و $\angle D$ دو مسطحه فرجه باشند. مانند شکل نقاط P، Q، R، و S را روی اضلاع زاویه‌های $\angle C$ و $\angle D$ طوری انتخاب می کنیم که $CP = DQ$ و $CR = DS$. (وقتی می گوییم «مانند شکل» یعنی این که P و Q روی یک ضلع فرجه؛ R و S روی ضلع دیگر فرجه واقعند.)



شکل ۱۵.۱۴

مراحل اصلی اثبات به‌صورت زیر می باشند.

(۱) $\overline{CP} \| \overline{DQ}$. (این پاره‌خطها هم‌صفحه، و بر یک خط عمودند.)

(۲) $\square CPQD$ یک متوازی‌الاضلاع است. (یک جفت اضلاع مقابل آن قابل انطباق و موازیند.)

(۳) $PQ = CD$. (چرا؟)

(۴) $\overline{PQ} \| \overline{CD}$. (چرا؟)

('۱) $\overline{CR} \| \overline{DS}$.

('۲) $\square CRSD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

('۳) $RS = CD$.

('۴) $\overline{RS} \| \overline{CD}$

(۵) (بنا بر (۳) و ('۳)) $PQ = RS$

(۶) (بنا بر (۴) و ('۴)) $\overline{PQ} \| \overline{RS}$

(۷) $PR = QS$. (چرا؟)

(۸) (بنا بر ض ض ض) $\triangle PCR \cong \triangle QDS$.

(۹) $\angle PCR \cong \angle QDS$، که باید ثابت می‌شد. □

حالا می‌توانیم اندازهٔ فرجه را تعریف کنیم. اندازهٔ $\angle A - PQ - B$ برابر است با اندازهٔ هریک از زوایای مسطحه $\angle A - PQ - B$ که همگی برابرند. با استفاده از همین قضیه می‌توان فرجه‌های قائمه را تعریف کرد. یک فرجه قائمه است، اگر زوایای مسطحهٔ آن زوایای قائمه باشند. دو صفحه عمود برهم‌اند، هرگاه اتحاد آنها شامل یک فرجهٔ قائمه باشد.

مجموعه مسائل ۱۵.۳

قضایای زیر را ثابت کنید.

■ **قضیه ۲.** اگر خطی بر یک صفحه عمود باشد، آنگاه هر صفحه‌ای که شامل این خط باشد بر صفحهٔ مفروض عمود است.

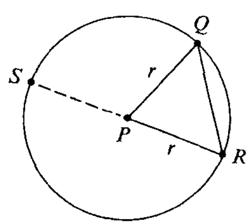
■ **قضیه ۳.** اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، آنگاه هر خط واقع در یکی از صفحات که بر خط تقاطع آنها عمود باشد بر صفحهٔ دیگر عمود است.

فصل ۱۶

دایره و کره

۱۶.۱ تعریف‌های اساسی

فرض کنیم P نقطه‌ای در صفحه E، و r عدد حقیقی مثبتی باشد. دایره با مرکز P و شعاع r مجموعهٔ همه نقاط Q از E است که فاصله آنها از P برابر r باشد.
دو یا بیشتر دایرهٔ با یک مرکز را متحدالمرکز نامند.

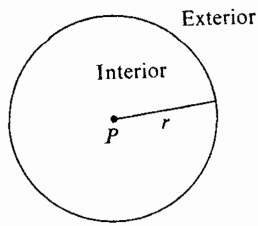


شکل ۱۶.۱

اگر Q نقطه دلخواهی از دایره باشد، آنگاه پاره‌خط $\overline{PQ}$ یک شعاع دایره است، و Q انتهای برونی آن نامیده می‌شود. اگر Q و R دو نقطه دلخواه دایره باشند، آنگاه پاره‌خط $\overline{PQ}$ یک وتر دایره است.

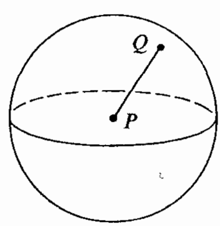
وتری که شامل مرکز است یک قطر دایره نامیده می‌شود. واضح است که طول هر قطر عدد $2r$ است. این عدد $2r$ قطر دایره نامیده می‌شود. (توجه کنید که کلمه شعاع به‌دو معنی به کار می‌رود. به‌معنی عدد r، یا پاره‌خطی مانند $\overline{PQ}$ می‌باشد. اما همیشه درک معنی آن ساده است. وقتی می گوئیم شعاع دایره، منظور عدد r است، و وقتی می گوئیم یک شعاع دایره، منظور یک پاره‌خط است. همین طور

کلمه قطر نیز به‌دو معنی به کار می‌رود.)
درون دایره مجموعه همه نقاطی از صفحه آن است که فاصله آنها از مرکز کمتر از شعاع باشد. برون دایره مجموعه همه نقاطی از صفحه آن است که فاصله آنها از مرکز بیشتر از شعاع باشد.



شکل ۱۶.۲

تعریف‌های متناظر برای کره در فضا دقیقاً شبیه اینها هستند و به‌صورت زیر می‌باشند.
نقطه P و عدد حقیقی و مثبت r مفروض‌اند، کره با مرکز P و شعاع r مجموعه همه نقاط Q است که فاصله آنها از P برابر r می‌باشد. دو یا بیشتر کره با یک مرکز را متحدالمرکز (هم‌مرکز) نامند.



شکل ۱۶.۳

اگر Q نقطه دلخواهی از کره باشد، آنگاه پاره‌خط $\overline{PQ}$ یک شعاع کره است، و Q انتهای برونی آن نامیده می‌شود. اگر Q و R دو نقطه دلخواه از کره باشند، آنگاه پاره‌خط $\overline{QR}$ یک وتر کره نامیده می‌شود. وتری که شامل مرکز است یک قطر کره نامیده می‌شود. واضح است که طول هر قطر عدد $۲r$ است. عدد $۲r$ قطر کره نامیده می‌شود.
درون کره مجموعه همه نقاطی است که فاصله آنها از مرکز کره کمتر از شعاع باشد. برون کره مجموعه همه نقاطی است که فاصله آنها از مرکز بزرگتر از شعاع باشد.

مجموعه مسائل ۱۶.۱

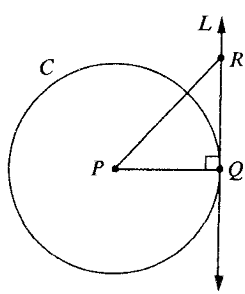
۱. نشان دهید هر دایره فقط یک مرکز و فقط یک شعاع دارد. یعنی، اگر دایره با مرکز P' و شعاع r' همان دایره به‌مرکز P و شعاع r باشد. آنگاه $P = P'$ و $r = r'$.
[راهنمائی: فرض کنید $P \neq P'$، و خط $\overleftrightarrow{PP'}$ را در نظر بگیرید.]

۱۶.۲ خطوط قاطع و مماس. قضیه خط ـ دایره

دایره C و خط L در یک صفحه مفروض‌اند. اگر خط و دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشند. آنگاه خط یک خط مماس بر دایره نامیده می‌شود، و نقطه مشترک، نقطه تماس نامیده می‌شود. اگر خط دایره را در بیش از یک نقطه ببرد، آن را یک خط قاطع نامند. قضیه زیر آشنا، و اثبات آن ساده است.

■ **قضیه ۱**. اگر خطی بر یک شعاع دایره در نقطه انتهای برونی آن عمود باشد، آنگاه این خط بر دایره مماس است.

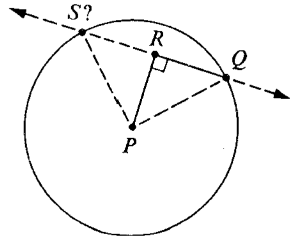
اثبات. فرض کنیم C دایره‌ای با مرکز P باشد؛ فرض کنیم $\overline{PQ}$ شعاعی از دایره، و L در نقطه Q بر $\overline{PQ}$ عمود باشد (شکل. ١٦.٤). اگر R نقطه دیگری از L باشد، آنگاه $PR > PQ$، زیرا کوتاهترین پاره‌خطی که یک نقطه را به‌یک خط وصل می کند پاره‌خط عمود است. بنابراین R در برون دایره C واقع است. در نتیجه L دایره C را فقط در نقطه Q قطع می کند و بنابراین یک خط مماس است. □



شکل ۱۶.۴

عکس قضیه نیز صحیح است.

■ **قضیه ۲**. هر خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.



شکل ۱۶.۵

اثبات. فرض کنیم C دایره‌ای با مرکز P، و L مماس بر C در نقطه Q باشد. فرض کنیم که Q پای عمود مرسوم از نقطه P بر L نباشد، و فرض کنیم پای عمود نقطه R باشد. بنا بر اصل ساختن پاره‌خط (یا قضیه ساختن پاره‌خط، بر طبق فصلی که به‌آن مراجعه می کنید)، نقطه‌ای مانند S از L وجود دارد به‌طوری که $Q - R - S$ و $RQ = RS$. با دو بار استفاده از قضیه فیثاغورث، داریم

$$PR^2 + RQ^2 = PQ^2 \text{ ، } PR^2 + RS^2 = PS^2 .$$

بنابراین $PS = PQ$، در نتیجه S روی دایره واقع است، و L خط مماس بر دایره نمی‌باشد. □

اثبات قضایای زیر نسبتاً سرراست می باشند.

■ **قضیه ۳.** عمودی که از مرکز دایره C بر هر وتر آن رسم می‌شود منصف آن وتر است.

■ **قضیه ۴.** پاره‌خطی که مرکز دایره را به‌نقطه وسط یک وتر وصل می کند برآن وترعمود است.

■ **قضیه ۵.** در صفحه E، عمودمنصف هر وتر دایره از مرکز آن دایره می گذرد.

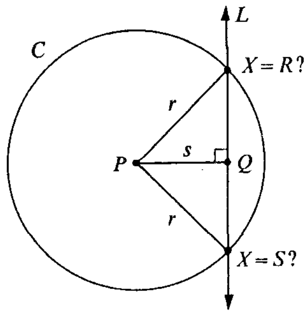
دایره های با شعاع برابر r قابل انطباق نامیده می‌شوند. فاصله بین مرکز دایره و وتر، البته، منظور فاصله عمودی است؛ یعنی طول پاره‌خط عمود از مرکز دایره بر وتر. دو وتر از مرکز متساوی‌الفاصله‌اند اگر فاصله‌های آنها از مرکز یکی باشد.

■ **قضیه ۶.** در یک دایره یا در دایره‌های قابل انطباق، وترهای متساوی‌الفاصله از مرکز، قابل انطباق‌اند.

■ **قضیه ۷.** در یک دایره یا در دایره‌های قابل انطباق، هر دو وتر قابل انطباق از مرکز به‌یک فاصله‌اند.

قضیهٔ ظاهراً بی‌فایدهٔ زیر ارزش خاصی دارد؛

■ **قضیه ۸. قضیه خط‌ـدایره.** اگر خطی درون دایره‌ای را قطع کند، آنگاه این خط دایره را دقیقاً در دو نقطه قطع می کند.



شکل ۱۶.۶

اثبات. فرض کنیم C دایرهٔ با مرکز P و شعاع r، و L خط مفروضی باشد. فرض کنیم Q پای عمود مرسوم از P بر L باشد. چون برای نقطه‌ای مانند Z از L، $PZ<r$، در نتیجه $PQ<r$؛ یعنی، Q درون دایره واقع است.

همان‌طور که در شکل نشان داده شده است فرض کنیم $PQ = s<r$. می‌خواهیم ثابت کنیم که C خط L را دقیقاً در دو نقطه R و S قطع می کند.

اگر X نقطه‌ای باشد که در آنجا خط دایره را قطع می کند، آنگاه $\triangle PQX$ در رأس Q قائم‌الزاویه است پس بنا بر قضیه فیثاغورث، $s^2 + QX^2 = r^2$ لذا $QX=\sqrt{r^2-s^2}$.

و برعکس، اگر X روی L باشد، و $QX=\sqrt{r^2-s^2}$، در نتیجه

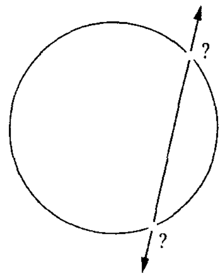
$$PX^2 = s^2 + (\sqrt{r^2-s^2})^2 = s^2 + r^2 - s^2 = r^2 .$$

اکنون $r^2 - s^2>0$، زیرا $s<r$. بنا بر اصل کمال اقلیدسی، $r^2 - s^2$ ریشه دوم مثبت $\sqrt{r^2-s^2}$ دارد.

