هارولد ا. ولف

هندسهٔ نااقلیدسی

ترجمهٔ

احمد بیرشک

هندسهٔ نااقلیدسی

نوشتهٔ

هارولد ا. ولف

ترجمهٔ

احمد بیرشك

مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر

تهران، ۱۳۶۲

ترجمه از

Non-Euclidian Geometry

by

Harold E. Wolfe

ولف، هارولد ا.
هندسهٔ نااقلیدسی
ترجمهٔ احمد بیرشك
چاپ اول: ۱۳۶۲
چاپ و حروفچینی: چاپخانهٔ رامین
تیراژ: ۶۶۰۰ نسخه

فهرست

۳. کشف هندسهٔ نااقلیدسی

۴. هندسهٔ مسطح هذلولوی

۵. مثلثات مسطح هذلولوی

۶. کاربرد حساب جامع و فاضل در حل بعضی مسائل هندسهٔ هذلولوی

۷. هندسه و مثلثات مسطح بیضوی

۸. سازگاری هندسه‌های نااقلیدسی

ذیل

یکم. بنیاد هندسهٔ اقلیدسی

دوم. تابعهای مستدیر و هذلولوی

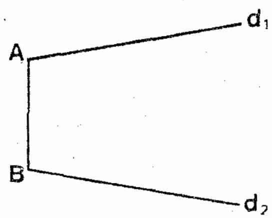
سوم. نظریهٔ دایره‌های عمود برهم و موضوعهای وابسته

چهارم. عنصرهای انعکاس

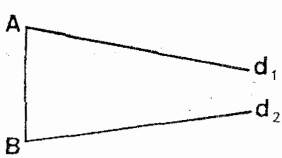
مقدمهٔ مترجم

هندسهٔ نااقلیدسی موضوعی است که در آن، براساس فرضهایی دربارهٔ نقطه و خط و صفحه و فضا (اصلهای موضوع)، نتایجی (قضایا) گرفته می‌شود که عموماً با درکی فضایی که آدمی از چیزهای با اندازه‌های معتدل دارد سازگار است، و در عین حال وابستگیها و رابطه‌هایی چند دارد که بادرك آدمی به‌مقابله برمی‌خیزند؛ بخصوص رابطه‌های مربوط به‌توازی وقتی که به‌فاصله‌های بسیار بزرگ سرایت داده شوند. از این جمله‌اند: شکلهای همانند (= مشابه، یعنی دارای یك شکل) لزوماً همنهشت (یعنی دارای یك اندازه)اند؛ هیچ صفحه‌ای، یا مدلی یا نقشه‌ای نمی‌تواند براستی دقیق باشد.

دونوع عمدهٔ هندسهٔ نااقلیدسی را می‌توان با توجه‌به‌ترسیم وهمی زیرین ازیکدیگر تمیز داد. در صفحه‌ای دو نیمخط d_1 و d_2 را از دو نقطهٔ A و B عمود بر AB رسم می‌کنیم. به‌جای آن‌که این دو نیمخط همواره از یکدیگر به یك فاصله بمانند یا وامی‌گرایند، یعنی ازهم دور می‌شوند (شکل ۱)؛ یا به‌هم می‌گرایند، یعنی به یکدیگر نزدیك می‌شوند (شکل ۲). در صورت اول هندسهٔ نااقلیدسی را هذلولوی، و در صورت دوم آن را بیضوی گویند. در اولی مجموع زاویه‌های مثلث کوچکتر از دو قائمه است و در دومی بزرگتر از آن. هذلولوی ترجمهٔ hyperbolic[que] است از ریشهٔ یونانی است به معنی به بیرون انداختن؛ بیضوی ترجمهٔ elliptic[que]، از ریشهٔ یونانی به معنی کوتاه شدن است. در جهان هذلولوی ممکن است دو خط راه‌آهن همواره از یکدیگر به یك فاصله باشند، اما دیگر خط راست نیستند.



شکل ۱



شکل ۲

تاریخچهٔ هندسهٔ نااقلیدسی

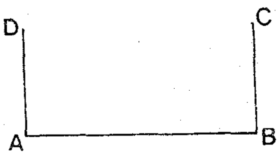
می‌دانیم که هندسهٔ اقلیدسی، که نزدیك به‌بیست قرن برفکرآدمی حکومت بی‌منازع داشت، برروی پنج اصل موضوع بناشده است که پنجمین‌آنها، یعنی اصل توازی، شباهتی به اصل موضوع‌ندارد ومدتها موجب نگرانی هندسه‌دانان بوده‌است. می گویند ـ وشاید هم‌راست‌بگویند ـ که اولین‌کسی که ازهندسهٔ اقلیدسی ناخشنود شد وچشم به‌پیدایش هندسهٔ نااقلیدسی دوخت خود اقلیدس بود. موجب پیداشدن این عقیده اکراهی است که خود او از استفاده از اصل پنجم خودش داشت و بیست و هشت‌گزارهٔ (حکم) اول خود را ـ که امروز «هندسهٔ‌مطلق» نامیده می‌شود ـ براساس چهاراصل‌موضوع دیگر، وبی‌استفاده از اصلِ پنجم، اثبات‌کرد. این ۲۸ گزاره در هندسهٔ هذلولوی معتبرند. باری، تا اوایل قرن نوزدهم هندسه‌دانان متعدد درصدد برآمدند که این اصل را، که از حیث بیان مانند قضایا بود، براساس چهار اصل دیگر اثبات کنند. و طرفه آن‌که برخی از آنان پنداشتند که به این مقصود رسیده‌اند. در ۱۷۸۳ گیورگ زیمون کلوگل (Georg Simon Klügel) آلمانی فهرستی از سی اقدام که برای اثبات اصل پنجم شده بود تنظیم‌کرد. این فهرست کامل نبود زیرا که دست‌کم چهار دانشمند ایرانی و عرب در این راه کار کرده بوده‌اند: ثابت‌بن‌قره، ابن‌هیثم، خیام و نصیرالدین طوسی. آنان تقریباً همان راهی راپیش گرفته بودند که جرالومو ساکری ایتالیایی در اواخر سدهٔ هفدهم و اوایل سدهٔ هجدهم پیمود و، مانندآنان، به‌آخرراه نرسید؛ اما همه‌شان به‌مقدماتی ازهندسهٔ نااقلیدسی دست یافته بودند بی‌آن که از آن بویی ببرند. در مورد اصل پنجم کاری که شد غالباً قرار-گرفتن اصلهایی مشابه آن به‌جای آن بود. شرح کار ساکری و اروپاییان دیگری را که در این زمینه کار کردند در متن‌کتاب خواهید خواند. در اینجا فقط اشاره‌ای به کارهای چهار دانشمند مشرق زمینی می کنیم.

ابوالحسن ثابت‌بن‌قرّهٔ حرّانی(۲۲۱ تا ۲۸۸ ه ق)، پزشك، ریاضیدان، اخترشناس و مترجم نامدار حوزهٔ علمی بغداد کوشید که به روشی که بعد از او ابن‌هیثم و خیام و طوسی و ساکری بکار بردند اصل موضوع پنجم اقلیدس را با اتکای به چهار اصل دیگر ثابت کند، و موفق نشد.

ابوعلی حسن مکنّی به‌ابن‌هیثم معروف به بصری (۳۵۴ تا ۴۲۰ ه ق)، پزشك، فیزیکدان، ریاضیدان و بزرگترین محقق در شاخهٔ نورشناسی فیزیك، دربارهٔ تعریف اقلیدس از خطوط متوازی با عنوان خطوطی که تقاطع نمی‌کنند خاطر نشان ساخت که باید وجود این‌گونه خطها را محقق ساخت؛ و برای این منظور اصل «واضحتر» زیرین را بیان کرد: اگر پاره خط راستی، مانند AB، چنان تغییر مکان دهد که همواره برخط

مفروضی مانند δ عمود باشد و یك انتهای آن، مثلاً A، همواره برخط δ باشد انتهای دیگرش خطی رسم می‌کند کـه با δ موازی است. بدین ترتیب بـه‌جای توازی خاصیت همفاصلگی را قرارداد و درصدد برآمدکه از مفهوم حرکت برای اثبات اصل پنجم‌اقلیدس استفاده‌کند. اما خیام و خواجه نصیر به این‌کار او ایراد داشتندکه مفهوم حرکت را که هندسی نیست وارد هندسه کـرده است. از قرار ثابت‌بن‌قـّره هم از چنین کاری استفاده کرده بود.

حکیم ابوالفتح عمر خیام ـ یا خیامی ـ نیشابوری (۴۳۹ - ۵۲۶ ه ق)، حکیم، فیلسوف، شاعر، اخترشناس وریاضیدان، در درستی اصل‌پنجم به‌عنوان اصل موضوع تردید کرد و نظریهٔ خطوط متوازی خود را براصلی استوار ساخت که به‌قول خودش از استاد، یعنی ارسطو، گرفته بود. نخست ثابت کرد که دوخط عمود بریك خط نمی‌توانند همگرا یا واگرا باشند. آنگاه ثابت کرد که، به حکم تقارن، دو خط عمود بریك خط نمی‌توانند متقاطع شوند، وهمه‌جا ازیکدیگر به‌یك فاصله‌اند.



شکل ۳

برای بررسی موضوع دوخط متوازی، بردو انتهای پاره خط $\overline{AB}$ دو عمود متساوی BC و AD را اخراج کـرد و از C بـه D وصل نمود. برای زاویه‌های C و D سه‌امکان فرض‌کرد: حاده‌بودن، منفرجه‌بودن، قائمه بودن. درفرض‌اول CD درازتر ازAB، ودرفرض دوم کوتاهتر ازآن می‌شد؛ در نتیجه دوعمودی‌که بر AB اخراج شده بودند بایستی نـابرابر باشند، و فرض متساوی بودن آنها نقض می‌شد؛ پس دوفرض اول صورت نمی‌پذیرفت و زوایای C و D قائمه بودند، که خود مبین همفاصله‌بودن CD و AB بود.

اکنون اگر آنچه را ساکری‌کرد و در متن می‌بینید با کار خیام بسنجید شاید شما هم براین عقیده شویدکه برای چهار ضلعی ABCD که به چهار ضلعی ساکری موسوم است، نام خیام برازنده‌تر باشد، که حق تقدم با او است.

خواجه محمد معروف به نصیرالدین طوسی (۵۹۷-۶۷۲ ه‌ق)، منجم، ریاضیدان، سیاستمدار و نویسنده، که در متن کتاب نیز نام او برده شده است، به‌همان راهها رفت و به نتیجه‌ای نرسید.

در اینجا توضیحی را لازم می‌دانـم: در متن هرجا تاریخی با دو عدد نشان داده شده است که با خط کج / از هم جدا شده‌اند تاریخ طرف راست خط کج هجری شمسی و تاریخ طرف چپ آن میلادی است.

دیباچه

غرض از نوشتن این کتاب کوششی بوده است برای تهیهٔ یك کتاب درسی رضایت‌بخش به‌عنوان اساسی برای دورهٔ مقدماتی هندسهٔ نااقلیدسی. مدتی بودکه ضرورت وجود چنین کتابی که به‌طورقطع برای کلاس درس نوشته شده ومحتوی تعداد قابل توجهی‌تمرین باشد احساس‌می‌شد. امید است که این کتاب جوابگوی‌خواستهای معلمانی که به‌طورمرتب به‌تدریس این ماده پرداخته‌اند باشد ووجود آن مشوق دیگران باشد در تنظیم این‌گونه کتابهای درسی.

فواید و مزایای مطالعهٔ صوری هندسهٔ نااقلیدسی معمولاً مورد تأییدند. نه تنها خودموضوع ارزنده وبشدت جاذب است و درخور وقتی‌که دانشجوی رشتهٔ ریاضی برای آن‌صرف‌می‌کند، بلکه‌شاید هیچ درس‌مقدماتی‌دیگری به‌این وضوح‌ماهیت واهمیت هندسه، و در حقیقت ریاضیات، را نمایان نساخته باشد. باوجود این فقط یك آشنایی سطحی با موضوع به‌جایی نمی‌رسد. باید دست‌کم مقداری از گسترش آن را دنبال کرد و دید که چگونه کار انجام شده است، و دست خویش را در اوضاع مختلف به‌اثبات احکام آزمود تا دیگر شهود رهبر و رهنما نباشد.

برای دبیران و داوطلبان دبیری هندسه در دبیرستانها بررسی هندسهٔ نااقلیدسی ارزشی بیرون از حساب دارد. احتمال قوی می‌رود که آنان بی‌دانستن هندسهٔ نااقلیدسی ماهیت واقعی ماده‌ای راکه می‌آموزند، ونیز اهمیت کاربرد آن در تعبیر جهان طبیعی‌را، درك نکنند. در میان اولین کتابهای مربوط به‌هندسهٔ نااقلیدسی که به‌زبان انگلیسی‌نوشته شد، اثری بودکه خیلی ازجزوه‌ای تجاوز نمی‌کرد و در ۱۸۸۰/۱۲۵۹ بوسیلهٔ کریستال (G. Chrystal) نوشته شد. حتی در همان زمان ارزش‌آن نوشته برای آنان‌که به‌تدریس می‌پرداختند مورد تأیید قرارگرفت. درمقدمهٔ‌آن جزوهٔ‌کوچك‌کریستال‌برای ابرازدلبستگی خود بـه قراردادن آنچه خود آن را ‹پن‌جیومتری› (Pangeometry) یـا، «هندسهٔ کل» نامید «در دسترس‌آنان که دست درکار تعلیم هندسه دارند» چنین نوشت: «گمان نرودکه

من پذیرفته شدن ‹هندسهٔ کل› را به عنوان یك مادهٔ درسی توصیه می کنم؛ من چنین مطالعه‌ای را برای معلمان لازم می‌دانم. خطا است که تصور کنیم برای‌معلمی که ماده‌ای را تدریس می کندکافی است که اندکی از شاگردانش جلوترباشد. هیچ‌کس نمی‌تواند معلم خوبی در قسمت مقدماتی شناخته شود مگراین‌که بتواند بر موضوع درس خود استادانه مسلط باشد. بینش هندسی وغنای اندیشه‌های هندسی، خواه‌طبیعی و خواه مکتسب، برای معلـم خوب هندسه از واجبات است؛ و بـرای کسب این بینش راهی بهتر از مطالعهٔ هندسهٔ کل نمی‌بینم.»

در سالهای اخیر تعداد مدارس عالی و دانشگاههای امریکایی‌که دوره‌های پیشرفتهٔ هندسهٔ اقلیدسی تعلیم می‌دهند بسرعت افزایش یافته است. شواهدی در دست است که در نتیجهٔ این کار کیفیت آموزش هندسه در دبیرستانهای امریکایی بسیار بهتر شده است. اما دورهٔ پیشرفتهٔ هندسهٔ اقلیدسی تنها چیزی نیست‌که برای یك دبیر خوب هندسهٔ اقلیدسی لازم است. برای کسی که بخواهد برای تعلیم در دبیرستان آماده شود آموختن هندسهٔ نااقلیدسی دوشادوش آن پیش می‌رود.

این‌کتاب در درجهٔ اول برای دانشجویانی فراهم آمده است‌که دورهٔ حساب جامع و فاضل (Calculus) را کامل کرده باشند. بـا وجود این، هر چند پختگی در ریـاضیات کمکی مؤثرخواهد بـود، بیشتر این کتاب را می‌توان فقط بامایهٔ علمی دورهٔ دبیرستانی هندسهٔ اقلیدسی خواند و فهمید. تنها کافی است‌که فصلهای پنجم و ششم را که در آنها از مثلثات وحساب جامع وفاضل استفاده می‌شود کنار گذاشت؛ همچنین قسمت آخر فصل هفتم را.

در فصلهای یکم ودوم زمینهٔ تاریخی موضوع تقریباً به‌طورکامل بررسی شده‌است. معروف است‌که هیچ موضوعی به‌اندازهٔ ریاضیات ازجداشدن ازتاریخ خود صدمه‌نمی‌بیند. این مطلب بخصوص دربارهٔ هندسهٔ نااقلیدسی صادق است. داستان هیجان‌آور کوششی که در مدتی بیشتر از بیست قرن برای اثبات اصل موضوع توازی اقلیدس بعمل آمد و با پیروزی عقل‌گرایی برسنت، و کشف هندسهٔ نااقلیدسی، به‌اوج رسید جزء عمده‌ای از این موضوع است. سرگذشت‌کوششهایی است محکوم به شکست، و تلاشهایی که در فاصلهٔ بسیار ناچیزی ازهدف بازماندند، وخطاها، و بلاهت، و دلسردی وترس، و سرانجام‌بینشی دقیق و نافذ، که نه‌تنها به‌حل آن مسألهٔ ویژه انجامید، بلکه میدانهای وسیع ونامترقب بر روی اندیشه گشود. در حقیقت همهٔ تقلای آدمی بـرای دست یـافتن به حقیقت را خلاصه می کند.

تعداد زیادی مسأله تهیه شده است، بیشتر از آنچه درکتابهای دیگرکه دربارهٔاین

موضوع نوشته شده‌اند می‌توان یافت. دانشجو از این که دست به‌حل تمرینهای ابتکاری در محیطی جدید بزند لذت خواهد برد و حل آنها را وسیله‌ای با ارزش خواهد یافت. اما مسائل کتاب فقط مطالب عملی نیستند بلکه جزئی اصلی از متن شمرده می‌شوند. بسیار نتایج مهم که در تلو مسائل گنجیده‌اند و در برخی موارد نه تنها به این نتایج رجوع داده می‌شود بلکه از آنها استفاده می گردد.

عقیده براین است که مطالبی که درضمایم آمده‌اند مددکار خواهند بود. چون بیشتر دانشجویان با احکام اقلیدس از روی شماره آشنا نیستند به نقل عین تعریفها و اصلهای موضوع و اصلهای متعارف وقضیه‌های کتاب یکم پرداخته‌ایم. ممکن است فایده‌ای که از این مطالعه گرفته می‌شودمنحصربه تماس‌مختصری با این‌احکام به‌صورت قدیمشان نباشد. علاوه براین مطالب در این‌کتاب قسمتهایی دربارهٔ تابعهای هذلولوی و نظریهٔ دایره‌های عمود بـرهم و انعکاس آورده شده‌اند. این مطالب بـا تفصیل کافی مورد بحث واقع شده‌اند تا خواننده‌ای که از پیش با این مفاهیم آشنا نبوده اطلاع کافی کسب کند. این موضوعها، برفرض آن که در کتابهای دیگر آمده بـاشند معمولاً به صورتی انتزاعی و نحوی جداگانه عرضه شده‌اند. در کتاب حاضر آنها هم مورد نیازند وهم مورد استفاده، و ممکن است دانشجو زیر تأثیر اهمیت عمل آنها واقع شود.

ممکن است برخی افراد این‌کتاب را جزء کتابهایی طبقه‌بندی کنند که مؤلفانشان «بخواهند به ساختن برخی دستگاههای هندسی کـه واضح و روشنند دست بزنند اما به جزئیات اساسی که همه چیز برروی آنها بناشده است نپردازند». راست است، در اینجا سعی نشده است که اساس دقیق هندسهٔ هذلولوی یا هندسهٔ بیضوی ریخته شود. با کسانی که عقیده دارندکه این کار بایستی بشود سرجنگ نداریم، وبا روح اندیشهٔ آنان کاملاً موافقیم. اما تجربه نشان داده است که، با توجه به ناپختگی کسانی که این‌کتاب به قصد مطالعهٔ آنـان تنظیم شده است، بهتر است از اغتشاش حواسی کـه از بیان یك مقدمهٔ بسیاردراز، وشاید هم مانع، دربارهٔ استدلال انتزاعی‌روی می‌دهد خودداری شود. بهیچ‌روی بر سر آن نیستیم که این عیب را پوشیده بداریم. در واقع با دقت به آن اشاره می‌شود و راه برای دانشجو هموار می گرددکه بعد به رفع آن بپردازد.

بررسی هندسهٔ نـااقلیدسی کاری است ظریف وکم نظیر. بیشتر دانشجویانی که به کلاسی دربارهٔ این‌موضوع وارد می‌شوند مانندهندسه‌دانان سلف‌آغشته به‌احساسی‌می‌شوند که تقریباً شبیه به‌احترامی است برای هندسهٔ اقلیدسی. دانشجویان احساس خواهند کرد که، در جملهٔ مطالعاتشان، چیزی را یافته‌اند که دربارهٔ آن نه شکی است و نه تناقضی. آنان هرگز منطق کاربرد آن در تعبیر فضای فیزیکی را در نظر نگرفته‌اند؛ حتی هیچ‌گاه گمان نبرده‌اندکه ممکن است این موضوع را با منطق‌کاری باشد. آنچه تاکنون به آنان

گفته شده است چیزی است مانند ضربه‌ای که بـه آنان وارد آید. اما آشفتگی تـوأم با سرگشتگی چند روز اول در چند هفتهٔ بعد ازآن به‌اعتمادی تازه، و شوقی برای‌پژوهش، و احترامی بیشتر برای هندسه و واقعیت آن جای خواهد پرداخت.

اما مطلب تمام نشد. در اینجا ممکن است دانشجویی برای اولین‌بار به‌ماهیت و اهمیت و ضرورت اصلهای موضوع، نـه تنها در هندسه، بلکه در تشکیل هرگونه عقیدهٔ مستدل، پی‌ببرد. ممکن است او متوجه شود که نه‌چنان است‌که بتوان همه چیز را ثابت کرد، بلکه چیزهایی را باید با اعتقاد پذیرفت، و سرشت هر روبنا بستگی دارد به ماهیت اصلهای موضوعی که بنیاد آن را تشکیل می‌دهند. در کتاب باد جنوب (*South Wind*)، نـرمن داگلس (Norman Douglas) از قـول یکی از پهلوانهای داستانش می‌گـوید: «هرچه پیرتر می‌شوم بیشتر متوجه می‌گردم که هر چیز بستگی دارد براصولی‌که آدمی می‌پذیرد». شاید امیدی بیشتر ازحد انتظارنباشدکه مطالعهٔ هندسهٔ نااقلیدسی به‌دانشجویی کمک‌کند تا این واقعیت را دریابد و اصلهای موضوع فلسفهٔ خودش را با آگاهی و عقل برگزیند.

هارولد ا. ولف
دانشگاه ایندیانا

۱

بنیاد هندسهٔ اقلیدسی

«این کتاب نزدیك به بیست و دو قرن مشوق وراهنمای اندیشهٔعلمیی بودکه با پیشرفت آدمی از وضعی بدتربه حالتی بهتر یکی است». کلیفرد[۱]

۱. مدخل

هندسه که شاخه‌ای است از ریاضیات که درآن از خاصیتهای شکلهای فضایی بحث می‌شود دارای سرچشمه‌ای کهن است. بیشتر گسترش آن نتیجهٔ تلاشهایی است که طی قرنها بعمل آمده است تا آیینی منطقی تدوین شود و دانسته‌های هندسی را که از راه مشاهده واندازه‌گیری بدست آمده‌اند به یکدیگر پیوند دهد. در زمان اقلیدس (در حدود ۶۰۰ پیش از هجرت) علم هندسه به مرحله‌ای نیك پیشرفته رسیده بود. اقلیدس از روی مطالبی که گردآوری شده بودندکتاب اصول خود را تدوین کردکه شایان توجه‌ترین کتابی درسی است که نوشته شده است، و باوجود نقصهایی که دارد، نزدیك به دو هزار سال سرمشقی بود برای کتابهای علمی.

اقلیدس و پیشینیان او به چیزی پی‌بردندکه هر فلسفه‌خوانی می‌داند، وآن این که همه چیز را نمی‌توان اثبات کرد. در ساختن هر نهاد منطقی یك یا چندگزاره را باید مفروض دانست وحکمهای دیگر را با استنتاج منطقی از آنها نتیجه گرفت. هر تلاشی که

---

۱. Clifford

برای اثبات همهٔ گزاره‌ها بشود بی‌تردید به دور باطل خواهد انجامید. در هندسه این گزاره‌های مفروض به‌صورت اصلهای موضوعی بیان می‌شوندکه از تجربه و شهود نتیجه گرفته شده‌اند. در نهایت اینها احکامی بودندکه از راه مشاهده راست، یا تقریباً راست، به‌نظر رسیده بودند. انتظارمی‌توان داشت که هندسه‌ای که با دقت برچنین پی‌هایی‌استوار شود دانسته‌هایی را که نتیجهٔ مشاهده‌اند، شاید خیلی خوب، اما نه خیلی دقیق، با هم مرتبط سازد. براستی باید آشکار شودکه تغییری در اصل موضوعی که در هندسه‌ای کمابیش مورد تردید باشد به هندسهٔ دیگری رهنمون خواهد شدکه، هرچند با هندسهٔ قبلی تفاوتی اساسی دارد، باز هم آن دانسته‌ها را کاملاً به هم ربط می‌دهد.

نیت ما آن است که در آنچه خواهدآمد هندسه را علمی مجرد و اصلهای موضوع را فقط مانند فرضهایی در نظر آوریم. اما جنبه‌های عملی را نباید از نظر دور داشت. نقشی که این جنبه‌ها در تکامل هندسهٔ مجرد داشته‌اند حقیر نیست و چه بسا که بر مفهومهای نتایجی که می‌گیریم پرتو افکنند و ما را به درك مهم بودن یانبودن این‌نتایج یاری دهند.

در چند قسمت آینده باختصار در مبانی هندسهٔ اقلیدسی تفرس خواهیم کرد. در این پژوهشها دو هدف می‌توان داشت که یکی شناساندن هندسه‌های نااقلیدسی است و دیگری فراهم آوردن زمینه‌ای برای خوب پی‌بردن به ماهیت و اهمیت آنها.

۲. تعریفها

شکلهای هندسی از عنصرهای مختلف مانند نقطه وخط و سطح مستوی (صفحه) و خطوط و سطوح منحنی ساخته شده‌اند. برخی از این عنصرها، ونیز رابطه‌های آنها با یکدیگر، را تعریف نشده باید گذاشت، زیرا که کوشش بی‌فایده است همهٔ عنصرها را تعریف‌کردن وهمهٔ گزاره‌ها را ثابت نمودن. عنصرها ورابطه‌های دیگر بنابر آن عنصرها و حکمهای بنیادی تعریف خواهند شد. اقلیدس[1] درگذاشتن بنیاد هندسهٔ خود بیست‌وسه تعریف[2] کرد. تعدادی از این تعریفها را می‌توان درکمال خوبی حذف‌کرد. مثلاً نقطه‌را چنین تعریف‌کرد: چیزی‌که هیچ جزء ندارد؛ بنابر نظر او خط درازایی است بی‌پهنا، وصفحه سطحی است که به نحوی هموار قرار دارد وخطهای مستقیم در آن واقعند. چنین تعریفهایی

---

۱. در این‌کتاب همه حکمهای اصلی مربوط به کتاب اقلیدس و آنچه از اقلیدس گرفته شده است براساس نسخه‌ای است که به‌کوشش هیث (T. L. Heath) با عنوان *The Thirteen Books of Euclid's Elements* به طبع رسیده است، چاپ دوم (کیمبریج، ۱۹۲۶). این کار با اجازهٔ شرکت انتشارات مك میلن صورت پذیرفته است.

۲. برای این تعریفها رجوع شود به ذیل‌کتاب حاضر.

ازدیدگاه منطق بیفایده‌اند. واقعیت این است که اقلیدس هم از آنها بهره‌ای نمی‌گیرد. در هندسه‌های نوین نقطه و خط و صفحه به‌طورمستقیم‌تعریف نمی‌شوند؛ بلکه وصف آنها مقید بودن به‌صدق کردن است در بعضی‌روابط تعریف‌شده یا تعریف نشده و برخی اصلهای موضوع. یکی از بهترین دستگاههایی که ساخته شده‌اند تا اساس منطقی هندسهٔ اقلیدسی قرار گیرند دستگاه هیلبرت[1] است. وی کار را با در نظر گرفتن سه‌رده از چیزها آغاز می‌کند: نقطه و خط و صفحه. می‌گوید: «ما نقطه و خط و صفحه را چنان می‌انگاریم که برخی رابطه‌های متقابل داشته باشند که آنها را با واژه‌هایی ازقبیل: قراردارند، بین، موازی، همنهشت[2]، پیوسته، و از این قبیل بیان می‌کنیم. بیان کامل و دقیق این رابطه‌ها به‌صورت نتیجهٔ اصلهای موضوع هندسی درخواهد آمد.»

بیشتر تعریفهای اقلیدس به اندازهٔ کافی قانع‌کننده‌اند. دقتی خاص باید به تعریف بیست و سوم، که در آنچه خواهد آمد از اهمیتی خاص برخوردار است، مبذول داشت؛ و آن تعریف خطهای موازی است ـ بهترین تعریفی که از دیدگاهی مقدماتی تاکنون شده است:

خطهای راست موازی خطهای راستی هستند که در یك صفحه قرار دارند و هر قدر آنها را امتداد دهیم در هیچ یك از دو طرف به یکدیگر نرسند.

مغایر با این تعریف که مبتنی است برمفهوم به هم نرسیدن دو خط موازی جلب توجه خواننده به دو مفهوم دیگر، که هم از زمانهای قدیم رواج بسیار داشته‌اند[3] مهم انگاشته می‌شود. این دو مفهوم عبارتند از این که دو خط موازی دو خط راستند که دارای یك امتدادند، یا دو خط که همه‌جا به یك فاصله‌اند. هیچ یك از این دو رضایتبخش نیست.

نظریهٔ امتداد به دوری باطل منتهی می‌شود. هرگاه مفهوم امتداد تعریف نشده باقی بماند آزمونی نمی‌توان داشت که برحسب آن تعیین شود که دو خط متوازیند یا نه. ازسوی دیگر هرکوششی برای تعریف امتداد باید منوط شود به داشتن معرفتی دربارهٔ رفتار خطهای متوازی و خاصیتهای آنها.

---

۱. *Grundlagen der Geometrie*، چاپ هفتم (لایپزیك و برلین، ۱۹۳۰)؛ یا ترجمهٔ مجازبه انگلیسی به‌توسط E. J. Townsend زیر عنوان *The Foundations of Geometry*، چاپ یکم (شیکاگو، ۱۹۰۲). همهٔ مراجعه‌ها به‌اثر اولی است مگر این‌که تصریح شده باشد. برای این دستگاه ← اصلهای موضوع، قسمت ۹.

۲. همنهشت Congruent به معنی مساوی در شکلها بکار می‌رود. آقای شفیعیها به جای آن اصطلاح «هوند» را بکار برده است.

۳. هیث، همان اثر، جلد یکم، ص ۱۹۵ و بعد.

نظریهٔ همفاصلگی هم نارضایتبخش است، زیرا که درهندسهٔ خاص مورد بحث مبتنی است براین که مکان هندسی نقاط همفاصله از یك خط راست خطی است راست. اما این را باید ثابت کرد، یا دست کم مدلل ساخت، که با فرضهای دیگرسازگاراست. هرچندعجیب نماید، بزودی به هندسه‌هایی برخواهیم خورد که در آنها این مطلب درست نیست.

نکتهٔ آخر این که تکیه براین موضوع جایز است که بنابر اقلیدس دو خط واقع در یك صفحه یا به یکدیگر می‌رسند یا متوازیند. هیچ رابطهٔ دیگری امکانپذیر نیست.

۳. مفهومهای متعارف

ده فرض اقلیدس به دو مجموعه تقسیم می‌شوند: پنج فرض بـا عنوان مفهومهای متعارف و بقیه به‌عنوان اصلهای موضوع رده بندی شده‌اند. تفاوت‌بین این‌دو کاملاً روشن نیست. از این فراترنخواهیم رفت که بگوییم بنظر می‌آیدکه مفهومهای متعارف فرضهایی انگاشته شده بودند که برای همهٔ علوم و همهٔ مردم باهوش پذیرفتنی هستند در حالی که اصلهای موضوع فرضهایی هستند مختص علم هندسه. پنج مفهوم متعارف چنین‌اند:

۱. چیزهای برابر با یك چیز با یکدیگر برابرند.
۲. هرگاه برابرها را با برابرها جمع کنیم مجموعها برابرند.
۳. هرگاه برابرها را از برابرها بکاهیم مانده‌ها برابرند.
۴. چیزهایی که بر یکدیگر انطباق‌پذیر باشند با یکدیگر برابرند.
۵. کل بزرگتر است از هر جزء آن.

در این فرضها به‌حکمهایی برمی‌خوریم که زمانی بـه «بدیهیات» توصیف می‌شدند. از آنچه هم‌اکنون گفتیم باید آشکار شودکه فرضهای هندسی هرگز چنین سرشتی ندارند. راست آن که هیچ‌گاه حکمی یافته نشده است که بدیهی باشد.

۴. اصلهای موضوع

اقلیدس پنج حکم زیرین را اصل موضوع قرار داده است:

۱. کشیدن خطی راست از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر.
۲. امتداد دادن هر خط راست متناهی به خطی راست (نامتناهی).
۳. رسم دایره‌ای به هر مرکز و با هر فاصله.
۴. این که همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند.
۵. این که اگرخطی که بر دو خط راست فرو می‌افتد با آنها دو زاویه بسازد چنان که مجموعشان از دو قائمه کمتر باشد وقتی که آن دوخط به‌طور نامتناهی امتداد داده شوند در طرفی که زاویه‌های کوچکتر ازدو زاویهٔ قائمه قرار دارند به‌یکدیگر می‌رسند.

هر چند اقلیدس تصریح نکرده است آشکارا چنین می‌نماید که اصل موضوع اول متضمن این مفهوم است که خطی که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند منحصر به‌یکی است، و در نتیجه دو خط نمی‌توانند فضایی را در میان گیرند. مثلاً اقلیدس این نکته را به نحوی مقدر در اثبات حکم ۴ کتاب یکم[1] فرض کرده است. و نیز از اصل موضوع دوم چنین استنباط می‌شود که خط راست متناهی را می‌توان از هر طرف فقط به یك نحو امتداد داد بطوری که دو خط راست متمایز نمی‌توانند یك پاره خط مشترك داشته باشند. ضرورت صریح این الزام بار اول در اثبات حکم ۱ کتاب یازدهم ظاهر می‌شود اما بررسیی نقدآمیز مسلم می‌سازد که هم از آغاز کتاب یکم مورد نیازاست. در مورد اصل موضوع سوم فقط خاطر نشان می‌سازیم که واژهٔ فاصله به‌جای شعاع بکار رفته است و ایجاب می‌کند که هر نقطهٔ محیط به‌آن فاصله ازمرکز باشد. اصل‌موضوع چهارم، انگاره‌ای یا واحد زاویه‌ای بدست می‌دهد که زاویه‌های دیگر را برحسب آن می‌توان اندازه گرفت. این واحد بی‌درنگ در اصل موضوع پنجم بکار گرفته می‌شود.

اصل موضوع پنجم[2] در آنچه خواهد آمد نقشی اساسی دارد. در حقیقت نقطهٔ آغاز بررسی هندسهٔ نااقلیدسی است. نمی‌توان تأثیری را که این اصل و تناقضاتی که آن را در میان گرفته‌اند بر هندسه، و بر ریاضیات به‌طورکلی، و بر منطق داشته‌اند دست کم گرفت. آن را به «شاید مشهورترین تك اظهار در تاریخ علم» توصیف کرده‌اند[3]. بنابر اهمیتی که دارد بزودی به‌آن باز خواهیم گشت و بتفصیل به‌آن خواهیم پرداخت.

۵. فرضهای مقدری که اقلیدس بکار برده است. بر هم قرار گرفتن (انطباق).

دراین قسمت وقسمتهای بعدی این فصل توجه خواننده را به‌فرضهای دیگری که اقلیدس کرده است معطوف می‌سازیم. شاید جز فرض مربوط به برهم قرارگرفتن، آنهای دیگر ناخودآگاه فرض شده باشند؛ به هر تقدیر این فرضها درزمرهٔ مفهومهای متعارف و اصلهای موضوع نیامده‌اند. در نظر هندسه‌دانان حذف آنها یکی از بزرگترین عیبهای هندسهٔ اقلیدسی شمرده می‌شود.

عمده این است که اقلیدس‌همین استدلال را که درجدیدترین کتابهای درسی‌مقدماتی دیده می‌شود برای اثبات حکم ۴ کتاب یکم بکار برده است. جای شکی نیست که در

---

۱. حکمهای کتاب یکم را، بی‌اثبات، در ذیل خواهید دید.

۲. گاهی به این اصل موضوع با عنوان یازدهمین یا دوازدهمین اشاره می‌شود.

۳. کایزر، فلسفهٔ ریاضی Keyser, *Mathematical Philosophy* (نیویورك، ۱۹۱۱).

اثبات همنهشتی دو مثلث که دو ضلع و زاویهٔ بینشان مساوی است اقلیدس عملا چنان انگاشته است که در فرض یکی از مثلثها را جابجا کرده است تا بر دیگری منطبق شود. اما در اثبات خواص شکلها در فضا برتوسل به این مفهوم که تغییر مکان شکل در آن شکل تغییری نمی‌دهد[1] جای ایراد است. چنان می‌نماید که اقلیدس خودش دلبستگی زیاد به این روش نداشته و آن را با اکراه بکاربرده است.

مثلاً یك ایراد از اینجا برمی‌خیزد که نقطه‌ها جز موضعها نیستند، پس نمی‌توانند تغییر مکان یابند. از سوی دیگر اگر از دیدگاه کاربردهای هندسه در فضای مادی درآن بنگریم وچنین بپذیریم که شکلها می‌توانند جای خود را تغییر دهند. اقلیدس بایددریافته باشدکه جسمهای مادی که با آنها برخورد می‌شودکمابیش دستخوش ناپدیدشدن و تغییر‌شکل دادن هستند. در ارتباط با این موضوع این مفهوم فیزیك نوین را هم نمی‌توان نادیده انگاشت که ابعاد اجسام درحرکت همان نیستند که درزمان‌سکون بودند. با این همه در عمل ممکن است با روشهایی که شبیه به برهم قراردادن است برخی اجسام‌مادی را با تقریب با هم سنجید. با بررسی این وضع ممکن است تصور کرد که در هندسه اصلی وجود داردکه برهم قرارگرفتن را جایز می‌سازد. اما اقلیدس چنین نکرد، هرچند قرینه‌ای برای این احتمال وجود دارد که اقلیدس مفهوم متعارف چهارم را به‌این نیت بیان کرده باشدکه این روش را مجاز سازد. در جواب این ایرادها می‌توان چنین نیز فرض‌کردکه در مورد انطباق آنچه حرکت فرض شده است فقط انتقال دقت از یك شکل بـه شکل دیگر باشد.

ازکاربرد انطباق می‌توان خودداری‌کرد. برخی ازهندسه‌دانان جدید چنین‌می‌کنند، مثلاً[2] بدین ترتیب که فرض می‌کنند کـه اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویـه بینشان از مثلثی دیگر برابر باشند بقیهٔ جفتهای زاویه‌هـای متناظر نیز برابرند[2].

۶. نامتناهی بودن خط

اصل موضوع دوم که تصدیق می‌کند که خط راست را پیوسته می‌توان ادامه داد الزاماً مبین آن نیست که خط نامتناهی است. اما، چنان که مستقیماً کشف خواهیم‌کرد، اقلیدس ناهشیارانه خط را نامتناهی فرض‌کرده بود.

ریمان بودکه برای اولین‌بار این اندیشه را القا کردکه اصل موضوع کلی‌تر «خط

---

۱. هیث، همان اثر، جلد یکم، ص، ۲۲۴-۲۲۸.

۱. ← مثلاً، هیلبرت، همان اثر، و نیز قسمت ۹.

راست بی‌مرز است» به جای اصل قدیمی قرار داده شود. در مقالهٔ تحقیقی قابل توجهی زیر عنوان دربارهٔ این فرض که هندسه بر استدلال مبتنی است[1] که در ۱۸۵۴/۱۲۳۳ در دانشکدهٔ فلسفه درگوتینگن ایرادکرد، مبنی براین که هرقدر هم که از بی‌مرز بودن فضا اطمینان حاصل شود نامتناهی بودن‌آن را نمی‌توان نتیجه گرفت، چنین گفت[۲]: «درگسترش ساختمان فضا به بی‌نهایت بزرگ، باید بین بیمرزی و گسترش نامتناهی تمیز داد؛ زیرا که بیمرزی متعلق است به رابطه‌های بسط و نامتناهی بودن، جزء رابطه‌های اندازه‌گیری است. این‌که فضا یك چندگونای سه‌بعدی بیمرز است فرضی است که با هر مفهومی از جهان خارج توسعه پیدا می‌کند. با این فرض درهر لحظه ناحیهٔ درك حقیقی کامل‌می‌شود وموضعهایی که برای شیء مطلوبی امکانپذیر باشند ساخته می‌شوند و بنابر، این کاربردها این‌فرض برای همیشه مؤید خود می‌باشد. بدین ترتیب بیمرزی فضا دارای یقینی‌تجربی است بزرگتر از هر تجربهٔ خارجی دیگر. اما گسترش نامتناهی آن به هیچ روی از آنچه گفته شد نتیجه نمی‌شود؛ از سوی دیگر اگر بـه بستگی نداشتن اجسام بـه موضع آنها قایل شویم و در نتیجه به‌فضا انحنایـی ثابت نسبت دهیم فضا بـاید لزوماً متناهی باشد مشروط به آن‌که این انحنا مقداری، هرقدر هم کوچك فرض‌شود، مثبت باشد».

بعد خواهیم آموخت‌که هندسه‌هایی‌که از جنبهٔ منطقی به استواری هندسهٔ اقلیدسی باشند ممکن‌است برروی این فرض ساخته شوندکه خطهای راست چون بسته‌اند بیمرزند، اما نامتناهی نیستند. خواننده می‌تواند در تلاش برای تصور خطهای راستی با این‌منش دایره‌های بزرگ یك‌کره را در نظر بگیرد، مشروط به آن‌که تشبیه را بیشتر از حد ادامه ندهد. خوب می‌دانیم کـه در هندسهٔ کـروی دایره‌های بزرگ ژئودزیك‌ها هستند، یعنی «خطهای» کوتاهترین فـاصلهٔ بین دو نقطه. کشف این نکته دشوار نیست‌که این دایره‌ها خاصیتهای متعدد دیگری شبیه به‌خاصیتهای خط راست در هندسهٔ مسطح اقلیدسی دارند. از سوی دیگر بسیار تفاوتهای چشمگیر نیز دارا هستند. مثلاً خاطرنشان می‌سازیم که‌این «خطها» با این‌که بی‌انتها هستند بی‌نهایت نیستند؟ و با این که معمولاً دو نقطه فقط یك «خط» را مشخص می‌کنند دو نقطه ممکن است چنان قرارگرفته باشندکه تعدادی بیشمار «خط» برآنها بگذرند؛ و این‌که دو «خط» همواره در دو نقطه تلاقی می‌کنند و فضایی را درمیان می‌گیرند.

---

۱. Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunds liegen، ازکتاب *Gesammelte Mathematische Werke* ریمان (لایپزیك ۱۸۹۲).

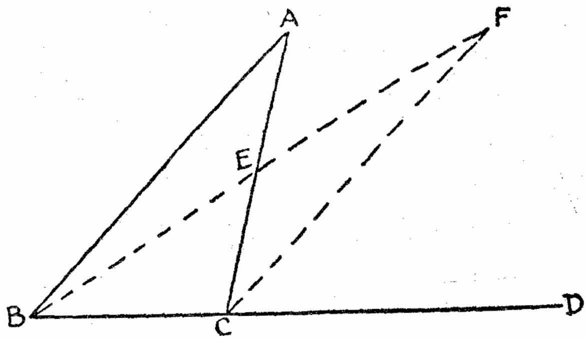
۲. این اقتباس از ترجمه‌ای شده است که W. K. Clifford در *Nature* جلد هشتم، ۱۸۷۳، منتشر کـرده بـود. تـرجمهٔ دیگری بـوسیلهٔ H. S. White در کتاب *A Source Book on Mathematics* (نیویورك، ۱۹۲۹) نوشتهٔ David Eugene Smith می‌توان یافت.

حتی نظری سطحی به نتایج مترتب بر اسناد سرشت بیمرز بودن اما نامتناهی‌نبودن به خطهای راست ما را متقاعد می‌سازد که اقلیدس به نحوی مقدر خط را نامتناهی فرض می‌کرده است. جای مهمی که درآن از این فرض استفاده شده بود اثبات حکم ۱۶ کتاب یکم است. این حکم آنقدر در آنچه از این پس خواهد آمد مهم است و نتایج آن چنان گسترده‌اندکه ما در اینجا به اثبات آن می‌پردازیم.

حکم ۱۶ کتاب یکم: هرگاه ضلعی از مثلثی امتداد داده شود زاویهٔ خارجی بزرگتر است از هر یك از زاویه‌های داخلی غیر مجاور آن.

فرض می‌کنیم ABC (شکل ۱) مثلث مفروض باشد و ضلع BC را تا D امتداد داده باشیم. باید ثابت کنیم که:

$$\angle ACD > \angle BAC$$



شکل ۱

هرگاه E نقطهٔ وسط AC باشد BE را رسم کرده تا F امتداد می‌دهیم بطوری که EF=BE. از C به F وصل مـی‌کنیم. آنگاه مثلثهای BEA و CEF همنهشتند (ض‌زض) و در نتیجه زاویهٔ FCE و زاویهٔ BAC برابرند.

امـا $\angle ACD > \angle FCE$

و در نتیجه $\angle ACD > \angle BAC$

حالا باید آشکار ساخت که اگر خط راست نـامتناهی نباشد برهان درست نخواهد بود. در حقیقت همین استدلال را می‌توان در مثلث کروی کرد اما فقط تا وقتی صادق است که BF کوچکتر از نیمدایره باشد. هرگاه F بر CD واقع باشد زاویهٔ ACD برابر است با زاویهٔ ECF و در نتیجه بـا زاویهٔ BAC. هرگاه BF بزرگتر بـاشد از یك نیمدایره، زاویهٔ ACD کوچکتر خواهد بود از زاویهٔ BAC. حتی اگر هندسه‌ای تصور شود که در آن هرکدام از دو خط بسته فقط در یك نقطه تقاطع کنند، BF ممکن است

آن‌قدر دراز باشد که F بر B منطبق شود یا برپارهٔ BE قرار گیرد. در هر دو حالت استدلال درست نیست.

برهانهای تعدادی از احکام مهم هندسهٔ اقلیدسی بستگی به حکم ۱۶ کتاب یکم دارند. احکامی مانند ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ در صورت معتبر نبودن حکم ۱۶ کتاب یکم بدون قیدهایی معتبر نخواهند بود.

تمرین

حکمهای ۱۷ تا ۲۱ کتاب یکم را ثابت کنید.

۷. اصل موضوع پاش

فرض مهم دیگری که اقلیدس کرده بود بی‌آن که آن را بصراحت بیان کند به‌وسیلهٔ پاش[1] بدین صورت بیان شد:

هرگاه A و B و C، سه نقطهٔ ناواقع بر خطی راست باشند و هرگاه α خط راستی واقع در صفحهٔ ABC باشد که بر هیچ یك از سه نقطهٔ A و B و C نگذرد، آنگاه اگر خط α بر نقطه‌ای از پاره خط AB مرور کند بر نقطه‌ای از پاره خط BC یا بر نقطه‌ای از پاره خط AC نیز خواهد گذشت.

از این حکم در دم این نتیجه گرفته می‌شود که اگر خطی در یکی از رأسهای مثلثی وارد مثلث شد باید ضلع مقابل را قطع کند. اقلیدس این حکم را به نحوی مقدر مکرر فرض کرده است، از جمله مثلاً در اثبات حکم ۲۱ کتاب یکم.

ما از این پس اصل موضوع پاش را بارها در مواردی بکار خواهیم بردکه برای راهنمایی شدن نتوانیم برشهود تکیه کنیم، چنان که اقلیدس کرده بود. برای تأکید براهمیت بیان صریح این اصل به عنوان سرشتی از هندسهٔ اقلیدسی، خاطرنشان می‌سازیم که هندسه‌هایی هست که در آنها این حکم به‌طور محدود جاری است. می‌پذیریم که جاری بودن این حکم بر مثلثهای کروی، منوط است به این که این مثلثها از حیث اندازه محدود باشند.

اصل موضوع پاش یکی از آن فرضهایی است که هندسه‌دانان جدید با عنوان اصل موضوعهای ترتیب[2] رده‌بندی کرده‌اند. این اصل موضوعهای مهم مفهومی را القا می‌کنند که باواژهٔ بین بیان می‌شود و ترتیب توالی نقاط را برروی خطی راست میسر می‌سازند.

---

1. Pasch, Vorlesungen Über neuere Geometrie (Berlin, 1926).

۲. ← قسمت ۹.

۸. اصل پیوستگی

یکی از خصیصه‌های هندسهٔ اقلیدسی استفادهٔ فراوان از ساختن شکلها است برای اثبات وجود شکلهایی کـه دارای خواصی معینند. درست حکم اول از این نمونه است و خواننده می‌تواند بی‌اشکالی احکام دیگر را بـاز شناسد. در این شکلها خطها و دایره‌ها رسم می‌شوند وفرض می‌شودکه نقاط تلاقی خط و خط، و خط و دایره، و دایره ودایره وجود داشته باشند. آشکار است که در هندسه‌ای که با دقت تنظیم شود وجود این نقاط را باید یا به‌صورت اصل موضوع بیان کرد ویا اثبات نمود.

تنها اصل‌موضوع اقلیدس که هیچ نقشی از این‌گونه ندارد اصل موضوع پنجم‌است که کاربردآن فقط در وضع خاصی است. آنچه مورد نیازاست اصل موضوعی است که به‌همهٔ خطها و همهٔ دایره‌ها سرشتی را اسناد دهد که پیوستگی نامیده می‌شود. این کار به نحو رضایتبخشی از راهی که به د د کیند[1] منتسب است صورت می‌پذیرد.

اصل موضوع ددکیند: هرگاه همهٔ نقطه‌های خط راستی به‌دو رده تقسیم شوند چنان که هر نقطهٔ ردهٔ نخستین در طرف چپ هر نقطهٔ ردهٔ دومین واقع شود، آنگاه یك، و فقط یك، نقطه وجود دارد که این تقسیم نقاط به دو رده را بوجود می‌آورد و بدین نحو خط راست را به دو جزء تقسیم می‌کند.

ددکیند می‌گوید: «گمان می‌کنم دراین فرض راه خطا نرفته باشم که همه‌کس در دم درستی این حکم را می‌پذیرد؛ بیشترخوانندگان من شگفت‌زده خواهند شد وقتی که بدانند که با همین نکتهٔ پیش‌پا افتاده راز پیوستگی فاش می‌شود. و این را هم باید بگویم که بسیار شاد خواهم شدکه اصل بالا در نظر هرکسی مسلم نماید وبا تصوری که او ازخط راست دارد هماهنگ باشد، زیرا که من بکلی عاجزم از این‌که دلیلی بردرستی آن اقامه کنم و این‌کار در حیطهٔ قدرت هیچ‌کس نیست. تصور این خاصیت برای خط چیزی‌نیست جز اصل موضوعی که به کمك آن ما پیوستگی را به خط اسناد می‌دهیم، و به پیوستگی خط پی می‌بـریم. اگر فضا وجودی حقیقی داشته باشد برای آن لازم نیست که پیوسته باشد؛ بسیاری از خواصی که برای‌آن می‌شناسیم در صورت پیوسته نبودن همچنان‌محفوظ می‌مانند. و اگر مسلم می‌دانستیم که فضا ناپیوسته است هیچ چیز مانع آن نبودکه، اگر بخواهیم، در عالم خیال جاهای خالی آن را پرکنیم و بدین ترتیب‌آن را پیوسته سازیم؛

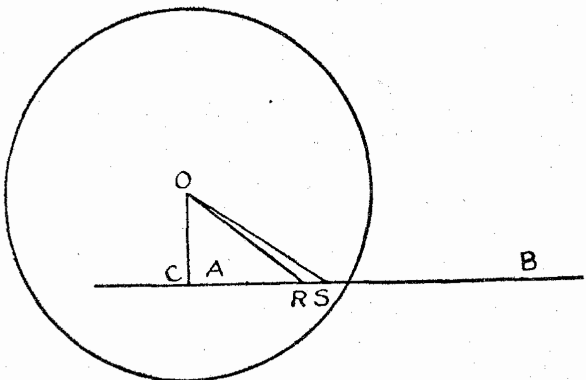
---

۱. Dedekind، در *Essays on The Theory of Numbers*، ترجمهٔ مجازبه‌وسیله، بمن W. W. Beman (شیکاگو، ۱۹۰۱)، یـا *Gesammelte mathematische Werke* جلد سوم، ص ۳۲۲ (برونس‌ویك، ۱۹۳۲).

این پر کردن جاهای خالی عبارت می‌بود از آفریدن نقطه‌های فردی، و مطابق با اصلی که در بالا گفتیم صورت می‌پذیرفت».

این اصل موضوع می‌تواند بآسانی گسترش یابد و زاویه‌ها و قوسها و نیز پاره‌خطها را در برگیرد. به‌عنوان کاربردی از این اصل موضوع حکم زیرین را ثابت می‌کنیم:

پاره خطی که نقطه‌ای واقع در درون دایره‌ای را به نقطه‌ای واقع در بیرون آن وصل کند یك نقطهٔ مشترك با دایره دارد.



شکل ۲

گیریم O مرکز دایرهٔ مفروض (شکل۲) و r شعاع آن باشند؛ فرض کنید A نقطهٔ واقع در درون دایره و B نقطه واقع دربیرون آن باشند. آنگاه:

$$OA < r < OB$$

OC را برAB، که درصورت ضرورت، امتداد داده می‌شود، عمودکنید وتوجه نماییدکه

$$OC \leqslant OA < r$$

نقاط پاره خط AB اکنون به دو رده تقسیم می‌شوند: نقاطی مانند P، که برای آنها $OP < r$ و آنهایی مانند Q، که برای آنها $OQ \geqslant r$.

چون در هر حال $OP < OQ$،

نتیجه می‌شود که $CP < CQ$

و بدین ترتیب هر نقطه مانند P واقع است پیش از (یا واقع است بعد از) هر نقطه مانند Q. در نتیجه بنابراصل موضوع ددکیند، نقطه‌ای مانند R بر پاره خط AB وجود دارد بدان‌سان که هر نقطهٔ جلوتر از آن متعلق است به یك رده و هر نقطهٔ بعد از آن متعلق است به‌ردهٔ دیگر. با برهان خلف ثابت می‌کنیم که این نقطهٔ R روی دایره است.

فرض کنید که $OR < r$

و نقطهٔ S را روی AB بین R و B اختیارکنید چنان که

$$RS < r - OR$$

چون در مثلث ORS،

$$OS < OR + RS$$

نتیجه می‌گیریم که

$$OS < r$$

اما این نتیجه محال است، بنابراین OR نمی‌تواند کوچکتر از r باشد.

خواننده می‌تواند به راه مشابه ثابت کندکه OR نمی‌تواند بزرگتر از r باشد.

تصور پیوستگی غالباً به‌وسیلهٔ چیزی که اصل موضوع ارشمیدس نامیده می‌شود به هندسه راه می‌یابد. بیانی ساده، اما کافی، از اصل موضوع ارشمیدس چنین است:

هرگاه دو پاره خط داده شده باشند، همواره مضربی متناهی از یکی وجود دارد که از دیگری بزرگتر باشد.

می‌توان نشان داد که این اصل[1] نتیجه‌ای است از اصل موضوع ددکیند. دیده‌می‌شودکه این اصل مجوزی است برای طرد پاره خط بی‌نهایت کوچك و پاره خط نامتناهی، هر دو. این اصل برقوسهای دایره و زاویه‌ها نیزجاری است. چندبار از این اصل استفاده خواهیم کرد.

بخش بزرگی از هندسهٔ اقلیدسی و نیز هندسهٔ نااقلیدسی را می‌توان بی‌استفاده از اصل پیوستگی ساخت. اما در آنچه خواهد آمد ما کوشش نخواهیم‌کرد که از بکاربردن آن خودداری کنیم.

۹. دستگاه اصل موضوعی هیلبرت

کار مردانی مانند پاش و ورونز و پئانو و هیلبرت، هندسهٔ اقلیدسی را بر اساسی منطقی ومتین قرار داده است. کمکی به کار خواهد بود اگر درآخر این فصل دستگاه‌اصل موضوعهای هیلبرت را، به‌صورتی اندکی‌خلاصه‌تر، بیاوریم ـ این همان دستگاهی است که در قسمت ۲ به آن اشاره کردیم. این اصلها به‌صورت شش مجموعه آراسته شده‌اند. باید یادآوری کرد کـه هیلبرت بـا اصطلاحات تعریف نشدهٔ نقطه و خط و صفحه شروع کرد. این عنصرها به‌وسیلهٔ بعضی رابطه‌هائی که در اصلهای موضوع شرح داده می‌شوند مشخص می‌گردند.

---

۱. ← مقالهٔ G. Vitali در مجموعهٔ Enriques به‌عنوان مسائلی مربوط به هندسهٔ مقدماتی (*Questioni riguardanti la geometrio elemantare*) (بولونیا، ۱۹۰۰) یا ترجمهٔ به آلمانی به نام *Fragen der Elementargeometrie*، جلد یکم، ص ۱۳۵ (لایپزیك و برلین، ۱۹۱۱).

یکم. اصل موضوعهای ارتباط

۱ و ۲. دو نقطهٔ متمایز یك، و فقط یك، خط راست را مشخص می‌سازند.

۳. بر هر خط راست دست کم دو نقطه وجود دارند. و در هر صفحه دست کم سه نقطه وجود دارند که بر روی یك خط راست نیستند.

۴ و ۵. سه نقطه‌که برروی یك خط راست نباشند یك صفحه، و فقط یك صفحه، مشخص می‌سازند.

۶. هرگاه دو نقطهٔ خط راستی بریك صفحه واقع باشند، آنگاه همهٔ نقاط آن خط برروی آن صفحه‌اند.

۷. هرگاه دو صفحه یك نقطه مشترك داشته باشند دست کم یك نقطهٔ مشترك دیگر نیز دارند.

۸. دست کم چهار نقطه وجود دارند که بر روی یك صفحه نباشند.

از جملهٔ قضیه‌هایی که باید از مجموعهٔ اصلهای موضوع بالا نتیجه شوند این دو قضیه‌اند:

دو خط راست متمایز که در یك صفحه قرار داشته باشند یك نقطهٔ مشترك دارند یا هیچ نقطهٔ مشترك ندارند.

یك خط و یك نقطهٔ غیر واقع برآن خط یك صفحه مشخص می‌سازند؛ همچنین دو خط متمایز که یك نقطهٔ مشترك داشته باشند.

دوم. اصل موضوعهای ترتیب

اصل موضوعهای این مجموعه رابطهٔ تعریف نشده‌ای را بین نقاط یك خط راست توصیف می‌کنند. این رابطه با کلمهٔ بین بیان می‌شود.

۱. هرگاه A و B و C سه نقطهٔ واقع بریك خط راست باشند و B بین A و C باشد آنگاه B بین C و A نیز هست.

۲. هرگاه A و C دو نقطهٔ خط راستی باشند، آنگاه دست کم یك نقطهٔ دیگر بر خط وجود دارد که بین A و C است.

۳. از هر سه نقطهٔ واقع بر خط راستی یکی، و فقط یکی، بین دو نقطهٔ دیگر است.

دو نقطهٔ A و B پاره خطی را مشخص می‌سازند؛ A و B دو انتها، یا دو سر، این پاره خط و نقطه‌های بین A و B نقطه‌های این پاره خطند.

۴. هرگاه سه نقطهٔ A و B و C غیر واقع بریك خط راست، و خط راستی در صفحهٔ ABC که بر هیچ یك ازسه نقطهٔ A و B و C نمی‌گذرد مفروض باشند، آنگاه اگر این خط یك نقطهٔ مشترك با پاره خط AB داشته باشد یك نقطهٔ مشترك با پاره خط BC یا

با پاره خط AC خواهد داشت (اصل موضوع پاش).

نکات زیرین را به عنوان نتایجی مترتب براصل موضوعهایی‌که هم اکنون گفتیم خاطر نشان می‌سازیم:

بین هر دو نقطهٔ خطی تعدادی نامتناهی نقطه قرار دارند.

هرگاه تعدادی متناهی نقطه بر خط راستی داده شوند همواره می‌توان آنها را به صورت دنباله‌ای در نظرگرفت مانند A، B، C، D، E،...، K، چنان که B واقع باشد بین A و C، D،...، K؛ C واقع باشد بین A، B و D، E،... K؛ و به‌همین قیاس. فقط یك دنبالهٔ دیگر با همین خواص وجود دارد و آن دنبالهٔ K،...، E، D، C، B، A است.

هر خط راست واقع برصفحه‌ای نقاطی از صفحه را که برآن خط نیستند به دو ناحیه تقسیم می‌کنند که دارای این خصوصیاتند: هر نقطهٔ یك ناحیه با هر نقطهٔ ناحیهٔ دیگری پاره‌خطی تشکیل می‌دهند که با آن خط یك نقطهٔ مشترك دارد؛ از سوی دیگر هر دو نقطهٔ یك ناحیه پاره‌خطی تشکیل می‌دهند که با خط مفروض نقطهٔ مشترك ندارد. بدین ترتیب خواهیم گفت که دو نقطه در یك طرف خط مفروضند یا در دو طرف متقابل آن قرار دارند. به نحو مشابه، نقطهٔ معینی واقع بر خط مفروضی نقاط این خط را به نیمخطها یا خطهای شعاعی تقسیم می‌کند و هر نیمخط (یا شعاع) عبارت است از همهٔ نقاطی‌که در یك طرف آن نقطهٔ معین هستند.

دستگاهی ازپاره خطهای AB، BC، CD،...، KL خط‌شکسته‌ای نامیده می‌شود که A را به L وصل می‌کند. نقاط A، B، C، D،...، L ونیزنقاط پاره‌خطهای یاد شده نقاط خط شکسته نامیده می‌شوند. اگر A و L برهم منطبق باشند خط شکسته چند ضلعی نامیده می‌شود. پاره خطها ضلع‌های چند ضلعی و A، B، C، D،...، K رأس‌های آن هستند. چند ضلعیی‌که ۳، ۴، ۵،...، n رأس داشته باشد بترتیب مثلث، چهارضلعی، پنج ضلعی،...، n ضلعی خوانده می‌شود. اگر رأسهای چند ضلعی متمایز باشند و هیچ یك برضلعی از شکل واقع نباشد و اگر هیچ دو ضلعی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند چند ضلعی را ساده گویند.

نتیجه این می‌شودکه چند ضلعی سادهٔ واقع در یك صفحه نقاط صفحه را که متعلق به آن چند ضلعی نباشند به دو ناحیه تقسیم می‌کند، یك درونی و یك بیرونی، که دارای این خصوصیتها هستند: نقطه‌ای از درون چند ضلعی را به نقطه‌ای از بیرون آن‌نمی‌توان با خط شکسته‌ای به هم وصل کرد که نقطهٔ مشترکی با چند ضلعی نداشته باشد. اما دو نقطهٔ واقع در یك ناحیه را می‌توان بدین طریق به هم ارتباط داد. دو ناحیه را می‌توان

بدین نحو از هم تمیز داد که در صفحه خطوطی وجود دارند که کاملاً در بیرون چند ضلعی هستند اما هیچ خطی وجود ندارد که کاملاً در درون آن واقع شود.

سوم. اصل موضوعهای همنهشتی

این مجموعهٔ اصل موضوعها مفهوم تازه‌ای را وارد می‌سازد که با کلمهٔ همنهشتی معین می‌شود.

۱. هرگاه A و B دو نقطهٔ خطی‌مانند a باشند وهرگاه A' نقطه‌ای باشد واقع برهمان خط a یا برخط دیگر a'، آنگاه بر a'، و در طرف معینی از A'، یك، و فقط یك، نقطهٔ B' یافته می‌شود چنان که پاره خط $A'B'$ همنهشت باشد با پاره خط AB.
هر پاره خطی همنهشت است با خود آن.

۲. هرگاه پاره خطی‌چون AB همنهشت باشد باپاره خطی چون $A'B'$، ونیز با پاره‌خط دیگری چون $A''B''$، آنگاه $A'B'$ همنهشت است با $A''B''$.

۳. هرگاه پاره خطهای AB و BC از خط a فقط در نقطهٔ B مشترك باشند و هرگاه پاره‌خطهای $A'B'$ و $B'C'$ از همان خط a یا از خط دیگر a' فقط در نقطهٔ B' مشترك باشند، آنگاه اگر AB و BC به‌ترتیب با $A'B'$ و $B'C'$ همنهشت باشند، AC با $A'C'$ همنهشت است.

دستگاه دو خط شعاعی b و k که از یك نقطهٔ O خارج شوند و بر دو خط‌متمایز واقع باشند زاویهٔ (b, k) نامیده می‌شود. خطهای شعاعی را ضلع‌های زاویه و O را رأس زاویه گویند. می‌توان ثابت کرد که زاویه نقطه‌های صفحهٔ خود، جز O و نقاط واقع برضلعها را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. هر دو نقطهٔ واقع در هر یك از دو ناحیه را می‌توان با خط شکسته‌ای به هم مربوط کرد که نه شامل O باشد و نه شامل هیچ‌یك از نقطه‌های ضلعها، حال‌آن‌که هیچ نقطهٔ یك ناحیه را نمی‌توان با چنین خطی به‌هیچ نقطهٔ ناحیهٔ دیگر مربوط ساخت. ناحیه‌ای‌که درونی نامیده می‌شود دارای این‌خصوصیت است‌که هرپاره خطی‌که به‌وسیلهٔ هردو نقطهٔ آن مشخص‌گردد فقط نقطه‌هایی ازاین ناحیه را در بر می‌گیرد؛ برای ناحیهٔ دیگر موسوم به بیرونی این خصوصیت برای هر دو نقطه آن وجود ندارد.

۴. گیریم که زاویه‌ای چون (b, k) برصفحهٔ α، وخطی چون a' در همان‌صفحهٔ α یا در صفحهٔ دیگری چون α'، ونقطه‌ای چون O' بر a'، و بر روی خط a' خطی شعاعی مانند b' که از O' خارج شده باشد، داده شده باشند، آنگاه در α' یك، وفقط یك، خط‌شعاعی k' از O'خارج می‌شود چنان‌که زاویهٔ (b', k') همنهشت باشد با زاویهٔ (b, k) ودرون (b', k') در یك طرف مشخص a' باشد.

۵. هرگاه زاویهٔ $(k$ و $b)$ همنهشت باشد با زاویهٔ $(k'$ و $b')$ و نیز همنهشت باشد با زاویهٔ $(k''$ و $b'')$، آنگاه زاویهٔ $(k'$ و $b')$ همنهشت است با زاویهٔ $(k''$ و $b'')$.

دو اصل موضوع اخیرزاویه را به‌همان نحو مشخص می‌سازندکه اصلهای‌موضوع ۱ و ۲ ازمجموعهٔ سوم پاره خطها را مشخص‌می‌ساختند. آخرین اصل‌موضوع این‌مجموعه مربوط است به همنهشتی پاره خطها و همنهشتی زاویه‌ها.

٦. هرگاه در مثلث‌های ABC و $A'B'C'$، پاره خطهای AB و AC و زاویهٔ BAC بترتیب همنهشت باشند با پاره خطهای $A'B'$ و $A'C'$ و زاویهٔ $B'A'C'$، آنگاه زاویهٔ ABC همنهشت است با زاویهٔ $A'B'C'$.

چهارم. اصل موضوع موازیها

گیریم خط a و یك نقطهٔ A غیر واقع بر a داده شده باشند، آنگاه در صفحه‌ای که با a و A مشخص می‌شود یك، وفقط یك، خط یافته می‌شود که نقطهٔ A را شامل باشد اما شامل هیچ نقطهٔ a نباشد (اصل موضوع پلی‌فیر).

پنجم. اصل موضوع پیوستگی

دو پاره خط AB و CD مفروضند. همواره بر خط AB دنباله‌ای از نقاط مانند A_1، A_2، A_3، ...A_n وجود دارند چنان که پاره خطهای AA_1، A_1A_2، A_2A_3، ...$A_{n-1}A_n$ همنهشت باشند با CD و B واقع باشد بین A و A_n (اصل موضوع ارشمیدس).

ششم. اصل موضوع تمامیت خطی

ممکن نیست که در دستگاه نقاط یك خط نقاطی افزود، چنان که دستگاه گسترش‌یافته هندسهٔ جدیدی تشکیل دهد که در آن همهٔ اصل موضوعهای خطی یاد شده معتبر باشند.

هندسه‌ای که آن را اقلیدسی می‌نامیم بر روی این پی‌ها بناشده است.

۳
اصل موضوع پنجم

«یکی از اصل موضوعهای اقلیدس اصل ۵ او ـ بخت آن را داشت که دورهٔ نوینی را بوجود آورد ـ و شاید مشهورترین تك سخن در تاریخ علم شمرده شود.» کاسیوس ج. کایزر[۱]

۱۰. مدخل

حتی بررسی سطحی کتاب یکم اصول اقلیدس نمایان می‌سازد که این کتاب مشتمل بر سه جزء متمایز است، هر چند اقلیدس آنها را از هم جدا نکرده بود. در سرشت گزاره‌ها بین دو گزارهٔ ۲۶ و ۲۷ تغییری قطعی است. بیست وشش گزارهٔ اول تقریباً به طور کامل به نظریهٔ مقدماتی مثلثها می‌پردازند. بخش میانی با شروع از حکم ۲۷ نظریهٔ مهم خطوط موازی را وارد می‌سازد و با زبردستی به‌وسیلهٔ گزاره‌های ۳۳ و ۳۴ به بخش سوم گذر می‌کنند. این بخش آخر بـا رابطه‌های پهنهٔ متوازی‌الاضلاع و مثلث و مربع سروکار دارد و درگزارهٔ مشهور ۴۷ کتاب یکم و عکس آن به اوج می‌رسد.

در ارتباط با پژوهشی که در مفهومهای متعارف و اصلهای موضوع کردیم مجال آن یافتیم که به تعدادی ازگـزاره‌های اولین از این سه‌بخش نظر افکنیم. واقعیتی است

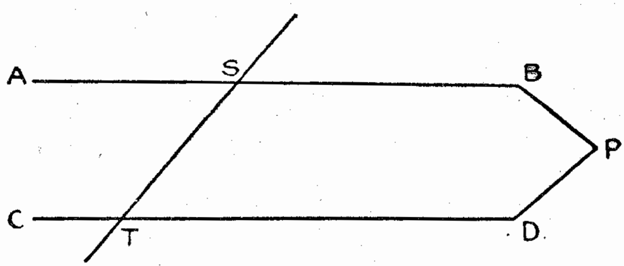
۱. این عبارت، ونیزآن‌که درصدر فصل هشتم می‌آید، ازکتاب *Mathematical Philosophy* نوشتهٔ Cassuis J. Keyser، و با اجازهٔ انتشارات شرکت E. P. Dutton اقتباس شده‌اند.

که باید به آن اشاره کرد و آن این‌که اقلیدس در اثبات هیچ یك از این گزاره‌ها اصل موضوع پنجم را بکار نبرده است. اگر اصل موضوع پنجم حذف می‌شد یا به جای آن‌اصل دیگری قرار می‌گرفت که با اصل موضوعهای دیگر و مفهومهای متعارفی سازگار بود باز هم آن احکام به‌قوت و اعتبار خود باقی می‌ماندند.

با عطف توجه به بخش دوم، که عبارت است از گزاره‌های ۲۷ تا ۳۴، مفید می‌دانیم که سه‌گزارهٔ اول را بیان و اثبات آنها را یادآوری کنیم.

گزارهٔ یکم، ۲۷. هرگاه‌خط راستی دوخط راست دیگر را قطع کند و دو زاویهٔ متبادل باهم برابر باشند آن دو خط متوازیند.

گیریم ST (شکل ۳) موربی باشد که دو خط AB و CD را قطع کند چنان که زاویه‌های BST و CTS برابر باشند.



شکل ۳

فرض کنیم‌که AB و CD در نقطه‌ای مانند P در امتداد SB و TD تقاطع‌کنند. در این صورت در مثلث SPT زاویهٔ خارجی CTS برابرمی‌شود با زاویهٔ داخلی TSP؛ و چنین چیزی ممکن نیست؛ پس نتیجه می‌گیریم‌که دو خط نمی‌توانند در امتداد SB و TD تلاقی کنند. به دلیلی مشابه می‌توان نشان داد که دو خط نمی‌توانند در امتداد SA و TC تقاطع نمایند. پس متوازیند.

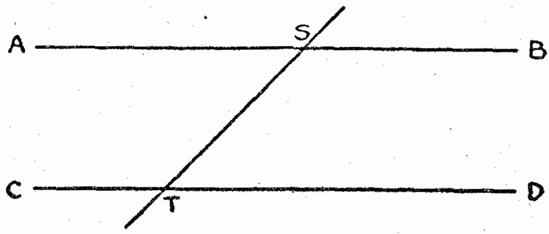
گزارهٔ یکم، ۲۸. هرگاه خط راستی بر دو خط راست فرود آید چنان که زاویهٔ خارجی مساوی شود با زاویهٔ متقابل داخلی، یا زاویه‌های متقابل داخلی [باهم] مساوی دو زاویهٔ قائمه شوند، آن دو خط با یکدیگر موازیند.

اثبات، که بآسانی ازگزارهٔ یکم، ۲۷ نتیجه می‌شود، به خواننده محول می‌گردد.

هنگامی که به گزارهٔ ۲۹، که عکس گزاره‌های ۲۷ و ۲۸ است، می‌پردازیم در گسترش هندسهٔ اقلیدسی به نقطه‌ای بحرانی می‌رسیم. در اینجا برای نخستین‌بار اقلیدس از اصل موضوع مفصل و طولانی پنجم، یا چنان‌که غالباً گفته می‌شود از اصل موضوع توازی، استفاده می‌کند.

گزارهٔ یکم، ۲۹. هرگاه خطی با دو خط متوازی تلاقی کند زاویه‌های متبادل با یکدیگر برابرند؛ زاویه‌های خارجی برابرند با زاویه‌های متقابل داخلی؛ و مجموع زاویه‌های متقابل داخلی واقع در یك طرف آن خط برابر است با دو زاویهٔ قائمه.

گیریم AB و CD (شکل ۴) دوخط موازی باشندکه بترتیب در S و T به‌وسیلهٔ مورب ST قطع شده باشند.



شکل ۴

فرض کنیدکه زاویهٔ BST بزرگتر از زاویهٔ STC باشد. بآسانی نتیجه می‌شود که مجموع زاویه‌های BST و STD بزرگتر است ازدو زاویهٔ قائمه و در نتیجه‌مجموع زاویه‌های AST و CTS کوچکتر است از دو قائمه. در این صورت بموجب اصل موضوع پنجم باید تقاطع کنند. نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ BST نمی‌تواند بزرگتر از CTS باشد. به راهی مشابه می‌توان نشان داد که زاویهٔ CTS نمی‌تواند بزرگتر از زاویهٔ BST باشد، پس‌دو زاویه بایدمساوی باشند وجزء اول‌حکم ثابت است، جزءهای دیگر را می‌توان بآسانی تحقیق کرد.

قرینه‌هایی[1] در دست است که اصلهای موضوع، بویژه اصل موضوع پنجم، بوسیلهٔ خود اقلیدس بیان شده‌اند. به‌هرتقدیر، اصل پنجم، به‌صورتی که هست، هدف حملهٔ مستقیم به اصول اقلیدس شد، حمله‌ای که دو هزار سال طول کشید. این امر، با توجه به نکاتی چند، از جملهٔ «مختصر ومفید نبودن آن»، در قیاس با اصلهای دیگر، مایهٔ تعجب نیست. از جنبهٔ فنی چون عکس یکم، ۱۷ است بیشتر به قضیه شبیه است تا به‌اصل موضوع و به هیچ روی به‌نظر نمی‌رسد که «بدیهی» باشد. وانگهی استفاده از آن با تأخیر، وپس از آن که بسی حکمها بی‌وجود آن ثابت شده‌اند، کافی بود که دربارهٔ سرشت آن شك و تردید برانگیزد. در نتیجه تلاشهای بیشمار به عمل آمد تا یا این اصل موضوع اثبات شود یا با تغییر تعریف خطوط متوازی چیز دیگری به‌جای آن قرار گیرد. بعداً از این تلاشها و شکستهایی که نصیب آنها شد بسیار سخن خواهیم گفت، زیرا که بر موضوع

۱. ← هیث، همان اثر، جلد یکم، ص ۲۰۲.

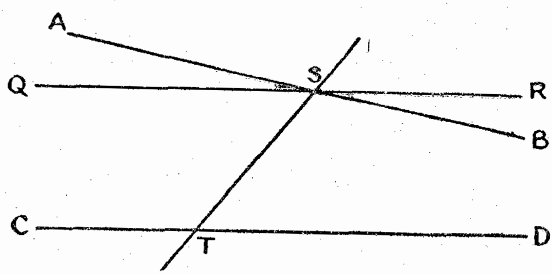
بحث ما اثری بسیار مهم دارند. درحال حاضرمی‌خواهیم جانشینهایی برای اصل‌موضوع پنجم را بررسی کنیم.

۱۱. جانشین‌هایی برای اصل موضوع پنجم

وقتی که درفصل پیشین دقت را متوجه اهمیت اصل موضوع پنجم درهندسهٔ مقدماتی و در آنچه در اینجا باید دنبال شود ساختیم، خواننده باید از اینکه نتوانسته است برخورد قبلی با این اصل را به یاد بیاورد احساس ناراحتی کرده باشد. این وضع نتیجهٔ این واقعیت است که بیشتر نویسندگان کتابهای درسی هندسه اصلی را جانشین آن‌اصل ساخته‌اند که اساساً با آن هم‌ارز است اما بیانی ساده‌تر دارد. از این جانشینها بسیار است. هیث نه تا از آنها را بر شمرده است[۱]. یکی از متداولترین جانشینها معمولاً به پلی‌فیر[۲] هندسه‌دان نسبت داده می‌شود هر چند، خیلی جلوتر، در قرن پنجم به‌وسیلهٔ پروکلوس بیان شده بود.

۱۲. اصل موضوع پلی‌فیر

از یك نقطه فقط یك خط می‌توان موازی با خط مفروضی رسم کرد.[۳]



شکل ۵

هرگاه اصل موضوع پلی‌فیر را جانشین اصل‌پنجم اقلیدس کنیم این اصل رامی‌توان بدین صورت نتیجه گرفت:

هرگاه دو خط مفروض AB و CD (شکل ۵) به‌وسیلهٔ مورب ST چنان قطع‌شده باشندکه مجموع زاویه‌های BST و DTS کوچکتر ازدوقائمه باشد، برS خط QSR را بگذرانید به‌قسمی‌که مجموع زاویه‌های RST و DTS مساوی دو قائمه باشد. این‌خط به موجب یکم، ۲۸ با CD موازی است. چون QSR و ASB دو خط متفاوتند و

---

۱. همان اثر، جلد یکم، ص ۲۰۲.

2. Playfair

۳. این راکه یك خط موازی می‌توان‌رسم‌کرد می‌توان ازیکم، ۲۷ ویکم، ۲۸، نتیجه گرفت.

بـرطبق اصل موضوع پـلی‌فیر از S فقط یك خط موازی CD می‌توان رسم کرد نتیجه می گیریم که AB با CD تلاقی خواهدکرد. این دو خط در طرف B و D تقاطع خواهند کرد زیرا که اگر در طرف مقابل تقاطع کنند مثلثی تشکیل خواهد شد کـه مجموع دو زاویه‌اش بزرگتر از دو قائمه می‌شود و این مخالف یکم، ۱۷ است.

نویسندگان کتابهای درسی جدید هندسه که اصل موضوع پلی‌فیر را بر اصل موضوع پنجم ترجیح می‌دهند درنتیجهٔ اختصار وسادگی ظاهری آن‌است. داجسن[۱] اشاره‌می‌کند به‌اینکه درهندسه نیازاست به یك‌آزمون عملی که به‌وسیلهٔ‌آن درمورد مقتضی بتوان ثابت کرد که‌اگر دوخط امتداد داده شوند تلاقی خواهندکرد. اصل‌موضوع پنجم به‌این کار می‌خورد و به‌این منظورازشکل هندسی ساده‌ای استفاده می‌کند، وآن دوخط متناهی است که با موربی قطع می‌شوند و رابطهٔ زاویه‌ای معلومی با این مورب دارنـد. از سوی دیگر اصل موضوع پلی‌فیر از مفهوم دو خط موازی استفاده می‌کند، یعنی از دو خط که تلاقی نخواهندکرد، و دربارهٔ رابطهٔ بین آنها در محدودهٔ مرئی صفحه هیچ دانسته نیست. بعلاوه داجسن نشان می‌دهد که اصل موضوع پلی‌فیر بیشتر از اصل موضوع پنجم ادعـا دارد، و «همهٔ ادعای اضافی زاید است و فشاری بیمورد براعتقاد خواننده».

تمرین

۱. اصل موضوع پلی‌فیر را از اصل موضوع پنجم استنتاج کنید.
۲. ثابت کنید که هر یك از دو حکم زیرین هم‌ارز است با اصل موضوع پلی‌فیر.
(آ) هرگاه خط راستی یکی ازدو خط متوازی را قطع‌کند دیگری را هم قطع خواهد کرد.
(ب) خطهای راست موازی با یك خط راست با یکدیگر موازیند.

۱۳. مجموع زاویه‌های مثلث

شق دومی برای اصل موضوع پنجم این قضیه است که با آن آشناییم:

مجموع زاویه‌های هر مثلث همیشه مساوی است با دو قائمه[۲]

اینکه این قضیه نتیجهٔ اصل مـوضوع پلی‌فیر، و از اینروی نتیجهٔ اصل موضوع پنجم، است کاملاً معلوم است. برای آنکه اصل موضوع پلی‌فیر را از این فرض نتیجه بگیریم به دو لم که پیامدهای این فرض هستند نیاز داریم.

---

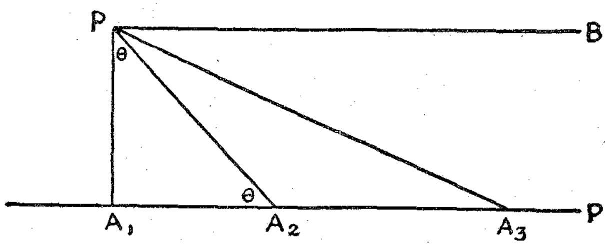
۱. در کتاب اقلیدس و رقیبان نوین او، C. L. Dodgson, *Euclid and His Modern Rivals* ص ۴۵ - ۴۷ چاپ دوم، (لندن، ۱۸۸۵)

۲. در واقع ضرورتی نیست که فرض به این اندازه وسیع باشد. کافی است فرض شودکه یك مثلث وجود داشته باشد که مجموع زاویه‌هایش ۲ قائمه باشد. ← قسمت ۲۴.

لم ۱ــ هرزاویهٔ خارجی‌مثلث‌مساوی است با مجموع‌دوزاویهٔ‌مقابل وداخلی مثلث.

اثبات به خواننده واگذار می‌شود.

لم ۲ــ از هرنقطهٔ معلوم P همواره می‌توان خطی مانند a کشیدکه با خط‌مفروضی مانند p زاویه‌ای کوچکتر از زاویهٔ مفروض α بسازد، هر قدر هم‌که α کوچك باشد.