بنا بر اصل خط کش، دقیقاً دو نقطه X روی L وجود دارند به‌طوری که $QX= \sqrt{r^2-s^2}$.
بنابراین درست دو نقطه روی هر دوی خط و دایره قرار دارند. □

توجه کنید که در اثبات این قضیه، برای اولین بار، اصل کمال اقلیدس را به کار برده‌ایم. این کار تعجبی ندارد، زیرا خود قضیه یک خاصیت کمال را برای صفحه بیان می کند، ادعای وجود نقاطی که در برخی شرایط صدق می کنند.

اگر به تصادف چند نقطه از صفحه را حذف کنیم، آنگاه ممکن است صفحه‌ای به‌دست آید که در آن قضیه خط-دایره برقرار نباشد.



شکل ۱۶.۷

در روش حاضر، این نوع چیزها به‌وسیله اصل کمال اقلیدس در دستگاه اعداد حقیقی غیرمحتمل است. در روش ترکیبی محض، قضیه ۸ را باید بعنوان اصل گرفت.

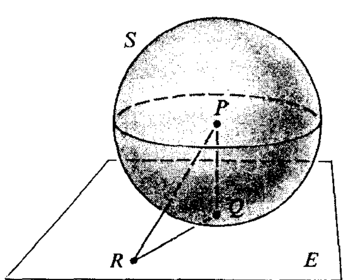
۱۶.۳ صفحه‌های قاطع و مماس

شباهت نسبتاً نزدیکی بین بحث زیر و بحث قبلی وجود دارد.

کره S و صفحه E مفروض‌اند. اگر صفحه و کره در یک و فقط یک نقطه Q مشترک باشند، آنگاه صفحه را یک صفحه مماس بر کره می‌نامند. و نقطه مشترک Q را نقطه تماس می‌نامند. اگر صفحه کره را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن را یک صفحه قاطع می‌نامند.

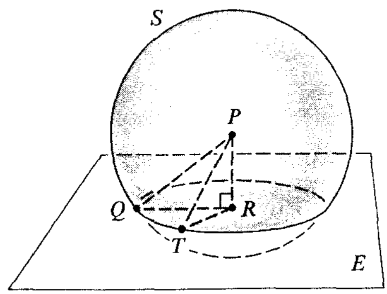
■ **قضیه ۱**. هر صفحه که بر یک شعاع در نقطه انتهای برونی آن عمود باشد بر S مماس است.

اثبات. اگر R نقطه دلخواهی از صفحه E به‌غیر از Q باشد، آنگاه $PR > PQ$، زیرا پاره‌خط عمود از P بر E کوتاهترین است. □



شکل ۱۶.۸

■ **قضیه ۲**. هر مماس بر کره بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است.



شکل ۱۶.۹

اثبات. فرض کنید E در Q بر S مماس باشد. فرض کنید Q پای عمود مرسوم از P بر E نباشد و R پای این عمود باشد. فرض کنیم C دایرهٔ به‌مرکز R و شعاع RQ در صفحهٔ E باشد. اگر T نقطهٔ دلخواهی از C باشد آنگاه $\overline{PR} \perp \overline{RT}$. پس بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم

$$PT^۲ = PR^۲ + RT^۲ = PR^۲ + RQ^۲ \cdot$$

اما $PR^۲ + RQ^۲ = PQ^۲$. بنابراین T نه فقط در E بلکه در S نیز واقع است. در نتیجه E کرهٔ S را در یک دایرهٔ کامل قطع می کند و این با فرضی که برای E گرفته‌ایم تناقض دارد. □

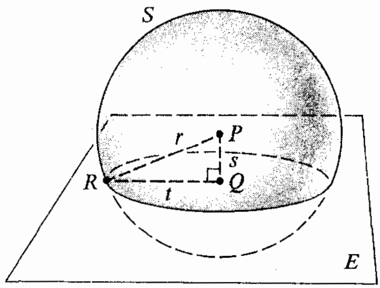
■ **قضیه ۳**. اگر صفحهٔ E داخل S را قطع کند آنگاه E کرهٔ S را در یک دایره قطع می کند.

اثبات. فرض کنید Q پای عمودی باشد که از P مرکز S بر صفحهٔ E رسم شده است و $s=PQ$. در این صورت $s<r$. بنابراین $r^۲-s^۲>۰$. فرض کنید

$$t = \sqrt{r^۲ - s^۲} \cdot$$

(مجدداً بنا بر کامل بودن اقلیدسی). اکنون مستقیماً می‌توان بررسی کرد که مقطع S و E دقیقاً دایرهٔ به‌مرکز Q و شعاع t در صفحهٔ E است.

اثبات قضایای زیر سرراست است و حذف می‌شود.



شکل ۱۶.۱۰

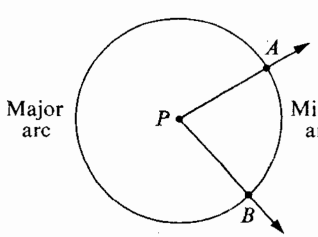
■ **قضیه ۴.** خطی که از مرکز کرهٔ S می‌گذرد و بر صفحهٔ قاطع E عمود است از مرکز دایره‌ای که مقطع E و کرهٔ S است می‌گذرد.

■ **قضیه ۵.** گر صفحهٔ E کرهٔ S را در دایرهٔ C قطع کند آنگاه پاره‌خط بین مرکز S و مرکز C بر E عمود است.

■ **قضیه ۶.** اگر S، E و C به‌همان صورت قضیهٔ قبل باشند و L خطی عمود بر E در مرکز C باشد آنگاه L از مرکز S می‌گذرد.

۱۶.۴ کمانهای دوایر

زاویهٔ مرکزی یک دایرهٔ مفروض زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره است.



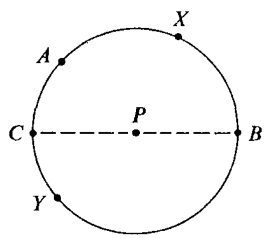
شکل ۱۶.۱۱

فرض کنید A و B نقاط تقاطع اضلاع زاویهٔ مرکزی و دایره باشند، بنابراین زاویهٔ مرکزی عبارت است از $\angle APB$. کمان کوچک $\widehat{AB}$ عبارت است از مجموعهٔ مرکب از A و B و همهٔ نقاط دایره که

در درون $\angle APB$ واقع‌اند. کمان بزرگ $\widehat{AB}$ عبارت است مجموعه نقاط A و B و همه نقاطی از دایره که در برون $\angle APB$ واقع‌اند. در هر حالت نقاط A و B را نقاط انتهایی آن کمان می‌نامند.

اگر A و B نقاط انتهایی یک قطر باشند آنگاه دو کمان با نقاط انتهایی A و B موجودند. هریک از این کمانهای $\widehat{AB}$ عبارت است از A و B و همهٔ نقاط دایره که در یک طرف خط واقع‌اند. اینها را نیمدایره می‌نامند.

البته، نماد $\widehat{AB}$ برای کمانها همیشه مبهم است، زیرا همیشه دو کمان مختلف با نقاط انتهایی A و B موجود است. در حالتهایی که بیم سوءتفاهم برود با انتخاب نقطهٔ سومی از کمان مانند X ابهام را از بین برده و کمان را به $\widehat{AXB}$ نمایش می‌دهیم. در شکل، $\widehat{AXB}$ یک کمان کوچک و $\widehat{AYB}$ کمان بزرگ نظیر آن است و $\widehat{CAB}$ و $\widehat{CYB}$ نیمدایره‌اند.



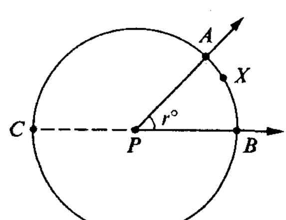
شکل ۱۶.۱۲

اندازهٔ درجه کمان $\widehat{AXB}$ را به $m\widehat{AXB}$ نمایش داده به‌روش زیر تعریف می کنیم.

(۱) اگر $\widehat{AXB}$ کمان کوچک باشد آنگاه $m\widehat{AXB}$ برابر است با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی نظیر آن یعنی $m\angle APB$.

(۲) اگر $\widehat{AXB}$ یک نیمدایره باشد آنگاه $m\widehat{AXB} = ۱۸۰$.

(۳) اگر $\widehat{AXB}$ کمان بزرگ باشد آنگاه $m\widehat{AXB} = ۳۶۰ - m\angle APB$.



$m\widehat{AXB} = r, \quad m\widehat{CXB} = 180,$

$m\widehat{ACB} = 360 - r.$

شکل ۱۶.۱۳

قضیهٔ زیر مبین این نکته است که اندازهٔ درجه کمانها به‌طریقی که شاید دور از انتظار ما نباشد

جمعی است.

■ **قضیه۱.** اگر $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ کمانهایی از یک دایره باشند که تنها نقطهٔ مشترک آنها B و اتحاد آنها کمان $\widehat{AC}$ باشد آنگاه $m\widehat{AB}+m\widehat{BC} = m\widehat{AC}$.

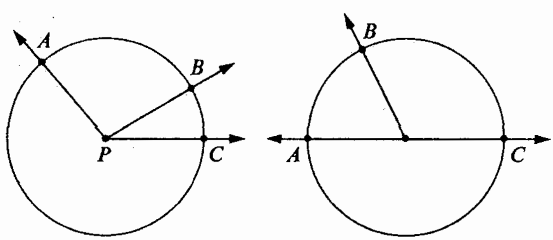
یعنی، همیشه داریم

$$m\ \widehat{ABC} = m\ \widehat{AB} + m\ \widehat{BC}\ .$$

اثبات کسل کننده است، زیرا باید پنج حالت را در نظر گرفت اما هریک از پنج حالت ساده است. آنها را بیان می کنیم، شکلها را ارائه می‌دهیم، و تحقیق آنها را بعهدهٔ خواننده می گذاریم.

حالت ۱. $\widehat{ABC}$ یک کمان کوچک است.

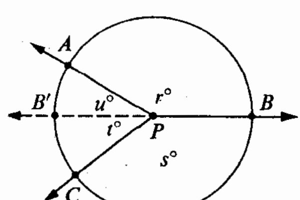
حالت ۲. $\widehat{ABC}$ یک نیمدایره است.



شکل ۱۶.۱۴

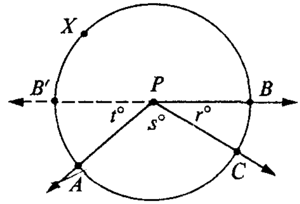
در این دو حالت $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{BC}$ همان $m\angle APB$ و $m\angle BPC$ می باشند.

حالت ۳. $\widehat{ABC}$ یک کمان بزرگ، و A و C در دو طرف قطر شامل B واقع‌اند. (چه معادلاتی r، u، s و t را به‌هم مربوط می کند؟)



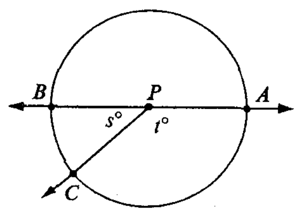
شکل ۱۶.۱۵

حالت ۴. $\widehat{ABC}$ یک کمان بزرگ و A و C در یک طرف قطر شامل B واقع‌اند.



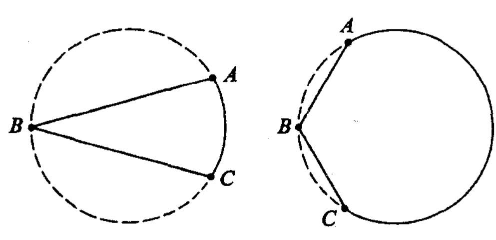
شکل ۱۶.۱۶

حالت ۵. $\widehat{ABC}$ یک کمان بزرگ و یکی از کمانهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ یک نیمدایره است (در اینجا $m\widehat{ABC} = ۳۶۰-t = ۱۸۰+۱۸۰-t = ۱۸۰+s = m\widehat{AB}+m\widehat{BC}$.)

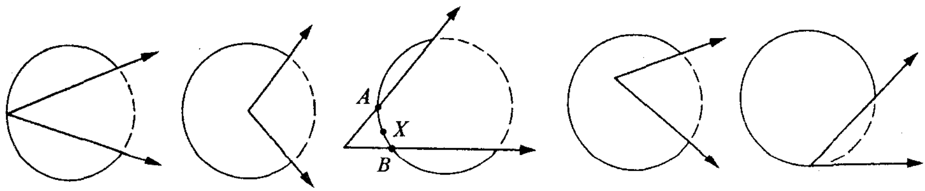


شکل ۱۶.۱۷

در شکلهای زیر زاویهٔ $\angle ABC$ در کمان نقطه‌چین $\widehat{ABC}$ محاط است. به‌عبارت دقیق‌تر، یک زاویه در کمانی از یک دایره محاط است هر گاه (۱) دو نقطهٔ انتهایی کمان روی اضلاع زاویه واقع باشند و (۲) رأس زاویه نقطه‌ای از کمان اما نه یک انتهای آن باشد. (این مطلب را می‌توان خلاصه‌تر نوشت: $\angle ABC$ بنا بر تعریف، در $\widehat{ABC}$ محاط است.)