شکل ۶

از P (شکل ۶) خط PA_1 را عمود بر p رسم کنید؛ A_1A_2 را به اندازهٔ PA_1 در یکی از دو طرف جدا کنید و PA_2 را وصل نمایید. زاویه‌های متساوی A_1PA_2 و A_1A_2P را با θ نشان دهید. آنگاه[1]

$$\theta=\frac{\pi}{2^2}$$

حالا A_2A_3 را مساوی PA_2 جدا کنید و PA_3 را وصل نمایید. آنگاه

$$\angle A_3PA_2=\angle A_2A_3P=\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2^3}$$

اگر ساختن شکل را به‌همین سیاق بارها تکرار کنیم به مثلث $PA_{n-1}A_n$ خواهیم‌رسید که در آن

$$\angle A_nPA_{n-1}=\angle A_{n-1}A_nP=\frac{\pi}{2^n}$$

کـه در آن n عدد صحیحی مثبت و بزرگتر از واحد است. بـه موجب اصل موضوع ارشمیدس عددی مانند k وجود دارد چنانکه $k\alpha>\pi$.

پس هرگاه عدد صحیح n بزرگتر از واحد چنان انتخاب شود که $2^n>k$

نتیجه می‌شود که $\frac{\pi}{2^n}<\alpha$

۱. حرف π برای نشان دادن ۲ قائمه بکار می‌رود.

و لم به اثبات می‌رسد.

حالا آماده‌ایم که ثابت کنیم که هرگاه مجموع سه زاویهٔ مثلث همیشه مساوی ۲ قائمه باشد از هر نقطه فقط یك موازی با خط مفروضی می‌توان کشید.

فرض کنید P (شکل ۶) نقطهٔ مفروض و p خط مفروض باشند PA_1 را عمود بر p، و از P خط PB را عمود بر PA_1 رسم می‌کنیم. هر خطی را که بر P بگذرد و p را قطع کند، مثلاً PA_3 را، در نظر می‌گیریم. از آنجا که

$$\angle PA_3A_1 + \angle A_1PA_3 = \angle BPA_3 + \angle A_1PA_3 = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\angle PBA_3 = \angle PA_3A_1$$

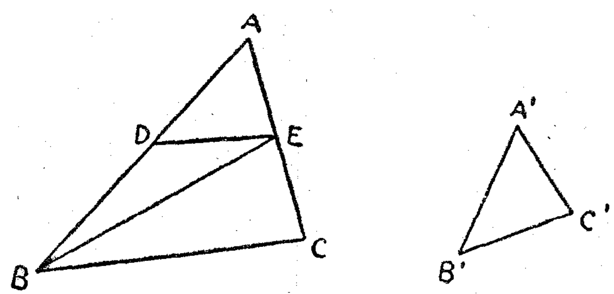
پس PB تنها خطی است که بر P می‌گذرد و p را قطع نمی‌کند، زیرا که اگر خطی بر P بگذرد و با PB زاویهٔ هر قدر کوچکی بسازد اما با p موازی باشد به‌موجب لم ۲ می‌توان بر P خطهایی مرور داد که با PB زاویهٔ کوچکتر از α بسازند و p را قطع کنند، بطوری‌که به موجب اصل موضوع پاش لازم می‌آید خط اولی هم p را قطع کند.

۱۴. وجود شکلهای متشابه

بیان زیرین نیز هم‌ارز با اصل موضوع پنجم است و ممکن است جانشین آن شود و به همان نتایج رهنمون گردد.

یك جفت مثلث متشابه وجود دارند، یعنی مثلثهایی‌که همنهشت نیستند اما زاویه‌های یکی، بترتیب، برابرند با زاویه‌های دیگری.

برای نشان دادن آنکه این گفته هم‌ارز است با اصل موضوع پنجم فقط لازم است نشان دهیم که چطور این اصل را می‌توان از آن نتیجه گرفت، زیرا که هرکس که هندسهٔ اقلیدسی خوانده باشد می‌داند که کاربرد اصل موضوع یاد شده به هندسه‌ای منجر



شکل ۷

می‌شود که در آن شکلهای متشابه وجود دارند.

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (شکل ۷) داده شده‌اند و زاویه‌های A، B، C بترتیب با زاویه‌های A'، B'، C' متساویند. فرض کنید AB بزرگتر از $A'B'$ باشد. بر AB طول AD را مساوی $A'B'$، و بر AC طول AE را مساوی $A'C'$ می‌سازیم. از D به E وصل می‌کنیم. مثلثهای ADE و $A'B'C'$ همنهشتند. خواننده می‌تواند بآسانی نشان دهد که AE کوچکتر است از AC، زیرا که فرض بزرگتربودن AE از AC یا مساوی بودنش با $A'C'$ به تناقض می‌انجامد. اکنون دشوار نیست که ثابت شود که مجموع زاویه‌های چهار ضلعی $BCED$ برابر است با چهار قائمه.

خیلی کوتاه، بی‌استفاده از اصل موضوع پنجم یا هم‌ارزهای آن، ثابت خواهیم کرد[1] که (آ) مجموع زاویه‌های یك مثلث هرگز نمی‌تواند بزرگتر از دو قائمه باشد مشروط به آنکه خط راست نامتناهی فرض شود؛ و (ب) هرگاه مجموع زاویه‌های یك مثلث مساوی دو قائمه باشد مجموع زاویه‌های هرمثلث مساوی دو قائمه است. باکاربرد این واقعیتها استدلال ما بآسانی کامل می‌شود.

با رسم BE دو مثلث BDE و BCE تشکیل‌می‌شوند. مجموع زاویه‌های هیچ‌یك از آن دو بزرگتر از دو قائمه نیست؛ اگر مجموع زاویه‌های یکی از آنها کمتر از دو قائمه باشد مجموع زاویه‌های دیگری از دو قائمه بزرگتر خواهد بود. نتیجه‌می‌گیریم که مجموع زاویه‌های هر یك از آن دو مساوی است با دو قائمه، و این حکم بر هر مثلث جاری است.

۱۵. خطهای راست همفاصله

جانشین قابل ذکر دیگر این است:

یك جفت خط وجود دارند که همه‌جا از یکدیگر به یك فاصله‌اند.

به مجرد آن‌که اصل موضوع پنجم پذیرفته شود این حکم به دنبال آن می‌آید، زیرا که درآن‌صورت همهٔ خطهای متوازی این خصوصیت را دارند که همه‌جا از یکدیگر به یك فاصله‌اند. اگر گفتهٔ بالا را اصل موضوع قرار دهیم می‌توانیم بآسانی اصل موضوع پنجم را نتیجه بگیریم، بدین‌ترتیب که نخست ثابت می‌کنیم که مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌هایش برابر است با دو قائمه.

گیریم که AB و CD (شکل ۸) دو خطی باشند که همه‌جا از یکدیگر به یك‌فاصله‌اند. از دو نقطهٔ دلخواه O و Q واقع بر CD دو خط OP و QR را عمود بر

---

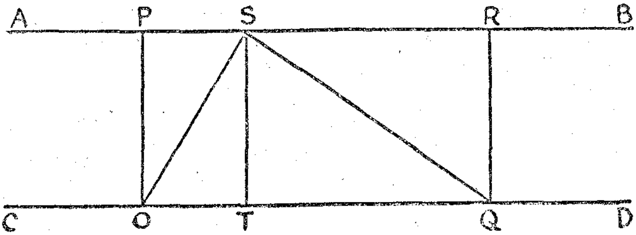
۱. ← قسمت ۲۴.

AB رسم کنید، و از نقطهٔ دلخواه S واقع بر AB خط ST را عمود بر CD بکشید. بنابر فرض OP و QR و ST متساویند. از آنجا کـه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OPS و OTS همنهشت هستند:

$$\angle PSO = \angle TOS$$

به دلیل مشابه

$$\angle RSQ = \angle TQS$$



شکل ۸

نتیجه آن که مجموع زاویه‌های مثلث OSQ برابر است با دو قائمه.

۱۶. جانشینهای دیگر

در خاتمه بی‌تفسیری سه جـانشین دیگر بیان می‌کنیم. خواننده می‌تواند در پرتو پیشرفتهای اخیر نشان دهد که هر سه با اصل موضوع پنجم هم‌ارزند.

بر هر سه نقطهٔ ناواقـع بر یك خط راست یك دایره می‌توان گذراند.

هرگاه سه زاویهٔ یك چهار ضلعی قائمه باشند زاویهٔ چهارم آن نیز قائمه است.

از هر نقطهٔ درون یك زاویهٔ کوچکتر از دو سوم[1] زاویهٔ قائمه همیشه می‌توان خط راستی رسم کرد که دو ضلـع زاویه را قطـع کند.

این هفت جانشین اصل موضوع پنجم به خودی خود درخور توجه‌اند. اما برای نمایان ساختن اهمیت اصل موضوع پنجم در هندسهٔ اقلیدسی نیز بکار می‌آیند. نتایج مترتب برآن آشناتـرین و غنی‌ترین حکمهای آن هندسه‌اند. مثلاً بی‌وجود خود آن، یا هم‌ارزهای آن قضیهٔ فیثاغورس وجود نمی‌داشت، و همهٔ نظریهٔ پربار شکلهای متشابه از میان می‌رفت و برای مساحتها بایستی طرحی از نو افکند. هنگامی که پس از این، اصل یاد شده را به یك‌سو نهیم و به جای اصلهایی قرار دهیم که ناقض آن باشند باید انتظار

---

۱. ← قسمت ۲۴.

داشته باشیم که هندسه‌هایی که حاصل می‌شوند براستی شگفتی‌آور باشند.

۱۷. تلاشهایی برای اثبات اصل موضوع پنجم

دلایلی را که هم ازآغاز موجب گردید هندسه‌دانان در مورد اصل موضوع پنجم، به صورتی که هست، تردیدکنند دیدیم. اما تلاشهای متعدد و متفاوت در طی چند قرن برای این کـه آن را از اصلهای موضوع دیگر و اصلهای متعارف، خواه صریح و خواه مقدر، نتیجه بگیرند دچار شکست شدند. قبلاً باید نشان دهیم که چرا شکست اجتناب‌ناپذیر بود. امروز می‌دانیم که اصل موضوع ممکن نبود بدین نحو نتیجه شود.

اما هرچند تا جایی که به‌هدف اصلی مربوط می‌شوداین تلاشها بی‌ثمرمی‌نمود، آنها را نباید ناچیز انگاشت. بی‌تردید براثراین تلاشها بود که ماهیت واهمیت این اصل موضوع آشکار شد. بدین دلیل مفید می‌دانیم کـه مختصری دربـارهٔ معدودی از این تلاشهای نامعدود سخن بگوییم.

۱۸. بطلمیوس

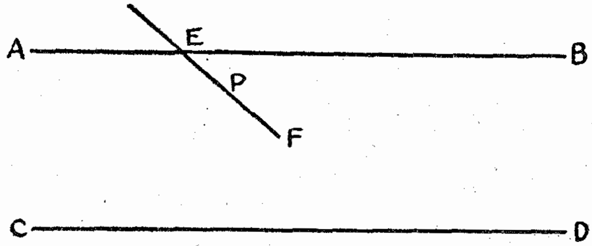
قسمت بزرگی از اطلاعاتی که دربارهٔ تاریخ هندسهٔ یونـانی داریم از نوشته‌های پروکلوس (۴۱۰-۴۸۵ میلادی) فیلسوف وریاضیدان ومورخ به‌ما رسیده است. اوروایت می‌کندکه اقلیدس در زمان پادشاهی بطلمیوس اول می‌زیست و این پادشاه خود کتابی دربارهٔ اصل موضوع پنجم نوشت که متضمن اثباتی برای آن بود. این را باید نخستین کوشش برای ثابت کردن آن اصل موضوع شمرد. پروکلوس استدلال را عیناً نقل نکرده است اما از تفسیری که‌کرده است چنین می‌فهمیم که بطلمیوس دلیل زیرین را بکار برده تا حکم یکم، ۲۹ را بی‌استفاده از آن اصل موضوع ثابت کند:

دو خط متوازی وموربی را درنظر بگیرید. امتدادهای دو خط در یك طرف‌مورب بیشتر از امتدادهـایشان دو طرف دیگر آن بـا هم‌موازی نیستند. پس اگر مجموع دو زاویهٔ درونی در یك طرف بزرگتر از دو قائمه باشد در طرف دیگر نیز چنین خواهدبود. اما چنین چیزی ممکن نیست، زیراکه‌مجموع چهار زاویه چهار قائمه است. به‌دلیلی‌مشابه می‌توان گفت‌که مجموع زاویه‌های داخلی یك طرف مورب نمی‌تـواند کوچکتر از دو قائمه باشد. نتیجه واضح است.

۱۹. پروکلوس

پروکلوس، خودش، به‌نادرست بودن استدلال بالا اشاره‌کرد،بدین طریق که‌خاطرنشان ساخت‌که بطلمیوس در واقع فرض می‌کرده است‌که از یك نقطه فقط یك موازی با

خط مفروض می‌توان رسم کرد، و این هم‌ارز است با فرض‌کردن اصل موضوع پنجم.



شکل ۹

پروکلوس خودش دلیلی اقامه کرد. او سعی‌کرد ثابت‌کندکه اگر خطی یکی از دو موازی را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند. و نیک می‌دانیم که اصل موضوع پنجم درست از همین نتیجه می‌شود. وی چنین گفت:

گیریم AB و CD (شکل ۹) دو خط موازی باشند و خط راست EF خط AB را در E قطع کند. فرض کنید که نقطه‌ای چون P در طول EF در امتداد F تغییر مکان دهد. در این‌صورت طول عمودی که از P بر AB فرود آید سرانجام بزرگتر می‌شود از هر طولی، و در نتیجه بزرگتر می‌شود از فاصلهٔ بین دو متوازی، بنابراین EF باید CD را قطع کند.

خطای این استدلال در این فرض است که دو خط متوازی همه‌جا همفاصله هستند، یا به هر تقدیر دو خط متوازی بدین نحو به یکدیگر مربوطند که وقتی به‌طور نامتناهی امتداد داده شوند عمودی که از نقطه‌ای واقع بر یکی بر دیگری فرود آید دارای طول متناهی خواهد بود. اولی، همچنان که ثابت‌کرده‌ایم، اصل‌موضوع پنجم را ایجاب می‌کند؛ و دومی را هم بعد خواهیم دید[1] که چنین خصوصیتی خواهد داشت.

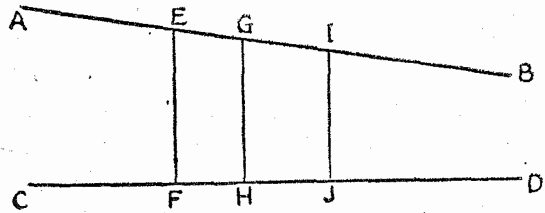
۲۰. نصیرالدین طوسی

برای مثال بعد به قرن سیزدهم می‌رسیم و کاری که نصیرالدین (۱۲۰۱-۱۲۷۴)، اخترشناس و ریاضیدان ایرانی انجام داد[2] و شرحی به عربی براقلیدس، و رساله‌ای دربارهٔ اصلهای موضوع اقلیدسی نوشت. چنین می‌نماید که وی نخستین کسی باشد که در

۱. ← قسمت ۴۷.

۲. خواجه ابوجعفر نصیرالدین محمدبن‌حسن طوسی (۵۸۰-۶۵۳ هش) دانشمند و سیاستمدار بزرگ.

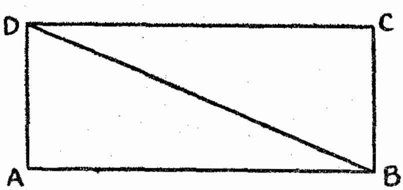
بررسی اصل موضوع پنجم به اهمیت قضیهٔ مجموع زاویه‌های مثلث توجه کرده است. در کوششی که برای اثبات اصل موضوع پنجم کرده اصول اندیشه‌های مهمی نهفته بود که می‌بایست بعد بسط داده شوند.



شکل ۱۰

نصیرالدین نخست بی‌اثبات این حکم را بیان کرد:

هرگاه دو خط AB و CD (شکل ۱۰) چنان باهم ارتباط داشته باشند که عمودهای متوالی مانند EF و GH و IJ و... که از نقاط E و G و I و... واقع بر AB بر CD فرود آیند، همواره با AB زاویه‌های نامساوی بسازند چنان که پیوسته در طرف امتداد B حاده، و در نتیجه در طرف امتداد A منفرجه، باشند، آنگاه AB و CD پیوسته در امتداد A و C از یکدیگر دور می‌شوند و تا وقتی که به یکدیگر نرسیده‌اند پیوسته در امتداد B و D به یکدیگر نزدیك می‌گردند و عمودها در امتداد اولی پیوسته بزرگتر، و در امتداد دومی همواره کوچکتر، می‌شوند. بعکس، هرگاه عمودها پیوسته در امتداد A و C درازتر و در امتداد B و D کوتاهتر شوند خطها در امتداد اول ازهم دور و در امتداد دوم به‌هم نزدیك می‌شوند وعمودها با AB زاویه‌های نابرابر خواهند ساخت که منفرجه‌ها در امتداد A و C و حاده‌ها در امتداد B و D واقع می‌شوند.



شکل ۱۱

سپس شکلی را وارد بحث کرد که بعد مشهور گردید. در دو انتهای پاره خط AB (شکل ۱۱) دو عمود متساوی AD و BC برآن اخراج کرد و از C به D وصل نمود. برای اثبات آن که زاویه‌های CDA و DCB قائمه‌اند به برهان خلف متوسل شد و، بی‌توجه زیاد، فرضی را که دربالا آوردیم مورد استفاده قرار داد. بدین ترتیب، اگر زاویهٔ DCB حاده می‌بود، DA کوتاهتر از BC می‌شد، که خلاف فرض است، پس DCB حاده نیست؛ این زاویه منفرجه هم نیست. البته وی به‌طور مقدر در اینجا فرض کرده بود که وقتی DCB حاده است CDA باید

منفرجه باشد. استدلال او به‌این نتیجه کشانیده شد که هرچهار زاویهٔ چهار ضلعی قائمه‌اند. بنابراین اگر DB رسم شود مثلثهای DAB و DCB همنهشت هستند و مجموع زاویه‌های هر یك دو قائمه است.

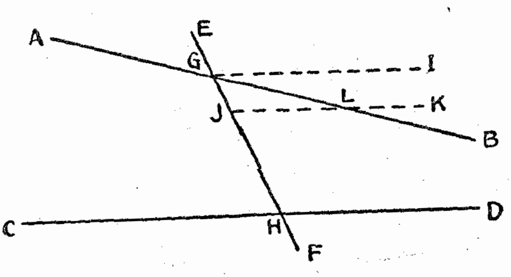
می‌دانیم که اگرهمه چیز تا اینجا رضایتبخش می‌بود اصل‌موضوع پنجم بآسانی درپی آن در می‌آمد. نصیرالدین خود استدلالی منقح و جامع ارائه کرد. اما یافتن شکافهایی‌در استدلالی که گذشت دشوار نیست. مثلاً اگر دربارهٔ فرضهایی‌که در آغاز آن شده است استدلال شود بیشتر از خود اصل موضوع پنجم پذیرفتنی نیستند. وانگهی اگر در شکل ۱۱ فرض شود که زاویهٔ DCB حاده است نتیجه نمی‌توان گرفت که CDA منفرجه است. در حقیقت بعداً بی‌استفاده از اصل پنجم ثابت خواهد شد[1] که در چنین شکلی همهٔ زاویه‌ها باید متساوی باشند.

۲۱. والیس

جان والیس (۱۶۱۶-۱۷۰۳) به کار نصیرالدین دلبستگی پیدا کرد و در ۱۶۵۱ استدلال او را در درسی در اکسفرد بکاربرد. در ۱۶۶۳ استدلالی از خودش عرضه کرد. ما استدلال او را در اینجا باز می‌گوییم زیرا که نمونه‌ای است از اثباتهایی که در آنها فرضی هم‌ارز اصل موضوع پنجم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

والیس این فکر را عرضه کرد که اگر مثلثی داده شده باشد می‌توان مثلث دیگری، با هر اندازه‌ای، مشابه آن ساخت. آنگاه استدلالی کرد که در اصل چنین است:

هرگاه دو خط AB و CD (شکل ۱۲) داده شده باشند و مورب EF آنها را در G و H قطع کرده باشد و مجموع زاویه‌های BGH و DHG کمتر از دو قائمه باشد، باید ثابت کرد وقتی که AB و CD به اندازهٔ کافی امتداد داده شوند یکدیگر را قطع خواهند کرد.



شکل ۱۲

---

۱. ← قسمت ۴۲.

بآسانی می‌توان ثابت کرد که $\angle EGB > \angle GHD$.
آنگاه اگر پاره خط HG در طول EF جا به‌جا شود و HD به‌نحوی صلب به آن متصل بماند، وقتی‌که H بروضع اول G منطبق گردد HD به‌وضع GI که کاملاً بالای GB است قرار می‌گیرد. پس HD باید در ضمن حرکت یك وقت GB را قطع کند، مثلاً درنقطهٔ L وقتی‌که HD در وضع JK بوده است. اکنون اگر مثلثی به‌قاعدهٔ GH و مشابه با مثلث GJL ساخته شود ـ و فرض شده است که این کار شدنی است ـ واضح است که HD باید GB را قطع کند.

۲۲. ساکری

در فصل آینده خواهیم آموخت کـه بلیایی[۱] و لباچفسکی در اوایل سدهٔ نوزدهم هندسهٔ نااقلیدسی را کشف کردند. اما کشف به‌وسیلهٔ یك‌کشیش ژزوئیت ایتالیایی تقریباً صد سال پیشتر صورت پذیرفته بوده است. در ۱۲۶۸/۱۸۸۹ کتاب کوچکی مورد توجه قرارگرفت که در ۱۱۱۲/۱۷۳۳ در میلان به‌چاپ رسیده ومدتی دراز به‌دست فراموشی سپرده شده بود. عنوان آن چنین بود: اقلیدس مبرا از هر نقص[۲] * ومؤلف آن جرولامو ساکری (۱۰۴۶-۱۱۱۲/۱۶۶۷-۱۷۳۳) استاد ریاضیات در دانشگاه پاویا بود.

زمانی که ساکری در میلان به تدریس دستور زبان و تحصیل فلسفه مشغول بود اصول اقلیدس را خوانده و ظاهراً به نحو خاصی از روش برهان خلف او متأثر شده‌بود. این‌روش عبارت است از این‌که قضیه‌ای که باید ثابت شود بنابر فرض نادرست انگاشته شود؛ اگر به نتیجه‌ای محال منجر شود نتیجه می‌توان گرفت که حکم اصلی درست‌بوده است. بعد، پیش از آن‌که ساکری در ۱۶۹۷ به پادیا رود سه سال درتورن فلسفه تدریس کرد. نتیجهٔ این تجربه‌ها انتشار رساله‌ای بود در منطق، به نام منطق اثباتی[۳] که در آن ابتکاری شده بود وآن کاربرد روش قدیمی نیرومندی‌که در بالا به‌آن اشاره شد درمنطق صوری بود.

طبیعی می‌نماید‌که ساکری، درجست وجوی مطالبی‌که روش مطلوب خود رادربارهٔ آنها بیازماید، سرانجام به‌آزمون‌آن در مسأله مشهور ومزاحم، یعنی اثبات اصل‌موضوع

---

1. Bolyai 2. *Euclides ab omni naeve Vindicatus*

*. این کتاب به دو جزء تقسیم شده بـود کـه ترجمهٔ انگلیسی جزء مهمتر آن اکنون در دسترس است: Halsted, *Gerolamo Saccheri's Euctides Vindicatus* (Chicago, 1920) یا David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics* P. 351 (New York, 1929)

3. Logica demonstrativa

پنجم، پرداخته باشد. تا آنجا که می‌دانیم این اولین‌بار بود که کسی به فکر می‌افتادکه منکر آن اصل موضوع شود وحکمی مخالف آن بـه جای آن قرار دهدتا بتواند نتایج آن را ببیند.

ساکری برای برعهده گرفتن این وظیفه کاملاً آماده بود. در منطق اثباتی خود با زبردستی و بتفصیل به موضوعهایـی مانند تعریفها و اصل موضوعها پرداخته بود. با کارهای کسان دیگری که برای اثبات اصل موضوع کذایی تلاش کرده بودند آشنا بود و متوجه نقصهای اثباتهای نصیرالدین و والیس شده بـود. در واقع بیشتر با تکیه بر استدلال ساکری بودکه در بالا نشان داده شدکه فرض والیس هم‌ارز اصل پنجم است.

ساکری برای آماده شدن برای کاربرد روش خود از شکلی استفاده‌کرد که قبلاً با آن آشنا شده‌ایم. یعنی از چهار ضلعیی کـه دو ضلع روبروی آن با هم برابر، و دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن قائمه بودند.

وی با فرض این‌که در چهار ضلعیی ABCD (شکل ۱۱) AB و CD متساوی و زاویه‌های A و B قائمه‌اند بآسانی و بی‌استفاده از اصل موضوع پنجم یا نتایج آن ثابت کرد که زاویه‌های C و D برابرند و خطی که نقاط وسط AB و CD را به هم وصل مـی‌کند برهر دو خط عمود است. مـا استدلال وی را در اینجا تکـرار نمی‌کنیم زیرا که بعداً مجبور خواهیم بود آنچه را که هم‌ارز آنهاست، بدست دهیم. با فرضهای اقلیدسی زاویه‌های C و D را قائمه می‌دانیم فرض این‌که حاده یامنفرجه باشند نادرستی اصل پنجم را ایجاب می‌کند. این درست همان چیزی بود که مطمح نظر ساکری بود. او سه فرض در نظر گـرفت: فرض زاویهٔ قائمه، فرض زاویهٔ منفرجه و فرض زاویهٔ حاده. و انتظار داشت که با پرداختن به‌دو فرض‌آخر به‌تناقض برخورد کند. وی تعدادی گزاره‌های کلی بیان و اثبات کرد که گزاره‌های زیرین از مهمترین آنها هستند:

۱. هرگاه یکی از فرضها برای یك چهار ضلعی از نوع مورد نظر راست باشد برای هر چهار ضلعی از این نوع راست است.

۲. براساس فرضهای زاویهٔ قائمه و زاویهٔ منفرجه یا زاویهٔ حاده، مجموع زاویه‌های یك مثلث همیشه برابر است با، بزرگتر است از، یا کوچکتر است از دو قائمه.

۳. اگر تنها یك مثلث وجود داشته باشد که مجموع زاویه‌هایش مساوی با، بزرگتر از، یا کوچکتر از دو قائمه باشد درستی فرض زاویهٔ قائمه، یا زاویهٔ منفرجه یا زاویهٔ حاده نتیجه می‌شود.

۴. دو خط راست واقـع در یك صفحه (حتی با فرض زاویهٔ حاده) یا یك عمود مشترك دارند یا، در صورتی که در یك جهت امتداد داده شوند، یا یك‌بار در فاصله‌ای

متناهی تلاقی می‌کنند یا به‌طور پیوسته به یکدیگر نزدیك می‌شوند.

ساکری که، مانند اقلیدس، به نحوی مقدر فرض‌کرد که خط راست نامتناهی است، در استفاده از فرض زاویهٔ منفرجه یا زاویهٔ حاده هیچ اشکالی نداشت. با این فرض وی توانست اصل موضوع پنجم را ثابت کند، و آن به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که مجموع زاویه‌های مثلث دو قائمه باشد، که مخالف فرض است. اما بعد دیده خواهد شد که اگر او نامتناهی بودن خط را فرض نکرده بود، چنان که در استدلال خود با استفاده ازحکم یکم، ۱۸ اقلیدس‌کرد تناقض هیچ‌گاه دست نمی‌داد.

اما معلوم شد که فرض زاویهٔ حاده خیلی دشوارتر است. تناقضی کـه انتظارش می‌رفت پدید نیامد. در واقع پس از دنباله‌ای دراز از احکام و فروع و توضیحات، که بسیاری از آنها به صورت قضایای متداول هندسهٔ نااقلیدسی درآمدند، ساکری با لنگی نتیجه‌گرفت که فرض به این امر محال می‌انجامدکه دو خط وجود دارند که چون به‌طور نامتناهی ادامه‌یابند به‌یك خط تبدیل می‌شوندویك عمود مشترك در بینهایت دارند. کاملاً احساس اطمینان می‌شود که ساکری به‌وسیلهٔ استدلالی که این‌گونه مفهومهای مبهم در آن دخیل بودند به‌طورکامل متقاعدنشده بوده است. درحقیقت این‌که‌وی درپی‌استدلالی دیگر برآمد نکته‌ای است پرمعنی، هرچند توفیق بیشتری نصیب او نشد. اگر ساکری بو برده بود که به این دلیل ساده به‌تناقض نرسیده است‌که اصلاً تناقضی در کار نیست، کشف هندسهٔ نااقلیدسی نزدیك به یك قرن زودترصورت می‌پذیرفت. با وجود این‌کار او براستی شایان توجه است. اگر از پایان ضعیف‌کار و چند نقص دیگر چشم پوشیده شود بقیهٔ کار ساکری را بصورت مردی جلوه‌گـر می‌سازد که مهارت هندسی بسیار و عمق منطقی عالی داشت. او بود که برای اولین‌بار نگاهی به سه هندسه افکند، هرچند آنها را نشناخت. او را بسیار خوب می‌توان با هموطنش کریستفر کلمبوس مقایسه کرد که عزم کشف راهی نو برای کشوری شناخته داشت اما به‌کشف جهانی نو دست یافت.

۲۳. لامبرت

اندکی بعد در آلمان یوهان هاینریخ لامبرت[1] (۱۰۹۷-۱۱۵۶/۱۷۱۸-۱۷۷۷) نیز به‌کشف‌هندسهٔ نااقلیدسی‌بسیارنزدیك شد. پژوهشهای وی‌دربارهٔنظریهٔموازیها بوسیلهٔ رساله‌ای از گیورگیوس زیمن‌کلوگل[2]، که در ۱۷۶۳ منتشر شد تقویت گردید. به‌نظر۔ می‌رسد که کلوگل اولین‌کسی بودکه در امکان اثبات اصل موضوع پنجم تردیدکرد.

---

1. Johann Heinrich Lambert

2. Georgius Simon Klügel

شباهت چشمگیری است بین اقلیدس مبرا از نقص ساکری و نظریهٔتوازی[1] لامبرت، که در ۱۷۶۶/۱۱۴۵ نوشته شده بود اما پس ازمرگ وی انتشار یافت. لامبرت به‌عنوان شکل اصلی، چهار ضلعیی اختیارکرده بود باسه زاویهٔ قائمه، یعنی نصف آن چهار ضلعی که ساکری بکار برده بود و دو ضلع مقابل متساوی داشت. لامبرت سه فرض عرضه کردکه در آنها زاویهٔ چهارم چهار ضلعی او بترتیب قائمه و منفرجه و حاده بود. در شرایط فرضهای دوم و سوم گزاره‌هایی نتیجه گرفت که با آنها توانست خیلی از ساکری جلوتر برود. در عمل ثابت کردکه مساحت هر مثلث متناسب است با تفاوت بین‌مجموع زاویه‌هایش و دو قائمه، یعنی با فزونی زوایا بر دو قائمه در حالت فرض دوم، و با کاستی در حالت فرض سوم. وی شباهت بین هندسهٔ مبتنی برحالت دوم و هندسهٔ کروی را، که در آن مساحت هر مثلث متناسب است با فزونی کروی آن، خاطر نشان ساخت؛ و آنقدر دلیر بودکه به این نتیجه متمایل گرددکه به نحوی مشابه هندسهٔ مبتنی بر فرض سوم می‌تواند برروی کره‌ای به‌شعاع موهومی تحقیق شود. حتی خاطرنشان ساخت که در حالت سوم یك واحد طول مطلق وجود دارد.

او نیز، مانند ساکری، توانست هندسهٔ فرض دوم را بی‌اعتبار اعلام کند، اما کار اوهم مبتنی برهمان فرضهای‌ضمنیی بودکه بی‌وجودآنها تناقض‌حاصل نمی‌شد. نتایج نهایی که برای هندسهٔ سوم گرفت نامعین و نارضایتبخش بودند. چنین می‌نمایدکه وی دریافته بود که دلایل علیه آن بیشتر پی‌آمد سنتها و احساسات بودند. به‌قول او این دلایل از نوعی بودندکه بایستی بیکباره از عرصهٔ هندسه، و نیز ازمیدان هر علمی، بیرون رانده شوند[2].

نمی‌توان ناگفته گذاشت که هرچند هندسه‌دانان این دوره باز هم درصدد اثبات اصل موضوع پنجم بودند مسأله را با فکری بازتر مورد بررسی قرارمی‌دادند. دگرگونی کند بود اما جای تردید نبودکه پیشداوریهای کهن جای می‌پرداختند. زمان تقریباً برای کشفهایی با دامنهٔ گسترده آماده شده بود.

۲۴. لژاندر

روا نیست در بحثی که دربارهٔ کوشش برای اثبات اصل موضوع پنجم می کنیم از

1. *Theorie der Parallellinien*

این رساله، و نیز رسالهٔ ساکری در کتاب Engel و Stäckel به نام *Die Theorie die Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (لایپزیك، ۱۸۹۵) چاپ شده است.

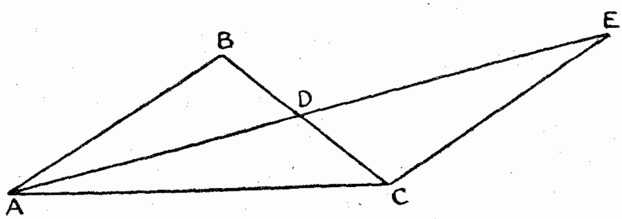
2. argumenta ab amore et individia ducta

اشاره‌ای به نوشته‌های گستردهٔ آدرین ماری لژاندر[1] (۱۸۳۳-۱۷۵۲/۱۲۱۲-۱۱۳۱) غافل ماندن. نه‌چنان است که وی کمك اصیل ارزشمندی به پیشرفت موضوع کرده باشد، زیرا که بیشتر نتایجی که بدست آورد عملاً بوسیلهٔ پیشینیان بدست آمده بود. اما سبك ساده وسرراست اثباتهای او برایش پیروان متعدد فراهم ساخت ودرست درزمانی‌توانست علاقه به این موضوعها را برانگیزد که هندسه‌دانان در آستانهٔ کشفهای بزرگ بودند. بعضی از استدلالهای او از فرط ظرافت ارزشی دایمی یافته‌اند.

پرداخت او به مسائل بسیار شبیه به ساکری بود، و نتایجی که بدست آورد تا حد زیادی شبیه به او. اما او برمجموع زاویه‌های مثلث تکیه‌کرد و سه‌فرض پیش آورد که در آنها مجموع زوایا، به نوبت، مساوی با دوقائمه یا بزرگتر از دو قائمه و یاکوچکتر از آن بود و امیدوار بود که بتواند دو حالت آخر را نفی کند.

چون ناآگاهانه خط راست را نامتناهی انگاشته بودتوانست هندسهٔ مبتنی برحالت دوم را بـا اثبات قضیهٔ زیـرین طرد کند: مجموع زوایای مثلث نمی‌تواند از دو قائمه بزرگتر باشد.

فرض شود که مجموع زاویه‌های مثلث ABC (شکل ۱۳) مساوی $۱۸۰^\circ+\alpha$ باشد و زاویهٔ CAB از هیچ یك از دو زاویهٔ دیگر بزرگتر نباشد.



شکل ۱۳

از A به D وسط BC وصل کـرده AD را تا E امتداد دهید چنان کـه DE با AD برابر باشد. از C به E وصل کنید. مثلثهای BDA و CDE همنهشت هستند. بآسانی نتیجه می‌شود کـه مجموع زاویه‌های مثلث AEC مساوی است بـا مجموع زاویه‌های ABC، یعنی با $۱۸۰^\circ+\alpha$، و یکی از زاویه‌های CAE و CEA مساوی است با، یاکوچکتراست از، نصف زاویهٔ CAB. بااجرای‌همین‌فرایند درمثلث AEC مثلث سومی بدست می‌آیدبا مجموع زوایا مساوی با $۱۸۰^\circ+\alpha$ و یکی از زوایایش مساوی با، یا کوچکتر از $\frac{۱}{۲^۲}\angle CAB$. اگر این ساختن را n بار تکرار کنیم مثلثی بدست می‌آید

1. Adrien Marie Legendre

که مجموع زاویه‌هایش مساوی $\alpha + ۱۸۰°$ است و یکی از زاویه‌هایش مساوی با، یا کوچکتر از، $\frac{۱}{۲^n}\angle CAB$ است.

به‌موجب اصل‌موضوع ارشمیدس می‌دانیم که هرقدر α کوچك باشد باز مضربی متناهی از α وجود دارد که از CAB بزرگتر است، یعنی $\angle CAB < k\alpha$

اگر n آنقدر بزرگ اختیار شود که $k < ۲^n$

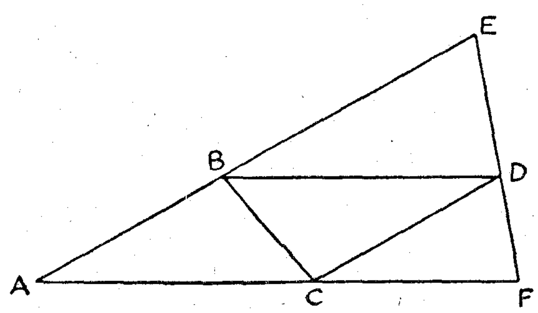
آنگاه
$$\frac{۱}{۲^n} < CAB < \alpha$$

و مجموع دوتا از زاویه‌های مثلثی که‌آخر سر بدست آمده است بزرگتر از دو قائمه‌است. اما این کار شدنی نیست.

در دم شباهت این استدلال با اثبات گزارهٔ یکم، ۱۶ اقلیدس بـه چشم می‌خورد. اینجا نیز توجه می‌شود به این که فرض نامتناهی بودن خط چقدر مهم است.

اما با همهٔ‌تلاشهایی که لژاندر کرد نتوانست برفرض سوم دست یابد. چنان‌که گاوس خاطرنشان ساخت فرض‌سوم صخره‌ای بود که همهٔ کشتیها را درهم می‌شکست. حالا می‌دانیم که این کوششها محکوم به بیهودگی بوده‌اند. با وجود این، بررسی یکی ازتلاشهای او برای اثبات آن که مجموع زاویه‌های مثلث نمی‌توانـد کمتر از دو قائمه باشد خالی از جاذبه نیست.

فرض شود کـه مجموع زاویه‌هـای مثلث ABC (شکل ۱۴) مساوی بـاشد با $۱۸۰° - \alpha$ و زاویهٔ BAC بزرگتر از هیچ یك از دو زاویهٔ دیگر نباشد.



شکل ۱۴

بر روی ضلع BC مثلثی مانند BCD همنهشت بـا ABC بسازید که زاویه‌های DBC و DCB آن بترتیب مساوی بـا زاویه‌های BCA و CBA باشند. آنگاه از D خط دلخواهی رسم کنید که امتدادهای AB و AC را در E و F قطع کند.

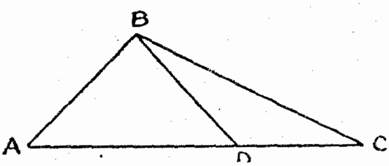
مجموع زاویه‌های مثلث BCD نیز ۱۸۰° − α است. چون همان‌طورکه در بالا ثابت شد مجموع زاویه‌های مثلث نمی‌تواند از دو قائمه بیشتر باشد مجموع زاویه‌های مثلث BDE، و نیز مثلث CDF، نمی‌تواند از ۱۸۰° بزرگتر باشد. در این صورت مجموع زاویه‌های هر چهار مثلث نمی‌تواند از ۷۲۰° − ۲α بزرگتر شود. نتیجه آن‌که مجموع سه زاویهٔ مثلث AEF نمی‌تواند از ۱۸۰ − ۲α بزرگتر باشد.

اگر این عمل n بار تکرار شود مجموع زوایای آخرین مثلثی‌که بوجود می‌آید نمی‌تواند از ۱۸۰° − ۲$^n\alpha$ بزرگتر باشد. اما چون مضربی متناهی از α می‌توان یافت که از دو قائمه تجاوزکند n را می‌توان چنان بزرگ اختیارکردکه مثلثی حاصل شود که مجموع زاویه‌هایش منفی باشد، و این گفته بی‌معنی است.

باطل‌بودن این اثبات دراین فرض‌نهفته است‌که بر هرنقطهٔ واقع در درون‌زاویه‌ای کوچکتر از دو سوم زاویهٔ قائمه می‌توان خط راستی کشید که هر دو ضلع زاویه را قطع کند. همچنان که قبلاً یادآور شده‌ایم این‌گفته هم‌ارز است با اصل موضوع پنجم.

اثباتهای این دنبالهٔ قضایای مهم به‌طور عمده کار لژاندر هستند.

هرگاه مجموع زاویه‌های مثلثی دو قائمه باشد این حکم برهمهٔ مثلثهایی نیز جاری است که از رسم خطوطی از رأس به نقاط قاعدهٔ آن مثلث حادث شوند.



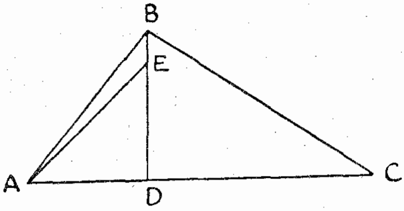
شکل ۱۵

هرگاه مجموع‌زاویه‌های مثلث ABC (شکل ۱۵) دو قائمه باشد برای مثلث ABD، که یکی از دو مثلثی است‌که ABC با رسم خطی از رأس B به نقطهٔ D واقع برقاعده به آن دومثلث قسمت می‌شود، نیز چنان است. زیرا که مجموع زاویه‌های ABD (چنان که در بالا با فرض مقدرنامتناهی بودن خط ثابت‌کردیم) نمی‌تواند از دو قائمه بزرگتر باشد، و اگر از دو قائمه‌کوچکتر باشد لازم می‌آید، که مجموع زاویه‌های مثلث BDC از دو قائمه زیادتر شود.

هرگاه مثلثی‌وجود داشته باشدکه مجموع زاویه‌هایش مساوی با دوقائمه باشدآنگاه مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی می‌توان ساخت که مجموع زاویه‌هایش دو قائمه باشد و ساقش از هر پاره خط مفروض درازتر باشد.

گیریم مجموع زاویه‌های مثلث ABC (شکل ۱۶) دو قائمه باشد. اگر ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین نباشد می‌توان چنین مثلثی ساخت که مجموع زاویه‌هایش دو قائمه باشد، بدین نحو که ارتفاع BD را رسم کرد و هرگاه هیچ یك از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که بوجود می‌آیند متساوی‌الساقین نباشند در یکی از آنها بر روی ضلع

بزرگتر به اندازهٔ ضلع کوچکتر جدا نمود، مثلاً اگر BD بزرگتر باشد DE را مساوی AD جدا کرده و از A به E وصل نمود.

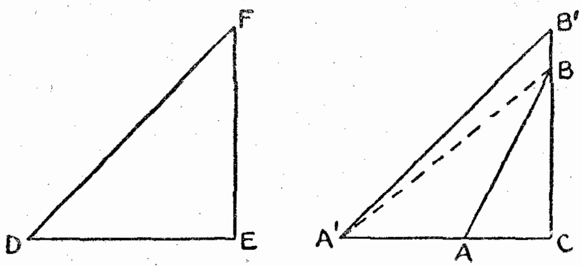


شکل ۱۶

هرگاه دو چنین مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه را که همنهشت باشند چنان قرار دهیم که وترهایشان برهم منطبق شوند یك چهار ضلعی تشکیل می‌شود که همهٔ زاویه‌هایش قائمه‌اند و اضلاعش با هم برابرند. با چهار تا از این چهار ضلعی‌های همنهشت می‌توان چهارضلعی دیگری از همان نوع ساخت که اضلاعش دو برابر اضلاع اولی باشند. اگر این طرز ساختن به تعداد کافی مرتبه تکرار شود سرانجام ممکن است یك چهار ضلعی از همان نوع حاصل شود که اضلاعش از هر پاره خط مفروضی بزرگتر باشد. قطری از این چهار ضلعی آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه از نوعی که در قضیه توصیف شده است تقسیم می‌کنند.

هرگاه یك مثلث تنها وجود داشته باشد که مجموع زاویه‌هایش دو قائمه باشد آنگاه مجموع زوایای هر مثلثی مساوی دو قائمه خواهد بود.

اگر مثلثی داده شده باشد که مجموع زاویه‌هایش دو قائمه است، باید ثابت کرد که مجموع زوایای هر مثلث دیگر ABC دو قائمه است. می‌توان فرض کرد که مثلث ABC (شکل ۱۷) قائم‌الزاویه است، زیرا که هر مثلث را می‌توان به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کرد. بنابر قضیهٔ پیشین می‌توان مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین DEF را ساخت که مجموع سه زاویه‌اش مساوی دو قائمه، و ساقهایش بزرگتر از اضلاع مثلث ABC باشند. CA و CB را تا A' و B' امتداد می‌دهیم بطوری که $CA' = CB' = ED = EF$، و A' را به B و B' وصل می‌کنیم. چون مثلثهای $A'CB'$ و DEF همنهشت هستند مجموع زاویه‌های اولی دو قائمه است و همین حکم بر $A'BC$ و سرانجام بر ABC جاری است.



شکل ۱۷

لژاندر این قضیه را به عنوان نتیجهٔ مستقیم این نتایج بدست آورد:

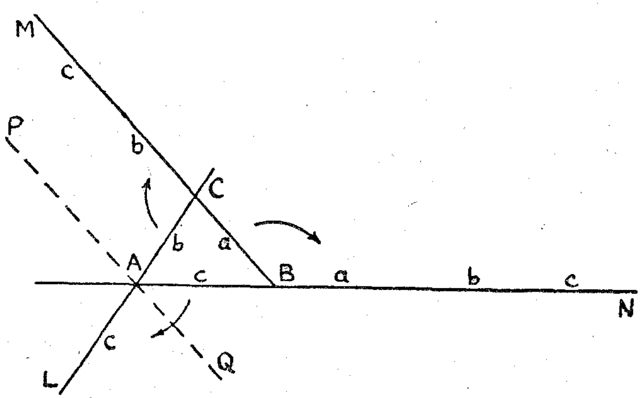
اگر مثلثی وجود داشته باشد که مجموع زاویه‌هایش کمتر از دو قائمه باشد آنگاه مجموع زاویه‌های هر مثلث کمتر از دو قائمه است.

۲۵. برخی مغالطه‌ها در تلاش برای اثبات اصل موضوع

در، باصطلاح، اثباتهای اصل موضوع پنجم کـه از نظر گذشتند برخی بستگی داشتند به کاربرد آگاهانه یا نـاآگاهانهٔ جانشینی که در ذات خود هم‌ارز اصل یاد شده بود، و در نتیجه چنگی به دل نمی‌زدند. برخی دیگر از روش برهان خلف استفاده کردند. اما در هر حالت بـه نتایجی ابهام‌آمیز و نامجاب‌کننده رسیدند. اما انـواع دیگری هم اثبات هست که در راه‌آنها تلاش شده است. بعضی ازآنها بسیار زیرکانه با ظاهری کاملاً پذیرفتنی و توأم با مغالطه‌هایی هستند که انگشت گذاشتن برآنها بآسانی میسر نیست. ما این فصل را با بررسی دو اثبات از این‌گونه به پایان می‌بریم.

۲۶. اثبات با دوران

این استدلال ظاهری که منتسب به برنهارد فریدریخ تیباوت[1] است از این جهت شایان ذکر است کـه گاه به‌گاه در کتابهای مقدماتی آمده، و بدین ترتیب برآن صحه گذاشته شده است. جوهر استدلال بدین‌گونه است:



شکل ۱۸

درمثلث ABC (شکل ۱۸) ضلع AB را گرد A و در جهت ساعت آنقدر دوران دهید که بر امتداد CA که تا L امتداد داده شده است واقع شود؛ بعد CL را حول C

1. Bernhard Friedrich Thibaut, *Grundris der reinen Mathematik* (Göttingen, 1809).

در جهت ساعت آنقدر دوران دهید تا بر امتداد BC که تا M امتداد یافته واقع گردد؛ سرانجام BM را گرد B در همان جهت بگردانید تا برامتداد AB در N قرار گیرد. بنظر می‌رسد که AB دوران کاملی به‌اندازهٔ چهار قائمه متحمل شده است. اما سه‌زاویهٔ دوران عبارتند از سه زاویهٔ خارجی مثلث، و چون مجموع آنها مساوی چهار قائمه است مجموع زاویه‌های مثلث باید مساوی دو قائمه باشد.

این استدلال نمونه‌ای است از آنهایی که بستگی به تصور امتداد دارند. خوانندهٔ محتاط توجه خواهد کرد که دورانها حول نقطه‌های مختلف واقع بر روی خطهای دوران‌کننده وقوع می‌یابند بطوری که نه تنها دوران، بلکه انتقال نیز، دخیل است. در واقع دیده می‌شود که پاره خط AB پس از دورانهای موصوف سرانجام در امتداد AB به فاصله‌ای مساوی محیط مثلث انتقال یافته است. بدین ترتیب در این اثبات فرض شده است که انتقالها و دورانها از یکدیگر مستقل هستند، و که می‌توان از انتقالها چشم پوشید. اما این مطلب فقط در هندسهٔ اقلیدسی درست است و فرض آن در حکم پذیرفتن اصل موضوع پنجم است. درست همین استدلال را می‌توان برای مثلثی کروی بکار برد و به همین نتیجه رسید، هر چند مجموعه زاویه‌های چنین مثلثی همیشه بزرگتر است از دو قائمه.

اگر هم کوشش شود که دورانها گرد یك نقطهٔ تنها، مثلاً A، انجام شوند اثبات رضایت‌بخش‌تر نخواهد شد. زیرا که اگر PQ را بر A چنان بگذرانیم که زاویهٔ PAL مساوی زاویهٔ MCA شود نباید نتیجه گرفت که زاویهٔ PAB مساوی CBN خواهد شد. این تصور، چنان‌که گاوس اشاره کرده است[1]، هم‌ارز است با این فرض که اگر دو خط راست، دو خط راست مفروض را قطع کنند و زوایای متساوی بایکی از آنها بسازند باید زاویه‌های متناظر متساوی با دیگری تشکیل دهند. اما باید توجه کرد که این اساساً همان حکمی است که باید ثابت کرد. زیرا که اگر دوخط‌راست زاویه‌های متناظر متساوی با خط سومی بسازند بنابر یکم، ۲۸ اقلیدس متوازیند. رسیدن به این نتیجه که با هر خط دیگری که آنها را قطع کند زاویه‌های متساوی تشکیل می‌دهند در حکم پذیرفتن فرض یکم، ۲۹ است.

۲۷. مقایسهٔ پهنه‌های نامتناهی

دلیل دیگری که گاه به‌گاه دل از نامحتاطان ربوده است منتسب به‌لوییِ برتراند[2]

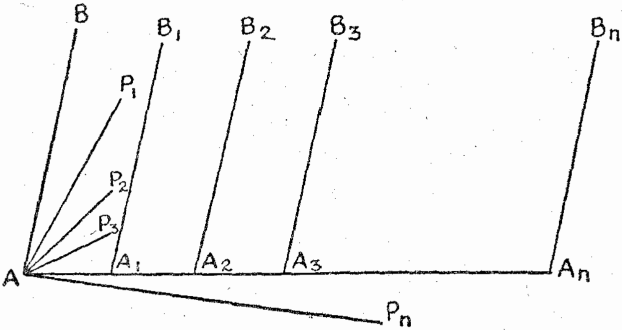
۱. ← نامه‌های او به شوماخر و انگل و اشتیکل، همان اثر ص. ۲۲۷-۲۳۰.

۲. گسترش نوین قسمت مقدماتی ریاضیات، جلد دوم، ص ۱۹ (ژنو، ۱۷۷۸).

Développement nouveou le la partie élémentaire des mathématiques.

(۱۱۱۰-۱۱۹۱/۱۷۳۱-۱۸۱۲) ریاضیدان سویسی است. وی برآن شد که با استدلالی که چکیدهٔ آن چنین است، اصل موضوع پنجم را مستقیماً ثابت کند:

دو خط AP_1 و A_1B_1 (شکل ۱۹)، که بوسیلهٔ مورب AA_1 چنان قطع شده‌اند که مجموع زاویه‌های P_1AA_1 و AA_2B_1 کمتر از دو قائمه است، مفروضند. باید ثابت کرد که هرگاه AP_1 و A_1B_1 به‌اندازهٔ کافی امتداد داده شوند تقاطع خواهند کرد.



شکل ۱۹

AB را چنان رسم کنید که زاویهٔ BAA_1 مساوی شود با زاویهٔ $B_1A_1A_2$ که در آن A_2 نقطه‌ای است بر امتداد AA_1. آنگاه AP_1 در درون زاویهٔ BAA_1 واقع می‌شود، زیرا که زاویهٔ P_1AA_1 کوچکتر است از $B_1A_1A_2$. AP_2 و AP_3 و... و AP_n را چنان رسم کنید که زاویه‌های P_1AP_2 و P_2AP_3 و... و $P_{n-1}AP_n$ همه برابر باشند با زاویهٔ BAP_1. چون مضرب صحیحی از زاویهٔ BAP_1 می‌توان یافت که از زاویهٔ BAA_1 بزرگتر باشد، n را آنقدر بزرگ می‌توان اختیار کرد که AP_n زیر AA_1 واقع شود و زاویهٔ BAP_n بزرگتر از زاویهٔ BAA_1 باشد. چون قطعات نامتناهی BAP_1 و P_1AP_2 و... و $P_{n-1}AP_n$ را می‌توان برهم منطبق کرد آن قطعات دارای مساحتهای متساویند و هر یك مساحتی دارد برابر با $\frac{1}{n}$ پهنهٔ نامتناهی BAP_n.

حالا برامتداد AA_1 پاره‌خطهای A_1A_2 و A_2A_3 و... و $A_{n-1}A_n$ رامساوی AA_1 جدا کنید و A_2B_2 و A_3B_3 و... و A_nB_n را چنان بسازید که با AA_n همان زاویهٔ بین AA_1 و آن خط را تشکیل دهند. آنگاه باریکه‌های نامتناهی BAA_1B_1 و $B_1A_1A_2B_2$ و... و $B_{n-1}A_{n-1}A_nB_n$ را می‌توان برروی هم قرار داد و پهنه‌هایی متساوی بدست آورد که هر یك برابر باشد با $\frac{1}{n}$ پهنهٔ نامتناهی BAA_nB_n. چون قطعهٔ نامتناهی BAP_n باریکهٔ نامتناهی BAA_nB_n را در بردارد نتیجه می‌شود که پهنهٔ قطعهٔ

BAP_1 بزرگتر است ازباریکهٔ BAA_1B_1 و در نتیجه اگر AP_1 و A_1B_1 به اندازهٔ کافی امتداد داده شوند تقاطع خواهند کرد.

مغالطه دراینجا است که باپهنه‌های نامتناهی چنان عمل‌شده است که گویی متناهی هستند. نخست این کـه از مفهوم همنهشتی پهنه‌های نامتناهی با شتاب عبور شده و تعریفی برای آن داده نشده است. دیگر آن که باید متوجه بودکه دلیلهایی که برای پهنه‌هـای متناهی معتبر هستند لزوماً برای پهنه‌های نـامتناهی اعتبار نخواهند داشت. برای تأکید برضعف استدلال‌می‌توان، ازهمان دیدگاه، پهنه‌های قطعات نامتناهی BAA_1 و $B_1A_1A_n$ را باهم سنجید ـ چون این قطعات را می‌توان برهم منطبق‌کرد شاید بتوان نتیجه گرفت‌که پهنه‌های آنها یکی است. از سوی دیگر بنظر می‌رسدکه اولی از دومی بزرگتر باشد و اختلافشان به اندازهٔ باریکهٔ نامتناهی BAA_1B_1 باشد. واقعیت آن‌که مقایسهٔ هر دو مقدار نامتناهی را بـاید تابع فرایند یافتن حد کسری کرد کـه صورت و مخرجش هر دو نامتناهی می‌شوند.

۳

کشف هندسهٔ نااقلیدسی

«از هیچ، جهان نوشگفت‌انگیزی آفریده‌ام»
بولیایی[1]

۲۸. مدخل

سدهٔ نوزدهم آغاز شد و معمای سرکش اصل موضوع پنجم همچنان حل نشده مانده بود. اما نباید پنداشت که تلاشهایی‌که درمدت بیست قرن برای اثبات آن اصل موضوع بجا آمدند یکسره بیفایده بودند. این تلاشها آرام آرام اما با گامهای مطمئن پژوهشهای هندسه‌دانان را بـه نقطه‌ای رهبری کردند که دیگر کشف هندسهٔ نااقلیدسی نمی‌توانست مدتی دراز به تأخیر افتد. چون به پشت سر بنگریم نخست متعجب خواهیم شدکه این آمادگی چرا چنین به درازا کشید، و بعد حیرت‌زده که چنین کشف مهمی چه زود رخ نمود!

در زمانی که اندیشه‌های تازه تبلور می‌یافتند فلسفهٔ کانت (۱۱۰۳ - ۱۱۸۳/ ۱۷۲۴ - ۱۸۰۴) بر وضع مسلط بود و این فلسفه فضا را نه تجربی بلکه شهودی می‌دانست. از این دیدگاه به فضا چون چیزی نگریسته می‌شدکه در ذهن وجود دارد نه

---

۱. Johann Bolyai. تلفظ این اسم در دایرةالمعارف *Brokhaus* بویئی، و در Webster بولیایی آمده است. در این‌کتاب تلفظ دوم مراعات می‌شود.

چون مفهومی که از تجربه‌های خارجی نتیجه شود. در آن روزگاران نه‌تنها تیزهوشی بلکه دلیری لازم بود تا بتوان شناخت که چون هندسه به فضای فیزیکی اطلاق گردد علمی تجربی می‌شود، و لازم است کـه اصلهای موضوع آن و نتیجه‌های آنها فقط در صورتی پذیرفته شوندکه مناسب، و به‌نحوی معقول با معلومهای تجربی سازگار، باشند.

اما دیدگاه رفته رفته تغییر کرد. سرانجام کشف هندسهٔ نااقلیدسی بساط مفهوم‌فضای کانتی را یکسره درهم پیچید و سرانجام نه‌تنها فرق میان مفهوم و تجربه‌را بلکه، مهمتر از آن، رابطهٔ متقابل میان آنها را آشکار ساخت.

پس جای تعجب نیست که چون زمان مناسب فرا رسید هندسهٔ اقلیدسی را نه یك تن، بلکه تنی‌چند در نقاط مختلف جهان بی‌ارتباط با یکدیگر کشف کردند. چنین اتفاقی در تاریخ ریاضیات بیش از یك‌بار روی داده است و بی‌شك بـازهم روی خواهد داد. پدر یوهان بولیایی، که‌یکی از بنیادگذاران هندسهٔ نااقلیدسی‌بود، چنین پیشامدی را پیش‌بینی می‌کرد و در نامه‌ای‌که به پسر نوشت تا وی را به تسریع در اعلام کشفی‌که‌کرده بود تحریض کند چنین نوشت[1]: «به نظر من عاقلانه آن است‌که اگر تو به‌حل مسأله دست یافته‌ای در انتشار آن، به دو دلیل، شتاب کنی: نخست آن‌که اندیشه‌هایت ممکن است بآسانی به دیگری القا شود و او به انتشار آن دست بزند؛ دوم بدین سبب که راست بنظر می‌رسدکه بسیار چیزها دریك زمان در چندجا با هم کشف شده‌اند، درست همانطور که در بهاران بنفشه همه‌جا می‌دمد».

و چنین اتفاق افتاد که تقریباً در یك زمان و مستقل از یکدیگر هندسه‌هایی که از جنبهٔ منطقی سازگار بودنـد و در آنها اصل موضوع پنجم انکار شده بود بوسیلهٔ گاوس در آلمان، و بولیایی در مجارستان و لباچفسکی در روسیه کشف گردیدند.

۲۹. گاوس

مقارن تغییر قرن، و درآن سالهایی‌که درتکامل هندسه بحرانی توصیف می‌شوند، چهرهٔ مسلط برجهان ریاضی ازآن کارل فریدریش گاوس (۱۱۵۶-۱۲۳۴/۱۷۷۷-۱۸۵۵) بود. طبیعی است که سهم او درگسترش اندیشه‌هایی کـه به‌کشف دستگاههای نوینی از هندسه رهنمون گردیدند کوچك نبوده است. خیلی‌کم از نتایج چندین سال تفکر و تتبع اودربارهٔ مسائل وابسته به‌اصل موضوع پنجم در زمان حیات او انتشار یافته یا به‌اطلاع همگان رسیده است. چندنامه‌که به‌کسان دیگری‌که به‌آن مسائل دلبستگی داشتند نوشته

1. Paul Stäckel, *Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen*, Vol. 1, p. 86 (Leipzig and Berlin, 1913).

بود، و دو مقاله انتشار یافته دربارهٔ برخی مطالب مربوط به‌خطوط متوازی، ومعدودی یادداشت که درمیان کاغذهای او کشف شده‌اند، قرینه‌ای مختصر اما کافی براین مطلب فراهم آورده‌اند که وی احتمالاً نخستین کسی بوده که امکان هندسه‌ای غیر از هندسهٔ اقلیدسی را که ازجنبهٔ منطقی محکم ومعتبر باشد بوضوح دریافته است. او بود که‌هندسهٔ جدید را نااقلیدسی نامید. نامه‌ها و مقاله‌هایی که به آنها اشاره شد[1] پیشرفتی را که‌وی در بررسی موازیها کرد تقریباً بوضوح طرح می‌کنند ونشان می‌دهند که شناخت هندسهٔ نوین بناگهان دست نداد بلکه بعد از چند سال تفکر حاصل شد.

واضح بنظر می‌رسد که گاوس، که همان راه ساکری و لامبرت را که با آثارشان آشنایی داشت می‌پیمود، حتی تا دههٔ اول قرن نوزدهم می‌کوشید که اصل موضوع پنجم را از راه برهان خلف اثبات نماید، اما کاملاً به‌عمق سرشت موانعی که بر سر راه‌بودند وقوف داشت. در دههٔ دوم قرن بود که شروع به بیان فکر هندسه‌ای نوین، و به تنظیم قضیه‌های مقدماتی، و به دورکردن شکهای خود پرداخت. هیچ چیز بهتر از نامه‌ای که وی در ۱۷ آبان ۸/۱۲۰۳ نوامبر ۱۸۲۴ درگتینگن به ف. آ. تاورینوس نوشته است گویای ماهیت کشفهای او، و اهمیتی که برای‌آنها قائل بود، و وضع او نسبت به‌مفهوم جاری فضا و بیم او از این که مقصودش بد فهمیده شود، نمی‌تواند بود. اینك ترجمهٔ این سند مهم[2]: «نامهٔ مهرآمیز ۸ آبان /۳۰ اکتبر و خلاصهٔ منضم به‌آن را با کمال مسرت خواندم؛ بیشتر به این دلیل که تاکنون به این نکته خوگرفته بودم که در میان اکثریت کسانی که باز به پژوهش دربارهٔ باصطلاح اصل موضوع پنجم می‌پردازند اثری ناچیز از بینش راستین هندسی ببینم.

«درمورد کوششی که شما کرده‌اید چیز (زیادی) نمی‌توانم گفت جز این‌که ناقص است. حقیقت آن که استدلال شما برای اثبات آن که مجموع سه زاویهٔ مثلث مسطح نمی‌تواند از دو قائمه بیشتر باشد تا حدی فاقد قدرت هندسی است. اما این مطلب به خودی خود بآسانی درمان شدنی است وشکی نیست که عدم امکان را می‌توان با دقت اثبات کرد. اما وضع در جزء دوم، یعنی مجموع زوایا نمی‌تواند از 180° کمتر باشد، بکلی متفاوت است. این‌نقطهٔ بحرانی است و صخره‌ای است که همهٔ کشتیها به‌آن برخورد می‌کنند. تصور می‌کنم که این‌مسأله شما را مدتی دراز مشغول نداشته است. من سی‌سال دربارهٔ آن اندیشیده‌ام وگمان نمی‌کنم هیچ‌کس به اندازهٔ من دربارهٔ این جزء دوم فکر

---

۱. انگل و اشتیکل برخی از این مدارك را در کتاب منبع خود به نام نظریهٔ موازیها از اقلیدس تا گاوس (لایپزیك، ۱۸۹۵) گرد آورده‌اند.

۲. برای نسخهٔ عکسی این نامه ← انگل و اشتیکل، همان اثر.

کرده باشد، هرچند هیچ چیز دربارهٔ آن منتشر نساخته‌ام. فرض این‌که مجموع سه‌زاویه کمتر است از دو قائمه به هندسهٔ عجیبی منتهی می‌شود که کاملاً با هندسهٔ ما (اقلیدسی) فرق دارد، اما کاملاً سازگار است و من آن را بسط داده‌ام و کاملاً راضی هستم و می‌توانم در آن هر مسأله‌ای را حل کنم، جز مسألهٔ تعیین ثابتی که نتواند از پیش معین‌شده باشد. هرچه این مقدار ثابت بزرگتر گرفته شود به هندسهٔ اقلیدسی نزدیکتر می‌شویم، و وقتی که آن را بی‌نهایت بزرگ اختیار کنیم دو هندسه برهم منطبق می‌شوند. قضیه‌های این هندسه باطلنما بنظر می‌رسند و به چشم مردم ناوارد بی‌معنی می‌نمایند؛ اما تفکری آرام و استوار آشکار می‌سازد که در آنها هیچ چیز ناممکن نیست. مثلاً زاویه‌های هر مثلث هر قدر بخواهیم کوچك می‌شوند مشروط به آن که ضلعها به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار گردند؛ اما هرقدر هم که اضلاع بزرگ شوند مساحت مثلث از حد معینی فراتر نتواند رفت. همهٔ کوششهای من برای کشف تضادی یا ناسازگاریی در این هندسهٔ نااقلیدسی بی‌نتیجه مانده‌اند، و تنها چیزی که خلاف مفهومهای ما است این است که اگر این‌هندسه راست باشد باید در فضا کمیتی خطی وجود داشته باشد که به خودی خود معین (اما برای ما ناشناخته) باشد. اما بنظر می‌رسد که با وجود کلمه ـ عقل‌هیچ مگوی حکیمان مابعدـ طبیعی ما دربارهٔ ماهیت راستین فضا کمتر ازآن آگاهیم، یا هیچ آگاهی نداریم، که‌آنچه را در نظر ما غیر طبیعی نماید مطلقاً ناممکن انگاریم. اگر این هندسهٔ نااقلیدسی درست باشد و اگر ممکن شود که آن مقدار ثابت با این کمیتهایی‌که ما دراندازه‌گیریهای زمینی و آسمانی خود به‌آنها برمی‌خوریم قابل سنجیدن باشد آن را می‌توان بعد معین کرد. در نتیجه گاهی بشوخی آرزو کرده‌ام که هندسهٔ اقلیدسی راست نمی‌بود، زیرا که در آن صورت از پیش معیاری برای اندازه‌گیری می‌داشتیم.

«از آن نمی‌ترسم که هرکس که نشان داده است فکرریاضی باروری دارد آنچه را که در بالا گفتم بد بفهمد، بلکه آن را در هرحال مانند یك القای خصوصی در نظر می‌گیرم که به‌هیچ روی به‌اطلاع عامه نرسد و برای عموم منتشر نشود. شاید اگر در آینده فراغی بیشتر از آنچه اکنون دارم پیدا کردم تحقیقات خود را منتشر سازم».

قصور گاوس درمنتشر ساختن‌نتایج کارش بناچار موجب شد که سهمی از افتخاری که تمامش ممکن بود از آن او باشد نصیب دیگران شود. چنان که خواهیم دید کسانی که، شاید اندکی دیرتر، به همان نتایج رسیدند اندیشه‌های خود را برفور و دلیرانه منتشر ساختند. همهٔ افتخار را نصیب اینان‌کردن روا است، اما نمی‌توان در اکراهی که گاوس در منتشر ساختن کشفهای خود نشان می‌داد با او همدردی نکرد. درآن روزگاران ریاضیدانان عالیقدر تحت‌تأثیر فلسفهٔ کانت به این نتیجه رسیده بودند که راز اصل‌موضوع پنجم را هرگز نمی‌توان گشود. بازهم کسانی بودند که به پژوهش ادامه می‌دادند، امااینان

وسواسی تلقی می‌شدند. احتمال می‌رود که آنچه گاوس از آن بیم داشت تمسخر هندسه‌دانان پرمدعا و کوتاه فکر بود. این را هم به‌طور قطع نمی‌توان گفت که وی از کسانی که نتایج کارهای خود را علنی کردند کمترشجاعت داشت. وقتی که آنان با وی مقایسه شوند افرادی ناشناخته بودند و نه‌شهرتی داشتند که به حفظش بکوشند و نه چیزی داشتند که از دست بدهند. از سوی دیگر گاوس خیلی بالا رفته بود و اگر سقوط می‌کرد از فاصلهٔ زیادی فرو می‌افتاد.

گاوس، در نامه‌ای[1] که در ۲۷ اردیبهشت ۱۲۱۰/۱۷ مه ۱۸۳۱ دربارهٔ مسألهٔ موازیها خطاب به شوماخر نوشته شده است می‌گوید: «در هفته‌های اخیر شروع به نوشتن اندیشه‌های خود کرده‌ام، که قسمتی از آن تاکنون به روی کاغذ نیامده است، وسه یا چهاربار ازنو دربارهٔآن اندیشیده‌ام. اما می‌خواهم که با خود من ازمیان‌نروند.»

در نتیجه در میان کاغذهای او شرح مختصری دربارهٔ نظریهٔ مقدماتی موازیها برای هندسهٔ نوین‌باید یافته شود. پیشترگفته‌ایم که ساده‌ترین جانشین برای اصل‌موضوع پنجم چیزی است که در اصطلاح اصل موضوع پلی‌فیرخوانده می‌شود. گاوس هم، مانند بولیایی‌ولباچفسکی، باطرد اصل موضوع پنجم‌این فرض را پذیرفت که از یك نقطه بیشتر از یك خط موازی (به معنی اقلیدسی) با خط مفروضی می‌توان کشید.

نیازی نیست که دربارهٔ آنچه او با شتاب نوشت به تفصیل پرداخت؛ در اصل شبیه است به نظریه‌ای مقدماتی که در صفحات اول فصل آینده عرضه می‌شود. او در نوشتن اندیشه‌های خود نیز خیلی پیش نرفت و یادداشتهای او ناگهان متوقف گردید؛ زیرا که در۲۵ بهمن ۱۲۱۰/۱۴ فوریه ۱۸۳۲ نسخه‌ای از ذیل[2] معروف یوهان‌بولیایی را دریافت کرد.

۳۰. بولیایی

زمانی که گاوس درگتینگن درس می‌خواند در زمرهٔ دوستانش جوانی مجار بود به نام ولفگانگ بولیایی[3] (بولیایی فورس ۱۱۵۴-۱۲۳۵/۱۷۷۵-۱۸۵۶) که از ۱۷۹۶ تا ۱۷۹۹ دانشجوی‌آن دانشگاه بود. تقریباً مسلم است که آن دو غالباً درمسائل مربوط به نظریهٔ موازیها به بحث می پرداخته‌اند. پس از ترك دانشگاه به ارتباط با نامه‌نگاری ادامه دادند. نامه‌ای[4] که گاوس در ۱۷۹۹ به بولیایی نوشته است نشان می‌دهد که

۱. ← انگل و اشتیکل، همان اثر، ص. ۲۳۰.

2. Wolfgang Bolyai (Bolyai Forkas)   3. Johann Bolyai, *Appendix*

۴. انگل و اشتیکل، همان اثر، ص. ۱۹.

در آن زمان هر دو به تلاش برای اثبات اصل موضوع پنجم می‌کوشیده‌اند. در ۱۸۰۴ بولیایی که متقاعد شده بود که به این کار دست یافته است اندیشه‌های خود را در رسالهٔ کوچکی به نام نظریهٔ موازیها[۱] عرضه کرد و با نامه‌ای برای گاوس فرستاد. اما استدلال نادرست بود و گاوس در جواب خطا را خاطر نشان ساخت. بولیایی باکی به‌خود راه نداد واز همان راه به ادامهٔ استدلال پرداخت وچهار سال بعد مقالهٔ مکملی[۲] برای گاوس فرستاد. ظاهراً وی از این که گاوس جوابش را نداد دلسرد شد و دقت خود را معطوف کارهای دیگر کرد. با وجود این در دو دههٔ بعد وی با وجود علائق متعدد مانند استاد، شاعر، نمایشنامه نویس، موسیقیدان، مخترع و جنگلبان به جمع کردن یادداشتهای خود دربارهٔ ریاضیات مقدماتی پرداخت و سرانجام آنها را در ۱۸۳۲-۱۸۳۳ دردوجلد منتشر ساخت که ما آن را به‌اختصار تنتامن[۳] می‌نامیم. ولفگانگ بولیایی مردی با استعداد و لایق بود اما ادعای او به‌شهرت بی‌تردید برپایهٔ این واقعیت بودکه وی پدر یوهان‌بود.

زیرا که در ۲۴ آذر ۱۵/۱۱۸۱ دسامبر ۱۸۰۲ یوهان بولیایی (بولیایی یانوش ۱۸۰۲-۱۸۶۰) چشم به‌جهان گشود. ولفگانگ در ۱۸۰۳ به‌گاوس نوشت: «خدا را شکرکه او بچه‌ای است تندرست و زیبا، با وضعی خوش و مو و ابروی سیاه و چشمان آبی و فروزان‌که گاهی چون جواهر می‌درخشند.» و درآن سالهایی‌که به انتشار تنتامن انجامید یوهان مردی شده بود.

پدرش تعلیمات مقدماتی ریاضی را به او داد، پس غیر طبیعی بنظر نمی‌رسدکه وی به نظریهٔ موازیها دل بسته باشد. و نیز مایهٔ تعجب نیست که وقتی وی در ۱۸۱۷ دانشجوی مدرسهٔ عالی مهندسان در وین شد اندیشهٔ بسیار را به مسألهٔ اثبات اصل موضوع پنجم اختصاص داد حال آن‌که پدرش، که به‌یاد کوششهای ناموفق خود بود، به او توصیه می‌کردکه این معمای قدیمی چیزی است که باید بالمره کنارگذاشته شود. اما در حدود ۱۸۲۰ کوششهای او برای آن که اصل موضوع را با قرار دادن فرض مخالفی به‌جای آن اثبات کند کم‌کم به بخشیدن نتیجه نزدیك شد، اما نتایجی باماهیت

---

۱. اصل‌کتاب به لاتین بود. برای ترجمهٔ آلمانی ← ولفگانگ و یوهان بولیایی نوشتهٔ اشتیکل جلد دوم، ص ۵ Stäckel, Wolfgang und Johann Bolyai

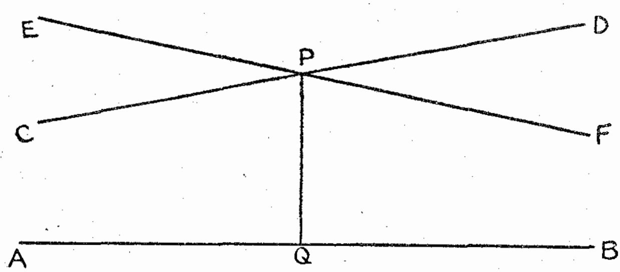
۲. اشتیکل، همان اثر، جلد دوم، ص. ۱۶.

۳. عنوان کتاب این است:

Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplice. ⟶ Stäckel. *loc. cit*, Vol II, p. 25.

دیگر. دقت او بتدریج متوجه امکان تنظیم هندسه‌ای کلی، یك علم مطلق فضا[1]، گردید که هندسهٔ اقلیدسی حالت خاصی از آن است.

بولیایی که با نفی اصل پنجم برای اثبات آن می‌کوشید، آن فرض را به صورتی که پیشتر با عنوان اصل موضوع پلی‌فیر معین کرده‌ایم در نظر گرفت، این اصل چنین بیان می‌شود که از یك نقطهٔ معین یك، و فقط یك، خط می‌توان موازی با خط معینی رسم کرد. پس نفی این اصل موضوع ایجاب می‌کند که از یك نقطه یا هیچ خط نتوان به موازات خط مفروضی رسم کرد، یا بیشتر از یك خط بتوان موازی با آن کشید. اما بنابر حکمهای یکم، ۲۷ و ۲۸ اقلیدس، با شرط نامتناهی پذیرفتن خط راست، شق اول ازدو ایجاب بالا را باید کنار گذاشت. بعلاوه هرگاه بتوان از یك نقطه دست کم دو خط موازی خط مفروضی رسم کرد آنگاه باید تعدادی نامتناهی خط موازی، به معنی اقلیدسی، بتوان رسم نمود. مثلاً اگر دو خط AB و CD (شکل ۲۰) که بر P گذشته‌اند AB را قطع



شکل ۲۰

نکنند این حکم بر همهٔ خطهایی که بر P بگذرند و در زاویه‌های متقابل به رأس EPC و DPF واقع شوند جدی خواهد بود. در اساس، بولیایی مانند گاوس و لباچفسکی این‌طور استدلال کرد که هرگاه از عمود PQ که بر AB فرود آمده باشد شروع کنیم و آن را حول P در هر یك از دو طرف دوران دهیم خط تا مدتی به قطع کردن AB ادامه می‌دهد و بعد، از قطع کردن آن باز می‌ماند. وی به این طریق وجود دو خط را اَصل موضوع قرارداد که بر P می‌گذرند و در دو طرف PQ رسم می‌شوند و در هر طرف خطهایی را که با AB تقاطع می‌کنند از آنهایی که AB را قطع نمی‌کنند جدا می‌سازند. از آنجاکه برای دوران PQ، در هر یك از دو طرف، آخرین خط قاطع وجود ندارد دو خطی که در اصل موضوع مورد بحث هستند باید اولین خطهای ناقاطع باشند. توضیح داده خواهد که این دو خط موازی AB خواصی بکلی متفاوت باخطهای دیگری دارند

1. Absolute Science of Space

که بر P می‌گذرند و AB را قطع نمی‌کنند.

نتیجه‌هایی که‌پی‌آمداین فرضها بودند بولیایی جوان را سخت متحیر ساختند. چون این هندسه بسط یافت و تضادی رخ ننمود برحیرت او افزوده شد و وی کم کم اهمیت کاری را که مشغول انجام آن بود احساس کرد. آنچه ظاهراً بیشتر از همه بر وی اثر گذاشت گزاره‌هایی بودند که مطلقاً به هیچ اصل موضوع توازیی بستگی نداشتند اما، صرف نظر ازهر فرضی‌که درمورد خطوط متوازی می‌شد، در همهٔ هندسه‌ها مشترك‌بودند. وی در این گزاره‌ها به‌چشم واقعیتهای مطلق فضا نگریست کـه اساس هندسهٔ مطلق را تشکیل می‌دادند.

آنچه مسلم است بولیایی بیشتر از بیست و یك سال نداشت که این اندیشه‌ها در ۱۸۲۳شروع کردند، البته به‌صورتی‌مبهم، به‌شکل گرفتن. مستخرج نامه‌ای[1] که درپایین می‌آید و او در ۱۲ آبان ۱۲۰۲/۳ نوامبر ۱۸۲۳ به پدرش نوشته بود نشان می‌دهدکه وی تا چه حد درکشفهای خود پیش رفته وتا چه اندازه عمیقاً زیر تأثیر آنها قرارگرفته بوده است.

«اکنون نقشهٔ قطعی من این است که به مجرد آن که مطالب را تکمیل و تنظیم کنم و مجالی دست دهدکتابی دربارهٔ خطهای متوازی منتشر سازم؛ در لحظهٔ حاضرراهی را که در پیش دارم بروشنی نمی‌بینم اما کوره راهی‌که تاکنون پیموده‌ام قرینه‌های مثبتی بدست می‌دهندکه به مقصد خواهم رسید، اگر وجود مقصدی امکانپذیر باشد؛ من هنوز کاملاً به آن دست نیافته‌ام اما چیزهایی چنان حیرت‌انگیز کشف کرده‌ام کـه حیرت‌زده شده‌ام و نهایت بدبختی است اگر آنها را از دست بدهم. پدرجان، وقتی‌که آنها رابببینید متوجه خواهید شد. درحال حاضرجز این هیچ نمی‌توانم گفت که ‹از هیچ› جهان نوشگفت‌انگیزی آفریده‌ام. آنچه را پیشتربرای شما فرستاده‌ام درحکم‌خانه‌ای است که با ورق‌بازی ساخته شده باشد، در مقایسه با برجی بلند. من بـه‌همان اندازه اطمینان دارم کـه این کشفها برای من افتخار خواهد آفرید که مطمئن به‌کامل‌کردن آنها هستم.»

بولیایی بزرگ در جواب پیشنهاد کرد کـه کار پسرش به‌صورت ذیل بر تنتامن انتشار یابد، و هرچه زودتر و بـا تأخیرکمتر[2]. اما بیان نتایج و بسط اندیشه‌ها بکندی پیش می‌رفت. با وجود این در بهمن ۱۲۰۳ یوهان به دیدن پدرش رفت و طرحی ازکار خود را همراه بـرد. سرانجام در ۱۲۰۸ نسخهٔ خطی خود را آماده کرد و با وجود این

---

۱. اشتیکل، همان اثر، جلد یکم، ص ۸۵.

۲. ← قسمت ۲۸.

واقعیت که پدر و پسر در معدودی نکات اختلاف نظرداشتند ذیل[1] در ۱۲۱۰ انتشار یافت.
ولفگانگ که اشتیاق داشت که از نظر گاوس دربارهٔ کشفهای پسرش آگاه شود قبلاً[2]، در ۱۸۳۱/۱۲۱۰ خلاصه‌ای از ذیل را برای اوفرستاده بود اما این ذیل به گاوس نرسیده بود. وی در بهمن ۱۲۱۰ نسخهٔ رونوشت آن را دریافت کرد. جوابی که در اسفندماه به ولفگانگ نوشت متضمن نکات ذیل دربارهٔ کتاب یوهان بود.

«اگر با این عبارت شروع کنم که جرأت نمی‌کنم این کتاب را تمجیدکنم متعجب خواهید شد؛ اما کاردیگری نمی‌توانم کرد؛ تمجید از این کتاب درحکم تمجید از خودم خواهد بود، زیرا که تمام محتوای کتاب و راهی که پسر شما طی کرده و نتایجی که بدست آورده است، تقریباً بدقت بر اندیشه‌های خود من منطبق است، اندیشه‌هایی که ذهن مرا بین سی تا سی وپنج سال مشغول داشته‌اند. از این حیث فوق‌العاده متعجبم.

قصد من دربارهٔ کار خودم، که تاکنون مقدار خیلی کمی از آن انتشار یافته، این بودکه اجازه ندهم در زمان حیاتم نشر یابد. بیشتر مردم بصیرت کافی برای دریافت نتیجه‌های ما ندارند و من فقط با معدودی برخورده‌ام که از آنچه با آنان در میان گذاشتم با دلبستگی خاصی استقبال کردند. برای فهمیدن این چیزها باید شخص نیروی درك ظریف و دقیق برای آنچه مورد نیاز است داشته باشد، و در این مورد اکثریت در حالتی از ابهام بسر می‌برد. از سوی دیگر نقشهٔ من این بود که سرانجام اندیشه‌ها را بر کاغذ مرتسم سازم، مباد که با خود من از میان بروند.

پس بسیار متعجبم که از این تلاش معاف شده‌ام و بیش از اندازه خوشوقتم که برحسب اتفاق پسر دوست دیرین من است که برمن پیشی می‌گیرد.»