شکل ۱۶.۱۸



شکل ۱۶.۱۹

در شکلهای فوق، زاویهٔ نشان داده شده حاوی کمان نقطه‌چین است. در سومین حالت زاویه نه تنها حاوی کمان نقطه‌چین بلکه حاوی کمان $\widehat{AXB}$ نیز می‌باشد.

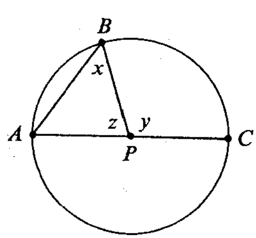
اکنون برای مفهومی که با شکلهای فوق مطرح شد تعریفی ریاضی ارائه می‌دهیم. یک زاویه حاوی یک کمان است هر گاه (۱) نقاط انتهایی کمان روی زاویه واقع باشد، (۲) هر ضلع زاویه شامل لااقل یک نقطهٔ انتهایی آن کمان باشد و (۳) بجز برای نقاط انتهایی، کمان در درون زاویه واقع باشد.

■ **قضیه ۲**. اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل آن.

بیان دیگر. فرض کنید $\angle A$ در کمان $\widehat{BAC}$ از دایره محاط شده باشد و حاوی کمان $\widehat{BC}$ باشد. در این صورت $m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{BC}$.

اثبات.

حالت اول. ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که $\angle A$ شامل قطری از دایره باشد. فرض کنید مانند شکل، $\angle x = \angle ABP$ و $\angle y = \angle BPC$ و $\angle z=\angle APB$.



شکل ۱۶.۲۰

در این صورت داریم

$$m\angle A + m\angle x + m\angle z = ۱۸۰ \quad و \quad m\angle z + m\angle y = ۱۸۰ \,.$$

چون A و B روی دایره‌اند، داریم $PA=PB$. پس بنا بر قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین، داریم $m\angle A=m\angle x$، بنابراین

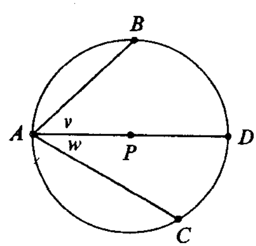
$$\begin{aligned} ۲m\angle A &= ۱۸۰ - m\angle z \\ &= m\angle y \\ &= m\widehat{BC} \,. \end{aligned}$$

در نتیجه $m\angle A = \frac{۱}{۲} m\widehat{BC}$،

که باید ثابت می‌شد.

حالت ۲. فرض کنید B و C در دو طرف قطری باشند که از A می‌گذرد. در این صورت

$$m\angle A = m\angle v + m\angle w$$



شکل ۱۶.۲۱

پس بنا بر حالت ۱

$$m\angle v = \frac{۱}{۲} m\widehat{BD}$$

و

$$m\angle w = \frac{۱}{۲} m\widehat{DC}$$

بنا بر قضیهٔ ۱،

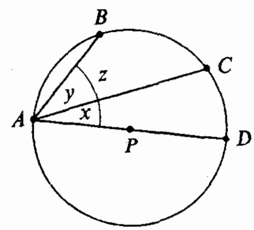
$$m\widehat{BD} + m\widehat{DC} = m\widehat{BC} \,.$$

در نتیجه

$$m\angle A = \frac{۱}{۲} m\widehat{BC} \,,$$

که باید ثابت می‌شد.

حالت ۳. فرض کنید B و C در یک طرف قطری باشند که از A می گذرد.



شکل ۱۶.۲۲

در اینجا

$$m\angle x + m\angle y = m\angle z \text{ و}$$

و

$$m\widehat{BC} + m\widehat{CD} = m\widehat{BD} \cdot$$

در نتیجه بنا به حالت ۱،

$$\begin{aligned} m\angle A &= m\angle y = m\angle z - m\angle x \\ &= \frac{1}{2} m\widehat{BD} - \frac{1}{2} m\widehat{CD} \end{aligned}$$

بنابراین

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{BC} \,,$$

که باید ثابت می‌شد. □

این قضیه دارای دو نتیجهٔ بدیهی است.

■ **قضیه ۳**. هر زاویهٔ محاط در یک نیمدایره زاویه‌ای قائمه است.

■ **قضیه ۴**. همهٔ زوایای محاط در یک کمان قابل انطباقند.

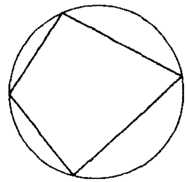
مجموعه مسائل ۱۶.۴

۱. دو دایره با مماس مشترک در A مفروض‌اند، بطوری که دایرهٔ دوم از مرکز اولی می گذرد. نشان دهید هر وتر دایرهٔ اول که از A بگذرد به‌وسیلهٔ دایرهٔ دوم به‌دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

۲. سه یا تعداد بیشتری نقطه را هم‌دایره نامند هرگاه دایره‌ای باشد که شامل همهٔ آنهاست. نشان دهید هر سه نقطهٔ غیر همخط (در صفحه) نقاطی هم‌دایره‌اند.

۳. نشان دهید سه نقطهٔ هم‌خط هیچ گاه هم‌دایره نیستند.

۴. چهارضلعی محاطی چهار ضلعی است که رأسهای آن روی یک دایره‌اند. ثابت کنید در هر چهار ضلعی محاطی زوایای مقابل مکمل یکدیگرند.



شکل ۲۳-۱۶

۵. برعکس نشان دهید اگر در یک چهار ضلعی محدب دو زاویهٔ مقابل مکمل یکدیگر باشند آنگاه چهار ضلعی محاطی است.

۶. دو خط موازی حاوی کمان $\widehat{AB}$ از یک دایره‌اند هرگاه (۱) خطوط دایره را در A و B قطع کنند و (۲) هر نقطهٔ دیگر $\widehat{AB}$ بین دو خط واقع باشد. قضایای زیر را ثابت کنید.

■ **قضیه ۵.** اگر دو خط موازی دایره‌ای را قطع کنند آنگاه حاوی دو کمان قابل انطباقند.

(سه حالت باید در نظر بگیرید: دو قاطع، دو مماس، یک قاطع و یک مماس.)

■ **قضیه ۶.** در یک دایره یا در دایره‌های قابل انطباق، اگر دو وتر قابل انطباق باشند آنگاه کمانهای کوچک نظیر آنها نیز قابل انطباقند.

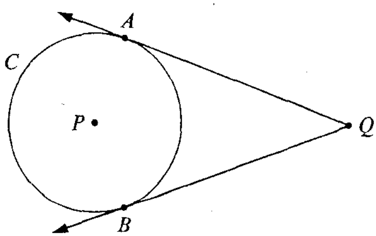
■ **قضیه ۷.** در یک دایره یا در دایره‌های قابل انطباق، اگر دو کمان قابل انطباق باشند آنگاه وترهای نظیر نیز قابل انطباقند.

■ **قضیه ۸.** یک دایره و یک زاویه که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن مماس بر دایره است و ضلع دیگر دایره را قطع می کند مفروضند. در این صورت اندازه زاویه برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل آن.

■ **قضیه ۹.** هر دو دایرهٔ متمایز همدیگر را در بیش از دو نقطه قطع نمی کنند.

۱۶.۵ قضیه دو دایره

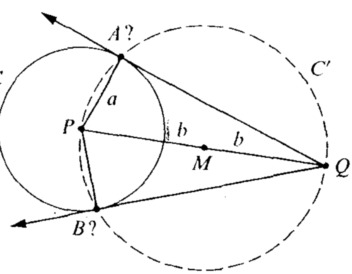
حالا به بحث درباره مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن می پردازیم. در حقیقت یک دایره C و نقطه دلخواه Q برون آن مفروض‌اند، دقیقاً دو خط وجود دارند به‌طوری که از Q می گذرند و بر دایره C مماس‌اند:



شکل ۱۶.۲۴

روش طبیعی که درصدد اثبات آن برآئیم به‌صورت زیر است.

فرض کنیم M وسط پاره‌خط $\overline{PQ}$ باشد، که P مرکز دایره C است. فرض کنیم C' دایره‌ای به‌مرکز M و شعاع $MP = MQ$ باشد.



شکل ۱۶.۲۵

همانطور که از شکل الهام گرفته می‌شود، اگر دایره C' دایره C را در دو نقطه A و B قطع کند، آنگاه $\overleftrightarrow{QA}$ و $\overleftrightarrow{QB}$ به‌ترتیب در A و B بر دایره C مماس‌اند. به‌دلیل آنکه هریک از زاویه‌های $\angle PAQ$ و $\angle PBQ$ محاطی و هریک مقابل یک نیم‌دایره می‌باشند و لذا هریک زاویه قائمه می‌باشند، حال بنا بر قضیه ۱. از بخش ۱۶.۲ هریک از خطهای فوق بر دایره مماس‌اند.

زیرا بنابراین قضیه خطی که بر یک شعاع در نقطه انتهای بیرونی آن عمود باشد بر آن دایره مماس است.

در اثبات این قضیه یک خلأ وجود دارد و آن اینکه فرض کردیم اگر C و C' در دو نقطه متقاطع باشند. لذا برای تکمیل اثبات فوق احتیاج داریم که نشان دهیم دو دایره C و C' در دو نقطه یکدیگر را می‌برند. برای این منظور قضیه زیر را لازم داریم.

■ قضیه ۱ . قضیه دو دایره.

دو دایره C و C' به‌شعاعهای a و b مفروض‌اند، فرض کنیم فاصله مرکزهای آن دو برابر c باشد.

اگر هریک از عددهای a، b و c کوچکتر از مجموع دو عدد دیگر باشد. آنگاه C و C' یکدیگر را در دونقطه می‌برند. و این دو نقطه تقاطع در دو طرف خطی قرار دارند که شامل خط‌المرکزین دو دایره است.

قبل از این که به‌اثبات قضیه بپردازیم، اجازه دهید ببینیم چگونه این قضیه در رابطه با رسم مماسهای بر دایره از نقطه Q خارج آن به کار می‌رود.

در شکل ۱۶.۲۵، فرض کنیم شعاع دایره C برابر a و شعاع دایره C' برابر $b=PM$ باشد. فاصله بین مرکزهای دو دایره $c=MP=b$ است. چون Q خارج دایره C است، لذا $PQ>a$، بنابراین $a<۲b$.

پس (۱) $a<b+c$، زیرا $b+c=۲b$، و $a<۲b$.

همچنین (۲) $b<a+c$، زیرا $b=c$ و $a>۰$. سرانجام، (۳) $c<a+b$، زیرا $c=b$.

بنابراین می‌توان از قضیه دو-دایره استفاده کرد، در نتیجه C و C' در دو نقطه A و B متقاطع‌اند.

لذا حداقل دو مماس بر دایره C وجود دارند که از نقطه Q می گذرند. بعداً (در بخش بعدی) نشان خواهیم داد که دقیقاً دو مماس بر دایره وجود دارند که از Q می گذرند. بقیه این قسمت را به‌اثبات قضیه دو دایره اختصاص می‌دهیم.

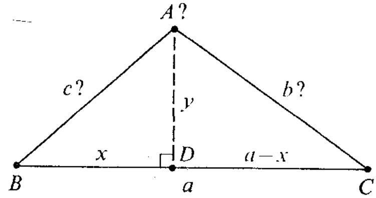
اگر a، b و c طولهای اضلاع یک مثلث باشند، آنگاه هریک از این عددهای a، b و c از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است. (نامساوی مثلثی). امّا اکنون می‌خواهیم عکس آن را ثابت کنیم.

■ قضیه ۲ . قضیه مثلث

سه عدد حقیقی مثبت a، b و c مفروض‌اند. اگر هریک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که اضلاع آن دارای اندازه‌های a، b و c می‌باشند.

اثبات. بدون این که به کلیت استدلال خللی وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم $c \leqslant b \leqslant a$.

پاره‌خط $\overline{BC}$ را به‌طول a انتخاب می کنیم. می‌خواهیم نقطه‌ای مانند A پیدا کنیم به‌طوری که $AB=c$ و $AC=b$. به‌این صورت شروع می کنیم که فرض کنیم مثلثی مانند $\triangle ABC$ از نوعی که مورد نظر ما است وجود داشته باشد، و سپس محلی را که A باید واقع باشد پیدا می کنیم.



شکل ۱۶.۲۶

با این اقدام چیزی ثابت نمی‌شود، زیرا در ابتدا آنچه را که باید ثابت می کردیم فرض گرفته‌ایم. اما موقعی که محل دقیق نقاطی را که کارایی دارند پیدا کردیم به‌سادگی می‌توان نشان داد که این نقاط همان نقاط مطلوبند.

پس فرض کنیم همانطور که در شکل ۱۶.۲۶ نشان داده شده است، $\triangle ABC$ با اضلاع به‌اندازه‌های مطلوب داده شده است. فرض کنیم D پای عمودی باشد که از A بر $\overleftrightarrow{BC}$ رسم کرده‌ایم. سپس $B - D - C$، زیرا $\overline{BC}$ بزرگترین ضلع $\triangle ABC$ است.

بنابراین، اگر $BD=x$، آنگاه $DC=a-x$. فرض کنیم $AD=y$. با دوبار به کار بردن قضیه فیثاغورث داریم؛

$$(۱)\quad y^۲ = c^۲ - x^۲ \qquad\qquad (۲)\quad y^۲ = b^۲ - (a-x)^۲$$

بنابراین $c^۲-x^۲=b^۲-(a-x)^۲$ در نتیجه، $۲ax = a^۲ + c^۲ - b^۲$، لذا

$$(۳)\quad x = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲a}$$ و از (۱) داریم $(۴)\ y = \sqrt{c^۲-x^۲}$.

آنچه در فوق ثابت کردیم آن است که اگر x و y در (۱) و (۲) صدق کنند، آنگاه x و y در (۳) و (۴) نیز صدق می کنند.

حال می‌خواهیم عکس آن را بررسی کنیم، یعنی اگر x و y در (۳) و (۴) صدق کنند. آنگاه x و y در (۱) و (۲) نیز صدق می کنند. اگر (۴) برقرار باشد (۱) برقرار است. همچنین اگر از (۳) به‌روش عکس بر گردیم داریم، $c^۲-x^۲=b^۲-(a-x)^۲$. و لذا با توجه به (۱)، $y^۲=b^۲-(a-x)^۲$، یعنی (۲) نیز برقرار است.

بنابراین: (۴) و (۳) $\Longleftrightarrow$ (۲) و (۱)

حال که می‌دانیم در جستجوی چه مثلثی هستیم، همه چیز را دوباره شروع می کنیم.

سه‌عدد حقیقی و مثبت a، b و c داریم به‌طوری که $a \geqslant b \geqslant c$.

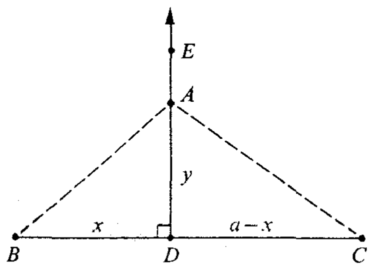
فرض کنیم $x = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲a}$، در این صورت $x>۰$، زیرا $a^۲\geqslant b^۲$ و $c^۲\geqslant ۰$.

ما می‌خواهیم قرار دهیم $y = \sqrt{c^۲-x^۲}$، امّا ابتدا باید ثابت کنیم $c>x$، تا مطمئن شویم که زیر رادیکال مثبت است. کافیست نشان دهیم $c-x>۰$. اکنون

$$c-x=c-\frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲a}=\frac{۲ac-a^۲-c^۲+b^۲}{۲a}=\frac{b^۲-(a^۲-۲ac+c^۲)}{۲a}=\frac{b^۲-(a-c)^۲}{۲a}.$$

بنا به‌فرض می‌دانیم $a<b+c$، بنابراین $a-c<b$. چون $a-c$ و b مثبت‌اند لذا $(a-c)^۲<b^۲$ و این به معنی آن است که $c-x>۰$، یا $c>x$.

حالا آماده‌ایم تا مثلث‌مان را بسازیم. فرض کنیم $\overline{BC}$ پاره‌خطی به‌طول a باشد، و D نقطه‌ای روی $\overline{BC}$ باشد به‌طوری که
$$BD = x = \frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲a} \quad (۳')$$

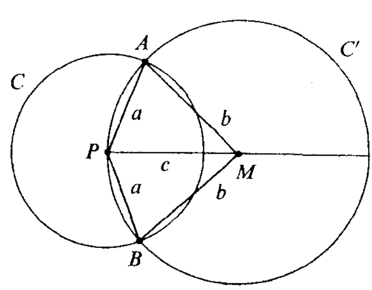


شکل ۱۶.۲۷

فرض کنیم $\overrightarrow{DE}$ نیم‌خطی باشد که در D عمود بر $\overline{BC}$ رسم شده است، و همچنین فرض کنیم A نقطه‌ای روی $\overrightarrow{DE}$ باشد به‌طوری که $AD=y=\sqrt{c^۲-x^۲} \quad (۴')$

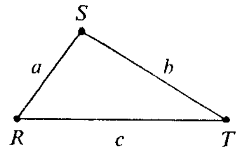
چون x و y در (۳) و (۴) صدق می کنند، نتیجه می گیریم که x و y در (۱) و (۲) صدق می کنند. بنابراین $(a-x)^۲+y^۲=b^۲ \quad (۲')$ $\quad x^۲+y^۲=c^۲ \quad (۱')$، امّا $x^۲+y^۲=AB^۲$، و $(a-x)^۲+y^۲=AC^۲$. لذا $AB^۲=c^۲$ و $AC^۲=b^۲$. چون b و c مثبت هستند، نتیجه می گیریم که $AB=c$ و $AC=b$.

بنابراین $\triangle ABC$ از آن نوع مثلثی است که ما جستجو می کردیم. بر مبنای قضیه مثلث، به‌سادگی قضیه دو دایره ثابت می‌شود. دایره C به‌مرکز P و شعاع a و دایره C' به‌مرکز M و شعاع b داده شده‌اند:



شکل ۱۶.۲۸

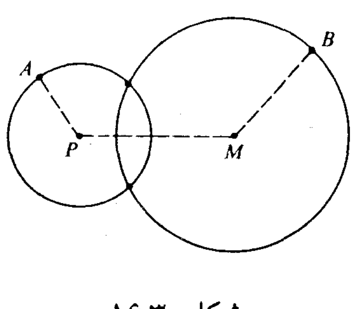
فاصله بین مرکزهای دو دایره یعنی PM برابر c است، و هریک از عددهای a، b و c از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است. بنابراین یک مثلث $\triangle RST$ وجود دارد، که $RS=a$، $ST=b$ و $RT=c$:



شکل ۱۶.۲۹

فرض کنیم A نقطه‌ای در صفحه دو دایره ما باشد به‌طوری که $\angle APM \cong \angle R$ و $AP=a=RS$. بنابر ض-ز-ض، $\triangle PAM \cong \triangle RST$ لذا $AM=ST=b$. بنابر این A روی هر دو دایره C و C' واقع است. فرض کنیم B نقطه‌ای در طرفی از $\overleftrightarrow{PM}$ باشد که A واقع نیست به‌طوری که $\angle BPM \cong \angle R$ و $BP=a=RS$. بنا بر ض-ز-ض، $\triangle PBM \cong \triangle RST$، لذا B نیز روی هر دو دایره C و C' است. بررسی این که نشان دهیم نقاط A و B تنها نقاطی هستند که دو دایره C و C' در آنها متقاطع اند مشکل نیست. (این قضیه ۹ در مسائل بخش ۱۶.٤ است.)

در یک بررسی کاملاً مجرد باید صورت معادلی از قضیهٔ دو دایره را بعنوان اصل بیان کرد. اقلیدس عملاً از چنین اصلی بدون ذکر آن استفاده کرد. به‌بیان جدید، اصلی که لازم داریم به‌شکل زیر درمی‌آید.



شکل ۱۶.۳۰

اصل دو دایره. فرض کنید C_1 و C_2 دو دایره به‌مرکزهای P و M باشند و A و B نقاطی از C_1 و C_2. اگر هریک از دسته‌های قابل انطباق $[\overline{PA}]$، $[\overline{PM}]$، و $[\overline{MB}]$ از مجموع دوتای دیگر کوچکتر باشد آنگاه C_1 و C_2 همدیگر را در دو نقطه قطع می کنند.

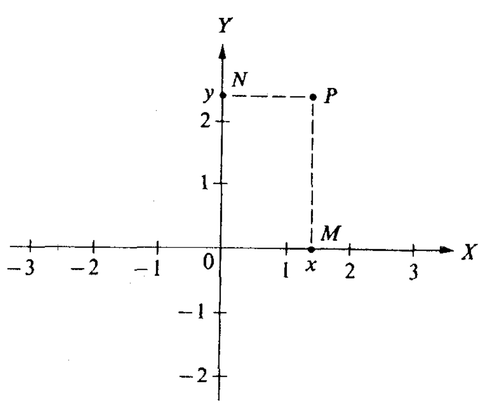
در اینجا جمع و نامساویهای دسته‌های قابل انطباق مثل بخش ۸.٤ تعریف می‌شود. در این اصل گفته نشده است که نقاط تقاطع در دو طرف $\overleftrightarrow{PM}$ واقعند، زیرا بسادگی می‌توان آن را ثابت کرد.

فصل ۱۷

دستگاه مختصات دکارتی

خوشبختانه همهٔ خوانندگان این کتاب با دستگاههای مختصاتی از هندسه تحلیلی مقدماتی آشنا هستند. با وجود این بخاطر خود کفا بودن کتاب آنها را از اول توضیح می‌دهیم. به‌منظور سرعت و سهولت و نیز تقلیل مطالب تکراری در استنتاجهایمان مطالب تازه و نوآوریهایی خواهیم داشت.

در صفحهٔ E یک دستگاه مختصاتی را به‌روش زیر بنا می کنیم. ابتدا خطی مانند X با دستگاه مختصاتی که از اصل خط کش بدست می‌آید انتخاب می کنیم. نقطهٔ صفر X را مبدأ می‌نامیم. اکنون خطی مانند Y را با یک دستگاه مختصاتی می گیریم که در مبدأ بر X عمود و مختص مبدأ در آن مساوی صفر است.

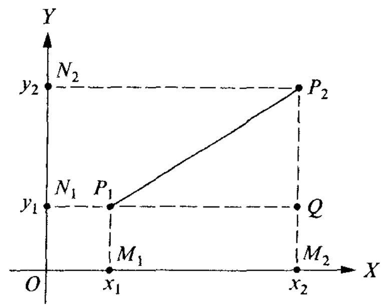


شکل ۱۷.۱

فرض کنید p نقطه‌ای در صفحهٔ E باشد. اگر M پای عمود مرسوم از p بر X باشد آنگاه x مختص M روی X را مختص x یا طول p می‌نامند. اگر N پای عمود مرسوم از p بر Y باشد آنگاه مختص N روی Y را مختص y یا عرض p می‌نامند. بدین ترتیب به‌هر نقطهٔ P از E زوج مرتبی مانند (x و y) از اعداد حقیقی یعنی عضوی از مجموعهٔ حاصلضربی $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ متناظر می‌شود. بوضوح این تناظری یک بیک است.

$$E \leftrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{R}\ .$$

برای اختصار، می‌گوییم نقطهٔ (x و y) که البته، به‌معنی نقطهٔ نظیر (x و y)، در دستگاه مختصات مورد بحث است.