وقتی که یوهان رونوشت این نامه را از پدرش دریافت کرد حالتی پیدا کرد که خیلی با شاد بودن فرق داشت. به‌جای مدح و ثنایی که انتظار داشت این نامه، به‌عقیدهٔ او، فقط متضمن این خبر بود که شخص دیگری مستقلاً همین کشفها را کرده است، آن

---

۱. عنوان کامل چنین بود:
Appendix. Scientiam Spatii absolute veram exibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud umquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica ← ترجمهٔ آلمانی بوسیلهٔ اشتیکل، همان اثر، جلد دوم، ص. ۱۸۳؛ ترجمهٔ انگلیسی بوسیلهٔ G. B. Halsted چاپ چهارم (اوستین، تکزاس، ۱۸۹۶)، یا David Eugene Smith: *A Source Book in Mathematics* ص. ۳۷۵ (نیویورك، ۱۹۲۹).

۲. اشتیکل، همان اثر، جلد یکم، ص. ۹۱.

هم شاید جلوتر. حتی فراتر رفت و بدگمان شد که شاید پیش از این‌که ذیل کامل شود پدرش برخی از اندیشه‌های او را با گاوس در میان‌گذاشته و او آنها را برای استفادهٔ خودش اختصاص داده است. سرانجام این‌گمان بد ازمیان رفت اما یوهان هرگز احساس نکرد که‌گاوس افتخاری را که در خور وی بوده به او داده باشد.

یوهان بولیایی، با این که به پژوهش ادامه داد، دیگر چیزی منتشر نساخت. یادداشتهایی‌که در میان کاغذهای اوپیدا شدند نشان می‌دادندکه وی به بسط اندیشه‌های خود در فضای سه‌بعدی علاقه داشته و نیز در فکر سنجیدن هندسهٔ نااقلیدسی با مثلث کروی بوده است. مقایسهٔ اخیر این یقین را به او بخشیده بودکه اصل موضوع پنجم را اثبات نمی‌توان کرد[1]. اما هیچگاه اعتقاد راسخ نیافت که پژوهش در فضای سه بعدی، ممکن نیست به ناسازگاری در هندسهٔ جدید برسد.

در ۱۸۴۸/۱۲۲۷ بولیایی آگاه شد که در افتخار کشف هندسهٔ نااقلیدسی باید با کسی دیگر هم شریك شود. در آن سال از کشفهای لباچفسکی آگاه شد و آنها را منتقدانه بررسی کرد. روحیهٔ رقابت در او بیدار شد و، در تلاشی برای نام‌آورتر شدن از لباچفسکی، بار دیگر شروع کرد به‌کار مشتاقانه دربارهٔ دانش فضا[2] که قرار بودکتاب بزرگ او باشد، و طرح آن را به هنگام انتشار ذیل ریخته بود. اما این اثر هرگز به پایان نرسید.

۳۱. لباچفسکی

هرچند بولیایی تا ۱۸۴۸ از کار نیکلایی ایوانویچ لباچفسکی (۱۲۳۵-۱۱۷۲/ ۱۸۵۶-۱۷۹۳) خبر نداشت وی هندسهٔ جدید را در ۱۸۲۹/۱۲۱۸ کشف‌کرده و نتایج آن را منتشر ساخته بود، یعنی دو تا سه سال جلوتر از چاپ ذیل، اما قرینه‌هایی دردست است‌که کشفهای او دیرتر ازکشفهای بولیایی صورت پذیرفته است.

لباچفسکی[3] درجهٔ علمی خود را در ۱۸۱۳/۱۱۹۲ از دانشگاه کازان گرفت. او با سمت مربی در همان دانشگاه بکارگماشته شد و بعد به مقام استادی ارتقاء یافت. در دورهٔ دانشجویی با یوهان بارتلس[4] کار کرده بود، و وی یکی از نخستین‌کسانی بودکه

۱. زیکل، همان اثر، جلد یکم، ص. ۱۲۱.

2. *Raumlehre*

۳. شاید بهترین توضیح دربارهٔ لباچفسکی و کار او را بتوان در *N. I. Lobatschefski* نوشتهٔ فریدریش انگل (لایپزیك، ۱۸۹۸) یافت.

4. Johann M. C. Bartels

نبوغ گاوس را صحه گذاشته بود. با این که گاوس و بارتلس دوستان صمیم بودند هیچ قرینه‌ای بر این مطلب نیست که وقتی که بارتلس در ۱۸۰۷/۱۱۸۶ به کازان رفت برخی از اندیشه‌های پیشرفتهٔ گاوس دربارهٔ خطوط موازی را با خودبرده ودر اختیارلباچفسکی گذاشته باشد. درحقیقت می‌دانیم که درآن تاریخ گاوس درمطالب معمولی مشغول مطالعه بوده است. اکتشافهای بعدی لباچفسکی ظاهراً نتایج ابتکار و بینش و استعداد خود او بوده‌اند.

به هر تقدیر، او هم بـه موازات افرادی دیگر، زود یا دیر، در ۱۸۱۵/۱۱۹۴ می‌کوشید که اصل موضوع پنجم را اثبات کند. نسخه‌ای که از یادداشتهای درسی یکی از شاگردانش در آن سال و دو سال بعد از آن باقی مانده نشان می‌دهد کـه وی فقط درصدد تحقیق نظریهٔ اقلیدس بوده است. فقط در ۱۸۲۳/۱۲۰۲ بود که وی در دیدگاه خود تغییر داد و، خواهیم دیدکه، از آن تاریخ بود که یوهان بولیایی به اندیشه‌هایی منظم و مرتب دربارهٔ هندسهٔ نوین دست یافت.

در ۱۲۰۲ لباچفسکی نسخهٔ خطی کتابی درسی در هندسهٔ مقدماتی را کامل کرده بود، اما آن کتاب هیچگاه انتشار نیافت. این نسخهٔ خطی موجود است. در آن وی خاطرنشان کرده است کـه هیچ برهان قطعی دربارهٔ اصل موضوع پنجم وجود ندارد و برهانهایی هم که اقامه شده‌اند در حقیقت توضیحاتی هستند، نه دلایل ریاضی به معنی حقیقی. آشکار است که وی شروع کرده بود به درك این نکته که اشکالهایی که بر سر راه اثبات اصل پنجم ظاهر شده بودند بـه سبب علتهایی بودند جز آنکه قبلاً همیشه بـه آنها اسناد شده بود.

سه سال بعدی ناظر تکامل نظریهٔ جدید خود دربارهٔ موازیها بـود. می‌دانیم که وی در ۱۸۲۶/۱۲۰۵ مقاله‌ای در مقابل بخش فیزیك و ریـاضی دانشگاه کازان قرائت کرد و در آن فرصت هندسهٔ نوینی را عرضه کرد که در آن از هر نقطه بیش از یك خط به موازات خط مفروضی می‌توان رسم کرد و مجموع زاویه‌های مثلث کمتر است از دو قائمه. بدبختانه آن سخنرانی چاپ نشد و نسخهٔ خطی آن هم بدست نیامده است.

اما در ۱۸۲۹-۱۸۳۰ یادداشتی دربارهٔ اصول هندسه در نشریهٔ کازان منتشر کرد که در آن به سخنرانی یادشده اشاره کـرد و عقیدهٔ خود را دربارهٔ موازیها بیان نمود. این یادداشت که نخستین اثری دربارهٔ هندسه نااقلیدسی بود کـه به‌چاپ رسید در وطن خودش کم جلب توجه کرد وچون به روسی چاپ شده بود در خارج ازکشور هیچ جلب دقت ننمود.

چون لباچفسکی به ارزش کشفهای خود اعتقاد داشت تعدادی مقالهٔ کمابیش مبسوط دربارهٔ خطهای موازی نوشت به این امید کـه دقت ریاضیدانان سراسر جهان را جلب

کند. شاید مهمترین این نشریه‌ها کتاب کوچکی بوده باشد با عنوان پژوهشهای هندسی دربارهٔ نظریهٔ خطهای متوازی[1] که به زبان آلمانی نوشته شده بود با این فکر که بدین‌وسیله بیشتر خوانده شود. یك سال پیش از مردنش، با این که کور شده بود، تحقیقات خود را بتفصیل نوشت زیر عنوان پان‌ژئومتری یا کتاب هندسهٔ مبتنی بر نظریه‌ای کلی و دقیق از خطهای متوازی[2]. اما زنده نماند که ببیند که کتابش مورد قبول عده‌ای زیاد واقع شده است.

درآن روزگاران خبرهای کشفهای علمی چنان بکندی نشر می‌یافت که حتی گاوس چندسالی، وشاید تا بعد از انتشار پژوهشها[3] از پیشرفتهایی که نصیب لباچفسکی شده‌بود بی‌خبر مانده به هرتقدیر، چنین می‌نمایدکه وی درحدود ۱۸۴۱/۱۲۲۰ از لباچفسکی و کار او آگاه شد و سخت تحت تأثیر قرار گرفت. در ۱۸۴۶/۱۲۲۵ بـه شوماخر چنین نوشت:

«بتازگی مجالی یافتم که بار دیگر به‌کتاب کوچك لباچفسکی (پژوهشهای هندسی دربارهٔ نظریهٔ خطهای متوازی) مروری کامل کنم. این کتاب متضمن اصول آن هندسه‌ای است‌که اگر هندسهٔ اقلیدسی درست نباشد باید معتبر باشد و می‌تواند درکمال سازگاری معتبر باشد، اشوایکارت[4] نامی این‌گونه هندسه را «هندسهٔ ستاره‌ای»، و لباچفسکی آن‌را «هندسهٔ موهوم» خوانده است. شما می‌دانید کـه از چهل وچهار سال پیش (از ۱۷۹۱) تاکنون من همین یقین را داشته‌ام (با بسطی‌کـه اخیراً در آن داده‌ام و در اینجا بـه آن نمی‌پردازم). درکار لباچفسکی چیزی ندیدم‌که برایم تازگی داشته باشد، اما لباچفسکی مطالب را از راهی غیر از آن که من پیموده‌ام بیان کرده است و مسلماً راهی ماهرانه و با روحیه‌ای براستی هندسی. احساس می‌کنم‌که باید دقت شما را به‌این‌کتاب، که مسلماً موجب خوشوقتی کامل شما خواهد شد، جلب کنم.

در حدود ۱۸۴۸/۱۲۲۷ ولفگانگ بولیایی به نحوی از تتبعات لباچفسکی آگاه شد. وی در ژانویهٔ آن سال شرحی به‌گاوس نوشت و نام اثر دانشمند روسی را پرسید.

---

۱. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* ترجمه به‌انگلیسی *Geometrical Researches on the Theory of Parallels* به وسیلهٔ هالستد (اوستین، تکزاس، ۱۸۹۱).

۲. *Pangéometrie ou précis de geometrie fondeé sur une Theorie generale et regoureuse des paralleles*، *A Source Book in Mathematics* نوشتهٔ دیوید یوجین اسمیث، ص ۳۶۰، (نیویورك، ۱۹۲۹).

۳. انگل و اشتیکل، نظریهٔ خطوط موازی از اقلیدس تا گاوس، ص ۲۳۵.

۴. ← قسمت ۳۲.

گاوس پژوهشهای هندسی، «این کتاب کوچك حیرت‌انگیز» را به‌عنوان کتابی‌که محتوی بیان دقیق نظریه است و بآسانی بدست می‌آید به‌او توصیه‌کرد. بدین ترتیب ولفگانگ، و به وسیلهٔ او یوهان، با هندسهٔ لباچفسکی آشنا شدند.

اینکه یوهان خیلی فیلسوفانه از کار هندسه‌دان روسی مستحضر شد در نکته‌ای از یادداشتهای انتشار نیافتهٔ او برمی‌آیدکه عنوانش یادداشتهایی دربارهٔ پژوهشهای هندسی نیکلائوس لباچفسکی[1] است. در قسمتی از آن می‌نویسد[2]:

«حتی اگر در این اثر شایان توجه گاهی روشهای متفاوت بکار رفته باشد روح و نتیجه چنان شبیه بـه مال ذیل، کتاب تنتامن است کـه در ۱۸۳۲/۱۲۱۱ در ماروس واسارلی[3] منتشر گردیدکه نمی‌توان بی‌آنکه حیرت‌دست دهدآنها را ازیکدیگر بازشناخت اگر گاوس، همچنان که می‌گوید، از ذیل و بعد هم از همداستانی چشمگیر ریاضیدانان مجار و روس بی‌نهایت متعجب گردید من نیز چنانم.

«البته ماهیت حقیقت واقعی، چه در ماروس واسارلی، و چه درکامچاتکا وکرهٔ ماه، وخلاصه درهر نقطهٔ جهان جز یکی نمی‌تواند بود و ناممکن نیست که آنچه یك موجود محدود و حساس کشف می‌کند، به وسیلهٔ کس دیگری هم کشف شود.»

اما بی‌توجه به این اندیشه‌ها بولیایی، لااقل برای مدتی کوتاه، بدگمان شد که لباچفسکی به نحوی، شاید به وسیلهٔ گاوس، ازکار او آگاه شده و پس از اندکی دستکاری منتشر ساخته است. بـا وجود این وضع او بعداً ملایمتر شد. واقعیت آنکه ظاهراً هیچ قرینه‌ای در دست نیست‌که لباچفسکی از بولیایی چیزی شنیده باشد.

۳۲. واختر[4]، اشوایکارت[5]، تاورینوس[6]

سابقهٔ رضایتبخش دربارهٔ کشف هندسهٔ نـااقلیدسی، هرقدر هم مختصر بیان شود، نمی‌تواند نامهای واختر و اشوایکارت و تاورینوس را در بر نگیرد. در اینجا مختصری از سهم آنان در این رشته را می‌آوریم و بعد دقت خود را به پیشرفتهایی کـه نتیجهٔ کار زیمان و دیگران است معطوف می‌سازیم.

فریدریش لودویش واختر(۱۱۷۱-۱۱۹۶/۱۷۹۲-۱۸۱۷) دبیر ریاضیات دبیرستان دانتسیگ، در ۱۸۰۹/۱۱۸۸ درگتینگن شاگردی گاوس کرد. تلاش او برای اثبات اصل

---

۱. اشتیکل، ولفگانگ ویوهان بولیایی، پژوهشهای هندسی، جلدیکم، ص، ۱۴۰ (لایپزیك و برلین، ۱۹۱۳).

2. *Bemerkungen über Nicolaus Lobatchefskij's Geometrische Untersuchungen*

3. Maros – Vásáchely 4. Wachter 5. Schweikart 6. Taurinus

موضوع پنجم به انتشار مقاله‌ای[۱] در ۱۸۱۷/۱۱۹۶ منجر شدکه در آن او سعی کرد که ثابت کند بر هر چهار نقطهٔ فضایی غیر واقع در یك صفحه یك کره می‌توان مرور داد. زمینهٔ این پژوهش بی‌شك از این واقعیت الهام می‌گرفت که به مجرد مسلم شدن این که بر سه نقطهٔ غیر واقع بر یك خط دایره‌ای می‌توان گذراند اصل موضوع پنجم ثابت می‌شود. هر چند استدلال او سخیف بود برخی از استنتاجهای شهودی او در آن مقاله و نامه‌ای[۲] که در ۱۸۱۶/۱۱۹۵ به گاوس نوشته بود در خور ذکر هستند. از جمله خاطر نشان کرده بود که حتی اگر اصل موضوع پنجم انکار شود هندسهٔ کروی، وقتی که شعاع کره نامتناهی شود تبدیل به اقلیدسی می‌گردد هر چند سطح محدودکنندهٔ آن سطح مستوی نیست. این نکته بعداً به وسیلهٔ بولیایی و لباچفسکی، هر دو، تأیید شد.

واختر فقط بیست و پنج سال زیست. پژوهشهای کوتاه او نویدبخش و حاکی از بصیرت بود. اگر چند سالی دیگرزنده مانده بود ممکن بود کاشف هندسهٔ نااقلیدسی‌شود. هرچه بود تأثیر او احتمالاً شایان توجه بوده است. درست در زمانی که او و گاوس دربارهٔآنچه خودشان هندسهٔ ضد اقلیدسی می‌نامیدند بحث می‌کردند در گاوس نشانه‌هایی از تغییر دیدگاه پیدا شد. در نامه‌ای که گاوس در ۱۸۱۷ به البرس[۳]، که دستیار او و اخترشناسی مهم‌شناخته شده بود، پس ازآن‌که نامی از واختر برد وبا وجود نقصهای کار او به آن اشاره‌کرد[۴]، چنین نوشت: «به این یقین دارم نزدیکتر می‌شوم که حقیقت مورد نیاز هندسهٔ ما را، دست‌کم با عقل آدمی برای عقل آدمی، نمی‌توان ثابت کرد. شاید در زندگی دیگری به بینشهای دیگری در ماهیت فضا دست‌یابیم که در زمان حاضر در دسترس ما نیستند. تا آن زمان ما باید هندسه را بر پایه‌ای مساوی با مکانیك استوار سازیم، نه با حساب، که بنیادی به‌طور خالص از پیش دارد.

یادآوری می‌شود[۵] که گاوس در نامه‌ای به شوماخر از «اشوای‌کارت نامی» یاد کرده است. وی فردیناند کارل اشوایکارت (۱۱۵۹-۱۲۳۸/۱۷۸۰-۱۸۵۹) بود که در ۱۷۹۶/۱۱۷۵ تا ۱۷۹۸/۱۱۷۷ در ماربورگ دانشجوی حقوق بود. چون خیلی به ریاضیات علاقه داشت از فرصتی که دودانشگاه بدست آورده بود استفاده کرد ودردرسهای

---

۱. برای این مقاله و بعضی از نامه‌های واختر ← Friedrich Ludwig Wachter ein Beitrag zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie، مجلهٔ ریاضیات، جلد ۵۴، ص ۴۹-۸۵ (۱۹۰۱).

۲. اشتیکل، همان‌اثر، ص ۶۱.

3. H. W. M. Olbers

۴. اشتیکل، همان‌اثر، ص ۵۵.

۵. ← قسمت ۳۱.

هاوف[1]، که در نظریهٔ موازیها مرجعیتی داشت حضور یافت. علاقهٔ وی به این نظریه تا آنجا گسترش یافت که در ۱۸۰۷/۱۱۸۶ تنها کتاب او که دربارهٔ ماهیت ریاضی نوشته شد زیر عنوان نظریهٔ خطوط متوازی همراه با پیشنهاد و طرد آنها از هندسه[2] منتشر گردید. این کتاب برخلاف عنوانی که داشت متضمن هیچ نکتهٔ تازه‌ای نبود و بر سیاق معمول نوشته شده بود. اشوایکارت در آن به‌ساکری و لامبرت، هر دو، اشاره کرده‌بود. بی‌تردید آشنایی او با کارهای آنان بر سرشت تحقیقات بعدی او اثر گذاشت. در ۱۱۹۱/ ۱۸۱۲ اشوایکارت به خارکف رفت. در۱۱۹۵/۱۸۱۶ باز درماربورگ بود و تا ۱۱۹۹/ ۱۸۲۰ در آنجا ماند و استاد درس حقوق درکنیکس‌برگ شد.

وی در ۱۸۱۸/۱۱۹۷ طرح کوتاهی از نظر خود دربارهٔ هندسه‌ای نوین که در آن نظریهٔ خطوط متوازی انکار شده بود به دوستش گرلینگ[3]، که شاگرد گاوس و استاد اخترشناسی در ماربورگ بود، داد تا آن را برای انتقاد به نظر گاوس برساند. در این جزوه او هندسه را به دو نوع اقلیدسی و ستاره‌ای[4] تقسیم کرده بود، و در دومی مجموع زاویه‌های مثلث کمتر از دو قائمه بود، و هرچه مجموع زوایا کوچکتر می‌شد مساحت مثلث بزرگتر می‌گردید، و ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین با ضلع آن بزرگ می‌شد اما هیچگاه از طول معینی، که ثابت[5] خوانده می‌شد تجاوز نمی‌کرد، و هرگاه‌این ثابت برابر با بی‌نهایت گرفته می‌شد هندسهٔ اقلیدسی نتیجه می‌گردید. این طرح احتمالاً نخستین توصیف از هندسهٔ نااقلیدسی، با همین عنوان، شناخته می‌شود. این فکر قبل از ۱۸۱۶/۱۱۹۵، وقتی که اشوایکارت درخارکف بود به نظر او رسیده بود. درآن تاریخ بولیایی و لباچفسکی هنوز مشغول پژوهشهای در دیدگاه قدیمی بودند.

گاوس در جواب گرلینگ از اشوایکارت تمجید بسیار کرد و نوشت «یادداشت پرفسور اشوایکارت بزرگترین شعف را نصیب من کرد. لطفاً صادقانه‌ترین تبریکهای مرا به او تقدیم دارید. اگر قرار بود من بنویسم تقریباً همین‌طور می‌نوشتم».

اشوایکارت نتایج هیچ یك از پژوهشهای خود را منتشر نکرد، اما خواهرزاده‌اش فرانتس آدلف تاورینوس (۱۸۷۴-۱۷۹۴/۱۲۵۳-۱۱۷۳) را تشویق کرد که به بررسی خطوط متوازی پردازد و بوی گفت که گوشه‌ای از فکر هندسهٔ ستاره‌ای که این‌قدر مورد تمجید گاوس واقع شده اثر الهام او بوده است. تاورینوس پس از آن که مدت

---

1. J. K. F. Hauff

۲. ← انگل و اشتیکل، همان اثر، ص. ۲۴۳.

Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie

3. Gerling 4. Astral 5. Constant

کوتاهی به تحصیل حقوق پرداخت درکلن مستقر شد تا عمر درازی را به فراغ بگذراند و وقت وسیع خود را به علائق علمی گوناگون اختصاص دهد. وقتی کـه در ۱۱۹۳/ ۱۸۱۴ پژوهش اصولی در مسألهٔ موازیها را آغاز کرد خود را با اندیشه‌های خالویش همداستان ندید. پس درآغاز پژوهشهایش امیدوار بودکه بتواند ثابت کندکه اصل موضوع پنجم به هیچ روی ازوضع عادی خارج نیست. نکتهٔ شایان توجه این که هرچند درنتیجهٔ پژوهشهای مستقل خود یکی از اولین کسانی بودکه تصوری از هندسهٔ نااقلیدسی یافتند، در تمام عمر در این عقیده ثابت ماند که فرض اقلیدسی تنها فرض از میان آن سه است که به هندسه‌ای معتبر می‌انجامد.

در ۱۶۰۴/۱۸۲۵ اندکی پس از دریافت نامهٔ تهنیت‌آمیز و شوق‌انگیز گاوس، که ترجمه‌اش در قسمت ۱۹ آمده است، نخستین کتاب خود به نام فرضیهٔ موازیها[1] را منتشر ساخت. در این کتاب وی از دیدگاهی نااقلیدسی به مسأله پرداخت و فرض زاویهٔ منفرجه را کنار گذاشت و بـا استفاده از فرض زاویهٔ حاده به ثـابت اشوایکارت بـرخورد. این پژوهشها او را به افـکاری رهنمون شدندکه با مفهومی کـه از فضا داشت موافق نبودند و او مجبور شد فرض اخیر را هم کنار بگذارد، هرچند چنین می‌نمایدکه پذیرفت‌که نتایج آن از جنبهٔ منطقی معتبر و استوارند.

کوتاه مدتی پس از انتشار اولین کتابش دانست‌که در راهی که پیش گرفته است ساکری و لامبرت بر او پیشی داشته‌انـد. پس در ۱۶۰۵/۱۸۲۶ کتاب دیگری به نام اصول مقدماتی هندسه[2] منتشر ساخت که در آن روش پرداخت به موضوع را عوض کرده بود. در ذیل این کتاب بود که وی مهمترین خدمت را انجام داد، یعنی درآن بسیاری از دستورهای اساسی مثلثات نااقلیدسی را عرضه کرد. در دستورهای عادی مثلثات کروی به‌جای‌شعاع حقیقی‌کره شعاعی موهومی قرار داد. دستورهای تغییریافته به‌وجهی شایان توجه هندسه‌ای را که از فرض زاویهٔ حاده برمی‌خیزد توصیف می‌کنند. لامبرت پیش از او در تابعهای مثلثاتی با شناسهٔ موهومی پژوهیده و نظریهٔ تابعهای هذلولوی را در این زمینه تا حدی بسط داده بود، اما نشانه‌ای در دست نیست از این‌که وی کوشیده باشد که این اندیشه‌ها را در بررسی خطوط موازی بکاربرده باشد. یادآوری خواهد شد که او حدس‌زده بودکه این هندسه را بتوان برروی کره‌ای به شعاع موهومی تحقیق کـرد.[3]

۱. *Theorie der Parallellinien* بـرای مستخرجی از آن ← انـگل و اشتیکل، همان اثر، ص. ۶۵۵.

۲. *Geometriae Prima Elementa*. ← انگل و اشتیکل، همان اثر، ص. ۲۶۷.

۳. ← قسمت ۲۳.

تاورینوس تابعهای هذلولوی را بکار نبرد بلکه به‌جای آن سرشت حقیقی دستورهای خود را با میانجیگری معادلات نمایی و لگاریتم نمایان ساخت. در نتیجه این هندسه را هندسهٔ لگاریتمی ـ کروی[1] نامید. او نیز مانند لامبرت تناظر بین هندسهٔ کروی و هندسه‌ای را که در صورت استفاده ازفرض زاویهٔ منفرجه برمی‌خیزد باز شناخت. علاوه براین خاطر-نشان ساخت که هندسهٔ لگاریتمی ـ کروی در صورتی که شعاع کره نامتناهی گردد اقلیدسی می‌شود.

با وجودی که در اکراه از معتبر شناختن این هندسه در صفحه اصرار می‌ورزید چنین می‌نماید که به اهمیت کشفهای خود، از دیدگاه نظری، در بررسی خطوط متوازی کاملاً آگاه بوده است. اصول مقدماتی هندسهٔ او کم مورد توجه قرار گرفت و او نیز در عالم ناکامی بقیهٔ نسخه‌های آن را سوزانید.

۳۳. ریمان

بولیایی و لباچفسکی زنده نماندند تا شاهد بذل توجهی که در خورکار آنان بود شوند. این تأخیر را می‌توان به چند عامل نسبت داد: گذر بسیارکند اندیشه‌ها ازقسمتی از جهان به قسمتی دیگر، سد زبانی، فلسفهٔ فضایی کانتی، سلطهٔ دو هزار سالهٔ هندسهٔ اقلیدسی و گمنامی نسبی کاشفان هندسهٔ نااقلیدسی. هندسهٔ نوین در بیشتر از سی وپنج سال بسیارکم جلب توجه کرد تا این‌که در ۱۸۶۷/۱۲۴۶ ریشارد بالتزر[2] در چاپ دوم اصول ریاضی[3] خود به آن و کاشفانش اشاره‌ای کرده، همچنین، هوئول[4] را برآن داشت که نوشته‌های آنان را به‌زبان فرانسوی برگرداند.

اما در این میان چهرهٔ تازه‌ای ظهورکرد. گیورگ فردریك برنهارد ریمان (۱۲۰۵-۱۲۴۵/۱۸۲۶-۱۸۶۶)، که تقریباً مقارن کشف هندسهٔ نااقلیدسی چشم به جهان گشوده بود، با نیت تحصیل رشتهٔ علوم الهی قدم به عالم جوانی گذاشت. اما وقتی‌که با این نیت وارد گتینگن شد دریافت که آنچه باب طبع او است ریاضیات است؛ پس از علوم الهی روبرتافت. اوشاگرد گاوس شد و دردورهٔ دراز تدریس آن ریاضیدان بزرگ دانشجویی برجسته گردید. بعد به برلین رفت تا در خدمت دیریکلت و یاکبی و اشتاینر و دیگران تلمذکند، اما در ۱۸۵۰/۱۲۲۹ برای تحصیل فیزیك به گتینگن بازگشت و سال بعد به دریافت درجهٔ علمی نایل آمد.

1. *Logarithmisch - Sphärischen Geometrie*   2. Richard Baltzer

3. *Elemente der Mathematik*   4. Hoüel

جلوتر به سخنرانی امتحانی شایان تـوجه او اشاره کرده‌ایم[1]، یعنی به دربارهٔ این فرض که هندسه براستدلال مبتنی است، که در ۱۸۵۴/۱۲۳۳ در مقابل استادان دانشکدهٔ فلسفه درگتینگن ایراد کرد و در آن گفت که فضا لازم نیست نامتناهی باشد هرچند بیمرز تصور شود. بدین ترتیب او به‌طور نـامستقیم بذر هندسه‌ای را افشاند که در آن هیچ دو خط با هم موازی نیستند و مجموع زاویه‌های یك مثلث بزرگتر است از دو قائمه. باید به یادآورد که در طرد فرض زاویهٔ منفرجه بوسیلهٔ پژوهندگان دیگر نامتناهی بودن خط مفروض بود.

اما در این رسالهٔ بیاد ماندنی ریمان کار بیشتری کرد. دقتها را متوجه ماهیت راستین و اهمیت هندسه کرد و به آزاد ساختن ریاضیات از پابند سنت کمك بسیار نمود. از جمله گفت[2]: «در مقام اول... برعهده گرفته‌ام که ازمفهومهای کلی کمیت کمیتی بسازم که در چند جهت بسط یافته باشد. از این نتیجه خواهد شد کـه کمیتی که در چند جهت بسط یافته باشد می‌تواند جوابگوی روابط اندازگی متفاوت باشد و در نتیجه فضا فقط حالت خاصی‌است ازکمیتی که درسه‌جهت بسط‌یافته‌است. اماآنچه ازاینجا به‌صورت نتیجه‌ای لازم عاید می‌گردد این است که احکام هندسه را نمی‌توان ازمفهومهای کلی کمیت مشتق کرد بلکه خاصیتهایی را کـه فضا را از سایر کمیتهایی متمایز می‌سازند که در سه جهت بسط می‌یابند باید ازتجربه استنتاج نمود. بدین ترتیب مسألهٔ کشف ساده‌ترین‌واقعیتهایی پیش می‌آیدکه از آنها بتوان روابط اندازگی فضا را تعیین نمود؛ این مسأله بنابرماهیت امر کاملاً معین نیست زیرا که ممکن است بتوان چند دستگاه واقعیتهایی یافت که‌برای تعیین روابط اندازگی فضا کافی باشند ـ که از آن میان مهمترین دستگاه برای موضوع مانحن فیه آن باشد کـه اقلیدس به عنوان بنیاد وضع کرده است. این واقعیتها، مثل هر واقعیتی، یقینی نه ضروری بلکه تجربی دارند؛ اینها فرضها هستند. بنابراین می‌توانیم در میزان محتمل بودن آنها پژوهش کنیم، میزانی که البته در محدودهٔ مشاهده خیلی بزرگ است، ودر درستی بسط‌آن در ورای حدود مشاهده تحقیق نماییم، هم درجهت بی‌نهایت بزرگ و هم در جهت بی‌نهایت کوچك.»

سپس با تأکید براهمیت بررسی خواص چیزها از دیدگاه بی‌نهایت کـوچکها چنین ادامه داد: «مسائل مربوط بـه بی‌نهایت بزرگها برای تعبیر مسائل بی‌فایده طبیعتند، اما

---

۱. ← قسمت ۶.

۲. تـرجمه کـلیفرد در *Nature*، جلد هشتم، ۱۸۷۳. ونیز ← کتاب مأخذی در ریاضیات (*A Source Book in Mathematics*)، نـوشته دیوید یـوجین اسمیث، ص. ۴۱۱ - ۴۲۵ (نیویورك، ۱۹۲۹).

وضع در مورد مسائل مربوط به بی‌نهایت کوچکها چنین نیست. وقوف ما بر روابط علّی پدیده‌ها به‌طورعمده بستگی دارد به‌میزان دقت ما درپی‌گیری این پدیده‌ها درحیطهٔ بینهایت‌کوچکها. پیشرفت قرون اخیر در علم مکانیك تقریباً بکلی بسته است بـه دقت ساختمان براثر اختراع حساب بی‌نهایت کوچکها، و بـه اصول ساده‌ای کـه ارشمیدس و گالیلئو و نیوتن کشف کرده‌اند و در فیزیك نـوین بکار می‌روند. اما در علوم طبیعی که هنوز چشم بـه راه اصول ساده برای این‌گونـه ساختمانها هستند درصدد‌یم کـه با پی‌گیری پدیده‌ها با حد اعلای دقتی‌کـه میکروسکپ اجازه می‌دهد رابطه‌هـای علّی را کشف‌کنیم. بنابراین مسائل مربوط به روابط اندازگی فضا در بینهایت کوچکها بیهوده نیستند.»

بدین ترتیب دورهٔ دومی درگسترش هندسهٔ نااقلیدسی پدید آمد، دوره‌ای‌که‌صفت بارز آن پژوهشهایی از دیدگاه هندسهٔ بی‌نهایت کـوچکها (دیفرانسیل) بود در مقابل روشهای ترکیبی‌که پیشتر بکار می‌رفتند. رسالهٔ ریمان تقریباً بر رویهم با کلیات سروکار داشت و چگونگی آن الهام‌بخش بود. پژوهشهای تفصیلی در امتداد این خطوط بوسیلهٔ دانشمندان دیگر بعمل آمد، بخصوص بوسیلهٔ هلم‌هلتز[1] و لی‌وبلترامی[2]. خدمات هلم‌هلتز فیزیکدان، کـه بـه‌خودی خود شایان توجه بودند، برای برخورداری از دقت نیاز به دستکاری عالمی ریاضیدان داشتند. این‌تتبعات کامل بوسیلهٔ لی، که از موضوع گروههای تبدیل[3] استفاده می‌کرد تحقق پذیرفتند. افتخار اولین اثبات سازگاری هندسهٔ نااقلیدسی نصیب بلترامی شد. هرچند بولیایی و لباچفسکی تا جایی‌که درپژوهشهای خود پیش‌رفته بودند به‌تضادی برنخورده بودند بازهم امکان‌آن بودکه با ادامهٔ پژوهشها چنین تضادی رخ نماید. بلترامی نشان دادکه چگونه می‌توان این‌هندسه را، با محدودیتهایی، برروی یك سطح اقلیدسی با انحنای پایا نمایش داد؛ و در نتیجه چگونه هر ناسازگاری که در هندسهٔ بولیایی و لباچفسکی‌کشف گردیده بـه نـاسازگاری متناظری در هندسهٔ اقلیدسی کشانیده می‌شود.

۳۴. پیشرفتهای بعدی

کار این دورهٔ دوم عالی بـود و نتایج آن دوررس و مهم بـودند. اما برای تأمین آنچه برای وحدت بخشیدن و تفسیر هندسه‌های نااقلیدسی مورد نیاز بود بایستی انتظار دورهٔ سومی کشیده شود که بـا نامهای کیلی[4] و کلاین[5] و کلیفرد[6] انباز است.

---

1. Helmholtz　2. Beltrami　3. groups of transformations
4. Cayley　5. Felix Klein　6. Clifford

طبقه‌بندی زیبای این هندسه‌هـا از دیدگاه هندسهٔ تصویری، و شناخته شدن نقشهایی که آنها در فراهم آوردن یك طبقهٔ منطقی برعهده دارند موجب موجه شناخته شدن کامل آنها گردید؛ و بدین ترتیب فرجامی پیروزمند برای کشتی‌گرفتن با اصل موضوع پنجم ببار آورد.

کیلی در رسالهٔ ششم دربارهٔ کوانتیکها[1]ی مهم خود، در ۱۲۳۸/۱۸۵۹، نشان داد که چگونه مفهوم فاصله می‌تواند بر اصلهای توصیفی محض بناشود. فلیکس کلاین در دو گزارش کتبی[2] مفصل که در ۱۲۵۰/۱۸۷۱ و ۱۲۵۲/۱۸۷۳ به‌طبع رسیدند این‌اندیشه‌ها را بسط داد و از دیدگاه هندسهٔ نااقلیدسی تعبیرکرد. او بود که پیشنهاد کرد کـه هندسه بولیایی و لباچفسکی، و هندسهٔ ریمان و هندسهٔ اقـلیدس بترتیب هذلولوی و بیضوی و سهوی نامیده شوند؛ این اصطلاحات قبول عام یافتند و از این بـه بعد ما آنها را بکار خواهیم برد. این نـامها از این واقعیت به‌خاطر رسیدند کـه خط راست با فرض زاویهٔ حاده دو نقطهٔ بی‌نهایت دور دارد و با فرض زاویهٔ منفرجه نقطهٔ بی‌نهایت دور ندارد و با فرض زاویهٔ قائمه فقط دارای یك نقطهٔ بی‌نهایت دور است.

اخیراً پژوهندگان به مداقهٔ کامل درمبانی هندسه و بیان دقیق مجموعه‌های اصلهای موضوع همت گماشته‌اند. به‌پیروی‌از پاش؛ مردانی‌چون پئانو و هیلبرت و پیری[3] و راسل و وایت‌هد و وبلن[4] پیشتر رفته و هندسه‌های اقلیدسی‌و نااقلیدسی، و به‌طورکلی ریاضیات، را بر یك پایهٔ استوار منطقی جا داده‌اند.

۳۵. خاتمه

در صفحات آینده نخست به بررسی هندسهٔ هذلولوی ترکیبی می‌پردازیم. در پی‌آن پژوهشی در مثلثات صفحهٔ هذلولـوی، و بعد از آن مطالعه‌ای از دیدگاه هندسهٔ تحلیلی و حساب جامع و فاضل، خواهند آمد.

با تفصیل کمتری به هندسهٔ بیضوی خواهیم پرداخت. مطالعهٔ آن، مانند مطالعهٔ در بیشترکارهای اخیر در هندسهٔ نااقلیدسی، بستگی دارد به مفاهیمی پیشرفته‌تر از آنچه درصدد بحث دربارهٔ آن هستیم.

---

۱. *Sixth Memoir upon Quantics*. ← گردآمدهٔ مقالات ریاضی کیلی (*Collected Mathematical Papers*) جلد دوم، ص. ۵۶۱-۵۹۲، (کیمبریج، ۱۸۸۹).

۲. ← مجموعهٔ رساله‌های ریاضی (*Gesammelte Mathematische Abhandlungen*).

3. Pieri 4. Veblen

در ضمن خاطر نشان می‌سازیم که دو گونه هندسهٔ بیضوی هست. گـونه‌ای که در بخش ۶ آمده شاید آن باشد که در فکر ریمان بـوده است. هندسه در این صفحهٔ بیضوی شباهت کاملی دارد به هندسهٔ برروی کره، اگر دایره‌های بزرگ کره را چون خطهای راست انگاریم. گونهٔ دوم که از چند جنبه جالب دقت‌تر و مهمتر است بوسیلهٔ کلاین القا شده است. در این هندسه دو نقطه همیشه یك خط راست را مشخص می‌سازند، و از جنبه‌های دیگر شباهت بیشتری دارد به هندسهٔ اقلیدسی.

۴

هندسهٔ مسطح هذلولوی

«کاملاً ساده است... و راهی که به آن
چیزها از یکدیگر نتیجه می‌شوند بسیار
دوست داشتنی است.» کلیفرد

۳۶. مدخل

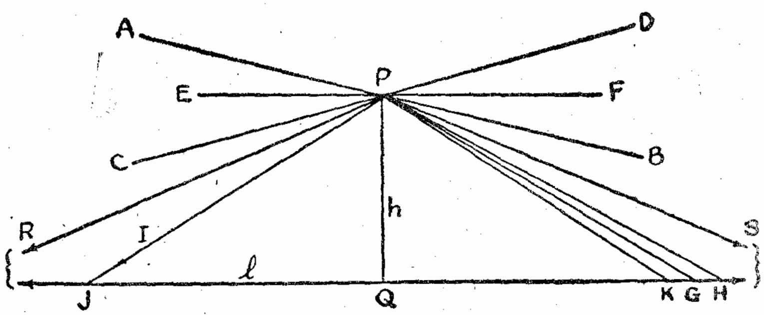
دربارهٔ ضرورت تنظیم مجموعه‌ای از فرضها که با صراحت بیان شوند و اساس بررسی هندسهٔ صفحه هذلولوی[1] قرارگیرند بسیار می‌توان سخن گفت. برای دانشجویان پخته‌تر و برای کسانی که از پیش زمینه‌ای دارند بی‌شك این روش بهترین روش است. اما این بررسی بسیارمبتنی برمنطق ممکن است برای‌دیگران ابهام‌آمیز باشد. بدین دلیل، مقصدی را که در پیش داریم در نظر می‌گیریم و برآن می‌شویم که راهی را که پیشروان رفته‌اند بپیماییم، یعنی از مبانی آشنای هندسهٔ اقلیدسی بهره می‌گیریم، به جای اصل موضوع پنجم چیزی را که ضد آن باشد قرار می‌دهیم و هرجا که مجبور شویم چنین دگرگونیهایی پیش‌می‌آوریم. بدین ترتیب همهٔ حکمهای اقلیدسی که مبتنی بر اصل موضوع پنجم هستند، بخصوص بیست و هشت حکم اول در دم در دسترس ما قرار می‌گیرند.

۱. دانشجویی را که بخواهد هندسهٔ هذلولوی را از این دیدگاه بیشتر انتقادی بررسی کند حواله می‌دهیم به بنیاد هندسه (*Grundlagen der Geometrie*) هیلبرت، چاپ هفتم، ص. ۱۵۹ (لایپزیك و برلین، ۱۹۳۰).

سادگی و صرفه‌جویی تنها مزایای این روش نیستند. به‌عقیدهٔ ما این روش عرضه کردن مطلب، به طریقی کـه بدست آمده است، تضمین اصول منطقی و روانشناختی استوار را همراه دارد. به ظرافتکاری و دقت زیاد بعداً ممکن است دست یافت.

۳۷. اصل موضوع سرشتنمای هندسهٔ هذلولوی و نتایجی که بیفاصله برآن مترتبند

در صفحهٔ اقلیدسی اصل موضوع پنجم در اصل هم‌ارز با این حکم است که از نقطهٔ غیر واقع برخط راستی یك، و فقط یك، خط می‌توان کشید که آن خط را قطع نکند. به جای آن مـا اصل موضوع زیرین را بـه عنوان اصل موضوع سرشتنمای هندسهٔ مسطح هذلولوی می‌آوریم:



شکل ۲۱

اصل موضوع. بر نقطهٔ غیر واقع بر خطی بیشتر از یك خط می‌توان گذراند که آن خط را قطع نکنند.

توجه کرده‌ایم که اگر ازیك نقطه بیشتر از یك خط بتوان رسم کرد که خط‌مفروضی را قطع نکنند تعدادی نامتناهی‌از این خطوط می‌توان رسم کرد. هرگاه P نقطهٔ مفروض، (شکل ۲۱) و l خط مفروض، و AB و CD دو خط باشند کـه بر P می‌گذرند و l را قطع نمی‌کنند، آنگاه هیچ‌خط مانند EF واقع در درون دوزاویهٔ متقابل به رأس APC و DPB، که شامل عمود PQ که ازP بر l فرودآمده است نیستند، خط l را قطع‌نخواهد کرد. زیرا که اگر EF، وقتی‌که آن را به‌طرف راست امتداد دهیم، l را قطع کند چون PF و عمود PQ هر دو l را قطع می‌نمایند PB هم به‌موجب اصل موضوع پاش باید l را قطع کند.

هرگاه از عمود PQ شروع کرده PQ را حول P در هر یك از دوطرف در جهت مثلاً مخالف عقربه‌هـای ساعت دوران دهیم، این خط تـا مدتی به قطع‌کردن l ادامه

می‌دهد و سپس از قطع‌کردن آن باز می‌ماند. بدین ترتیب زمانی رسیده است‌که در آن خطهایی که بر P می‌گذرند به دو مجموعه تقسیم می‌شوند، آنهایی‌که l را قطع‌می‌کنند و آنهایی که l را قطع نمی‌کنند، و هر یك از خطوط مجموعهٔ اول مقدم است بر هر یك از خطوط مجموعهٔ دوم. با این اوضاع و احوال بنابر اصل موضوع ددکیند خطی بر P می‌گذرد که این افراز خطها به دو مجموعه را تحقق می‌بخشد. چون این خط یا l را قطع می‌کند یا آن را قطع نمی‌کند باید یا آخرین خط از خطهایی‌که قطع می‌کنند باشد یا اولین خط از خطهایی که l را قطع نمی‌کنند. اما آخرین خطی‌که l را قطع می‌کند وجود ندارد؛ زیرا که اگر فرض شودکه PG آخرین خط قطع‌کننده است و طول دلخواه GH را درطرف مقابل Q جدا کنیم آنگاه PH خط l را قطع‌می‌کند و تناقض حاصل‌می‌شود. پس خط تقسیم کننده نخستین خط از آنهایی است که l را قطع نمی‌کنند. وضع مشابهی خواهیم داشت اگر PQ در جهت مخالف عقربه‌ها دوران کند. پس دو خط مانند PR و PS وجود دارند که بر P می‌گذرند و l را قطع نمی‌کنند و همهٔ خطهای داخل زاویه RPS خط l را قطع می‌نمایند.

وانگهی زاویه‌های RPQ و SPQ متساویند. اگر متساوی نباشند یکی از آنها، مثلاً RPQ، بزرگتر است. زاویهٔ IPQ را مساوی SPQ جدا می‌کنیم؛ PI خط l را در J قطع خواهد کرد. بر l و در آن طرف Q که مقابل J است QK را مساوی QJ جدا کنید و PK را رسم نمایید. از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ همنهشت نتیجه خواهد شد که زاویهٔ QPK مساوی QPJ، پس مساوی QPS است. اما PS خط l را قطع نمی‌کند و تناقض پیدا می‌شود. نتیجه آن که زاویه‌های RPQ و SPQ متساویند.

بآسانی می‌توان نشان داد که این دو زاویه حاده‌اند. اگر قائمه بودند PR و PS بر یك امتداد واقع می‌شدند و این خط بر PQ عمود می‌بود. اما عمود بر PQ خط l را قطع نمی‌کند (اقلیدس یکم، ۲۸)، و علاوه براین تنها خطی نیست‌که بر P می‌گذرد و l را قطع نمی‌کند. نتیجه آن که خطهایی وجود خواهند داشت که بر P می‌گذرند ودر درون زاویهٔ RPS هستند و در این اوضاع و احوال l را قطع نمی‌کنند؛ و باز هم به تناقض بر می‌خوریم.

این نتیجه‌ها را می‌توان در این قضیه خلاصه کرد:

قضیه. اگر l خطی دلخواه و P نقطه‌ای دلخواه و ناواقع بر l باشند همواره دو خط وجود دارند که بر P می‌گذرند و l را قطع نمی‌کنند، و زاویه‌های حادهٔ متساوی با عمودی که از P بر l فرود آمده باشد می‌سازند و چنان هستند که هر خطی‌که بر P

بگذرد و در داخل زاویهٔ بین آن دو خط کـه شامل عمود PQ است واقع شوند l را قطع می‌کنند در صورتی که هر خط دیگری که بر P بگذرد آن را قطع نمی‌نماید.

همهٔ خطهایی که بر P بگذرند و l را قطع نکنند از دیدگاه اقلیدسی با l موازیند. اما در اینجا ما می‌خواهیم سرشت خاص دو خطی را که در قضیهٔ بالا گفتیم بشناسیم. این دوخط را دو موازی با l که برP می‌گذرند می‌نامیم وآن خطهای دیگر را ناقاطع نسبت به l نام می‌گذاریم. اندکی بعد کشف خواهیم کرد که اندازهٔ زاویه‌ای که هر یك از دو موازی با عمود وارد از P بر l می‌سازد بستگی دارد با h طول این عمود. زاویه را زاویهٔ توازی برای فاصلهٔ h می‌خوانیم و، برای تأکید بررابطهٔ تبعی که بین زاویه و فاصله هست،آن را با $\Pi(h)$ نمایش می‌دهیم. بموقع ممکن، و شایسته، خواهد بود کـه برای تمایز دوموازی از یکدیگر یکی را موازی دست راستی و دیگری را موازی دست‌چپی توصیف کنیم.

تمرین

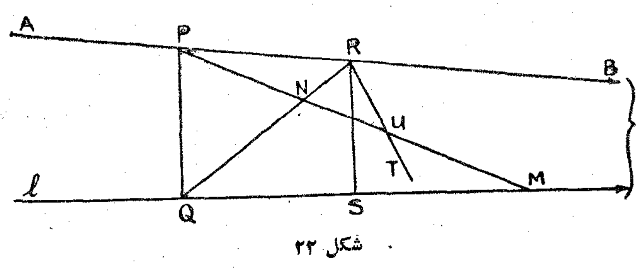
نشان دهید که هرگاه دو خط BA و BC با خط l موازی باشند آنگاه نیمساز زاویهٔ ABC عمود است بر l.

۳۸. خاصیتهای مقدماتی موازیها

برخی خواص موازیهای اقلیدسی بـرای موازیها در هندسهٔ هذلولـوی نیز محفوظ می‌مانند. در قضیه‌هایی که خواهند آمد سه خاصیت از این‌گونه را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. هرگاه خط راستی از یك نقطه موازی با خط مفروضی و در جهت معینی رسم شده بـاشد، آنـگاه آن خط در هر یك ازنقاطش در همان جهت بـا خط مفروض موازی است.

هرگاه AB (شکل ۲۲) یکی از دو موازی، مثلاً موازی دست راستی، با خط l



شکل ۲۲

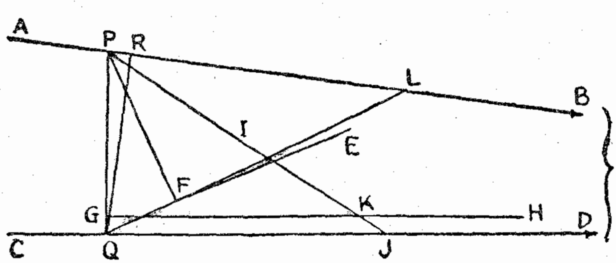
باشد که بر P بگذرد می‌خواهیم ثابت کنیم که AB موازی دست راستی با l در هریك از نقاط خود می‌باشد. دو حالت می‌توان در نظرگرفت.

حالت یکم. فرض کنید R نقطه‌ای از AB و در طرفی از P باشد که امتداد توازی است. PQ و RS را عمود بر l رسم کنید. باید ثابت‌کنیم‌که هر خطی‌که بر R بگذرد و در داخل زاویه SRB واقع‌شود l را قطع می‌کند. فرض کنید RT یك چنین خطی باشد و U را بـرآن اختیار نمایید. PU و RQ را رسم کنید. PU باید l را در نقطه‌ای مانند U قطع کند و به‌موجب اصل موضوع پاش باید با QR هم در نقطه‌ای مانند N تلاقی‌کند. بازهم با توسل به اصل موضوع پاش می‌بینیم‌که RU خط QM را قطع می‌کند، زیرا که پارهٔ NM را قطع می‌نماید نه پارهٔ QN را.

حالت دوم. R را نقطه‌ای بر AB و در طرف P که در جهت مقابل توازی است انگارید. در این حالت آنچه مورد نیاز است اختیار U است بـر هر نقطهٔ TR که از طرف R امتداد داده شده باشد؛ همان حروف را باید بکار برد وهمان روش را دنبال‌کرد. جزئیات برعهدهٔ خواننده محول می‌شود.

قضیهٔ ۲. اگر خطی موازی با خط دومی‌باشد خط دوم هم با اولی موازی است.

گیریم AB (شکل۲۳) موازی دست راستی با CD باشدکه بر P می‌گذرد. PQ را عمود بر CD و QR را عمود برAB رسم کنید. نقطهٔ R درطرف راست P خواهد افتاد (اقلیدس یکم، ۱۶). آنگاه برای اثبات آن کـه CD، کـه AB را قطع نمی‌کند، موازی AB است باید نشان دهیم‌که هر خطی‌که بر Q بگذرد و داخل زاویهٔ RQD باشد RB را قطع می‌کند.



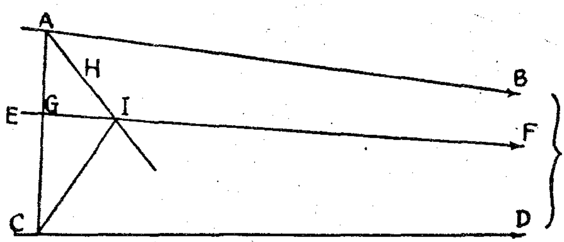
شکل ۲۳

فرض کنیدکه QE چنین خطی باشد و PF را عمود بر QE رسم کنید. F درآن طرف Q که E قرار دارد واقع می‌شود. در روی PQ طول PG را مساوی با PF جدا کنید. چون PF کوتاهتر از PQ است G بین P و Q می‌افتد. GH را در G بر PQ

عمود کنید. زاویهٔ GPI را مساوی با زاویهٔ FPB بسازید و PI را امتداد دهید تا CD را در J قطع کند. چون GH ضلع PQ از مثلث PQJ را قطع می‌کند و نه ضلع QJ را، با PJ درنقطه‌ای مانند K تلاقی می‌نماید. برروی PB طول PL را مساوی PK جدا کرده از F به L وصل کنید. چون مثلثهای PGK وPFL همنهشت هستند زاویهٔ PFL قائمه است. اما PFE زاویه‌ای است قائمه. بنابراین QE خط RB را در L قطع می‌کند.

قضیهٔ ۳. هرگاه دو خط در یك امتداد با خط مفروضی موازی باشند در همان امتداد با هم موازیند.

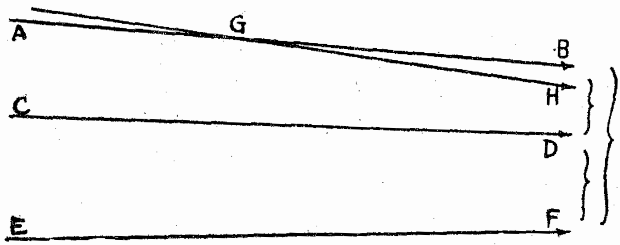
نخست حالتی را در نظر بگیرید که خط سوم بین[1] دو خط دیگر باشد. فرض کنید که AB و CD هر دو از یك امتداد با EF موازی باشند و فرض کنید که AC خط EF را در G قطع کند. خط دلخواه AH را در داخل زاویهٔ CAB بر A بگذرانید. این خط EF را در نقطه‌ای چون I قطع خواهد کرد. CI را رسم کنید. چون EF با CD موازی است وقتی که AI را امتداد دهیم CD را قطع می‌کند. چون AB خط CD را قطع نمی‌کند هر خطی که بر A بگذرد و در داخل زاویهٔ CAB باشد آن را قطع می‌نماید. نتیجه آن که AB و CD متوازیند.



شکل ۲۴

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که دوخط در یك طرف خط سوم باشند. فرض کنید AB و CD (شکل ۲۵) هر دو با EF در یك امتداد موازی باشند. فرض کنید که AB در آن امتداد معین با CD موازی نباشد. آنگاه از نقطهٔ نامشخص G واقع بر AB موازی GH با CD را در همان امتداد بکشید. از حالت اول نتیجه می‌شود که GH موازی EF است. اما بر G فقط یك موازی در این امتداد با EF می‌توان داشت. بنابراین GH باید بر AB منطبق باشد و AB موازی است با CD.

۱. ← قسمت ۹.



شکل ۲۵

۳۹. نقاط وهمی[۱]

دراینجا می‌خواهیم مفهوم بسیار مهمی وابسته به خطهای متوازی را بشناسانیم. دوخط متقاطع یك نقطهٔ مشترك دارند اما دوخط متوازی ندارند، زیرا که تقاطع‌نمی‌کنند. با وجود این دو خط موازی یك چیز مشترك دارند. شایسته آن است‌که این بستگی را با این بیان شناخت‌که دوخط موازی در یك نقطهٔ وهمی اشتراك دارند یا تقاطع می‌کنند. بدین طریق چنین انگاشته می‌شود که همهٔ خطهایی‌که در یك امتداد با خط معینی، و در نتیجه با یکدیگر، موازیند در یك نقطهٔ وهمی متقارب می‌شوند و یك دسته خطوط بایك رأس وهمی تشکیل می‌دهند. پس هر خط علاوه بر نقطه‌های عادی یا فعلی آن درنقطهٔ وهمی دارد که همه خطهایی کـه در دو امتداد با آن موازی باشند بر یکی از آن نقاط خواهند گذشت.

در حالی‌که نقطه‌های وهمی مفهومهایی هستند در این مورد نقطه‌های عادی نیز چنینند. واردکردن این عنصرهای وهمی پیش از هر چیز موضوع اصطلاح مناسبی است. گفتن این‌که دو خط در یك نقطهٔ وهمی تقاطع می‌کنند بیان دیگری است براین‌که دو خط متوازیند؛ گفتن این‌که خطی یك نقطهٔ عادی را بـه یك نقطهٔ وهمی خط مفروضی وصل می‌کند به این معنی است‌که از آن نقطهٔ عادی خطی موازی آن خط درآن جهت معین رسم شده است. ولـی جای شگفتی نیست دیدن آن کـه هرچه پیشتر برویم این موجودهای جدید ریاضی اهمیت بیشتری پیدا می‌کنند. در تـاریخ ریاضیات پیشتر از یك مثال می‌توان یافت‌که درآن فکری‌که برای مناسبتی پذیرفته شده بعداً به صورت مفهومی اساسی بسط یافته است. حقیقت آن‌که کاربرد این‌گونه عنصرهای وهمی عاملی مهم در گسترش هندسه و در تعبیر فضا بوده است. باز به این موضوع باز خواهیم گشت.

بتدریج معلوم خواهد شدکه تا وقتی که با خواص توصیفی محض سروکار داریم

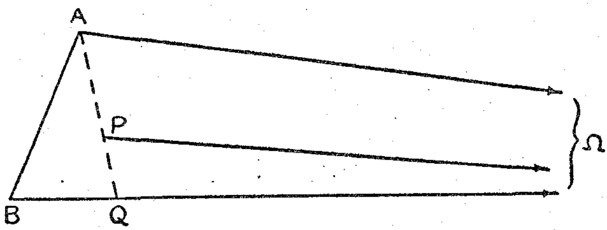
---

۱. نقطه وهمی (ایده‌آل) رابیشتر نقطهٔ در بی‌نهایت یا نقطهٔ بی‌نهایت دور نیز می‌گویند.

نیازی به‌آن‌نخواهد بودکه بین نقطه‌های عادی و وهمی فرقی قایل شویم. مثلاً دونقطهٔ متمایزخطی را مشخص می‌سازند، خواه هر دونقطه عادی باشند یا وهمی و یا یکی عادی باشد و دیگری وهمی. هیچ حالتی چشمگیرتر از مورد مثلثی نیست‌که دورأسش دونقطهٔ عادی و رأس سومش نقطه‌ای وهمی باشند. این شکل را بعد مطالعه خواهیم‌کرد.

۴۰. بعضی خاصیتهای یك شکل مهم

شکلی‌که تشکیل شده باشد از دو خط موازی و پاره خطی‌که یك نقطهٔ یکی از آن دو خط را به یك نقطه از خط دیگر وصل‌کند در آنچه خواهد آمد نقشی مهم‌دارد. فرض کنید $A\Omega$ و $B\Omega$ (شکل ۲۶) دو خط متوازی باشند. در اینجا این قرارداد را مراعات می‌کنیم که حروف بزرگ الفبای یونانی (معمولاً Ω) را برای نمایش نقطه‌های وهمی بکار می‌بریم. A، نقطهٔ دلخواهی ازخط اول، را به B، نقطهٔ دلخواهی از دومی،



شکل ۲۶

وصل می‌کنیم. شکل حادث از نوع مثلثی است که یك رأسش نقطه‌ای وهمی است؛ این مثلث خواص مشترك بسیار با مثلثهای معمولی دارد. نخست ثابت می‌کنیم که اصل موضوع پاش برای این شکل مثلث‌گونه معتبر است.

قضیهٔ ۱. اگر خطی از یکی از رأسها وارد شکل $AB\Omega$ شود ضلع مقابل را قطع می‌کند.

P (شکل ۲۶) را نقطهٔ دلخواهی در درون شکل فرض کنید. آنگاه AP و BP دو خط $A\Omega$ و $B\Omega$ را، در نتیجهٔ متوازی بودن آنها، قطع می‌کنند. فرض کنید AP خط $B\Omega$ را در Q قطع کند. $P\Omega$ را رسم کنید. اگر این خط ادامه یابد پاره خط AB را به موجب قضیهٔ پاش قطع خواهدکرد.

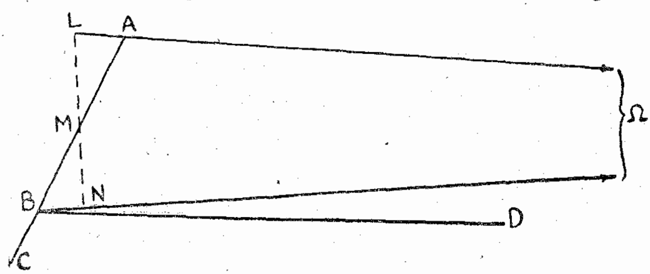
قضیهٔ ۲. اگر خطی یکی از اضلاع $AB\Omega$ را قطع کند اما بررأسی نگذرد یکی، و فقط یکی، از دو ضلع دیگر را قطع خواهدکرد.

هرگاه خط $A\Omega$ یا $B\Omega$ را قطع کند قضیه بآسانی ثابت می‌شود. اگر AB را در یك نقطهٔ R قطع کند کافی است $R\Omega$ را کشید و قضیهٔ ۱ را بکار برد. جزئیات به خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ معروف زاویهٔ خارجی هم برای این شکلها معتبر است.

قضیهٔ ۳. زاویه‌های خارجی $AB\Omega$ در A و B که ازامتداد AB بدست‌آیند بزرگترند از زاویهٔ متناظر داخلی مقابل به آنها.

فرض‌کنید AB (شکل ۲۷) از طرف B تا C امتداد یابد. باید ثابت کرد که زاویهٔ $CB\Omega$ بزرگتر است از زاویهٔ $BA\Omega$. بر B خط BD را بگذرانید چنان‌که زاویهٔ CBD را مساوی $BA\Omega$ بسازد. BD نمی‌تواند $A\Omega$ را قطع‌کند زیراکه در آن صورت مثلثی تشکیل می‌شودکه یك زاویهٔ خارجیش مساوی یکی از زاویه‌های مقابل داخلی



شکل ۲۷

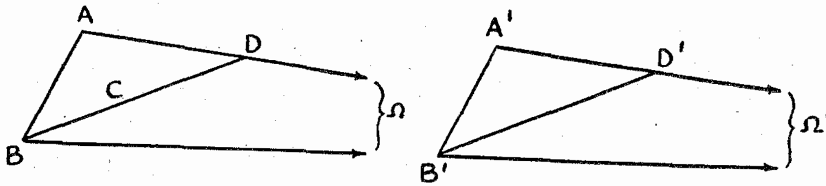
خواهد شد؛ بعلاوه نمی‌تواند بر $B\Omega$ منطبق ودر نتیجه با $A\Omega$ موازی شود. برای‌اثبات این نکته از M، وسط AB، MN را عمود بر $B\Omega$ رسم کنید. بر $A\Omega$ و در طرف AB مقابل با N طول AL را مساوی BN جدا کنید، ML را بکشید. بآسانی‌می‌توان نشان داد که MN و ML بر یك امتداد قرار دارند، زیرا که مثلثهای MNB و MLA همنهشت هستند اگر BD بر $B\Omega$ منطبق باشد. در این حالت نتیجه می‌شود که LN عمود است بر $A\Omega$ و $B\Omega$، هر دو، و زاویهٔ توازی برای فاصلهٔ LN قائمه است. اما این امر بی‌معنی است. پس BD در درون زاویهٔ $CB\Omega$ واقع می‌شود و این زاویه بزرگتر است از CBD. پس $CB\Omega$ بزرگتر است از $BA\Omega$.

حالا شرایطی را که با وجودآنها دوچنین شکل‌مانند $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$ همنهشت هستند شرح خواهیم داد.

قضیهٔ ۴. هرگاه AB و $A'B'$ برابرباشند و زاویهٔ $BA\Omega$ مساوی باشد با زاویهٔ

$B'A'\Omega'$، آنگاه زاویهٔ $AB\Omega$ مساوی است با زاویهٔ $A'B'\Omega'$، و دو شکل همنهشت هستند.

هرگاه زاویه‌های $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$ (شکل ۲۸) با شرایط مفروض نابرابر باشند یکی از آنها، مثلاً $AB\Omega$ بزرگتر است. زاویهٔ ABC را مساوی $A'B'\Omega'$ بسازید.



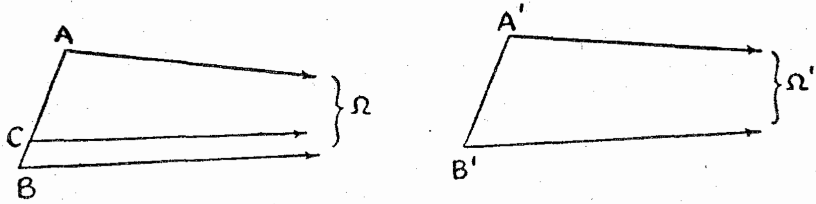
شکل ۲۸

فرض کنید BC خط $A\Omega$ را در D قطع کند. $A'D'$ را مساوی AD بر $A'\Omega'$ جدا کرده $B'D'$ را وصل کنید. آنگاه مثلثهای ABD و $A'B'D'$ همنهشتند، پس زاویهٔ $A'B'D'$ مساوی است با زاویهٔ ABD، یعنی با $A'B'\Omega'$. تناقضی که حاصل می‌شود ما را به این نتیجه می‌رساند که زاویه‌های $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$ برابرند.

شاید خاطر نشان کردن این نکته زاید باشد که وقتی که با رسم موازیها در جهت مخالف، یا تعویض دو زاویه باهم، یکی از شکلها برگردانده شود باز قضیه معتبر است.

قضیهٔ ۵. هرگاه زاویه‌های $BA\Omega$ و $B'A'\Omega'$ برابر باشند، همچنین زاویه‌های $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$، آنگاه پاره خطهای AB و $A'B'$ متساوی، و شکلها همنهشت هستند.

هرگاه با شرایطی که داده شده‌اند AB و $A'B'$ (شکل ۲۹) مساوی نباشند یکی

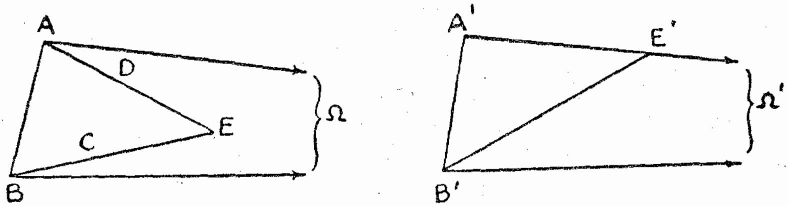


شکل ۲۹

از آنها، مثلاً AB، بزرگتر است. روی AB پاره خط AC را مساوی $A'B'$ جدا کنید. $C\Omega$ را رسم کنید. آنگاه $AC\Omega$ و $A'B'\Omega'$ همنهشت هستند و زاویه‌های $AC\Omega$ و $A'B'\Omega'$ متساویند. نتیجه آن که زاویهٔ $AC\Omega$ مساوی است با $AB\Omega$؛ اما این مطلب ناقض قضیهٔ ۳ است. پس AB و $A'B'$ برابرند.

قضیهٔ ۶. هرگاه پـاره خطهای AB و $A'B'$، زاویه‌هـای $AB\Omega$ و $BA\Omega$، و زاویه‌هـای $A'B'\Omega'$ و $B'A'\Omega'$ دو به دو برابر بـاشند، آنگاه هر چهار زاویه با هم برابرند و شکلها همنهشتند.

فرض کنید که چهار زاویه باهم برابر نباشند. در این صورت یك جفت از زاویه‌های متساوی، مثلاً $AB\Omega$ و $BA\Omega$، از جفت دیگر بزرگتر خواهند بود. زاویه‌های ABC و BAD (شکل ۳۰) را مساوی $B'A'\Omega'$ بسازید. BC و AD در نقطه‌ای چون E



شکل ۳۰

تقاطع خواهند کـرد. روی $A'\Omega'$ پاره خط $A'E'$ را مساوی AE جدا کرده از B' به E' وصل کنید. آنگاه مثلثهای ABE و $A'B'E'$ همنهشت می‌شوند. وقتی که نتیجه بگیریم که زاویه‌های $A'B'E'$ و $A'B'\Omega'$ متساویند به تناقض برمی‌خوریم. پس هر چهار زاویه باید متساوی باشند.

تمرین

۱. در شکل $AB\Omega$ مجموع دو زاویهٔ $AB\Omega$ و $BA\Omega$ همواره کمتر است از دو قائمه.

۲. هرگاه موربـی دو خط را قطع کند و مجموع دو زاویهٔ درونی کـه در یك طرف تشکیل می‌شوند مساوی دوقائمه باشد آنگاه دو خط نه متقاطعند و نه‌می‌توانند متوازی باشند؛ آنها خطهای ناقاطعند.

۳. گیریم دو خط موازی $A\Omega$ و $B\Omega$ و دو خط دیگر $A'C'$ و $B'D'$ داده شده باشند. ثابت کنید که اگر پاره خطهای AB و $A'B'$ بـا هم، زاویه‌های $BA\Omega$ و $B'A'C'$ با هم، و زاویه‌های $AB\Omega$ و $A'B'D'$ با هم مساوی باشند، آنگاه $A'C'$ و $B'D'$ متوازیند.

۴. هرگاه زاویه‌های $AB\Omega$ و $BA\Omega$ مساوی باشند شکل دارای ماهیت مثلث متساوی‌الساقینی است که رأسش نقطه‌ای وهمی است. ثابت کنید که اگر M نقطهٔ وسط AB باشد $M\Omega$ عمود است بر AB. و نیز نشان دهید عمودی که در M بر AB رسم شود موازی با $A\Omega$ و $B\Omega$ است و همهٔ نقطه‌هایی که برآن واقعند از آن دو خط به یك فاصله‌اند.

۵. ثابت کنیدکه اگر در شکل $AB\Omega$ عمودی که در وسط AB برآن رسم شود موازی $A\Omega$ و $B\Omega$ باشد آنگاه زاویه‌های A و B متساویند.

۶. هرگاه در دو شکل $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$ زاویه‌های $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$ برابر باشند اما پاره خط AB بزرگتر از پاره خط $A'B'$ باشد آنگاه زاویه $BA\Omega$ کوچکتر است از زاویهٔ $B'A'\Omega'$.

۴۱. زاویهٔ توازی

از قضیه ۴ قسمت پیشین آشکار می‌شود که زاویهٔ توازی $\Pi(h)$ برای هر فاصلهٔ h ثابت است. بعلاوه به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۳ بر می‌آید که:

$$h_1 \gtrless h_2 \Rightarrow \Pi(h_1) \lessgtr \Pi(h_2)$$

از قضیهٔ قسمت ۳۷ می‌دانیم که هر فاصله‌ای زاویهٔ توازیی متناظر با آن دارد. خاطرنشان‌شده است. این زاویه برای فاصلهٔ مفروضی همیشه یکی است و زاویه کوچکتر می‌شود وقتی که فاصله بزرگتر شود، و بزرگتر می‌شود وقتی که فاصله کوچکتر گردد. بزودی نشان داده خواهد شد که به هر زاویهٔ حاده‌ای فاصله‌ای متناظر است که آن زاویه زاویهٔ توازی آن است. در این حال البته زاویه‌های متساوی باید فاصله‌های متناظر متساوی داشته باشند. چون این نتایج را پهلوی هم قرار دهیم نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{\delta \to 0} [\Pi(h+\delta) - \Pi(h)] = 0$$

پس اگر h پیوسته تغییر کند $\Pi(h)$ نیز پیوسته تغییر می‌کند.

شاید لازم باشد دراینجا خاطرنشان شود که تاکنون هیچ واحد خاصی برای اندازه‌گرفتن فاصله‌ها یا زاویه‌ها در نظر گرفته نشده است. رابطهٔ تبعی که بیان شده است صرفاً هندسی است. بعد، وقتی که واحدهای معینی پذیرفته شوند صورت تحلیلی $\Pi(h)$ بدست خواهد آمد. با وجود این وقتی که h به سوی صفر گراید $\Pi(h)$ به زاویه قائمهٔ نزدیك می‌شود و می‌توان نوشت:

$$\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$$

که درآن π در حال حاضر فقط به‌صورت نمادی است که زاویهٔ نیم‌صفحه را نشان‌می‌دهد. وقتی که h نامتناهی شود $\Pi(h)$ به صفر نزدیك می‌شود، یا با علامتهای قراردادی.

$$\Pi(\infty) = 0$$

بعلاوه دلیلی نیست که وقتی h منفی باشد برای $\Pi(h)$ معنایی قایل نشویم. هیچ چیز ما را به این کار مجبور نمی‌کند و فقط از آن‌رو این کار را می‌کنیم که مناسب بنظر می‌رسد. این گونه تعمیم ما را قادر می‌سازد که بعداً از استثناهایی اجتناب کنیم. تعریف $\Pi(h)$، وقتی که h منفی باشد، انتخابی است، اما ما این انتخاب را از روی اصولی بجا

خواهیم آورد.

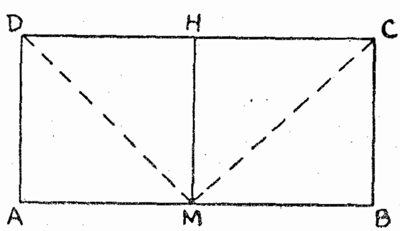
وقتی‌که h مثبت باشد با بزرگتر شدن h مقدار $\Pi(h)$ تنزل می‌کند. وقتی که h مساوی ۰ شود $\Pi(h)$ قائمه می‌شود. اگر فکر کنیم که h حین نزول منفی می‌شود طبعاً باید فکر کنیم که $\Pi(h)$ ترقی می‌کند و منفرجه می‌گردد. خلاصهٔ کلام $\Pi(-h)$ با این رابطه مشخص می‌شود:

$$\Pi(h)+\Pi(-h)=\pi$$

۴۲. چهار ضلعی ساکریی

یادآوری می‌شود که ساکری برای تتبعات خود به‌نحوی اصولی از یك چهارضلعی استفاده کرد که با رسم دو عمود متساوی بر دو انتهای پاره خطی در یك طرف آن و با وصل کردن انتهای آن دو حاصل می‌شد. این چهار ضلعی با دو زاویهٔ قائمه و دو ضلع روبروی متساوی معمولاً چهار ضلعی ساکریی نامیده می‌شود. به‌بررسی بعضی ازخواص آن می‌پردازیم. ضلع مجاور به‌دو زاویهٔ قائمه را معمولاً قاعده یا پایه، و ضلع روبروی آن‌را تارك، و زاویه‌های مجاور به‌تارك را زاویه‌های تارك می‌نامیم.

قضیه. خطی که نقطه‌های وسط قاعده‌وتارك چهارضلعی ساکریی را به‌هم‌وصل کند بر هر دو عمود است؛ زاویه‌های رأس متساوی و حاده‌اند.



شکل ۳۱

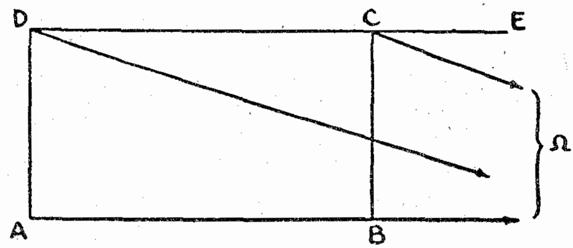
فرض کنید AB (شکل ۳۱) قاعدهٔ چهار ضلعی ساکریی $ABCD$ باشد. M و H نقطه‌های وسط قاعده و تارك را به هم وصل کنید، و CM و DM را رسم نمایید. اثبات همنهشتی مثلثهای DAM و CBM دشوار نیست، همچنین، به‌نوبت خود، از تساوی DHM و CHM. تساوی زاویه‌های تارك و نیزتساوی زاویه‌های MH با DC و با AB نتیجه می‌شود.

فرع. قاعده و تارك چهار ضلعی ساکریی خطهای نامتقاطعند.

این که زاویه‌های تارك حاده‌اند ودر نتیجه هندسهٔ هذلولوی هندسهٔ فرض ساکریی زاویهٔ حاده است چنین به‌اثبات می‌رسد:

فرض کنید $D\Omega$ و $C\Omega$ دو خط باشند که از D و C، دو انتهای تارك چهار ضلعی

ساکریی ABCD (شکل ۳۲) از یك جهت موازی بـا AB کشیده شده باشند. فرض کنید E نقطهٔ دلخواهی واقع برامتداد DC، در طرف C، باشد. آنگاه موازیهای CΩ و DΩ، بترتیب، در داخل زاویه‌های ECB و EDA می‌شوند، زیرا کـه DC ناقاطع



شکل ۳۲

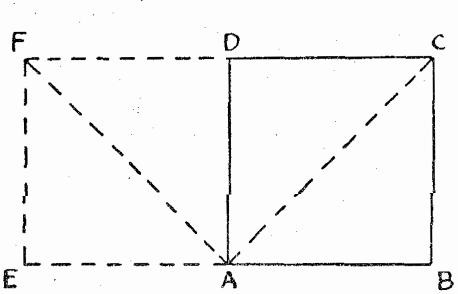
نسبت به AB است. زاویه‌های ADΩ و BCΩ، که زاویه‌های توازی برای فاصله‌های متساوی هستند متساویند. بعلاوه در شکل CDΩ زاویهٔ خارجی ECΩ بزرگتر است از زاویهٔ داخلی مقابل آن CDΩ. بدین ترتیب زاویهٔ BCE بزرگتر است از زاویهٔ ADC، ودرنتیجه بزرگتراست از زاویهٔ DCB. بنابراین‌دوزاویهٔ متساوی‌تارك‌حاده‌اند.

۴۳. چهار ضلعی لامبرتی

خواننده به‌یاد می‌آورد که لامبرت بـه عنوان شکل اساسی در پژوهشهای خود یك چهار ضلعی بکار برد که سه زاویهٔ آن قائمه بودند. این چهار ضلعی سه قـائمه که آن را چهار ضلعی لامبرتی می‌نامیم نقشی مهم درگسترشهای بعدی ایفا می‌کند.

قضیهٔ ۱. در یك چهار ضلعی سه قائمه زاویهٔ چهارم حاده است.

گیریم ABCD (شکل ۳۳) چهارضلعی‌لامبریتی‌باشدکه‌زاویه‌های A و B و D در آن قـائمه‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم که زاویهٔ C حاده است.

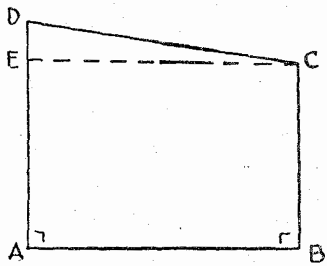


شکل ۳۳

BA را از طرف A تـا E ادامه دهید چنان کـه EA مساوی AB شود. در E عمود EF را مساوی BC بـر BE رسم کنید. F را بـه A و D وصل کنید و AC را بکشید. از

همنهشتی مثلثهای قائم‌الـزاویهٔ FEA و CBA همنهشتی مثلثهای FAD و CAD نتیجه می‌شود. پس زاویهٔ FDA قـائمه است و نقاط F و D و C بـر یك امتدادند و EBCF چهار ضلعی ساکریی است. پس C حاده است.

قضیهٔ مفیدی مربوط بـه یك چهار ضلعی عامتر را که فقط دو زاویهٔ قائمه دارد در اینجا می‌توان وارد کرد. از آن در دم بعضی خاصیتهای مهم چهار ضلعیهای ساکریی و لامبرتی بر می‌آیند.



شکل ۳۴

قضیهٔ ۲. هرگاه در چهار ضلعی ABCD (شکل ۳۴) زاویه‌هـای دو رأس متوالی A و B قائمه باشند، آنگاه زاویهٔ در رأس C بزرگتر از زاویهٔ D، یا کوچکتر از آن، است بر حسب آن که AD بزرگتر از، یا کوچکتر از، BC باشد؛ و بعکس.

هرگاه AD بزرگتر از BC باشد برAD پاره خط AE را مساوی BC جداکرده EC را رسم‌کنید. آنگاه ABCE یك چهار ضلعی ساکریی است و زاویه‌های AEC و BCE برابرند. چون

$$\angle AEC > \angle ADC \quad و \quad \angle BCD > \angle BCE$$

پس

$$\angle BCD > \angle ADC$$

به همین راه، اگر AD کـوچکتر از BC بـاشد می‌توان نشان داد که زاویهٔ BCD کوچکتر است از زاویهٔ ADC.

اثبات عکس با استفاده از برهان خلف به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

تمرین

۱. ثابت کنید که هرگاه در شکل ۳۴ زاویه‌هـای A و B قائمه و زاویه‌های C و D برابر باشند شکل چهار ضلعی ساکریی است.

۲. ثابت‌کنید‌که در هرچهار ضلعی لامبرتی ضلعهای مجاور به زاویهٔ حاده بزرگترند از ضلعهای متناظر مقابل آنها.

۳. درچهار ضلعی ساکریی تارك بزرگتر است یا قاعده؟

۴. ثـابت کنید که هرگاه از دو انتهای یك ضلع مثلثی عمودهـایی بر خطی که بر وسطهای دوضلع دیگر می‌گذرد فرودآوریم یك چهارضلعی ساکریی تشکیل می‌شود. به عنوان نتیجه ثابت‌کنید که عمودمنصف هر ضلع مثلث عمود است بر خطی‌که وسطهای دو ضلع دیگر

را به هم وصل می‌کند.

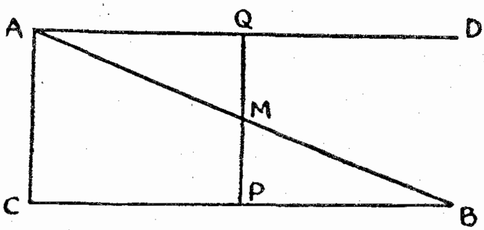
۵. ثابت کنیدکه پاره‌خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل کند کوچکتر است از نصف ضلع سوم[1].

۶. ثابت کنید که خطی‌که از وسط یك ضلع مثلث بر خطی که ضلع دیگر مثلث را به زاویهٔ قائمه نصف می‌کند عمود باشد بر وسط ضلع سوم می‌گذرد.

۷. ثابت کنیدکه خطی‌که بر وسطهای دو ضلع متساوی چهار ضلعی ساکریی می‌گذرد عمود است بر خطی که وسطهای قاعده و تارك را به‌هم وصل می‌کند، و قطرها را هم نصف می‌کند.

۴۴. مجموع زاویه‌های مثلث

قضیهٔ ۱. مجموع زاویه‌ها هر مثلث قائم‌الزاویه کمتر است از دو قائمه.



شکل ۳۵

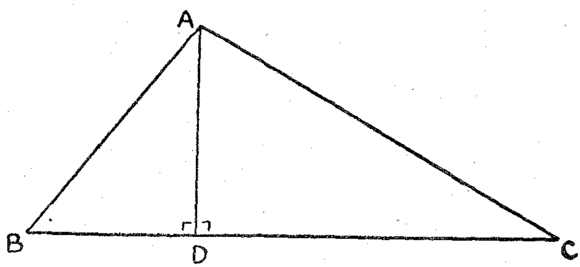
فرض‌کنید ABC مثلثی قائم‌الزاویه در C باشد (شکل ۳۵). می‌دانیم که هریك از دو زاویهٔ دیگر حاده است زیرا که‌مجموع دوزاویهٔ مثلث همواره کوچکتر است از دو قائمه. در A زاویهٔ BAD را مساوی زاویهٔ ABC بسازید. از M وسط AB خط MP را عمود بر CB رسم کنید. P بین B و C واقع خواهد شد. بر AD پاره خط AQ را مساوی PB جداکرده MQ را رسم کنید. آنگاه مثلثهای MBP و MAQ همنهشتند و نتیجه می‌شود که زاویهٔ AQM قائمه است و نقاط Q و M و P بریك خط قرار دارند، و در نتیجه ACPQ چهار ضلعی لامبرتی است‌که زاویهٔ A درآن حاده است. بدین ترتیب مجموع زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC کوچکتر است از یك قائمه و مجموع هر سه زاویهٔ آن کوچکتر است از دو قائمه.