شکل ۱۷.۲

■ **قضیه ۱**. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1 = (x_1$ و $y_1)$ و $P_2 = (x_2$ و $y_2)$ از دستور زیر بدست می‌آید.

$$p_1p_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}\ .$$

اثبات. فرض کنید همانطور که در تعریف مختصات گفته شد M_1، N_1، M_2 و N_2 تصاویر نقاط P_1 و P_2 روی محورها باشند. اگر $x_1=x_2$ آنگاه

$$\overleftrightarrow{P_1P_2} \| \overleftrightarrow{N_1N_2} \quad \text{و} \quad |x_2-x_1| = 0,$$

و

$$p_1p_2 = |y_2-y_1| = \sqrt{(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}\ .$$

(در اینجا حالت بدیهی را که $P_1 = N_1$ و $P_2 = N_2$ را نادیده گرفته‌ایم.) اگر $y_1 = y_2$

به‌روشی مشابه همان نتیجه بدست می‌آید. بنابراین فرض کنید مانند شکل، $x_1 \neq x_2$ و $y_1 \neq y_2$. پس خط افقی که از P_1 می گذرد خط قائمی را که از P_2 می گذرد در نقطه‌ای مانند Q قطع می کند و $\triangle P_1P_2Q$ در Q دارای زاویهٔ قائمه است. (در اینجا و ازاین ببعد، خط افقی X یا خطی موازی X است و خط قائم Y یا خطی موازی Y است.) در نتیجه

$$P_1Q = M_1M_2 \cdot$$

و

$$P_2Q = N_2N_1$$

یا به‌خاطر اینکه زوجهای نقاط یکی هستند یا به‌دلیل اینکه در مستطیل اضلاع مقابل قابل انطباقند. بنا بر قضیهٔ فیثاغورس

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + P_2Q^2 \cdot$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= M_1M_2^2 + N_1N_2^2 = |x_2-x_1|^2 + |y_2-y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

و از این رابطه دستور فاصله بدست می‌آید. □

معادلهٔ خطی بر حسب x و y معادله‌ای به‌شکل

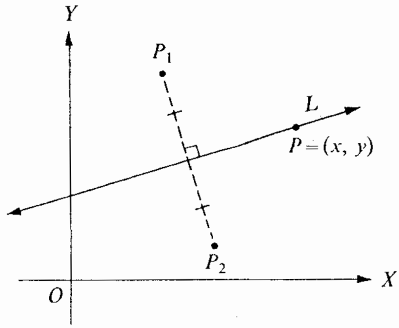
$$Ax + By + C = 0$$

است، که در آن A و B و C اعداد حقیقی هستند و A و B هر دو صفر نیستند. نمودار یک معادله، مجموعهٔ همهٔ نقاطی است که در معادله صدق می کنند. بطور کلی‌تر نمودار یک شرط مجموعهٔ همهٔ نقاطی است، که در شرط مفروض صدق می کنند. بدین‌ترتیب درون دایرهٔ با مرکز Q و شعاع r نموداری است برای شرط $PQ<r$ و یکی از قضایای ما مبین این نکته است که عمودمنصف پاره‌خط $\overline{AB}$ نمودار شرط $PA=PB$ می‌باشد.

■ **قضیه ۲.** هر خط در E نمودار یک معادلهٔ خطی بر حسب x و y است.

اثبات. فرض کنید L خطی در E باشد. در این صورت L عمودمنصف پاره‌خطی مانند $\overline{P_1P_2}$ است که در آن $P_1=(x_1 \text{ و } y_1)$ و $P_2=(x_2 \text{ و } y_2)$. بدین ترتیب L نمودار شرط زیر می باشد

$$PP_1 = PP_2 \cdot$$



شکل ۱۷.۳

با $(x \text{ و } y) = p$ این شرط را می‌توان به‌طور جبری به‌صورت

$$\sqrt{(x-x_{۱})^{۲} + (y - y_{۱})^{۲}} = \sqrt{(x-x_{۲})^{۲} + (y-y_{۲})^{۲}} ,$$

یا

$$x^{۲}-۲x_{۱}x + x_{۱}^{۲}+y^{۲}-۲y_{۱}y+y_{۱}^{۲} = x^{۲}-۲xx_{۲}+x_{۲}^{۲}+y^{۲} - ۲y_{۲}y+y_{۲}^{۲}$$

یا

$$۲(x_{۲}-x_{۱})x + ۲(y_{۲}-y_{۱})y + (x_{۲}^{۲}+y_{۲}^{۲}+x_{۱}^{۲}+y_{۱}^{۲}) = ۰$$

نوشت. این معادله به‌صورت زیر می‌باشد.

$$Ax + By + C = ۰$$

و A و B هر دو نمی‌توانند صفر باشند، زیرا در این صورت خواهیم داشت $x_{۲}=x_{۱}$ و $y_{۲}=y_{۱}$ که چون $P_{۲} \neq P_{۱}$ غیرممکن می‌باشد. □

■ **قضیه ۳.** اگر L قائم نباشد، آنگاه L نمودار معادله‌ای به‌صورت زیر است.

$$y = mx + k .$$

اثبات. خط L نمودار معادله‌ای مانند

$$Ax + By + C = ۰$$

می‌باشد. در اینجا $B \neq ۰$، زیرا برای $B = ۰$ معادله به‌صورت $x = -C/A$ در می‌آید و لذا نمودار آن قائم است. بنابراین می‌توانیم ضرایب را بر B تقسیم کنیم و معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}\,.$$

این معادله به‌صورت مطلوب است، با $m = \frac{-A}{B}$ و $k = \frac{-C}{B}$. □

■ **قضیهٔ ۴**. اگر L نمودار $y=mx+k$ و $(x_۱ \text{ و } y_۱)$ و $(x_۲ \text{ و } y_۲)$ دو نقطهٔ دلخواه روی L باشند، آنگاه

$$\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = m\,.$$

اثبات. چون هر دو نقطه روی خط واقعند داریم

$$y_۲ = mx_۲ + k \text{ و } y_۱ = mx_۱ + k\,.$$

در نتیجه

$$y_۲ - y_۱ = m(x_۲ - x_۱) \quad \text{و}$$

و $x_۲ \neq x_۱$ زیرا L قائم نیست. بنابراین

$$\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = m\,. \quad □$$

بنابراین عدد m بطور یکتا با خط L معین می‌شود و آن را شیب خط می‌نامند.

■ **قضیه ۵**. فرض کنید L و L' دو خط غیرقائم و با شیبهای m و m' باشند. اگر L و L' عمود بر هم باشند، آنگاه

$$m' = \frac{-۱}{m}\,.$$

اثبات. فرض کنید

$$p_۱ = (x_۱ \text{ و } y_۱) \text{ و } p_۲ = (x_۲ \text{ و } y_۲)$$

نقاطی از L' باشند بطوریکه L عمودمنصف $\overline{p_۱ p_۲}$ است (شکل ۱۷.۳ را ببینید.) همانطور که در اثبات قضیه ۲ دیدیم، L نمودار معادلهٔ زیر است

$$۲\,(x_۲ - x_۱)\,x + ۲\,(y_۲ - y_۱)\,y + (x_۲^۲ + y_۲^۲ + x_۱^۲ + y_۱^۲) = ۰\,.$$

این معادله به‌صورت

$$Ax+By+C = ۰$$

است، که در آن

$$A = ۲(x_۲ - x_۱) \quad ، \quad B = ۲(y_۲ - y_۱) \,.$$

بنابراین

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{۲(x_۲-x_۱)}{۲(y_۲-y_۱)} = -\frac{x_۲-x_۱}{y_۲-y_۱} \,.$$

اما بنا بر قضیهٔ ٤، داریم

$$m' = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \,.$$

در نتیجه $m' = -(۱/m)$، که باید ثابت می‌شد. □

■ **قضیه ۶.** هر دایره نمودار معادله‌ای به‌صورت زیر است

$$x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰ \,.$$

اثبات. بنا بر دستور فاصله، دایرهٔ به‌مرکز $(a ، b)$ و شعاع r نمودار معادلهٔ

$$\sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲} = r \,،$$

یا

$$x^۲ - ۲ax + a^۲ + y^۲ - ۲by + b^۲ - r^۲ = ۰$$

است. این معادله به‌صورتی است که لازم داریم، با

$$A = -۲a \text{ و } B = -۲b \text{ و } C = a^۲ + b^۲ - r^۲ \,. \quad \square$$

البته عکس قضیه ٦ نادرست است. نمودار معادلهٔ زیر یک نقطه است.

$$x^۲ + y^۲ = ۰$$

و نمودار معادلهٔ زیر مجموعهٔ تهی است.

$$x^۲ + y^۲ + ۱ = ۰$$

مجموعه مسائل

در اثبات قضایای زیر سعی کنید تا سرحد امکان از هندسه کم استفاده کنید و ازجبر و قضایای این بخش استفاده کنید.

۱. نشان دهید نمودار معادلهٔ به‌صورت

$$x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰$$

همیشه یک دایره، یک نقطه، یا مجموعهٔ تهی است.

۲. نشان دهید اگر نمودارهای معادلات

$$y = m_1x + k_1 \quad \text{و} \quad y = m_2x + k_2$$

دو خط متقاطع (متمایز) باشند آنگاه $m_1 \neq m_2$.

۳. نشان دهید اگر $m_1 = m_2$ آنگاه نمودارها موازیند یا یکی هستند.

۴. در بخش تشابه، رابطهٔ

$$A_1 ، B_1 ، C_1 \sim A_2 ، B_2 ، C_2$$

را به‌این صورت تعریف کردیم که همهٔ اعداد مورد بحث مثبت‌اند و

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

حال این رابطه را به‌روش زیر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید A_1، B_1، C_1 همگی صفر نباشند. اگر عددی مانند $K \neq 0$ باشد که

$$A_2 = KA_1 \quad \text{و} \quad B_2 = KB_1 \quad \text{و} \quad C_2 = KC_1$$

آنگاه گوییم دنباله‌های C_1، B_1، A_1 و C_2، B_2، A_2 متناسب‌اند و می‌نویسیم

$$A_1 ،B_1 ،C_1 \sim A_2 ،B_2 ،C_2 .$$

با این قرارداد، نشان دهید اگر نمودارهای

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{و} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

خطی مانند L باشد آنگاه

$$A_1 ،B_1 ،C_1 \sim A_2 ،B_2 ،C_2 .$$

[راهنمایی: ابتدا حالتی را که L قائم است و سپس حالتی را که L قائم نیست بررسی کنید.]

۵. نمودارهای معادلات زیر را رسم کنید

الف) $x^2 + y^2 + 1 + 2x + 2y + 2xy = 0$

ب) $xy = 0$

ج) $x^3 + xy^2 - x = 0$.

رنه د کارت (۱۶۵۰-۱۵۹۶)

د کارت در دو زمینهٔ کاملاً جدا مردی مشهور است: در میان فیلسوفها بعنوان فیلسوفی بزرگ مشهور است و در میان ریاضیدانان بعنوان ریاضیدانی بزرگ.

بزرگترین سهم او در ریاضیات کشف دستگاههای مختصاتی و استفاده از آنها در مسائل هندسه بود. از آن زمان همیشه جبر و هندسه تحت تأثیر هم بوده‌اند که به‌سود هر دو است. تا کنون نوع دستگاه مختصاتی را که در این کتاب بکار می‌بریم به‌افتخار مخترع آن دستگاه مختصات د کارتی می‌نامند. بعد از یونانیان واقعاً اولین کمک به‌هندسه مفهوم مختصات بود. (بجای د کارتی بعضی مؤلفین کارتزین می‌نویسند که از کلمه کار تسیوس گرفته شده که صورت لاتین نام د کارت است.)

قسمتی از اعتبار کشف د کارت را باید به‌پیرفرما نسبت داد که تقریباً در همان زمان بیشتر این ایده‌ها را داشت. فرما یکی از چند ریاضیدان آماتور بزرگ بود. او برای دولت فرانسه کار می کرد و در اوقات فراغت خود به‌مطالعه و تحقیق در ریاضیات می‌پرداخت. دربارهٔ کشفیات خود به‌دوستانش نامه می‌نوشت و هیچ‌وقت آنها را به‌صورت دیگری منتشر نکرد. اما حالا مطالب قابل چاپ نامه‌های فرما در همهٔ کتابهای استاندهٔ نظریهٔ اعداد موجود است.

کمی بعد نیوتن و لایب‌نیتس پیشرفت دستگاه مختصات را مبنای پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال قرار دادند. بنابراین موقعی که نیوتن گفت بر شانه‌های بزرگان ایستاده بود باید یکی از این بزرگان که مدنظرش بوده د کارت باشد.

از طرف دیگر در مجامع مطلع اغلب با این عقیده مواجهیم که می‌توان از دستگاه مختصات د کارتی برای حل یا اجتناب از مسائل مبانی هندسه استفاده کرد. همین طور با این عقیده مواجه می‌شویم که د کارت دستگاه مختصات را برای همین منظور اختراع کرد. این عقاید بترتیب بر مبنای

اولاً، برای بنا کردن دستگاه مختصات باید مقدار زیادی هندسه بدانیم. مثلاً اگر ندانیم عمود بر یک خط و گذرنده از یک نقطهٔ مفروض موجود و یکتاست نمی‌توانیم منظور خود از مختص x نقطه را توضیح دهیم. اکنون قادر به‌انجام این کار هستیم. کل موضوع مبانی هندسه بررسی شده است.

ثانیاً، دکارت دستگاههای مختصات را به‌منظور حل مسائلی اختراع کرد که به‌هیچ طریق دیگری نمی‌توانست حل کند. در زمان او هیچ کس در مورد مبانی هندسه نگرانی نداشت. هنوز به کتاب اقلیدس بعنوان نمونه‌ای از استنتاج دقیق می‌نگریستند. آنچه همه درباره‌اش نگران بودند دستگاه اعداد حقیقی بود. آن موقع ریاضیدانانی (که لاتین می‌نوشتند) اعداد منفی را اعداد تقلبی می‌نامیدند. یعنی اعدادی که واقعاً موجود نیستند. اوضاع بد بود: ریاضیدانان برای مسائل مشکل جبر به‌روشهایی که دربارهٔ آنها احساس کمرویی می‌کردند جوابهای درست بدست می‌آوردند. کاری که انجام می‌دادند بدین صورت بود:

۱. وانمود کنید که اعداد حقیقی منفی وجود دارند (گرچه به‌خوبی می‌دانید که وجود ندارند). بدین ترتیب دستگاه **R** حاصل می‌شود که نصف این اعداد «اعداد تقلبی»اند. در دستگاه جدید به‌هر x عدد $x-$ متناظر می‌شود بطوریکه $x + (-x) = 0$.

۲. آرزومندانه فرض کنید قوانین حاکم بر اعداد مثبت در دستگاه جدید نیز برقرار باشد. در این صورت $ab = ba$ و $a(b+c) = ab+ac$ و غیره.

۳. فرض کنید همیشه، $(-a)b = -(ab)$ و $(-a)(-b) = ab$.

٤. مسئله بررسی صحت و سقم این اقدامات را به‌چند قرن بعد موکول می‌کنیم.

دستگاه اعداد حقیقی به‌نظر ما ساده می‌آید زیرا ما با قوانین قبلی عادت کرده‌ایم ولی مردمی که آن را اختراع کرده بودند با آن عادت نداشتند و لذا دستگاه برای آنها مرموز بود. مثلاً اگر کسی از ما بپرسد (۳-)(۲-) چه عددی است می‌دانیم که جواب ۶ است، اما معنی این سؤال در روی زمین چه بود؟

مبانی آنالیز در قرن نوزدهم، هنگامی که سالها از مرگ دکارت می‌گذشت، مرتب شد. اما در دوران او دستگاه اعداد حقیقی آن‌قدر لرزان بود که کسی تصور نمی‌کرد روزی از آن بعنوان مبنای موضوع دیگری استفاده شود.

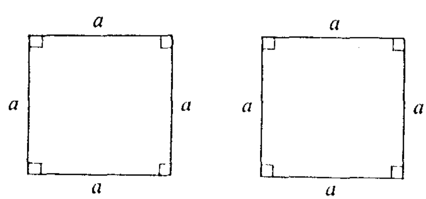
فصل ۱۸

حرکت صلب

۱۸.۱ عمومی ترین مفهوم قابلیت انطباق

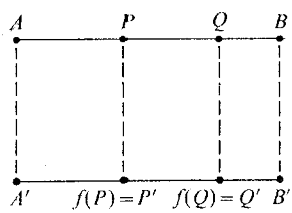
تا بحال برای پنج نوع شکل پنج تعریف مختلف از دو کلمهٔ قابلیت انطباق بیان کرده‌ایم. دو پاره‌خط قابل انطباقند هر گاه دارای یک طول باشند. دو زاویه قابل انطباقند اگر دارای یک اندازه باشند. دو مثلث قابل انطباقند هر گاه تناظر یک به‌یکی بین رئوس آنها موجود باشد، بطوریکه هر دو ضلع متناظر قابل انطباق باشند، (یعنی دارای یک طول باشند) و هر دو زاویهٔ متناظر قابل انطباق باشند (یعنی دارای یک اندازه باشند). دو دایره قابل انطباقند هر گاه دارای یک شعاع باشند. بالأخره دو قوس مستدیر قابل انطباقند هر گاه (۱) دوایری که کمانها در آنها واقعند قابل انطباق باشند و (۲) اندازهٔ درجه کمانها برابر باشند. همهٔ این مطالب از نظر منطقی درست است، اما از جهاتی قانع کننده نیست.

اولاً، قول دادیم که معنی قابلیت انطباق همیشه یکی باشد: دو شکل را قابل انطباق نامند هر گاه اندازه و ریخت آنها دقیقاً یکی باشد، یعنی، اگر یکی از آنها را بتوان طوری حرکت داد که بر دیگری منطبق شود. این قول را از جهتی حفظ کرده‌ایم. بدون هیچ زحمتی می توانید خود را متقاعد سازید که هر پنج تعریف تکنیکی که تا بحال بیان کرده‌ایم دارای این معنی شهودی هستند. از طرف دیگر، در پنج حالت مختلف، داشتن پنج تعریف مختلف برای یک مفهوم تصنعی است. بهتر است یک تعریف داشته باشیم که برای پاره‌خطها، زوایا و بقیه به‌یک صورت بکار رود. ثانیاً، بعنوان یک امر عادی، بیشتر ما موافقیم که اگر دو مربع دارای اضلاع با اندازهٔ مساوی باشند آن دو مربع قابل انطباقند.



شکل ۱۸.۱

اگر این مطلب را نتوانیم در زبان هندسه بیان کنیم آنگاه زبان هندسه ناقص است. بالاخره، خوب است رابطه‌ای با مفهوم قابلیت انطباق در هندسهٔ اقلیدسی قدیم داشته باشیم. اقلیدس همهٔ اثباتهای خود در مورد قابلیت انطباق را روی این اصل قرار داد که «اشیای قابل انطباق مساویند» (مفاهیم عام در کتاب اول اصول را ببینید.) این اصل برای جور آمدن با کارهایی که اقلیدس انجام داده بود کافی نبود. به‌زبان صریح اشیاء فقط بر خودشان قابل انطباقند. و واضح است که مفهوم حرکت یا برهمنهش، بطور ضمنی در اثبات های اقلیدس برای قابلیت انطباق آمده است. بعضی مؤلفین درصدد برآمدند تا با بیان اصلی، به مضمون «اشیای هندسی را می‌توان حرکت داد بدون اینکه اندازه و ریخت آنها عوض شود» این مفهوم را صریح سازند. اما این هم کافی نیست، این کار اشکال را بدون این که برطرف سازد روشن می‌نماید. اشکال در اینجاست که با وجود واضح بودن جملهٔ شکل (شکل مجموعه‌ای از نقاط است) جملات **حرکت**، **اندازه** و ریخت وضعیت متزلزلی دارند. باید آنها را تعریف نشده گرفت زیرا برای آنها تعریفی داده نشده است. اما اگر آنها را تعریف نشده بگیریم آنگاه باید اصولی بیان کنیم تا خواص اساسی آنها را بیان کند و این کار هم انجام نشده است. هدف کلی این اصل واضح است اما نمی‌توان اثبات ریاضی را برمبنای یک برداشت کلی قرار داد.



شکل ۱۸.۲

ولی می‌توان هدف اقلیدس را به‌روش دقیق ریاضی منظم کرد. این کار را با تعریف مفهوم کلی حرکت صلب یا طولپا انجام خواهیم داد. ساده‌ترین مثال آن چنین است. مستطیل $\square ABB'A'$ را درنظر بگیرید. (اضلاع قائم مستطیل را در شکل نقطه‌چین رسم کرده‌ایم زیرا حقیقتاً منظور ما فقط دو قاعدهٔ آن است.)

فرض کنید f تصویر قائم

$$f \,:\, \overline{AB} \leftrightarrow \overline{A'B'}$$

قاعدهٔ بالا به‌روی قاعدهٔ پایین باشد. پس به‌ازای هر نقطهٔ P از $\overline{AB}$، $f(P)$ پای عمود از P بر $\overline{A'B'}$ است. البته می‌دانیم که f تناظر یک بیکی بین $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ است. یعنی به‌هر نقطهٔ P از $\overline{AB}$ درست یک نقطهٔ $P'=f(P)$ از $\overline{A'B'}$ متناظر است، و به‌هر نقطهٔ P' از $\overline{A'B'}$ درست یک نقطهٔ $P=f^{-1}(P')$ از $\overline{AB}$ متناظر است. و این تناظر f دارای خاصیت ویژه‌ای است: اگر P و Q دو نقطهٔ

دلخواه از $\overline{AB}$، و مثل شکل، P' و Q' نقاط نظیر آنها از $\overline{A'B'}$ باشند، آنگاه

$$P'Q' = PQ \ ،$$

زیرا پاره‌خطهای $\overline{PQ}$ و $\overline{P'Q'}$ اضلاع مقابل یک مستطیل‌اند. بنابراین، به‌ازای هر دو نقطهٔ P و Q از $\overline{AB}$ فاصلهٔ بین $f(P)$ و $f(Q)$ همان فاصلهٔ بین P و Q است. به‌طور خلاصه، تناظر f فاصله‌ها را حفظ می‌کند. تناظر $f : \overline{AB} \leftrightarrow \overline{A'B'}$ اولین و ساده‌ترین مثال از حوکت صلب یا طولپا است.
تعریف کلی این مفهوم به‌صورت زیر است.

تعریف. فرض کنید M و N مجموعه‌هایی از نقاط باشند، و

$$f : M \leftrightarrow N$$

تناظر یک به یکی بین آنها باشد. فرض کنید به‌ازای هر دو نقطهٔ P و Q از M داشته باشیم

$$f(P)\ f(Q) = PQ \ .$$

در این صورت f را یک حرکت صلب یا یک طولپا بین M و N می‌نامند. [ادر اینجا $f(P)f(Q)$ نمایش فاصلهٔ بین $f(P)$ و $f(Q)$ است.] اگر بین M و N طولپایی موجود باشد، گوییم M و N ایزومترند و می‌نویسیم

$$M \approx N \ .$$

در این زبان بحث در مورد تصویر قائم $f: \overline{AB} \leftrightarrow \overline{A'B'}$ را می‌توانیم به‌شکل زیر خلاصه کنیم

■ **قضیه ۱. اضلاع مقابل مستطیل ایزومترند.**

مجموعه مسائل ۱۸.۱

۱. دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \ .$$

فرض کنید $V = \{A ، B ، C\}$ و $V' = \{A' ، B' ، C'\}$
(بنابراین V و V' هریک مجموعه‌ای متناهی با سه عضو است.) آیا می‌توان نتیجه گرفت که $V \approx V'$؟ یعنی آیا حرکت صلبی مانند

$$f : V \leftrightarrow V'$$

موجود است؟

۲. فرض کنید V مجموعهٔ رئوس مربع به‌ضلع ۱ و V' مجموعهٔ رئوس مربع دیگری به‌ضلع ۱ باشد. نشان دهید که $V \approx V'$ (ابتدا باید تناظر یک به‌یکی مانند $f:V \longrightarrow V'$ بین آنها برقرار کنید و سپس نشان دهید که f یک طولپاست.)

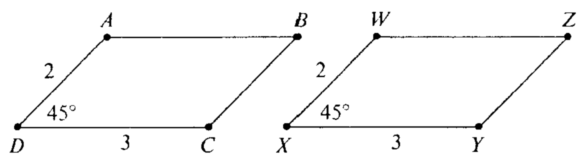
۳. همین کار را برای مجموعه‌های رئوس متوازی‌الاضلاعهای شکل زیر انجام دهید.

۴. نشان دهید اگر V یک مجموعهٔ سه نقطه‌ای باشد که همخط‌اند و V' یک مجموعهٔ سه‌نقطه‌ای باشد که اعضای آن همخط نیستند آنگاه V و V' ایزومتر نیستند.

۵. نشان دهید دو پاره‌خط با طولهای مختلف هیچ‌وقت ایزومتر نیستند.

۶. نشان دهید که یک خط و یک زاویه هیچ‌وقت ایزومتر نیستند.

۷. نشان دهید که هر دو نیمخط ایزومترند.



شکل ۱۸.۳

۸. نشان دهید دو دایره با شعاعهای مختلف هیچ‌وقت ایزومتر نیستند.

۹. فرض کنید L و L' دو خط در یک صفحه باشند و $f:L \leftrightarrow L'$ تصویر قائم L روی L' باشد. نشان دهید که (۱) اگر $L || L'$ آنگاه f یک طولپاست. و برعکس (۲) اگر f یک ایزومتری باشد آنگاه $L || L'$.

۱۰. نشان دهید ایزومتری یک رابطهٔ هم‌ارزی است. یعنی

(انعکاسی) به‌ازای هر مجموعهٔ M داریم $M \approx M$

(تقارن) اگر $M \approx N$ آنگاه $N \approx M$

(تعدی) اگر $M_۱ \approx M_۲$ و $M_۲ \approx M_۳$ آنگاه $M_۱ \approx M_۳$.

۱۸.۲ طولپاهای بین مثلثها

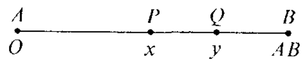
قضیهٔ ۱ بخش قبل، البته، بیش از حد لزوم حالت خاصی است. بطور کلی‌تر، قضیهٔ زیر را داریم.