---

[1] یانگ چنین فرض کرد و آن را به عنوان اصل موضوعی سرشتنما در بسطی از هندسهٔ هذلولوی بکار برد. با فرض آن‌که پاره خط مساوی باشد با ضلع سوم، یا بزرگتر باشد از آن، بترتیب هندسه‌های سهموی یا بیضوی نتیجه می‌شوند. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* ← جلد چهل و یکم، ۱۹۱۰، ص ۳۵۳-۳۶۳، و *American Journal of Mathematics* جلد ۳۳، ۱۹۱۱، ص ۲۴۹-۲۸۶

قضیهٔ ۲. مجموع زاویه‌های هر مثلث کوچکتر است از دو قائمه.

قضیه برای مثلث قائم‌الزاویه ثابت‌شد. پس فرض می‌کنیم که هیچ یك از زاویه‌های مثلث ABC (شکل ۳۶) قـائمه نباشد. چون دست‌کم دو زاویه از هر مثلث حاده‌اند زاویه‌های B و C را حاده انگاشته ارتفاع AD را از A رسم می‌کنیم؛ D بین B و C



شکل ۳۶

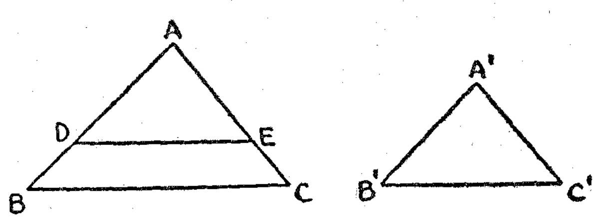
واقع می‌شود. بدین ترتیب مثلث ABC به دو مثلث قـائم‌الزاویهٔ ADB و ADC تجزیه می‌شود. چون مجموع زاویه‌های ABD و BAD کوچکتر است از یك قائمه و نیزمجموع ACD و CAD کوچکتر است از یك قائمه مجموع زاویه‌های مثلث ABC کوچکتر می‌شود از دو قائمه.

تفاضل بین دو زاویهٔ قائمه ومجموع زاویه‌های مثلثی را کاستی آن مثلث گویند.

فرع. مجموع زاویه‌های هر چهار ضلعی کمتر است از دو قائمه.

قضیهٔ ۳. هرگاه سه زاویهٔ مثلثی بترتیب با سه زاویهٔ مثلثی دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشتند.

فرض کنید زاویه‌های A و B و C از مثلث ABC (شکل ۳۷) بترتیب مساوی باشند با زاویه‌هـای A′ و B′ و C′ از مثلث A′B′C′. هرگاه دو ضلع متناظر، مثلاً



شکل ۳۷

و $A'B'$ برابر باشند البته دو مثلث همنهشت هستند. فرض کنید که AB و $A'B'$ مساوی نباشند و AB بزرگتر باشد. برروی AB پاره خط AD را مساوی $A'B'$ و برروی AC پاره خط AE را مساوی $A'C'$ جدا کنید. هم‌اکنون تحقیق خواهد شد که AE کوتاهتراست ازAC. چون مثلثهای ADE و $A'B'C'$ همنهشتند واضح است که BCED چهار ضلعیی است که مجموع زاویه‌هایش مساوی است با چهار قائمه. اما چنین چیزی ممکن نیست، پس AB و $A'B'$ باید برابر، و مثلثها همنهشت، باشند.

هرگاه AE با AC مساوی می‌بود لازم می‌آمد که زاویه‌های BCA و DCA متساوی باشند. اما اگر ADکوچکتر از AB باشد چنین چیزی ممکن نیست. اگر AE بزرگتر از AC می‌بود وضعی پیش می‌آمد که در آن یك زاویهٔ خارجی مثلث مساوی می‌بود با یك زاویهٔ داخلی مقابل به آن، و این نیز شدنی نیست.

بدین ترتیب به این نتیجه شایان توجه می‌رسیم که در هندسه هذلولوی مثلثهای متشابه یا چهار ضلعیهای متشابه که اندازه‌هایشان یکی نباشد وجود پیدا نمی‌کنند.

در قسمت ۵۴ خواهیم دیدکه وقتی که سه زاویهٔ مثلثی داده شده باشند چطور آن‌را می‌توان ساخت.

تمرین

۱. با استفاده از قضیهٔ ۲ اثبات لم۲ قسمت ۱۳ را تغییر دهید تا بتوانید ثابت کنید که هرگاه خطی که بر نقطهٔ مفروضی گذشته است و خط مفروضی را قطع می‌کند حول نقطهٔ مفروض دوران کند تا به حالت توازی با خط مفروض نزدیك شود، آنگاه زاویه‌ای که با خط مفروض تشکیل می‌دهد به صفر نزدیك می‌شود. به‌بیان دیگر نشان دهیدکه چگونه می‌توان دو خط متوازی را دو خط انگاشت که به زاویهٔ صفر تقاطع می‌کنند.

۲. ثابت کنیدکه دو چهار ضلعی ساکریی که رأسها و زاویه‌های رأسشان متساوی باشند، یا قاعده‌ها و زاویه‌های رأسشان برابر باشند، همنهشتند.

۳. خطی را که یك رأس مثلثی را به نقطه‌ای از ضلع روبرو وصل کند مورب[1] گویند. مورب مثلث را به‌دو زیر مثلث تقسیم می‌کند و هریك از آن دو می‌تواند بوسیلهٔ موربی تقسیم‌گردد، و به‌همین قیاس. ثابت کنیدکه هرگاه مثلثی بوسیلهٔ موربها به تعدادی متناهی زیر مثلث تقسیم شود، کاستی آن مثلث مساوی است با مجموع کاستیهای مثلثهایی که از این افراز نتیجه شده‌اند. این حکم دربارهٔ کاستی مثلث در مقایسه با مساحت آن چه فکری را القا می‌کند؟

---

۱. ← هیلبرت، *Grundlagen der Geometrie*، چاپ پنجم، ص ۵۸ (لایپزیك و برلین، ۱۹۲۲)، یا ترجمه انگلیسی آن بتوسط E. J. Townsend زیر عنوان *The Foundations of Geometry*، ص ۶۳ شیکاگو ۱۹۰۲).

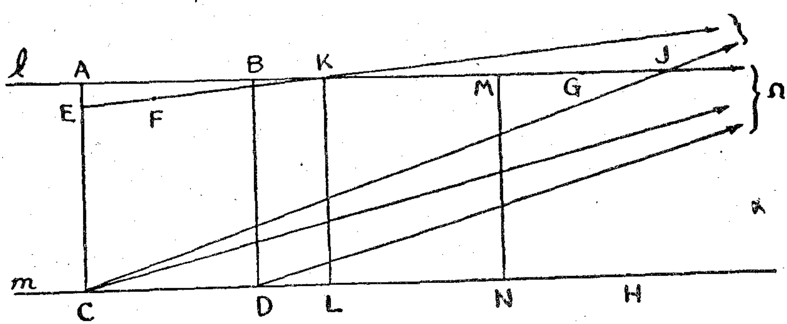
۴. ثابت کنید کـه مجموع زاویه‌هـای یك n پهلو کوچکتر است از (n-۲). برابر دو قائمه.

۴۵. عمود مشترك دو خط نامتقاطع

بار دیگر دقت خود را به خطهای نامتقاطع معطوف می‌سازیم. اگر دو خط بریك خط عمود باشند آن دو خط نـامتقاطعند. عکس حکم نیز صحیح است و یکی از جالب‌توجه‌ترین خاصیتهای خطوط نامتقاطع را توصیف می‌کند.

قضیه. دو خط نامتقاطع یك، و فقط یك، عمود مشترك دارند.

فرض کنیدکه l و m یك جفت خط نامتقاطع‌باشند (شکل ۳۸). دو نقطهٔ دلخواه A و B بر l اختیارکرده عمودهـای AC و BD را بر m رسم نمایید. هرگاه AC و



شکل ۳۸

BD متساوی باشند ABCD چهار ضلعی ساکریی است، و در دم ازآن نتیجه می‌شود که l و m دارای عمود مشترکـی هستند. اگر AC و BD مساوی نباشند فرض کنید که AC درازتر باشد و برروی آن CE را مساوی DB جدا کنید. از E خط EF را در طرفی از AC که B و D قرار دارند رسم کنید، چنان کـه زاویهٔ CEF مساوی زاویهٔ DBG باشدکه درآنG نقطه‌ای دلخواه از l است درطرف مقابل A نسبت بهB.

قصد ما اثبات این است‌که هرگاه EF به‌اندازهٔ کافی امتداد یابد l را قطع خواهد کرد. برای این‌کار CΩ و DΩ را موازی با l در جهت AB رسم کنید[1]. این خطها باید بترتیب در درون زاویه‌های ACH و BDH واقع شوند (H نقطهٔ دلخواهی است از

---

۱. درست همان اصطلاحاتی را بکار می‌بریم که در توضیح ترسیم شکل متداولند. هنوز نشان نداده‌ایم‌که چگونه می‌توان بر نقطهٔ معین خطی موازی گذراند، اما استدلال به این امر ارتباطی ندارد.

m در طرفی از D مقابل C. چون زاویهٔ HDΩ بزرگتر است از HCΩ خطی چون CJ که بر C بگذرد و با CH همان زاویه‌ای را بسازدکه DΩ با آن می‌سازد l را در نقطه‌ای مانند J قطع خواهدکرد. مقایسهٔ شکلهای FECJ و GBDΩ ما را متقاعد می‌سازد کـه EF موازی CJ است و در نتیجه بـاید ضلع AJ از مثلث ACJ را در نقطه‌ای چون K قطع می‌کند.

KL را عمود بر m رسم‌کنید. بر l و m، بترتیب، در آن طرف BD که‌مقابل AC است طول BM را مساوی EK و طول DN را مساوی CL جداکرده MN را رسم کنید. بـه کمك مثلثهای همنهشت بآسانی می‌توان نشان داد کـه چهار ضلعیهای EKLC و BMND همنهشتند. در نتیجه MN عمود است بـر m و MN و KL برابرند. خطی‌که نقطه‌های وسط تارك و قاعدهٔ چهار ضلعی ساکریی KMNL را به‌هم وصل می‌کند عمود مشترك l و m است.

بیشتر از یك چنین عمود مشترکی وجود نمی‌تواند داشته باشد زیرا که اگر دو چنین عمود میسر بود چهار ضلعیی بدست می‌آمد بـا چهار زاویهٔ قائمه. و چنین چیزی شدنی نیست.

دقت شما را به این واقعیت جلب می‌کنیم کـه استدلال بالا[1] نه تنها وجود عمود مشترکی منحصر بـه فرد برای دو خط نامتقاطع را ثابت می‌کند بلکه بـا فرض آن‌که بتوان از یك نقطه موازیهایی با یك خط رسم‌کرد روش ساختن عمود مشترك را، وقتی‌که دو خط داده شده باشند، میسر می‌سازد.

۴۶. نقطه‌های ابروهمی

در هندسهٔ هذلولوی دو خط یا تقاطع می‌کنند، یا متوازیند، یا نامتقاطع. پیشتر[2] اصطلاح مناسبی برای خطهای موازی اختیار کرده‌ایم وآن نگریستن در آنها به صورت خطهای متقاطع است. زمان آن رسیده است که این مفهوم را به خطهای نامتقاطع نیز سرایت دهیم.

چنان‌که از اسمشان برمی‌آید، دوخط نامتقاطع نقطهٔ مشترك ندارند، اما در چیزی اشتراك دارند؛ و آن عمود مشترك است. با همان سبکی‌که برای معرفی نقطه‌های وهمی عمل شد رابطهٔ وجود عمود مشترك را بدین‌صورت می‌شناسیم‌که بگوییم دوخط نامتقاطع در یك نقطهٔ ابروهمی[3] اشتراك دارند، یا یکدیگر را در یك نقطه ابروهمی قطع می‌کنند.

۱. منتسب به هیلبرت، همان اثر، ص ۱۶۴.

۲. ← قسمت ۳۹.

3. Ultra - ideal

بدین ترتیب همهٔ خطهای عمود بریک‌خط را چنان می‌نگریم که در نقطه‌ای ابروهمی‌تقاطع می‌کنند یا دسته‌ای تشکیل می‌دهند که رأس آن نقطه‌ای ابروهمی است. پس دو خط نامتقاطع یك نقطهٔ ابروهمی را معین می‌کنند و دسته‌ای از خطوط که این نقطه رأس آن است عبارت است از همهٔ خطوطی که عمود مشترك آن دو خط را به زاویهٔ قائمه قطع کنند. متناظر با هر نقطهٔ ابروهمی خطی وجود دارد که خط نمایندهٔ آن نقطه است و هر خطی که برآن خط نماینده عمود باشد برآن نقطهٔ ابروهمی می‌گذرد؛ و متناظر با هر خط یك نقطهٔ ابروهمی وجود دارد که همهٔ عمودهای برآن خط از آن نقطه می‌گذرند. این قرارداد را مراعات خواهیم کرد که نقطه‌های ابروهمی را با حروف بزرگ الفبای یونانی (معمولاً Γ) می‌نامیم و نمایهٔ پایینی به آن می‌دهیم که معرف خط نماینده است. پس Γ_l مشخص‌کنندهٔ یك نقطهٔ ابروهمی است که همهٔ خطهای عمود بر l برآن می‌گذرند.

ماهیت و اهمیت این دیدگاه تازه، که از آن خطوط نامتقاطع بچشم خطوط متقاطع نگریسته می‌شوند، اکنون باید برخواننده به‌نحوی معقول روشن باشد. بسیاری از نکات کلی که به هنگام معرفی نقاط وهمی گفتیم برای نقاط ابروهمی هم معتبرند.

تمرین

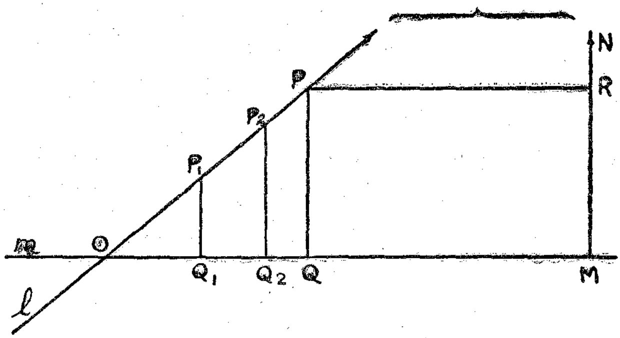
ثابت کنید که هر خط تعدادی نامتناهی نقاط ابروهمی را در بردارد.

۴۷. تغییر فاصلهٔ بین دو خط

اکنون بر سرآنیم که تأثیر تغییر موضع نقطه بر خطی را در طول عمودی که از نقطه بر خطی دیگر فرود آید تعیین کنیم. برحسب آن‌که دو خط متقاطع، یا متوازی، یا نامتقاطع باشند سه حالت پیش می‌آید.

قضیهٔ ۱. دو خط متقاطع شروع از نقطهٔ تقاطعشان پیوسته وامی‌گرایند و فاصلهٔ عمودی نقاط یکی از دیگری بیحد زیاد می‌شود وقتی‌که نقطه از نقطهٔ تقاطع دور شود، و کوتاهتر می‌شود وقتی‌که نقطه به سوی نقطهٔ تقاطع سیر کند، هرقدر هم که طولی که می‌پیماید کوچك باشد.

فرض‌کنید l و m (شکل ۳۹) دو خط دلخواه ناعمود متقاطع در O باشند؛ فرض کنید P_1 و P_2 دو نقطه دلخواه واقع بر l و در یك طرف O باشند به قسمی که OP_2 بزرگتر از OP_1 باشد. P_1Q_1 و P_2Q_2 را عمود بر m بکشید. در این صورت در چهار- ضلعی دو قائمهٔ $P_1P_2Q_2Q_1$ زاویهٔ $P_2P_1Q_1$ منفرجه، و زاویهٔ $P_1P_2Q_2$ حاده، است؛



شکل ۳۹

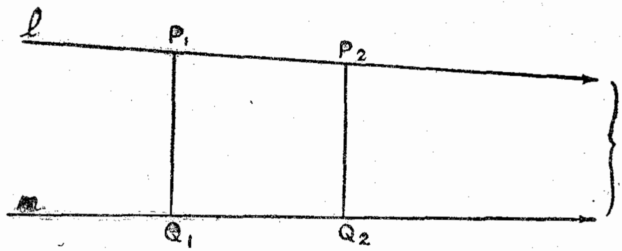
پس P_2Q_2 بزرگتر است از P_1Q_1. بدین ترتیب ثابت کردیم که عمودی که از یك نقطهٔ واقع بر یکی از دو خط متقاطع بر دیگری فرود آید با دور شدن نقطه از نقطهٔ تقاطع بزرگتر می‌شود و با نزدیك شدن نقطه به‌نقطهٔ تقاطع کوچکتر می گردد. برای کامل کردن استدلال باید نشان‌داده شود که نقطه را می‌توان طوری اختیار کرد که فاصله مساوی باشد با، یا در نتیجه بزرگتر یا کوچکتر باشد از، هرطول معین. این بدان معنی است که ثابت شود که هر گاه یك زاویهٔ حاده و طول ضلع روبروی آن از مثلث قائم‌الزاویه‌ای داده‌شده باشند مثلث را می‌توان ساخت، هرقدر طول ضلع بزرگ یا کوچك باشد. این را کمی بعد ثابت خواهیم کرد و در حال حاضر آن را اثبات شده فرض می کنیم. خواننده باید توجه کند که این ساختمان در هندسه هذلولوی به‌سادگی هندسه اقلیدسی نیست.

باوجود این آموزنده خواهد بود که بی‌تأخیر و از راهی دیگر ثابت شود که فاصله از هر پاره خط معینی بزرگتر می‌شود وقتی که نقطه از O دور شود. بـه این منظور یادآوری می کنیم که به هر زاویه حاده‌ای که به‌عنوان زاویهٔ توازی نگریسته شودفاصله‌ای متناظر است. کمی بعد راهی خواهیم گفت برای این که وقتی زاویه داده شود فاصله‌ساخته گردد. وقتی که در شکل ۳۹ زاویهٔ P_1OQ_1 را زاویه توازی فرض‌کنیم OM را برm مساوی فاصلهٔ متناظر با آن جدا می کنیم وMN را عمود برm می کشیم. آنگاه MN با l موازی است. برای اثبات‌آن که فاصلهٔ نقطه‌ای واقع برl ازm درازتر ازهرپاره‌خط، هرقدر هم دراز باشد، تواند شد، MR را برMN مساوی طول‌آن پاره‌خط‌جدا کنید و عمود بر MN در R را رسم کنید. بآسانی می‌تـوان دیدکه این عمود l رادر نقطه‌ای مانند P قطع می‌کند و عمود PQ که از P برm رسم شود بزرگتر است ازRM، پس بزرگتراست از پاره خط مفروض. باید توجه داشت که بـا این که از هر نقطهٔ خط l می‌توان عمودی بر خط m رسم کرد هرگاه عمودی بر m از نقطه‌ای مانند Q رسم شود این عمود در

صورتی l را قطع خواهد کرد که OQ کوچکتر از OM باشد، و وقتی که Q بر M منطبق شود عمود با l موازی خواهد بود، واگر OQ از OM بزرگتر شود عمود هیچگاه با l نقطهٔ مشترك نخواهد داشت.

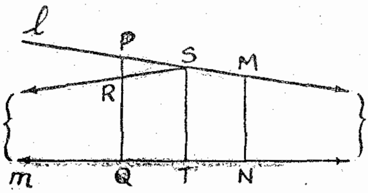
قضیهٔ ۲. دوخط متوازی پیوسته در امتداد توازی به‌یکدیگر می‌گرایند و در امتداد مقابل توازی از یکدیگر وامی‌گرایند، و فاصلهٔ عمودی هر نقطهٔ یکی از دیگری از هر طول مفروضی کوچکتر تواند شد وقتی‌که نقطه در امتداد توازی حرکت‌کند و از هر طول مفروضی بزرگتر تواند شد وقتی‌که نقطه در امتداد مقابل توازی سیر نماید.

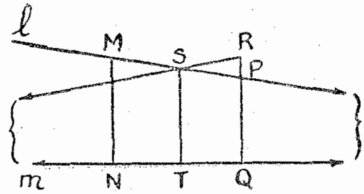
فرض کنید l و m دو خط متوازی (شکل ۴۰)، و P_1 و P_2 دو نقطهٔ واقع بر l باشند، و P_2 نسبت به P_1 درجهت توازی قرارگرفته باشد. چون در چهار ضلعی



شکل ۴۰

دو قائمهٔ $P_1P_2Q_2Q_1$ زاویهٔ در P_1 کوچکتر است از زاویهٔ در P_2، P_2Q_2 کوتاهتر است از P_1Q_1. حال آنچه که لازم است اثبات شود این است که همیشه می‌توان نقطه‌ای بر l یافت که فاصلهٔ عمودیش از m مساوی مقدار معین باشد، این مقدار معین هر قدر بزرگ یا هر قدر کوچك فرض شود. برای این کار از هر نقطه مانند P (شکل ۴۱) واقع بر l عمود PQ را بر m رسم کنید. اگر PQ مساوی فاصلهٔ داده‌شده باشد نقطهٔ مطلوب بدست‌آمده است. درغیر این صورت بر QP، یا بر امتداد QP، طول QR را مساوی فاصلهٔ داده شده‌جدا کنید، از R خطی موازی m درجهت مخالف





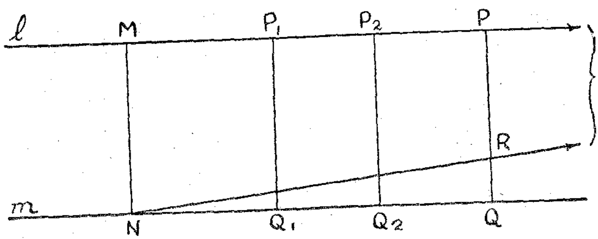
شکل ۴۱

جهت l بکشید. جلوتر نشان داده شده است که این موازی، اگر در صورت ضرورت در جهت مخالف توازی امتداد داده شود، در نقطه‌ای مانند S بوسیلهٔ l قطع می‌شود. ST را عمود بر m رسم کنید. بر روی l و m در طرف ST که مقابل PQ است طولهای SM و TN را بترتیب مساوی SR و TQ جدا کنید. M را به N وصل کنید. اکنون برای اثبات این که MN عمود بر m و مساوی فاصلهٔ مفروض است اشکالی نیست.

بدین ترتیب روشن است که خطوط متوازی مانند هندسهٔ اقلیدسی همه‌جا به یک فاصله نیستند. چون فاصلهٔ یك نقطهٔ واقع بریکی از دو خط از خط دیگر به‌صفر می‌گراید وقتی که نقطه در جهت توازی حرکت کند، و خطها به معنی دقیق کلمه تقاطع نمی‌کنند آنها را مجانبی گویند. اکنون خواننده در وضعی است که یکی از شایان توجه‌ترین سرشتهای هندسهٔ هذلولوی را باز شناسد: دو خط متوازی همواره همنهشتند.

قضیهٔ ۳. دو خط نامتقاطع پیوسته در هر یك از دو طرف عمود مشترکشان از یکدیگر وامی‌گرایند، و فاصلهٔ عمودی هر نقطه یکی از دیگری کوتاهترین است وقتی که روی عمود مشترك اندازه گرفته شود وبزرگ می‌شود وقتی که نقطه از عمود مشترك در هر یك ازدو جهت دورگردد، ومی‌تواند از هر مقدار، هرقدرهم بزرگ باشد، بزرگترشود.

فرض کنید l و m (شکل ۴۲) دو خط نامتقاطع دلخواه باشند و MN عمود مشترك آنها باشند. فرض‌کنید P_1 و P_2 دو نقطهٔ دلخواه واقع بر l در یك طرف M، و MP_2 بزرگتر از MP_1 باشند. P_1Q_1 و P_2Q_2 را عمود بر m رسم کنید. برای چهار-



شکل ۴۲

ضلعیهای لامبرتی MP_1Q_1N و MP_2Q_2N نشان می‌دهد که P_1Q_1 و P_2Q_2 هر دو بزرگترند از MN و زاویه‌های MP_1Q_1 و MP_2Q_2 حاده‌اند. آنگاه در چهار ضلعی دو قائمهٔ $P_1P_2Q_2Q_1$ زاویهٔ در P_1 بزرگتر است از زاویهٔ در P_2 و در نتیجه P_2Q_2 بزرگتر است از P_1Q_1. بدین ترتیب وقتی که نقطه‌ای در طول l حرکت کند و از M دور شود فاصله عمودی آن از M زیادتر می‌شود.

اثبات این‌که فاصله پیوسته به فزونی می‌گراید و از هر فاصلهٔ داده شده‌ای، هرقدر بزرگ باشد، بزرگتر تواند شد ازاینجا نتیجه می‌شود که می‌توان ثابت کرد که با دوطول داده شدهٔ MN و P_1Q_1، با شرط این‌که MN از P_1Q_1 بزرگتر باشد، هرقدر هم P_1Q_1 بزرگ باشدهمواره می‌توان چهارضلعی‌لامبرتی منحصر به‌فردی مانند MP_1Q_1N ساخت. اما برای اثبات‌آن‌که فاصله بی‌حد بزرگ تواند شد نیازی نیست‌که منتظر اثبات آنچه گفتیم باشیم. فرض کنید (شکل ۴۲) P نقطه‌ای بر l باشد و عمود PQ را بر m رسم کنید. ازN خطی موازی l درطرفی از MN که P واقع است بکشید. با وصل کردن P به N می‌توان دیدکه این موازی PQ را در R قطع می‌کند بقسمی‌که PQ بزرگتر است ازRQ. اما RQ فاصلهٔ عمودی یکی ازنقاط یکی از دوخط متقاطع است ازدیگری. وقتی‌که P از M دور شود R از N دور می‌شود و RQ بی‌حد بزرگ می‌تواند شد، پس همچنین PQ.

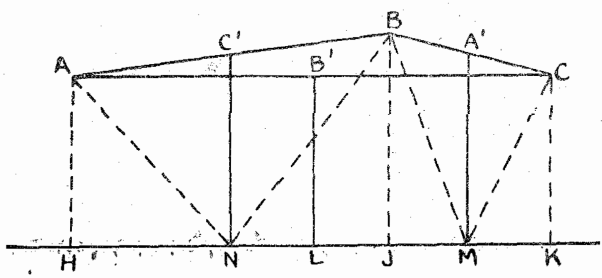
۴۸. عمودمنصفهای ضلعهای مثلث

درهندسهٔ هذلولوی، مانند هندسهٔ اقلیدسی، عمودمنصفهای اضلاع مثلث متقاربند؛ همچنین‌نیمسازهای زاویه‌ها ونیزارتفاعهای مثلث و میانه‌های آن. اما دراینجا گاهی باید خطها را در نقطه‌ای وهمی یا نقطه‌ای ابروهمی متقاطع گرفت. برهانهای این تقاربها برروی هم بـآسانی هندسهٔ اقلیدسی دست نمی‌دهند. برخی از دشواریهایی کـه با آنها برخورد می‌شود در سرشت خود اساسی هستند. مـا در اینجا فقط به‌یکی از این قضیه‌ها می‌پردازیم و بزودی از آن استفاده نیز خواهیم کرد.

قضیه. عمودمنصفهای اضلاع مثلث متقاربند.

سه حالت باید در نظرگرفت.

حالت یکم. هرگاه عمود منصفهای دو ضلع مثلثی در نقطه‌ای عادی تلاقی کنند،



شکل ۴۳

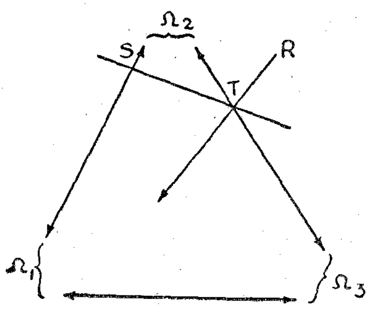
با استفاده از قضیه‌های همنهشتی، درست مانند هندسهٔ اقلیدسی، می‌توان ثابت کرد که عمودمنصف ضلع سوم هم برآن نقطهٔ تقاطع می‌گذرد.

حالت دوم. هرگاه عمودمنصفهای دو ضلع مثلثی نـامتقاطع باشند، آنگاه عمود مشترکی خواهند داشت و در نقطه‌ای ابروهمی تقاطع خواهندکرد. ثابت خواهیم کردکه عمودمنصف ضلع سوم هم براین عمود مشترك عمود است، یعنی برآن نقطهٔ ابروهمی خواهد گذشت.

فرض‌کنید ABC (شکل ۴۳) مثلث و A'، B'، C'، بترتیب وسطهای‌ضلعهای روبروی A، B، C باشند. فرض‌کنید که عمودهای براضلاع AB و BC در C' و A' نامتقاطع باشند. آنها عمود مشترکی دارند مانند MN. باید ثابت کنیم‌که عمود برضلع AC در B' هم عمود است بر MN.

AH و BJ و CK و $B'L$ را عمود برMN رسم‌کنید. آنگاه اگر خطهای AN وBN وBMوCMکشیده شوند بآسانی‌می‌توان ثابت‌کردکه AH وCK هردوبرابرند با BJ، و درنتیجه برابر با یکدیگرند. بدین ترتیب AHKC یك چهار ضلعی ساکریی است و خط $B'L$ کـه بر B' وسط تارك می‌گذرد عمود است برپایه و نیز عمود است بر تارك. و این نکته ثابت می‌کندکه عمودهای‌منصف سه ضلع مثلث در این حالت یك نقطهٔ مشترك ابروهمی دارند.

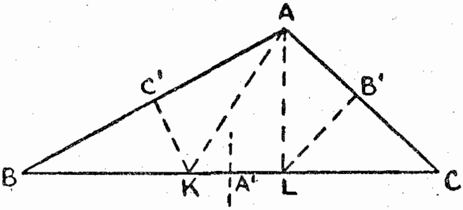
حالت سوم. درآخر، اگر عمودمنصفهای دوضلع مثلثی متوازی باشند عمودمنصف ضلع سوم باید با هر یك از آنها موازی بـاشد. زیرا که اگر هر دو را قطع کند یا نسبت به هردو ناقاطع باشد درنتیجهٔ آنچه‌که دربالا ثابت‌کردیم تناقضی پیش می‌آید. تنها چیزی که باقی‌مانده است تعیین این است کـه آیا دو عمودمنصف متوازی در همان جهت با سومی موازیند یا در جهت مخالف. ثابت خواهیم کرد که وضع اخیر ناممکن است.



شکل ۴۴

هرگاه دو عمودمنصف کـه با هم موازیند بـا سومین در جهات مخالف موازی باشند می‌توان‌گفت که یك مثلث $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ (شکل۴۴) تشکیل خواهند داد که سه رأسش نقطه‌های ابروهمی هستند. اما هیچ خطی نمی‌تواندکه هر سه ضلع چنین مثلثی را در نقاط عادی قطع کند. هرگاه مثلاً ST خط $\Omega_1\Omega_2$ را در S و خط $\Omega_2\Omega_3$ را در T قطع نماید، با رسم $T\Omega_1$ و امتداد دادن آن در جهت مخالف تـا نقطه‌ای مانند R، آشکار می‌شود

که ST واقع خواهد شد در درون زاویه‌های $\Omega_2T\Omega_1$ و $RT\Omega_3$، و در نتیجه نسبت به $\Omega_1\Omega_3$ ناقاطع خواهد بود اما، چنان‌که نشان خواهیم داد، همیشه دست‌کم یك خط وجود دارد که هر سه عمودمنصف اضلاع مثلثی را قطع می‌کند.



شکل ۴۵

فرض کنید که در مثلث ABC (شکل ۴۵) هیچ‌دوزاویه‌ای متساوی نباشند، و A بزرگترین زاویهٔ آن باشد. زاویهٔ BAK را مساوی زاویهٔ B و زاویهٔ CAL را مساوی زاویهٔ C بسازید. نتیجه می‌شود که عمود منصفهای هر سه ضلع مثلث ضلع BC را قطع می‌کنند. استدلال را می‌توان برای حالتهایی تغییر داد که دو زاویهٔ مثلث با هم، یا هر سه زاویه‌اش با یکدیگر، برابر باشند.

بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که هرگاه عمودمنصفهای دو ضلع مثلثی در نقطه‌ای وهمی تقاطع کنند عمودمنصف ضلع سوم باید برآن نقطهٔ وهمی بگذرد.

تمرین

۱. ثابت کنید که نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث متقاربند.

۲. ثابت کنید که عمود منصفهای اضلاع مثلث ارتفاعهای مثلثی هستند که رؤوسش وسطهای اضلاع آن مثلثند. آنگاه ثابت کنید که ارتفاعهای مثلث متقاربند مشروط به آن که دو خط که از دو رأس بر ارتفاعهای این دو رأس عمود رسم شوند در یك نقطهٔ عادی تقاطع کنند.

۴۹. رسم موازیها با یك خط از یك نقطه

در نتیجهٔ اصل موضوعی که مشخص‌کنندهٔ هندسهٔ هذلولوی است می‌دانیم که از هر نقطهٔ مفروض P دو خط می‌توان موازی با خط مفروض l رسم کرد. تاکنون نکوشیده‌ایم که نشان دهیم چگونه این خطها را می‌توان کشید. برای انجام این کار نیازمند لمی هستیم.

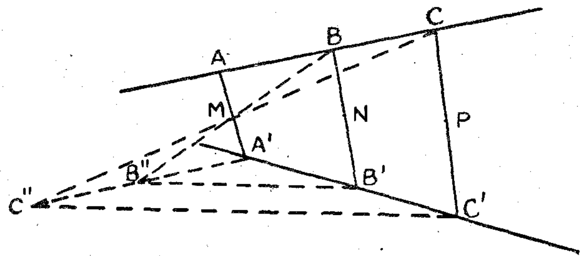
لم[1]. وسطهای پاره‌خطهایی که جفتهای نقاط متناظر از دو ردیف همنهشت از نقاط را به‌هم وصل می‌کنند بریك خط راست قراردارند، مگر وقتی‌که این پاره خطها یك

---

۱. J. Hjelmslev در مقالهٔ Neue Begründung der ebene Geometrie (مطالبی تازه در هندسهٔ مسطحه)، در *Mathematische Annalen*، جلد ۶۴، ۱۹۰۷، ص. ۴۴۹.

نقطهٔ وسط داشته باشند.

فرض کنید کـه ... ABC و ... $A'B'C'$ (شکل ۴۶) دو صف همنهشت از نقاط باشند چنان که $AB=A'B'$، $BC=B'C'$، ... و M و N و P، بترتیب، وسطهای AA' و BB' و CC' باشند. درك این نکته آسان است که اگر M بر N منطبق باشد P نیز چنین است، و همهٔ پاره‌خطها یك نقطهٔ وسط دارند. پس فرض می‌کنیم کـه M و



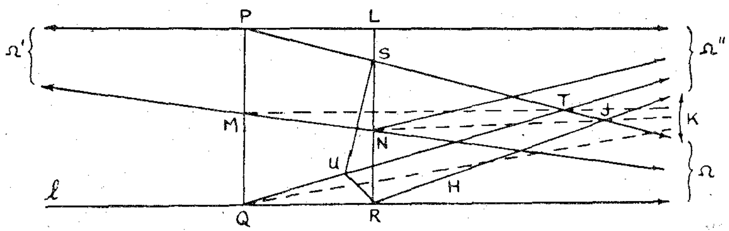
شکل ۴۶

N و P متمایز باشند. BM را وصل‌کرده تا B'' امتداد دهید بقسمی‌که $B''M$ با MB مساوی شود. در این صورت B'' و B' دو نقطهٔ متمایزند. چون B'' را بـه B' و A' وصل کنیم واضح است که عمودمنصف $B''B'$ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین $B''A'B'$ عمودمنصف قاعدهٔ مثلث $B''BB'$ نیز هست، پس عمود است بر MN (تمرین ۴ قسمت ۴۳). بعد $A'B''$ را تا C'' امتداد دهید بطوری کـه $B''C''$ مساوی باشد با BC، و $C''C'$ و $C''M$ و MC را رسم‌کنید. با استفاده از مثلثهای همنهشت بآسانی می‌توان نشان داد که C'' و M و C بـریك استقامتند و M وسط CC'' است. بنابراین عمود-منصف $C''C'$ قاعدهٔ‌مثلث متساوی‌الساقین $C''A'C'$ عمود منصف قاعدهٔ مثلث $C''CC'$ نیز هست، پس عمود است بر MP. اما عمودمنصفهای قاعده‌های مثلثهای متساوی-الساقین $B''A'B'$ و $C''A'C'$ یك خط هستند. نتیجه آن‌که MN و MP عمودند بر یك خط و M و N و P باید روی یك خط باشند.

فرع. اگر محملهای صفهای همنهشت نقاط متوازی باشند مکان هندسی وسطها با آنها در یك جهت موازی است.

اکنون کـه لم ثـابت شد آماده‌ایم کـه بـه مسألهٔ اصلی رسم خطهای موازی باز گردیم.

هرگاه l (شکل ۴۷) خطی دلخواه، و P نقطه‌ای دلخواه غیر واقـع بر l باشند،



شکل ۴۷

می‌خواهیم بر P دو خط موازی l را بگذرانیم. دقت‌خود را بریکی ازآنها، مثلاً موازی دست راستی $P\Omega$، محدود می‌کنیم، و چون می‌دانیم کـه چنین خطی وجود دارد فرض می‌کنیم آن را رسم‌کـرده بـاشیم. نخست عمود PQ از P بر l را بسازید. آنگاه نقطهٔ R را بر l و در آن طرف Q که در امتداد توازی است اختیارکنید. بر $P\Omega$ طول PS را مساوی QR جداکـرده SR را وصل کنید. M و N اوساط، بترتیب، PQ و RS را به‌یکدیگر ربط دهید. به‌موجب لم و فرع آن می‌دانیم‌که MN موازی است با l و PS. خط $\Omega'P\Omega''$ را بر P عمود بـر PQ بگذرانید. اگر NM را از طرف M امتداد دهید واضح است‌که با $P\Omega'$ موازی است. بر Q موازی دست راستی با $P\Omega''$ را بسازید؛ باید $P\Omega$ را در نقطه‌ای چون T قطع کند. بر $Q\Omega''$ طول QU را مساوی QR و PS جداکـرده SU و RU را رسم کنید. چون مثلثهای PTQ و STU متساوی‌الساقین هستند MT عمود است بر SU در وسط آن، ونیز عمود است بر خط $\Omega K\Omega''$ که $T\Omega$ و $T\Omega''$ دو خطی هستند که از T موازی آن رسم شده‌اند. بعلاوه چون مثلث UKR متساوی‌الساقین است عمودمنصف UR زاویهٔ $\Omega''K\Omega$ را نصف می‌کند و در نتیجه بر $\Omega K\Omega''$ نیز عمود است. از نتیجه‌های قسمت پیشین برمی‌آید که خط عمود برضلع SR از مثلث SUR در وسط آن عمود است بر $\Omega K\Omega''$. بنابراین این خط‌که از N عمودبر SR رسم شده است زاویـهٔ بین خط $N\Omega$ و خط $N\Omega''$ مرسوم از N و موازی $P\Omega''$ را نصف می‌کند. از این روی SR زاویهٔ $\Omega'N\Omega''$ را نصف کرده در L با $\Omega'P\Omega''$ تلاقی می‌کند و در این نقطه برآن عمود است. این مطالب را می‌توان چنین خلاصه کرد:

ترسیم[1]. برای این که از نقطه P غیر واقـع بر خط l خطی موازی l رسم کنید

---

۱. این ترسیم را بولیایی در بند ۳۴ *Appendix* معروف خود آورده است. اما اثبات آن را به Liebmann در *Nichteuklidische Geometrie*، ص. ۳۵-۳۷، چاپ‌دوم (برلین و لایپزیك ۱۹۱۲) مدیونیم.

عمود PQ را از P بـر l فرود آورید و بر روی l در هر دو طرف طول دلخواهی چون QR جدا کنید. از P خط PL را عمود بر PQ بکشید و عمود RL را از R بر PL رسم کنید. به‌مرکز P و با شعاعی مساوی QR قوسی بزنید تا LR را در S قطع کند. PS یکی از خطوط موازی l است کـه بر P گذشته است. موازی دیگر را با ساختن R در طرف دیگر Q و ادامهٔ عمل رسم می‌توان کرد.

این که قوسی که توصیف شد پاره خط LR را فقط در یك نقطه قطع می کند ناشی از این واقعیت است که فقط یك موازی در هر امتداد می‌تـوان رسم کرد، و ثابت کردیم که PS با QR مساوی است.

پیش از پرداختن به مطلبی دیگر می‌خواهیم به خاصیت دیگری از شکل ۴۷ اشاره کنیم که بزودی از آن استفاده خواهیم کرد. هرگاه RH بر R بگذرد و زاویهٔ SRH را مساوی $SR\Omega$ بسازد بآسانی می‌توان نشان داد که RH و $S\Omega$ در نقطه‌ای چون J برخورد می کنندکه عمود منصف SR برآن خواهد گذشت. اماچون این عمود بر $\Omega K\Omega'$ عمود است و زاویهٔ SJR را نصف می کند RJ باید خط دیگری باشدکه بر J می گذرد و با $\Omega K\Omega''$ موازی است و بدین ترتیب بـا $P\Omega''$ موازی می‌بـاشد. پس LR فاصلهٔ متناظر با زاویه LSP است اگر این زاویه را زاویهٔ توازی انگاریم.

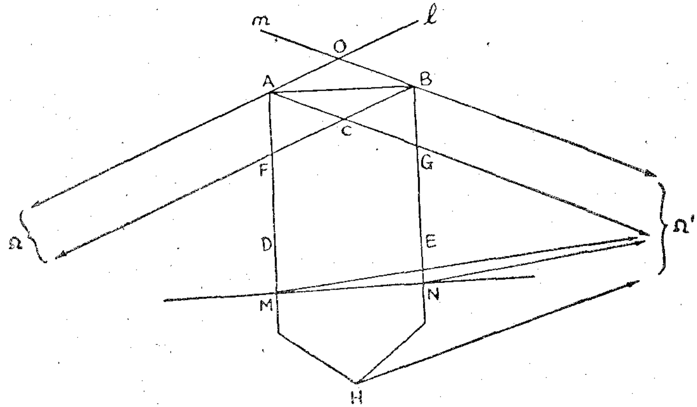
تمرین

لم را بکار ببرید و ثابت کنیدکه خطی که وسطهای پایه و تارك چهار ضلعی ساکریی را بهم وصل کند و خطی که وسطهای دو ضلع دیگر آن را بههم مربوط سازد و خط سومی کـه اوساط دو قطر آن را بـه یکدیگر ربط دهد بر یك نقطه می گذرنـد. (⟵ تمرین ۷ قسمت ۴۳).

۵۰. رسم موازی مشترك دو خط متقاطع

شاید خاطر نشان کردن این نکته لازم نباشدکه با ترسیمی که در بخش اخیر گفته شد می‌توان زاویهٔ توازی متناظر با هر فاصله را ساخت. به‌بیانی دیگر، هرگاه پاره خط d داده شده باشد ساختن $\Pi(a)$ میسر است. این مطلب ما را به ترسیم عکس متوجه می‌سازد: اگر $\Pi(a)$ داده شده باشد d را باید معین کرد؛ یا به‌صورتی دیگر، باید خطی رسم کـرد عمود بر یکی از دو خط متقاطع و موازی دیگری. مناسب می‌دانیم که اول ببینیم چگونه می‌توان موازی مشترك دو خط متقاطع را رسم کرد.

فرض کنید (شکل ۴۸) m و l دو خط متقاطع دلخواه، و O نقطهٔ برخورد آنها



شکل ۴۸

و $\Omega O\Omega'$ یکی ازچهار زاویه‌ای که باهم تشکیل می‌دهند باشند. A و B را بر $O\Omega$ و $O\Omega'$ طوری اختیارکنید که OA و OB مساوی باشند؛ AB را وصل کنید وموازیهای $A\Omega'$ و $B\Omega$ را رسم نمایید. دوخط اخیر درنقطه‌ای چون C تقاطع می‌کنند. AD و BE نیمسازهای زوایای $\Omega A\Omega'$ و $\Omega B\Omega'$ را بکشید تا $B\Omega$ و $A\Omega'$ را بترتیب در F و G قطع کنند. از مقایسهٔ شکلهای $AO\Omega'$ و $BO\Omega$ نتیجه می‌شود که زاویه‌های OAC و OBC برابرند، و درنتیجه زاویه‌های ΩAC و $\Omega' BC$ برابر می‌شوند. حالا آمادهٔ اثبات آن هستیم که AD و BE نامتقاطعند. نخست فرض می‌کنیم که AD و BE در H تقاطع کنند. آنگاه بآسانی می‌توان ثابت کرد که زاویه‌های BAH و ABH باهم، و درنتیجه AH و BH نیز باهم، برابرند. از ترکیب این نتیجه با برابری $HA\Omega'$ و $HB\Omega'$ نتیجه می‌گیریم که اگر $H\Omega'$ را رسم کنیم زاویه‌های $AH\Omega'$ و $BH\Omega'$ متساوی خواهند بود. اما چنین چیزی ممکن نیست. پس AD و BE متقاطع نمی‌توانند بود ـ این که اگر آنها را از طرف A و B امتداد دهیم تقاطع نخواهند کرد از این نتیجه می‌شود که مجموع زاویه‌های BFD و FBE کوچکتر است از دو قائمه.

بعد فرض می‌کنیم که AD و BE موازی باشند. در این حالت با مقایسهٔ شکل متشکل از دو متوازی $A\Omega$ و $F\Omega$ و مورب AF با شکل حادث از دو متوازی FD و BE و مورب FB بآسانی ثابت می‌کنیم که AF و FB متساویند، چون زاویه‌های ΩAF و FBE باهم، و نیز زاویه‌های $AF\Omega$ و BED باهم برابرند. پس زاویهٔ BAF مساوی است با زاویهٔ ABF. اما چنین چیزی شدنی نیست، بنابراین AD و BF، لااقل در جهت مورد نظر، متوازی نیستند؛ اما اگر متوازی می‌بودند می‌بایستی در این جهت باشند.

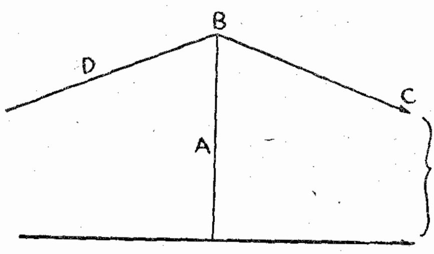
چون AD و BE نه متقاطعند و نه متوازی باید یك عمود مشترك یگانه داشته باشند. فرض کنیم MN آن عمود باشد. ثابت می‌کنیم کـه MN موازی است با $O\Omega$ و $O\Omega'$.

بررسی چهار ضلعی $AMNB$ آشکار می‌سازد کـه پـاره‌خطهای AM و BN برابـرند. بر فرض این‌که MN موازی $O\Omega'$ نباشد $M\Omega'$ و $N\Omega'$ را رسم کنید. از مقایسهٔ شکلهای $MA\Omega'$ و $NB\Omega'$ می‌فهمیم که‌بااین اوضاع‌زاویه‌های $AM\Omega'$ و $BN\Omega'$ برابرند. اما به این نتیجهٔ بی‌معنی می‌رسیم کـه شکل $MN\Omega'$ زاویه‌ای خارجی دارد مساوی با زاویهٔ داخلی مقابل آن. پس MN موازی l و m، هر دو، است، و بوضوح برای امتدادهایی که روی خطها معین است و بی‌توجه به‌طولهای OA و OB منحصر است به‌فرد. این روش نه‌تنها وجود یك موازی مشترك را ثـابت می‌کند بلکه راهی هم برای ساختن آن می‌دهد. در واقع دو خط متقاطع همواره چهار موازی مشترك دارند.

اما برای این‌که دو خط موازی مشترکی داشته باشند لازم نیست متقاطع باشند. برای هرگونه دو خطی می‌توان موازی مشترکی رسم کـرد. اگر خطها متقاطع نباشند کافی است از نقطه‌ای واقع بریکی خطی موازی دیگری رسم‌کرد و بعد موازی مشترك جفت خطهای متقاطع را رسم نمود. البته دو خط متوازی یك موازی مشترك دارند.

در خاتمه یادآور می‌شویم که ساختن خطی موازی دو خط بـا جهتهای معین را می‌توان به‌صورت ساختن خطی تعبیرکرد که بر دو نقطهٔ وهمی معین بگذرد.

۵۱. ساختن خطی عمود بر یکی از دو خط متقاطع و موازی با دیگری



شکل ۴۹

باز می‌گردیم بـه مسألهٔ رسم خطی‌عمود بریکی از دو خط‌متقاطع مفروض و موازی با دیگری، یـا، به‌صورتی دیگر، ساختن‌فاصلهٔ متناظر با هر زاویهٔ حاده‌ای‌که زاویهٔ توازی فرض شود. این ترسیم با استفاده از نتایج قسمت گذشته بـآسانی انجام می‌شود.

هرگاه زاویهٔ‌حادهٔ ABC (شکل۴۹) داده‌شده باشد، می‌خواهیم‌خطی‌رسم کنیم‌عمود بر BA و موازی با BC. آنچه لازم است ساختن زاویه‌ای است مانند ABD مساوی ABC. آنگاه موازی مشترك BC و BD عمود خواهد بود بر BA و موازی خواهد

بود با BC. مقدار زاویهٔ حادهٔ مفروض هرچه‌باشد، از نزدیك صفرتا نزدیك زاویهٔ قائمه، ترسیمی که گفته شد همواره میسر است.

بازهم توجه را به‌عام بودن ترسیم جلب می‌کنیم. خطی می‌توان عمود بریك خط و موازی با خطی دیگر کشید حتی اگر دوخط متقاطع نباشند، یعنی متوازی یا نامتقاطع باشند. به‌تغییری که باید در ترسیم در این حالتها داد قبلاً اشاره شده است.

تمرین

چند خط می‌توان عمود بر یك خط و موازی با دو خط دیگر رسم کرد وقتی که دوخط: (آ) یکدیگر را به زاویهٔ حاده قطع کنند؟ (ب) برهم عمود باشند؟ (ج) متوازی باشند؟ (د) نامتقاطع باشند؟.

۵۲. واحدهای درازا و زاویه

می‌گوییم واحدهایی که برای اندازه‌گیری زاویه بکار می‌بریم مطلق هستند زیرا که جزءهای مناسب زاویهٔ نیم صفحه یا زاویهٔ قائمه‌اند. زاویه‌های اخیر شکلهای بنیادی هستند زیرا که به دلخواه ساخته می‌شوند و اندازهٔ آنها هم تغییر نمی‌کند. نیازی نیست که زاویهٔ قائمه‌ای را در دفتر انگاره‌ها حفظ کنند. هرکس مایل باشد می‌تواند در هر زمان آن را با نهایت دقت بسازد.

اندازه‌گیری زاویه‌ها بستگی به نظریهٔ موازیها ندارد. آنچه دربارهٔ زاویه‌ها گفته‌ایم در هرسه هندسه معتبر است. دانش‌آموز عادت کرده است که با تقسیم زاویهٔ نیم صفحه بر π واحد زاویه را بدست آورد. ما هم درآنچه خواهدآمد این واحد را مناسب‌می‌دانیم و می‌پذیریم. آشکارا باید متوجه بود که مراد از π همان عدد مجردی است که شاید آسانترین توصیف آن این باشدکه چهار برابر مجموع رشتهٔ $۱ - ۱/۳ + ۱/۵ - ۱/۷ + ۱/۹ ...$ است و مقدار تقریبی آن ۳،۱۴۱۶ است. از دریچهٔ دیگری به آن نباید نگریست. تأکید می‌شود که مراد از π نسبت طول محیط دایره به قطر آن نیست. این نسبت ثابت در هندسهٔ اقلیدسی و در نتیجهٔ اصل موضوع توازی بدست می‌آید. چنان که کشف خواهیم کرد درهندسهٔ هذلولوی‌این نسبت متغیراست. درست آن که واحد زاویه‌ای که معین کردیم در اینجا آن تعبیر سادهٔ هندسهٔ اقلیدسی را ندارد.

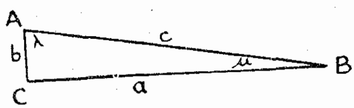
از سوی دیگر واحدهای درازا را که در هندسهٔ اقلیدسی بکار برده می‌شوند نسبی می‌گوییم. آنها دلخواه و قراردادی هستند. هیچ طول بنیادی وجود نداردکه بی‌نیاز به یك انگارهٔ محفوظ بتوان آن را ساخت و برهم زدو از نو ساخت. اگر قرار باشد که واحدها با زمان تغییر نکنند باید آنها را در دفتر انگاره‌ها یا محل دیگری حفظ کرد.

اکنون ما آماده‌ایم که بفهمیم چرا، برخلاف هندسهٔ اقلیدسی، در هندسهٔ هذلولوی واحدهای درازا مطلقند. متناظر با هرپاره خط، هرقدر بزرگ یا کوچك باشد، یك زاویهٔ حادهٔ منحصر به‌فرد وجود دارد کـه زاویهٔ تـوازی آن است، و بعکس. تناظر یك به یك میان پاره‌خطها و زاویه‌های حاده به ما توانـایی می‌دهد که هر پاره‌خط را با ارجاع به زاویهٔ متناظر آن معین کنیم. بدین ترتیب اگر بخواهیم می‌توانیم واحد طول آن پاره خطی را اختیارکنیم که زاویهٔ توازی آن $\pi/۴$ است. زاویه را بآسانی می‌توان ساخت؛ همچنین، دست کم از جنبهٔ نظری، واحد طول را.

نیازی به گفتن نیست که زاویه را به‌طور مستقیم نمی‌توان به‌عنوان مقیاسی برای پاره خط بکاربرد، زیرا که متناسب با آن تغییر نمی‌کند. در حقیقت با بزرگ شدن پاره خط زاویه‌کوچك می‌شود. در فصل‌آینده عملاً موفق خواهیم شدکه مسافت را به‌صورت تابعی از زاویه بیان‌کنیم. آنگاه واحد درازا متناظر با زاویه‌ای خواهد بودکه به ازای آن مقدار تابع مساوی ۱ است.

۵۳. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ وابسته

اینك در وضعی هستیم که ازنظریهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه نتیجه‌ای بس مهم بگیریم. اما برای احتراز ازابهام نشانه‌گذاری انگاره‌ای اختیار می‌کنیم.

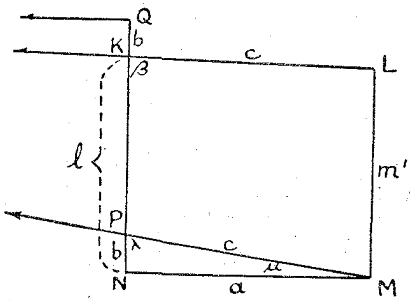


شکل ۵۵

فـرض کنید ABC (شکل ۵۰) مثلثی قائم‌الزاویه، و C رأس زاویهٔ قائمهٔ آن باشد. اندازه‌های زاویه‌هـای A و B را با λ و μ و اندازه‌های اضلاع روبـروی A و B و C را بترتیب با a و b و c نشان می‌دهیم. زاویه‌های $\Pi(a)$ و $\Pi(b)$ و$\Pi(c)$ را، بترتیب، با α و β و γ می‌نماییم. مسافتهای متناظر بـا λ و μ را، وقتی‌که زاویهٔ توازی گرفته شوند، l و m می‌نامیم، بطوری که λ عبارت از $\Pi(l)$ و μ عبارت از $\Pi(m)$ خواهند بود. متممهای‌زاویه‌های α، β، γ، λ، μ رابانمادهای α'، β'، γ'، λ'، μ' نشان‌می‌دهیم؛ وچون همه حاده‌اند مسافتهای متناظر با آنها را با a'، b'، c'، l'، m' تعیین‌می‌کنیم. بطوری‌که مثلاً مجموع $\Pi(a)$ و $\Pi(a')$ مساوی است با یك قائمه.

وقتی که در هندسهٔ هذلولوی از مثلث قائم‌الزاویه‌ای زاویهٔ μ و وتر c داده شده باشند آن را به نحوی منحصر می‌توان ساخت. ترسیم، که فقط محتاج به رسم عمودی از یك نقطه بر یك خط است، ساده است و در واقع همان است که در هندسهٔ اقلیدسی داشتیم. هیچ‌گونه محدودیتی در اندازه‌های، یا اندازه‌های نسبی، μ و c نیست جز این‌که زاویه باید حاده باشد.

با شروع از هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۵۰) یك چهار ضلعی لامبرتی KLMN (شکل ۵۱) می‌سازیم، که در آن زاویه در K حاده باشد و KL مساوی c و LM مساوی m' باشد. این کار را همیشه می‌توان فقط به یك نحو کرد، بدین‌سان که نخست یك زاویهٔ قائمهٔ KLM می‌سازیم که در آن LK مساوی c و LM مساوی m' باشند، عمود MN بر LM را در M رسم کرده آنگاه عمود KN را از K بر MN فرود می‌آوریم. به مرکز M و با شعاع c قوسی از دایره رسم می‌کنیم تا KN را در P قطع کند. می‌دانیم که این قوس KN را به دلیلی قطع می‌کند که در قسمت ۴۹ اثبات شد. در حقیقت MP موازی است با KL و زاویهٔ PML مساوی است با μ'، یعنی زاویهٔ توازی متناظر با فاصلهٔ m' است. در این صورت زاویهٔ PMN مساوی μ است، زیرا که



شکل ۵۱

زاویهٔ LMN قائمه است. به عبارتی دیگر دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PMN و ABC همنهشتند، و NM و PN بترتیب برابرند با a و b و زاویهٔ NPM برابراست با λ. بعلاوه از نکاتی که در پایان قسمت ۴۹ خاطرنشان شد نتیجه می‌گیریم که KN مساوی l است: بالاخره اگر NK را از طرف K تا Q امتداد دهیم بطوری که KQ مساوی b باشد عمودی که از Q بر KQ اخراج شود با MP موازی خواهد بود زیرا که PQ مساوی است با l. نتیجه آن که زاویهٔ NKL مساوی β، زاویهٔ توازی متناظر با فاصلهٔ b، است.

نتیجه‌های حاصل شده را چنین خلاصه می‌کنیم: هرگاه مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اجزای a، b، c، λ، μ (شکل ۵۰) داده شده باشد همیشه یك تنها چهار ضلعی لامبرتی KLMN (شکل ۵۱) با اجزای a، β، c، l، m' می‌توان ساخت؛ و بعکس. به بیان دیگر وجود، یا امکان ترسیم، یکی مستلزم وجود، یا امکان ترسیم، دیگری است.

خواننده باید با دقت مراقب باشد که وقتی مثلث داده شده است اجزای چهارضلعی لامبرتی را نامگذاری کند؛ و بعکس. وقتی که این مطلب را آموخت آمادگی خواهدداشت تا به‌طور کامل دنبالهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه و چهار ضلعیهای لامبرتی را که اینك شرح خواهیم داد دنبال کند.

همانطورکه گفتیم وجود مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اجزای

$$a،\ b،\ c،\ \lambda،\ \mu \qquad (۱)$$

وجود چهار ضلعی لامبرتی با اجزای a، β، c، l، m' را ایجاب می‌کند. آنگاه می‌توان یك چنین چهار ضلعی هم ساخت با اضلاعی که زاویه حادهٔ مبادله شده را در میان داشته باشند و نیز با اضلاع زاویهٔ قائمه که مقابل زاویـهٔ حاده است. چهار ضلعی لامبرتی با اجزای m'، β، l، c، a مستلزم وجود مثلث قائم‌الزاویهٔ دومی است با اجزای

$$m'،\ b،\ l،\ \gamma،\ \alpha' \qquad (۲)$$

اگر ترتیب اجزای این مثلث قائم‌الزاویه را عکس کنیم نتیجه می‌شود کـه چهار ضلعیی وجود دارد با اجزای b، μ'، l، a'، c'. عکس کردن ترتیب پهلوهای این چهار ضلعی به مثلث قائم‌الزاویه‌ای رهنمون می‌شود با اجزای

$$c'،\ m'،\ a'،\ \lambda،\ \beta' \qquad (۳)$$

به راهی همانند وجود مثلث‌قائم‌الزاویهٔ چهارمی با اجزای

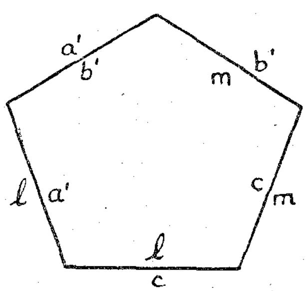
$$l'،\ c'،\ b'،\ \alpha'،\ \mu \qquad (۴)$$

نتیجه می‌شود. و نیز وجود مثلث پنجمی با اجزای

$$a،\ l'،\ m،\ \beta'،\ \gamma \qquad (۵)$$

اگر فرایند ادامه یابد دفعهٔ بعد مثلث اصلی بدست می‌آید و دوره بسته می‌شود. پس وجود یك مثلث قائم‌الزاویه دال است بروجود چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ وابسته.

بعد ثابت خواهد شدکه قادر بودن خواننده به نوشتن این رشتهٔ پنج مثلث وابسته درانجام بعضی ترسیمها و تغییر بعضی دستورها به‌اوکمك خواهدکرد. با استفاده از راهی که هم‌اکنون خواهیم گفت می‌توان این کار را کرد بی‌آن‌که نیازی باشد به از برکردن اجزا یا اقامه‌کردن سلسلهٔ دلیلهایی که در بالا گفتیم.



شکل ۵۲

حـرفهای a'، b'، c، l، m را در کنار ضلعهای یك پنج ضلعی به‌صورتی‌که در شکل ۵۲ می‌بینید در خارج آن بنویسید. بعد همین حرفها را با همان تـرتیب دوری در داخل بنویسید به قسمی‌که هرحرف درجهت‌مخالف حرکت‌عقربه‌های ساعت بـه اندازهٔ یك موضع دوران کـرده باشد. حال اگر از مثلث قائم‌الزاویهٔ a، b، c، λ، μ، شروع کنیم می‌تـوان بـه دومین مثلث وابسته رسید بدین ترتیب که در خارج پنج ضلعی حرفی را که متناظر با حرفی است که جزئی از مثلث اولی را مشخص می‌کند بیابیم و به جای آن حرفی را قرار دهیم که متناظر با آن

در داخل شکل نوشته شده است. بدین ترتیب به‌جای a حرف b قرار می‌گیرد زیرا که a' متناظر با b' است؛ و به جای b حرف m' قرار می‌گیرد، به دلیل آن‌که b' متناظر است با m؛ به‌جای c حرف l قرارمی‌گیرد، چون c متناظر است با l؛ و به‌جای λ حرف α'، زیرا که l متناظر است با a'؛ و بالاخره به‌جای μ حرف γ قرار می‌گیرد، چون m متناظر است با c. پس مثلث با اجزای b، m'، l، α'، γ، حاصل می‌شود. با استفاده از همین شکل به مثلث سوم خواهیم رسید در صورتی که حروف مثلث دوم را با حروف خارج وابسته سازیم و حروف متناظر داخل را به‌یاد بسپاریم؛ و این کار را ادامه دهیم تا دوره تمام شود. راه دیگر آن است که هر حرف داخلی را در جهت مخالف عقربه‌ها به اندازهٔ یك موضع دوران دهیم و از مثلث اول به مثلث سوم برسیم و با ادامهٔ این کار از اول به‌چهارم و پنجم دست یابیم.

شاید روش دیگری، که در همین حدود کار دارد، مرجح شناخته شود. پس از آراستن حروف درکنار اضلاع، یا اجزای، پنج ضلعی به‌صورتی که در خارج شکل ۵۲ دیده می‌شود، هر یك از جزءها را به عنوان جزء میانی اختیار کنید؛ ضلعهای مجاور آن را جزءهای مجاور و دو ضلع دیگر را جزءهای مقابل بنامید. آنگاه برای دست یافتن بر یکی از رشتهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ وابسته، هر یك از پنج ضلع را به‌عنوان جزء میانی اختیار نمایید و پاره خطی را که با حرف آن مشخص می‌شود وتر مثلث انگارید، پاره خطهای متمم پاره خطهایی را که بوسیلهٔ‌حروفی‌که درکنار جزءهای مقابل نوشته شده‌اند دو ضلع فرض کنید، و زاویه‌های توازی متناظر با پاره خطهایی را که بوسیلهٔ حروف جزءهای مجاور مشخص می‌شوند بترتیب زاویه‌های مقابل به آن اضلاع بگیرید. اگرهر جزء به نوبت جزء میانی گرفته شود هر پنج مثلث بدست می‌آیند.

به عنوان مثالی از کاربرد مثلثهای قائم‌الزاویهٔ وابسته به مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروضی نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان بریکی از دو خط متقاطع نقطه‌ای یافت که از خط دیگر به فاصلهٔ معینی باشد. این مسأله که پیشتر به‌آن اشاره شده است[1] هم‌ارز است با ساختن مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یك زاویهٔ حاده‌اش و ضلع مقابل به‌آن زاویه داده شده باشند.

هرگاه a، b، c، λ، μ، مثلثی باشدکه باید ساخت و b و μ داده‌شده باشند، آنگاه می‌دانیم که‌مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اجزای m'، b، l، γ،α' وجود دارد. چون μ معلوم است μ'، و در نتیجه، m' را می‌توان ساخت. در آن صورت ساختن مثلث دوم اشکالی ندارد زیرا که طول ضلعهایش معلوم است. چون یکی از زاویه‌هایش α' است کشیدن α

---

1. ← قسمت ۴۷.

و a ساده است. پس چون دو ضلع مثلث مطلوب معلومند ساختن آن آسان است. در ضمن در این مسأله محدودیتی برای اندازه‌های جزءهای معلوم مقرر نیست جز این‌که زاویه باید حاده باشد.

تمرین

۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را با داشتن دو زاویهٔ حادهٔ λ و μ بسازید. توجه کنید که چگونه قید آن را کـه مجموع دو زاویـهٔ λ و μ باید از یك قائمه کمتر باشد باید در نظر گـرفت.

۲. چهار ضلعیی لامبرتی را که دو ضلع زاویهٔ حادهٔ آن داده شده‌اند بسازید. آیا این ترسیم بی‌توجه به طولهای ضلعهای داده شده همواره میسر است؟

۳. یك چهار ضلعی ساکریی بسازید که پایه و دو زاویهٔ متساوی تارك آن داده شده باشند. همین کار را تکرار کنید وقتی‌که تارك و زاویه‌هـای تارك داده‌شده باشند.

۴. دوخط نامتقاطع داده شده‌اند. بر یکی از آنها نقطه‌ای پیدا کنید که فاصلهٔ‌عمودی آن از خط دیگر مقدار معینی باشد[۱]. توجه کنید‌که طولی‌که داده شده است باید بزرگتر باشد از فاصلهٔ خطها که بر روی عمود مشترك آنها اندازه می‌توان گرفت.

۵. یك شبه مربع بسازید، یعنی یك چهار ضلعی‌کـه زاویه‌هـای متساوی و ضلعهای متساوی داشته باشد.

۵۴. ساختن مثلث وقتی که زاویه‌های آن داده شده باشند

اکنون آنچه را برای ساختن مثلثی‌که سه زاویـه‌اش داده شده‌اند بایسته است در اختیار داریم. این ترسیم[۲] همیشه میسر است، البته مشروط به‌آن که مجموع سه زاویه از دو قائمه کمتر باشد.

اگر دو زاویهٔ معلوم، یا هر سهٔ آنها، برابر باشند ترسیم آسان است. در این‌صورت مسأله تبدیل می‌شود بـه مسألهٔ ساختن مثلث قائم‌الزاویه‌ای کـه زاویه‌های حاده‌اش معلوم باشند.

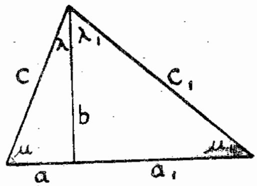
پس فرض می‌کنیم‌که زاویه‌ها نامساوی باشند. به‌منظور تحلیل مسأله فرض کنید که مثلث مطلوب کشیده شده باشد. می‌دانیم که دست‌کم دوتا از زاویه‌ها حاده‌اند. مناسب

---

۱. در قسمت ۴۷ فکری در این‌باره الهام شده است.

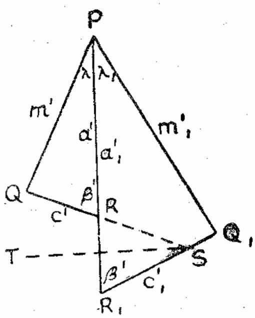
۲. منتسب به‌لیبمان. ← هندسهٔ نااقلیدسی، چاپ‌دوم، ص. ۴۲ (برلین ولایپزیك، ۱۹۱۲).

است که آنها را بـا μ و μ_1 نشان دهیم (شکل ۵۳). هـرگاه ارتفاع b از رأس سوم رسم شود زاویهٔ سوم را به دو زاویهٔ حادهٔ λ و λ_1، وضلع روبروی آن را بـه دو پاره خط a و a_1، تقسیم می‌کند. فرض کنید ضلعهای زاویـهٔ سوم c و c_1 باشند. مثلث مطلوب بدین ترتیب به دو مثلث



شکل ۵۳

قائم‌الزاویهٔ a، b، c، λ، μ، و a_1، b، c_1، λ_1، μ_1، تقسیم شده است. از نتیجه‌های قسمت گذشته برمی‌آید که وجود این مثلثها ایجاب می‌کند وجود مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را با اجزای c'، m'، a'، λ، β' و c_1'، m_1'، a_1'، λ_1، β'. این مثلثهای PQR و PQ_1R_1 (شکل ۵۴) می‌توانند ساخته شوند، و در نتیجه زاویه‌های λ و λ_1 مجاورهم و وتر که بر وتر قرار دارد. پس اگر QR و Q_1R_1، که در صورت لزوم یکی یا هر دو را امتداد دهیم، در نقطه‌ای چون S تقاطع کنند مثلث RSR_1 متساوی‌الساقین است و ST نیمساز زاویهٔ RSR_1 عمود است بر PR_1.



شکل ۵۴

این تحلیل به‌ترسیم آینده رهنمون‌می‌شود: فرض کنیم که سه زاویهٔ مثلثی، μ و μ' و $\lambda+\lambda_1$، داده شده باشند و دوتای اول حاده باشند. زاویهٔ QPQ_1 را مساوی $\lambda+\lambda_1$ بسازیـد و روی اضلاع آن PQ را مساوی بـا m' و PQ_1 را مساوی با m_1' جدا کنید؛ عمودهـای بر PQ و PQ_1 در نقاط Q و Q_1 را بکشید. اگر این دو عمود در S تقاطع کنند نیمساز آن زاویهٔ S را رسم کنید که عمودی که از P برآن فرود آید در داخل زاویهٔ QPQ_1 واقع شود. این عمود با QS همان زاویه‌ای را خواهد ساخت که با Q_1S' می‌سازد. این زاویه را β'، و زاویه‌هایی را که QPQ_1 بوسیلهٔ عمود به‌آنها تقسیم شده است λ و λ_1، بنامید. همین که پاره خط b ساخته شد ساختن مثلث مطلوب کاری است پیش پا افتاده.

ترسیمی که طرح آن آمد ظاهراً ملازمه دارد به این‌که QR و Q_1R_1 تقاطع کنند. اما تا آنجا که ما در پژوهش پیش رفته‌ایم اطمینان نیافته‌ایم که آنها هیچگاه متوازی یا نامتقاطع نشوند. اما نباید از این بابت دغدغه‌ای به خاطر راه دهیم زیرا که در هرحال عمود منصف RR_1 محور تقارن QR و Q_1R_1 است. ترسیم این خط، که در قسمت ۵۷ بـه آن خواهیم پـرداخت کاملاً کلی است و در هر یك از سه حالت ممکن است

بدست آید.

۵۵. مطلق

پیش ازآن‌که دقت خود را به‌مطالب دیگر مصروف داریم بجا است‌که چندنکته‌ای دربارهٔ نقطه‌های وهمی و ابروهمی بگوییم. دانسته‌ایم‌که هرگاه این‌دو مفهوم را بحساب بیاوریم این حکم‌که دو خط نقطه‌ای را مشخص می‌سازند همواره راست است. اما راست نیست که دو نقطه همواره یك خط را مشخص می‌سازند، و اشاره به‌موارد استثنا شایان توجه است.

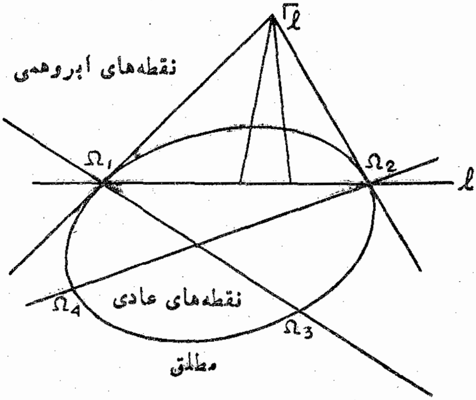
دو نقطهٔ عادی همیشه یك خط را مشخص می‌سازند و فرض براین است‌که خط را می‌توان‌کشید. یك نقطهٔ عادی و یك نقطهٔ وهمی یا ابروهمی یك خط را مشخص‌می‌سازند و در هرحالت خط را می‌توان رسم‌کرد وترسیم عبارت است از، در حالت اول، گذراندن خطی بریك نقطه و موازی درجهت معین با خطی مفروض و، در حالت دوم، رسم‌خطی عمود برخط دیگر. دیده‌ایم‌که یك خط، و فقط یك خط می‌توان رسم‌کردکه با هریك از دو خط مفروض در جهت معینی موازی باشد مشروط به آن که دو خط مفروض در آن جهتها با هم موازی نباشند. بنابراین دو نقطهٔ وهمی همیشه یك خط مشخص می‌سازند.

اما یك نقطهٔ وهمی و یك نقطهٔ ابروهمی، ونیز دو نقطهٔ ابروهمی، همیشه یك‌خط مشخص نمی‌سازند. در حالت اول مسأله مانند آن است‌که بخواهیم خطی موازی با یك خط و عمود بر خطی دیگر رسم‌کنیم. مورد استثنا وقتی است‌که نقطهٔ وهمی مفروض بر خطی‌که نمایندهٔ نقطهٔ ابروهمی است قرار داشته باشد. در حالت دوم مثل آن است که خواستهٔ شود خطی‌کشیده شود عمود بر هریك از دو خطی‌کـه نمایندهٔ نقطه‌های ابروهمی مفروضند. این‌کار فقط وقتی‌شدنی است‌که این‌دوخط نامتقاطع باشند. پس دونقطهٔ‌ابروهمی که خطهای نمایانندهٔ آنها متقاطع یا متوازی باشند یك خط مشخص نمی‌سازند.

مطالب ما دربارهٔ این خطها ممکن است به صورت شایان توجهی بوسیلهٔ ترسیمی که در شکل ۵۵ دیده می‌شود تنظیم‌گردند. مبتدی باید به آن فقط به صورت نموداری نگاه کندکه به شکل مناسبی رابطهٔ بین نقطه‌های عادی و نقطه‌های غیرعادی را نشان می‌دهد.

هرگاه خطی پیوسته گرد یکی از نقاط خود دوران کند هر نقطه‌اش، از جملهٔ هر نقطهٔ وهمیش، مسیر پیوسته‌ای رسم خواهد کرد. خطی کـه دوران می‌کند ضمن دوران زمانی فرامی‌رسدکه با هر خطی در هر امتدادی در صفحه در هر یك از دوجهت موازی شود. پس هر یك از نقطه‌های وهمی آن خط سرانجام بر یکی از نقاط وهمی صفحه منطبق

می‌شود. مسیری که بوسیلهٔ نقطه‌های وهمی خط رسم می‌شود مکان‌هندسی همهٔ نقاط وهمی صفحه است وما این مکان هندسی را یك مقطع مخروطی توصیف می‌کنیم زیرا که خاصیت آن دارد که هر خط صفحه آن را در دو نقطه قطع کند. کیلی[1] این مکان هندسی نقاط وهمی را مطلق نامید.



شکل ۵۵

مقطع مخروطی (شکل ۵۵) را نمایش مطلق انگارید. در این‌صورت همهٔ نقاط‌این‌مقطع مخروطی وهمی پذیرفته می‌شوند. همهٔ نقاطی که دردرون‌مطلق هستند، یعنی ازآنها نمی‌توان‌مماسی‌برمنحنی‌رسم کرد، نمایش نقطه‌های عادیند. درهمهٔ نقاط‌خارج بچشم ابروهمی نگریسته می‌شود. چون هر خط هندسهٔ هذلولوی دو نقطهٔ وهمی دارد فقط خطهایی که مطلق را در دو نقطهٔ حقیقی قطع کنند نمایش خطوط هندسهٔ ما نگریسته می‌شوند. به عنوان مثال خطهای $\Omega_1\Omega_3$ و $\Omega_1\Omega_2$ نمایش دو خط متوازی در هندسه هذلولویند؛ خطهای $\Omega_1\Omega_3$ و $\Omega_2\Omega_4$ متقاطعند؛ Γ_ℓ نقطهٔ برخورد مماسهایی که برمنحنی در Ω_1 و Ω_2، که خط آن را قطع کرده است، رسم شده‌اند برای نمایش نقطه‌ای ابروهمی که‌خط l آن را نمایش می‌دهد انتخاب گردیده است. همهٔ خطهایی که بر Γ_ℓ بگذرند عمود بر l پذیرفته می‌شوند و نامتقاطعند. این شکل به نحوی بارزحالتهای استثنایی را که در آنها دو نقطه یك خط مشخص نمی‌سازند نمایان می‌کند.

از دیدگاه ما مطلق البته دست نیافتنی است. تکرار می‌کنیم که مبتدی در هندسه باید نمودار را فقط وسیله‌ای برای کمك به تنظیم فکر بداند و سعی نکندکه خیلی به‌آن بپردازد. از سوی دیگر دانشجوی پیشرفته که دیدگاههای هندسهٔ تصویری را می‌فهمد زود به معنی عمیق این نمودار پی‌می‌برد و بآسانی آنچه را از آن بر می‌آید نتیجه می‌گیرد. وی در دم درمی‌یابد که چگونه سرشت هندسه‌ای به چگونگی مطلق آن بستگی دارد.[2]

---

۱. ← قسمت ۳۴.

۲. در مورد سرشت مطلق (absolute) در هندسهٔ اقلیدسی و ـ اگر مجاز باشیم که پیشاپیش ←

۵۶. دایره‌ها

در هندسه‌ای که مورد بررسی ماست ضمن تعریفهای دیگر دایره را هم تعریف کرده‌ایم: مکان هندسی نقطه‌هایی‌که دو یك نقطهٔ ثابت به نام مرکز به فاصلهٔ ثابتی به‌نام شعاع هستند. اما شاید گفتن این نکته لازم نباشدکه بیشتر نظریهٔ دایره در هندسهٔاقلیدسی را باید در اینجا کنار گذاشت یا بسیار تغییر داد. دانشجوی دقیق در تمیز بین احکام اقلیدسی دربارهٔ دایره که در این هندسه معتبر نمی‌مانند وآنها که معتبر می‌مانند زحمت چندانی نخواهد داشت. مثلاً قضیهٔ مربوط به زاویه‌های محاطی که بستگی به خواص خطوط متوازی اقلیدسی دارد دیگر معتبر نیست؛ زاویهٔ محاط در نیمدایره دیگر قائمه، حتی مقدار ثابتی نیست. از سوی دیگر خطی‌که از مرکز دایره بر وتر عمود شود آن را بازهم نصف می‌کند، و خطی که در انتهای شعاعی برآن عمود شود بازهم مماس بر دایره است.

ما برآن نیستیم‌که در اینجا بتفصیل خواص دایره را ذکرکنیم. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند خودبه تفحص‌بپردازد. درفضای محدودی که داریم باید خود را به‌بحث دربارهٔ تفاوتهای وسیعتر و اساسی‌تری که در نتیجه تغییر در اصل موضوع توازی پیدا شده‌اند مقید سازیم.

حالتی حاد وقتی عرضه می‌شودکه به بررسی شکل حدی دایره وقتی‌که شعاعش به بی‌نهایت می‌گراید توجه کنیم. این شکل حدی در هندسهٔ اقلیدسی خط راست است؛ اما درهندسهٔ هذلولوی خط راست نیست بلکه شکلی است با سرشتی عجیب. خواهیم دیدکه چون تعریف دایره را با تردستی تغییر دهیم خواهیم توانست با تغییری ساده و طبیعی در دیدگاه، این منحنی وخواص‌آن را بررسی‌کنیم بی‌آن‌که بضرورت براین واقعیت تکیه کنیم که این منحنی شکل حدی دایره است. برای این کار در قسمت بعد نظریهٔ نقاط متناظر را وارد می‌کنیم.

تمرین

۱. ثابت‌کنید که اگر چهار ضلعیی در دایره محاط شود مجموع دو زاویهٔ روبروی آن مساوی است با مجموع دو زاویهٔ دیگر.

تعریفی کنیم ـ در هندسهٔ بیضوی ← *Sixth Memoir* کیلی که در قسمت ۳۴ به آن اشاره کرده‌ایم؛ یا ← به فصل هشتم جلد دوم *Projective Geometry* نوشتهٔ Veblen و Young (بوستن، ۱۹۱۸)، و نیز ← *Non-Euclidean Geometry* نوشتهٔ Coxeter (Toronto، ۱۹۴۲).

۲. از نقطهٔ مفروض خارج دایرهٔ مفروضی مماسهایی برآن رسم کنید.

۳. مماسهای بر دایرهٔ مفروضی را که موازی خط معینی باشند رسم کنید؛ همچنین مماسهای عمود بر خط معینی را.

۴. نشان دهید که زاویهٔ محاط در نیمدایره نمی‌تواند قائمه باشد، و در واقع باید حاده باشد. ثابت کنید که اگر زاویهٔ محاط در نیمدایره‌ای مقدار ثابتی باشد این مقدار قائمه است و هندسه اقلیدسی است.

۵۷. نقطه‌های متناظر

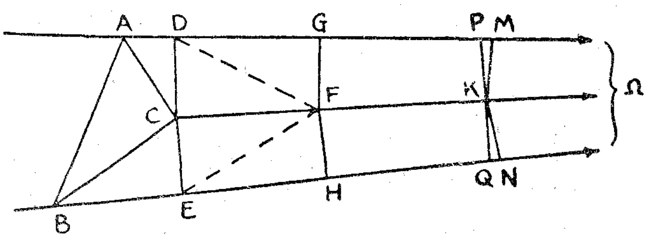
دو نقطهٔ P و Q واقع بر دو خط متمایز را نقطه‌های متناظر گوییم هرگاه چنان واقع شده باشند که دوخط مذکور با پاره خط PQ و در یك طرف آن زاویه‌های متساوی بسازند. هر یك از این دو نقطه متناظر با دیگری است.

در اقدام به بررسی خواص مقدماتی نقطه‌های متناظر باید سه حالت در نظر گرفت، زیراکه خطهایی که نقاط برآنها قراردارندممکن استمتوازی، متقاطع، یا نامتقاطع باشند.