■ **قضیه ۱.** اگر $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ آنگاه طولپایی مانند $f:\overline{AB} \leftrightarrow \overline{CD}$ هست که $f(A) = C$ و $f(B)=D$.

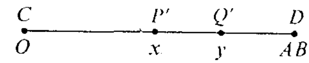
اثبات. ابتدا باید تناظر یک‌بیکی بین دو پاره‌خط تعریف کرد و سپس نشان داد که f فاصله‌ها

را حفظ می کند.

فرض کنید روی $\overleftrightarrow{AB}$ دستگاه مختصاتی بنا کرده باشیم بطوریکه مختص A مساوی صفر و مختص B مثبت باشد. (البته، نتیجه می‌شود که مختص B برابر AB است.)



شکل ۱۸.۴



شکل ۱۸.۵

همین‌طور، روی $\overleftrightarrow{CD}$ دستگاه مختصاتی بنا می کنیم که مختص C مساوی صفر و مختص D مثبت باشد (و بنابراین مساوی $AB=CD$ می‌باشد). از شکل الهام می گیریم که تناظر f را باید چگونه تعریف کنیم. اگر P نقطهٔ مفروضی روی $\overline{AB}$ باشد، $f(P)$ نقطهٔ نظیر آن روی $\overline{CD}$ نقطهٔ P' است که با همان مختص P می باشد. بوضوح دیده می‌شود که این تناظر یک‌بیکی بین دو پاره‌خط است. و فاصله‌ها حفظ می‌شوند. اثبات: فرض کنید P و Q نقاطی از $\overline{AB}$ با مختصات x و y باشند. پس $P'=f(P)$ و $Q'=f(Q)$ بترتیب با همان مختصات x و yاند. چون

$$PQ = |x-y| ،$$

و

$$P'Q' = |x-y| ،$$

نتیجه می‌شود که $PQ=P'Q'$ همان چیزی که باید ثابت می‌شد. □

قضیهٔ ۱ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

■ **قضیه.** فرض کنید تناظر

$$A \leftrightarrow C \quad و \quad B \leftrightarrow D$$

بین نقاط انتهایی دو پاره‌خط مفروض باشد. اگر $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ آنگاه طولپایی مانند $f: \overline{AB} \leftrightarrow \overline{CD}$ هست که با تناظر مفروض در نقاط انتهایی سازگاری دارد.

در اینجا f را طولپای حاصل از تناظر مفروض می‌نامند. اگر چنین برداشتی از قضیه داشته باشیم، بی‌درنگ می‌توان آن را به‌مثلث تعمیم داد.

■ **قضیه ۲**. فرض کنید تناظر

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

بین رئوس دو مثلث مفروض باشد. اگر

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF ،$$

آنگاه طولپایی مانند

$$f : \triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF ،$$

هست که $f(A) = D$ ، $f(B) = E$ و $f(C) = F$

اثبات. فرض کنید،

$$f_1 : \overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$$

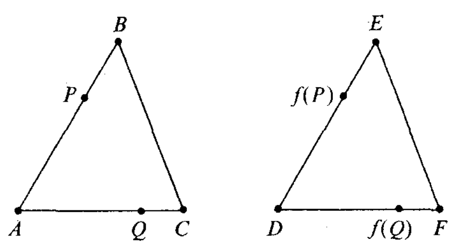
طولپای حاصل از تناظر $D \leftrightarrow A$ و $E \leftrightarrow B$ باشد. همین طور فرض کنید

$$f_2 : \overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$$

طولپای حاصل از تناظر $E \leftrightarrow B$ و $F \leftrightarrow C$؛ و فرض کنید

$$f_3 : \overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$$

طولپای حاصل از تناظر $D \leftrightarrow A$ و $F \leftrightarrow C$ باشد. فرض کنید f تناظر حاصل از ترکیب f_1 ، f_2 و f_3 باشد، یعنی اگر P روی $\overline{AB}$ باشد آنگاه $f(P) = f_1(P)$؛ اگر P روی $\overline{BC}$ باشد $f(P) = f_2(P)$، و غیره.



شکل ۱۸.۶

چون هر f_i یک طولپا است، f فاصلهٔ بین هر دو نقطه را که روی یک ضلع $\triangle ABC$ باشد حفظ می‌کند. بنابراین فقط باید نشان دهیم که f فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ P و Q روی اضلاع مختلف $\triangle ABC$ را حفظ می‌کند. بدون اینکه از کلیت کاسته شود (مثل شکل ۱۸.٦) می‌توان فرض کرد که P روی $\overline{AB}$ و Q روی $\overline{AC}$ باشد. فرض کنید $P' = f(P)$ و $Q' = f(Q)$. در این صورت

$$\overline{AP} \cong \overline{DP'} \text{ ،}$$

زیرا f_1 یک طولپا است؛

$$\overline{AQ} \cong \overline{DQ'} \text{ ،}$$

زیرا f_2 یک طولپا است؛ و

$$\angle PAQ \cong \angle P'DQ' \text{ ،}$$

زیرا $\triangle DEF \cong \triangle ABC$

حال بنا بر (ض ز ض) داریم

$$\triangle PAQ \cong \triangle P'DQ' \text{ ،}$$

بنابراین

$$PQ = P'Q' \text{ ،}$$

که باید ثابت می کردیم. $\square$

طولپای f را که در اثبات قضیه ۲ تعریف شد طولپای حاصل از انطباق $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ می نامند.

در این مرحله ممکن است تعجب کنید که چرا در ابتدای کار قابلیت انطباق را بر حسب طولپا تعریف نکردیم، دلیلش این بود که در نوع هندسه‌ای که تا کنون در این کتاب بررسی کرده‌ایم تعاریف مقدماتی که بر مبنای فاصله، اندازهٔ زاویه و تناظر بین رئوس مثلثها گفته شده است تعاریفی هستند که بسهولت می توان با آنها کار کرد. بنابراین اگر $\angle B \cong \angle A$ را به‌معنی $\angle B \approx \angle A$ تعریف کرده بودیم مطلب دیگری که باید ثابت می کردیم این بود که $\angle B \approx \angle A$ اگر و فقط اگر $m\angle A = m\angle B$ بنابراین می توانستیم بجای کار کردن با حکم اول با حکم دوم کار کنیم. همین‌طور نشان می دادیم که $\triangle DEF \approx \triangle ABC$ اگر و فقط اگر مثلثها به‌معنی مقدماتی‌اش قابل انطباق باشند و قادر بودیم بجای صحبت از تناظر بین مجموعه های نامتناهی نقاط از تناظر بین سه نقطه‌ایها صحبت کنیم. بطور کلی، تعاریف اصلی در ریاضی را باید طوری بیان کرد که به‌سرعت و بسادگی بتوان با آن کار کرد.

مجموعه مسائل ۱۸.۲

۱. فرض کنید تناظر

$$ABC \leftrightarrow A'B'C'$$

یک طولپا باشد. نشان دهید اگر $A-B-C$ آنگاه $A'-B'-C'$.

۲. طولپای

$$f\colon M \leftrightarrow N$$

مفروض است. فرض کنید A و B نقاطی از M باشند. نشان دهید اگر M شامل پاره‌خط بین A و B باشد آنگاه N شامل پاره‌خط بین $f(A)$ و $f(B)$ است.

۳. نشان دهید اگر M محدب باشد و $M \approx N$، آنگاه N محدب است.

۴. فرض کنید $M \approx N$ نشان دهید اگر M یک پاره‌خط باشد N نیز یک پاره‌خط است.

۵. فرض کنید $M \approx N$. نشان دید اگر M یک نیمخط باشد آنگاه N نیز چنین است.

۶. فرض کنید M یک پاره‌خط و N یک قوس دایره‌ای باشد. در این صورت M و N ایزومتر نیستند.

۱۸.۳ خواص عمومی طولپاها. انعکاس‌ها

■ **قضیه ۱**. $A-B-C$ اگر و فقط اگر (۱) A، B و C سه نقطهٔ متمایز باشند و (۲) $AB+BC=AC$.

اثبات. $A-B-C$ در ابتدا به‌این معنی تعریف شد که (۱) و (۲) برقرار باشند و نیز (۳) A، B و C همخط باشند. بنا بر نامساوی مثلث (قضیه ۵ بخش ۷.۱) (۳) $\Longleftarrow$ (۲). قضیه ثابت می‌شود. □

از این ببعد، اگر f یک طولپا، و A، B، C، ... نقاطی باشند آنگاه $f(A)$، $f(B)$، $f(C)$ و... را به A'، B'، C'، ... نشان خواهیم داد.

■ **قضیه ۲**. طولپاها میان بود را حفظ می کنند.

$$A-B-C \implies A'-B'-C' \qquad \text{یعنی}$$

اثبات. طولپاها شرایط (۱) و (۲) قضیهٔ ۱ را حفظ می کنند. □

■ **قضیه ۳**: طولپاها همخطی را حفظ می کنند.

یعنی اگر $f{:}M \leftrightarrow N$ یک طولپا و M روی خطی مانند L باشد آنگاه N نیز روی یک خط است.

اثبات. فرض کنید N روی یک خط نباشد. پس N شامل سه نقطهٔ غیر همخط مانند A' و B' و C' است. نقاط تصویر عکس یعنی A و B و C را می‌توان بترتیب X، Y و Z مرتب کرد. بطوری که $X-Y-Z$. بنا بر قضیهٔ ۲ یکی از نقاط A'، B' و C' بین دو تای دیگر است. این مطلب با فرض غیرهمخط بودن A'، B' و C' تناقض دارد. □

■ **قضیه ۴**. اگر $f: M \leftrightarrow N$ یک طولپا باشد آنگاه $f^{-1}{:}N \leftrightarrow M$ نیز یک طولپا است.

اثبات. به‌وضوح f^{-1} تناظر یک به یک $M \leftrightarrow N$ است. باید نشان دهیم که f^{-1} فاصله‌ها را حفظ می کند. فرض کنید C و D نقاطی از N باشند. در این صورت نقاطی مانند A و B در M هست که $f(A) = C$ و $f(B) = D$. چون f یک طولپا است، $CD=AB$، در نتیجه

$CD = f^{-1}(C)\ f^{-1}(D)$، که باید ثابت می‌شد. □

از این ببعد، برای سهولت طولپاهای $E \leftrightarrow E$ را مورد بحث قرار می‌دهیم، که در آنها E یک صفحه است.

■ **قضیه ۵.** اگر f یک طولپا $E \leftrightarrow E$ باشد. در این صورت f خطوط را حفظ می کند. یعنی اگر L یک خط باشد آنگاه $f(L)$ نیز یک خط است.

اثبات. فرض کنید $L = \overleftrightarrow{AB}$. چون f همخطی را حفظ می کند داریم $f(L) \subseteq \overleftrightarrow{A'B'}$.

چون f^{-1} یک طولپا است. به‌همان روش نتیجه می‌شود که

$$f^{-1}(\overleftrightarrow{A'B'}) \subseteq \overleftrightarrow{AB} \cdot$$

در نتیجه

$$f\ (f^{-1}(\overleftrightarrow{A'B'})) \subseteq f(\overleftrightarrow{AB}) \cdot$$

و

$$\overleftrightarrow{A'B'} \subseteq f(\overleftrightarrow{AB}) \cdot$$

بنابراین $\overleftrightarrow{A'B'} = f(\overleftrightarrow{AB})$، که باید ثابت می‌شد. □

■ **قضیه ۶.** فرض کنید $f{:}E \leftrightarrow E$ یک طولپا باشد. در این صورت f پاره‌خطها را حفظ می کند. یعنی، $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$.

اثبات. چون f میان‌بود را حفظ می کند، داریم $f(\overline{AB}) \subseteq \overline{A'B'}$. (جزئیات را بیان کنید) چون f^{-1} یک طولپا است داریم، $f^{-1}(\overline{A'B'}) \subseteq \overline{AB}$. با اعمال f روی دو طرف فرمول قبل نتیجه می‌شود که $\overline{A'B'} \subseteq f(\overline{AB})$. در نتیجه $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$. □

■ **قضیه ۷.** فرض کنید $f{:}E \leftrightarrow E$ یک طولپا باشد. در این صورت f مثلثها را حفظ می کند. یعنی $f(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.

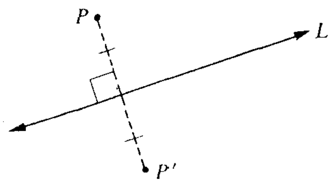
اثبات. اگر A'، B' و C' همخط بودند، آنگاه بنا بر قضایای ۳ و ٤ نقاط A، B و C همخط بودند. در نتیجه A' و B' و C' همخط نیستند. حال با سه دفعه استفاده از قضیهٔ ٦، قضیهٔ ۷ به‌دست می‌آید. □

■ **قضیه ۸.** فرض کنید f و g طولپاهای $E \leftrightarrow E$ باشند. در این صورت ترکیب $f(g)$ نیز یک طولپا است $E \leftrightarrow E$.