نقطه‌های متناظر بر خطهای متوازی

قضیهٔ ۱. به ازای هر نقطهٔ واقع بریکی از دو خط متوازی یك نقطه، و فقط یك نقطه، برخط دیگر متناظر با آن است.

فرض کنیم $A\Omega$ و $B\Omega$ (شکل ۵۶) دو خط متوازی، و A نقطه‌ای دلخواه بر اولی و B چنین نقطه‌ای بر دومی، باشند. از A به B وصل می‌کنیم. اگر نیمسازهای زاویه‌های $AB\Omega$ و $BA\Omega$ رسم شوند در نقطه‌ای چون C تلاقی می‌کنند. اثبات آن



شکل ۵۶

که عمودهای CD و CE که از C بر $A\Omega$ و $B\Omega$ فرودآیند برابرند آسان است. از اینجا نتیجه می‌شود که $C\Omega$، موازی مشترك $A\Omega$ و $B\Omega$ که بر C می‌گذرد، زاویهٔ DCE را نصف می‌کند، زیرا که زاویه‌های توازی برای مسافتهای متساوی متساویند. نقطهٔ دلخواه F را بر $C\Omega$، یا برامتداد $C\Omega$ ازطرف C، اختیارکنید وعمودهای FG و

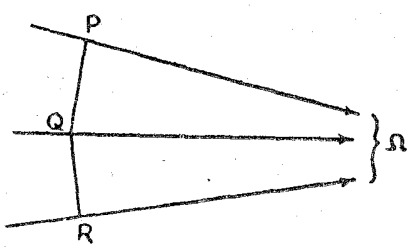
FH را بر $A\Omega$ و $B\Omega$ فرود آورید. با استفاده از مثلثهای همنهشت می‌توان نشان داد که FG و FH برابرند و با $F\Omega$ زاویه‌های متساوی می‌سازند. به واقعیتی اشاره می‌کنیم که بعد مورد استفاده خواهد بود و آن این‌که DG و EH نیز متساویند.

پس از رسم $C\Omega$ از نقطهٔ دلخواه P واقع بر $A\Omega$ عمود PK را بر $C\Omega$ رسم کنید. از K عمودهای متساوی KM و KN را بر $A\Omega$ و $B\Omega$ بکشید. واضح است که M در طرفی از P خواهد بود در امتداد توازی. بر $B\Omega$ ابتدا از N و در جهت مخالف توازی قطعهٔ NQ را مساوی MP جدا کنید و از K به Q وصل نمایید. دشوار نیست نشان‌دادن این‌که سه نقطهٔ P و K و Q بر یك امتدادند و زاویه‌های $PQ\Omega$ و $QP\Omega$ متساویند. تصادفاً چنین می‌نماید که $C\Omega$ محور تقارن دو خط متوازی $A\Omega$ و $B\Omega$ است. پس همواره می‌توانیم نقطه‌ای چون Q بریکی از دو خط بدست آوریم که متناظر با نقطه‌ای چون P از خط دیگر باشد.

تمرین

ثابت کنید که خط $C\Omega$ که در بالا رسم شد برای دو خط متوازی مفروض $A\Omega$ و $B\Omega$ منحصر به فرد است، و مکان هندسی نقاطی است که از آن دو خط به یك فاصله باشند. بدین ترتیب هرگاه $AB\Omega$ مانند مثلثی نگریسته شود که یك رأسش نقطهٔ وهمی Ω است $C\Omega$ را می‌توان نیمسازِ زاویهٔ $A\Omega B$ انگاشت. نتیجه آن‌که نیمسازهای زاویه‌های چنین مثلثی متقاربند.

قضیهٔ ۲. هرگاه سه نقطهٔ P و Q و R بر سه خط که در یك جهت با یکدیگر موازی باشند قرار گرفته باشند، و Q متناظر باشد با P و R متناظر باشد با Q، آنگاه سه نقطه نمی‌توانند بریك خط راست قرار داشته باشند.



شکل ۵۷

زیرا که اگر P و Q و R (شکل ۵۷) بریك امتدادباشندمجموع زاویه‌های $PQ\Omega$ و $RQ\Omega$ دوقائمه می‌شود. همچنین مجموع زاویه‌های $QP\Omega$ و $QR\Omega$. ولی با شرایط قضیه چنین چیزی شدنی نیست.

قضیهٔ ۳. هرگاه هر یك از سه نقطهٔ P و Q و R بریکی ازسه خط که دریك جهت متوازیند قرار داشته باشد، و هرگاه Q متناظر با P، و R متناظر با Q، باشد، آنگاه R

متناظر است با P.

زیرا کـه عمودی کـه بر PQ (شکل ۵۷) در وسط آن رسم شود محور تقارن موازیهای $P\Omega$ و $Q\Omega$ است. همچنین عمود بر QR در وسط آن محور تقارن موازیهای $Q\Omega$ و $R\Omega$ است. چون عمود منصفهای دوضلع مثلث PQR متوازیند. عمود منصف ضلع سوم باید در همان جهت با آنها موازی باشد و بآسانی نتیجه می‌توان گرفت که P و Q متناظرند.

نقطه‌های متناظر بر خطهای متقاطع

در نظریهٔ نقطه‌های متناظر بر خطهای متقاطع شایسته است دو خط را دونیم‌خط که ازنقطهٔ تقاطعشان خارج می‌شوند انگاشت. از این دیدگاه دانش‌آموز می‌تواندبرای نقطه‌های متناظر بر دو خط متقاطع سه قضیه‌ای را کـه در مورد دو خط متوازی ثابت کردیم اثبات نماید. استدلال ساده‌تر از مورد خطهای متوازی است.

نقطه‌های متناظر بر خطهای نامتقاطع

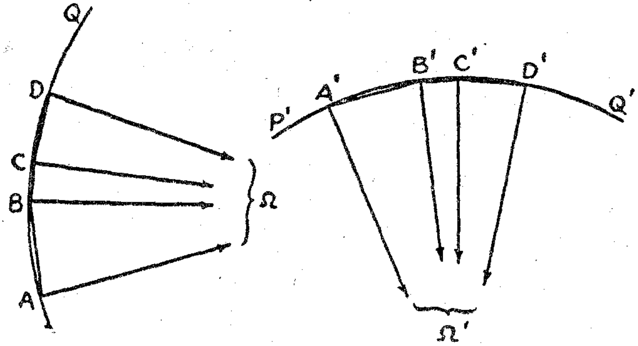
خواننده در مورد خطهای نامتقاطع برای اثبات سه قضیه‌ای که دربارهٔ نقطه‌های متناظر روی خطهای متوازی ثابت کردیم اشکالی نخواهد داشت. در این مورد خطهای مورد نظر یك نقطهٔ ابروهمی مشترك خواهند داشت، یعنی عمود مشترکی دارند. در این حالت یك استثنا در مورد قضیهٔ ۲ وجود دارد.

۵۸. منحنیهای حدی و خاصیتهایشان

هرگاه برروی هر خط شعاعی از یك دسته نیمخط که رأسش نقطه‌ای عادی باشد یك نقطه اختیار کنیم و نقطه‌های متناظر آن را بـر روی نیمخطهـای دیگر بسازیم همهٔ این نقاط بر یك دایره قراردارند. درحقیقت تعریف دایره را می‌توان مکان هندسی مجموعهٔ نقطه‌های متناظرواقع برشعاعهای یك دسته خط شعاعی دانست که رأسش نقطه‌ای عادی باشد. این تعریف تازه‌که از آن می‌توان همهٔ خاصیتهای مشهور دایره‌ای را نتیجه‌گرفت تعریفی است‌که در قسمت ۵۶ به‌آن اشاره شد. در اینجا از آن روی از آن یاد کردیم که وسیلهٔ ساده‌ای است برای انتقال از دایرهٔ معمولی بـه منحنیهای تازه و از نوعهای عجیب. تنها کاری‌که باید کرد این است که سرشت شعاعهایی را که نقاط متناظر برآنها قرار دارند تغییر دهیم.

بخصوص به‌مطالعهٔ مکان مجموعهٔ نقاط متناظر واقع بردسته‌ای از خطوط متوازی

می‌پردازیم، یعنی دسته‌ای که رأسش یك نقطهٔ وهمی باشد. این مکان در هندسهٔ هذلولوی خط راست نیست، زیرا که برطبق قضیهٔ ۲ هیچ سه نقطهٔ این مجموعه بر یك خط راست قرار ندارند. این مکان دایره هم نیست زیرا کـه در نتیجهٔ شباهت تعریف آن با تعریف دایره ممکن است انتظار برود کـه خواص مشترك متعدد با دایره داشته باشد. چون این منحنی صورت حدی دایره‌ای است که شعاعش بی‌نهایت بزرگ شود آن را منحنی حدی[1] می‌نامیم. نیمخطهای دستهٔ خطهای متوازی را شعاعها یامحورها می‌خوانیم وگاهی به‌مرکز وهمی این شکل مرکز منحنی حدی می‌گوییم.



شکل ۵۸

دو منحنی حدی PQ و $P'Q'$ در نظر می‌گیریم کـه مرکزهایشان Ω و Ω' باشند (شکل ۵۸). A و B و C و D و... را مجموعه‌ای از نقاط واقع بـر PQ انگاشته شعاعهایی را که برآنها می‌گذرد رسم کنید. بر $P'Q'$ نقطهٔ دلخواهی اختیارکرده شعاع آن را بکشید. آنگاه زاویـهٔ $\Omega'A'B'$ را مساوی ΩAB بسازید و $A'B'$ را مساوی AB جدا کنید. اگر $B'\Omega'$ رسم شود واضح است کـه زاویه‌های $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$ برابرند و در نتیجه زاویه‌های $A'B'\Omega'$ و $B'A'\Omega'$ نیز متساویند. پس B' واقع است بر منحنی حدی $P'Q'$. چون کار را به‌همین وضع ادامه دهیم نقطه‌های C' و D' و... را می‌توان براین منحنی‌حدی تعیین کرد بطوری‌که وترهای $B'C'$ و $C'D'$ و... برابر باشند با وترهـای BC و CD و... و نیز زاویه‌هایی کـه جفتهای وترهای متناظر با شعاعهایی‌که در انتهای آنها رسم شوند می‌سازند متساویند. نتیجه‌ها را با هم گردآورده می‌گوییم که همهٔ منحنیهای حدی همنهشتند[2]. تناظری‌که توصیف کردیم ممکن است بین

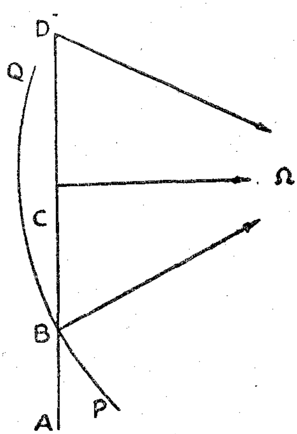
---

۱. اغلب آن را دایره زمانی *horocycle* نیز گویند.

۲. ← یادداشتهایی دربـارهٔ مطالب جدید در همنهشتی، درکتاب Heath، همان اثر، جلد یکم، ص ۲۲۷-۲۲۸.

دو قوس ازدو منحنی حدی هم مرکز یا دوقوس از یك منحنی حدی برقرار شوند. حالت اخیر را بااین بیان‌مشخص می‌سازیم که منحنی‌حدی درهمه نقاطش دارای یك انحنا[1] است.

و نیزدر نتیجه پژوهشهایی که بعمل آوردیم می‌گوییم که بر هر دو منحنی‌حدی، یابرروی یك منحنی حدی، وترهای‌متساوی دارای قوسهای متساویند وقوسهای‌متساوی وترهای متساوی دارند. البته در اینجا مراد ما از دو قوس متساوی قوسهایی مانند AD و A'D' (شکل ۵۸) است که بین نقاطشان تناظر یك به‌یك از نوعی که در بالا شرح دادیم برقراراست. علاوه براین قوسهای نامساوی وترهای نامساوی دارند و وتربزرگتر متعلق است به قوس بزرگتر.



شکل ۵۹

خط راست نمی‌تواند منحنی حدی را در بیشتر از دو نقطه قطع کند زیرا که هیچ سه نقطهٔ یك چنین منحنی بریك خط راست نیستند. هرگاه خطی منحنی حدی را در یك نقطه قطع کند و شعاع نباشد عموماً منحنی را در یك نقطهٔ دیگر نیز قطع خواهد کرد. مثلاً فرض کنید که خط AC (شکل۵۹) منحنی حدی PQ را در نقطه‌ای چون B قطع کند. شعاع BΩ را رسم کنید. اگر فرض کنیم که زاویهٔ CBΩ حاده است مسافتی متناظر با آن را وقتی که زاویهٔ توازی انگاشته شود، می‌توان ساخت. در این صورت هرگاه BD مساوی دو برابر این مسافت جدا شود D بر منحنی حدی خواهد افتاد. فرض کنیدکه‌خط BD گرد B دوران کند. وقتی‌که زاویهٔ DBΩ بزرگ شود D به‌سوی B برمی‌گراید و وقتی که خود زاویهٔ قائمه شود برآن منطبق می‌گردد. بدین ترتیب مماس بر منحنی حدی در هر نقطه بر شعاع مار برآن نقطه عمود است. به‌عبارت دیگر هر منحنی حدی محورهای خود را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کند و ممکن است مانند مسیری عمود بردستهٔ شعاعهای خود انگاشته شود. وانگهی‌آشکار است که منحنی به‌طرف توازی شعاعهای‌خود کاو، یا مقعر، است.

در پایان کلام، پی‌بردن به این مطلب دشوار نیست‌که خط عمود بر وسط وتری ازمنحنی حدی شعاع است و قوس آن وتر را نصف می‌کند. پس سه‌نقطه در منحنی حدی

---

۱. این اصطلاح را تقریباً بی‌دقت زیاد برای تداعی مفهوم خمیدگی بکار می‌بریم.

آن را مشخص می‌سازند؛ وقتی که سه نقطهٔ آن داده شوند مرکز را می‌توان تعیین کرد و نقاط دیگری را بدست آورد.

تمرین

۱. بر دو نقطهٔ معین چند منحنی حدی می‌گذرند؟

۲. درهندسهٔ هذلولوی برای رسم خط خط‌کش وبرای رسم دایره پرگار بکار می‌روند. برای رسم منحنی حدی چه باید بکار برد؟

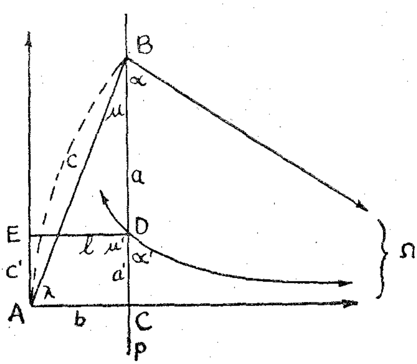
۳. ثابت کنید که پاره‌های هر دوشعاع محدود بین دو منحنی حدی هممرکز متساویند.

۴. ثابت کنید که شعاع مرسوم به وسط قوسی در یك منحنی حدی قوسهای متناظر از منحنیهای حدی هممرکز با آن را نیز نصف می‌کند. یا، به بیانی دیگر، خطی که وسطهای دو قوس متناظر از دو منحنی حدی هممرکز را به هم وصل کند شعاع است. مراد از قوسهای متناظر قوسهای محدود بین دو شعاع هستند.

۵. هرگاه نقطه‌های P_1، P_2، P_3، ...، P_{n-1} قوس AB در یك منحنی حدی را به n جزء متساوی تقسیم کنند، و شعاعهای منتهی به این نقاط قوس متناظر $A'B'$ از منحنی حدی هم مرکزی را در P_1'، P_2'، P_3'، ...، P_n' قطع کنند، آنگاه این نقاط $A'B'$ را به n جزء متساوی تقسیم می‌کنند.

۶. دو قوس متناظر از دو منحنی حدی هممرکز نابرابرند، وآن که کوچکتر است در جهت توازی نسبت به قوس بزرگتر قرار دارد.

۷. نقطهٔ A از یك منحنی حدی و شعاع $A\Omega$ داده شده‌اند، و دیگر هیچ. خط p عمود بر $A\Omega$ در نقطهٔ C رسم شده است. دو نقطه‌ای را که در آنها p منحنی حدی را قطع می‌کند بسازید. راهنمایی[۱] - هرگاه B (شکل ۶۵) یکی ازنقاط مطلوب باشد مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را بسازید و مطابق معمول نامگذاری کنید. وجود مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای با اجزای a، b، c، λ، μ، وجود یك چهار ضلعی لامبرتی را با اجزای b، μ، l، a'، c'، تضمین‌می‌کند. CD را روی p مساوی a' جدا کنید وعمود DE را از D برمماس AE در نقطهٔ A بر منحنی حدی بکشید. $B\Omega$ و $D\Omega$ را رسم کنید و ثابت کنید که این



شکل ۶۵

---

۱. *Nichteuklidische Geometrie in Elementarer Behandlung*، نوشتهٔ Max Simon، تنظیم و ویرایش بوسیلهٔ K. Fladt (لایپزیك و برلین، ۱۹۲۵).

آخری[1] وقتی‌که در جهت مقابل امتداد داده شود موازی است با AE.

۸. هرگاه نقطهٔ دلخواهی بریك منحنی حدی داده شده باشد نقطهٔ دیگری بر منحنی پیدا کنید بطوری‌که خط مماس در این نقطه موازی باشد با شعاع نقطهٔ اولی. همین کار را برای دایره بکنید.

۹. هرگاه نقطهٔ مفروضی چنان قرارگرفته باشد که بتوان از آن مماسهایی برمنحنی حدی کشید روش ترسیم مماس را پیدا کنید. راهنمایی[2] ـ نقطهٔ مفروض را P بنامید و PΩ را رسم کنید. این خط منحنی حدی را در نقطه‌ای چون Q قطع می‌کند. مماس بر منحنی حدی در Q را بکشید. آنگاه با استفاده از تمرین ۷ نقاط R و S را که در آنها منحنی حدی هم‌مرکزبا منحنی حدی مفروض ومار بر P آن مماس را قطع می‌کند تعیین کنید. فرض‌کنید U و V نقاطی باشندکه در آنها RΩ و SΩ منحنی‌حدی مفروض را قطع می‌کنند. PU و PV مماسهای مطلوبند.

۱۰. اگر چهار ضلعیی در منحنی حدیی محاط شود ثابت کنید که مجموع یك جفت زاویهٔ مقابل‌آن مساوی است با مجموع جفت دیگر.

۵۹. منحنیهای همفاصله و خاصیتهایشان

بار دیگر دقت خود را به مکان هندسی مجموعهٔ نقطه‌های متناظر بر دسته‌ای از شعاعها که رأسی ابروهمی دارند معطوف می‌سازیم. این مکان نه خط راست است و نه دایره به‌مفهوم دقیق. از روی نظریه‌ای‌که برای نقطه‌های متناظر واقع بر یك دسته گفته شده است می‌دانیم‌که منحنی مکان نقطه‌هایی است‌که فاصله‌های عمودیشان از خط‌راستی یکی است و در یك طرف آن خط قراردارند، و این خط نمایش خط نقطهٔ ابروهمیی است که رأس دستهٔ شعاع است. بـه این دلیل آن را منحنی همفاصله می‌نامیم. خط نمایندهٔ آن را خط مبنا می‌خوانیم و فاصلهٔ هر نقطهٔ آن از خط مبنا را فاصله می‌نامیم. خطهای شعاعی‌دسته را شعاعها یا محورهای منحنی‌همفاصله نامیده رأس ابروهمی دسته را به‌مثابهٔ مرکز آن می‌گیریم. در حقیقت منحنی همفاصله از دوشاخه تشکیل شده است‌که هرشاخه

---

۱. در اینجا خط DΩ چنان رسم شده است‌که گویی منحنی است. در هندسهٔ هذلولوی خطها به همان راستی آنها در هندسهٔ اقلیدسی هستند اما غالباً وقتی‌که نمایش رابطهٔ مجانبی آنها با خطوط دیگر در فضایـی محدود مهمتر از مستقیم بودن آنها باشد، شایسته است که آنها را به صورت منحنی نمایش داد.

۲. ترسیمی‌که شرح آن داده شد اساساً مبتنی است بر ترسیمی‌که اقلیدس برای کشیدن‌مماس از یك نقطه بـر دایـره داده است (کتاب سوم، ۱۷). سرشت اساسی این تـرسیم از این واقعیت برخوردار است‌که از اصل موضوع توازی مستقل است، و وقتی هم‌که مرکز دایره نقطه‌ای وهمی باشد باز قاعده اعتبار خود را از دست نمی‌دهد.

در یك طرف خط مبنا است. خط راست را می‌توان منحنی همفاصله‌ای با فاصلهٔ صفر فرض کرد. در هندسهٔ اقلیدسی منحنی همفاصله یك جفت خط راست متوازی است.

با روشهایی شبیه به آنهایی که درقسمت اخیر بکار رفتند خواننده می‌تواند احکامی را که می‌آیند تسجیل کند:

منحنیهای همفاصلهٔ با فاصله‌های متساوی همنهشت هستند، و آنهایی که فاصله‌های متساوی ندارند، نه. منحنی همفاصله در همهٔ نقاط خود دارای یك انحنا است. دو منحنی که فاصله‌های متفاوت داشته باشند انحناهای متفاوت دارند، و هرچه فاصله بزرگتر باشد انحنا بیشتر است. منحنی همفاصله در جهت خط مبنا کاو است.

دریك منحنی‌همفاصله، یادرمنحنیهای همفاصلهٔ همنهشت، قوسهای‌متساوی وترهای متساوی دارند، وبعکس. آشکار است که منظور وترهایی است که نقطه‌های واقع بر یك شاخه را به‌یکدیگر وصل می‌کنند.

خط راست نمی‌تواند منحنی همفاصله را در بیشتر از دو نقطه قطع کند. اگرخطی چنین منحنیی را دریك نقطه قطع کرد آن را در یك نقطهٔ دیگر هم قطع می‌کند مگراین که برآن مماس، یابا خط مبنای آن موازی باشد. خط مماس بر منحنی همفاصله برشعاع نقطهٔ تماس عمود است، زیرا که منحنی را می‌توان مسیر عمود بر دستهٔ محورهای آن دانست.

خط عمود بر وسط وتری از منحنی همفاصله شعاع است و قوس آن وتر را هم نصف می‌کند. سه نقطهٔ واقع بر منحنی همفاصله آن را مشخص می‌سازند؛ وقتی‌که سه نقطه از منحنی داده شده باشند می‌توان خط مبنا را تعیین‌کرد و نقاط دیگری را ساخت.

به‌عنوان موضوعی جالب علاقه خاطرنشان می‌سازیم که سه نقطهٔ غیر واقع بریك خط همیشه بر سه منحنی همفاصلهٔ متفاوت قرار دارند، زیرا که رأسهای مثلث به یك فاصله‌اند از هریك از سه خطی که وسطهای اضلاع را به یکدیگر وصل کنند. قبلاً ثابت کرده‌ایم که سه رأس مثلث بر یك دایره، به معنی اعم کلمه، قرار دارند؛ برحسب آن که مرکز یك نقطهٔ عادی، یا وهمی، یا ابروهمی باشد این شکل دایره به‌مفهوم خاص، یا منحنی حدی، یامنحنی همفاصله خواهد بود. در حالت اخیر سه نقطه برروی یك‌شاخهٔ منحنی‌همفاصله قرارخواهند داشت. حالا درك می‌کنیم که به‌معنی عام چهاردایره بر رؤوس مثلث می‌گذرند، همچنان‌که چهار دایره براضلاع آن مماسند.

تمرین

۱. نشان‌دهید که‌خطی که دونقطه را که‌هریك بریك‌شاخهٔ‌منحنی‌همفاصله باشد به‌هم‌وصل کند بوسیلهٔ خط مبنا نصف می‌شود وبا شاخه‌ها، یعنی‌باماسهای برآنها، زاویه‌هایی‌می‌سازد

که رابطه‌شان با یکدیگر مانند زاویه‌هایی است که مورب با دوخط متوازی در هندسهٔ اقلیدسی تشکیل می‌دهد.

۲. فرض کنید A و B دو نقطهٔ واقع بر یك شاخهٔ منحنی همفاصله‌ای، و A' و B' دو نقطهٔ واقع بر شاخهٔ دیگر آن باشند چنان که AA' و BB' یکدیگر را روی خط مبنا قطع کنند. AB' و BA' را رسم کنید وخواص چهارضلعی $ABA'B'$ را با خواص متوازی‌الاضلاع در هندسهٔ اقلیدسی بسنجید.

۳. سه نقطه برمنحنی همفاصله‌ای داده شده‌اند. نقاط دیگری را در این حالتها بسازید: (آ) سه نقطه روی یك شاخه باشند؛ (ب) دو نقطه روی یك شاخه و نقطهٔ سوم روی شاخهٔ دیگر باشند.

۴. ازمنحنی همفاصله‌ای خط مبنا وفاصله داده شده‌اند. نقطه‌های برخورد خط مفروضی با منحنی را بسازید. سه حالت باید در نظرگرفت.

۵. اگر نقطه‌ای چنان باشد که بتوان از آن مماسهایی بر منحنی همفاصله‌ای رسم کرد، راه ترسیم را نشان دهید.

۶. طرح وسیلهٔ ترسیمی را بریزید که وقتی خط مبنا و فاصلهٔ منحنی همفاصله‌ای داده شده باشند برای ترسیم آن بکار رود.

۷. ثابت کنید که اگر چهار ضلعیی در یك شاخهٔ منحنی همفاصله محاط شده باشد مجموع یك جفت زاویهٔ روبروی آن مساوی است با مجموع جفت دیگر. اگر چهار رأس چهار ضلعی روی یك شاخهٔ منحنی همفاصله نباشند حکم را چگونه باید تغییر داد؟

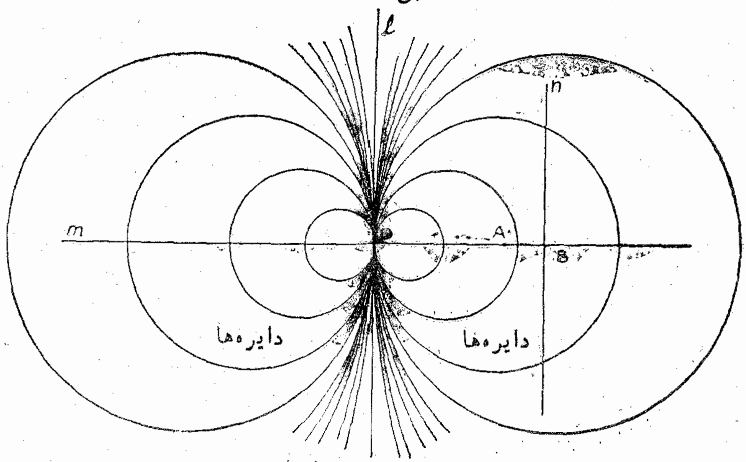
۸. تعلیماتی را که در مسألهٔ ۸ قسمت ۵۸ داده شده‌اند برای یك منحنی همفاصله اجرا کنید.

۶۰. منحنی حدی در ارتباط با دایره‌ها و منحنیهای همفاصله

با کامل کردن آشنایی با خواص مقدماتی دایره‌ها و منحنیهای حدی و منحنیهای همفاصله شاید تلاش برای توضیح بیشتری دربارهٔ روابط بین آنها به پیشرفت کار کمکی کند.

فرض کنید l و m (شکل ۶۱) دو خط عمود برهم باشند که در O تقاطع کنند. نقطهٔ دلخواه A را بر m، مثلاً در طرف راست l اختیار کنید و دایرهٔ به مرکز A و شعاع AO را رسم کنید. اگر A به‌طرف O حرکت کند شعاع AO به‌صفر نزدیك می‌شود و دایره، که به انحنایش پیوسته افزوده می‌گردد در صورت حدی به دایره‌نقطهٔ O میل می‌کند.

از سوی دیگر اگر A در امتداد مقابل حرکت کند، دایره بزرگ، و انحنای آن کوچك، می‌شوند و در حد به یك منحنی حدی که بر O بگذرد نزدیك می‌گردد.



شکل ۶۱

دیگر آن‌که خطی مانند n را که در نقطهٔ B بر m عمود شده باشد در نظر می‌گیریم و به‌منحنی همفاصله‌ای که خط مبنای آن n و فاصله‌اش OB باشد توجه‌می‌کنیم. وقتی‌که n به طرف l، یعنی از راست، حرکت کند انحنای منحنی همفاصله تنزل می‌کند و در صورت حدی به l نزدیك می‌شود. اما اگر n از O دور شود انحنا افزایش می‌یابد و منحنی همفاصله به منحنی حدی‌که بر O می‌گذرد نزدیك می‌گردد.

در طرف چپ l وضع به همین منوال است.

تمرین

۱. شش خاصیت مشترك بین همهٔ منحنیها: دایره، منحنی حدی، منحنی همفاصله، را شرح دهید.

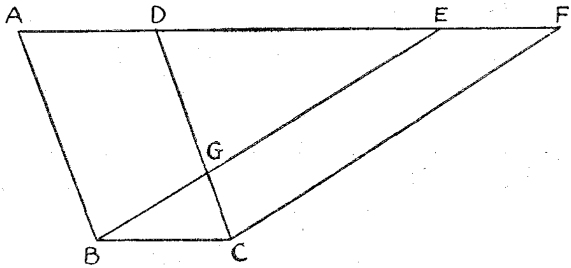
۲. در تلاش برای تحقیق این‌که سه نقطهٔ مفروض بر دایره‌اند، یا بر منحنی حدی، یا بر یك شاخهٔ منحنی همفاصله، چه روشی باید بکار برد؟

۶۱. پهنه

به‌یاد می‌آوریم که، تقریباً از شروع کتاب یکم، اقلیدس شکلها را مساوی می‌انگارد وقتی‌که همنهشت باشند؛ و تا وقتی‌که به‌یکم، ۳۵ نرسیدیم تغییری دراین دیدگاه ندیدیم. در اینجا، بی‌آن‌که زیاد برای جلب توجه به تغییر اهتمام کند، مفهوم شکلهایی را که مساوی هستند اما همنهشت نیستند وارد می‌کند. حکمی‌که به‌آن اشاره می‌شود آن است که می‌گوید که متوازی‌الاضلاعهایی که بر روی یك قاعده و بر دو خط متوازی معین قرار

دارند با یکدیگر برابرند. یادآوری اثبات مفید خواهد بود.

هرگاه ABCD و EBCF (شکل ۶۲) متوازی‌الاضلاعها، و BC قاعدهٔ مشترك



شکل ۶۲

آنها، و AF و BC دو متوازی مورد بحث، باشند دانشجو می‌تواند بآسانی اثبات اقلیدسی را تکرار کند بدینوسیله که نشان دهد که مثلثهای EAB و FDC متساویند و ازهریك مثلث DGE را کم کند و به‌هریك مثلث BGC را بیفزاید. استدلال رامی‌توان بآسانی برای مواردی که D و E منطبق باشند یا AC و EF جزء مشترکی داشته‌باشند تغییر داد.

پس تساوی دو متوازی‌الاضلاع از این واقعیت نتیجه می‌شود که شکلهای همنهشت از شکلهای همنهشت کاسته شده و بعد شکلهای همنهشت اضافه گردیده‌اند. ظاهراً هیچ چیز مورد استفاده قرار نگرفته است مگر مفهومهای آشنای جمع یا تفریق مقادیر متساوی؛ یا از تصاویر متساوی. اما باید توجه داشت که فرض مقدر این است که تفاوتی نمی‌کند که کجا این جمع و تفریقها انجام شده باشند[1]. قبول این قرارداد مناسب است که در این نوع وسیع‌تساوی، از اصطلاح هم‌ارز استفاده شود، همان کاری که لژاندرکرد و اصطلاح مساوی را برای استفاده به مفهوم همنهشت حفظ نمود.

باید تصریح کرد که حکمی که بیان شد و اثبات گردید نمونه‌ای است از احکام بقیهٔ کتاب یکم و قسمتی از کتاب دوم که مربوطند به شکلهای مساوی یا، بهتر بگوییم، هم‌ارز؛ این احکام هندسی صرف هستند و دارای سرشت طولی (اندازه‌یی) نیستند. هیچ واحد سطح به‌کار نرفته است و مفهوم مساحت مطلقاً بکار گرفته نشده است.

اما از موضوع هم‌ارزی تا مفهوم مساحت گامی بیش نیست، مفهومی که معمولاً مرتبط است با شکلهای بعد، همچنان که مفهوم درازا مرتبط است باپاره خطها. مساحت، یا اندازهٔ مساحت کمیتی انگاشته می‌شود تابع قواعد جمع و تفریق و روابط تساوی یا

---

۱. ← هیث، همان‌اثر، جلد یکم، ص ۳۲۷-۳۲۸.

ناتساوی. نظریهٔ مساحتها پیچیدگیها ودشواریهایی دارد. حتی این حکم برهندسهٔ اقلیدسی هم جاری است هرچند به‌طفیل وجود مربع موضوع تا حدی ساده‌تر شده است. باید در این واقعیت دقت کرد که استفاده از واحد مربع برای مساحت رابطهٔ دقیقی بین واحد سطح و واحد طول را ایجاب می‌کند، رابطه‌ای که گاهی درآن دقت کافی نمی‌شود ونتیجهٔ آن بوجود آمدن ابهامی است.

در هندسهٔ هذلولوی مربع وجود ندارد. چهار ضلعیی که اضلاعش با هم و زوایایش باهم برابر باشند همهٔ زوایایش حاده‌اند. با وجود این متتبعان جدید نظریهٔ عمومی هم‌ارزی ومساحت را برپایه‌های استوار منطقی قرار داده‌اند[1]. ما برآنیم که در این هندسه فقط طرح مختصری از نظریه را به صورتی که با گسترشهای تازه به خود گرفته است بیان کنیم.

۶۲. هم‌ارزی چند ضلعیها و مثلثها

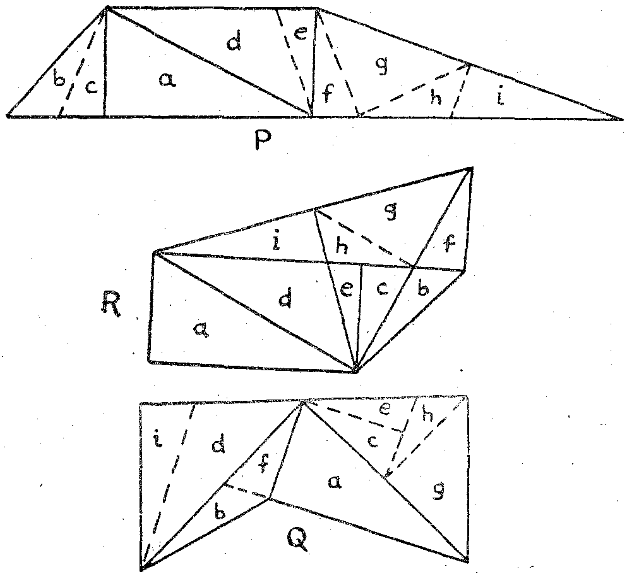
وقتی‌که دو نقطه از محیط یك چند ضلعی[2] با پاره خطی، یا به‌طور عامتر با خط شکسته‌ای به‌هم وصل شوندکه همهٔ نقاطش در درون چند ضلعی[3] واقع شوند، دو چند ضلعی تازه تشکیل می‌شوند، و می‌گوییم چند ضلعی مفروض به دو چند ضلعی افراز شده است. اگر دو چند ضلعی را بتوان به تعداد متناهی متساوی مثلث افراز کرد و اگر بین مثلثها یك تناظر یك به یك برقرار باشد و هر دو مثلث متناظر همنهشت باشند می‌گوییم دو چند ضلعی هم‌ارز هستند. در نتیجهٔ این تعریف قضیهٔ زیرین دربارهٔ تعدی هم‌ارزی بآسانی ثابت می‌شود.

---

۱. ← هیلبرت، همان اثر، ص. ۶۹-۸۲؛ مقالهٔ Amaldi در مجموعه Enriques زیرعنوان مطالب مربوط به‌هندسهٔ مقدماتی *Questioni riguardanti la geometria elementare* (بولونیا، ۱۹۰۰)، یا ترجمهٔ به آلمانی *Fragen der Elementargeometrie*، جلد یکم، ص. ۱۵۱ (لایپزیك، ۱۹۱۱)؛ *über die Entwicklung der Elementar - Geometrie im XIX. Jahrhundert* (در تکامل هندسهٔ مقدماتی در سدهٔ نوزدهم)، نوشته Max Simon، ص. ۱۱۵ - ۱۲۱ (لایپزیك، ۱۹۰۶)؛ *Die Lehre vom Flächeninhalt in der allegemeinen Geometrie* (موضوع مساحت در هندسهٔ عمومی) نوشته A. Finzel، (لایپزیك ۱۹۱۲)، یا ← *Mathematische Annalen, 72* (سالنامهٔ ریاضی، ۷۲) (۱۹۱۲)، ص. ۲۶۲-۲۸۴.

۲. مراد چند ضلعیهای ساده است. ← قسمت ۹.

۳. ← قسمت ۹.



شکل ۶۳

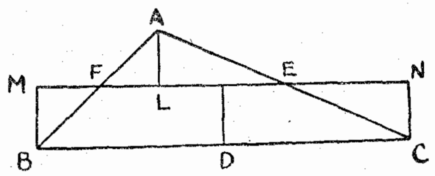
قضیهٔ ۱. هرگاه دو چند ضلعی با چند ضلعی سومی هم‌ارز باشند، آنگاه آن دو با یکدیگر هم‌ارزند.

فرض کنید چند ضلعیهای P و Q هر دو با R (شکل ۶۳) هم‌ارز باشند. در این صورت افراز P به مثلثها متناظر است با افراز R به همان تعداد مثلث و همنهشت با آنها، همچنین با افراز Q افرازی از R متناظر است. خطهایی که برای دو افراز R رسم شده‌اند آن را به‌چند مثلث و چند ضلعی تقسیم کرده‌اند و اگر لازم باشد با رسم خطهای دیگری می‌توان آن را فقط به چند مثلث افراز نمود. هرگاه در افرازهای P و Q خطوطی متناظر با خطوط لازم برای تکمیل افراز R رسم شده باشند آشکار می‌شود که P و Q بدین ترتیب به یك تعداد مثلث متناظر و همنهشت تقسیم گردیده‌اند.

قضیهٔ ۲. هرگاه یك ضلع مثلثی با یك ضلع مثلث دیگر برابر باشد و دو مثلث یك کاستی داشته باشند، دو مثلث هم‌ارزند.

فرض کنید که ABC (شکل ۶۴)[1] مثلثی باشد که D و E و F بترتیب وسطهای سه ضلع آن BC و CA و AB باشند. EF را رسم کرده عمودهای AL و BM و

۱. این ترسیم زیبا و بیشتر استدلال وابسته به آن را به Henry Meikle (۱۸۴۴) مدیون هستیم ← *Theories of Parallelism*، نوشتهٔ Frankland، ص. ۴۴ (کیمبریج، ۱۹۱۰).



شکل ۶۴

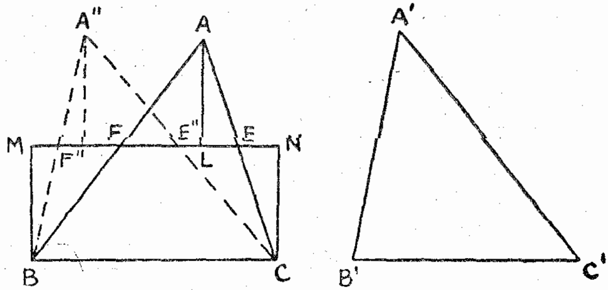
CN را از سه راس برآن فرود آورید. آنگاه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ALF و BMF همنهشتند، همچنین ALE و CNE. در نتیجه BM و AL و CN برابرند، و BCNM چهار ضلعی ساکریی است که هم‌ارز مثلث ABC است و هر زاویـهٔ تارك آن مساوی است بانصف مجموع زوایای مثلث ABC، و EF عمود است برعمود منصف ضلع BC این مثلث. خواننده بـاید صحت این نتایج را بـرای هر وضـع A نسبت بـه B و C تحقیق کند.

هرگاه مثلث دوم $A'B'C'$ را کـه ضلع $B'C'$ اش مساوی ضلع BC از مثلث ABC باشد و دارای همان کاستی باشد در نظر بگیریم واضح است کـه با همان ترسیم می‌توان نشان داد که این مثلث هم‌ارز است با یك چهار ضلعی ساکریی با همان تارك و همان زوایای تارکی که دربالا بدست آوردیم، و در نتیجه همنهشت است با آن. چون‌دو مثلث هم‌ارزند با دو چهار ضلعی همنهشت پس هم‌ارزند با یکدیگر.

قضیهٔ ۳. هر دو مثلث که دارای یك کاستی باشند هم‌ارزند.

فرض کنیدکه ABC و $A'B'C'$ (شکل ۶۵) دومثلث با یك کاستی باشند. ثابت کردیم که اگر یك ضلع یکی با یك ضلع دیگری برابر باشد دو مثلث هم‌ارزند. پس فرض کنید که هیچ ضلع یکی بـا هیچ ضلع دیگری برابر نباشد؛ بویژه فرض کنیدکه $A'C'$ از AC بزرگتر باشد.

مانندگذشته F و E، وسطهای دو ضلع AB و AC را بـه یکدیگر وصل کنید و



شکل ۶۵

عمودهای AL و BM و CN را از A و B و C بر EF رسم نمایید. بعد بر FE، در هر طرف N، نقطهٔ E'' را طوری تعیین کنید که CE'' نصف $A'C'$ باشد. این کار شدنی است زیرا که نصف $A'C'$ از نصف AC بزرگتر است و نصف AC به نوبت خود از عمود CN بزرگتر یا با آن مساوی است. CE'' را رسم کرده آن را تا A'' امتداد دهید به قسمی که $E''A''$ مساوی CE'' شود. از A'' به B وصل کنید. چون EF عمود است بر عمود منصف BC و $A''C$ را در وسط آن قطع می‌کند $A''B$ را هم در F'' وسط آن قطع خواهد کرد. آنگاه بآسانی می‌توان نشان داد که مثلثهای $A''BC$ و ABC دارای یك کاستی هستند و هم‌ارزند. اما مثلثهای $A''BC$ و $A'B'C'$ هم‌یك کاستی دارند و یك جفت از ضلعهای آنها برابرند، پس هم‌ارزند. بنابراین مثلثهای ABC و $A'B'C'$ با یك مثلث، و در نتیجه با یکدیگر، هم‌ارز می‌باشند.

قضیهٔ ۴. هر دو مثلث هم‌ارز دارای یك کاستی هستند.

اثبات این قضیه با استفاده از نظریهٔ موربها به‌صورتی که هیلبرت[۱] گفته است آسان می‌شود. پاره خطی که یك رأس مثلثی را به‌یك نقطه از ضلع روبروی آن وصل کند مورب نامیده می‌شود. مورب مثلث را به دو زیر مثلث تقسیم می‌کند و یکی یا هر دو مثلث تازه را می‌توان با مورب دیگر تقسیم کرد، و به همین قیاس. اثبات این حکم آسان است که هرگاه مثلثی بتوسط موربهای دلخواه به تعدادی متناهی زیر مثلث تقسیم شود کاستی آن برابر است با مجموع کاستیهای مثلثهایی که از این افراز حاصل شده‌اند[۲]. وانگهی اگر مثلثی به‌نحوی افرازشده باشد اگر این افرازبوسیلهٔ موربها صورت پذیرفته باشد می‌توان با رسم خطهای اضافی آن را بدان صورت در آورد، و در نتیجه کاستی آن مثلث مساوی است با مجموع کاستیهای مثلثهای افراز. تنها چیزی که لازم است رسم موربهایی است از هر یك از رؤوس مثلث به هررأس در افراز. این موربها مثلث را به تعدادی مثلث با رأس مشترك تقسیم خواهند کرد. بعضی یا همهٔ این مثلثها بوسیلهٔ خطوط افراز به مثلثها یا چهار ضلعیها تجزیه شده‌اند و چهار ضلعیها را می‌توان با اضافه‌کردن قطرها به مثلث تقسیم کرد و افراز بوسیلهٔ موربها را تکمیل نمود.

هرگاه دو مثلث هم‌ارز باشند آنها را می‌توان به تعداد متناهی متساوی مثلثهای

---

۱. هیلبرت، *Grundlagen der Geometrie*، چاپ پنجم، ص. ۵۷ - ۶۰ (لایپزیك و برلین، ۱۹۱۲)، یا ترجمهٔ Townsend از روی چاپ اول، ص. ۶۲-۶۶.

۲. ← تمرین ۳، قسمت ۴۴.

دو به دو همنهشت تقسیم کرد. چون کاستی هریك از دو مثلث مساوی است با مجموع کاستیهای مثلثهای حاصل از افراز، واضح است که هر دو یك کاستی دارند.

در خاتمه مثلثی را هم‌ارز با مجموع دو یا چند مثلث گویند وقتی‌که آن مثلث را بتوان به تعدادی مثلث افراز کرد و آن دو یا چند مثلث را برروی هم بتوان به همان تعداد مثلث همنهشت با مثلثهای متناظر در افراز اولی تقسیم نمود. چون کاستی مثلث مساوی است با مجموع کاستیهای همهٔ مثلثهای ناشی از هر افراز آن مثلث، به قضیهٔ زیرین می‌رسیم:

قضیهٔ ۵. هرگاه مثلثی هم‌ارز باشد با مجموع دو یا چند مثلث، کاستی آن مساوی است با مجموع کاستیهای آنها.

---

۶۳. اندازهٔ پهنه

در این مرحله دیدگاه خود را، با امتیازی در خور توجه، تغییر می‌دهیم. از آنجا که دو مثلث هم‌ارزند وقتی، و فقط وقتی، که یك کاستی داشته باشند، اندازهٔ پهنه، یا به‌طور خلاصه پهنهٔ، یك مثلث را چنین تعریف می‌کنیم: عدد حاصل از ضرب کاستی، که با واحدی که در قسمت ۵۲ توصیف شد اندازه گرفته شده باشد، در عدد ثابت C^2. این ثابت عامل تناسبی است که تعیین آن میسر است همین‌که مثلثی انتخاب شود که اندازهٔ پهنهٔ آن مساوی واحد باشد. این مقدار ثابت نقش مهمی درمطالب آیندهٔ ما خواهدداشت و دستخوش تعبیرهای مهم خواهد بود. در این صورت اندازهٔ پهنهٔ مثلثی‌که λ و μ و ν اندازه‌های زوایای آن باشند از دستور

$$\Delta = C^2(\pi - \lambda - \mu - \nu)$$

بدست می‌آید. دانشجو در تحقیق قضیه‌های آتی به اشکالی بر نخواهد خورد.

قضیهٔ ۱. اندازهٔ پهنهٔ دو مثلث یکی خواهد بود وقتی، و فقط وقتی، که آن دو مثلث هم‌ارز باشند.

قضیهٔ ۲. هرگاه مثلثی به نحوی به مثلثهایی افراز شده باشد، آنگاه اندازهٔ پهنهٔ آن مساوی است با مجموع اندازه‌های پهنهٔ همهٔ مثلثهای افراز.

قضیهٔ ۳. هرگاه مثلثی هم‌ارز باشد با مجموع دو یا چند مثلث، آنگاه اندازهٔ پهنهٔ

تعمیم می‌دهیم و اندازهٔ پهنهٔ چند ضلعی را مجموع اندازه‌های پهنهٔ همهٔ مثلثهای ناشی از افراز آن چند ضلعی به مثلثها تعریف می‌کنیم. از آنچه هم‌اکنون گفتیم آشکار است که این مجموع به‌نوع افرازی که می‌شود بستگی‌ندارد. هرگاه تفاوت بین $(n-2)$ زاویهٔ نیم صفحه ومجموع زاویه‌های n ضلعی‌را کاستی این n ضلعی بنامیم می‌بینیم که کاستی هر چند ضلعی مساوی است با مجموع کاستیهای[1] مثلثهای ناشی از هر افراز آن. سخن را با این گفته به پایان می‌بریم که سه قضیه‌ای را که در بالا گفتیم می‌توان تعمیم داد و همه‌جا به‌جای مثلث چند ضلعی گذاشت.

۶۴. مثلث با بیشترین پهنه

گاوس، که[2] در ۱۷۹۹ هنوز بُرای اثبات اصل موضوع پنجم می‌کوشید درنامه‌ای که در آن سال به بولیایی پدر نوشت چنین گفت: «اکنون من به‌جایی رسیده‌ام که در نظر بیشتر مردم برای اثبات کافی است اما از دیدگاه خودم هیچ چیز را ثابت نمی‌کند. مثلاً اگر ممکن بود اثبات کرد که مثلث مستقیم‌الخطوطی امکان‌پذیر است که پهنهٔ آن از هر پهنهٔ داده شده‌ای تجاوز کند من در وضعی قرار می‌گرفتم که بتوانم همهٔ هندسهٔ (اقلیدسی) را به دقت اثبات کنم.»

اما او نتوانست ثابت کند که بزرگترین مثلث وجود ندارد. در حقیقت، براساس این فرض که مثلثی با بیشترین (ماکزیمم) پهنه وجود دارد گاوس به دستوری رسید که در قسمت گذشته برای پهنهٔ مثلث گفتیم. این نتیجه‌گیری قابل توجه که وی در نامه‌ای که در ۱۸۳۲ به بولیایی نوشت، و وصول ذیل را اعلام داشت[3]، فاش‌کرده بود نمونهٔ زیبایی برای تجزیه وتحلیل است. ما جوهر نوشتهٔ او را در اینجا می‌آوریم و بحث دربارهٔ پهنه را به پایان می‌رسانیم.

از اینجا شروع می‌کنیم که گاوس پذیرفته بود که اگر مثلثی با بیشترین پهنه وجود داشته باشد چیزی نخواهد بود جز شکل حدی مثلث که هر سه رأسش نقطه‌های وهمی و هر سه زاویه‌اش صفر باشند و از ترسیم خطی موازی دو خط متوازی در دو جهت مقابل بدست می‌آید. همهٔ این مثلثها همنهشت هستند. و فرض می‌کنیم که پهنهٔ مشترک آنها δ باشد.

---

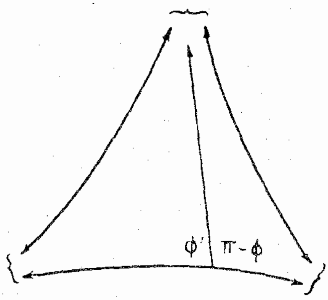
۱. ← تمرین ۴ ۶ قسمت ۴۴.

۲. ← قسمت ۳۰.

۳. ← قسمت ۳۰.

فرض کنید که مساحت محصور بین خطی راست و خطهایی که از یك نقطهٔ مفروض موازی با آن رسم شوند تابعی باشد از زاویهٔ بین خطهای متوازی، مثلاً $f(\pi-\varphi)$. آنگاه $f(\pi)=\delta$ و $f(0)=0$. بررسی در شکل ۶۶ (آ) نشان می‌دهد که

$$f(\pi-\varphi)+f(\varphi)=\delta$$



حال آن‌که از شکل ۶۶ (ب) آشکار می‌شود که

$$f(\varphi)+f(\psi)+f(\pi-\varphi-\psi)=\delta$$

پس

$$f(\psi)+f(\pi-\varphi-\psi)=f(\pi-\varphi)$$

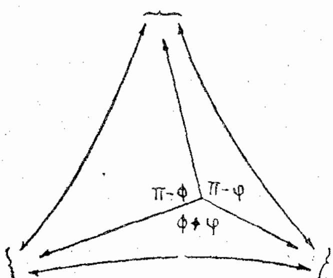
و نتیجه می‌گیریم که تابع در یك معادلهٔ تبعی به صورت

$$f(\lambda)+f(\mu)=f(\lambda+\mu)$$

صدق می‌کند.

حل این معادله[1] چنین است:

$$f(\theta)=c^2\theta$$



شکل ۶۶

که در آن C^2 مقداری است ثابت. پس

$$\delta=c^2\pi$$

اکنون اگر به هر مثلثی که زاویه‌هایش λ و μ و ν (شکل ۶۷) هستند باز گردیم، اضلاع آن را امتداد می‌دهیم و موازیهای مشترك آنها، دو به دو، را در نظر می‌گیریم. چون پهنهٔ مثلث را با Δ بنماییم:

$$\Delta+f(\lambda)+f(\mu)+f(\nu)=c^2\pi$$

یا بفرجام

$$\Delta=c^2(\pi-\lambda-\mu-\nu)$$

---

۱. اگر فرض کنیم تابع پیوسته بوده دارای مشتق باشد، چون

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h}$$

نتیجه می‌شود که

$$f'(\alpha)=f'(\beta)$$

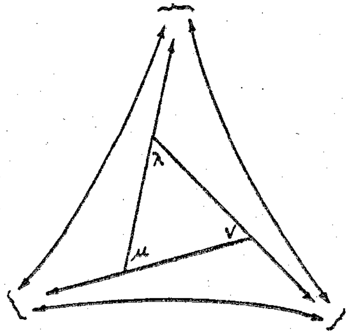
بدین ترتیب

$$f'(\theta)=a$$

و

$$f(\theta)=a\theta+b$$

که در آن a و b دو مقدار ثابتند. اما $b=0$ زیرا که $f(0)=0$



شکل ۶۷

تمرین

۱. ثابت‌کنید که مکان هندسی رأسهای همه مثلثهایی‌که یك قاعده و یك کاستی‌داشته باشند یك منحنی همفاصله است.

۲. هرگاه E و F وسطهای دوضلع AC و AB ازمثلث ABC باشند، و 'E و 'F وسطهای دوضلع 'A'C و 'A'B از مثلث 'A'B'C فرض شوند، ثابت‌کنید که هرگاه EF و 'E'F مساوی باشند و عمودهایی که از A بر EF و از 'A بر 'E'F رسم شوند نیز برابر باشند، آنگاه دو مثلث هم‌ارزند.

۳. در صفحهٔ هذلولوی شبکه منظمی از n ضلعیهای منتظم باید ساخته شوندکه p تای آنها در یك نقطه تلاقی‌کنند. ثابت کنید که هر n ضلعی عبارت از $n\pi c^{۲}\left(۱-\frac{۲}{n}-\frac{۲}{p}\right)$ است، با شرط $\frac{۱}{n}+\frac{۱}{p}<\frac{۱}{۲}$. و نیز نشان دهید که پهنهٔ کوچکترین چهار ضلعی متناهی منتظمی‌که با آن بتوان صفحه را فرش‌کرد $\frac{۲}{۵}\pi c^{۲}$ است.

۵

مثلثات مسطح هذلولوی

«... و می‌توانم درآن هر مسأله‌ای را حل کنم، جز مسألهٔ تعیین ثـابتی که نتواند از پیش معین شده باشد. هرچه این مقدار ثابت بزرگتر گرفته شود به هندسهٔ اقلیدسی نزدیکتر می‌شویم و وقتی که آن را بی‌نهایت بزرگ اختیارکنیم دو هندسه برهم منطبق می‌شوند.» ــ گاوس

۶۵. مدخل

بار دیگر به پژوهشی در مثلثات کروی صفحهٔ هذلولوی توجه می‌کنیم. بولیایی و لباچفسکی، هر دو، در بررسی این نظریــه سطح محدودکننده یا کرهٔ زمانی[۱] را بکار بردند، یعنی سطحی را کــه از دوران یك منحنی حدی حول یك شعاع بــوجود می‌آید. می‌توان نشان داد که بربالای این سطح هندسهٔ خطوط کوتاهترین فاصله (ژئودزیکها)، که منحنیهای حدی هستند، همانند است با هندسهٔ خط راست برصفحهٔ اقلیدسی[۲]. اما ما

---

۱. horosphere

۲. برای بررسی مقدماتی ازاین‌دیدگاه ← سمرویل، اصول هندسهٔ نااقلیدسی، (لندن، ۱۹۱۴)، Sommerville, *The Elements of Non-Euclidean Geometry* ص ۵۶ و بعد، ص. ۸۴

دستورهای مثلثات مسطح را بی‌هرگونه استعانت از هندسهٔ فضایی نتیجه[1] خواهیم گرفت.

۶۶. نسبت قوسهای متناظر منحنیهای حدی هم مرکز

با یادآوری برخی رابطه‌ها بین قوسهای متناظر منحنیهـای حدی هم مرکز، یعنی قوسهای جدا شده بوسیلهٔ یك‌جفت شعاعهای مشترك، را که پیشتر بوسیلهٔ خواننده[2] مورد تحقیق واقع شده‌اند، آغاز می‌کنیم.

(آ) قطعاتی ازشعاعها محدود بین هر جفت از منحنیهای حدی هم‌مرکز متساویند.

(ب) شعاعی کـه قوسی از یك منحنی حدی را نصف کند قوس متناظر هر منحنی حدی را نصف می‌کند.

(ج) خطی‌که وسطهای قوسهای متناظر هر دو منحنی حدی هم‌مرکز را به‌هم ربط دهد یکی از شعاعها است.

(د) هرگاه نقطه‌های P_1، P_2، P_3، P_4،...، P_{n-1} قوس AB ازیك منحنی‌حدی را به n جزء متساوی تقسیم‌کنند و شعاعهای منتهی به نقاط تقسیم قوس متناظر $A'B'$ از یك منحنی حدی هم‌مرکز را در P'_1 و P'_2 و P'_3 و P'_4 و... و P'_{n-1} قطع‌کنند، آنگاه نقطه‌های اخیر قوس $A'B'$ را به n جزء متساوی تقسیم می‌کنند.

قضیهٔ ۱. هرگاه A و B و C سه نقطه ازیك منحنی حدی باشند و A' و B' و C' نقاطی باشند کـه شعاعهای منتهی به A و B و C یك منحنی حدی هم‌مرکز را قطع کنند، آنگاه $A'C'$ قوس/$A'B'$ قوس$=AC$ قوس/AB قوس.

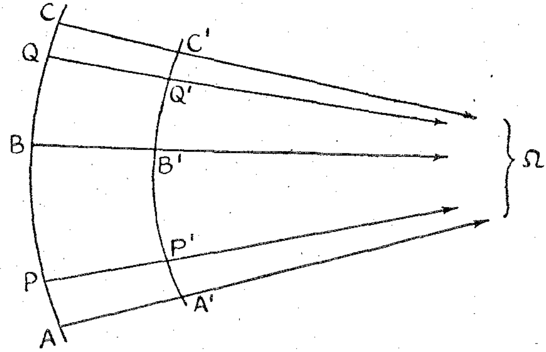
دو حالت را باید در نظرگرفت.

نخست فرض‌کنید که قوسهای AB و AC (شکل ۶۸) اندازه‌پذیر باشند و قوس

---

۱. روشی که بکار می‌بریـم دقیقاً روش Liebmann است در *Nichteuklidische Geometrie*، چاپ دوم، فصل‌سوم (لایپزیك وبرلین، ۱۹۱۲). و نیز ← به *Sur la Geometrie Non-Euclidienne* نوشته Gerard در سالنامهٔ جدید ریاضیات، ۱۸۹۳، ص ۷۴-۸۴. بـرای بررسی دقیق مبتنی براین واقعیت کـه در قلمرو بینهایت دور هندسهٔ هذلولوی دارای سرشت اقلیدسی است (قسمت ۷۴) ← *Non-Euclidean Geometry* نـوشته Coolidge ص. ۴۸ و بعد (اکسفرد ۱۹۰۹): برای روشی دیگر با دیدگاهی متفاوت ← *On the Analytical Basis of Non-Euclidian Geometry* نوشتهٔ W. H. Young، در مجلهٔ امریکایی ریاضیات، جلد سی و سوم، ۱۹۱۱، ص. ۲۴۹-۲۸۶.

۲. ← قسمت ۵۸.



شکل ۶۸

AP واحد مشترك اندازه‌گیری است چنان که $m=\frac{\text{قوس}\ AB}{\text{قوس}\ AP}$ و $n=\frac{\text{قوس}\ AC}{\text{قوس}\ AP}$، m و n عددهایی صحیح باشند. شعاعی را که بر P می‌گذرد رسم کنید. این شعاع $A'C'$ را در P' قطع خواهد کرد. آنگاه واضح است که $m=\frac{\text{قوس}\ A'B'}{\text{قوس}\ A'P'}$ و $n=\frac{\text{قوس}\ A'C'}{\text{قوس}\ A'P'}$،

و بدین ترتیب روشن است که $\frac{\text{قوس}\ A'B'}{\text{قوس}\ A'C'}=\frac{\text{قوس}\ AB}{\text{قوس}\ AC}$.

بعد فرض کنید که قوسهای AB و AC اندازه پذیر نباشند. اگر قوس AP یك واحد اندازه‌گیری برای AB باشد آن را می‌توان تعدادی صحیحی دفعه بر AC نقل کرد و قوس QC باقی می‌ماند و در آن QC کوچکتر است از AP. شعاعی را که بر Q می‌گذرد رسم کنید. این شعاع $A'C'$ را در Q' قطع خواهد کرد، از حالتی که هم‌اکنون دیدیم نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\text{قوس}\ A'B'}{\text{قوس}\ A'Q'}=\frac{\text{قوس}\ AB}{\text{قوس}\ AQ}$$

اگر واحد اندازه‌گیری، یعنی قوس AP کوچکتر شود قوسهای QC و $Q'C'$ کوچك می‌شوند و قوسهای AQ و $A'Q'$ بترتیب به قوسهای AC و $A'C'$ بـه عنوان حد نزدیك می‌شوند. آنگاه

$$\frac{\text{قوس}\ AB}{\text{قوس}\ AC}=\text{حد}\ \frac{\text{قوس}\ AB}{\text{قوس}\ AQ}$$

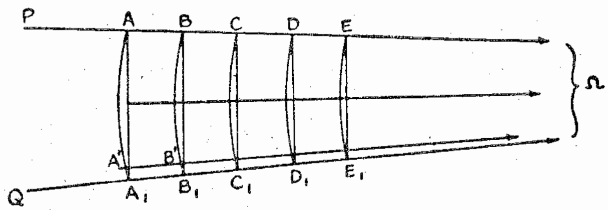
و

$$\frac{\text{قوس}\ A'B'}{\text{قوس}\ A'Q'}=\text{حد}\ \frac{\text{قوس}\ A'B'}{\text{قوس}\ A'Q'}$$

اما اگر دو متغیر همواره متساوی باشند و هر یك به حدی نزدیك شود آنگاه دو حد نیز متساوی خواهند بود. بنابراین

$$\frac{\text{قوس } AB}{\text{قوس } AC}=\frac{\text{قوس } A'B'}{\text{قوس } A'C'}$$

دیگر آن که روی خط $P\Omega$ (شکل ۶۹) نقطهٔ دلخواه A را اختیار کنید، بعد نقطه‌های B، C، D، E، ... را چنان بگیرید که



شکل ۶۹

$$.AB=BC=CD=DE=\ldots$$

در این صورت... $.A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=D_1E_1=$

قوسهای متناظر از منحنیهای حدی هم‌مرکز AA_1، BB_1، CC_1، DD_1، EE_1، ... را رسم کنید. چون قوسها در امتداد توازی کوتاهتر می‌شوند، قوس AA' را می‌توان مساوی قوس BB_1 بر AA_1 جدا کرد. هرگاه $A'\Omega$ را رسم کنیم BB_1 را در B' قطع می‌کند. درنتیجهٔ همنهشتی $AA'B'B$ و BB_1C_1C بر می‌آید که قوسهای BB' و CC_1 برابرند، پس

$$\frac{\text{قوس } AA_1}{\text{قوس } BB_1}=\frac{\text{قوس } BB_1}{\text{قوس } CC_1}=\frac{\text{قوس } CC_1}{\text{قوس } DD_1}=\ldots،$$

وانگهی، اگر AB فاصلهٔ بین قوسهای هم‌مرکز زیاد شود نسبت $\frac{\text{قوس } AA_1}{\text{قوس } BB_1}$ زیاد می‌شود، و بعکس. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که نسبت دو قوس هم‌مرکز متناظر بستگی ندارد به این که در طول شعاعها کجا قرار گرفته‌اند، و به طول قوسها هم بستگی ندارد، بلکه فقط بستگی دارد به فاصلهٔ بین آنها.

قضیهٔ ۲. نسبت دو قوس متناظر از دو منحنی حدی هم‌مرکز فقط بستگی دارد به فاصلهٔ بین آنها که در طول شعاع مشترکی اندازه گرفته شود.

اکنون ما برای اختیار کردن یك واحد طول آمـاده‌ایم. چون نسبت $\frac{AA_1 \text{ قوس}}{BB_1 \text{ قوس}}$ (شکل ۶۹) از واحد بزرگتر است با انتخاب مناسب طول AB آن نسبت را می‌توان با e، مبنای دستگاه طبیعی لگاریتمها، مساوی کرد. شایسته است که AB تحت این شرایط را واحد طول اختیار نمود. بدین تـرتیب بار دیگر سرشت مطلق واحد طول در هندسه هذلولوی را باز می‌شناسیم. واحد خاصی که بدین ترتیب پیشنهاد شد بهترین واحد برای گسترشهای نظری است که از این پس خواهند آمد. درنتیجهٔ سرشت متعالی (غیرعددی) آن متأسفانه نمی‌توان آن را با خط‌کش و پرگار ساخت[1].

بدین تـرتیب اگر قـوسهای AA_1 و BB_1 و CC_1 و... را (در شکل ۶۹) با S و S_1 و S_2 و... نمایش دهیم، و اگر $AB=BC=CD=\ldots=1$، می‌توان چنین نوشت

$$\frac{s}{s_1}=\frac{s_1}{s_2}=\frac{s_2}{s_3}=\ldots=\frac{s_{n-1}}{s_n}=e$$

و در نتیجه

$$s_n=se^{-n}$$

که در آن n عددی است صحیح.

اینك اثبات این قضیه کاری ساده است.

قضیهٔ ۳. هرگاهٔ S و S_x طولهای دوقوس متناظر از منحنیهای حدی هم‌مرکز، و امتداد S_x از S امتداد توازی برای شعاعهای مشترك باشند، و هرگاه فاصلهٔ شعاعی بین قوسها x باشد، آنگاه

$$s_x=se^{-x} \qquad (1)$$

البته اگر x گنگ باشد، یعنی اگر فاصلهٔ شعاعی برحسب واحد طول اندازه‌پذیر نباشد، لازم خواهد آمد که از یك فرایند حدی، چنان که در اثبات قضیهٔ ۱ بکار رفت، استفاده شود.

بررسی کلی‌تر می‌شود اگر واحد طول چنان انتخاب شود که وقتی AB واحد طول باشد نسبت $\frac{AA_1 \text{ قوس}}{BB_1 \text{ قوس}}$ مساوی عدد ثابت‌دلخواه بزرگتر ازواحد a شود. درآن‌صورت چنین خواهیم داشت:

---

۱. ← لیبمان، هندسهٔ نااقلیدسی، چاپ دوم، § ۱۷ (لایپزیك و برلین، ۱۹۱۲).

$$s_x = sa^{-x}$$

هرگاه قرار دهیم

$$a = e^{1/k}$$

نتیجه می‌گیریم

$$s_x = se^{-x/k}$$

که در آن چون $e^{1/k} > 1$ پس $k > 0$. عدد k پارامتری برای هندسهٔ هذلولوی است که مقدارش بستگی دارد به انتخاب واحد طول، یا اگر از زاویهٔ دیگری به آن بنگریم مقدار ثابتی است که انتخابش واحد طول را مشخص می‌سازد. این دومین ثابتی است که وارد شده است[1].

تمرین

۱. نشان دهید که اگر s و s_x طولهای دو قوس متناظر از منحنیهای حدی هم‌مرکز باشند وامتداد s_x از s امتداد توازی برای شعاعهای مشترك باشد آنگاه فاصلهٔ شعاعی x بین دو قوس از دستور زیرین بدست می‌آید.

$$x = k \log \frac{s}{s_x}$$

۲. در هندسهٔ اقلیدسی دو خط متقاطع PR و QR داده شده‌اند. بر PR چهار نقطهٔ متمایز A و B و C و D چنانندکه $AB = CD$، ونقاط متناظر با آنها[2] A_1 و B_1 و C_1 و D_1 روی QR مفروضند، قوسهای هم‌مرکز AA_1 و BB_1 و CC_1 و DD_1 از دایره‌های هم‌مرکز به مرکز R را رسم کنید. ثابت کنید که نسبت $\frac{\text{قوس } AA_1}{\text{قوس } BB_1}$ نمی‌تواند برابر باشد با نسبت $\frac{\text{قوس } CC_1}{\text{قوس } DD_1}$.

۳. دستور (۱) را از این فرض نتیجه بگیریدکه نسبت $\frac{s}{s_x}$ تابع پیوسته‌ای از x، مثلاً $f(x)$ باشد. نخست نشان دهید که $f(x)\,f(y) = (x+y)$، و هرگاه $\log f(x) = F(x)$ آنگاه $F(x) + F(y) = F(x+y)$ و در نتیجه $F(x) = bx$ که در آن b عددی است ثابت.

۶۷. رابطه‌های بین جزءهای یك شکل مهم

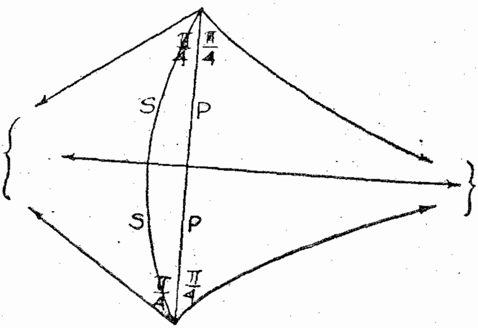
ما نتیجه‌هـای قسمت پیشین را برای بدست آوردن بعضی دستورهـای مهم بکار

---

۱. ← قسمت ۶۳.

۲. ← قسمت ۵۷.

می‌بریم. اما نخست باید دید که اگر نقطه‌ای بریك منحنی حدی‌داده شده باشد نقطهٔ دیگری برآن منحنی می‌توان یافت چنان که خط مماس بر منحنی در نقطهٔ دوم موازی‌باشد با شعاعی که بر نقطهٔ اول بگذرد. درازای‌این قوس‌منحنی‌حدی که‌مماس بر یك انتهای آن موازی باشد با



شکل ۷۰

شعاع انتهای دیگر در قسمت ۷۸ با روشهای حساب جامع و فاضل محاسبه خواهد شد، و درازای قوس همان معنی معمولی را خواهد داشت. این درازا را با S نمایش خواهیم داد. این طول البته مقداری ثابت است زیرا که وتری به‌طول ۲p (شکل ۷۰)، که در $\Pi(p)=\frac{\pi}{۴}$ وتر قوسی به طول ۲S است. این ثابت سومی است که تاکنون پدیدار شده است. سرانجام هویدا خواهد شد که هر سه یکی هستند.

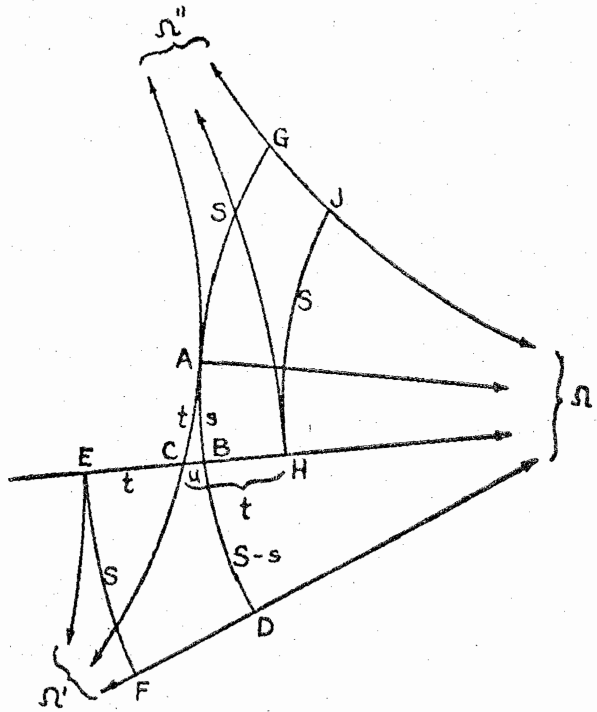
با قوس AB ازمنحنی حدی به مرکز Ω (شکل ۷۱) به طول s، با شرط s کوچکتر از S، شروع می‌کنیم. در این صورت اگرخط مماس برمنحنی در نقطهٔ A کشیده شود، این خط شعاع منتهی به نقطهٔ B را در نقطه‌ای مانند C قطع می‌کند. درازای AC را با t و از آن BC را با u نمایش دهید. با رسم وتر AB آسان است نشان دادن این که در مثلث ABC زاویهٔ ABC بزرگتر است از زاویهٔ CAB، و در نتیجه t بزرگتر است از u.

هرگاه قوس AB ازطرف B تا D امتداد داده شود به‌قسمی‌که قوس AD مساوی S گردد، آنگاه خط مماس $AC\Omega'$ موازی خواهد بود با شعاعی‌که برD می‌گذرد. حال BC را از طرف C تا نقطهٔ E امتداد دهید چنان‌که CE برابر t شود. نتیجه آن که عمودی که در E بر CE رسم شود موازی خواهد بود با $C\Omega'$ و در نتیجه با $D\Omega'$. قوسی حدی به‌مرکز Ω را که برE می‌گذرد رسم کنید و نقطهٔ برخورد این قوس با $D\Omega'$ را با F نمایش دهید. قوس EF مساوی است با S. رابطهٔ

$$S-s=Se^{(-t+u)} \qquad (۱)$$

بآسانی از کاربرد قضیهٔ ۳ بخش ۶۶ بدست می‌آید.

اکنون قوس BA را ازطرف A تا G امتداد دهید بقسمی‌که قوس AG مساوی S شود و شعاع $\Omega G\Omega''$ را رسم کنید. این شعاع موازی است با خط مماس در A. CB



شکل ۷۱

را از B تا نقطه‌ای مانند H امتداد دهید بقسمی که CH مساوی باشد با t و منحنی حدی به مرکز Ω را بر H بگذرانید. این منحنی ΩG را در نقطه‌ای مانند J قطع کند. دشوار نیست نشان‌دادن این‌که خطی‌که بر H به‌موازات ″AΩ بگذرد عمود است بر CH و در نتیجه مماس است بر منحنی حدی‌که بر H مرور می‌کند. نتیجه می‌گیریم که قوس HJ مساوی است با S و سرانجام

$$S+s=Se^{t-u} \qquad (۲)$$

جمع عضو به عضو رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌دهد[1]

$$e^{u}=\cosh t \qquad (۳)$$

و تفریق آن دو رابطه، پس از دست‌کاری مختصری نتیجه می‌بخشد

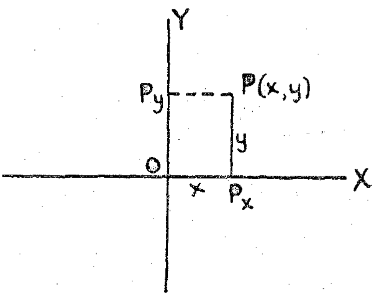
$$s=S\tanh t \qquad (۴)$$

دستورهای (۳) و (۴) رابطه‌های بین جزءهای یك شکل مهم را توصیف می‌کنند،

۱. خواننده‌ای که با تابعهای هذلولوی و خاصیتهای آنها آشنا نیست چکیده‌ای از فرضیه را در ذیل خواهد یافت.

یعنی شکل مرکب از قوسی از منحنی حدی با طولی کمتر از S و مماس بر یك انتهای آن و شعاع منتهی به انتهای دیگرش. دانشجو باید آماده باشدکه هرجا چنین شکلی را ببیند آن را بشناسد. و این رابطه‌ها را به‌یاد بیاورد.

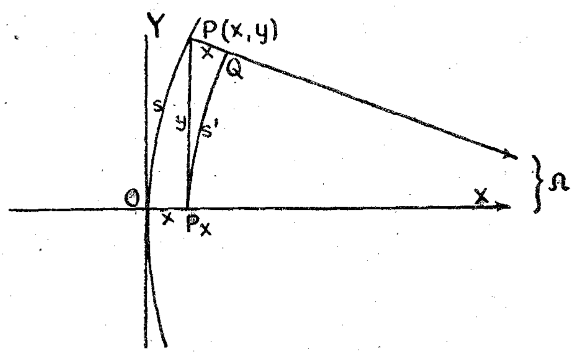
۶۸. دستگاهی از مختصات و یك شکل مهم دیگر



شکل ۷۲

اکنون شایسته‌است که دستگاه مختصاتی برای نقطه‌های صفحهٔ هذلولوی وارد کنیم. فرض‌می‌کنیم OX و OY (شکل ۷۲) محورهای معمولی مختصات، و P نقطه‌ای دلخواه باشند. اگر P_x تصویر قائم P بر OX باشد OP_x را خفت (یاطول، یا آلبسیس)، و PP_x را رست (یا عرض یا اردنه) P می‌نامیم با همان علامتهای متداول. باید توجه داشت که هرگاه P_y تصویر قائم P بر OY باشد چهار ضلعی PP_xOP_y یك چهار ضلعی لامبرتی است و در نتیجه نه OP_y مساوی y است و نه PP_y مساوی x.

به عنوان کاربردی ازآنچه گفته شد به‌نتیجه‌گرفتن معادلهٔ منحنی حدیئی می‌پردازیم که بر مبدأ بگذرد و مرکزش نقطهٔ آرمانی بر امتداد مثبت‌محور x ها باشد و در نتیجه محور y ها در مبدأ برآن مماس شود. برمنحنی (شکل۷۳) نقطه‌ای مانند P، که‌تصویرش



شکل ۷۳

بر محور x ها P_x باشد، اختیار کنید درازای قوس OP را s انگارید. نقطه‌ای را که در آن منحنی حدی ماربر P_x شعاع ماربر P را قطع می‌کند با Q، و درازای قوس PQ را با s' تعیین کنید. اینك معادلهٔ منحنی حدی بی‌آن که‌جای تردیدی باشد بدست‌می‌آید:

$$e^x = \cosh y \qquad (۱)$$

برحسب تصادف به‌شکل مهم دیگری برخوردیم، یعنی آن‌که تشکیل می‌شود از قوسی ازمنحنی حدی بـه هر درازای s، وعمودی به‌طول y مرسوم از یك انتهای قوس بر شعاعی‌که بر انتهای دیگر آن می‌گذرد و پارهٔ x از این شعاع محدود بین نقطه‌ای‌که شعاع منحنی را قطع می‌کند و پای عمود. این شکل دیگری است که باید هر وقت که وقوع می‌یابد آن را شناخت. چون

$$s' = S \tanh y \quad \text{و} \quad s' = se^{-x}$$

نتیجه می گیریم که

$$s = S \sinh y \qquad (۲)$$

دستورهای (۱) و (۲) مبین رابطه‌های مهمی بین جزءهای این شکل است.

در ضمن خاطر نشان می‌سازیم که برحسب آن‌که s کوچکتر از S، یا برابر با S، یا بزرگتر از S باشد ΩP (شکل ۷۳) بترتیب OY را قطع می‌کند، یـا با آن موازی است، یا نسبت به‌آن ناقاطع است.

تمرین

۱. چیست نوع مکان معادلهٔ $y=c$ وقتی‌که c ثابت باشد؟ مکان $x=e$ چیست؟

۲. نشان دهید که معادلهٔ منحنی حدی P_xQ (شکل ۷۳) $e^{x-l}=\cosh y$، که در آن $OP_x=l$.

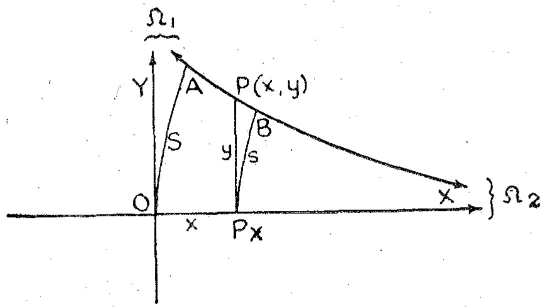
۳. هرگاه QP (شکل ۷۳) محور y ها را در R قطع کند کـه $\tanh b=\sinh y$ که در آن $b=OR$.

۴. معادلهٔ خط راست موازی با محور x ها را که در آن رست نقطهٔ برخورد با محور y ها b باشد تعیین کنید. حالت خاصی را که در آن b بی‌نهایت بزرگ است، یعنی وقتی که خط با محور y ها نیز موازی است، در نظر بگیرید.

۵. هرگاه s طول قوسی از منحنی حدی باشد که طول وتر آن l است ثابت کنید که $s = ۲S \sinh \frac{l}{۲}$.

۶۹. رابطهٔ بین پاره‌خطهای متمم

قبلاً آموخته‌ایم که وقتی پاره‌خطی داده شود چگونه نقطهٔ متمم آن ساخته‌می‌شود. اکنون دروضعی هستیم که رابطهٔ تحلیلی بین هر جفت پاره خطهای متمم Z و Z' رابدست آوریم. آسانتر به هدف خواهیم رسید اگر قبلاً معادله خط راست موازی با هر محور مختصات را در امتداد مثبت آن تعیین کنیم.



شکل ۷۴

گیریم $\Omega_1\Omega_2$ (شکل ۷۴) خط مطلوب و $P(x ، y)$ نقطه‌ای از آن باشند. قوسهای منحنیهای حدی هم‌مرکز OA و P_xB، به‌مرکز Ω_2، را که بر O و P_x، تصویرقائم P بر محور x ها، می‌گذرند و محصور بین آن محور و خط $\Omega_1\Omega_2$ هستند رسم‌کنید. طول قوس P_xB را با s و از آن قوس OA را با S تعیین نمایید. در دم این رابطه‌ها بدست می‌آیند.

$$s = S \tanh y$$

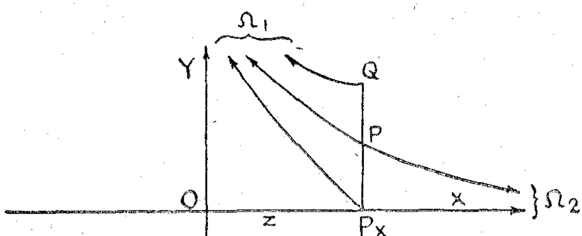
و

$$s = Se^{-x}$$

حذف s این رابطه را نتیجه می‌بخشد،

$$e^{-x} = \tanh y \qquad (۱)$$

برای بدست آوردن رابطهٔ بین هر جفت پاره خطهای متمم z و z' بر روی محور x ها و در جهت مثبت (شکل ۷۵) پاره خط OP_x را مساوی با درازای z جدا کنید. در P_x عمودی بر محور اخراج نمایید. این عمود خط $\Omega_1\Omega_2$ را که موازی مشترك هر



شکل ۷۵

دو محور است درنقطه‌ای چون P قطع می‌کند و این مطلب بآسانی بوسیلهٔ رسم $P_x\Omega_1$ از P_x موازی بـا محور y ها در امتداد جهت مثبت دیده می‌شود. P_xP را از P تا Q امتداد دهید بقسمی‌که PQ مساوی بـاشد با P_xP. در Q خط عمود بر P_xQ را رسم

کنید. این عمود با $P\Omega_1$ و $P_x\Omega_1$ موازی است. واضح است که P_xQ مساوی است با z' متمم پاره خط z. چون مختصات P عبارتند از z و $\frac{z'}{2}$، رابطهٔ مطلوب را از (۱) بدین صورت بدست می‌آوریم:

$$e^{-z}=\tanh\frac{z'}{2}$$

این نتیجه را می‌توان به‌صورت مفیدتری درآورد، بدین شرح:
چون

$$\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\frac{\coth\frac{z'}{2}-\tanh\frac{z'}{2}}{2}$$

$$=\frac{\cosh^2\frac{z'}{2}-\sinh^2\frac{z'}{2}}{2\sinh\frac{z'}{2}\cosh\frac{z'}{2}}=\frac{1}{\sinh z'}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\sinh z=\operatorname{csch} z'$$

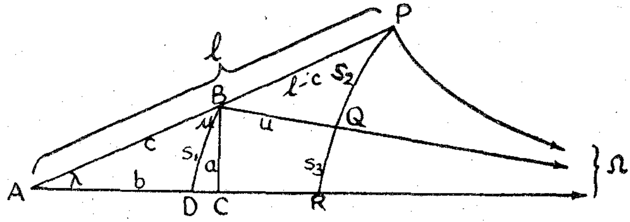
مهم آن است که این رابطه را به این صورتها هم بشناسیم

$$\cosh z=\coth z'$$
$$\tanh z=\operatorname{sech} z'$$
$$\operatorname{csch} z=\sinh z'$$
$$\operatorname{sech} z=\tanh z'$$
$$\coth z=\cosh z'$$

۷۰. رابطه‌های بین جزءهای مثلث قائم‌الزاویه

در هندسهٔ اقلیدسی رابطهٔ مهمی، به صورت قضیهٔ جالب توجه فیثاغورس، بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه داده شده است. رابطهٔ مفیدی هم بین زاویه‌های حادهٔ آن هست. درمثلثات اقلیدسی دستورهای ساده‌ای زاویه‌های حاده را با اضلاع مربوط می‌سازند بطوری که اگر دو جزء از این اجزا داده شده باشند سومی را می‌توان بدست آورد. کوشش دیگر ما این خواهد بود که برای هندسهٔ هذلولوی دستورهای مشابهی کشف کنیم که جزءهای مثلث قائم‌الزاویه را سه به سه مرتبط سازند.