اثبات آشکار است.

حالا نوع خاصی از طولپاها را در نظر می گیریم. فرض کنید L خطی در صفحهٔ E باشد. **انعکاس** E در عرض L تابعی مانند r است که چنین تعریف می‌شود. (۱) اگر P روی L باشد $r(P) = P$. (۲) اگر P روی L نباشد آنگاه $r(P)$ نقطه‌ای مانند P' است بطوری که،

L عمودمنصف $\overline{PP'}$ است. چنین تبدیل rای را یک **انعکاس نسبت به خط** می‌نامند.



شکل ۱۸.۷

■ **قضیه ۹.** هر انعکاس نسبت به‌خط یک طولپا است.

اثبات. در اینجا راحت‌تریم که دستگاه مختصاتی معرفی کنیم که L محور xها باشد. در این صورت r به‌شکل $(x, y) \longmapsto (x, -y)$ است و قضیهٔ ۹ از دستور فاصله بدست می‌آید. (اگر از دستگاه مختصات استفاده نکنیم، ناچاریم حالتهای خاص مختلفی را بررسی کنیم.) □

■ **قضیهٔ ۱۰.** فرض کنید P و P' نقاطی باشند. در این صورت یک انعکاس نسبت به‌خط هست که $P \longmapsto P'$.

(انعکاس در عرض عمودمنصف $\overline{PP'}$.)

■ **قضیه ۱۱.** فرض کنید P، Q و Q' سه نقطه باشند بطوریکه، $PQ = PQ'$. در این صورت یک انعکاس نسبت به‌خط مانند r هست که: $P \longmapsto P$ و $Q \longmapsto Q'$.

اثبات. اگر نقاط همخط باشند، آنگاه P نقطهٔ وسط $\overline{QQ'}$ است و در عرض عمودمنصف $\overline{QQ'}$ منعکس می‌کنیم. در غیر این صورت در عرض خطی که شامل نیمساز $\angle QPQ'$ است منعکس می‌کنیم. □

■ **قضیه ۱۲.** فرض کنید $\triangle ABC \cong \triangle PQR$، که در آن دو مثلث در یک صفحه مانند E واقعند. در این صورت طولپایی مانند f هست که

$$
\begin{aligned}
& f : E \leftrightarrow E \text{ ،} \\
& : A \longmapsto P \text{ ، } B \longmapsto Q \text{ ، } C \longmapsto R \text{ ،} \\
& : \triangle ABC \leftrightarrow \triangle PQR \text{ ،}
\end{aligned}
$$

بطوریکه f ترکیب دو یا سه انعکاس نسبت به‌خط است.

اثبات. بنا بر قضیه ۱۰ انعکاسی نسبت به‌خط مانند r_1 هست که $r_1 : E \leftrightarrow E$ و $A \longmapsto P$. پس $r_1(\triangle ABC) = \triangle PB'C'$، و $PB' = PQ$. (چرا؟) بنا بر قضیه ۱۱ یک انعکاس نسبت

به‌خط مانند r_2 هست که $r_2:\ E\leftrightarrow E$، $P\longmapsto P$، $Q\longmapsto B'$. حالا دو امکان وجود دارد.
(۱) اگر $C''\ (=r_2\ (C'))$ و R در یک طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ باشند، آنگاه $R = C''$، زیرا $\angle C''PQ\cong\angle RPQ$ و $PC''=PR$. در نتیجه کارمان انجام شده است: فرض کنید $f=r_2(r_1)$.
(۲) اگر C'' و R در دو طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ باشند آنگاه داریم $\angle C''PQ \cong \angle RPQ$ و $PC''=PR$. فرض کنید r_3 انعکاس E در عرض $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد. در این صورت $r_3(P) = P$، $r_3(Q) = Q$، و $r_3(C'')=R$. فرض کنید $f=r_3(r_2(r_1))$.

توجه کنید که این قضیه از قضیهٔ ۲ بخش ۱۸.۲ قویتر است. حالا می‌دانیم که هر قابلیت انطباق بین دو مثلث را می‌توان با یک طولپا از تمام صفحه به‌روی خودش نمایش داد. $\square$

مجموعه مسائل ۱۸.۳

۱. نشان دهید که طولپاها دوایر را حفظ می‌کنند.

۲. فرض کنید A، B، C سه نقطهٔ غیر همخط باشند، f یک طولپا باشد $E\leftrightarrow E$، $A\longmapsto A$، $B\longmapsto B$، $C\longmapsto C$ نشان دهید به‌ازای هر نقطهٔ P، $P\longmapsto P$.

۳. فرض کنید $\triangle ABC$ و $\triangle PQR$ مثلثهایی باشند، با $\triangle ABC\cong\triangle PQR$. نشان دهید تنها یک طولپا مانند f هست که $f:E\leftrightarrow E$، $A\longmapsto P$، $B\longmapsto Q$، $C\longmapsto R$.
آیا درست است که فقط یک طولپا مانند f هست که $f(\triangle ABC) = \triangle PQR$؟

۴. اگر $\overline{AB}$ مفروض باشد، نشان دهید که چهار و تنها چهار طولپا مانند f_1، f_2، f_3 و f_4 هست که $f_i:\ E \leftrightarrow E$، $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{AB}$.

۵. اگر $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، نشان دهید که چهار و تنها چهار طولپا مانند g_1، g_2، g_3 و g_4 هست که $E \leftrightarrow E$ و g $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{CD}$

۶. اگر مربع $\square ABCD$ مفروض باشد، نشان دهید که هشت و تنها هشت طولپا مانند f_i هست $(i=1,2,\dots,8)$ که $f_i:\ E \leftrightarrow E$، $\square ABCD \leftrightarrow \square ABCD$.

۷. نشان دادیم (قضیه ٦) که پاره‌خطها بوسیلهٔ طولپاهای $E \leftrightarrow E$ حفظ می‌شوند. نشان دهید که این امر برای همهٔ طولپاها برقرار است. یعنی اگر f یک طولپای $N \leftrightarrow \overline{AB}$، آنگاه N یک پاره‌خط است (یعنی پاره‌خط $\overline{A'B'}$.)

۸. همین طور، نشان دهید که اگر L یک خط باشد و f یک طولپای $N \leftrightarrow L$، آنگاه N یک خط است.

۹. نشان دهید که هر طولپا مثلثها را حفظ می‌کند.

۱۰. روشی برای بدست آوردن سه مسئلهٔ قبل از روی قضایای بخش ۱۸.۳ بیابید (اگر قبلاً این کار را انجام نداده‌اید.)

۱۸.۴ تجانس و تشابه

فرض کنید P_0 نقطه‌ای در صفحهٔ E، و K عدد مثبتی باشد، و فرض کنید

$$d:E \leftrightarrow E$$

تبدیلی باشد که به‌روش زیر تعریف شده است. (۱) $d(P_0) = P_0$. (۲) اگر $P \neq P_0$ فرض کنید $P' = d(P)$ نقطه‌ای از $\overrightarrow{P_0P}$ باشد که $P_0P' = KP_0P$. در این صورت d را یک **تجانس** می‌نامند؛ P_0 مرکز تجانس و K ثابت تناسب نامیده می‌شود. (توجه کنید که برای $0<K<1$، d را انقباض نامیدن طبیعی‌تر به‌نظر می‌آید.)

■ **قضیه ۱**. هر تجانس تناظر یک‌بیکی $E \leftrightarrow E$ است.
اثبات؟

■ **قضیه ۲**. فرض کنید $d:E \leftrightarrow E$ یک تجانس با ثابت تناسب K باشد. در این صورت به‌ازای هر دو نقطهٔ A و B داریم

$$A'B' = KAB$$

اثبات. دستگاه مختصاتی برای E انتخاب می کنیم که مبدأ آن P_0 مرکز d باشد. در این صورت

$$d(x , y) = (Kx , Ky) .$$

قضیهٔ ۲ حالا از دستور فاصله به‌دست می‌آید. □

■ **قضیه ۳**. تجانسها میان‌بود را حفظ می کنند.
اثبات همانند اثبات قضیه ۲ بخش ۱۸.۳ است. نکته‌اش این است که

$$\begin{aligned} & AB + BC = AC \\ \Longrightarrow\ & KAB + KBC = KAC \\ \Longrightarrow\ & A'B' + B'C' = A'C'. \end{aligned}$$

■ **قضیه ۴**. تجانسها همخطی را حفظ می کنند.
اثبات همانند اثبات قضیه ۳ بخش ۱۸.۳ است.

■ **قضیه ۵**. معکوس هر تجانس یک تجانس است.

(از $k' = \frac{1}{k}$ استفاده کنید.)

■ **قضیه ۶.** تجانسها پاره‌خطها را حفظ می‌کنند.

■ **قضیه ۷.** تجانسها مثلثها را حفظ می‌کنند.

اثباتها نظیر اثبات قضایای ٦ و ۷ بخش ۱۸.۳ است.

■ **قضیه ۸.** اگر $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (در صفحهٔ E) آنگاه طولپایی مانند f و تجانسی مانند d هست که $f{:}E \leftrightarrow E$ و $d{:}E \leftrightarrow E$ بطوری که

$$d(f(A)) = P \text{ ،} \quad d(f(B)) = Q \text{ ،} \quad d(f(C)) = R \text{ ،}$$

و

$$d\,(f(\triangle ABC)) = \triangle PQR \,.$$

اثبات. فرض کنید B' و C' نقاطی از $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ باشند بطوری که

$$PB' = AB \text{ ،} \quad PC' = AC \,.$$

پس

$$\triangle ABC \cong \triangle PB'C',$$

و

$$\triangle PB'C' \sim \triangle PQR \,.$$

بنا بر قضیهٔ ۱۲ بخش ۱۸.۳ طولپایی مانند f هست که

$$\begin{aligned} f &: E \leftrightarrow E \\ &: A \longmapsto P \quad B \longmapsto B' \quad C \longmapsto C' \\ &: \triangle ABC \leftrightarrow \triangle PB'C' \end{aligned}$$

حال فرض کنید d تجانسی باشد که $P_\circ = P$ و

$$K = \frac{PQ}{PA'} = \frac{PR}{PB'} \,.$$

در این صورت

$$d(P) = P \text{ و } d(B') = Q \text{ و } d(B') = R \,.$$

بنا بر قضیهٔ ۷، $d(\triangle PA'B') = \triangle PQR$. در نتیجه $d(f(A)) = P$ ، $d(f(B))=Q$ ، $d(f(C)=R$ و

$$d(f(\triangle ABC)) = \triangle PQR \,,$$

که باید ثابت می‌شد. □

عکس این قضیه ساده است.

■ **قضیه ۹.** فرض کنید $\triangle ABC$ یک مثلث و f یک طولپا و d یک تجانس باشد. فرض کنید $A' = d(f(A))$، $B' = d(f(B))$، $C' = d(f(C))$، دراین صورت

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

توجه می کنید که حالا می‌توان به‌همان روشی که قابلیت انطباق را تعمیم دادیم تشابه را تعمیم دهیم. **تشابه** (بین دو شکل مسطحه از هر نوع) تبدیلی است مساوی یک طولپا که یک تجانس متعاقب آن آمده باشد و دو شکل را متشابه نامند هر گاه تشابهی بین آنها موجود باشد. در حالتی که اشکال مثلث باشند، این تعاریف با تعاریف مقدماتی سازگاری دارد.

مجموعه مسائل ۱۸.۴

۱. اثبات صریحی برای قضیه ٤ بنویسید.

۲. همین کار را برای قضیهٔ ٦ انجام دهید.

۳. همین کار را برای قضیه ۷ انجام دهید.

۴. نشان دهید که تجانسها خطوط را حفظ می کنند.

۵. نشان دهید که تجانسها دوایر را حفظ می کنند.

۶. نشان دهید که تجانسها سهمی‌ها را حفظ می کنند.

۷. قضیه ۲ را بدون استفاده از دستگاه مختصات ثابت کنید (لازم است حالتهای مختلفی را بررسی کنید.)

۸. ثابت کنید تجانسها نیم صفحه‌ها را حفظ می کنند.

۹. فرض کنید P_1 و P_2 دو سهمی باشد. نشان دهید طولپایی مانند f و تجانسی مانند d هست که $d(f(P_1)) = P_2$.

۱۰. نشان دهید که هر دو مربع واقع در یک صفحه متشابه‌اند.