گیریم ABC (شکل ۷۶) مثلثی قائم‌الزاویه باشد و نامگذاری برطبق قرارداد



شکل ۷۶

بعمل آمده باشد. ابتدا از A و بر روی وتر پاره خط AP را برابر l جدا می‌کنیم، l پاره خطی است که زاویهٔ توازی آن λ است. دقت خواننده جلب می‌شود به این‌که در شکل l از c بزرگتر فرض شده است. لزوماً چنین چیزی لازم نیست اما خواننده می‌تواند بآسانی تحقیق کند که اگر l مساوی یا کوچکتر از c هم باشد نتیجه‌ها همین خواهندبود. در P خط عمود بر AP را رسم کنید؛ این خط موازی ACΩ است. و نیز خط BΩ را بر B و موازی ACΩ بکشید. بعد دو قوس از منحنیهای حدی هم‌مرکز به شعاعهای AΩ و BΩ و PΩ رسم نمایید تا آن‌که بر B می‌گذرد AΩ را در نقطهٔ D و آن‌که بر P می‌گذرد BΩ را در Q و AΩ را در R قطع کنند. طولهای قوسهای BD و PQ و QP را بترتیب با $s_۱$ و $s_۲$ و $s_۳$، و طول پاره خط BQ را با u، نمایش دهید. این رابطه‌ها بآسانی حاصل می‌شوند:

$$s_۱ = S \sinh a$$

$$s_۱ = s_۳ e^u$$

$$e^u = \cosh(l-c)$$

$$s_۲ + s_۳ = S \tanh l$$

$$s_۲ = S \tanh(l-c)$$

پس

$$\sinh a = \frac{s_۱}{S} = \frac{s_۳ e^u}{S} = e^u\left[\frac{s_۲+s_۳}{S} - \frac{s_۲}{S}\right]$$

$$= \cosh(l-c)\,[\tanh l - \tanh(l-c)]$$

$$= \frac{\sinh l \cosh(l-c) - \sinh(l-c)\cosh l}{\cosh l} = \frac{\sinh c}{\cosh l}$$

یا

$$\sinh c = \sinh a \cosh l \qquad (\text{آ}\ ۱)$$

این رابطه‌ای است که وتر و یك ضلع و زاویهٔ مقابل به‌آن از مثلث قائم‌الزاویه

را به هم مربوط می‌سازد. دستور مشابه

$$\sinh c = \sinh b \cosh m \qquad (\text{۱ ب})$$

است. یادآوری می‌شود که وابسته به هرمثلث قائم‌الزاویه چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگرند که وجود اولی وجود آن چهار را ایجاب می‌کند. آموخته‌ایم که برای به‌یاد سپردن این رشته از مثلثهای قائم‌الزاویه مناسب است بکاربردن یك پنج ضلعی که اضلاع آن مطابق آنچه در قسمت ۵۳ راهنمایی شده است نامگذاری شوند. هرگاه دستور (۱ آ) به‌صورت

$$\cosh l = \sinh a' \sinh c$$

نوشته شود به‌نظرمی‌رسد که جیب تمام هذلولوی یك جزء میانی پنج ضلعی مساوی‌است باحاصل‌ضرب جیبهای هذلولوی جزءهای مجاورآن. وقتی که‌هرضلع را به‌نوبت به‌عنوان جزء میانی بکاربریم ازمثلث به‌مثلث‌وابسته گذر می‌کنیم وبدین‌ترتیب رابطه‌های دیگری بین‌جزءهای مثلث قائم‌الزاویهٔ اصلی‌بدست می‌آوریم. بدین طریق علاوه بردستور (۱ب) دستور

$$\cosh c = \sinh l \sinh m \qquad (\text{۲})$$

حاصل می‌شود که دستوری است که وتر و دو زاویهٔ حادهٔ مثلث را به یکدیگر مربوط می‌سازد. و نیز

$$\cosh a' = \sinh b' \sinh l$$

یا

$$\tanh a = \sinh b / \sinh l \qquad (\text{۳ آ})$$

و مشابه آن

$$\tanh b = \sinh a / \sinh m \qquad (\text{۳ب})$$

که هر یك رابطه‌ای بین دو ضلع و یکی از زاویه‌های حاده را مشخص می‌سازد.

اگرمقدارهای $\sinh l$ و $\sinh m$ ازدستورهای اخیر را دردستور (۲) قرار دهیم حاصل می‌شود

$$\cosh c = \cosh a \cosh b \qquad (\text{۴})$$

دستور (۴) در هندسهٔ هذلولوی هم‌ارز قضیهٔ فیثاغورس است. وقتی که این نتیجه در ارتباط با پنج ضلعیی که در بالا به‌آن اشاره شد تعبیر شود می‌بینیم که جیب تمام هذلولوی یك جزء میانی مساوی است با حاصل‌ضرب ظل تمامهای هذلولوی جزءهای مقابل. وقتی که گرد پنج ضلعی حرکت کنیم در نتیجهٔ کاربرد این قاعده به چهار دستور دیگر می‌رسیم:

$$\cosh m = \coth a' \coth l$$

یـا

$$\cosh a = \tanh l \cosh m \qquad (۵ آ)$$

و

$$\cosh b = \tanh m \cosh l \qquad (۵ ب)$$

که هر یك از آنها یك ضلع را با زاویه‌های حاده مربوط می‌سازد، و

$$\cosh a' = \coth c \coth m$$

و

$$\cosh b' = \coth c \coth l$$

که هم‌ارز هستند با

$$\tanh a = \tanh c \tanh m \qquad (۶ آ)$$

و

$$\tanh b = \tanh c \tanh l \qquad (۶ ب)$$

هر یك از دو رابطه اخیر وتر و یك ضلع و زاویهٔ بین آنها را با هم ربط می‌دهد.

همهٔ این ده دستور را که دربررسی مثلث قائم‌الزاویهٔ هذلولوی، از هر دو دیدگاه عملی و نظری، دارای اهمیت هستند می‌توان با استفاده از دو قاعدهٔ زیرین نوشت، یعنی دوقاعده‌ای که در بالا القا شده‌اند و به پنج ضلعیی که اضلاعش مانندآنچه در قسمت ۵۳ گفته شد نامگذاری گردیده‌اند رجوع می‌شوند:

۱. جیب تمام هذلولوی یك جزء میانی مساوی است باحاصلضرب جیب تمامهای هذلولوی جزءهای مجاور؛

۲. جیب تمام هذلولوی یك جزء میانی مساوی است با حاصلضرب ظلهای هذلولوی جزءهای مقابل.

خواننده در دم به شباهت این قاعده‌ها و قـاعده‌های نیپیر برای مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی پی‌می‌برد. این دگرگونیها در قاعده‌های نیپیر را مدیون انگل هستیم وآنها را با نام قاعده‌های نیپیر ـ انگل می‌شناسیم.

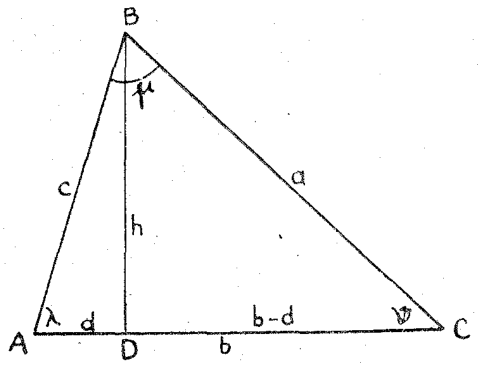
تمرین

۱. ثـابت کنید کـه معادلهٔ خط عمود بـر محور y ها که عرض از مبدأ آن b بـاشد $\tanh y = \tanh b \cosh x$ است.

۲. درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول ارتفاع CD وارد بر وتر را h، و قطعاتی را که بر وترجدا می‌کند $AD = p$ و $DB = q$ بنامید ثابت‌کنیدکه (آ) $\tanh^2 a = \tanh c \tanh q$، (ب) $\sinh^2 b = \tanh p \tanh q$.

۷۱. رابطه‌های بین جزءهای مثلث دلخواه

چون به کشف دستورهایی که جزءهای یك مثلث را به‌هم مربوط می‌سازند بپردازیم خود را در وضعی نیازمند به‌یافتن همانندهای قضیهٔ جیبها و قضیهٔ جیب تمامها درمثلثات اقلیدسی می‌بینیم. همانطور که برای بدست‌آوردن‌آن دستورهای‌آشنا مثلث را با رسم ارتفاع به دومثلث‌قائم‌الزاویه تجزیه می‌کردیم برای دستورهای مشابـه در صفحهٔ هذلولوی نیز چنان می‌کنیم.



شکل ۷۷

ABC (شکل ۷۷) را مثلثی دلخواه می‌انگاریم، و زاویه‌های‌آن را λ و μ و ν، وضلعهای مقابل به آنها را بترتیب a و b و c، و قطعاتی را که به ازائشان آن‌اضلاع زاویه‌های توازی باشند l و m و n می‌نامیم. ارتفاع BD را رسم‌کرده آن را h می‌خوانیم. آنگاه با بکار بستن دستور ۱ قسمت پیشین در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BDC و BDA بدست می‌آوریم:

$$\sinh a = \sinh b \cosh n$$
$$\sinh c = \sinh b \cosh l$$

و در نتیجه

$$\frac{\sinh a}{\sinh c} = \frac{\cosh a}{\cosh l} = \frac{\operatorname{sech} l}{\operatorname{sech} n}$$

با رسم ارتفاعی دیگر می‌بینیم که

$$\frac{\sinh b}{\sinh c} = \frac{\operatorname{sech} m}{\operatorname{sech} n}$$

به نحوی که

$$\sinh a / \sinh b / \sinh c = \operatorname{sech} l / \operatorname{sech} m / \operatorname{sech} n \qquad (۱)$$

خواننده بی‌برخورد با اشکالی می‌تواند ثابت کند که این نتیجه وقتی هم معتبر است که یك زاویهٔ مثلث منفرجه باشد و یك ارتفاع برامتداد یك ضلع وارد شود، یا وقتی که مثلث قائم‌الزاویه باشد.

به شکل ۷۷ بـازگشته درازای AD را بـا d، و در نتیجه درازای DC را با

$b-d$ نشان دهید. آنگاه با کاربرد دستور (۴) قسمت گذشته در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BDC و BDA رابطه‌های زیرین بدست می‌آیند:

$$\cosh a=\cosh h \cosh (b-d)$$
$$\cosh c=\cosh h \cosh d$$

پس

$$\cosh a=\frac{\cosh c \cosh (b-d)}{\cosh d}$$
$$=\frac{\cosh c (\cosh b \cosh d-\sinh b \sinh d)}{\cosh d}$$
$$=\cosh b \cosh c-\sinh b \cosh c \tanh d$$

این رابطه را می‌توان بآسانی، بوسیلهٔ نتیجهٔ حاصل از کاربرد دستور (۶) قسمت ۷۰ در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDA، چنین نوشت

$$\tanh d=\tanh c \tan h\, l$$

بدین ترتیب شبیه دستور جیب تمامی‌را بدست می‌آوریم که طول هر ضلع مثلث را برحسب دو ضلع دیگر و زاویهٔ بین آنها بیان می‌کند:

(۲) $$\cosh a=\cosh b \cosh c-\sinh b \sinh c \tanh l$$

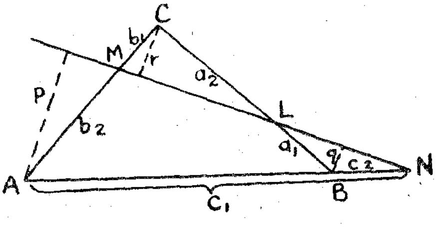
باز هم نتیجه در صورت منفرجه بودن یکی از زاویه‌های مثلث معتبر است. وقتی که λ قائمه باشد این رابطه تبدیل می‌شود به دستور (۴) قسمت ۷۰.

تمرین

۱. هرگاه موربی اضلاع مثلث ABC را قطع کرده ضلع a را به پاره خطهای a_1 و a_2، b را بـه پاره‌های b_1 و b_2 و c را بـه c_1 و c_2 (شکل ۷۸) تقسیم کند ثابت کنید که

$$\sinh a_1 \sinh b_1 \sinh c_1$$
$$=\sinh a_2 \sinh b_2 \sinh c_2$$

(شبیه قضیهٔ منلاتوس).



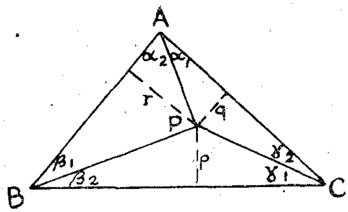
شکل ۷۸

۲. هرگاه خطهایی که نقطهٔ P (شکل ۷۹) را به رأسهای مثلث ABC وصل می‌کنند

زاویه‌های رأسهای A و B و C را بترتیب به جفتهای زاویهٔ α_1، α_2 و β_1، β_2 و γ_1، γ_2 تقسیم کنند، ثابت کنید که

$$\cosh a_1 \cosh b_1 \cosh c_1 = \cosh a_2 \cosh b_2 \cosh c_2$$

که در آن a_1 پاره خطی است که α_1 زاویهٔ توازی آن است، و از همین قبیل.

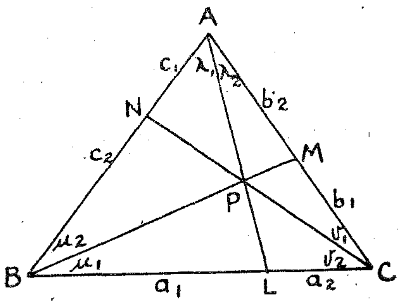


شکل ۷۹

۳. هرگاه خطهایی که P را به رأسهای مثلث ABC وصل می‌کنند ضلعهای مقابل را بـه جفتهای پاره‌خطهای a_1 و a_2، b_1 و b_2، c_1 و c_2 تقسیم کنند ثابت کنید که

$$\sinh a_1 \sinh b_1 \sinh c_1 = \sinh a_2 \sinh b_2 \sinh c_2$$

(با قضیهٔ سوا مقایسه کنید.)



شکل ۸۰

۷۲. رابطهٔ بین پاره‌خط و زاویهٔ توازی آن

پیشتر خاطرنشان کرده‌ایم که بین هر پاره خط و زاویهٔ توازی متناظر با آن رابطه‌ای تبعی وجود دارد. تلاش آیندهٔ ما برای کشف دستوری است که این دو را به هم مربوط می‌سازد. اگر درازای پاره خط را a و زاویهٔ توازی آن را α انگاریم می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\tanh a = \cos \alpha$$

با بررسی تابع پیوستهٔ $f(\alpha)$، که با معادلهٔ

$$\tanh a = \cos f(\alpha)$$

تعریف می‌شود کار را آغاز می‌کنیم[1]. بآسانی می‌توان واقعیتهای ذیل را تحقیق کرد:

هرگاه $\alpha = ۰$، آنگاه $a = \infty$، $\tanh a = ۱$، $\cos f(\alpha) = ۱$ و $f(\alpha) = ۰$

وقتی‌که $\alpha = \frac{\pi}{۲}$ می‌بینیم که $a = ۰$، $\tanh a = ۰$، $\cos f(\alpha) = ۰$، $f(\alpha) = \frac{\pi}{۲}$

---

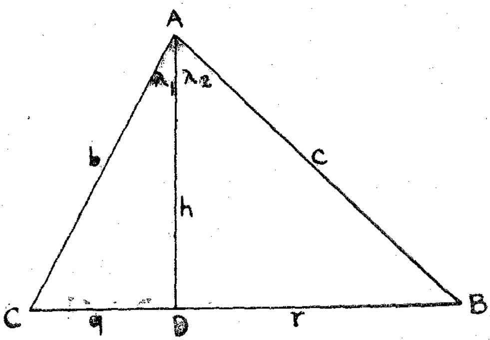
۱. این روش پیرو روش لیبمان است در هندسهٔ نااقلیدسی، چاپ دوم، ص. ۷۵-۷۷ (لایپزیک و برلین ۱۹۱۲).

وقتی که $\alpha=\pi$ نتیجه می‌شود

$$a=-\infty,\ \tanh a=-1,\ \cos f(\alpha)=-1,\ f(\alpha)=\pi$$

بدین ترتیب

$$f(0)=0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\quad f(\pi)=\pi$$



شکل ۸۱

دو زاویهٔ دلخواه λ_1 و λ_2 را در نظر می‌گیریم. برای ساده شدن کار فرض می‌کنیم که هر یک از آنها حاده باشد و مجموعشان نیز مساوی زاویه‌ای حاده شود. بعد می‌توانیم بی‌اشکالی این محدودیت را برداریم. این دو زاویه را مجاور هم قرار دهید (شکل ۸۱) و بر روی ضلع مشترکشان و ابتدا از رأس مشترک A پاره خط AD را کوچکتر از پاره خطهایی که زاویه‌های λ_1 و λ_2 زاویه‌های توازی آنها فرض شوند جدا کنید. از D خط عمود بر AD را رسم کنید تا اضلاع زاویه‌های λ_1 و λ_2 را بترتیب در C و B قطع کند. پاره خطهای AC و AB و CD و DB و AD را بترتیب با b و c و q و r و h نمایش دهید.

دستور کسینوسها [دستور (۲) قسمت ۷۱] را در مثلث ABC بکار ببرید تا بدست آید:

$$\cosh(q+r)=\cosh b\cosh c-\sinh b\sinh c\ \tanh l$$

که در آن

$$\Pi(l)=\lambda_1+\lambda_2$$

در این صورت

$$\cos f(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{\cosh b\cosh c-\cosh(q+r)}{\sinh b\sinh c}$$

$$=\coth b\coth c-\frac{\cosh q\cosh r}{\sinh b\sinh c}-\frac{\sinh q\sinh r}{\sinh b\sinh c}$$

سه جملهٔ طرف راست را به نوبت تحویل خواهیم کرد.

چون در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADC و ADB توجه کنیم که، بترتیب،

$$\tanh h=\tanh b\ \tanh l_1$$

و

$$\tanh h = \tan h\, c \tanh l_2$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\coth b \coth c = \coth^2 h \cos f(\lambda_1) \cos f(\lambda_2)$$

از آنجا که

$$\frac{\cosh q}{\sinh b} = \frac{\cosh q \cosh h}{\sinh b \cosh h} = \frac{\cosh b}{\sinh b \cosh h}$$

$$\frac{\tanh h}{\sinh h \tanh b} = \frac{\tanh l_1}{\sinh h}$$

و بطریق مشابه

$$\frac{\cosh r}{\sinh c} = \frac{\tanh l_2}{\sinh h}$$

برای جملهٔ دوم نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\cosh q \cosh r}{\sinh l \sinh c} = \operatorname{csch}^2 h \cos f(\lambda_1) \cos f(\lambda_2)$$

و بالاخره چون

$$\operatorname{sech} a = \sin f(\alpha)$$

بآسانی می‌توان دیدکه

$$\frac{\sinh q}{\sinh b} = \frac{\sinh q}{\sinh q \cosh l_1} = \operatorname{sech} l_1 = \sin f(\lambda_1)$$

و به همین راه

$$\frac{\sinh r}{\sinh c} = \sin f(\lambda_2)$$

نتیجهٔ خالص چنین است

$$\cos f(\lambda_1 + \lambda_2) = \cos f(\lambda_1) \cos f(\lambda_2) - \sin f(\lambda_1) \sin f(\lambda_2) =$$
$$= \cos[f(\lambda_1) + f(\lambda_2)]$$

و ما به این نتیجه رسیده‌ایم که تابع مورد پژوهش در شرط

$$f(\lambda_1) + f(\lambda_2) = f(\lambda_1 + \lambda_2)$$

صدق می‌کند. آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{f(\alpha_1 + h) - f(\alpha_1)}{h} = \frac{f(\alpha_2 + h) - f(\alpha_2)}{h}$$

و با میل‌دادن h به سوی صفر نتیجه بگیریم

$$f'(\alpha_1)=f'(\alpha_2)$$

و به این نتیجه برسیم که $f'(\alpha)$ مقداری ثابت است. با انتگرالگیری نتیجهٔ

$$f(\alpha)=k\alpha+c$$

حاصل‌می‌شود که درآن k و c ثابتهایی هستندکه مقدارهایشان با درنظر گرفتن مقدارهای $f(\alpha)$ به ازای $\alpha=0$ و $\alpha=\frac{\pi}{2}$ بآسانی حساب می‌شوند. و بدین ترتیب آشکار است که

$$f(\alpha)=\alpha$$

و که، سرانجام،

$$\tanh a=\cos\alpha \qquad (1)$$

این رابطه رابطه‌های (۲) تـا (۶) ذیل را همراه می‌آورد که تحقیقشان برای خواننده آسان است:

$$\coth a=\sec\alpha \qquad (2)$$

$$\operatorname{sech} a=\sin\alpha \qquad (3)$$

$$\cosh a=\csc\alpha \qquad (4)$$

$$\sinh a=\cot\alpha \qquad (5)$$

$$\operatorname{csch} a=\tan\alpha \qquad (6)$$

این ارتباط‌مهم بین یك‌پاره‌خط وزاویهٔ توازی‌آن رامی‌توان‌با استفاده ازاین‌واقعیت‌که

$$e^a=\sinh a+\cosh a$$

به صورت تا حدی فشرده‌تری درآورد.

در دم این رابطه را داریم‌که

$$e^a=\cot\alpha+\csc\alpha=\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

و در نتیجه

$$\tan\frac{\alpha}{2}=e^{-a} \qquad (7)$$

و این نتیجه‌ای است که بولیایی و لباچفسکی هر دو بدست آورده بودند.

۷۳. دستورهای ساده شده در مثلث قائم‌الزاویه و مثلث دلخواه

به کمك رابطه‌هایی که بدست‌آمدند دستورهای مهم قسمتهای ۷۰ و ۷۱ را می‌توان تغییر داد. دستورهای مربوط به مثلث قائم‌الزاویه چنین می‌شوند:

$$\sin\lambda=\sinh a/\sinh c \qquad (\text{۱ آ})$$

$$\sin \mu = \sinh b / \sinh c \qquad (۱ ب)$$
$$\cot \lambda \cot \mu = \cosh c \qquad (۲)$$
$$\tan \lambda = \tanh a / \sinh b \qquad (۳ آ)$$
$$\tan \mu = \tanh b / \sinh a \qquad (۳ ب)$$
$$\cosh c = \cosh a \cosh b \qquad (۴)$$
$$\cosh a = \cos \lambda / \sin \mu \qquad (۵ آ)$$
$$\cosh b = \cos \mu / \sin \lambda \qquad (۵ ب)$$
$$\cos \mu = \tanh a / \tanh c \qquad (۶ آ)$$
$$\cos \lambda = \tanh b / \tanh c \qquad (۶ ب)$$

در مورد مثلث کلی این دو رابطه را داریم:

$$\sinh a / \sinh b / \sinh c = \sin \lambda / \sin \mu / \sin \nu$$
$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \lambda$$

۷۴. پارامتر

در قسمت ۶۶ فاصلهٔ شعاعی بین قوسهای متناظر دو منحنی حدی هم‌مرکز را که نسبت قوسها e بودبه‌عنوان واحد طول اختیارکردیم. همان‌وقت دیدیم که بررسی بهتری ازموضوع میسر می‌شود اگر واحد طول فاصلهٔ شعاعی اختیارشود وقتی که نسبت بین دو قوس متناظر مقدار دلخواه a باشدکه در آن a ثـابتی است بزرگتر از ۱. بدین ترتیب در هندسهٔ هذلولوی یك پارامتر k بزرگتر از صفر وارد می‌شود بقسمی که

$$a = e^{1/k}$$

در آن صورت دستور $$s_x = s e^{-x} \qquad (۱)$$

قضیهٔ ۳ قسمت ۶۶ چنین می‌شود $$s_x = s e^{-x/k} \qquad (۲)$$

در گسترشی که دیدیم از دستور (۱) استفاده شده است. هرگاه دستور (۲) بکار برده شود نتایج همان خواهند بود الا این‌که در دستورها طولهای پاره‌خطها برk تقسیم می‌شوند. بدین ترتیب دستور بنیادی قسمت ۷۲ این صورت را به‌خود می‌گیرد:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = e^{-a/k}$$

در حالی که دستورهای قسمت گذشته چنین می‌شوند:

$$\sin \lambda = \sinh a/k : \sinh c/k \qquad (۱ آ)$$
$$\sin \mu = \sinh b/k : \sin c/k \qquad (۱ ب)$$
$$\cot \lambda \cot \mu = \cosh c/k \qquad (۲)$$

$$\tan \lambda = \tanh a/k : \sinh b/k \qquad (۳ آ)$$
$$\tan \mu = \tanh b/k : \sinh a/k \qquad (۳ ب)$$
$$\cosh c/k = \cosh a/k \cosh b/k \qquad (۴)$$
$$\cosh a/k = \cos\lambda / \sin\mu \qquad (۵ آ)$$
$$\cosh b/k = \cos\mu / \sin\lambda \qquad (۵ ب)$$
$$\cos \mu = \tanh a/k : \tanh c/k \qquad (۶ آ)$$
$$\cos \lambda = \tanh b/k : \tanh c/k \qquad (۶ ب)$$

دستورهای جیب و جیب تمام، بترتیب، بدین صورت در می‌آیند

$$\sinh a/k : \sinh b/k : \sinh c/k = \sin \lambda : \sin \mu : \sin \nu$$
$$\cosh a/k = \cosh b/k \cosh c/k - \sinh b/k \sinh c/k \cos \lambda$$

هرگاه پارامتر k به سوی بی‌نهایت گرایش داده شود مهم این است که

$$\underset{k\to\infty}{\text{حـــد}} \tan\frac{\alpha}{۲} = \underset{k\to\infty}{\text{حـــد}} e^{-a/k} = ۱$$

و زاویهٔ توازی برای هرفاصله نزدیك می‌شود به زاویهٔ قائمه. نتیجه می‌گیریم که هرگاه پارامتر در مقایسه با اندازه‌های پاره‌خطهای دخیل خیلی بزرگ اختیار شود هندسهٔ هذلولوی به نحوی محسوس اقلیدسی می‌شود. واقعیت آن که اگر k به سوی بی‌نهایت بگراید همهٔ دستورهای بالا تبدیل به دستورهای هندسهٔ اقلیدسی در مثلثات خواهند شد. مثلاً، از آنجا که

$$\underset{k\to\infty}{\text{حـــد}} \frac{\sin a/k}{a/k} = ۱$$

دستور (۱ آ) تبدیل می‌شود به

$$\sin \lambda = a/c$$

وچون هر جیب تمام هذلولوی را بوسیلهٔ رشتهٔ متناظر با آن جانشین‌کنیم و ازبینهایت کوچکهای مرتبه‌های بالاتر چشم بپوشیم دستور (۴) می‌شود:

$$۱ + c^۲/۲k^۲ = (۱ + a^۲/۲k^۲)(۱ + b^۲/۲k^۲)$$

یا بالاخره

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

دستورهای جیب و جیب تمام در حد به صورتهای عادی

$$\sin \lambda / \sin\mu / \sin \nu = a/b/c$$

و

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc \cos \lambda$$

در می‌آیند. اما دیدگاه دیگری هست که پرتو بیشتری بر وضع می‌افکند. می‌توانیم a/k را بی‌نهایت کوچك کنیم بدین طریق که a را به سمت صفر گرایش دهیم به‌جای آن‌که k به‌بی‌نهایت میل کند. بدین ترتیب باید برای عددهای به اندازهٔ کافی کوچك انتظار داشته باشیم که دستورهای اقلیدسی تقریباً حتی درهندسهٔ هذلولوی معتبر باشند. اگر درفضایی که در آن زندگی می‌کنیم آزمایشهای دقیق انجام دهیم و خطاهای اندازه‌گیری را هم در نظر بگیریم و بظاهر معین کنند که مجموع زاویه‌های مثلث همیشه دو قائمه است هیچ دلیل مجاب‌کننده‌ای براین نیست که سرشت فضای ما دقیقاً اقلیدسی است. حتی اگر رأسهای مثلث را مثلاً در سه ستارهٔ بسیار دور ازهم فرض کنیم اضلاع مثلث ممکن‌است در مقایسهٔ با پارامتر k کوچکتر از حد لزوم باشند و بدین ترتیب فضای ما ظاهراً و تقریباً اقلیدسی است.

این‌که دستورهای اقلیدسی برای صفحهٔ هذلولوی در همسایگی یك نقطه، یعنی دریك قلمرو بی‌نهایت کوچك، معتبر هستند واقعیتی است دارای بیشترین اهمیت، وبرای پژوهشهایی‌که در فصل بعد در حساب جامع و فاضل خواهد شد اساسی فراهم می‌آورد.

درپایان باید به‌واقعیت دیگری‌که دارای اهمیتی است اشاره کرد. هر خواننده‌ای که با مثلثات کروی آشنا باشد به شباهت دستورهایی‌که در مورد مثلث قائم‌الزاویه و مثلث کلی یافتیم با دستورهای مثلثهای واقع برکره متوجه شده است. ثابت k نقش‌شعاع کره را برعهده دارد. براستی اگر k موهومی باشد دستورها یکی خواهند شد. بدین ترتیب هندسهٔ هذلولوی را می‌توان شبیه به هندسهٔ کره‌ای به شعاع موهومی دانست.[1]

تمرین

۱. ثابت کنید که هرگاه s برابر با نصف مجموع اضلاع مثلث دلخواهی باشد، آنگاه

$$\cos \lambda/۲ = \sqrt{\frac{\sinh s/k \ \sinh (s-a)/k}{\sinh b/k \ \sinh c/k}}$$

و

$$\sin \lambda/۲ = \sqrt{\frac{\sinh (s-b)/k \ \sinh (s-c)/k}{\sinh b/k \ \sinh c/k}}$$

۲. ثابت کنید که r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث از این دستور بدست می‌آید

$$\tanh r/k = \sqrt{\frac{\sinh (s-a)/k \ \sinh (s-b)/k \ \sinh (s-c)/k}{\sinh s/k}}$$

۳. مطلوب است صورت حدی هر یك از دستورهایی که در این قسمت برای جزءهای

---

۱. قسمت ۲۳.

مثلث قائم‌الزاویه و مثلث کلی بدست آورده‌ایم وقتی که k به بی‌نهایت گراید.

۴. صورتهای حدی را برای تمرینهای ۱ و ۳ قسمت ۷۱ بدست آورید.

۵. هرگاه مماس در یك انتهای قوسی به طول s از یك منحنی حدی با وتر آن قوس زاویهٔ θ بسازد ثابت کنید که $s=2S\tan\theta$. $(k=1)$.

۶. هرگاه مماس در یك انتهای قوسی به طول s از یك منحنی حدی با شعاع مار بر انتهای دیگر قوس زاویهٔ φ بسازد نشان دهید که $s=S\cos\varphi$.

۷. ثابت کنید که شعاع دایرهٔ محاطی مثلث با حداکثر مساحت (بخش ۶۴) مساوی است با $\frac{1}{2}k\log_e 3$.

۸. هرگاه در یك چهار ضلعی با حداکثر مساحت که از رسم چهار موازی مشترك دو خط متقاطع تشکیل می‌شود طولهای عمودمشترکهای دو جفت اضلاع روبرو a و b باشند ثابت کنید که

$$\sinh a/2k\,.\,\sinh b/2k=1$$

۹. هر یك از سه منحنی حدی به هر سه ضلع مثلثی مماس است. ثابت کنید که مثلث متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ هر ضلع $\cosh^{-1}\frac{3}{2}$ ($k=1$ رابکارببرید)است وهرزاویه $\cosh^{-1}\frac{3}{5}$ است و نیز ثابت کنید که شعاع دایرهٔ محاطی مثلث $\tanh^{-1}\frac{1}{4}$ و شعاع دایرهٔ محیطی آن $\tanh^{-1}\frac{1}{2}$ است. سه منحنی حدی در اینجا نقش سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث را بر عهده دارند

٦

کاربرد حساب جامع و فاضل

در حل بعضی از مسائل هندسهٔ هذلولوی

«معرفت ما بر رابطه‌های علی پدیده‌ها بطور عمده بستگی دارد به درجهٔ دقت ما در دنبال کردن پدیده‌ها در بینهایت کوچك.»
ریمان

۷۵. مدخل

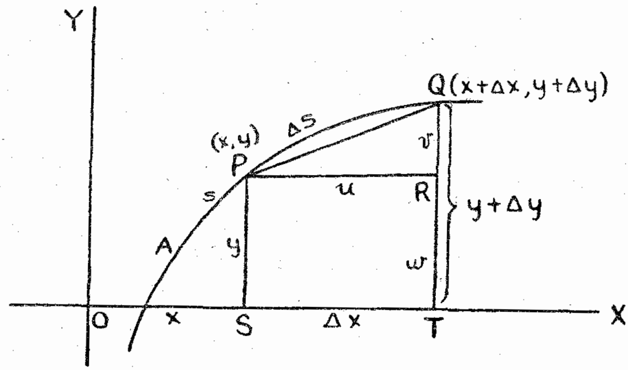
آنچه باقی‌مانده است بدست‌آوردن نتیجه‌های چندی است که حتی در مدخل کوتاهی بر مطالعهٔ هندسهٔ هذلولوی نمی‌توان از آنها چشم پوشید. اما این‌گونه مسائل از قبیل مشتقگیری از دستورهای محیط و پهنهٔ دایره نیاز به‌کاربرد حساب جامع و فاضل‌دارند. پس اینك ما دقت خود را متوجه یافتن دستورهایی برای دیفرانسیلهای قوس و پهنه در هندسهٔ مورد نظر می‌سازیم. این پژوهشها در نتیجهٔ واقعیتی که در فصل پیشین کشف کردیم به‌نسبت آسانتر می‌شوند، و آن معتبربودن دستورهای اقلیدسی درمثلثهای بی‌نهایت کوچك است.

۷۶. دیفرانسیل قوس در مختصات دکارتی

فرض کنید که معادلهٔ منحنی پیوسته‌ای در دستگاه مختصات دکارتی

$$y=f(x)$$

باشد. فرض کنید P (شکل ۸۲) بـا مختصات x و y نقطه‌ای از منحنی و A نقطه‌ای ثابت باشند. طول قوس AP را بـا s نمایش دهید. s تابعی است از x. مطابق رسم معمول بـه x نمو Δx می‌دهیم. در این صورت y و s می‌شوند $y+\Delta y$ و $s+\Delta s$.



شکل ۸۲

نقطهٔ $(x+\Delta x$ و $y+\Delta y)$ را بـا Q مشخص سازید. عمودهـای PS و QT را از P و Q بر محور xها فرود آورده PR را عمود بر QT رسم کنید. طولهای PR و QR و RT را بترتیب بـا u و v و w نمایش دهید. آنگاه $PS=y$ و $ST=\Delta x$ و $QT=v+w=y+\Delta y$. بالاخره Δx را بـه سوی صفر میل دهید. بـرای مثلث قائم‌الزاویهٔ بی‌نهایت کوچك PQR این رابطه را داریم:

$$PQ^2=u^2+v^2$$

و بدین ترتیب

$$PQ^2/\Delta x^2=u^2/\Delta x^2+v^2/\Delta x^2 \qquad (1)$$

حالا بایدتوجه داشت که PSTR چهار ضلعی لامبرتی و درP حادالزاویه است. خواننده در دم به یاد می‌آورد[1] که این چهار ضلعی وجود مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اجزای a، c، l، m، مطابق نـامگذاری قـراردادی، بترتیب مساوی بـا Δx، u، y، w را ایجاب می‌کند. با استفاده از رابطه‌هایی کـه این اجزای مثلث قائم‌الزاویه را بـه هم مربوط می‌سازند (قسمت ۷۰، دستورهای ۱ آ تا ۵ آ) خواهیم داشت.

$$\sinh u/k=\sinh \Delta x/k \cosh y/k \qquad (2)$$

و

$$\cosh \Delta x/k=\tanh y/k \coth w/k \qquad (3)$$

۱. ← قسمت ۵۳.

از اولی می‌بینیم که، جز برای بی‌نهایت کوچکهای مرتبهٔ بالاتر،

$$u = \cosh (y/x)\, \Delta x$$

حال آن که در بررسی دومی واضح است که اختلاف y و w مقداری است بی‌نهایت کوچک، زیرا که حد نسبت $\tanh y/k$ و $\tanh w/k$ مساوی ۱ است. باید نشان دهیم که مرتبهٔ این مقدار بی‌نهایت کوچک بالاتر است از مرتبهٔ Δx. فرض کنید

$$w = y - \varepsilon$$

آنگاه از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌گیریم

$$\tanh y/k = \tanh (y-\varepsilon)/k \cosh \Delta x/k$$

که می‌تواند نوشته شود

$$\tanh y/k = \frac{\tanh y/k - \tanh \varepsilon/k}{1 - \tanh y/k \tanh \varepsilon/k} \cosh \Delta x/k$$

یا، جز برای بی‌نهایت کوچکهای مرتبهٔ بالاتر،

$$\tanh y/k\, (1 - \varepsilon/k \tanh y/k) = (\tanh y/k - \varepsilon/k)\, (1 + \Delta x^2/2k^2)$$

بدین ترتیب

$$\varepsilon = 1/2k \,.\, \sinh y/k \,.\, \cosh y/k\, \Delta x^2$$

و ε بی‌نهایت کوچکی است که نسبت به Δx از مرتبهٔ دوم است. بعلاوه از آنجا که

$$v = y + \Delta y - w = \Delta y + \varepsilon$$

واضح است که v و Δy بی‌نهایت کوچکهای هم مرتبه‌اند.

چون به معادلهٔ (۱) بازگردیم و فرض کنیم که قوس Δs و وتر PQ بی‌نهایت کوچکهای هم‌ارزباشند می‌توانیم به‌جای PQ و u و v بترتیب Δs و $\cosh (y/k)\, \Delta x$ و Δy قرار دهیم و به حد برویم تا بدست آوریم

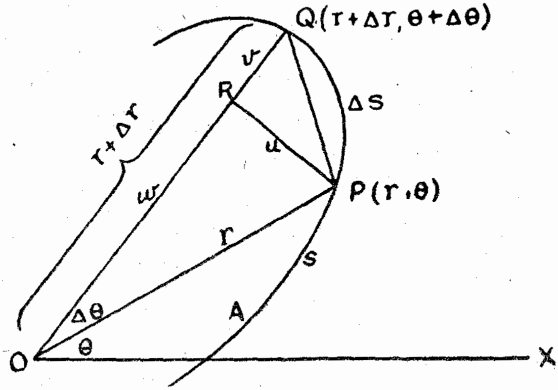
$$(ds/dx)^2 = \cosh^2 y/k + (dy/dx)^2$$

و بالاخره دستور برای دیفرانسیل قوس بدین صورت بدست می‌آید

$$ds^2 = \cosh^2 (y/k)\ dx^2 + dy^2$$

۷۷. دیفرانسیل قوس در مختصات قطبی

مختصات قطبی متداول در هندسهٔ هذلولوی درست بـه همان راه کـه در هندسهٔ سهموی متداول است تعریف می‌شوند. بدین ترتیب درشکل ۸۳ نقطهٔ O قطب و Ox خط قطبی است؛ مختصات P عبارتند از r و θ که درآن r شعاع بردار و θ زاویهٔ برداری است. به تعیین دستور دیفرانسیل قوس در مختصات قطبی می‌پردازیم.



شکل ۸۳

هرگاه
$$r=f(\theta)$$
معادلهٔ منحنی پیوسته‌ای در مختصات قطبی باشد، و P (شکل ۸۳) نقطهٔ دلخواهی از منحنی با مختصات r و θ، و A نقطه‌ای ثابت باشند، طول قوس AP را با s نشان می‌دهیم. وقتی که θ نموی به اندازهٔ $\Delta\theta$ پیدا کند r و s بترتیب می‌شوند $r+\Delta r$ و $s+\Delta s$. با Q نقطه‌ای به‌مختصات $(r+\Delta r ، \theta+\Delta\theta)$ را معین می‌کنیم. شعاع بردار OQ و وترPQ و عمود PR ازP بر OQ را رسم کنید. حرفهای u و v و w را بترتیب برای نمایش پاره‌خطهای PR و RQ و OR بکار برید. آنگاه اگر $\Delta\theta$ به سوی صفر بگراید در مثلث قائم‌الزاویهٔ PQR

$$PQ^2/\Delta\theta^2=u^2/\Delta\theta^2+v^2/\Delta\theta^2 \tag{۱}$$

چون روابط بین اجزای مثلث قائم‌الزاویهٔ ORP را بکار برید (قسمت ۷۴، دستورهای ۱ تا ۴)

$$\sin\Delta\theta=\frac{\sinh u/k}{\sinh r/k} \tag{۲}$$

و
$$\cosh r/k=\cosh u/k \cosh w/k \tag{۳}$$

از اولی نتیجه می‌شودکه u و$\Delta\theta$ و$k \sinh r/k$ بی‌نهایت کوچکهای هم مرتبه هستند، و از دومی نتیجه می‌گیریم که

$$r=w+\varepsilon$$

که در آن ε مقداری است بی‌نهایت کوچك. اما ε ازمرتبه‌ای است بالاتر از مرتبهٔ $\Delta\theta$، به دلیل آن‌که

$$\cosh (w+\varepsilon)/k= \cosh w/k \cosh \varepsilon/k- \sinh w/k \sinh \varepsilon/k$$

بقسمی که با چشم پوشیدن از بی‌نهایت کوچکهای مرتبهٔ بالاتر

$$\cosh w/k+\varepsilon/k \sinh w/k=(1+u^2/2k^2)\cosh w/k$$

بقسمی که
$$\varepsilon=u^2/2k \,.\, \coth w/k$$

آنگاه v و Δr از یك مرتبه‌اند، زیرا که درپایین‌ترین مرتبه این رابطه برقراراست:

$$v=r+\Delta r-w=\Delta r$$

بدین ترتیب دستور (۱) در حد می‌شود

$$ds^2=k^2 \sinh^2 r/k\, d\theta^2+dr^2$$

۷۸. محیط دایره و درازای قوسهای منحنی حدی و منحنی همفاصله

اکنون آماده‌ایم کـه دستورهای دو قسمت اخیر را در حل برخی از مسائل مهم بکار بریم. نخست دستور محاسبهٔ محیط دایره را با بکاربردن صورت قطبی معادله، یعنی

$$r=a$$

بدست می‌آوریم.

در این صورت

$$ds^2=k^2 \sinh^2 r/k\, d\theta^2+dr^2=k^2 \sinh^2 a/k\, d\theta^2$$

و

$$s=4k \sinh a/k\int_0^{\pi/2} d\theta=2k\pi\sinh a/k \qquad (1)$$

اکنون به منحنی همفاصله توجه کرده مختصات دکارتی و معادلهٔ

$$y=b$$

را بکارمی‌بریم بقسمی‌که محور x ها خط مبنا باشد. آنگاه اگر s طول قوسی از منحنی همفاصله باشدکه تصویرش برخط مبنا a باشد، و اگر b فاصلهٔ مشترك همهٔ نقاط از خط مبنا فرض شود

$$s=\cosh b/k\int_0^{a} dx=a\cosh b/k \qquad (2)$$

و می‌بینیم کـه، همان‌گونه کـه می‌شد پیش‌بینی کـرد، طول قوس مستقیماً متناسب با تصویرش تغییر می‌کند.

در قسمت ۶۸، در مختصات دکارتی، معادلهٔ منحنی حدی را که بر مبدأ بگذردو مرکزش نقطهٔ وهمی در امتداد مثبت محور x ها باشد، آوردیم. صورت کلی معادله

$$e^{x/k}=\cosh y/k$$

است. برای آن‌که طول قوس این منحنی را از مبدأ تا نقطهٔ (x ،y) بیابیم خاطر نشان می‌سازیم که

$$dx = \tanh y/k \, dy$$

و در نتیجه

$$s = \int_{0}^{y} \cosh y/k \, dy$$

بقسمی که

$$s = k \sinh y/k \qquad (۳)$$

خواننده علاقه‌مند خواهد بود که صورت حدی این نتیجه‌ها را وقتی‌که k نامتناهی شود بدست آورد.

مطلب مهمی کشف خواهد شد وقتی‌که s، طول قوسی از منحنی حدی، در صورتی تعیین شود که مماس بریك انتهای‌آن موازی باشد با شعاع منتهی به انتهای دیگر. تنها چیزی‌که مورد نیاز است یافتن‌رست نقطهٔ برخورد منحنی حدی

$$e^{x/k} = \cosh y/k$$

است با خط[1]

$$e^{-x/k} = \tanh y/k$$

موازی با هر دو محور مختصات در امتدادهای مثبت آنها، و استفاده از آن رست در دستور (۳). رست از دستور

$$y = k \sinh^{-1} 1$$

بدست می‌آید و با قراردادن مقدار مناسب حاصل می‌شود[2]

$$S = k$$

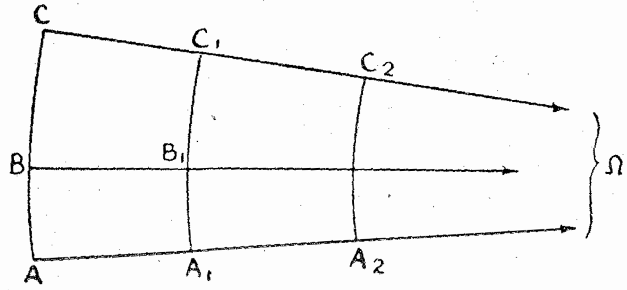
۷۹. پهنهٔ یك شکل بنیادی

تاکنون پژوهشهای ما دربارهٔ پهنه بیشتر محدود بوده‌اند بـه پهنهٔ مثلث. نزدیك شدن به‌طور طبیعی به ملاحظهٔ پهنه از دیدگاه کلی‌تر، که کاملاً به‌طریق اقلیدسی عمل می‌شود، از اندیشه‌هایی برمی‌آید که نخستین‌بار درقسمت ۶۶ عرضه‌گردیدند. هم‌سودمند و هم جالب توجه است‌که پیش از پرداختن بـه بررسی پهنه از دیدگاه حساب جامع و

---

۱. ← قسمت ۶۹.

۲. این رابطه را می‌توان از مقایسهٔ دستور (۳) با دستور (۲) قسمت ۶۸ نیز بدست‌آورد.



شکل ۸۴

فاضل اندکی بیشتر به‌این نحو استدلال بپردازیم.

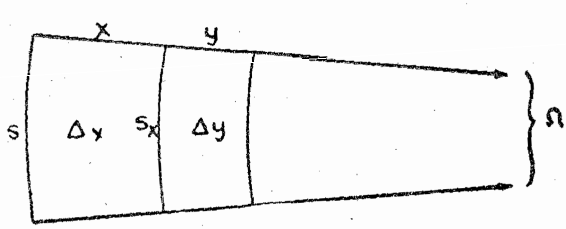
فرض کنید ABC (شکل ۸۴) قوسی از یك منحنی حدی بـه مرکز Ω، و A_1 و B_1 و C_1 بترتیب نقاط بـرخورد شعاعهای منتهی به A و B و C با یك منحنی حدی هم‌مرکز و واقع در طرفی از ABC متوجه به امتداد تـوازی شعاعها باشند. آنگاه به عنوان پیامدی از نتایج حـاصل در قسمت ۶۶، و این واقعیت کـه مفهوم ما از پهنه متضمن این فکر است کـه شکلهای همنهشت پهنه‌های متساوی دارند، بـه این نتیجه می‌رسیم که

$$AC \text{ قوس}/AB = \text{پهنهٔ } ACC_1A_1/\text{پهنهٔ } ABB_1A_1$$

خواه AB وAC نسبت به‌هم اندازه‌پذیر باشند وخواه نباشند. بعلاوه، هرگاه شعاعهای منتهی بـه A و C منحنی حدی هم‌مرکز سومی را بترتیب در A_2 و C_2 قطع کنند و این منحنی سومین در طرفی از A_1C_1 درامتداد توازی شعاعها قرارگرفته باشد وهرگاه فاصله‌های AA_1 و A_1A_2 برابر باشند، آنگاه

$$A_1C_1 \text{ قوس}/AC = \text{پهنهٔ } A_1C_1C_2A_2/\text{قوس } AC \; \text{پهنهٔ } ACC_1A_1$$

بدین‌ترتیب چنین می‌نماید که، برای شکلی مشتمل بردوقوس متناظر از منحنیهای حدی و پاره‌هایی از شعاعها که انتهای متناظر آنها را به یکدیگر وصل می‌کنند، نسبت پهنه به قوس بزرگ بستگی به طول قوس ندارد بلکه بستگی دارد به فاصلهٔ شعاعی بین



شکل ۸۵

قوسها. پس، با استفاده از علامتهایی که درقضیهٔ ۳ قسمت ۶۶ بکاربردیم، نتیجه‌می گیریم که پهنهٔ Δ_x (شکل ۸۵) محصور بین قوسهای هم‌مرکز متناظر s و s_x از رابطهٔ

$$\Delta_x = s\, f(x)،$$

که در آن f(x) تابعی از x است که باید تعیین شود، بدست می‌آید. بنابراین هرگاه

$$\Delta_y = s_x f(y)$$

آنگاه

$$\Delta_{x+y} = sf(x+y)$$

و در نتیجه

$$e^{x/k}f(x) + f(y) = e^{x/k} f(x+y)$$

برای حل‌کردن این معادلهٔ تابعی x و y را مبادله می‌کنیم و بدست می‌آوریم

$$f(x) + e^{y/k} f(y) = e^{y/k} f(x+y)$$

سپس f(x+y) را حذف می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$f(x) / (۱ - e^{-x/k}) = f(y) / (۱ - e^{-y/k})$$

بقسمی که

$$f(x) = C\, (۱ - e^{-x/k})$$

که در آن C ثابت است. انتخاب C موجب تعیین واحد پهنه خواهد شد. شایسته‌است که مقدار آن را به‌عنوان k اختیارکنیم. بدین ترتیب سرانجام بدست می‌آوریم

$$\Delta_x = ks\, (۱ - e^{-x/k})$$

برای حالتی که در آن s مساوی S باشد می‌بینیم که

$$\Delta_x = k^۲\, (۱ - e^{-x/k})$$

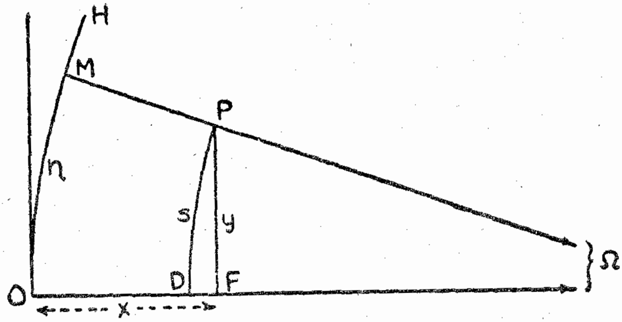
و چون x نامتناهی می‌شود می‌بینیم که حد این پهنه

$$\Delta_\infty = k^۲$$

است. حد را می‌توان مساحتی انگاشت محصور بین قوس منحنی حدی به درازای s و شعاعهای منتهی به دو سرآن. واحد پهنه طوری اختیار شده است که این پهنه مساوی $k^۲$ باشد.

۸۰. مختصات منحنی حدی

برای آن‌که بتوانیم از نتیجه‌هایی که بدست آوردیم به‌نحو مناسبی استفاده کنیم نیاز به‌آن‌داریم که‌دستگاه مختصات جدیدی معرفی‌کنیم که‌مخصوص‌هندسهٔ هذلولوی‌است. به‌عنوان مبنای مراجعه در یك دستگاه مختصات منحنی حدی محوری مانند $O\Omega$



شکل ۸۶

(شکل ۸۶) بر می‌گزینیم که در آن O مبدأ و Ω یکی از نقاط وهمی محور است؛ منحنی حدی OH را هم که بر O می‌گذرد ومرکزش Ω است درنظر می‌گیریم. برنقطهٔ دلخواهی چون P منحنی حدی DP هم‌مرکز با OH را بسازید تا محور را درD، و امتدادشعاعی که برP می‌گذرد OH را درM، قطع کنند. طولهای OD وقوسOM را، بترتیب،با ξ و η نامگذاری کنید. ξ و η مختصات منحنی حدی نقطهٔ P هستند.

وقتی‌که مبدأ و محور دستگاه مختصات منحنی حدی را بر مبدأ مختصات و محور x ها در دستگاه دکارتی منطبق اختیارکنیم دستورهای تبدیل از مختصات منحنی حدی به مختصات دکارتی را بدست می‌آوریم. آنگاه اگر PF (شکل۸۶) عمود بر OΩ رسم‌شود OF خفت و PF رست نقطهٔ P خواهند بود. چون قوس PD را s بنامیم می‌دانیم که

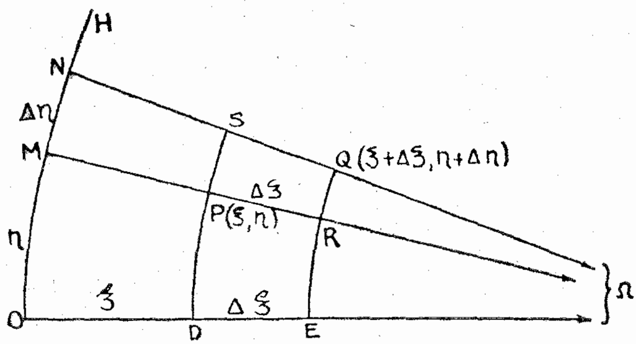
$$e^{(x-\xi)/k}=\cosh y/k \quad \text{و} \quad \eta=se^{\xi/k} \quad \text{و} \quad s=S\sinh y/k$$

بقسمی که معادلات مطلوب عبارت می‌شوند از

$$\xi=x-k\log_e\cosh y/k$$
$$\eta=k\,e^{x/k}\tanh y/k$$

۸۱. عنصر پهنه

براساس توضیحی که درقسمت ۷۹ برای پهنه داده‌شد دستور عنصر پهنه بامختصات منحنی حدی بسآسانی پیدا می‌شود. فرض‌کنید $P(\xi \text{ ، } \eta)$ (شکل ۸۷) نقطه‌ای دلخواه و $Q(\xi+\Delta\xi \text{ ، } \eta+\Delta\eta)$ نقطهٔ مجاور آن باشند. فرض‌کنید شعاع PΩ منحنیهای حدی QE و OH را بترتیب در R و M قطع کند؛ فرض‌کنید QΩ منحنیهای حدی PD و OH را در S و N تلاقی نماید. شکل بنیادی PRQS را به‌عنوان عنصر سطح اختیار می‌کنیم. آنگاه، چون



شکل ۸۷

$$\text{قوس } PS = \Delta\eta \, . \, e^{-\xi/k}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\text{پهنهٔ } PRQS = k \, . \, \Delta\eta \, . \, e^{-\xi/k}(1 - e^{-\Delta\xi/k})$$

اما وقتی‌که $\Delta\xi$ و $\Delta\eta$ به صفر بگرایند تفاوت بین $e^{-\Delta\xi/k}$ و $1-\Delta\xi/k$ بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر می‌شود و عنصر پهنه چنین می‌شود

$$e^{-\xi/k}d\xi d\eta \qquad (1)$$

دستور عنصر پهنه درمختصات دکارتی ازتبدیل این دستور با استفاده ازدستورهای (۱) قسمت ۸۰ بدست می‌آید. از آنها دیفرانسیلهای کلی

$$d\xi = dx - \tanh y/k \; dy \qquad (2)$$

$$d\eta = e^{x/k}\tanh y/k \, dx + e^{x/k}\operatorname{sech}^2 y/k \; dy \qquad (3)$$

بدست می‌آیند. اما وقتی که (۱) را برای بدست آوردن مساحتها از راه انتگرالگیری بکار ببریم باید ξ را ثابت و η را متغیر انگاریم. اگر با این اوضاع فرض کنیم $d\xi = 0$ و dx را حذف نماییم بدست می‌آوریم

$$d\eta = e^{x/k}dy$$

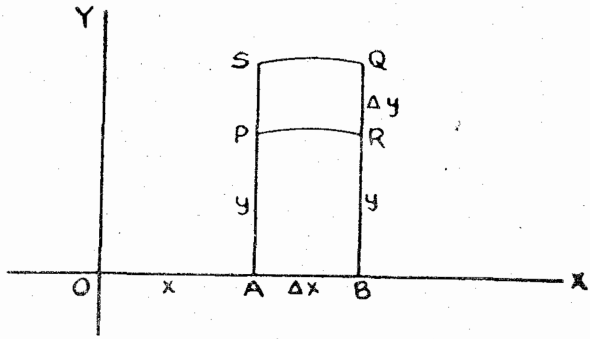
بقسمی که (۱) به این صورت در می‌آید

$$e^{(x-\xi)/k}d\xi dy \qquad (4)$$

چون وقتی ξ تغییر کند y تغییر نمی‌کند از (۲) نتیجه می‌گیریم

$$d\xi = dx$$

و (۴) عاقبت به صورت (۵) در می‌آید



شکل ۸۸

$$\cosh y/k\, dx\, dy \qquad (۵)$$

دستور اخیر برای عنصر پهنه در مختصات دکارتی را می‌توان مستقیماً بدین شرح بدست آورد:

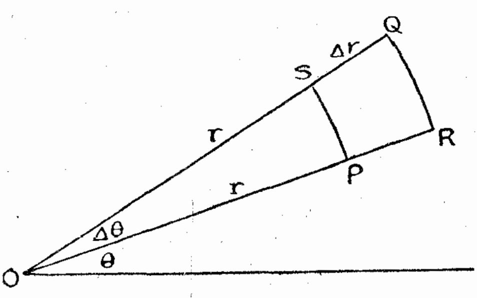
فرض کنید P (شکل ۸۸) به مختصات x و y و Q، نقطهٔ مجاور آن، به‌مختصات $x+\Delta x$ و $y+\Delta y$ باشند. PA و QB را عمود بر Ox رسم کنید. فرض کنید منحنی هم‌فاصله‌ای که بر P می‌گذرد و خط مبنایش OX است QB را در R قطع کند، و آن که بر Q می‌گذرد با PA در S برخورد نماید. از دستور (۲) قسمت ۷۸ بر می‌آید

$$\text{قوس } PR = \cosh y/k\, \Delta x$$

اما چون Δx و Δy بـه صفر گرایند شکل $PRQS$ در حد مستطیل می‌شود. بنابـراین، مانند پیش، برای عنصر پهنه بدست می‌آید

$$\cosh y/x\, dx\, dy$$

عنصر پهنه در مختصات قطبی ممکن است از تبدیل (۵) بدست آید. اما ما راهی را پیش می‌گیریم کـه آن را به‌طور مستقیم از شکل بدست آوریم.



شکل ۸۹

فرض کنید در شکل ۸۹ نقطهٔ P به مختصات r و θ و نقطه Q بـه مختصات $r+\Delta r$ و $\theta+\Delta\theta$ باشند. فرض کنید که دایره‌ای به مرکز O که بر P می‌گذرد بردار شعاع نقطهٔ Q را در S قطع کند و دایره‌ای بـه همان مرکز که بر Q می‌گذرد بردار شعاع P را در R تلاقی

نماید. از دستور (۱) قسمت ۷۸ نتیجه می‌شود

$$\text{قوس } PS = k \,.\, \sinh r/k \,\Delta\theta$$

چون با گرایش $\Delta\theta$ و Δr به صفر شکل PRQS به صورت مستطیل در می‌آید عنصر پهنه چنین خواهد شد

$$k \,.\, \sinh r/k \, dr \, d\theta \qquad (۶)$$

۸۲. پهنهٔ دایره

با استفاده ازدستور (۶) قسمت اخیر دستور پهنهٔ دایره را بدست می‌آوریم. هرگاه معادلهٔ دایره

$$r = a$$

فرض شود پهنهٔ آن

$$۴k \int_{\circ}^{a} \int_{\circ}^{\pi/۲} \sinh r/k \, d\theta \, dr$$

است که می‌شود

$$۲\pi k^{۲} (\cosh a/k - ۱)$$

یا به‌طور فشرده‌تر

$$۴\pi k^{۲} \sinh^{۲} a/۲k$$

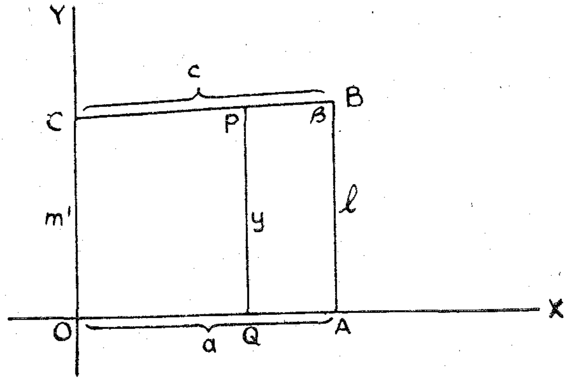
باید توجه داشت که چون k به بی‌نهایت گراید پهنه $\pi a^{۲}$ می‌شود.

۸۳. پهنهٔ چهار ضلعی لامبرتی

اینك چهار ضلعی لامبرتی را به وضع مناسبی نسبت بـه محورهای مختصات قرار داده پهنهٔ آن را بدست می‌آوریم.

در نقطهٔ دلخواه A در جهت مثبت محور x هـا (شکل ۹۰) عمود AB را رسم می‌کنیم؛ از نقطهٔ دلخواه B واقع براین عمود BC را عمود برمحور y ها می‌کشیم. پس شکل OABC نمایش یك چهارضلعی لامبرتی است. نامگذاریهای انگاره‌ای را که در قسمت ۵۳ پذیرفتیم بکار برده پـاره‌خطهای OA و AB و BC و CO را بترتیب با a و l و c و m' نمایش می‌دهیم و زاویهٔ ABC را β می‌نامیم.

به معادلهٔ خط CB نیاز داریم. برای بدست آوردن‌آن نقطه‌ای چون P بر CB اختیار می‌کنیم و PQ را وست و OQ را خفت آن می گیریم. برای چهارضلعی لامبرتی OQPC می‌دانیم که $OQ = x$ و $QP = y$ و $OC = m'$. بـا استفاده از رابطهٔ بین



شکل ۹۰

اجزای متناظر مثلث قائم‌الزاویه وابسته این معادله را برای CB پیدا می‌کنیم:

$$\tanh y/k = \cosh x/k : \cosh m/k$$

که بآسانی می‌توان نشان داد که به این صورت در می‌آید:

$$\sinh y/k = \cosh x/k : \sqrt{\sinh^2 m/k - \sinh^2 x/k}$$

برای یافتن پهنهٔ چهار پهلوی OABC به محاسبهٔ انتگرال

$$\int_0^a \int_0^y \cosh y/k \, dydx$$

می‌پردازیم. بعد از انتگرالگیری اول

$$k\int_0^a \frac{\cosh x/k}{\sqrt{\sinh^2 m/k - \sinh^2 x/k}} dx$$

و بعد از انتگرالگیری دوم

$$k^2 \arcsin \frac{\sinh a/k}{\sinh m/k}$$

حاصل می‌شود. اما از نتایج قسمتهای ۷۰ و ۷۱ بر می‌آید که

$$\frac{\sinh a/k}{\sinh m/k} = \tanh b/k = \cos\beta$$

بقسمی که

$$\text{پهنهٔ } OABC = k^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

۸۴. پهنهٔ مثلث

اکنون تا دستور پهنهٔ مثلث گامی بیشتر نمانده است. خواننده به یاد می‌آورد که چگونه، در قسمت ۶۲، ثابت شد که هر مثلث هم‌ارز است با چهار ضلعی ساکریی که مجموع زاویه‌های تارکش برابر باشد با مجموع زاویه‌های مثلث. اما هر چهار ضلعی ساکریی را می‌توان به دو چهار ضلعی لامبرتی همنهشت تقسیم کرد. بدین ترتیب اگر زاویه‌های مثلث λ و μ و ν باشند پهنهٔ آن از

$$2k^2[\pi/2-(\lambda+\mu+\nu)/2],$$

یا

$$k^2[\pi-(\lambda+\mu+\nu)]$$

بدست می‌آید.

مراجعه به‌دستور پهنهٔ مثلث که در قسمت ۳۶ داده شد نشان می‌دهد که ثابت C^2، که آنجا آمده بود، مساوی k^2 است.

تمرین

۱. ثابت کنید که رابطه‌ای که r شعاع دایره‌ای و s طول یك قوس آن را به θ زاویهٔ مرکزی روبروی آن قوس را مربوط می‌کند این است

$$s=k\theta\sinh r/k$$

۲. نشان دهید که دستورهای تبدیل از مختصات دکارتی به مختصات قطبی چنینند:

$$\tanh x/k=\tanh r/k\ .\cos\theta$$

$$\sinh y/k=\sinh r/k\ \sin\theta$$

۳. تبدیل تمرین ۲ را برای تغییر دادن دستور (۵) قسمت ۸۱ باید به دستور (۶) همان قسمت بکار ببرید.

۴. نشان دهید که معادلهٔ منحنی همفاصلهٔ $y=b$ در مختصات قطبی چنین است:

$$\sinh r/k\ .\sin\theta=\sinh b/k$$

و در مختصات منحنی حدی چنین:

$$\eta=k\,e^{\xi/k}\sinh b/k$$

۵. پهنهٔ محدود بین منحنی حدی $y=b$ و محور x ها و رستهای $x=0$ و $x=a$ را بدست آورید.

[جواب: $ka\sinh b/k$]

۶. با انتگرالگیری پهنهٔ قطعهٔ محدود به وتری به درازای $2l$ و قوس آن از یك منحنی حدی را بدست آورید.

راهنمایی: معادلهٔ $e^{x/k}=\cosh y/k$ را بکار برده پهنهٔ محصور بین منحنی و محور x ها

ورست $x=k \log \cosh \frac{l}{k}$ را پیدا کنید.

[جواب: $2k^2 (\sinh l/k - \arctan \sinh l/k)$]

۷. با انتگرالگیری پهنهٔ محصور بین محور x ها و محور y ها و خط $e^{x/k}=\tanh l/k : \tanh y/k$ را که موازی محور x ها است و عرض از مبدأ آن l است پیدا کنید.

[جواب: $k^2 (\pi/2-\lambda)$ که در آن $\lambda=\Pi/l$]

۸. با ترکیب کردن نیمی از پهنهٔ تمرین ۶ با پهنهٔ تمرین ۷ دستوری برای پهنهٔ محصور بین یك قوس منحنی حدی به طول s و شعاعهای منتهی به دو سر آن بدست آورید.
[جواب: $k^2 \sinh l/k = ks$]

۷

هندسه و مثلثات مسطح بیضوی

«بیمرزی فضا از یقین تجربی بزرگتری برخوردار است تا از تجربه‌ای خارجی. اما نـامتناهی بودن آن بـه هیچ روی چنین نیست.»
ریمان

۸۵. مدخل

اصل موضوع سرشتنمای هندسهٔ اقلیدسی حکم می‌کند کـه از هر نقطه یك، وفقط یك، خط می‌توان کشیدکه بـا خط مفروضی موازی بـاشد. از سوی دیگر صفت شاخص هندسهٔ مسطح هذلولوی این فرض است که از یك نقطه تعدادی نـامتناهی موازی با یك خط می‌توان رسم کرد. اکنون برعهدهٔ ماست که، اگر هم بـاختصار، به بررسی نتایج و فرض سومی بپردازیم؛ و آن این است که از یك نقطه هیچ خط نمی‌توان کشید که با خط دیگری موازی باشد. این مطلب را هم‌ارز با فرض زاویهٔ منفرجهٔ ساکری می‌پذیریم. او و دیگران توانستند هندسه‌ای را کـه براین مبنا قرار می‌گـرفت کنار بگذارند زیرا که آنان بصراحت یا به نحوی مقدر خط راست را نامتناهی می‌دانستند. و باید به یادآورد که ما ثابت کردیم[1] که این دو فرض با هم سازگار نیستند. برای روشنتر ساختن مطلب خاطر نشان می‌کنیم که اگر خط راست نامتناهی باشد اثبات حکم ۱۶ کتاب یکم اقلیدس معتبر است، و در نتیجه حکم ۱۷ همان کتاب نیز چنین است. اما در این حالت همیشه،

۱. ← فصل ۲.

دست کم، یك خط می‌توان بر نقطه‌ای واقع در خارج خطی و موازی آن گذراند.

ریمان[1] بود که برای اولین‌بار اهمیت فرق گذاشتن میان مفهومهای بی‌مرز بودن و نامتناهی بودن را در ارتباط با مفهومهای فضایی خاطر نشان ساخت. هرقدر هم‌که ما قویاً معتقد بـه بی‌انتها بودن خط راست بـاشیم لزوماً نتیجه نمی‌توان گرفت که خط نامتناهی است.

بنابراین پیش از آن‌کـه رسماً اصل موضوع سرشتنمای هندسهٔ بیضوی را بیان کنیم به‌جای فرض مقدر اقلیدس برنامتناهی بودن خط فرض ملایمتری را قرار می‌دهیم:

اصل موضوع. هر خط راستی بیمرز است.

اصل‌موضوع سرشتنمای هندسهٔ هذلولوی با همهٔ اصل موضوعهای هندسهٔ اقلیدسی سازگار است مگر اصلی‌که خود جانشین آن شده است. در حقیقت شباهت آن دو هندسه در مبانی و احکام اولشان بود که ما را قادر ساخت که، بی‌مقدمه‌چینیهای دور و دراز و ابهام‌آور، شرحی دربارهٔ هندسهٔ هذلولوی عرضه کنیم.

اما نقل از هندسهٔ اقلیدسی به هندسهٔ بیضوی بـه این آسانی دست نمی‌دهد. اصل موضوع سرشتنمای هندسهٔ بیضوی، کـه در قسمت بعد خواهد آمد، نه تنها با آن اصل موضوع هندسهٔ اقلیدسی‌که جایش را گرفته است، و با آن‌که مقرر می‌داردکه خطراست نامتناهی است، ناسازگار است بلکه، چنان‌که خواهیم دید، با اصلهای دیگر نیزچنین‌است. وانگهی با نظری انتقادی باید در این نکته نگریست‌که آن احکام هندسهٔ اقلیدسی که به صورتی نهفته بـه نامتناهی بودن خط متکی هستند، بویژه حکم ۱۶ کتاب یکم و نتایج آن، بطورکلی دیگر معتبر شناخته نمی‌شوند. تـوضیح موسعتر از آنچه در اینجا عرضه می‌شود نیازمند به مبنایی است که با کمال دقت گذاشته شود.

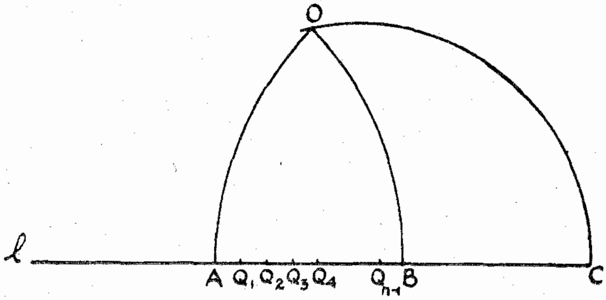
۸۶. اصل موضوع سرشتنمای هندسهٔ بیضوی و نتیجه‌هایی‌که بیفاصله بر آن مترتبند

با تغییری‌که در بـالا دادیم اکنون آماده‌ایم کـه اصل موضوع سرشتنمای هندسهٔ بیضوی را معرفی‌کنیم.

اصل موضوع. دو خط راست همیشه تقاطع می‌کنند.

فرض‌کنید l (شکل ۹۱) خط راستی باشد. در دو نقطهٔ دلخواه A و B از این خط

[1]. ← قسمت ۶.



شکل ۹۱

خطهای[1] عمود بر آن را رسم کنید. بنابر اصل موضوع سرشتنما این خطها در نقطه‌ای مانند O تقاطع می‌کنند و چون در مثلث AOB زاویه‌های A و B متساویند نتیجه می‌شود که OA و OB برابرند[2]. هرگاه AB را از هر طرف، مثلاً از طرف B، تا C امتداد دهیم بطوری که BC مساوی AB باشد، و اگر OC را رسم کنیم بآسانی می‌توان نشان داد که OC عمود است بر l ومساوی است با OA و OB[3]. با تکرار این ترسیم به این نتیجه می‌رسیم که هرگاه پاره خطی مانند AB از خطی در نظر گرفته شود و P نقطه‌ای از l باشد چنان که AP مساوی mAB شود (m عدد صحیح مثبتی است)، آنگاه عمودی که در P بر l اخراج گردد بر O، نقطهٔ برخورد عمودهای بر l در A و B، می‌گذرد و OP برابر است با OA.

بعد AB را به n جزء متساوی تقسیم کنید و نقاط تقسیم را Q_1، Q_2، Q_3، ...، Q_{n-1} بنامید. عمود بر l در Q عمود AO را در O قطع خواهد کرد زیرا که اگر آن را در نقطه‌ای دیگر قطع می‌کرد عمودی هم که از B خارج شده بود بر این نقطه می‌گذشت،

---

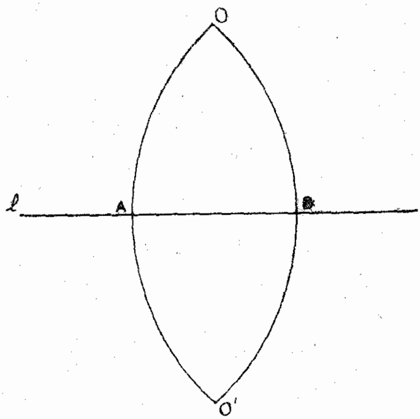
۱. در این شکل و بعضی شکلهای آینده خطها چنان رسم شده‌اند که گویی منحنی هستند. خطهای هندسهٔ بیضوی به اندازهٔ خطهای هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ هذلولوی راستند. غالباً مناسب است که، وقتی نشان‌دادن رابطه‌های آنها با یکدیگر در فضایی محدود اهمیت داشته باشد، آنها را به صورت منحنی نمایش دهیم. در این موارد نشان دادن رابطهٔ بین آنها مهمتر است از مستقیم بودنشان.

۲. بزودی ظاهر خواهد شد که A و B ممکن است برحسب اتفاق چنان واقع شده باشند که دو عمود یك خط شوند. از اشکال می‌توان با عوض‌کردن وضع یکی از نقطه‌ها احتراز کرد. برهان حکم ۶ کتاب یکم اقلیدس در اینجا معتبر خواهد بود هرگاه A و O و B بر یك خط نباشند.

۳. برهان حکم ۴ کتاب یکم اقلیدس برای هندسهٔ بیضوی معتبر است. ← قسمت ۵.

و این از آنچه جلوتر ثابت شد واضح است. همین حکم برعمودهای نقاط دیگر تقسیم جاری است. چون از این راه استدلال کنیم نتیجه می‌گیریم که هرگاه AB و AP نسبت به‌هم اندازه‌پذیر باشند عمودی کـه از P اخراج شود بر O خواهد گذشت و OP برابر OA خواهد بود. وقتی‌که AB و AP نسبت به‌هم اندازه‌پذیر نباشند با روشهای به‌حد رفتن، مطابق معمول، به‌همین نتایج می‌رسیم.

بدین ترتیب عمودهایی که از همهٔ نقاط خطی برآن اخراج شوند در یك نقطه به نام قطب خط متقاربند.هر خطی که یك نقطه از خطی را بـه قطب آن وصل کند، یا، به‌صورتی دیگر، هر شعاعی که از قطب خطی‌خارج شود، برآن خط عمود است. خواننده بی‌اشکالی می‌تواند نشان دهد که نه تنها هر یك از عمودها را در نظر بگیریم همواره فاصلهٔ عمودی قطب از خط یـکی است بلکه بـرای همهٔ خطها فاصله قطب از خط یك‌مقدار است. این فاصلهٔ عمودی را بـا q نمایش می‌دهیم.

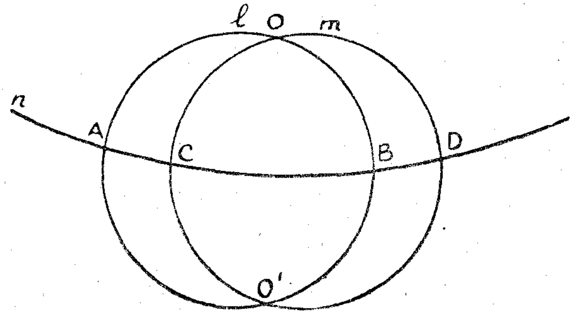


شکل ۹۲

در دنبال پژوهشی که می‌کنیم O را (شکل ۹۲) قطب خط l می‌انگاریم. دوخط برO بگذرانید، اینها l را در A وB به‌زاویهٔ قائمه قطع خواهندکرد. OA را ازA تا O′ امتداد دهید بقسمی‌که AO′ مساوی q شود. آنگاه اگر از O′ بـه B وصل کنیم بـآسانی می‌توان نشان دادکه O′B عمود است بر l، و O وB و O′ بریك خط راستند، و BO′ به‌طول q است. پس اگر به‌طور موقت امکان این را که O وO′ یك نقطه باشند طرد کنیم به‌نظر می‌رسد که هر خطی دو قطب داشته باشد. بعلاوه OA و OB یك عمود مشترك دارند و در دونقطه تقاطع می‌کنند، ویك دو ضلعی[1] یا دوزاویه‌ای[2] تشکیل می‌دهندکه هرضلعش به طول 2q است. این حکم، چنان‌که هم‌اکنون نشان خواهیم داد، برای هر جفت خط صادق است.

فرض کنیدl و m (شکل ۹۳) دو خط دلخواه باشند. اینها در نقطه‌ای چون O تلاقی خواهند کـرد. روی هر خط و در هر امتداد ابتدا از O پاره خطی مساوی q جدا کـنید. بخصوص فرض‌کنید OA و OB و OC و OD به‌طول q باشند. در این‌صورت

1. digon   2. biangle



شکل ۹۳

A و B و C و D روی خطی چون n خواهند بود که O قطب[1] آن است. یك نتیجه آن‌که l و m در نقطهٔ دیگری مانند O'، که قطب دوم n است، تلاقی خواهند کرد. بنابـراین دو خط در هندسه بیضوی همیشه یك عمود مشترك دارند و در دو نقطه تلاقی می‌کنند و پهنه‌ای را محصور می‌سازند. وانگهی اکنون آشکار است که هر خط به روی خود بازمی‌گردد، یعنی بسته‌است، یا «دوباره وارد» است، پس متناهی است و به‌طول 4q است. دو نقطه همیشه یك خط مشخص نمی‌کنند زیرا که اگر آن دو نقطه دو قطب یك خط باشند تعدادی نامتناهی خط برآنها می‌گذرند. در اینجا باید به این نکته توجه‌کرد که هرچند در نتیجهٔ متناهی بـودن خط حکم ۱۶ کتاب یکم اقلیدس و احکام بسته به آن به‌طور کلی برای هندسهٔ بیضوی معتبر نیستند، با وجود این اگر شکلهایی‌که دخیل‌هستند به اندازهٔ کافی کوچك باشند آن احکام به قوت خود باقی می‌مانند. مثلاً اگر هر میانهٔ مثلثی طولی‌کمتر از q داشته باشد هر زاویهٔ خارجی بزرگتر است از هریك از دو زاویهٔ داخلی مقابل آن. در هندسهٔ بیضوی بـرای شکلهایی‌کـه اندازه‌های بقدر کافی محدود داشته باشند حکمهای ۱۷ و ۱۸ و۱۹ و ۲۰ و ۲۱ کتاب اول اقلیدس همچنان معتبرند.

۸۷. رابطه بین هندسهٔ سطح کره و هندسهٔ بیضوی

با فرضی‌که در بالا کردیم‌که هر خط دو قطب دارد، هندسه‌ای بوجود می‌آید شبیه به هندسهٔ سطح‌کره وقتی‌که دایره‌های بزرگ کره را نمایش خط راست بدانیم. تا جایی‌که پیش رفته‌ایم این شباهت را می‌تـوان بآسانی دریافت. مثلاً: دو دایرهٔ بزرگ یك کره همیشه یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند و پهنه‌ای را محصور می‌سازند؛ هر دایـرهٔ بزرگ دو قطب داردکه همهٔ دایره‌های بزرگ عمود برآن برآنها می‌گذرند؛ دو نقطه یك

۱. ← تمرین ۲، قسمت ۹۰.

دایرهٔ بزرگ را مشخص می‌سازند، مگروقتی‌که قطبهای یك‌دایرهٔ بزرگ باشند؛ دایره‌های بزرگ کره متناهی هستند و بسته و همه به یك درازا.

اما مطلقاً نباید نتیجه گرفت که این نوع هندسهٔ بیضوی هندسهٔ کروی است. فقط اتفاق است که برروی یك سطح منحنی معروف به‌کره درست نمایشی از این نوع هندسهٔ مسطح می‌یابیم: موجودهای هندسی مانند هم، اصلهای موضوع همانند، واحکام مشابه. خواننده وقتی بهتر به‌معنی این رابطه پی‌خواهد بردکه آگاه شودکه در هندسهٔ هذلولوی وهندسهٔ بیضوی سطحهای خمی‌هستندکه شبیه هندسهٔ اقلیدسی را می‌توان برآنها ساخت[1]. در ضمن باید به خاطر سپرد که هندسهٔ کروی خود بکلی از اصل موضوع توازی مستقل است.

این شباهت هندسهٔ بیضوی به هندسهٔ کروی برای تجسم آن بسیار کمك می‌کند. مقایسه درك این نکته را آسانتر می‌سازد که چگونه مجموع دو ضلع مثلثی می‌توانند از ضلع سوم کوچکتر باشند؛ چگونه در مثلثی که دو زاویهٔ متساوی دارد ممکن است ضلعهای مقابل به‌آن دو زاویه نامساوی باشند؛ چطور ممکن است بزرگترین ضلع مثلثی روبروی بزرگترین زاویهٔ آن نباشد؛ چگونه ممکن است زاویه‌های تارك یك چهارضلعی ساکریی از دو قائمه بزرگتر باشند؛ و چرا حتی اصل موضوع پاش همیشه معتبر نیست.

شاید جای مناسبی‌باشد برای خاطرنشان کردن آن‌که در فضای اقلیدسی هم‌سطوح منحنیی می‌توان یافت‌که برروی آنها نمایشهایی ازهندسهٔ مسطح هذلولوی بتوان‌ساخت. این واقعیت‌که کره‌ای به شعاع r سطحی است با انحنای ثابت مثبت $1/r$ این فکر را القا می‌کند[2] که برای این موضوع باید در پی یافتن سطحی حقیقی با انحنای ثابت منفی برآمد. مثالی از این‌گونه سطح‌آن است که از دوران دادن منحنیی به نام کشنده[3] حول مجانب آن پدید می‌آید. معادلهٔ کشنده این است:

$$x = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

این سطح که کرهٔ کاذب[4] نامیده شده است یك انحنای ثابت کلی یا گاوسی $-\frac{1}{a^2}$ دارد و سطحی است که‌می‌توان روی‌آن، با محدودیتهایی، هندسه‌ای شبیه به‌هندسهٔ مسطح‌هذلولوی ساخت و خطهای کوتاهترین فاصلهٔ (ژئودریك) آن خط راست هستند. اما پژوهشهای

---

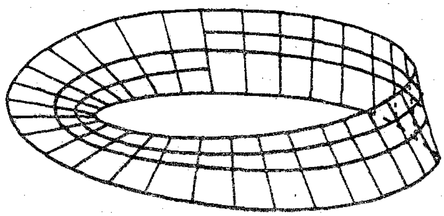
۱. ← قسمت ۶۵.

۲. ← قسمتهای ۲۳ و ۳۲.

3. tractrix 4. pseudosphere

بیشتری در این زمینه نیازمند بـه استفاده از روشهای هندسهٔ دیفرانسیل[1]، و خارج از حوصلهٔ این کتاب، هستند.

۸۸. هر دو هندسهٔ بیضوی



شکل ۹۴

تـاکنون بـراین فرض متکی بوده‌ایم که دو نقطهٔ O و O′ قسمت ۸۶ متمایزند. اما قابل تصور هست که آن دو نقطه یکی بـاشند و خط فقط یك قطب داشته بـاشد. این دیدگاه به هندسه‌ای کاملاً سازگار رهنمون می‌شود.

اگر خط را چنان در نظر بگیریم که جز یك قطب نداشته باشد دو خط فقط دریك نقطه تقاطع می‌کنند و دونقطه همواره یك خط را مشخص می‌سازند، خطهای راست متناهی وبسته‌اند اما طولشان فقط ۲q است. آنچه این نوع ازهندسهٔ بیضوی را ممتاز می‌سازد این واقعیت است که خط راست صفحه را به دو ناحیه تقسیم نمی‌کند. به بیان دیگر در چنین صفحه‌ای همواره ممکن است از یـك طرف خطی بـه طرف دیگر رفت و از آن عبور نکرد.

شاید بتوان تمایز بین دو صفحهٔ بیضوی را با جلب توجه به این واقعیت آسانتر کرد که در هندسه‌ای که گاهی با عنوان کروی توصیف می‌شود صفحه سرشت یك سطح دو رو را دارد. از سوی دیگر صفحه در هندسه‌ای بیضوی که برای هر خط فقط یك قطب دارد دارای سرشت یك‌رو است. در هندسهٔ اقلیدسی صفحه معمولاً چنان درك می‌شودکه دورو دارد و کره دارای دو مسطح متمایز است که از آنها با درون و بیرون یاد می‌شود. مفهوم یك سطح اکیداً یك‌رو کمتر به‌ذهن آشنا است. برای بیان این اندیشه می‌توانیم از آنچه برگ (یا ورق)[2] موبیوس[3] نامیده می‌شود کمك بگیریم (شکل ۹۴). این برگ را می‌توان بآسانی ساخت بدین ترتیب که یك نوارباریك و دراز و مستطیل شکل کاغذی را گرفت وآن را یك نیم تاب داد و بعد دو سرآن را به یکدیگر چسباند. بدین ترتیب

---

۱. مثلاً ← هندسهٔ دیفرانسیل، *Differential Geometry*، نـوشتهٔ Eisenhart، فصل هشتم (بوستن، ۱۹۰۹)، یا *Differential Geometry* نوشتهٔ Graustein، ص. ۱۷۹، (نیویورك، ۱۹۳۵).

2. Leaf, sheet
3. Möbius

دو روی مستطیل دیگر قابل تمایز نیستند و سطحی که حاصل شده است فقط یک‌رو دارد. شکل نشان می‌دهد کـه چگونه ممکن است از یک طرف خطی به‌طرف دیگرآن رفت بی‌آن که از خط گذشت.

این دو نوع صفحهٔ بیضوی معمولاً به این نحو از هم تشخیص داده می‌شوند که یکی را صفحهٔ بیضوی مضاعف[1] ودیگری را صفحهٔ بیضوی تک[2] نام می گذارند. چنان که پیشتر[3] گفتیم، شاید ریمان نوع اول ـ یعنی نوع کروی ـ را در نظر داشته است.

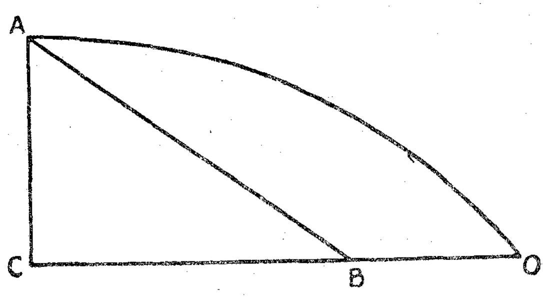
آنچه از این پس باختصار دربارهٔ هندسه و مثلثات بیضوی خواهد آمد به‌طور عمده محدود است به قسمتی از نظریه که برای هر دو نوع صفحه مشترک است.

تمرین

یک برگ موبیوس بسازید، امـا نخست خط راستی در طول و در وسط نوار مستطیل بکشید، بعد دو سر نوار را بطوری کـه در بـالا گفتیم به هم بچسبانید. آنگاه برگ را در امتداد خطی که کشیده‌اید ببرید. نتیجه را تعبیر کنید. بار دیگر بریدن کاغذ را در امتداد خطی تکرار کنید کـه در طول کشیده شده باشد اما طولش فقط یک سوم نوار باشد و پس از آن که دو سر نوار به هم چسبانیده شده باشند امتداد داده شده باشد.

۸۹. خواص بعضی چهار ضلعیها

در مطالبی که از این پس خواهیم گفت نیاز به لم ذیل داریم:



شکل ۹۵

لم. هرگاه مثلثی یک زاویهٔ قائمه داشته باشد هریک از زاویه‌های دیگر آن کوچکتر از قائمه، مساوی قائمه یا بزرگتر ازقائمه است برحسب آن که ضلع روبروی آن کوچکتر

---

۱. ← قسمت ۳۵.

2. double elliptic plane 3. single elliptic plane

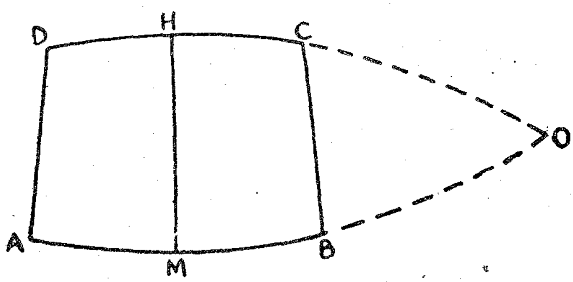
از q، مساوی q، یا بزرگتر از q، باشد. و بعکس.

فرض کنید که زاویهٔ C در مثلث ABC (شکل ۹۵) قائمه باشد. بر امتداد ضلع CB و در جهت B پاره خط CO را مساوی q جدا کنید. در این صورت O قطب‌خط AC است. اگر از O به A وصل‌کنید واضح است که زاویهٔ OAC قائمه است. حالا اگر CB، بطوری‌که درشکل دیده می‌شود، کوچکتر از q باشد زاویهٔ CAB کوچکتر ازقائمه است، حال‌آن‌که اگر CB مساوی با q یا بزرگتر از q می‌بود آن زاویه مساوی با قائمه یا بزرگتر از قائمه می‌شد. عکس لم نیز بآسانی ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۱. خطی‌که نقطه‌های وسط پایه و تارك يك چهار ضلعی ساکریی را به هم وصل‌کند بر هر دو عمود است، و زاویه‌های تارك مساوی و منفرجه‌اند.

دراینجا فقط لازم است نشان دهیم‌که زاویه‌های تارك منفرجه‌اند. اثبات بقیهٔقضیه همان است‌که در قضیهٔ متناظر در هندسهٔ هذلولوی داده شده است.

فرض کنید ABCD (شکل ۹۶) يك چهار ضلعی ساکریی بـا پایهٔ AB باشد و MH وسطهای پایه و تارك را بههم مربوط کرده باشد. ما فقط لازم است حالتهایی را

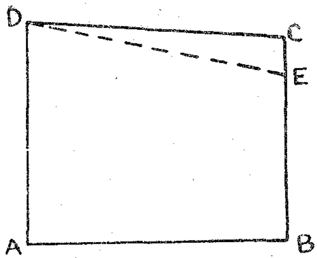


شکل ۹۶

در نظر بگیریم‌که بدانیم هر زاویهٔ تارك از دو قائمه‌کمتر است. در این صورت HC و MB را امتداد می‌دهیم تا در O تلاقی‌کنند. نقطهٔ O قطب HM است و پاره خطهای HO و MO به‌طول q هستند. در این صورت طول BO کوچکتر است از q و زاویهٔ BCO حاده است. نتیجه آن‌که زاویه‌های تارك منفرجه‌اند.

قضیهٔ ۲. در يك چهار ضلعی سه قائمه (لامبرتی) زاویهٔ چهارم منفرجه است و هر ضلع مجاور این زاویه‌کوچکتر است از ضلع روبروی آن.

اثبات آن‌که زاویهٔ چهارم منفرجه است به خواننده واگذار می‌شود. برای اثبات

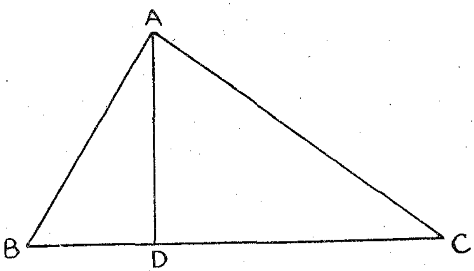


شکل ۹۷

آن که اضلاع زاویهٔ منفرجه بترتیب کوچکترند از ضلعهای روبروی آنها فرض می کنیم که ABCD (شکل ۹۷) چهار ضلعی لامبرتـی باشد و زاویهٔ C منفرجه باشد. در این صورت BC نمی‌تواند مساوی AD باشد زیرا که دراین حال زاویه‌های در D و C می‌بایستی برابر باشند. BC بزرگتر از AD هم نمی‌تواند بود، زیرا که در این حال اگر BE را برBC مساوی AD جدا کنیم زاویه‌های ADE وBED مساوی‌می‌شوند. اما زاویـهٔ ADE حاده است و تناقض دیگری حاصل است. نتیجه می گیریم کـه BC کوچکتر است از AD.

۹۰. مجموع زاویه‌های مثلث

قضیهٔ ۱. هرگاه یك زاویهٔ مثلثی قائمه باشدآنگاه مجموع زاویه‌های مثلث بزرگتر است از دو قائمه.



شکل ۹۸

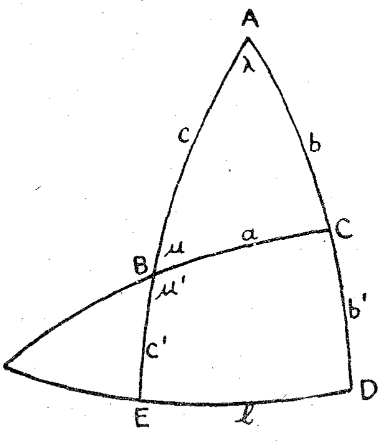
فقط لازم است حالتهایی در نظر گرفته شوند که در آنها هر یك از دو زاویهٔ دیگر حاده باشد و در این صورت هر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه کوچکتر باشد از q. استدلال را، که تقریباً همان است که در قضیهٔ متناظر در هندسهٔ هذلـولـوی آمده است، خواننده‌می‌تواندبرعهده بگیرد.

قضیهٔ ۲. مجموع زاویه‌های هر مثلث بزرگتر است از دو قائمه

مثلث ABC (شکل ۹۸) را دلخواه فرض می‌کنیم. هرگاه یك زاویـهٔ آن قائمه باشد، یا دو زاویه یا هر سه زاویهٔ آن منفرجه باشند حکم قضیه مسلم است. پس فقط حالتهایی را درنظر می گیریم که دوزاویه، مثلاً زاویه‌های B و C، حاده باشند. ارتفاع AD را از A بر BC رسم می‌کنیم. پای این ارتفاع روی پاره خط CB واقع می‌شود،

زیرا که در غیر این صورت ارتفاع AD، به‌موجب لم قسمت ۸۹ هم بزرگتر و هم کوچکتر از q خواهد شد. حالامسلم است که چون مجموع زاویه‌های هر یك از دو مثلث ABD و ACD بزرگتر از دو قائمه است مجموع زاویه‌های ABC نیز چنین است.

تفاوت بین‌مجموع زاویه‌های مثلث و دو قـائمه را فزونی مثلث نامند.



شکل ۹۹

فرع. مجموع زاویه‌های هر چهار ضلعی بزرگتر است از چهار قائمه.

در پایان بررسی کوتاهی که از چهره‌های کاملاً هندسی صفحهٔ بیضوی کردیم خاطر نشان می‌سازیم که در این هندسه منحنیهای حدی البته وجود ندارند و دایره‌ها منحنیهای همفاصله‌اند و منحنیهای همفاصله دایره. در واقع هر منحنی همفاصله عبارت است از دو دایره که نسبت به خط مبنا قرینهٔ یکدیگرند. در صفحهٔ بیضوی تك دو شاخهٔ هر منحنی همفاصله به یکدیگر مربوطند[1].

درهندسهٔ بیضوی، همچنان که درهندسهٔ هذلولوی به‌هرمثلث قائم‌الزاویه یك‌چهار- ضلعی لامبرتی وابسته است وشکل ۹۹ روابط بین اجزای مثلث قـائم‌الزاویهٔ ABC و چهار ضلعی‌لامبرتی BCDE وابسته به‌آن را نشان می‌دهد. c' را با رابطهٔ $c'+c=q$ تعریف می‌کنیم. μ' مکمل μ است و l پاره‌ای است از خطی‌که رأس زاویهٔ λ قطب‌آن است. در اینجا هم، بآسانی می‌توان نشان داد کـه، یك رشتهٔ پنج مثلث قـائم‌الزاویهٔ وابسته نمایان می‌شود.

تمرین

۱. ثابت کنید که خطی‌که وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل‌کند از نصف‌ضلع سوم بزرگتر است.

۲. هرگاه دو نقطه بـه فاصلهٔ q از نقطه‌ای چون O باشند O قطب خطی است که

---

۱. ← شکل ۹۴.

بوسیلهٔ آن دو نقطه مشخص شود. موارد استثنا کدامند؟

۳. فهرستی از سه حکم، یا بیشتر، تنظیم کنید که در هر سه هندسه معتبر باشند. فهرستی از سه حکم یا بیشتر تهیه کنید که در این موارد صادق باشند: (آ) فقط هندسهٔ سهموی؛ (ب) فقط هندسهٔ بیضوی؛ (ج) فقط هندسهٔ هذلولوی؛ (د) فقط هندسه‌های سهموی و بیضوی؛ (ه) فقط هندسه‌های سهموی و هذلولوی؛ (و) فقط هندسه‌های بیضوی و هذلولوی.

تمرینهای زیرین مرتبط به‌هندسه برصفحه بیضوی مضاعف هستند. این‌تمرینها نتایجی را القا می‌کنند که ممکن است با تغییری مناسب برای صفحه بیضوی تك بدست آیند.

۴. واحد خط را چنان اختیار کنید که $q=\frac{\pi}{2}k$، و واحد زاویه را چنان که اندازهٔ زاویهٔ قائمه $\frac{\pi}{2}$ باشد. آنگاه ثابت کنید که زاویه‌ای اندازه‌اش $\frac{x}{k}$ است اگر طول پاره خطی که قطبش رأس زاویه باشد و قسمتی از آن‌که محدود بین اضلاع زاویه است x باشد.

۵. مثلثی داده شده است. سه خط بسازیدکه رأسهای مثلث قطبهای آنها باشند. این خطها همهٔ صفحه را به هشت مثلث تقسیم می‌کنند. از این هشت آن را مثلث قطبی مثلث مفروض نامندکه رؤوسش نسبت به اضلاع متناظر مثلث مفروض در همان طرفی واقع باشند که رؤوس‌خودمثلث واقعند. ثابت کنیدکه‌اگرمثلثی‌قطبی‌مثلث‌دیگرباشدومی‌هم‌قطبی‌اولی‌است. بحث را به این و به سه مثال دیگر از مثلثهایی که زاویهٔ بزرگتر از π نداشته باشند محدود کنید.

۶. هرگاه مثلث دلخواه ABC مطابق مرسوم نامگذاری شود و a و b و c اندازه‌های اضلاع، وλ و μ و ν اندازه‌های زوایا را نشان دهند و اجزای متناظر از مثلث قطبی a' و b' و c' و λ' و μ' و ν' نامیده شوند ثابت کنید که $\lambda+\frac{a'}{k}=\pi$ ، $\mu+\frac{b'}{k}=\pi$ ،...

۷. ثابت کنیدکه اگر سه زاویهٔ مثلثی بترتیب مساوی باشند با سه زاویهٔ مثلث دیگر آن دو مثلث همنهشت هستند. به بیان دیگر در هندسه بیضوی مثلثهای مشابه وجود ندارند.

۸. نشان دهید که مثلثی را با داشتن سه زاویه چگونه می‌توان ساخت.

۹. واحدپهنه را طوری اختیارکنیدکه پهنهٔ یك دو پهلو، یا دوزاویه، که زاویه‌هایش $\frac{\pi}{2}$ باشند $k^2\pi$ باشد. ثابت کنید که پهنهٔ یك دو پهلو به زاویهٔ α مساوی $2k^2\alpha$ است، و پهنهٔ تمام صفحه $4\pi k^2$ است.

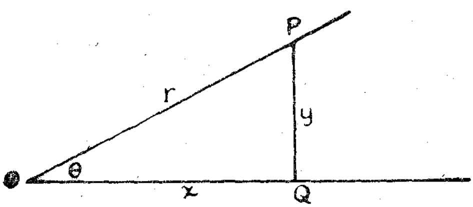
۱۰. ثابت‌کنیدکه پهنهٔ مثلثی به‌زاویه‌های λ، μ، ν، از دستور $k^2(\lambda+\mu+\nu-\pi)$ بدست می‌آید. **راهنمایی:** اضلاع مثلث را کامل کنید؛ این سه خط صفحه را به هشت مثلث دو به دو همنهشت تقسیم می‌کنند.

۹۱. مثلثات صفحهٔ بیضوی

باختصار به مثلثات صفحهٔ بیضوی باز می‌گردیم. این بحث مطالعهٔ عجولانه‌ای را که درهندسهٔ بیضوی کردیم اندکی کمال می‌بخشد، و در همان حال به روش هوشمندانه‌ای برای پرداختن[1] به مثلثات نااقلیدسی معرفی می‌کند. روشی که اینجا باید بکار برد باآنچه در بررسی مثلثات هذلولوی بکار بردیم کاملاً[2] فرق می‌کند؛ انتظار می‌رود که تباین آنها جالب دقت باشد. برای خواننده تمرینی ثمربخش خواهد بود که به بررسی صفحهٔ هذلولوی بازگردد و این روش را بکار برد.

۹۲. تابعهای مثلثاتی زاویه

برای سادگی تابعهای مثلثاتی را فقط برای زاویه‌های حاده تعریف می‌کنیم. تعریفها را می‌توان بعد به زاویه‌های دیگر سرایت داد. تصدیق باید کرد که همین راه و رسم بوفور در عرضه کردن مثلثات اقلیدسی بکار رفته است.



شکل ۱۰۰

فرض کنید θ (شکل ۱۰۰) زاویه‌ای به رأس O باشد. ازنقطهٔ P واقع بریك ضلع عمود PQ را برضلع دیگر رسم کنید. اندازه‌های پاره خطهای OQ و QP و OP را، بترتیب با x و y و r نشان دهید. شایسته است که P را چنان اختیارکنید که r کوچکتر از q باشد؛ این کار به کلیت نتیجه‌ها لطمه‌ای نخواهد زد. همچنان‌که بزودی خواهیم دید وقتی‌که وضع P تغییر کند نسبتهای $\frac{y}{r}$ و $\frac{x}{r}$، چنان‌که در مثلثات اقلیدسی بودند، ثابت نیستند. با وجود این می‌خواهیم ثابت کنیم‌که وقتی‌که r به ۰ نزدیك شود این نسبتها به حدهای مشخص می‌گرایند. این حدها را، که نشان‌خواهیم دادکه‌تابعهای پیوستهٔ زاویه‌اند جیب (سینوس) θ وجیب‌تمام (کسینوس) θ تعریف می‌کنیم، بطوری که

---

۱. این روش را به P. Mansion مدیونیم. ← Mathesis، رشتهٔ دوم، جلد چهارم (۱۸۹۴)، ص ۱۸۰-۱۸۳.

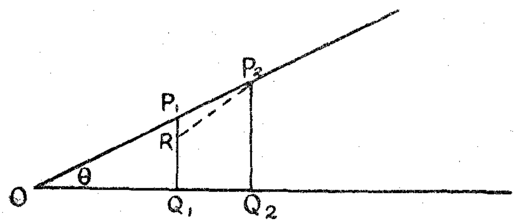
۲. در حقیقت روش را M. Gérard برای مثلثات هذلولوی طرح کرده بود، ← پاصفحه، قسمت ۶۵، بعد بوسیلهٔ Mansion تغییر داده شد تا برای فرض بیضوی مناسب شود.

$$\sin\theta = \lim_{r\to 0}\frac{y}{r} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \lim_{r\to 0}\frac{x}{r}،$$

تابعهای مثلثاتی دیگر مطابق قراردادهـای متداول تعریف می‌شوند. نیاز به اثبات یك سلسله قضیه‌ها داریم.

قضیهٔ ۱. وقتی‌که r کاهش یابد زاویهٔ OPQ کاهش می‌یابد.

فرض کنیدکه P_1 و P_2 (شکل ۱۰۱) دو موضع P باشند بطوری‌که OP_1 کوچکتر بـاشد از OP_2. عمودهـای P_1Q_1 و P_2Q_2 را رسم کنید. آنگاه مجموع زاویه‌های OP_1Q_1 و $Q_1P_1P_2$ مساوی دو قائمه است در حالی‌که مجموع زاویه‌های $Q_1P_1P_2$ و $P_1P_2Q_2$ بزرگتر است ازدو قائمه. بنابراین زاویهٔ OP_1Q_1 کـوچکتر است از زاویهٔ OP_2Q_2. نتیجه آن‌که زاویهٔ P (شکل ۱۰۰) حاده است و نزدیك می‌شود به زاویهٔ قائمه وقتی‌که r به q بگراید.



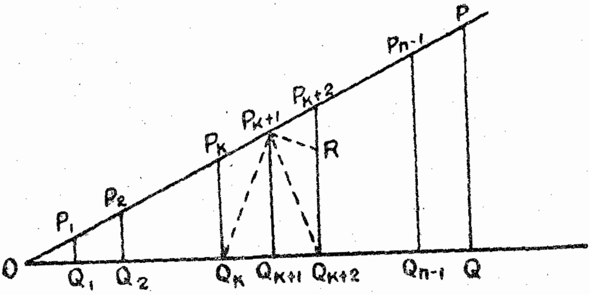
شکل ۱۰۱

قضیهٔ ۲. هرگاه r پیوسته کاهش یابد y نیز چنین می‌کند.

مانند پیش، فرض‌کنید OP_1 کوچکتر از OP_2 بـاشد (شکل ۱۰۱). آشکار است که P_1Q_1 و P_2Q_2 نمی‌توانند یك‌طول‌داشته باشند، زیرا که‌درآن‌صورت‌زاویهٔ $P_1P_2Q_2$ منفرجه می‌شود. و نیز P_1Q_1 نمی‌تواند بزرگتر از P_2Q_2 باشد؛ زیرا که در این‌صورت اگر Q_1R را بر Q_1P_1 مساوی Q_2P_2 جدا کرده P_2 را به R وصل‌کنیم نتیجه‌می‌شود کـه زاویهٔ RP_2Q_2 منفرجه است و نقیض حاده بودن $P_1P_2Q_2$ خواهد بـود. نتیجه می‌گیریم‌که Q_1P_1 کوچکتر است از P_2Q_2 و y تنزل می‌کند وقتی r تنزل کند.

قضیهٔ ۳. وقتی‌که r پیوسته تنزل کند نسبت $\frac{x}{r}$ نیز تنزل می‌کند.

برای اثبات OQ (شکل ۱۰۲) را به n جزء متساوی تقسیم‌کنید، و نقاط تقسیم را Q_1، Q_2،...،Q_{n-1} بنامید. از این‌نقاط عمودهایی بر OQ اخراج کنید تا OP را در P_1،P_2،...،P_{n-1} قطع کنند. این‌نقاط OP را به n جزء تقسیم می‌کنند که،چنان‌که



شکل ۱۰۲

خواهیم دیـد نامساوی هستند. سه عمود متوالـی دلخواه P_kQ_k، $P_{k+1}Q_{k+1}$ و $P_{k+2}Q_{k+2}$ را بـرگزینید. چون $P_{k+2}Q_{k+2}$ بزرگتر است از P_kQ_k می‌تـوانیم $Q_{k+2}R$ را به اندازهٔ پاره‌خط اخیر برآن جدا کنیم و از R به P_{k+1} وصل نماییم. آنگاه تساوی زاویه‌های $O_kP_kP_{k+1}$ و $Q_{k+2}RP_{k+1}$، و پاره خطهای P_kP_{k+1} و $P_{k+1}R$ از قضایـای همنهشتی نتیجه می‌شود و بـه این نتیجه می‌رسد کـه زاویـهٔ $P_{k+1}P_{k+2}R$ بزرگتر است از زاویهٔ $P_{k+1}RP_{k+2}$. در نتیجه، از آنجا کـه مثلث $P_{k+2}P_{k+1}R$ دارای‌اندازهٔ محدود است‌ضلع $P_{k+1}R$ بزرگتراست از ضلع $P_{k+1}P_{k+2}$ یا، به صورت دیگر P_kP_{k+1} بزرگتر است از $P_{k+1}P_{k+2}$.

اکنون دقت خود را به نسبت $\frac{x}{r}$ معطوف‌ساخته با r مساوی OP_1 شروع می‌کنیم.

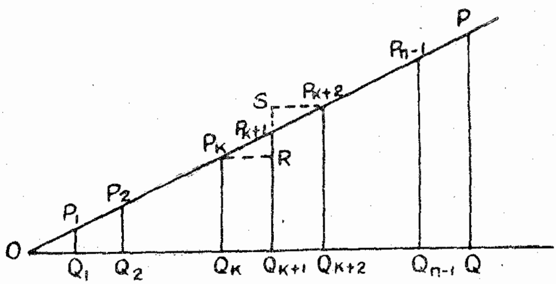
در این حالت نسبت $\frac{x}{r}$ کوچکتر است از واحد. چون r پی‌درپی برابر OP_2، OP_3،...، OP، می‌شود نسبت $\frac{x}{r}$ ترقی می‌کند، زیرا که x نموهای فزاینده، و r نموهای کاهنده می‌کنند. بنابراین برای هـر دو موضع P کـه در آنها x ها اندازه‌پذیر هستند نسبتهای متناظر نامساویند و آن نسبتی بزرگتر است کـه در آن r بزرگتر است. بـا استفاده از فرایندهای حدی برای وقتی که x ها اندازه‌پذیر نباشند به همین نتیجه می‌توان رسید. پس نتیجه می گیریم که نسبت $\frac{x}{r}$ پیوسته‌ترقی‌می کندوقتی‌که r ترقی کند، بنابراین باتنزل r نسبت نیز تنزل می‌نماید.

برای استفادهٔ بعدی خاطر شما را به این واقعیت جلب می‌کنیم که هرگاه فرض شود OP و OQ (شکل ۱۰۲) به طول q باشند چون زاویه‌های در P و Q قائمه‌اند، ما با چهارضلعی لامبرتی $PQQ_{n-1}P_{n-1}$ شروع می‌کنیم ومی‌توانیم بآسانی نشان‌دهیم

که نسبت $\frac{PP_{n-1}}{QQ_{n-1}}$ ترقی می‌کند وقتی که QQ_{n-1} ترقی کند و نیز با QQ_{n-1} تنزل می‌کند.

قضیهٔ ۴. وقتی که r پیوسته تنزل کند نسبت $\frac{y}{r}$ ترقی می‌کند.

این بار OP (شکل ۱۰۳) را به n جزء متساوی تقسیم کرده نقاط تقسیم را P_1، P_2، ...، P_{n-1} بنامید و عمودهای P_1Q_1، P_2Q_2، ...، $P_{n-1}Q_{n-1}$ را بر OQ رسم کنید. مانند پیش سه عمود متوالی P_kQ_k، $P_{k+1}Q_{k+1}$، $P_{k+2}Q_{k+2}$ را برگزینید.



شکل ۱۰۳

از P_k عمود P_kR را بر $P_{k+1}Q_{k+1}$ رسم کنید؛ بر امتداد $Q_{k+1}P_{k+1}$ طول $P_{k+1}S$ را به‌اندازهٔ $P_{k+1}R$ جدا کنید و از S به P_{k+2} وصل نمایید. چون مثلثهای P_kRP_{k+1} و $P_{k+1}SP_{k+2}$ همنهشت هستند زاویهٔ $P_{k+1}SP_{k+2}$ قائمه است. طول مشترك $P_{k+1}S$ و $P_{k+1}R$ را با d نمایش دهید. در این صورت

$$P_{k+2}Q_{k+2} < SQ_{k+1} (= P_{k+1}Q_{k+1} + d)$$

و

$$P_kQ_k < RQ_{k+1} (= P_{k+1}Q_{k+1} - d)$$

بنابراین

$$P_{k+2}Q_{k+2} - P_{k+1}Q_{k+1} < d$$

و

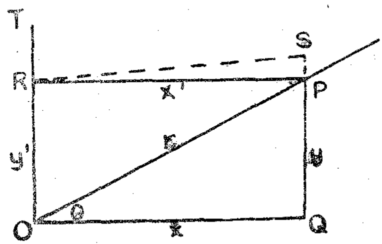
$$P_{k+1}Q_{k+1} - P_kQ_k > d$$

به طریقی که y نموهای کاهنده می‌کند وقتی که r نموهای متساوی کند. چون مانند پیش استدلال کنیم به این نتیجه می‌رسیم که نسبت $\frac{y}{r}$ پیوسته تنزل می‌کند و وقتی که r ترقی

کند، و ترقی می‌کند وقتی‌که r تنزل نماید.

اکنون آمادگی داریم‌که ثابت کنیم‌که نسبتهای مورد نظر به حد نزدیك می‌شوند وقتی‌که r به سوی ۰ گراید. قضیهٔ ۳ ما را متقاعد می‌سازد که چون r کاهش یابد نسبت $\frac{x}{r}$، کـه همیشه مثبت و کاهنده است، به‌حدی نزدیك می‌شودکه ممکن است کسر مثبت کوچکتر از واحد یا صفر باشد. از سوی دیگر قضیهٔ ۴ به تنهایی نمی‌تواند اطلاع کافی در دسترس ما بگذارد تا نتیجه بگیریم‌که $\frac{y}{r}$ نیز به حدی نزدیك می‌شود. اما وضع‌چنین هست، و ما به طریق ذیل آن را ثابت می‌کنیم:

با استفاده از زاویه‌ای که در شکلهای دیگر بکار رفت، و با بکار بردن همان حرفها OT را در O بر OQ عمودکنید (شکل ۱۰۴) و PR را عمود بر OT بکشید. طولهای پاره خطهای PR و OR را بترتیب بـا x' و y' نمایش دهید. حالا، از آنجا که زاویهٔ POR حاده است قضیه‌هایی را که ثابت‌کردیم می‌توان در مورد آن، و نیز در مورد زاویهٔ POQ، بـکار بست. شکل $OQPR$ چهار ضلعی لامبرتی است. در نتیجه x بزرگتر است از x' و y کـوچکتر است از y'. چون وقتی کـه r کاهش می‌یابد $\frac{x'}{r}$ مثبت و در حال ترقی است و $\frac{x}{r}$ همیشه بزرگتر از $\frac{x'}{r}$ است واضح است که حد $\frac{x}{r}$ صفر نیست. در دم نتیجه می‌شودکه $\frac{y'}{r}$ نیز ازبالا به حدمثبت‌کوچکتر از واحدی نزدیك می‌شود و چون $\frac{y}{r}$ همیشه کوچکتر از $\frac{y'}{r}$ است و پیوسته تنزل می‌کند وقتی که r ترقی کند باید از پایین به حد معینی نزدیك شودکه از واحد کوچکتر است.



شکل ۱۰۴

۹۳. خواص یك چهارضلعی لامبرتی متغیر

شکل ۱۰۴ قسمت گذشته نقش مهمی در پژوهش آینده دارد. مورد علاقهٔ خاص ما نتایجی هستندکه از ثابت نگاه داشتن ضلع y' چهار ضلعی لامبرتی $OQPR$ و متغیر داشتن xبدست می‌آیند. در این صورت x'، y، r، θ و زاویهٔ منفرجهٔ RPQ نیز متغیر

خواهند بود. مراد ما، بخصوص، توجه به سرشت تغییر نسبت x'/x است وقتی که x به ۰ نزدیك شود و y' ثابت بماند. قضیهٔ زیرین برای شناساندن تابع مهمی بکارمی‌رود:

قضیه. هرگاه اضلاع چهار ضلعی لامبرتـی، x و y و x' و y' باشند و x مقابل x' و y مقابل y' باشندوزاویهٔ بین x' و y منفرجه باشد، وهرگاه وقتی که x به صفرمی گراید y' ثابت نگاه داشته شود، آنگاه نسبت $\frac{x'}{x}$ کاهش می‌یابد و به حد معین $\varphi(y')$ نزدیك می‌شود.

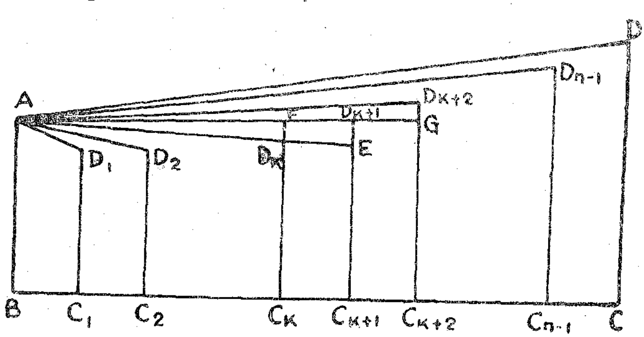
برای اثبات این قضیه به دو لم احتیاج داریم.

لم ۱. هرگاه زاویه‌های دو چهار ضلعی لامبرتـی $ABCD$ و $A'B'C'D'$ در A و A' منفرجه باشند، و اگر $AB = A'B'$ اما BC کوچکتر از $B'C'$ باشدو هر دو کوچکتر از q باشند، آنگاه زاویهٔ BAD کوچکتر است از زاویهٔ $B'A'D'$.

اثبات با برهان خلف به خواننده واگذار می‌شود.

لم ۲. هرگاه در چهار ضلعی لامبرتی $ABCD$ زاویهٔ A منفرجه بـاشد، آنگاه اگر AB ثابت نگاه داشته شود و BC پیوسته تنزل کند و بـه صفر نزدیك شود، نسبت AD/BC ترقی می‌کند.

BC (شکل ۱۰۵) را به n جزء متساوی تقسیم کنید و نقاط تقسیم را C_1، C_2، C_3، ...، C_{n-1} بنامید. در این نقاط عمودهایی بر BC اخراج کنید و عمودهای AD_1، AD_2، ...، AD_{n-1} را برآنها فرود آورید تا چهارضلعیهای لامبرتی تشکیل شوند. از



شکل ۱۰۵

لم ۱ واضح است که زاویهٔ منفرجه کاهش می‌یابد وقتی‌که BC کوچك شود. فرض‌کنید که ABC_kD_k و $ABC_{k+1}D_{k+1}$ و $ABC_{k+2}D_{k+2}$ سه چهارضلعی لامبرتی متوالی دلخواه باشند. AD_k را امتداد دهید تا $C_{k+1}D_{k+1}$ را در E قطع کند، ونیز C_kD_k و AD_{k+1} را امتداد دهید تا بترتیب AD_{k+1} را در F، و $C_{k+2}D_{k+2}$ را در G تلاقی نمایند. چون چهارضلعیهای $D_{k+1}C_{k+1}C_kF$ و $D_{k+1}C_{k+1}C_{k+2}G$ همنهشت هستند FD_{k+1} مساوی است با $D_{k+1}G$. بعلاوه، AG بزرگتر است از AD^{k+2} و AD_k کوچکتر است از AF. پس

$$AD_{k+1}+FD_{k+1}>AD_{k+2}$$

به نحوی که

$$AD_{k-1}-AF>AD_{k+2}-AD_{k+1}$$

و دست آخر

$$AD_{k+1}-AD_k>AD_{k+2}-AD_{k+1}$$

بدین ترتیب با شروع از چهارضلعی ABC_1D_1، وقتی که BC_1 نموهای متساوی داشته باشد AD_1 نموهای نزولی‌خواهدکرد. چون مانند قسمت ۹۲ استدلال کنیم‌نتیجه می‌گیریم‌که نسبت $\frac{AD}{BC}$ تنزل می‌کند وقتی‌که BC ترقی کند، و در نتیجه ترقی می‌کند وقتی‌که BC کاهش یابد.

چون به قضیه بازگردیم نخست خاطرنشان می‌سازیم‌که در نتیجهٔ نکته‌ای‌که در پایان اثبات قضیهٔ ۳ قسمت گذشته گفتیم نسبت $\frac{x'}{x}$ تنزل می‌کند وقتی که x به صفر نزدیك شود، پس به‌حدی نزدیك می‌شود کوچکتر از واحد. حالا نشان خواهیم داد که این حد ۰ نیست.

در شکل۱۰۴، RS را عمود بر امتداد QP رسم‌کنید. به‌عنوان نتیجه لم ۲ نسبت $\frac{RS}{x}$ ترقی می‌کند وقتی‌که x تنزل کند. اما، چون RP بزرگتراست از RS، نتیجه‌می‌شود که $\frac{x'}{x}$ همیشه بزرگتر است از $\frac{RS}{x}$. به این نتیجه می‌رسیم‌که نسبت $\frac{x'}{x}$ حدی دارد که بزرگتر است از ۰. این حد بستگی دارد بـه درازای y' و ما آن را بـا $\varphi(y')$ نمایش می‌دهیم. باید متوجه بودکه، دست‌کم تا جایی‌که به این بحث مربوط است، y' مقیداست به این که بین ۰ و q باشد. چون y' به ۰ نزدیك شود $\varphi(y')$ به ۱ نزدیك می‌گردد؛ وقتی‌که y' به q گرایش پیدا کند $\varphi(y')$ به ۰ می‌گراید.

نشان داده‌ایم که برای چهار ضلعی OQSR (شکل ۱۰۴)،

$$\varphi(y) > RS/x$$

چون این نتیجه را دربارهٔ چهار ضلعی OQPR بکار ببریم بدست می‌آوریم

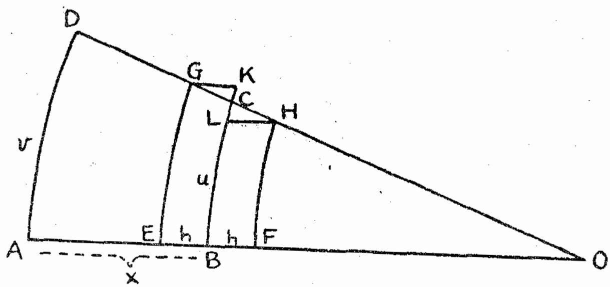
$$\varphi(y) > x'/x$$

و بدین ترتیب رابطهٔ

$$\varphi(y) > x'/x > \varphi'(y)$$

نتیجه می‌شود که بعد برای ما مورد استفاده خواهد بود. چون $y' > y$، از این رابطه برمی‌آید که وقتی x بزرگ شود $\varphi(x)$ تنزل می‌کند.

۹۴. پیوستگی تابع $\varphi(x)$



شکل ۱۰۶

فرض کنید (شکل ۱۰۶) که ABCD چهار ضلعی لامبرتیی باشد که درآن زاویهٔ C منفرجه است. طول پاره‌خطهای AB و BC و DA را، بترتیب، با x و u و v نشان می‌دهیم. ثابت کرده‌ایم که اگر x ثابت باشد و v بتواند به ۰ نزدیک گردد، نسبت $\frac{u}{v}$ از بالا به‌حدی کوچکتر از ۱ نزدیک می‌شود، و این حد بستگی دارد به طول x و با $\varphi(x)$ نموده می‌شود. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\varphi(x)$ تابعی است پیوسته.

برای این کار DC را از طرف C امتداد می‌دهیم تا امتداد AB را در O قطع کند. نقطهٔ O قطب خط AD است. برروی AO در دوطرف B پاره‌خطهای BE وBF را به طول h جدا کنید و در E و F عمودهایی بر AD رسم کنید تا DO را در HG قطع کنند. از G وH عمودهای GK و HL را بر BC رسم کنید. از قضیهٔ ۳ قسمت ۹۲ نتیجه می‌گیریم

$$CK/CG < CB/CO$$

که نوشته می‌شود

$$(BK-u)/v<(u/v)\ .CG/CO$$

یا
$$(GE/v)\ .\ (BK/GE)-u/v<(CG/CO)\ .(u/v)$$

آنگاه چون به v امکان داده شود که به ۰ نزدیک گردد، در حالی که خط DO حول O دوران کند، با رفتن به حد به این نامساوی می‌رسیم:

$$\varphi(x-h)/\varphi(h)-\varphi(x)\leqslant[h/(q-x)]\ .\ \varphi(x)$$

یا
$$\varphi(x-h)-\varphi(x)\varphi(h)\leqslant[h/(q-x)]\ .\ \varphi(x)\varphi(h) \qquad (۱)$$

بار دیگر، با شروع از رابطهٔ

$$CL/CH<CB/CO$$

درست از همان راه این رابطه را بدست می‌آوریم

$$\varphi(x)\varphi(h)-\varphi(x+h)\leqslant[h/(q-x)]\varphi(x)\varphi(h) \qquad (۲)$$

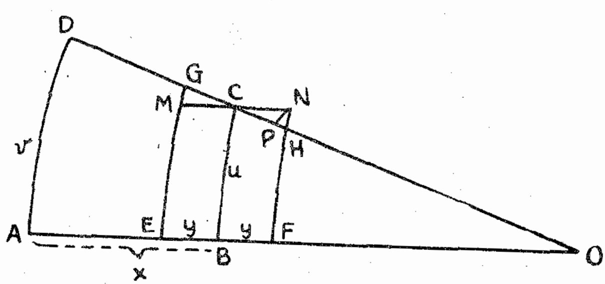
چون (۱) و (۲) را ترکیب کنیم حاصل می‌شود

$$\varphi(x-h)-\varphi(x+h)\leqslant[۲h/(q-x)]\ \varphi(x)\varphi(h)<۲h/(q-x)$$

بدین ترتیب هرمقدارکه x دربازهٔ مورد نظرداشته باشد مقداری برای h می‌توان یافت که تفاوت $\varphi(x-h)$ و $\varphi(x+h)$ از هر مقدار مثبت معینی، هر قدر هم کوچك، کوچکتر باشد، و پیوستگی $\varphi(x)$ مسلم است.

۹۵. یك معادلهٔ تابعی مهم

به شکلی خیلی شبیه به شکل گذشته باز می‌گردیم و آن را برای نتیجه گرفتن رابطه‌ای اساسی که $\varphi(x)$ درآن صادق است بکار می‌بریم. فرض کنید که ABCD (شکل ۱۰۷) یك چهار ضلعی لامبرتی منفرج‌الزاویه در C باشد. طولهای پاره‌خطهای AB و BC و DA را، بترتیب، با x و u و v نمایش دهید و AB و DC را امتداد دهید تا در O تلاقی کنند. بر AO پاره‌خطهای BE و BF را مساوی y جداکرده از E و



شکل ۱۰۷

F دو عمود بـر AO رسم کنید، تـا DO را در G و H قطع کنند. این دفعه از C خطی بر CB عمود کنید تا EG را در M وامتداد FH را درN قطع کند. آسان‌می‌توان دید که CM و CN متساویند. دست آخر، چون CH بزرگتر از GC است پاره خط CP مساوی با CG را می‌توان بر CH جدا کـرد و از N به P وصل نمود. در این صورت PN مساوی GM است. وقتی‌که v به ٥ نزدیك شود زاویه‌هـای GMC و HNC به قائمه نزدیك می‌شوند و زاویـهٔ PNH بی‌نهایت کـوچك می‌شود، همچنین، پاره‌خطهای NH و PH. می‌توان نشان داد که PH بی‌نهایت کوچکی است از مرتبهٔ بالاتر از v، و ما این نکته را می‌پذیریم. آنگاه از آنجا که

$$(NF-HF)-(GE-ME)=NH-GM=NH-NP<PH$$

نتیجه می‌شود که

$$\lim_{v\to 0}\left[\frac{NF}{u}\cdot\frac{u}{v}-\frac{HF}{v}-\frac{GE}{v}+\frac{ME}{u}\cdot\frac{u}{v}\right]=0$$

یـا

$$\varphi(y)\,\varphi(x)-\varphi(x+y)-\varphi(x-y)+\varphi(y)\,\varphi(x)=0$$

یا دست آخر:

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2\varphi(x)\,\varphi(y)$$

۹۶. تابع $\varphi(x)$

کشف این‌که تابع $\varphi(x)$ در شرطی که در قسمت پیش به آن رسیدیم صدق می‌کند وقتی‌که با این واقعیتها قرین شود که این تابع کوچکتر است از ۱ یا مساوی است با آن، و تنزل می‌کند وقتی که x ترقی کند، و مساوی با ۱ است وقتی‌که $x=0$، و مساوی ٥ است وقتی‌که $x=q$، شباهتی با تابع آشنای cosx را به فکر القا می‌کند. اینك درصدد آنیم که ثابت کنیم که[1]

$$\varphi(x)=\cos x/k$$

که در آن k ثابتی است بسته به واحد طول.

در آغاز کار مقداری برای x در نظر بگیرید، مثلاً x'. در انتخاب این مقدار تنها قیدهایی که باید مراعات کرد همانهایی هستند که قبلاً به x تحمیل شده‌اند به‌صورتی که برای بحثی که هم‌اکنون می‌آید مناسب بـاشند. در این صورت $\varphi(x)$ مقداری دارد بین ٥ و ۱، و در نتیجه برابر است با جیب تمام شناسه‌ای. این شناسه هرچه باشد ممکن

۱. البته در اینجا مراد تعریف تعمیم یافتهٔ cosx است. ← ضمیمهٔ ۲.

ست به صورت $\frac{x'}{k}$ نمایش داده شود، مشروط به آن‌که به k مقدار مناسبی داده شود.

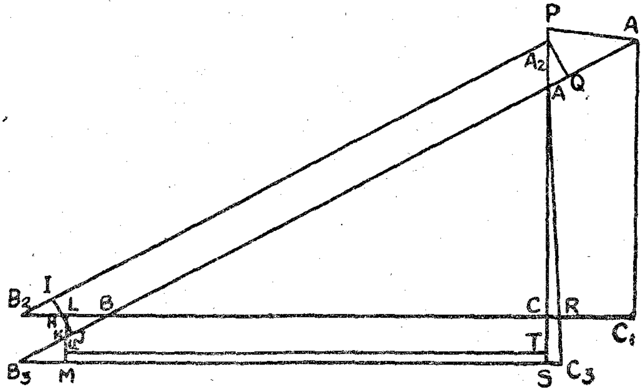
در نتیجه
$$\varphi(x')=\cos x'/k$$
چون
$$\varphi(px)=۲\varphi[(p-۱)x]\,\varphi(x)-\varphi[(p-۲)x]$$
و
$$\cos(px)=۲\cos[(p-۱)x]\,\cos x-\cos[(p-۲)x]$$
هرچه باشد مقدار P، با استقرای ریاضی بآسانی نتیجه گرفته می‌شود که
$$\varphi(nx')=\cos\frac{nx'}{k}$$
که در آن n عدد صحیح مثبتی است. بعد، از راه مشابه، می‌بینیم که
$$\varphi\left(\frac{nx'}{۲^m}\right)=\cos\frac{nx'}{۲^m k}$$
که در آن m عدد صحیح مثبت دلخواهی است. بدین ترتیب رابطهٔ
$$\varphi(x)=\cos\frac{x}{k}$$
برای هرمقدار x، واقع در بازهٔ مورد نظر، و به صورت $\frac{nx'}{۲^m}$ معتبر است. معتبر بودن آن برای هر مقدار دیگر x، واقع درآن بازه نتیجه‌ای است ازپیوستگی تابعهای $\varphi(x)$ و cosx و از این واقعیت که در صورت انتخاب مناسب مقدارهای m و n می‌توان کاری کرد کـه تفاوت $\frac{nx'}{۲^m}$ از هر چنین مقدار x، هر قدر بخواهیم کوچك باشد.

۹۷. رابطه‌های بین اجزای مثلث قائم‌الزاویه

اکنون به‌جایی رسیده‌ایم که برای بیرون‌کشیدن رابطه‌های بنیادی مثلثات بیضوی آماده‌ایم، یعنی روابط بین اندازه‌های ضلعها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه.

فرض کنید ABC (شکل ۱۰۸) مثلث قائم‌الزاویه‌ای، قـائمه در C، بـاشد و اندازه‌های ضلعها را مطابق معمول با a و b و c نمایش دهید. بازهم اندازهٔ شکل را به این مقید می‌کنیم که پاره‌خطهایی کـه در آن دخیلند از q کوچکتر بـاشند. بسط دادن نتیجه‌ها به‌شکلهای نامقید اشکال بزرگی پیش نمی‌آورد.

برامتداد BA ازطرف A پاره خط $AA_۱$ را جدا کرده و $A_۱C_۱$ را عمود برامتداد BC فـرود آورید. CA و CB را امتداد داده $CA_۲$ و $CB_۲$ را، بترتیب، مساوی



شکل ۱۵۸

C_1A_1 و C_1B جدا کنید و از A_2 به B_2 وصل نمایید. مثلثهای A_1BC_1 و A_2B_2C همنهشتند. حالا AB را از طرف B امتداد دهید و AB_3 را مساوی A_1B جدا کنید و در B_3 زاویهٔ AB_3C_3 را مساوی A_1BC بسازید. اگر B_3C_3 مساوی BC_1 جدا شود و از A به C_3 وصل گردد مثلثهای A_1BC_1 و AB_3C_3 همنهشت خواهند بود، آسان می‌توان دیدکه $BB_2=CC_1$ و $BB_3=AA_1$.

از H وسط B_2B عمود HI را بر A_2B_2 بکشید. اگر BJ را مساوی B_2I بر BB_3 جدا کنیم و H را به J ربط دهیم مثلثهای HB_2I و HBJ همنهشت خواهند بود، ونقطه‌های I و H و J بریك خط قرارخواهند داشت، و HJ عمود خواهد بود بر B_3A. به وضعی مشابـه LKM را از K وسط BB_3 و عمود بر B_2C و B_3C_3 می‌تـوان رسم کرد.

چون زاویـهٔ BA_1C_1 بزرگتر است از زاویهٔ BAC، AC_3 خط BC_1 را بین C و C_1 قطع خواهد کرد. AC را امتداد دهید تـا B_3C_3 را در S قطع کند. آنگاه AS بزرگتر است از AC_3، که به‌نوبت خود مساوی است با A_2C. بدین ترتیب CS بزرگتر است از A_2A. در نتیجه می‌توان پـاره‌خط CT را مساوی AA_2 روی CS جدا کرد و T بین C و S واقع شود. عمود TU را از T بر LM رسم‌کنید. سرانجام برای کامل کردن این شکل پرکار A_1P را عمود بر AC و A_2Q را عمود بر AB بکشید.

هرگاه به AA_1 مجال دهیم که به ۰ نزدیك شود می‌بینیم که

$$\text{حد}\ A_1P/AA_1=\text{حد}\ A_2Q/AA_2$$

و به نحو مشابه

$$\text{حد}\; LK/BK = \text{حد}\; JH/BH$$

به نحوی که

$$\text{حد}\; LM/BB_3 = \text{حد}\; IJ/BB_2$$

آنگاه از اولین و سومین این معادله‌ها، بوسیلهٔ تقسیم، بدست می‌آوریم

$$\text{حد}\;\text{حد}\; A_1P/LM = \text{حد}\;\frac{A_2Q}{IJ}\;\text{حد}\;\frac{CC_1}{AA_2}$$

یا، به صورتی دیگر

$$\text{حد}\;\frac{A_2Q}{IJ} = \text{حد}\;\frac{A_1P}{CC_1}\;\text{حد}\;\frac{AA_2}{LM}$$

می‌بینیم که هر یك از سه حد به نوبت دخیل شده است.

نخست، هرگاه آخرین رابطه‌ای را که درقسمت ۹۳ بدست آوردیم در چهارضلعی لامبرتی A_2IJQ بکار ببریم می‌بینیم که

$$\varphi(JQ) < A_2Q \,/\, IJ < \varphi(IA_2)$$

چون به حد برویم JQ و IA_2 هر دو به AQ نزدیك می‌شوند و بدین ترتیب، با درنظرگرفتن پیوستگی تابع $\varphi(x)$، هم $\varphi(JQ)$ وهم $\varphi(IA_2)$ به $\varphi(AB)$ می‌گرایند. بنابراین

$$\text{حد،}\; A_2Q \,/\, IJ = \varphi(AB)$$

و درست به همین راه با استفاده از چهار ضلعی A_1PCC_1،

$$\text{حد.}\; A_1P \,/\, CC_1 = \varphi(AC)$$

از حد سوم به این آسانی استفاده نمی‌توان‌کرد. با وجود این از آنجا که A_2C برابر A_3C، و AC کوچکتر از AR است می‌بینیم کـه RC_3 کوچکتر است در AA_2، و در نتیجه

$$AA_2 \,/\, LM > RC_3 \,/\, LM > \varphi(MC_3)$$

و نیز

$$.AA_2 \,/\, LM < AA_2 \,/\, LU = CT \,/\, LU < \varphi(UT)$$

در این صورت وقتی‌که AA_1 به ۰ گراید MC_3 و UT هر دو به BC نزدیك می‌شوند،

$$\text{حد.}\; AA_2 \,/\, LM = \varphi(BC)$$

بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi(AB) = \varphi(AC)\,\varphi(BC)$$

یا

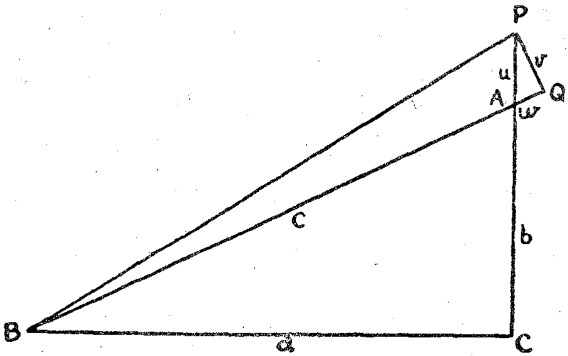
$$\cos c/k = \cos a/k \,.\, \cos b/k \qquad (1)$$

این رابطه‌ای است که سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه را به یکدیگر مربوط می‌سازد. این رابطه در دم به این نتیجهٔ مهم رهنمون می‌شود که دستور فیثاغورس برای مثلثهای قائم‌الزاویهٔ بی‌نهایت کوچك در هندسهٔ بیضوی معتبر است. از این واقعیت نتیجه می‌شود که تابع مثلثاتی زوایا، به صورتی‌که در قسمت ۹۲ تعریف شد، با رابطهٔ آشنای مثلثات اقلیدسی بهم مربوطند، یعنی با رابطه‌های

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$

$\sec^۲\theta-\tan^۲\theta=۱$، و امثال آنها

برای بدست آوردن دستور دیگری بین اجزای مثلث قائم‌الزاویه، CA (شکل ۱۰۹) را از طرف آن به اندازهٔ مناسب u تا نقطهٔ P امتداد دهید و عمود PQ را بر امتداد BA فرود آورید. اندازه‌های PQ و AQ را با v و w معین کنید. آخر سر BP را بکشید.



شکل ۱۰۹

آنگاه

$$\cos\frac{BP}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b+u}{k}$$

$$=\frac{\cos c/k}{\cos b/k}(\cos b/k\cos u/k-\sin b/k\sin a/k)$$

و

$$\cos\frac{PB}{k}=\cos\frac{v}{k}\cos\frac{c+w}{k}=\frac{\cos u/k}{\cos w/k}\left(\cos\frac{c}{k}\cos\frac{w}{k}-\sin\frac{c}{k}\sin\frac{w}{k}\right)$$

به نحوی که

$$\frac{\tan b/k}{\tan c/k}=\frac{\tan w/k}{\tan u/k}$$

چون u به ۰ سوق داده شود عضو دست راست این معادله بـه $\cos A$ نزدیك می‌شود و در نتیجه

$$\cos A = \frac{\tan b/k}{\tan c/k} \tag{۲}$$

دستوری که یك زاویهٔ — نه زاویهٔ قائمه C — را با دو ضلع آن مربوط می‌سازد.

تبدیل این دستور به‌دستور سومی دشوار نیست، زیرا که برفور بدست می‌آوریم

$$\sin^2 A = 1 - \frac{\tan^2 b/k}{\tan^2 c/k} = \frac{\sec^2 c/k - \sec^2 b/k}{\tan^2 c/k} = \frac{1-\cos^2 a/k}{\sin^2 c/k}$$

یـا

$$\sin A = \sin a/k : \sin c/k \tag{۳}$$

سه دستور دیگر چنینند:

$$\cos A = \sin b/k : \tan a/k \tag{۴}$$

$$\cos A = \cos a/k \sin B \tag{۵}$$

$$\cos c/k = \cot A \cot B \tag{۶}$$

و بآسانی بدست می‌آیند.

خواننده توجه می‌کند که این دستورها همان دستورهای مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی برای کره‌ای به شعاع k هستند.

۸

سازگاری هندسه‌های نااقلیدسی

«سه هندسه از حیث استواری، سازگاری درونی، سازش‌پذیری داخلی، ومطابقت منطقی بین اجزای خود دریك سطحند، و این بالاترین سطحی است که‌آدمی بدان دست‌یافته‌است. هرسه آیین‌فرزندان‌خلف یك گوهرند: گوهر هندسه‌پردازی که افلاطون آن را خدایی دانسته است ـ و هر سه جاویدانند. کاری که خدای هماهنگی فکری آن را الهام و تأیید کرده است از میان نمی‌تواند رفت، و زندهٔ جاوید است.»

کاسیوس ی. کایزر

۹۸. مدخل

در پژوهش در هندسهٔ نااقلیدسی دیر یا زود این پرسش پیش می‌آید: کدام از این سه هندسه «راستین» است، یا به بیانی دیگر، کدام هندسه عملاً فضای مادی ما را توصیف می‌کند؟ در ارتباط با این پرسش امید می‌رود که آنچه تاکنون دربارهٔ فلسفهٔ کانتی فضا گفته شده است خواننده را به‌ضعف‌آن واقف کرده باشد و، دست‌کم از دیدگاه یك هندسه‌دان، آن را بکلی فاقد اعتبار بشناسد. این‌که فضا اندیشه‌ای است که از پیش

درذهن آدمیان وجود دارد و بی‌آن هیچ‌یك از پدیده‌های فضایی به‌صورتی که‌می‌شناسیمشان وجود نخواهند داشت دیدگاهی است که دیگر قانع‌کننده نیست. هندسه وقتی که به فضا اطلاق شود سرشتی تجربی پیدا می‌کند و، همان‌طور که گاوس خاطر نشان ساخته است، باید درآن از دیدگاهی شبیه به دیدگاه مکانیك نگریست. فضایی که ما بوسیلهٔ اندامهای حسمان می‌شناسیم و از تعدادی تأثیرهای جدا از هم ترکیب شده است، بسیار دور از آن است که بتواند پیوستاری ریاضی باشد.

پس به‌این نتیجه می‌رسیم که نکته‌ای نیست که بتوان در جواب پرسشی که درآغاز این قسمت مطرح شد گفت. هیچ هندسه‌ای «راستین»تر از دیگری نیست. راست آن‌که، وقتی‌که هندسه‌ای در فضا بکار بسته شود اصل موضوع توازی بدل به قانونی تجربی می‌شود، شبیه به قانون سقوط اجسام که حداکثر این است ظاهراً چیزها را به صورتی که هستند به بهترین وجه توصیف می‌کند. همچنان که در فصل اول اشاره کردیم کاربرد هندسه در فضای مادی چیزی نیست جز تلاش برای فراهم‌آوردن مجموعه‌ای از اصول منطقی که با دقتی کافی به همهٔ موارد عملی، که قلمرو مشاهده و تجربه هستند، قابل اطلاق باشند. و راست است که هر یك از سه هندسه بخوبی دو هندسهٔ دیگر از عهدهٔ این کار برمی‌آیند. اگر اندازه‌گیریهای نامستقیم می‌شد و طرحهای مهندسی براساس هندسهٔ هذلولوی یا بیضوی اجرا و ساخته می‌شدند نتایج همانقدر رضایت‌بخش می‌بودند که با فرض اقلیدسی هستند. در واقع اختلافها چندان نمی‌بودکه در قسمت کوچکی از فضا که ما در آن محدودیم قابل دیدن باشد. اما در صورتی هم که قرینه‌های بسیاردقیق باشد براین‌که یکی ازهندسه‌های نااقلیدسی فضای ما را از جهاتی بهتر و دقیقتر ازهندسهٔ اقلیدسی توصیف می‌کند بازهم هندسهٔ اقلیدسی، به سبب سادگی نسبی آن، به‌مقدار زیاد مورد استفاده بود.

چنان‌که در قسمت ۷۴ گفته شد نمی‌توانیم هرگز مطمئن باشیم که فضا اقلیدسی است، حتی اگر چنین باشد، و این به سبب خطاهای تجربی است که نمی‌توان آنها را کاملاً حذف‌کرد. اما، برروی هم، غیرممکن نیست که وسیله‌های علمی بهتر و روشهای تازه‌تری مثلاً ما را قادر سازندکه حدی فوقانی برای ثابت فضا تعیین کنیم و سرانجام به نحوی قاطع تصدیق نماییم که فضا نااقلیدسی است. اما تا رسیدن به این مقصد سدهای واقعی متعدد بر سر راه هستند. یکی از سدها این است که روشهای اندازه‌گیری نامستقیم، و نیز خود وسایل این اندازه‌گیریها باید برپایه‌های یکی از هندسه‌ها استوار باشند. نتایجی که براساس استفاده از این‌گونه روشها و اسبابها بدست آمده‌اند بسختی ممکن است متقاعدکننده شمرده شوند.

اما موضوع دیگری است که باید از راه‌دیگری مطرح کرد: آیا هندسه‌های نااقلیدسی

سازگارند؟ تا جایی‌که خود ما در بحث دو هندسه پیش رفته‌ایم تناقضی کشف نشده‌است. حقیقت‌آن‌که هیچ‌کس به‌تناقضی برنخورده است. اما آیا ما مطمئنیم‌که با ادامهٔ پژوهشها تناقضی بر پا نخواهد خاست که نشان دهد که اصل موضوعهای این یا آن هندسه ناساز هستند؟

دلایل متعدد برسازگاری هندسه‌های نااقلیدسی داده شده‌اند، از اولین آنها که بلترامی در ۱۸۶۸/۱۲۴۷ آورد و پیشتر بـه‌آن اشاره شده است[۱] تا اثباتهای مهمتر و دامنه‌دارتر، هرچند پرکارتر، کیلی و کلاین. بعضی دلیلها، مانند دلایل بلترامی، بستگی دارند به نمایشهای هندسه‌های نااقلیدسی برسطوح اقلیدسی با انحنای ثابت؛ برخی دیگر سرشت تحلیلی دارند وهدف آنها نشان‌دادن این است‌که نمایشهای تحلیلی به‌مجموعه‌ای از دستورهای سازگـار کشانیده می‌شوند. و بـرخی دیگر از روشهای هندسهٔ تصویری یاری می‌گیرند. برهانی[۲] که ما در اینجا می‌آوریم ترکیبی است و فقط بستگی دارد به مفهومهای سادهٔ هندسی. نیازی به‌آشنا بودن با هندسهٔ تصویری یا هندسه مطرح نیست.

ثابت خواهیم‌کرد‌که اصل موضوعهای هندسهٔ مسطح هذلولوی، با متوجه ساختن دقت به مجموعه‌ای در دوایر در هندسهٔ اقلیدسی‌که دایرهٔ مفروضی را به زاویه‌های قائمه قطع می‌کنند، اساس و پایهٔ یك دستگاه منطقی سازگار را تشکیل می‌دهند. نشان خواهیم دادکه هندسهٔ این خانوادهٔ دوایر، وقتی‌که بـه نحوی مناسب تعبیر شوند، کاملاً شبیه است به هندسه هذلولـوی، هم از حیث تعریفها وهم از حیث اصل موضوعها و قضیه‌ها، نظیر به نظیر. درنتیجه خواهیم توانست نتیجه بگیریم‌که هندسهٔ هذلولوی سازگار است. زیرا که در برابر هر تضادی‌که دیده شود باید تضاد متناظری در همان مورد در هندسهٔ خانوادهٔ دایره‌ها وجود داشته باشد. اما هندسهٔ دایره‌ها اساساً اقلیدسی است. پس بایستی نتیجه گرفته شودکه هندسه اقلیدسی خودش نـاسازگار است. همین نقشه را می‌توان به هندسهٔ مجسم (فضایی) سرایت داد.

---

۱. ← قسمت ۳۳.

۲. این روش را بـه پوانکـاره مدیـونیم. ← تـرجمهٔ انگلیسی علم و فرض او بـا عنوان *Science and Hypothesis* بوسیلهٔ W. J. Greenstreet (لندن، ۱۹۰۵). اما از بررسی موسعتر H. S. Carslaw، که نخست در *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*، جلد بیست و هشتم، (۱۹۱۰)، ص ۹۵-۱۲۰، و سپس در ضمیمهٔ ترجمهٔ او از *Non-Euclidean Geometry* نوشتهٔ Bonola (شیکاگو، ۱۹۱۲)، و آخر سر در *Elements of Non-Euclidean Plane Geometry and Trigonometry* خود او (لندن ۱۹۱۶)، انتشاریافت استفاده می‌کنیم. این کار گسترش موضوع است که Wellstein در *Encyclopädie der Elementar-Mathematik* تألیف وبر و ولشتاین، جلد دوم، ص ۲۳- ۱۸۳ (لایپزیك، ۱۹۰۷) آورده‌اند.

باید دانست که این آزمون سازگاری سنجشی است. اما آزمونهای دیگر نیزچنینند. حقیقت آن کـه هرگز روشی قطعی برای آزمودن سازگاری مجموعه‌ای از فرضها پیدا نشده است[1].

۹۹. هندسهٔ دایره‌های عمود بر دایره‌ای ثابت

فرض کنید هندسه‌ای را در نظر بگیریم که در آن دایره‌های عمود[2] بر دایرهٔ ثابتی، که دایرهٔ بنیادین نامیده می‌شود، نقش‌خطهای راست را ایفا کنند. این‌هندسه اساساً اقلیدسی است، اما آن را چنان تعبیر می‌کنیم که دراصلهای موضوع هندسه هذلولوی صادق باشد.

هر دایره‌ای را می‌توان دایرهٔ بنیادین گرفت. هر نقطهٔ داخل این دایره را نقطه‌ای از هندسهٔ مورد بحث می‌انگاریم؛ نقطه‌های روی محیط و خارج دایره را مطلقاً از آن این هندسه نمی‌دانیم. قوسهایی از دایره‌هایی کـه دایرهٔ بنیادین را بـه زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند و داخل آن دایره واقعند خطهای این هندسه‌گرفته می‌شوند. چون آنها به معنی اکید خط نیستند آنها را خط اسمی[3] می‌نامیم. یادآوری می‌کنیم که یك و فقط یك‌دایره می‌توان بر دو نقطه واقع در درون دایرهٔ بنیادی گذراند که برآن عمود باشد، البته به شرط آن‌که خطهای راستی را که برمرکز آن می‌گذرند جزء مجموعهٔ دایره‌های عمود بر آن بپذیریم. بدین ترتیب واضح است که خطهای اسمی در یك شرط مهمی‌که برای خطهای هندسهٔ هذلولوی لازم است صدق می‌کنند و آن این است کـه خط بوسیلهٔ دو نقطه‌اش مشخص شود. بعلاوه اصل موضوعهای ترتیب معتبر هستند. چون یك خط اسمی بسته نیست همیشه ممکن است یکی از سه نقطه‌ای را بر آن گرفت کـه بین دو نقطهٔ دیگر باشد. با توجه به این که هر دو دایره‌که بریك دایره عمود بـاشند یك نقطهٔ مشترك در درون آن دایره ویك نقطه در خارج آن دارند نتیجه می‌شود که اگر دو خط اسمی تقاطع

---

۱. آزمون سازگاری هندسه‌ای الـزامـاً بستگی به سنجش بـا دستگاه هندسی دیگری ندارد. این مفهومهای هندسه را می‌توان، مثلاً، بـه قلمرو اعداد منتقل ساخت. در ارتباط با این موضوع بـه اثبات هیلبرت بـرای سازگـاری اصلهای مـوضوع هندسهٔ اقـلیدسی (*Grundlagen der Geometrie*، چاپ هفتم، ص. ۳۴، یا تـرجمهٔ Townsend، ص. ۲۷). و اثباتـی کـه Veblen و Young بـرای دستگاه ریـاضی خـردی (مینیاتـوری) کـه در *Projective Geometry* آنان، جلد یکم، ص. ۳. (بوستن، ۱۹۱۰) توصیف شده است. در کتاب اخیر می‌توان مراجعی برای آثاری یافت که در آنها به موضوع امکان یك آزمون مطلق سازگاری اشاره شده است.

۲. برای بررسی مختصری دربارهٔ نظریهٔ دایره‌های عمود برهم رجوع کنید به‌ضمیمهٔ کتاب حاضر.

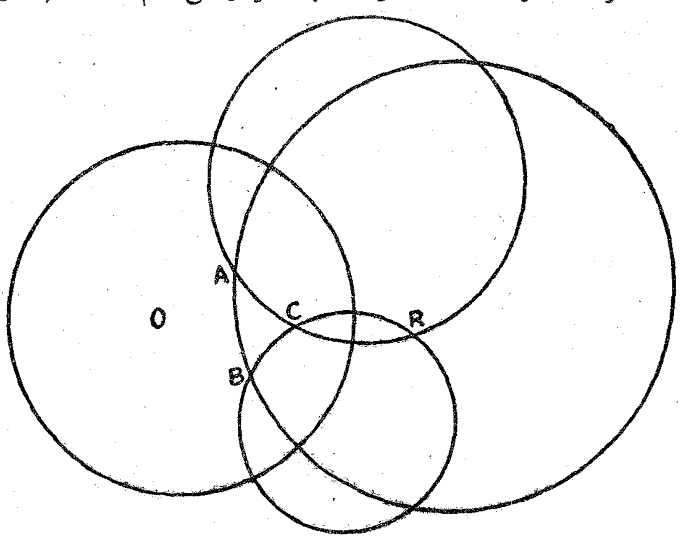
۳. این اسم را Carslaw پیشنهاد کرده است.

کنند فقط یك نقطهٔ مشترك دارند.

زاویهٔ بین دو خط اسمی متقاطع را زاویهٔ بین مماسهای در نقطه تقاطعشان بر دو دایره‌ای که نمایندهٔ آن دو خط هستند تعریف می‌کنیم. پس دو خط چهار زاویه می‌سازند که دو به دو متساوی و دو به دو مکملند. دو خط اسمی را عمود برهم گوییم وقتی که یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع کنند. بر هر نقطه یك، و فقط یك، دایره می‌توان رسم کرد که بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشد. پس در هندسهٔ مورد بحث ما بر هر نقطه فقط یك خط اسمی می‌توان رسم کرد که بر خط اسمی مفروضی عمود باشد.

اما ممکن است دو خط اسمی هرگز تقاطع نکنند. دو حالت تمیز می‌دهیم: اگر دو دایره که خطهای اسمی برآنها منطبقند تقاطع نکنند دوخط اسمی را نامتقاطع می‌خوانیم؛ هرگاه دو دایره در نقطه‌ای واقع بر دایرهٔ بنیادی بر یکدیگر مماس شوند دو خط اسمی را موازی می‌گوییم. آسان می‌توان دید که دو خط اسمی وقتی، و فقط وقتی، یك عمود مشترك دارند که نامتقاطع باشند ـ بر نقطهٔ مفروضی دو خط اسمی می‌توان رسم کرد که با خط اسمی مفروضی موازی باشند. این دو موازی همهٔ خطهای اسمی را که برآن نقطهٔ مفروض بگذرند به دو مجموعه تقسیم می‌کنند: آنهایی که خط اسمی مفروض را قطع می‌کنند وآنهایی که آن را قطع نمی‌کنند. خطهای اسمی متوازی را می‌توان خطوطی دانست که به زاویهٔ ٥ تلاقی می‌نمایند.

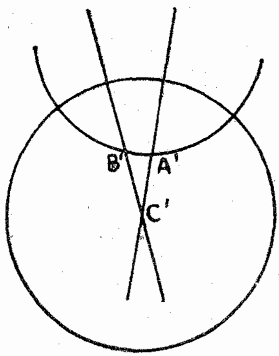
مجموع زاویه‌های یك مثلث اسمی، یعنی شکل سه پهلویی که اضلاعش سه خط اسمی باشند، کمتر است از دو قائمه. برای اثبات فرض می‌کنیم ABC (شکل ١١٥)



شکل ١١٥

چنین مثلثی باشد. O مرکز دایرهٔ بنیادین است. دایره‌هایی را که ضلعهای مثلث اسمی برآنها منطبقند کامل کنید. بخصوص، فرض کنیدکه دایره‌های AC و BC بار دیگر در R تقاطع کنند. منعکس[1] تمام شکل را با مرکز انعکاس R بدست آورید. دایره‌های AC و BC تبدیل می‌شوند به دو خط متقاطع $A'C'$ و $A'B'$ (شکل ۱۱۱). دایرهٔ بنیادین تبدیل می‌شود به‌دایره‌ای عمود برخطهای $A'C'$ و $B'C'$، پس مرکز آن در C' است.

دایرهٔ AB تبدیل خواهد شد بـه دایره‌ای عمود بر دایـرهٔ بنیادین و بدین ترتیب مرکزش خارج آن خواهد بود. آشکار است که مجموع زاویه‌های شکل‌مثلثی $A'B'C'$ کوچکتر است از دو قائمه، و چون زوایا در انعکاس محفوظ می‌مانند این حکم بر مثلث ABC نیز جاری است. تـرسیم شکلی که در حکم مثلثی باشد که هر زاویه‌اش ۰ است برای خواننده مشکل نیست؛ هر ضلع بـا دو ضلع دیگر در جهتهای مخالف موازی خواهد بود.



شکل ۱۱۱

تمرین

۱. ثابت کنید که دو خط اسمی‌که بر یك نقطهٔ اسمی بگذرند و با خط اسمی مفروضی موازی باشند با خط اسمی ماربرآن نقطه و عمود برآن خط اسمی زاویه‌های متساوی می‌سازند. بدین ترتیب در هندسهٔ خطهای اسمی زاویه‌ای داریم نظیر زاویهٔ توازی در هندسهٔ هذلولوی.

۲. ثابت کنید که چنین زاویهٔ توازی همیشه حاده است.

۱۰۰. طول اسمی پاره‌خط اسمی

چنان که گفتیم، هدف ما اثبات این مطلب است که وقتی به موجودهای هندسی مورد بحث در هندسهٔ حاضر، نقشهای موجودهـای هندسهٔ هذلولوی اسناد شوند، در اصلهای موضوعی کـه اساس آن هندسه هستند صادق خواهند بـود. تاکنون قرینه‌هایی بسرعت گرد آوردیم. درحقیقت به‌جایی رسیده‌ایم‌که می‌توانیم اعلام کنیم‌که هر حکمی از هندسهٔ هذلولوی کـه متضمن فقط خواص زوایا بـاشد نظیری در هندسهٔ خطهای اسمی دارد.

اما تاکنون به مفهوم درازای پاره خط اسمی توجهی نکرده‌ایم. تا وقتی که طول

---

۱. برای بحث دربارهٔ اصول نظریهٔ انعکاس ← ضمیمهٔ کتاب حاضر.

اسمی پاره‌خط اسمی تعریف نشود در آن همتایی بـرای هیچ یك از قضیه‌هـای طولی زیبایی که درنهایت ظرافت سرشتهای هندسهٔ هذلولوی را بیان می‌کنند وجود ندارد.

برای انتخاب تعریفی برای طول اسمی پـاره خط اسمی سه شرط اولی لازمند تـا شباهت با هندسهٔ هذلولوی محفوظ بماند:

۱. خط اسمی باید طولی نامتناهی داشته باشد.

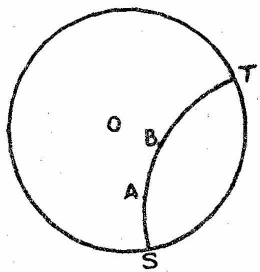
۲. هرگاه A و B و C سه نقطهٔ دلخواه روی یك خط اسمی باشند آنگاه

طول اسمی AC = طول اسمی BC + طول اسمی AB

پذیرفته شود.

۳. طول اسمی پاره خط با تغییر مکان بی‌تغییر باقی بماند.

تعریفی که هم‌اکنون می‌آوریم جامع این هر سه شرط است. فرض کنید دایره‌ای که خط اسمی AB برآن منطبق است دایرهٔ بنیادین را در S و T قطع کند (شکل ۱۱۲).



شکل ۱۱۲

اکنون طول اسمی پاره‌خط اسمی AB را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\log_e \frac{AT}{AS} / \frac{BT}{BS}$$

که در آن AT و AS و BT و BS وترهای دایره‌اند[1]. پاره خط AB وقتی واحد طول خواهد بود که این لگاریتم مساوی ۱ باشد، یعنی‌وقتی که

$$\frac{AT}{AS} \cdot \frac{BS}{BT} = e$$

طول اسمی پاره‌خط اسمی AB را می‌توان بطور عامتر چنین تعریف کرد

$$k \log_e \frac{AT}{AS} / \frac{BT}{BS}$$

که در آن k پارامتری است که انتخاب آن واحد طول را معین می‌کند. یـا، به بیانی دیگر، مبنای لگاریتم را می‌توان a به‌جای e گرفت، وهرتغییری در a موجب تغییری‌در واحد طول خواهد شد. درآنچه خواهدآمد برای سادگی k را مساوی ۱ ومبنای لگاریتم را e خواهیم گرفت مگر آن‌که تصریح شود.

۱. قرینه‌ای براین که در نمایش طول بـوسیلهٔ لگاریتم اشکالـی نیست در تمرین ۱ قسمت ۶۶ دیده می‌شود. رابطهٔ این تعریف با نسبت ناهمساز (غیر توافقی) بین چهار نقطه را دانشجوی دورهٔ پیشرفته می‌شناسد.

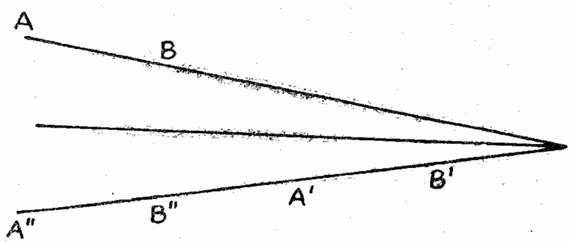
برای خواننده اثبات این مطلب دشوار نخواهد بود که درنتیجهٔ تعریفی که کردیم طول اسمی AB نامتناهی خواهد شد وقتی‌که A به S، یا B به T، نزدیك شود. اشکالی هم دراثبات صادق بودن شرط دوم نخواهیم داشت. اما شرط سوم مطلب دیگری‌است، زیرا که باید قبلاً بگوییم که در هندسهٔ مورد بحث مراد ما از تغییر مکان چیست.

اقلیدس برای با هم سنجیدن شکلها انطباق را بکار برد، و برای این‌کار فرض کرد که شکلها را می‌توان در صفحه جابه‌جا کرد یا حرکت داد بی‌آن که در آنها تغییری روی دهد. ما این اصل را، یا چیزی را که هم‌ارز آن باشد، در مطالعهٔ هندسه‌های هذلولوی و بیضوی بکار بردیم. در هندسه‌ای که هم‌اکنون مورد پژوهش است همنهشتی وموضوعهای وابسته به‌آن را با این روش‌آشنا مورد استفاده قرار می‌دهیم. ببینیم چگونه چنین تغییر مکانی را می‌توان انجام داد.

۱۰۱. تغییر مکان بوسیلهٔ بازتاب[1]

در هر یك از سه هندسه هرشکل مسطح را می‌توان نسبت به هر خطی از صفحه، که محور بازتاب نامیده می‌شود، بازتابانید. هرگاه P نقطه‌ای ازصفحه باشد وازآن عمود PQ را برمحور فرود آورده به اندازهٔ خودش تا P′ امتداد دهیم، آنگاه می‌گوییم که P در P′ بازتابانده شده است و P′ تصویر آن است. این تبدیل ساده در اندازه‌های شکل تغییری نمی‌دهد و طولها و زاویه‌ها محفوظ می‌مانند.

دلبستگی ما به بازتاب به دلیل آن است که با این تبدیل می‌توان شکل مستوی را از هر وضعی در صفحه به هر وضع دیگر جابه‌جا کرد. برای اثبات کافی است نشان بدهیم که پاره خط AB (شکل ۱۱۳) را می‌توان بوسیلهٔ بازتاب نسبت به محورهای مناسب برپاره خط A′B′ که مساوی آن است منطبق ساخت.



شکل ۱۱۳

۱. درکتاب حاضر این اصطلاح به جای تقارن محوری، و محور بازتاب به جای محور تقارن، بکار برده شده‌اند .ـم.

هرگاه AB و $A'B'$ بریك خط راست نبوده، متوازی یا بر دوخط نامتقاطع نیز نباشند AB را حول نیمساز زاویهٔ حادث از برخورد امتدادهای AB و $A'B'$ باز می‌تابانیم. $A''B''$ تصویر آن با $A'B'$ بریك خط راست، و به همان طول، خواهد بود. خواننده خود متوجه تغییرهایی که باید در صورت موازی بودن یا نامتقاطع بودن AB و $A'B'$ داده شود خواهد بود. اگر $A'B'$ و $A''B''$ همجهت باشند ولی منطبق نباشند پاره خط $A''B''$ را باید حول عمودمنصف خود بازتابانید تا جهتش مخالف جهت AB شود. آنگاه بازتاب دیگری حول عمود منصف مشترك $A'A''$ و $B'B''$ دو پاره‌خط را برهم منطبق خواهد ساخت.

صفتهای مشخص‌کنندهٔ بازتاب چنینند: (۱) پاره خطی که یك نقطه و تصویر آن را به‌هم مربوط سازد برمحور عمود است و بوسیلهٔ آن نصف می‌شود. (۲) هر پاره‌خط و تصویرش طولهای مساوی دارند و در صورت متقاطع بودن امتدادهایشان یکدیگر را روی محور قطع می‌کنند و با آن زاویه‌های برابر می‌سازند.

۱۰۲. تغییر مکان در هندسهٔ خطهای اسمی

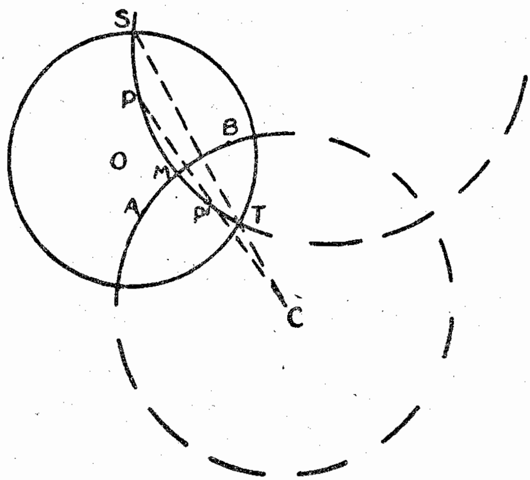
اینك آماده‌ایم‌که نظیر این بازتاب را در هندسه‌ای که ساخته‌ایم نمایان سازیم. وقتی‌که آن را توصیف‌کردیم خواهیم توانست که مسألهٔ تغییر مکان برای این هندسه را بررسی‌کنیم. اثبات خواهیم کرد که منعکس هر شکل در این هندسه، وقتی که خط اسمی بر دایرهٔ انعکاس منطبق باشد، تبدیلی است دارای همهٔ سرشتهای بازتاب حول خط، مشروط به‌آن که تعریفهای ما از خط اسمی و زاویهٔ اسمی مراعات شوند.

فرض کنید که دایرهٔ به مرکز O (شکل ۱۱۴) دایرهٔ بنیادین، و AB خط اسمی باشند. پس AB قوسی است از دایره‌ای عمود بردایرهٔ بنیادین؛ مرکز آن را C می‌نامیم. هرگاه P نقطه‌ای اسمی و P' منعکس آن نسبت به دایرهٔ به مرکز C باشند، آنگاه خط اسمی PP' قوسی از دایره‌ای است‌که نه تنها بر دایرهٔ بنیادین بلکه بر دایرهٔ به مرکز C نیز عمود است. به بیان دیگر خط اسمی PP' عمود است بر خط اسمی AB. حالا باید ثابت کنیم‌که پاره‌خط اسمی PP' بوسیلهٔ خط اسمی AB نصف می‌شود.

فرض کنید که دایره‌ای که خط اسمی PP' برآن است دایرهٔ بنیادین را در S و T و خط اسمی AB را در M قطع کند. آسان می‌توان دیدکه S و T نسبت به دایرهٔ به مرکز C منعکسند. پس

$$PT / P'S = CT / CP'$$

و



شکل ۱۱۴

$$P'T / PS = CP' / CS$$

بقسمی که

$$\frac{PT}{P'S} \cdot \frac{P'T}{PS} = \frac{CT}{CS}$$

اما از آنجا که

$$MT / MS = CM / CS = CT / CM$$

می‌بینیم که

$$MT^2 / MS^2 = CT / CS$$

و در نتیجه

$$\frac{PT}{P'S} \cdot \frac{P'T}{PS} = \frac{MT^2}{MS^2}$$

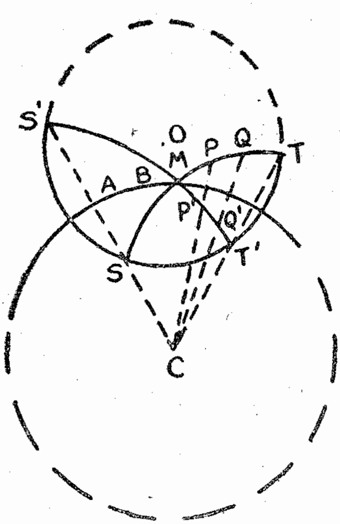
بنابراین

$$\log\frac{PT}{PS} / \frac{MT}{MS} = \log\frac{MT}{MS} / \frac{P'T}{P'S}$$

و طولهای رسمی پاره‌خطهای اسمی PM و P'M برابرند.

نتیجه می‌گیریم که منعکس هر نقطهٔ اسمی نسبت به دایره‌ای که خطی اسمی برآن واقع است ممکن است بازتاب آن نقطه محسوب شود وقتی که آن خط اسمی محور بازتاب فرض شود. حالا تعیین خواهیم کرد که چگونه منعکس یك پاره خط اسمی نسبت به چنان دایره‌ای با خود آن پاره‌خط مربوط است.

فرض‌کنید دایرهٔ به مرکز O (شکل ۱۱۵) دایرهٔ بنیادی و AB یك خط اسمی دلخواه، باشند. بازهم انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز C را که AB برآن است در نظر می‌گیریم. هرگاه PQ پاره‌خطی اسمی باشد دایره‌ای که این خط برآن قرار دارد به دایرهٔ دیگری عمود بر دایرهٔ بنیادی تبدیل می‌شود، بطوری که پاره‌خط اسمی PQ به پاره‌خط اسمی P'Q' تبدیل می‌گردد. بعلاوه اگر خط اسمی PQ خط اسمی AB را در نقطه‌ای چون M قطع کند خط اسمی P'Q' هم خط AB را در همان نقطه قطع می‌کند و با آن همان زاویه را می‌سازد. از این‌گذشته، چنان که نشان خواهیم داد، طول پاره‌خط اسمی PQ مساوی است با طول P'Q' اعم از این‌که PQ و AB تقاطع کنند یا نکنند.



شکل ۱۱۵

فرض‌کنید دایره‌ای که خط اسمی PQ برآن قرار دارد دایرهٔ بنیادی را در S و T قطع‌کند، و دایره‌ای که P'Q' برآن قرار دارد آن دایره را در S' و T' تلاقی نماید. دراین صورت S و S' منعکس‌یکدیگرند، همچنین T و T'. بآسانی می‌توان نشان دادکه

$$PT / P'T' = CT / CP' ،$$

$$P'S' / PS = CP' / CS ،$$

$$QT / Q'T' = CT / CQ' ،$$

و

$$O'S' / QS = CQ' / CS$$

به نحوی که

$$\log \frac{PT}{PS} / \frac{QT}{QS} = \log \frac{P'T'}{P'S'} / \frac{Q'T'}{Q'S'}$$

پس نتیجه می‌گیریم که با این انعکاس طول اسمی محفوظ می‌ماند. در نتیجه، در هندسهٔ خطهای اسمی می‌توانیم بازتابی را که محورش یك خط اسمی باشد انعکاسی بدانیم نسبت به دایره‌ای که آن خط برآن قرار دارد. تغییر مکان در این هندسه ممکن است با یك رشته از این بازتابها اجرا شود، درست مانند هندسهٔ هذلولوی. این تغییر مکانها نه در زاویه‌ها تغییر می‌دهند و نه درطول پاره‌خطها؛ و درنتیجه اندازه وشکل اسمی محفوظ

می‌مانند.

نتیجه آن که تعریف ما از طول اسمی همهٔ شرایطی را که در صورت کامل بودن شباهت با مفهوم طول در هندسهٔ اقلیدسی لازم می‌آمد برآورده می‌سازد. اکنون که طول اسمی و تغییرمکان را تعریف کردیم هرحکم هندسهٔ هذلولوی همتایی در هندسهٔ اسمی دارد.

تمرین

۱. ثابت کنید که در هندسهٔ خطهای اسمی مثلثهای مشابه وجود ندارند؛ یعنی هرگاه سه زاویهٔ مثلثی اسمی با سه زاویهٔ مثلث اسمی دیگری برابر باشند دو مثلث همنهشتند.

۲. قطر ST از دایرهٔ بنیادی را خطی اسمی انگاشته ثابت کنید که هرگاه P نقطه‌ای واقع براین قطر باشد که فاصله‌اش از D واحد باشد، آنگاه $PS / PT = e$، که درآن $k = 1$. این واحد OP را می‌توان برای مقایسه بکار برد؛ هر پاره‌خط واحد دیگری را می‌توان براثر تغییر مکان برآن منطبق ساخت.

۳. مقایسهٔ بین این هندسهٔ اسمی و هندسهٔ هذلولوی را بسط داده ثابت کنید که زاویه‌های توازی متناظر با فاصله‌های نابرابر نابرابرند و هرچه زاویه کوچکتر باشد فاصله متناظر با آن بزرگتر است.

۴. نشان دهید که بر روی قطری از دایرهٔ بنیادی‌که خطی اسمی انگاشته شود چگونه می‌توان فاصلهٔ اسمی متناظر با زاویهٔ توازی مفروضی را ساخت.

۱۰۳. همتاهای دایره‌ها و منحنیهای حدی و منحنیهای همفاصله

در هندسهٔ هذلولوی دایره را بـه‌صورت مسیر عمودی دسته‌ای از خطوط نگریسته بودیم‌که رأسش نقطه‌ای عادی باشد. چون دسته‌ای از خطوط اسمی‌که رأسشان یك‌نقطهٔ اسمی باشد عبارت است از دستگاه دایره‌های هم‌محورکه برآن نقطه و منعکس‌آن نسبت به دایرهٔ بنیادی می‌گذرند، همتاهای دوایر در هندسهٔ اسمی عبارتند ازدوایر عمود براین دستگاه و واقع در درون دایرهٔ بنیادی. این‌گونه دایره‌ها بر دایرهٔ بنیادی عمود نیستند، پس خطهای اسمی نمی‌بـاشند. آنها دایره‌های اسمیند بدین معنی که هر یك مکان هندسی نقاطی است به فاصلهٔ ثـابتی از رأس یك دسته خط اسمی و این رأس مرکز اسمی است. اثبات آن که این شعاعهای اسمی متساویند بدین نحو میسر است که دستهٔ خطها چنان تغییر مکان داده شودکه رأسش برمرکز دایرهٔ بنیادی قرارگیرد. در نتیجهٔ این تغییر مکان دستگاه دایره‌های هم محور دسته‌ای از خطها می‌شودکه برمرکز می‌گذرند، و مسیرهای عمودی دستگاهی ازدایره‌های هم‌مرکز می‌شوندکه شعاعهایشان آشکارا برابر یکدیگرند.

دراین هندسه منحنیهای حدی نیز با دایره‌ها نموده می‌شوند. زیرا که دسته خطهای اسمی متوازی عبارت است از دستگاه دایره‌های هم محور از نوع مماس عمود بر دایرهٔ

بنیادی که هر یك بر دایره‌های دیگر در نقطه‌ای از دایرهٔ بنیادی مماس است. مسیرهای عمودی چنین دسته‌ای دایره‌هایی هستند در درون دایرهٔ بنیادی ومماس برآن درآن‌نقطه. اینها خطهای اسمی نیستند زیرا که دایرهٔ بنیادی را به زاویهٔ قائمه قطع نمی‌کنند. دایرهٔ اسمی هم نیستند زیرا کـه بسته نیستند. هر یك را می‌توان دایره‌ای با شعاع نامتناهی انگاشت کـه مرکزش در نقطهٔ اسمی وهمی است که در آن با دایرهٔ بنیادی تماس پیدا می‌کند.

در پایان مطلب دستگاهی ازخطهای اسمی را در نظر می‌گیریم که همه بر خط اسمی مفروضی عمود باشند. این خطها بـردستگاه دایره‌های هم‌محور عمود بردایرهٔ بنیادی و نیز عمود بر دایره‌ای‌که خط مفروض برآن قرار دارد، و نقطه‌های برخورد آن دو دایره نقطه‌های حدی آن هستند. دایره‌های عمود براین دستگاه هم‌محور، یعنی دایره‌هایی که برآن دو نقطهٔ حدی می‌گذرند منحنیهای اسمی همفاصله‌اند. واضح است‌که این منحنیها نه دایره‌های اسمی هستند و نـه منحنیهای حدی اسمی زیرا کـه کاملاً درداخل دایرهٔ بنیادی قرار ندارند.

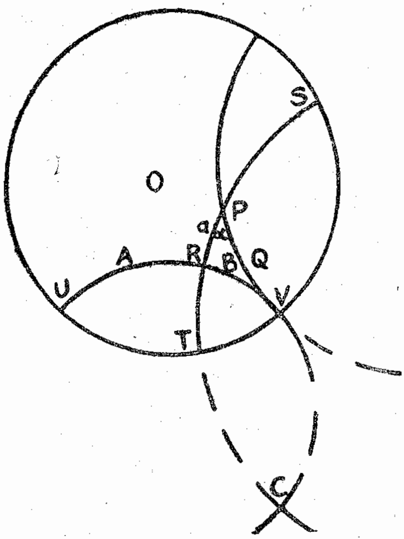
۱۰۴. رابطهٔ بین فاصلهٔ اسمی و زاویهٔ توازی آن

تاکنون آنقدر درگسترش هندسهٔ خطهای اسمی پیش رفته‌ایم‌که خواننده را به‌کمال شباهت آن به هندسهٔ هذلولوی متقاعد سازیم. بسط بیشتری از جنبهٔ منطقی زاید است. در حقیقت پیش از این لازم نیست‌که یك تناظر یك به یك بین آنچه دردو هندسه موجود است برقرارکرد وبه‌شباهت بین تعریفها واصل موضوعهای یکی با از آن دیگری پی‌برد. اما برای حسن ختام جالب توجه خواهد بود کـه رابطهٔ بین یك فـاصلهٔ اسمی و زاویهٔ توازی متناظر با آن را نتیجه بگیریم.

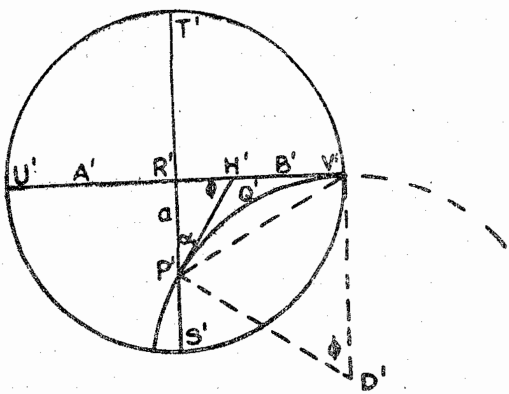
دایرهٔ به مرکز O (شکل ۱۱۶) را دایرهٔ بنیادی بگیرید. P را نقطه‌ای اسمی و AB را خطی‌اسمی‌انگارید چنان‌که دایره‌ای‌که خط‌برآن است دایرهٔ بنیادی را درU و V قطع کند؛ PQ را خطی اسمی موازی با AB بگیرید که برP بگذرد و دایرهٔ حامل‌آن‌با خط AB در V مماس بـاشد، و PR خطی اسمی مار بر P و عمود بر AB باشد که دایرهٔ حـامل آن دایرهٔ بنیادی را در S و T تلاقی نماید، طول اسمی PR را با a و اندازهٔ زاویه اسمی تـوازی RPQ را بـا α نشان دهید. واحد معمولی زاویه بکار رفته است.

منعکس شکل را نسبت به دایره‌ای پیدا کنیدکـه مرکزش نقطهٔ C محل برخورد دایره‌هـای حامل AB و PR، و واقع در خارج دایرهٔ بنیادی بـوده خودش بر دایرهٔ

بنیادی عمود باشد. این دایرهٔ انعکاس منطبق است بر یك خط اسمی، و بدین ترتیب انعکاس موجب یك تغییر مکان اسمی می‌شود. نتیجهٔ انعکاس در شکل ۱۱۷ نشان داده شده است. دایرهٔ بنیادی همان می‌ماند که بود. خطهای اسمی عمود برهم AB و PR به دو خط عمود برهم $A'B'$ و $P'R'$ و عمود بر منعکس دایرهٔ بنیادی، و در نتیجه مار بر مرکز آن، تبدیل می‌شوند. موازی PQ تبدیل می‌شود به دایره‌ای به مرکز D' و مار بر P' و عمود برمنعکس دایرهٔ بنیادی و مماس بر $A'B'$ در V'. در این بازتاب اسمی زاویه‌ها و طولها تغییر نکرده‌اند، پس اگر $P'H'$ خط مماس بر دایرهٔ به مرکز D' در نقطهٔ P' باشد زاویهٔ $R'P'H'$ مساوی است با α و پاره‌خط اسمی $P'R'$ مساوی است با a. زاویهٔ $R'H'P'$ را، که در آن H' نقطهٔ برخورد مماس $P'H'$ با $A'B'$ است، با φ نشان دهید. توجه کنید که اندازهٔ زاویهٔ $P'D'V'$ نیز φ است.



شکل ۱۱۶



شکل ۱۱۷

آنگاه چون برای نشان‌دادن طول اسمی دستوری را که متضمن پارامتر است بکار ببریم:

$$a=k\log\frac{PT}{PS}/\frac{RT}{RS}=k\log\frac{P'T'}{P'S'}/\frac{R'T'}{R'S'}=k\log\frac{P'T'}{P'S'}$$

اما از آنجا که

$$\varphi=\frac{\pi}{۲}-\alpha$$

و

$$\angle R'V'P'=\frac{\varphi}{۲}$$

می‌بینیم که

$$\frac{P'R'}{r}=\tan\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۲}\right)$$

که در آن r شعاع دایرهٔ بنیادی است، بقسمی که

$$P'T'=r\left[۱+\tan\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۲}\right)\right]$$

و

$$P'S'=r\left[۱-\tan\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۲}\right)\right]$$

نتیجه آن که

$$a=k\log\cot\frac{\alpha}{۲}$$

یـا

$$e^{-a/k}=\tan\frac{\alpha}{۲}$$

دستوری که دقیقاً شبیه است به دستور متناظر آن در هندسهٔ هذلولوی.

۱۰۵. پایان سخن

موردی برای اثبات سازش‌پذیربودن دستگاه اصلهای موضوع هندسهٔ بیضوی در اینجا نیست. چند اثبات از این نوع وجوددارند. مثلاً یکی، که خیلی شبیه است به آنچه گفتیم، هندسهٔ بیضوی را باهندسه‌ای اسمی مقایسه می‌کند که اقلیدسی است ودرآن خطهای اسمی عبارتند از دایره‌هایی که دایرهٔ ثابتی را چنان قطع می‌کنند که وتر مشترکشان قطر دایرهٔ بنیادی است[۱]. اما روشهای آسانتری هم هستند که برپایه‌ای چنین مقدماتی قرارندارند. طرح مختصری از آزمون سازگاری هندسهٔ هذلولوی، که کامل کردیم، برای ظاهر ساختن ماهیت و روح این گونه استدلالها کافی است.

پس نتیجه می‌گیریم که هر یك ازسه هندسه به اندازهٔ دو هندسهٔ دیگر سازگاراست. کاملاً متقاعد هستیم که در هندسه‌های هذلولوی و بیضوی تناقضی نیست، همچنان که در هندسهٔ اقلیدسی وجود ندارد. و دربارهٔ سازگار بـودن هندسهٔ اقلیدسی بـه اندازه‌ای مطمئن هستیم که دربارهٔ هر آیین استدلالی می‌توان بود.

اکنون آشکار است که چرا هر تلاشی بـرای اثبات اصل موضوع توازی اقلیدس محکوم به شکست بود. این اصل موضوع را هرگز نمی‌توان ثابت کرد زیرا که اثبات آن در حکم طرد اصلهای موضوع تـوازی در هندسه‌های نااقلیدسی است کـه به همان اندازه سازگارند.

---

۱. ← کارسلا، *Elements of Non-Euclidean Plane Geometry and Trigonometry* ص۱۷۱-۱۷۴.

ذیل

۱. بنیاد هندسهٔ اقلیدسی[1]

۱. تعریفهای کتاب یکم

۱. نقطه آن است که هیچ جزء ندارد.
۲. خط درازایی است بی‌پهنا.
۳. انتهاهای هر خط نقطه‌اند.
۴. خط راست آن است که هموار قرار می‌گیرد و نقطه‌ها برآن قرار دارند.
۵. سطح آن است که فقط درازا و پهنا دارد.
۶. انتهاهای صفحه خطند.
۷. سطح مستوی (هاصنی) آن است که صاف قرار می‌گیرد وخطها برآن قرار دارند.
۸. زاویهٔ مستوی (هاصنی) میل دوخط واقع دریك صفحه نسبت به یکدیگر است که یکدیگر را قطع می‌کنند و بر یك خط راست واقع نیستند.
۹. وقتی که خطهایی که زاویه را می‌سازند بریك خط راست باشند زاویه مستقیم‌الخط نامیده می‌شود.

۱۰. وقتی که خط راستی بر خط راست دیگر وارد شود و دو زاویهٔ مجاوری که می‌سازد مساوی باشند هر یك از دو زاویهٔ متساوی قائمه است و خطی کـه بر دیگری

---

۱. از سیزده کتاب اصول اقلیدس (*The Thirteen Books of Euclid's Elements*) تـرجمه‌ای از کتاب Heiberg با مقدمه و شرح بتوسط Thomas L. Heath. بـا اجازهٔ شرکت مك‌میلن (Macmillan Company) بـه نمایندگـی انتشارات دانشگـاه کـمبریـج، (Cambridge University Press)

وارد شده است عمود برآن خط نامیده می‌شود.

۱۱. زاویهٔ منفرجه زاویه‌ای است بزرگتر از زاویهٔ قائمه.

۱۲. زاویهٔ حاده زاویه‌ای است کوچکتر از زاویهٔ قائمه.

۱۳. مرز آن است که حد هرچیز است.

۱۴. شکل آن است که محتوا در یك مرز یا چند مرز باشد.

۱۵. دایره شکل‌مسطحی‌است محتوا دریك خط‌چنان‌که همه خطهای‌راستی که ازیك نقطه ازنقاط واقع در درون دایره به نقاط آن خط منتهی می‌شوند با یکدیگر برابرند.

۱۶. و آن نقطه را مرکز دایره گویند.

۱۷. قطر هر دایره هر خط راستی است‌که بر مرکز دایره بگذرد و در دو طرف به محیط دایره محدود شود، و چنین خط راستی دایره را هم نصف می‌کند.

۱۸. نیمدایره شکلی است محدود بین قطر و محیط دایره‌که بوسیلهٔ آن قطر قطع شده است. مرکز نیمدایره همان مرکز دایره است.

۱۹. شکلهای مستقیم‌الخطوط آنهایی هستند که به‌خطهای راست محدودشده‌اند. شکل سه پهلو آن است‌که به سه خط محدود شده باشد؛ شکل چهار پهلو به چهارخط، و شکل چند پهلو به بیشتر از چهار خط محدود شده‌اند.

۲۰. از شکلهای سه پهلو مثلث متساوی‌الاضلاع (راست پهلو) آن‌است که سه ضلعش با هم برابر باشند؛ مثلث متساوی‌الساقین (راست پای) آن است که دو ضلعش با هم برابر باشند؛ مثلث نامشخص سه ضلع نابرابر دارد.

۲۱. بعلاوه از شکلهای سه پهلو مثلث قائم‌الزاویه آن است‌که یك زاویهٔ قائمه دارد؛ مثلث منفرج‌الزاویه آن است‌که یك زاویهٔ منفرجه دارد؛ مثلث حادالزوایا آن‌است که هر سه زاویه‌اش حاده باشند.

۲۲. از شکلهای چهارپهلو مربع آن است که هم ضلعهایش باهم برابر باشند و هم زاویه‌هایش قائمه؛ مستطیل آن است که زاویه‌هایش قائمه باشند اما ضلعهایش برابر نباشند؛ لوزی آن است‌کـه اضلاعش برابر باشند اما زاویه‌هایش قائمه نباشند؛ متوازی‌الاضلاع آن است‌که ضلعهای روبرویش با هم، و زاویه‌های روبرویش نیز باهم مساوی باشند اما نه متساوی‌الاضلاع باشد و نـه قائم‌الزاویه؛ چهار ضلعیهای غیر از اینها را ذوزنقه بخوانیم.

۲۳. خطهای راست متوازی خطهایی هستند که در یك صفحه واقعند و اگر آنها را به‌طور نامتناهی امتداد دهیم در هیچ طرف تقاطع نمی‌کنند.

۲. اصلهای موضوع

این احکام را به‌صورت اصل موضوع درمی‌آوریم:

۱. رسم خطی از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر.

۲. امتداد دادن خط راست متناهی به‌طور نامتناهی به‌صورت خط راست.

۳. ترسیم دایره با هر مرکز و هر شعاع.

۴. این که همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

۵. این که اگر خط راستی دو خط راست دیگر را قطع کند و زاویه‌های داخلی که در یك طرف آن خط هستند کمتر از دو قائمه باشند، اگر آن دو خط راست به‌طور متناهی امتداد داده شوند در همان طرفی که زاویه‌هایش کمتر از دو قائمه‌اند تلاقی می‌کنند.

۳. مفهومهای متعارف

۱. چیزهایی که با یك چیز برابر باشند با یکدیگر برابرند.

۲. اگرمقدارهای متساوی به‌مقدارهای متساوی افزوده شوند مجموعها متساویند.

۳. اگر مقدارهای متساوی از مقدارهای متساوی کسر شوند تفاضلها متساویند.

۴. چیزهایی که بر یکدیگر منطبق شوند با یکدیگر برابرند.

۵. کل بزرگتر است از هر جزء خود.

۴. چهل و هشت گزارهٔ کتاب یکم

۱. بر روی یك خط راست متناهی مثلثی متساوی‌الاضلاع ساخته شود.

۲. از یك نقطه (به‌عنوان انتهای خط) خط راستی مساوی با خط راست مفروضی ساخته شود.

۳. هرگاه دو خط راست نامساوی داده شده باشد بر خط بزرگتر خطی مساوی کوچکتر جدا شود.

۴. هرگاه دو مثلث دو ضلع بترتیب مساوی با دو ضلع داشته باشند و زاویهٔ بین خطهای مساوی آنها نیز مساوی باشند، قاعدهٔ یکی نیز با قاعدهٔ دیگری مساوی خواهد بود، دو مثلث با هم برابر خواهند بود، و بقیه زاویه‌ها بترتیب با بقیهٔ زاویه‌ها مساوی خواهند بود، یعنی آنهایی که روبرو هستند به ضلعهای متساوی.

۵. درمثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های قاعده باهم برابرند، و اگر دو ضلع‌مساوی امتداد داده شوند زاویه‌های زیر قاعده با یکدیگر برابر خواهند بود.

۶. اگر در مثلثی دو زاویه مساوی باشند ضلعهای مقابل به زاویه‌های متساوی

نیز متساویند.

۷. اگر دو خط راست بر یك خط راست (یعنی در دو انتهای آن) ساخته شوند و یکدیگر را در نقطه‌ای قطع کنند، ممکن نیست برهمان خط راست (از دو انتهای آن) دو خط راست دیگر رسم کرد که در نقطهٔ دیگری تلاقی کنند و با دو خط قبلی بترتیب مساوی باشند، یعنی هر یك با خطی مساوی باشدکه با آن بریك انتها می گذرد.

۸. اگر دو مثلث دو ضلع بترتیب مساوی با دو ضلع داشته باشند، و قاعده هم با قاعده مساوی باشد زاویه‌های آنها که بین خطهای راست متساوی واقعند باهم برابرند.

۹. نصف کردن یك زاویهٔ مستقیم‌الخطوط.

۱۰. نصف‌کردن یك خط راست متناهی.

۱۱. رسم خطی به زاویهٔ قائمه بر خطی دیگر از یك نقطهٔ واقع براین خط.

۱۲. رسم خطی عمود بر یك خط راست از نقطه‌ای‌که برآن نیست.

۱۳. اگـر خط راستی بر خط راست دیگر وارد شود یا بـا آن دو زاویهٔ قائمه می‌سازد یا دو زاویه می‌سازد که مجموعشان مساوی دو قائمه است.

۱۴. اگر بر نقطهٔ واقع برخط راستی دو خط راست بگذرندکه در یك طرف آن‌خط نباشند و هر دو با خط دو زاویه مجاور مساوی بـا دو زاویهٔ قائمه بسازند آن دو خط راست با یکدیگر بر یك خط راست خواهند بود.

۱۵. هرگاه دو خط راست تقاطع‌کنند زاویه‌های متقابل بـه رأس متساوی تشکیل می‌دهند.

۱۶. در هر مثلث اگرضلعی امتداد داده شود زاویهٔ خارجی بزرگتر است از هریك از دو زاویهٔ داخلی مقابل آن.

۱۷. در هرمثلث هر دو زاویه به‌هر وضع باهم‌گرفته شوندکمتر هستند از دوقائمه.

۱۸. در هر مثلث ضلع بزرگتر روبروی زاویهٔ بزرگتر است.

۱۹. در هر مثلث زاویهٔ بزرگتر روبروی ضلع بزرگتر است.

۲۰. در هر مثلث هر دو ضلع بـه هر وضع‌که باهم گرفته شوند بزرگتر هستند از ضلع باقیمانده.

۲۱. اگر از دو انتهای یك ضلع مثلث دو خط رسم شوند که یکدیگر را در داخل مثلث قطع کنند خطهای مستقیمی که به این نحو ساخته می‌شوند کـوچکترند از دو ضلع دیگر مثلث، اما زاویهٔ بزرگتری تشکیل می‌دهند.

۲۲. با سه‌خط راست، که مساوی بـاشند باسه خط راست مفروض، مثلثی ساخته شود: بدین ترتیب لازم است که دو تا از خطها به هر صورت کـه بـا هم‌گرفته شوند

بزرگتر باشند از خط سوم

۲۳. بر روی خط راستی و از یك نقطهٔ واقع برآن زاویه‌ای ساخته شود مساوی با زاویهٔ مستقیم‌الخطوط معین.

۲۴. اگردومثلث‌دوضلع بترتیب‌مساوی بادوضلع داشته‌باشنداما یکی اززاویه‌های بین خطهای متساوی‌بزرگتر باشد اززاویهٔ دیگر، قاعدهٔیکی‌بزرگترخواهدبود ازقاعدهٔ دیگری.

۲۵. اگر دو مثلث دو ضلع بترتیب مساوی با دوضلع داشته باشند اما قاعدهٔیکی بزرگتر باشد از قاعدهٔ دیگری زاویهٔ بین دو ضلع مساوی یکی نیز بزرگتر خواهد بود از دیگری.

۲۶. اگر دو مثلث دو زاویهٔ بترتیب مساوی با دو زاویه داشته باشند، ویك ضلع یکی مساوی بایك ضلع دیگری باشد، خواه ضلعی‌که مجاور به دو زاویهٔ متساوی است و خواه ضلعی که روبروی یکی از دو زاویهٔ متساوی باشد، ضلعهای دیگر یکی مساوی خواهند بود با ضلعهای دیگر دیگری، و زاویهٔ دیگر یکی نیزمساوی خواهد بود با زاویهٔ دیگر دیگری.

۲۷. اگرخط راستی بر دوخط راست دیگر وارد شود و زاویه‌های متبادل متساوی بسازد، آن دو خط متوازیند.

۲۸. اگرخط‌راستی بردوخط‌راست‌وارد شود و زاویهٔ خارجی‌که می‌سازدمساوی‌باشد با زاویهٔ داخلی و مقابل و در همان طرف، یا اگر دو زاویهٔ داخلی در یك طرف مساوی باشند با دو قائمه، خطهای راست باهم موازی خواهند بود.

۲۹. اگر خط راستی بردوخط متوازی واردشود زاویه‌های متناوب باهم مساوی خواهند بود، زاویهٔ خارجی مساوی خواهد بود با زاویهٔ داخلی مقابل آن، و دو زاویهٔ داخلی در یك طرف مساوی خواهند بود با دو قائمه.

۳۰. خطهای راست موازی با یك خط راست با یکدیگر نیز موازیند.

۳۱. رسم خطی از یك نقطه موازی با خط راست مفروض.

۳۲. اگر در هر مثلث ضلعها امتداد داده شوند زاویهٔ خارجی مساوی است با دو زاویهٔ داخلی مقابل آن و سه زاویهٔ داخلی مثلث مساوی هستند با دو قائمه.

۳۳. خطهای راستی کـه دو خط راست متساوی و متوازی (انتهای آنها) را که دریك جهت هستندبترتیب به‌هم وصل‌کنند خودشان متساوی و متوازیند.

۳۴. در پهنه‌ای بـه شکل متوازی‌الاضلاع ضلعهای روبرو بـا هم و زاویه‌های روبرو با هم متساویند و قطر پهنه را نصف می‌کند.

۳۵. متوازی‌الاضلاعهایی که بر یك قاعده وبر دو خط متوازی معین ساخته شوند باهم برابرند.

۳۶. متوازی‌الاضلاعهایی که بر قاعده‌های متساوی و بر دو خط متوازی معین ساخته شوند با هم برابرند.

۳۷. مثلثهایی که بر روی یك قاعده و بر دو خط متوازی معین ساخته شوند با هم برابرند.

۳۸. مثلثهایی که بر قاعده‌های متساوی و بر دوخط متوازی معین ساخته شوند با هم برابرند.

۳۹. مثلثهای متساوی که بر یك قاعده و در یك طرف قاعده ساخته شده باشند بر دو خط متوازی معینند.

۴۰. مثلثهای متساوی که برقاعده‌های متساوی و دریك طرف ساخته شده‌باشندنیز بر دو خط متوازی معینند.

۴۱. اگر متوازی‌الاضلاعی ومثلثی بر یك قاعده باشند و بر دو خط متوازی معین ساخته شده باشند متوازی‌الاضلاع دو برابر مثلث است.

۴۲. در زاویـهٔ مستقیم‌الخطوط مفروضی متوازی‌اضلاعی ساخته شود مساوی با مثلث مفروضی.

۴۳. درهرمتوازی‌الاضلاع متممهای متوازی‌اضلاعهای‌حول قطر بایکدیگر برابرند.

۴۴. با خط مستقیم مفروضی در زاویـهٔ مستقیم‌الخطوط معین متوازی‌الاضلاعی مساوی مثلث مفروضی ساخته شود.

۴۵. در زاویهٔ مستقیم‌الخطوط مفروضی متوازی‌الاضلاعی مساوی با شکل مستقیم-الخطوط معین ساخته شود.

۴۶. بر خط راست معینی مربعی بنا شود.

۴۷. در مثلث قائم‌الزاویه مربعی که بر ضلع روبروی زاویهٔ قـائمه ساخته شود برابر است با مربعهایی‌که بر ضلعهای زاویهٔ قائمه ساخته شوند.

۴۸. اگر در مثلثی مربعی که بر یکی از ضلعها بنا شود مساوی باشد با مربعهایی کـه روی دو ضلع دیگر ساخته می‌شوند زاویه‌ای کـه بین دو ضلع دیگر مثلث است قائمه است.

۲. تابعهای مستدیر و هذلولیی

۵. تابعهای مثلثاتی

فرض این‌است‌که دانشجو با رشته‌های توانی نامتناهی‌ذیل،آشنا است، یعنی با بسط

ماکلورنی تابع توانی e^x و تابعهای مثلثاتی، یا باصطلاح متداول، تابعهای مستدیر $\sin x$ و $\cos x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

یادآوری می‌شود که همهٔ این رشته‌ها همگرا هستند و هر یك به ازای هر مقدار حقیقی x تابعی از x را مشخص می‌کند. ما این رشته‌ها را به‌عنوان تعریف تابعهای e^x و $\sin x$ و $\cos x$ می‌پذیریم. این محدودیت ما را از قیود متعددی که از تعریفهای خاص در مثلثات مقدماتی می‌شدند می‌رهاند. مثلاً $\sin x$ دیگر لزوماً نمایش نسبت دو ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن x حاده است، و x^2 نمایندهٔ پهنهٔ مربعی به ضلع x است، نیست. در حقیقت، در تابعهای $\sin x$ و $\cos x$، از دیدگاه‌کلی، x عددی است مجرد و زاویه نیست. هرگاه آن را اندازهٔ زاویه بگیریم فقط موردهای خاصی ازکاربرد تعریف ما نتیجه می‌شود.

می‌دانیم‌که این رشته‌ها را می‌توان باهم جمع، ازهم تفریق، درهم ضرب، و برهم تقسیم‌کرد، و حاصل عمل نیزبه‌ازای همهٔ مقدارهای x همگرا خواهد بود مگرمقدارهایی که وقتی عمل تقسیم انجام شود به ازای آنها مخرج (یا مقسوم‌علیه) میل‌کند به‌طرف صفر. این رشته‌ها را می‌توان جمله جمله دیفرانسیلگیری و انتگرالگیری کرد. بدین ترتیب می‌توانیم رشته‌های توانی نامتناهی برای تابعهای دیگر مثلثاتی بنویسیم، مثلاً

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{15} + \dots$$

از روی این تعریفهای‌کلی همهٔ خواص معروف تابعهای مثلثاتی را می‌توان نتیجه‌گرفت، از قبیل

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

و چون $\sec x$ مطابق تعریف $\frac{۱}{\cos x}$ است:

$$\sec^۲ x - \tan^۲ x = ۱$$

آزادی تازه‌ای که یافته‌ایم به‌ما مجال می‌دهد که مفهومهای e^x و $\sin x$ و $\cos x$ و $\tan x$ را، حتی به‌حالتی که x عددی موهومی باشد، بسط دهیم. بدین‌ترتیب هرگاه $x = a + bi$، کـه در آن a و b دو عدد حقیقی و $i = \sqrt{-۱}$، مثلاً $\sin(a+bi)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\sin(a+bi) = (a+bi) - \frac{(a+bi)^۳}{۳!} + \frac{(a+bi)^۵}{۵!} + \ldots$$

از این دیدگاه وسیعتر درمی‌یابیم که اتحادها و رابطه‌های مثلثاتی نه‌فقط برای شناسه‌های حقیقی، بلکه برای موهومی نیز معتبرند.

از موارد بسیار جالب علاقه حالتهایی هستندکه در آنها x موهومی‌صرف است. بخصوص:

$$e^{xi} = ۱ + xi + \frac{(xi)^۲}{۲!} + \frac{(xi)^۳}{۳!} + \frac{(xi)^۴}{۴!} + \frac{(xi)^۵}{۵!} + \frac{(xi)^۶}{۶!} + \ldots$$

$$= (۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \ldots) + (x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \ldots)i$$

یا

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

و از راه مشابه

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

از این دو نتیجه دستورهای شایان توجه زیرین حاصل می‌شوند

$$\sin x = (e^{xi} - e^{-xi}) / ۲i$$
$$\cos x = (e^{xi} + e^{-xi}) / ۲$$

این دو دستور را هم می‌توان به‌عنوان تعریف دیگری برای $\sin x$ و $\cos x$ بکار برد. با استفاده از اینها همه دستورها و رابطه‌های آشنای تابعهای مثلثاتی را می‌توان نتیجه گرفت.

۶. تابعهای هذلولوی

دو دستور آخر قسمت پیشین دو تابع جدید x القا می‌کنندکه جیب هذلولوی x و جیب تمام هذلولوی x نامیده می‌شوند و چنین تعریف می‌گردند:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$$

وابسته به این دو تابع چهار تـابع دیگر داریم: ظل و ظل تمام و قاطع و قاطع تمام هذلولوی، با این تعریفها:

$$\tanh x = \sinh x / \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱}$$

$$\operatorname{sech} x = ۱ / \cosh x \quad \operatorname{csch} x = ۱ / \sinh x \quad \coth x = ۱ / \tanh x$$

با مراعات روش قسمت پیشین می‌توانیم تعریفهایـی بر حسب رشته‌های توانی برای تابعهای هذلولوی بدست‌آوریم، بدین ترتیب که در دستورهای بالا به‌جای e^x و e^{-x} رشته‌های توانی قرار دهیم. نتیجه می‌شود

$$\sinh x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \frac{x^۷}{۷!} + \ldots$$

$$\cosh x = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \frac{x^۶}{۶!} + \ldots$$

شباهت این رشته‌ها بارشته‌های مبین $\sin x$ و$\cos x$ رابطهٔ ساده‌ای بین‌تابعهای مستدیر و هذلولوی به‌ذهن القا می‌کند. اگر در رشته‌های توانی مبین $\sin x$ و $\cos x$ به جای x قرار دهیم xi، نتیجه می‌گیریم

$$\sin xi = i \sinh x \quad ، \quad \cos xi = \cosh x$$

و از آنها نتیجه می‌گیریم

$$\tan xi = i \tanh x \quad ، \quad \cot xi = -i \coth x$$

$$\csc xi = -i \operatorname{csch} x \quad ، \quad \sec xi = i \operatorname{sech} x$$

بدین ترتیب تابعهای هذلولوی ممکن است بوسیلهٔ تابعهای توانی، و رشته‌های توانی نامتناهی، و تابعهای مستدیر تعریف شوند. از هریك از این دیدگاهها می‌توان دستورها و رابطه‌های بین تابعهای هذلولوی شبیه بـه دستورها و رابطه‌های تابعهای مستدیر بدست آورد. پس با شروع از اتحاد آشنای

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$$

با گذاشتن xi به جای i بدست می‌آید

$$\sin^۲ xi + \cos^۲ xi = ۱$$

یـا

$$(i \sinh x)^۲ + \cosh^۲ x = ۱$$

که سرانجام می‌شود

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

از سوی دیگر این اتحاد را می‌توان با قراردادن صورتهای توانی تـابعهای هذلولوی بدست آورد، بدین ترتیب

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1$$

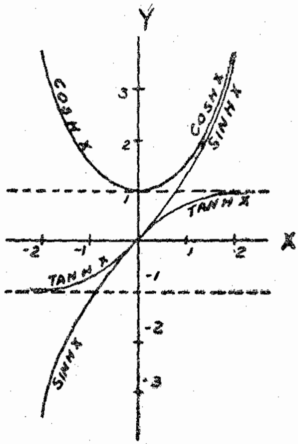
یا با استفاده از بسط رشته‌ها:

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots\right)^2-\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)^2=1$$

رابطه‌های دیگری را می‌توان در فهرست تمرینها یافت.

دستورهـای بـرای دیـفرانسیلگیری از تابعهای هذلولوی هم‌اکنون معلوم است. مثلاً بـا دیفرانسیلگیری از $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ یا از رشتهٔ $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$ یا از $\frac{\sin xi}{i}$ بدست می‌آید

$$\frac{d\sinh x}{dx}=\cosh x$$



شکل ۱۱۸

در شکل ۱۱۸ نمودارهای تابعهای $\sinh x$ و $\cosh x$ و $\tanh x$ رسم شده‌اند. منحنی جیب تمام هذلولوی زنجیری است که با آن آشناییم.

یك حد مهم، یعنی

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sinh u}{u}=1$$

را می‌توان از راههای متعدد تحقیق کـرد. مثلاً روش حساب فاضل (دیفرانسیل) برای برآورد صورتهای باصطلاح نامعین ممکن است بکار برده شود. به‌جای $\sinh u$ می‌توان رشتهٔ نامتناهی را قرارداد، یا آن را به‌صورت تابع توانی بیان کرد، یا $\sinh u/u$ را می‌توان نوشت $\sin i u/iu$ و بعد به حد رفت.

۷. تابعهای هذلولوی معکوس

هرگاه $y=\sinh x$، آنگاه می‌توان x را به‌صورت تابعی از y بیان کرد. می گوییم

x معکوس جیب هذلولوی y است، و می‌نویسیم

$$x = \sinh^{-1} y$$

به همین نحو متناظر با هر تابع هذلولوی دیگر یك تابع هذلولوی معکوس وجود دارد.

چون تابعهای هذلولوی برحسب تابعهای توانی قابل بیان هستند باید انتظار داشت که تابعهای هذلولوی معکوس را بتوان برحسب لگاریتم نمایش داد. مثلاً، اگر $y = \sinh^{-1} x$، آنگاه

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

یا

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

و از آن روی

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

علامت منها را حذف کردیم به‌دلیل آن‌که وقتی y حقیقی باشد e^y مثبت است، بقسمی‌که

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

عبارتهای نمایندهٔ معکوس جیب تمام هذلولوی و معکوس ظل هذلولوی را در فهرست تمرینها می‌توان یافت.

بار دیگر هرگاه $y = \sinh^{-1} x$، داریم

$$x = \sinh y$$

و

$$dx / dy = \cosh y$$

و از آنجا

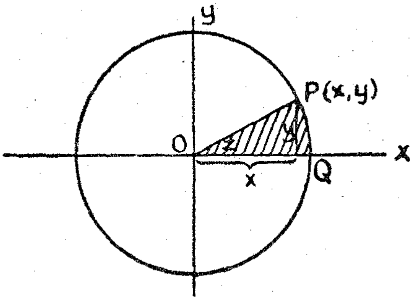
$$dy / dx = 1 / \cosh y = 1 / \sqrt{1 + \sinh^2 y}$$

علامت مثبت را با ریشگی بکار برده‌ایم، چون وقتی که y عددی حقیقی باشد $\cosh y$ مثبت است. بدین ترتیب

$$\frac{d \sinh^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

این نتیجه را می‌توان با دیفرانسیل گرفتن از عبارت $\sinh^{-1} x$ برحسب x که بالا نتیجه گرفته شده بدست آورد. دستورهای دیگری برای دیفرانسیلگیری در پایین خواهند آمد.

۸. تعبیر هندسی تابعهای مستدیر و هذلولوی

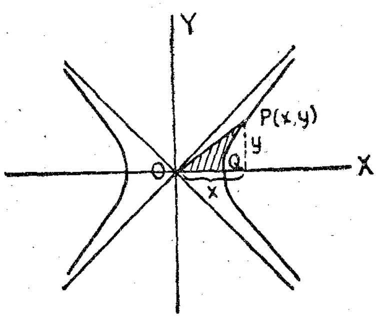


شکل ۱۱۹

معادله‌های $x=\cos z$ و $y=\sin z$ را می‌توان معادلهٔ پارامتری دایرهٔ به شعاع واحد $x^۲+y^۲=۱$ انگاشت. پارامتر z معمولاً از جنبهٔ هندسی به اندازهٔ زاویهٔ مرکزی POQ تعبیر می‌شود (شکل ۱۱۹). آموزنده خواهد بود که در ارتباط با بررسی تابعهای هذلولوی این پارامتر را به راه دیگری تعبیر کنیم: وآن دو برابر پهنهٔ قطاع دایره‌ای است که بوسیلهٔ شعاع OP مفروش می‌شود وقتی که P از نقطهٔ Q به نقطهٔ (x ، y) تغییر مکان دهد. اعتبار این تعبیر بآسانی تحقیق می‌شود، زیرا که

$$\text{پهنهٔ قطاع} = \frac{z}{۲\pi} \cdot \pi = \frac{z}{۲}.$$

اکنون به‌تابعهای هذلولوی بازگشته از راه مقایسه پیشنهاد می‌کنیم که معادله‌های $x=\cosh z$ و $y=\sinh z$ را معادلهٔ پارامتری هذلولی متساوی‌المحورین $x^۲-y^۲=۱$ انگاریم، و نشان دهیم که z را می‌توان به دوبرابر اندازهٔ پهنهٔ قطاع هذلولویی تعبیر کرد که بوسیلهٔ بردار OP (شکل ۱۲۰) مفروش می‌شود وقتی که P روی هذلولی از Q تا هر نقطهٔ (x ،y) حرکت کند.



شکل ۱۲۰

$$\text{پهنهٔ قطاع} = \frac{xy}{۲} - \int_{۱}^{x} y\,dx$$

$$= \frac{\cosh z \sinh z}{۲} - \int_{۰}^{z} \sinh^{۲} z\, dz$$

$$=\frac{\cosh z \sinh z}{2}-\int_0^z \frac{\cosh 2z-1}{2}\,dz$$

$$=\frac{\cosh z \sinh z}{2}-\left[\frac{\sinh 2z}{4}-\frac{z}{2}\right]_0^z$$

$$=\frac{\cosh z \sinh z}{2}-\frac{\cosh z \sinh z}{2}+\frac{z}{2}=\frac{z}{2}$$

تمرین

صحت این رابطه‌ها را تحقیق کنید:

۱. (آ) $\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1$

(ب) $\coth^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1$

(ج) $\sinh x+\cosh x=e^x$

۲. (آ) $\sinh (x\pm y)=\sinh x \cosh y\pm\cosh x \sinh y$

(ب) $\cosh (x\pm y)=\cosh x \cosh y\pm\sinh x \sinh y$

(ج) $\tanh (x\pm y)=(\tanh x\pm\tanh y) / (1\pm\tanh x \tanh y)$

۳. (آ) $\sinh 2x=2\sinh x \cosh x$

(ب) $\cosh 2x=\sinh^2 x+\cosh^2 x=1+2 \sinh^2 x=2 \cosh^2 x-1$

(ج) $\tanh^2 x=2 \tanh x / (1+\tanh^2 x)$

۴. (آ) $\sinh \frac{x}{2}=+\sqrt{\frac{\cosh x-1}{2}}$

(ب) $\cosh \frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\cosh x+1}{2}}$

(ج) $\tanh \frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}}$

۵. (آ) $\sinh x+\sinh y=2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

(ب) $\sinh x-\sinh y=2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

(ج) $\cosh x+\cosh y=2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

(د) $\cosh x-\cosh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$

۶. (آ) $\sinh(-x)=-\sinh x$

(ب) $\cosh(-x)=\cosh x$

(ج) $\tanh(-x)=-\tanh x$

۷. (آ) $\frac{d\cosh x}{dx}=\sinh x$

(ب) $\frac{d\tanh x}{dx}=\operatorname{sech}^2 x$

(ج) $\frac{d\coth x}{dx}=-\operatorname{csch}^2 x$

(د) $\frac{d\operatorname{sech} x}{dx}=-\operatorname{sech} x\tanh x$

(ه) $\frac{d\operatorname{csch} x}{dx}=-\operatorname{csch} x\coth x$

۸. $\lim_{u\to 0}\frac{\tanh u}{u}=1$

۹. $\tanh x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\dots$

۱۰. (آ) $\cosh^{-1}x=\pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

(ب) $\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$

۱۱. (آ) $\frac{d\cosh^{-1}x}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(ب) $\frac{d\tanh^{-1}x}{dx}=\frac{1}{1-x^2}$

۱۲. (آ) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C$

(ب) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$

(ج) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}\ \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+C$

۱۳. (آ) $\sinh(\circ)=\circ$

(پ) $\cosh(\circ)=1$

(ج) $\sinh \frac{1}{2}=0{,}521$

(د) $\lim_{x\to\infty} \tanh x=1$

(ه) $\cosh \frac{1}{5}=?$

۳. نظریهٔ دایره‌های عمود برهم و موضوعهای وابسته

۹. قوت نقطه نسبت به دایره

خوب می‌دانیم که هرگاه از نقطه‌ای چون P واقع در صفحهٔ دایره‌ای خط قاطعی بگذرانیم که دایره را در A و B قطع کند حاصل ضرب PA.PB ثابت است. حاصل‌ضرب مثبت یا صفر یا منفی است برحسب آن‌که P بیرون دایره یا روی آن یا در درون آن باشد. وقتی‌که P بیرون دایره باشد حاصل‌ضرب مساوی است با مربع فاصلهٔ مماسی آن تا دایره. این مقدار ثابت را قوت نقطه نسبت به دایره می‌نامیم. آنگاه اگر O مرکز، و r شعاع دایره باشند

$$\text{قوت } P=(PO+r)(PO-r)=\overline{PO}^2-r^2$$

۱۰. محور اصلی دو دایره

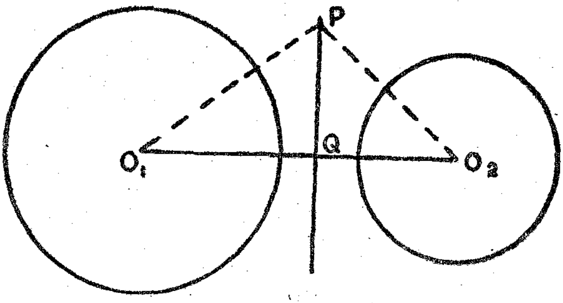
قضیهٔ ۱. هرگاه نقطه‌ای چنان حرکت کند کـه قوتش نسبت به یکی از دو دایره همیشه مساوی باشد با قوتش نسبت بـه دایرهٔ دیگر، مکان هندسی آن خط راستی است عمود بر خط مرکزهای دو دایره.

گیریم P نقطه‌ای باشد که قوتهای مساوی داشته باشد نسبت به دو دایره به مرکزهای O_1 و O_2 و شعاعهای r_1 و r_2 (شکل ۱۲۱). آنگاه اگر PQ عمود بـر O_1O_2 رسم شود، داریم

$$\overline{PO_1}^2-\overline{QO_1}^2=\overline{PO_2}^2-\overline{QO_2}^2$$

و

$$\overline{QO_1}^2-\overline{QO_2}^2=(\overline{PO_1}^2-r_1^2)-(\overline{PO_2}^2-r_2^2)+r_1^2-r_2^2$$



شکل ۱۲۱

یا

$$(\overline{QO_1}+\overline{QO_2})(\overline{QO_1}-\overline{QO_2})=r_1^2-r_2^2$$

چون حاصل‌ضرب عاملهای سمت چپ مقدار ثابتی است و یکی از آنها مساوی O_1O_2 است پس عامل دیگر هم مقداری ثابت است، همچنین مجموع و تفاضل آنها. نتیجه آن که وقتی‌که P چنان تغییر مکان دهد که قوتهایش نسبت به دو دایره مساوی بمانند پای عمودی که از آن بر O_1O_2 فرود آید ثابت است و بدین ترتیب P برروی خط راستی است عمود بر O_1O_2. آسان می‌توان ثابت کرد که هر نقطهٔ این خط نسبت به دودایره یك قوت دارد.

خطی‌که مکان هندسی نقاطی است‌که قوتهایشان نسبت به دو دایره برابرند محور اصلی دو دایره نامیده می‌شود.

فرع. اگر دودایره متقاطع باشند محوراصلی‌آنها خطی است‌که نقطه‌های‌تقاطعشان را به هم وصل می‌کند؛ هرگاه برهم مماس باشند محور اصلی آنها مماس مشترك آنها است‌که بر نقطهٔ تماس می‌گذرد.

قضیهٔ ۲. محورهای اصلی سه دایره، دو به دو، عموماً متقاربند.

اثبات به خواننده محول می‌شود.

نقطهٔ تقارب محورهای اصلی‌سه‌دایره، دوبه‌دو، مرکز اصلی سه‌دایره نامیده‌می‌شود. خاصیت آن این است‌که قوت آن نسبت به هر سه دایره یکی است. قضیهٔ ۲ روش‌آسانی برای ترسیم محور اصلی دو دایرهٔ نامتقاطع فراهم می‌آورد. برای بدست آوردن یك نقطه از محور اصلی آنها کافی است دایره‌ای رسم‌کرد که هر دو را قطع‌کند؛ دومحور

اصلی که بدین نحومعین می‌شوند عموماً یکدیگر را روی محور اصلی مطلوب قطع می کنند.

نقطه را می‌توان دایره‌ای به شعاع ۰ انگاشت. نتایجی کـه در بالا بدست آمدند برای دایره ـ نقطه‌ها هم معتبر هستند. پس قوت یك نقطه نسبت به یك دایره ـ نقطه مربع فاصلهٔ بین دو نقطه است؛ محور اصلیِ یك دایره با یك نقطهٔ واقع برآن که در آن بچشم دایره نقطه نگریسته شود مماس بـرآن دایره در آن نقطه است؛ محور اصلی دو دایره‌ـ نقطه عمودمنصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه است.

۱۱. دایره‌های عمود برهم

وقتی دو دایره یکدیگر را قطع کنند و مماسهای بر دو دایره در یکی از نقطه‌های تقاطع برهم عمود باشند می گوییم دودایره متعامداً تقاطع کرده‌اند، و هر یك بر دیگری عمود است. بنابرتقارن در چنین وضعی مماسهای بر نقطهٔ دیگر تقاطع دو دایره نیزبرهم عمود خواهند بـود. از این تعریف بر می‌آید کـه دو دایره وقتی، و فقط وقتی، برهم عمودند که مماس بر هر یك در نقطهٔ تقاطعشان بر مرکز دیگری بگذرد. پس مرکز هر یك از دو دایره باید در خارج دیگری باشد.

قضیه. هرگاه دو دایره برهم عمود باشند مربع شعاع هر یك مساوی است با قوت مرکز آن نسبت به دایرهٔ دیگر. بعکس، هرگاه قوت مرکز دایره‌ای نسبت به دایرهٔ دیگر مساوی مربع شعاعش باشد دو دایره برهم عمودند.

خواننده باید دلیل را اقامه کند. پس چنین می‌نماید کـه هر نقطهٔ خارج دایره‌ای می‌تواند مرکز دایره‌ای باشد عمود برآن؛ شعاع آن مساوی فاصلهٔ مماسی نقطه ازدایرهٔ مفروض است. برای آن که دایره‌ای بر دو دایره عمود باشد باید مرکز آن برمحوراصلی دو دایره قرار داشته باشد.

هرگاه سه دایره، چنان‌که حالت عمومی است، فقط یك مرکز اصلی داشته باشند و این مرکز بیرون دایره‌ها باشد، یك و فقط یك، دایره می‌توان رسم کرد که برآن هرسه عمود بـاشد. مرکز آن مرکز اصلی سه دایره و شعاعش فـاصلهٔ مماسی مشترك آن از آنهاست.

هر نقطهٔ واقع بردایره‌ای را می‌تـوان دایره‌ای انگاشت‌که برآن عمود باشد. در نتیجه درمی‌یابیم کـه بر هر نقطه تعدادی نامتناهی دایره می‌توان گذراند که بر دایرهٔ مفروضی عمود باشند، مشروط به آن که آن نقطه مرکز دایره نباشد. اما معمولاً بر یك نقطه فقط یك دایره می‌توان مرور داد که بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشند. حالت استثنا

وقتی پیش می‌آید که نقطه تا مرکزهای دو دایره بـرروی یك خط راست باشند؛ در این وضع بر نقطه هیچ دایرهٔ عمود بر دو دایره نمی‌گذرد مگر این‌که دو دایره مماس باشند و نقطه نقطهٔ تماس آنها باشد که در این صورت تعداد دوایری کـه می‌توان رسم کرد نامتناهی است. بر دو نقطه معمولاً فقط یك دایره می‌گذرد کـه بر دایرهٔ مفروضی عمود باشد، مگر وقتی‌که دو نقطه با مرکز دایره بر یك خط راست باشند؛ در این صورت هیچ دایرهٔ عمود برآن دایره برآن دونقطه نمی‌گذرد مگر این‌که دونقطه در یك طرف‌مرکز، و چنان باشندکه حاصل‌ضرب فاصله‌های مرکز از آن دونقطه مساوی مربع شعاع دایره باشد، که در این صورت همهٔ دایره‌هایی‌که برآن دو نقطه بگذرند برآن دایره عمودند، زیرا که قوت مرکز آن نسبت به همهٔ آن دایره‌ها مساوی است با مربع شعاعش.

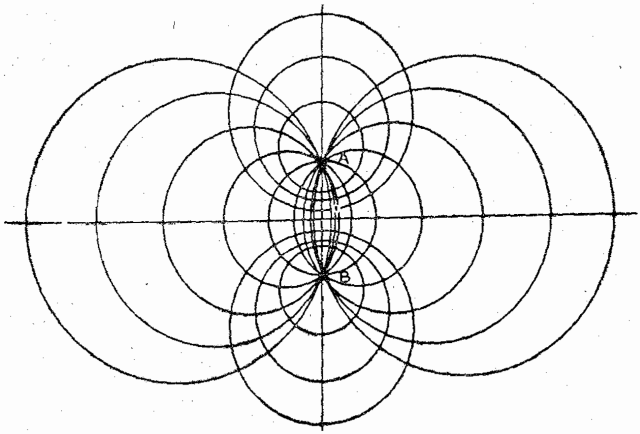
۱۲. دستگاههای دایره‌های هم‌محور

دستگاهی از دوایر را که محور اصلی هر دو تای آنها با محور اصلی هر دوتای دیگر آنها یکی باشد دستگاه دایره‌های هم‌محود نـامند. در نتیجهٔ این تعریف باید واضح باشدکه مرکزهای همهٔ دایره‌های دستگاه هم‌محور روی خطی قرار دارند عمود برمحور مشترك آنها، و هر نقطهٔ این محور نسبت بـه همهٔ آنها دارای یك قوت است و دایرهٔ عمود بر هر دو دایرهٔ دستگاه برهمهٔ دایره‌های دستگاه عمود است. دو دایرهٔ دستگاه هم‌محور دستگاه را مشخص می‌سازند؛ اگر دو دایرهٔ دستگاه داده شده باشند هر دایرهٔ دیگر آن را می‌توان ساخت.

سه نوع دستگاه هم‌محور وجود دارند: متقاطع، مماس، نامتقاطـع. اگر دودایرهٔ دستگاه در نقطه‌های A و B (شکل ۱۲۲) تقاطع‌کنند همهٔ دایره‌های دستگاه براین دو نقطه می‌گذرند؛ دستگاه دستگاه متقاطع نـامیده می‌شود. اگر دستگاه دایره‌هایی ساخته شود که هر یك برهمهٔ دایره‌های این دستگاه متقاطع عمود باشد دستگاه هم‌محور دیگری نتیجه می‌شود. زیرا که هر دایرهٔ دستگاه اول عمود است بر هرجفت از دایره‌های دستگاه جدید، وموجب می‌شودکه خط مرکزهای دستگاه قدیم محورمشترك دستگاه جدید باشد.

دستگاه جدید ازنوع نامتقاطـع است، زیرا که هیچ دایرهٔ عمود بردودایرهٔ متقاطع نمی‌تواند خط مرکزهـای آنها را قطع نماید. اگر دو نقطهٔ تقاطع دستگاه متقاطع مانند دو دایره ـ نقطه انگاشته شوند متعلق به‌دستگاه نامتقاطع خواهند بود. آنها را نقطه‌های حدی دستگاه اخیر می‌نـامند. همهٔ دایره‌های عمود بـر دایره‌های یك دستگاه هم‌محور نامتقاطع برنقطه‌های حدی این دستگاه می‌گذرند و دستگاه هم‌محور متقاطعی می‌سازند.

دستگاه همهٔ دایره‌های مماس بریك خط در یك نقطه دستگاه هم‌محور نوع مماس



شکل ۱۲۲

را تشکیل می‌دهند. دایره‌های عمود بر همهٔ دایره‌های چنین دستگاهی دستگاه هم‌محور دیگری از همین نوع بوجود می‌آورند.

تمرین

۱. در چه شرایطی دو دایره محور اصلی ندارند؟ چه وقت سه دایره مرکز اصلی ندارند؟ چه وقت سه دایره تعدادی نامتناهی مرکز اصلی می‌توانند داشت؟

۲. دایره‌ای بسازید که بر نقطهٔ مفروضی بگذرد و بر دایرهٔ مفروضی عمود باشد.

۳. دایره‌ای را که بر دو نقطه می‌گذرد و بر دایرهٔ مفروضی عمود است رسم کنید. با چه شرایطی ترسیم میسر نیست؟ چه وقت بیشتر از یك دایره می‌توان کشید؟

۴. دایره‌ای را که بر یك نقطه می‌گذرد و بر دو دایرهٔ مفروض عمود است رسم کنید.

۵. ثابت کنید که اگر دو دایره تقاطع کنند و هریك بر دایرهٔ سومی عمود باشد یکی از نقاط تقاطع داخل و دیگری خارج دایرهٔ سوم است.

۶. ثابت کنید که هرگاه دو نقطه C و D قطر AB از دایرهٔ به مرکز O را بر یك نسبت اضافی و نقصانی تقسیم کنند آنگاه $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$.

۷. ثابت کنید که دایره‌ای عمود بر دو دایرهٔ مفروض خط مرکز آنها را قطع می‌کند، برآن مماس است، یا با آن نقطهٔ مشترك ندارد برحسب آن که، بترتیب، آن دو دایره متقاطع نباشند، مماس باشند، یا متقاطع باشند.

۴. اصول انعکاس

۱۳ . انعکاس

در صفحهٔ دایره‌ای به مرکز O و شعاع r نقطه‌ای چون P اختیار کنید. بر روی OP نقطه‌ای چون P' بسازید چنان‌که $OP \cdot OP'=r^2$. نقطه‌های P و P' نقطه‌های منعکسند، و چون رابطه متقابل است هر یك از آنها را عکس دیگری گویند. دایره را دایرهٔ انعکاس، O را مرکز انعکاس و r^2 را ثابت انعکاس نامند. بدین‌ترتیب بامیانجیگری دایره یك تناظر یك به یك بین نقاط صفحه برقرار شده است؛ برای هر نقطه، جز مرکز انعکاس، یك نقطهٔ متناظر وجود دارد.

هرگاه در انعکاس به عنوان یك تبدیل در صفحه بنگریم چنین می‌نماید که هر نقطهٔ درون دایره به‌یك نقطهٔ بیرون دایره تبدیل می‌شود؛ و بعکس. نقاط دایرهٔ انعکاس ثابتند. هرگاه نقطهٔ متحرکی از صفحه منحنی پیوسته‌ای ترسیم کند منعکس آن نقطه نیز منحنی پیوسته‌ای ترسیم می‌کند که منعکس اولی نامیده می‌شود. هرگاه منحنی دایرهٔ انعکاس را قطع کند منعکس آن نیز درهمان نقطه، یا نقاط، دایرهٔ انعکاس را قطع می‌کند. دایره انعکاس به‌طور مطلق ثابت است. خطهای راستی هم‌که بر مرکز انعکاس بگذرند درتبدیل انعکاس ثابت می‌مانند، هرچند نقاط به‌نحو دیگری برآنها توزیع می‌شوند. ازآنچه پیشتر گفته شده است باید واضح باشد که هر دایرهٔ عمود بردایرهٔ انعکاس نیز در تبدیل انعکاس ثابت می‌ماند. زیرا که قوت مرکز انعکاس نسبت به چنین دایره‌ای r^2 است.

قضیه. هرگاه A و A'، و B و B' دو جفت نقاط منعکس باشند که بر روی یك قطر دایرهٔ انعکاس واقع نباشند، آنگاه آنها برروی یك دایره، قرار دارند و زاویه‌های OAB و OBA، بترتیب، مساویند با زاویه‌های $OB'A'$ و $OA'B'$

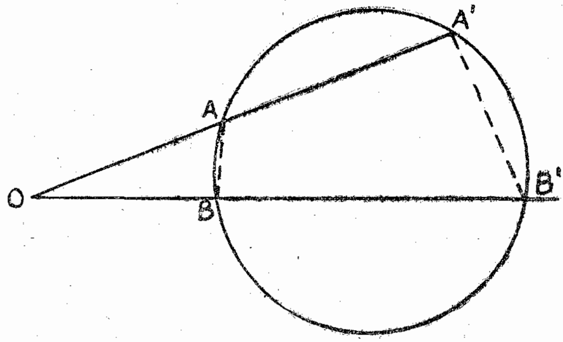
هرگاه A و A'، و B و B' (شکل ۱۲۳)[1] جفتهای نقاط منعکس، و O مرکز انعکاس باشند، آنگاه

$$OA \cdot OA'=OB \cdot OB'$$

که ایجاب می‌کند کـه A و A' و B و B' روی یك دایره باشند در این صورت آسان می‌توان دید کـه زاویه‌های OAB و $OB'A'$ متساویند؛ همچنین زاویه‌های OBA و $OA'B'$.

---

۱. غالباً زحمت رسم دایرهٔ انعکاس کشیده نمی‌شود.

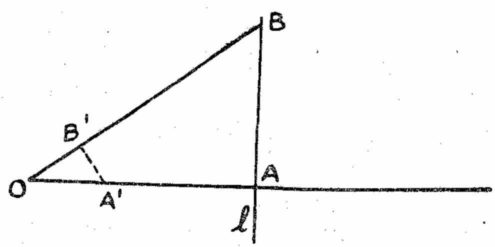


شکل ۱۲۳

۱۴. منعکس دایره و منعکس خط

اگرچه خطهایی که بر مرکز انعکاس بگذرند به خودشان تبدیل می‌شوند معمولاً هر خطی به خط تبدیل نمی‌گردد. قضیهٔ ذیل را بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۱. هر خط راستی که بر مرکز انعکاس نگذرد به دایره‌ای تبدیل می‌شود که بر مرکز انعکاس می‌گذرد.

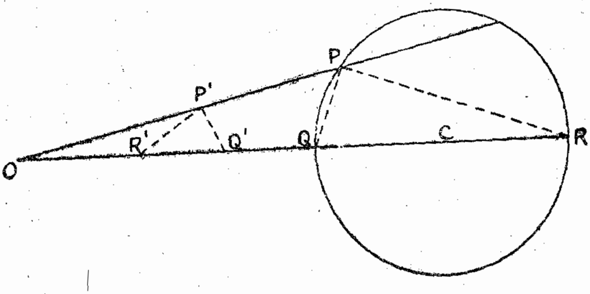


شکل ۱۲۴

فرض کنیم l (شکل ۱۲۴) خطی باشد که بر O مرکز انعکاس نمی‌گذرد. عمود OA را بر l فرود می‌آوریم. فرض می‌کنیم A' منعکس A و B' منعکس نقطهٔ دیگر B از l باشند. آنگاه چون زاویهٔ OAB قائمه است زاویهٔ $OB'A'$ نیز چنین است. پس وقتی که B بر l تغییر مکان دهد B' بر دایره‌ای به قطر OA' حرکت می‌کند. استدلال را می‌توان بآسانی معکوس کرد.

قضیهٔ ۲. هر دایره که بر قطب انعکاس نگذرد تبدیل به دایره می‌شود.

فرض کنید C (شکل ۱۲۵) مرکز دایرهٔ دلخواهی باشد که بر O، مرکز انعکاس، نگذرد. OC را رسم کنید تا دایره را در Q و R قطع کند. فرض کنید P نقطهٔ دیگری

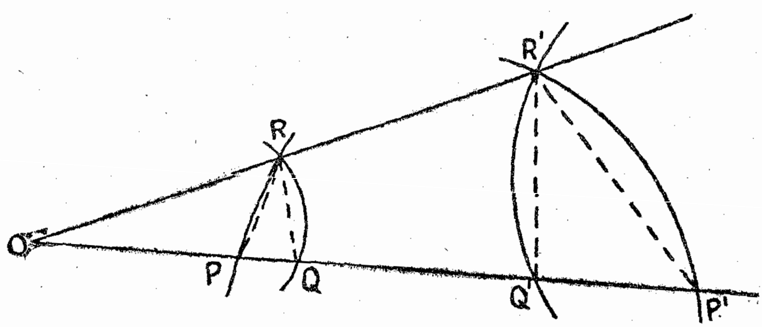


شکل ۱۲۵

از دایره باشد. منعکسهای نقاط P و Q و R را، بترتیب P' و Q' و R' بنامید. چون زاویه‌های $OP'Q'$ و OQP برابرند و نیز زاویه‌های $OP'R'$ و ORP مساویند نتیجه می‌شود که زاویهٔ $R'P'Q'$ برابر است با زاویهٔ QPR؛ اما زاویهٔ اخیر همیشه قائمه است زیرا که P بر دایره حرکت می‌کند. پس زاویهٔ $R'P'Q'$ قائمه است و P' بر دایره‌ای سیر می‌کند به قطر $R'Q'$. باید توجه داشت که مرکز این دایره منعکس C نیست.

۱۵. تأثیر انعکاس بر زاویه‌ها

اکنون به دو منحنی PR و QR توجه می‌کنیم که در R تقاطع کرده باشند (شکل ۱۲۶) و نقاط P و Q با O مرکز انعکاس روی یك خط راست باشند. آنگاه منحنیهای منعکس $P'R'$ و $Q'R'$ در R' منعکس R تقاطع می‌کنند. برای خواننده زحمتی نخواهد بود که ثابت کند که زاویه‌های PRQ و $Q'R'P'$ متساویند. وقتی که P بر منحنی PR پیوسته تغییر مکان دهد و به R نزدیك شود قاطع PR درحد به‌مماس



شکل ۱۲۶

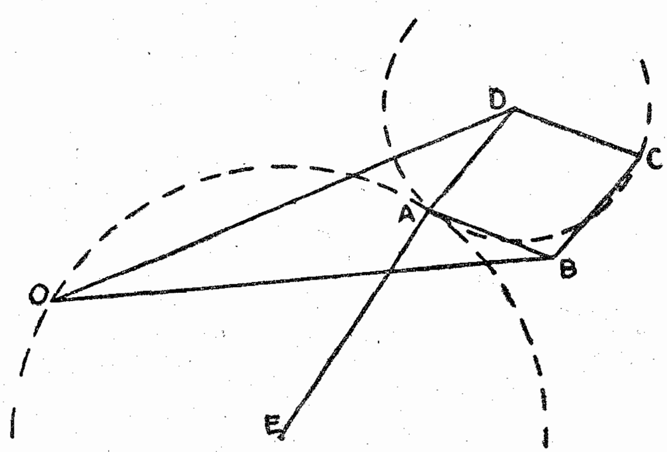
بر منحنی PR در R نزدیك می‌گردد. در همان زمان Q به R نزدیك می‌شود و قاطع QR به طرف مماس برمنحنی QR در R میل می‌کند، در حالی‌که P′R′ و Q′R′ به مماسهای بر منحنیهای منعکس در R′ نزدیك می‌گردند. چون در حالی که P به R نزدیك می‌شود زاویه‌های PRQ و Q′R′P′ همیشه با هم مساویند در حد نیز مساوی خواهند بود. بدین ترتیب کشف می‌کنیم که زاویهٔ دو منحنی با زاویهٔ بین منعکسهای آن دو منحنی یکی است. به‌بیان دیگر انعکاس زاویه‌ها را محفوظ می‌دارد. به این‌گونه تبدیل زاویه نگهدار گفته می‌شود.

قضیه. انعکاس تبدیلی است زاویه نگهدار.

---

۱۶. عاکس پوسلیه

هر چند آنچه می‌خواهیم بگوییم بـا پژوهش ما ارتباط خاصی ندارد نباید خلاصهٔ کوتاهی را که از نظریهٔ انعکاس آوردیم بی‌اشاره بـه اسباب زیبایی که برای ساختن منعکس یك شکل با روش مکانیکی بکار می‌رود به‌پایان بریم. این وسیله که به عاکس پوسلیه معروف است از شش میله تشکیل شده است. چهار میلهٔ AB و BC و CD و DA (شکل ۱۲۷) با هم برابرند و بـه یکدیگر مفصل شده‌اند تا یك لوزی بوجود آورند. دو میلهٔ متساوی دیگر در O بـه یکدیگر، و در B و D به دو رأس مقابل لوزی، مفصل شده‌اند. آسان می‌تـوان دید که O و B و C همواره بر یك خط راست قرار دارند. بعلاوه، اگر دایرهٔ بـه مرکز D کـه بر A و C می‌گذرد رسم شود واضح



شکل ۱۲۷

است که

$$OA \, . \, OC = (OD - DA)(OD + DA) = \overline{OD}^2 - \overline{DA}^2$$

بطوری که C منعکس A است بـا مرکز انعکاس O و ثابت انعکاس $OD^2 - DA^2$.
پس هرگاه O در صفحه در نقطه‌ای ثـابت بماند و A برروی منحنیی جا به جا شود C منعکس آن منحنی را رسم خواهد کرد.

شاید چشمگیرترین کاربـرد این اسباب استفاده از آن برای تبدیل حرکت مستدیر به خط راست یا، چنان که غالباً گفته می‌شود، بـه حرکت راست خط بـاشد. هرگاه با افزودن میلهٔ هفتمی بـه لوزی در نقطهٔ A و بـه یك نقطهٔ ثابت E از صفحه، نقطهٔ A ملزم به حرکت بر روی دایره‌ای به مرکز E شود کـه بر O بگذرد، آنگاه C در طول خطی راست جا به جا خواهد شد.

بنابر اصل موضوع اقلیدس می‌توان دایره‌ای به هر مرکز و با هر شعاع ساخت؛ و نیز می‌توان خط راست کشید. خواننده بـا اسبابی آشناست کـه از جنبهٔ نظری برای رسم دایره کامل است. در اینجا، شاید برای اولین بار با اسبابی برای رسم خط راست آشنا می‌شود. خط‌کش، یا سطاره، کـه خواننده با آن آشناست الگویی است که باید به محاذات آن رسم کرد و ملازمه دارد با این که قبلاً خط راستی رسم شده باشد.

پوسلیه، که سروانی در ارتش فرانسه بود، در اطلاعیه‌ای که در ۱۲۴۳/۱۸۶۴ در نوول‌آنال (دورهٔ دوم، جلد هشتم، ص ۴۱۴ - ۴۱۵) منتشر کرد مسألهٔ تبدیل حرکت مستدیر به حرکت راست خط را با وسیلهٔ ترسیم پیشنهاد نمود و اعلام داشت که خودش برای این کار راه حلی دارد. اطلاعیهٔ او خیلی کم جلب توجه کرد و شاید اصلاً نکرد. در حقیقت وقتی که لیپکین روسی آن وسیله را بار دیگر کشف کرد افتخار کشف نصیب او شد. اما موضوع بعداً اصلاح گردید. از آن پس چند عاکس تعبیه شده‌اند که بعضی از آنها چهار میله دارد. پس می‌توان با اسبابی مرکب از پنج میله، به‌جای هفت میله، حرکت مستدیر را به مستقیم تبدیل کرد.

تمرین

۱. هرگاه A و A′ منعکس باشند ثابت کنید که هر دایره‌ای که بر آنها بگذرد بر دایرهٔ انعکاس عمود است.

۲. هرگاه A و A′، و B و B′ دو جفت نقاط منعکس بـاشند و O مرکـز و r^2 ثابت انعکاس فرض شوند، ثابت کنید که

$$AB = (r^2 / OA' \, . \, OB') \, . \, A'B'$$

۳. هرگاه دو دایره برهم عمود باشند ثـابت کنید کـه منعکس مرکز یکی وقتی که

دیگری دایرهٔ انعکاس فرض شود منطبق است بر منعکس مرکز دومی وقتی که اولی را دایرهٔ انعکاس بگیریم.

۴. نشان دهید که دایرهٔ انعکاس را چگونه اختیار کنیم تا هر یک از سه دایرهٔ مفروض به خود آن تبدیل شود. با چه شرایطی این کار ناممکن است؟

۵. منعکس یک دستگاه دوایر هم‌محور متقاطع چیست وقتی که یکی از نقاط تقاطع را مرکز انعکاس و هر طول دلخواه را شعاع انعکاس انگاریم؟

۶. ثابت کنید که هرگاه دو دایرهٔ متقاطع بر دایرهٔ سومی عمود باشند نقاط تقاطع آنها نسبت به آن دایرهٔ سوم منعکس یکدیگرند.

۷. هرگاه دایره‌ای به مرکز C بر دایرهٔ انعکاس به‌مرکز O عمود باشد و OC آن را در P و Q و دایره انعکاس رادر P′ و Q′ قطع کند ثابت کنید که P′ مزدوج توافقی Q است نسبت به P و Q.

۸. هرگاه سه دایره در یک نقطه مشترک باشند، با استفاده از انعکاسی که نقطه‌تقاطع دایره‌ها مرکز انعکاس باشد ثابت کنید که چهار دایره می‌توان رسم کرد که برآن سه‌دایره مماس باشند.

۹. با تبدیل مثلث در انعکاسی به مرکز دلخواه ثابت کنید که مجموع زاویه‌های مثلث دو قائمه است.

۱۰. دو دایره در O و P تقاطع می‌کنند، مماسهایی که بر آنها در O رسم شوند بار دیگر دایره‌ها را در A و B قطع می‌کنند. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث OAB امتداد OP را درQ قطع می‌کند بقسمی‌که $OQ = ۲OP$. با تبدیل P نسبت بهO حکم را ثابت کنید.

۱۱. هرگاه موربی دو خط متوازی را قطع کند با آنها جفتهای زوایای متناظر متساوی می‌سازد. شکل مرکب از دو متوازی و مورب را نسبت به هر مرکز انعکاس تبدیل کنید و قضیه عکس را، یعنی قضیهٔ متناظر با شکل عکس را، بدست آورید.

۱۲. به کمک انعکاس ثابت کنید که عموماً یک، و فقط یک، دایره می‌توان بر دو نقطهٔ مفروض مرور دادکه بردایرهٔ مفروضی عمود باشد. یکی ازآن دو نقطه را مرکز انعکاس گرفته شکل را تبدیل کنید.

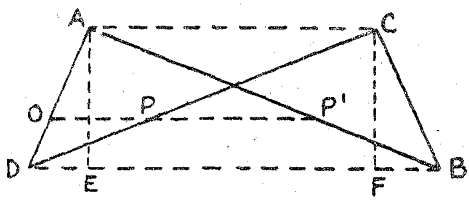
۱۳. هرگاه O و A و B و C روی یک دایره باشند زاویه‌های AOC و ABC متساوی یا مکمل یکدیگرند. شکل را به مرکز O منعکس کنید و قضیهٔ عکس را بیان نمایید.

۱۴. ثابت کنید که همهٔ دایره‌های مماس بر یک دایرهٔ ثابت و عمود بر دایرهٔ ثابت دیگر بر دایرهٔ ثابت سومی مماس خواهند بود.

۱۵. زاویه‌ای به اندازهٔ ثابت حول نقطهٔ ثابت P دوران می‌کند و اضلاعش خط ثابتی

را در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که دایره‌های محیط بر مثلث PQR بر دایرهٔ ثابتی مماس هستند.

۱۶. چهارمیله به یکدیگر مفصل شده‌اند تا اسبابی مطابق شکل ۱۲۸ بوجود آورنده میله‌های AB و CD متساویند. همچنین میله‌های AD و CB. مفصلها در A و B و C و D قرار دارند. AB و CD تقاطع می‌کنند اما به‌یکدیگر نچسبیده‌اند. نقاط O و P و P′ بترتیب بر DA و DC و AB روی خط راستی هستند موازی با AC و DB. ثابت کنید که OP.OP′ مقداری است ثابت. نشان دهید که چگونه با اضافه کردن یك میلهٔ شعاعی این عاکس چهار میله‌ای را می‌توان برای تبدیل حرکت مستدیر به مستقیم مورد استفاده قرار داد.



شکل ۱۲۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابروهمی	ultra-ideal
اسمی	nominal
اصل موضوع	axiom, postulate
انعکاس	inversion
بازتاب	reflection
بازه	interval
برابری	equality
پهنه	area
پیوستگی	continuity
تارك	summit
جابجایی	displacement
خط مبنا	base line
دایرهٔ زمانی	horocyle
دو پهلو	digon
دو زاویه‌یی	biangle
سازگاری	consistency
سطح حدی	limiting plane
شبه مربع	pseudo square
صفحهٔ بیضوی تك	single elliptic plane
صفحه بیضوی مضاعف «	double »
فزونی	excess
کاستی	defect

کرهٔ زمانی	horosphere
کرهٔ کاذب	pseudosphere
کشنده	tractrix
مثلث قطبی	polar triangle
محور اصلی	radical axis
مرکز اصلی	radical center
مطلق	absolute
مغالطه	fallacy
منحنی حدی	limiting curve
نامتقاطع	non-intersecting
نقطهٔ ابروهمی	ultra-ideal point
نقطهٔ وهمی	ideal point
هم‌ارزی	equivalence
همفاصلگی	equidistance
هم‌محور	coaxal
همنهشتی	congruence
هندسهٔ بیضوی	elliptic geometry
هندسهٔ سهموی	parabobc geometry
هندسهٔ کروی	spherical geometry
هندسهٔ کل	pan-geometry
هندسهٔ	
هذلولوی	hyperbolic geometry

فهرست الفبایی