وزارت علوم تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و بسط آن

ماروین جی گرینبرگ
ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها

هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و بسط آن

ماروین جی. گرینبرگ

ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی
۱۳۹۷

ریاضی، آمار، و رایانه
۱۶۷

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

Euclidean and Non-Euclidean Geometries Development and History
Third Edition
Marvin Jay Greenberg

W.H. Freeman and Company, 1994

هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و بسط آن

تألیف ماروین جی. گرینبرگ

ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها

نسخه‌پرداز: فاطمه پیوندی
طراح جلد: بهرام کاووسی‌راد
حروفچین و صفحه‌آرا: منیژه دیارمند
ناظر چاپ: جواد خسروی
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۹
تعداد ۱۰۰۰
لیتوگرافی، چاپ و صحافی: توس
۱۰۸۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب ، روبه‌روی سینما سپیده، پاساژ خبیری ، تلفن: ۶۶۴۰۸۸۹۱، ۶۶۴۱۰۶۸۶

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه: گرینبرگ، ماروین ج.، ۱۹۳۵ ـ م. **Greenberg, Marvin J.**
عنوان و نام پدیدآور: هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی و بسط آن/ ماروین جی. گرینبرگ؛ ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها.
وضعیت ویراست: [ویراست ۳].
مشخصات نشر: تهران مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۸۹.
مشخصات ظاهری: ده، ۵۱۴ ص. مصور، جدول.
فروست: مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۳۹۷. ریاضی، آمار، و رایانه؛ ۱۶۷
شابک: 978-964-01-1397-4
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپا
یادداشت: عنوان اصلی: **Euclidean and non-euclidean geometries.**
یادداشت: نمایه.
موضوع: هندسه
موضوع: هندسه غیراقلیدسی
شناسه افزوده: شفیعیها، محمدهادی، ۱۲۹۸ ـ ۱۳۸۵.، مترجم
شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی
رده‌بندی کنگره: ۱۳۸۹ ۹ ه ۴گ/ ۴۴۵ QA
رده‌بندی دیویی: ۵۱۶
شماره کتابشناسی ملی: ۲۲۷۲۷۹۶

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان — صفحه

عنوان | صفحه

عنوان | صفحه

عنوان صفحه

پیشگفتار مترجم

نهمین چاپ ترجمهٔ اول «هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی» نزدیک به اتمام بود که ویرایش جدید آن به دست مترجم رسید. مترجم پس از مطالعه دریافت که تفاوت ماهوی زیادی بین این ویرایش و ویرایش قبلی وجود دارد، لذا دریغش آمد که خوانندگان این کتاب را با مطالب ویرایش جدید آگاه ننماید. این بود که دست به ترجمهٔ مجدد این کتاب زد، به این امید که باشد خوانندگان عزیز از مطالعهٔ آن به‌اندازهٔ مترجم بهره گیرند. در این پیشگفتار مترجم لازم دید که قسمتی از مقدمه‌ای را که در ابتدای ترجمهٔ اول آورده بود مجدداً بازگو کند تا خوانندگان به علت انتخاب بعضی از واژه‌های احیاناً نامأنوس از سوی مترجم پی‌ببرند. اینک قسمتی از آن مقدمه:

. . .مترجم باید اعتراف کند که ترجمهٔ این کتاب به دلیل وجود بسیاری از واژه‌های تازه، امری بسی دشوار بوده است. لذا خواننده باید انتظار داشته باشد که با واژه‌هایی احیاناً نامأنوس برخورد نماید. با اینکه مترجم کوشش زیادی کرده است تا واژه‌هایی را که برمی‌گزیند (یا می‌سازد) به قدر کافی ساده و رسا باشند، تردید دارد که در این امر توفیق یافته باشد. به‌عنوان مثال، نخستین مشکلی که مترجم با آن مواجه شده انتخاب واژه‌ای مناسب برای کلمهٔ کنگروانس (congruence) ــ به معنی هندسی آن ــ بوده است. توضیحاً باید اشاره کنم که معنی تساوی در جبر با معنی آن در هندسه کاملاً متفاوت است. در جبر، وقتی می‌نویسیم $x = ۷$، منظور این است که x همان ۷ است و یا x نامی است برای عدد ۷. لیکن در هندسه چنین نیست. وقتی می‌نویسیم «در مثلث ABC، $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$» منظور یکی بودن ساقهای AB و AC نیست، بلکه منظور این است که این دو ساق از لحاظ طول با هم برابرند، یعنی می‌توان آن دو را چنان برهم نهاد که تمام نقاط یکی بر دیگری قرار گیرد. اقلیدس واژهٔ تساوی (و نماد آن =) را به معنی اخیر آن نیز به‌کار برده و در اثبات قضایای مربوطه از این برهمنهی استفاده کرده است. از این‌رو هندسه‌دانان برای جلوگیری از اشتباه، همواره سعی داشته‌اند از به‌کاربردن کلمهٔ تساوی در هندسه اجتناب، و به جای آن از

واژهٔ کنگروانس استفاده کنند. واژهٔ همنهشتی که تاکنون برای ترجمهٔ کنگروانس به‌کار می‌رفته فقط در جبر مناسب است. بدیهی است که این معنی نمی‌توانسته در اینجا وافی به مقصود باشد، زیرا همنهشتی (چنانکه از ترکیب کلمه پیداست) به‌معنی نوعی تساوی جبری است، در حالی‌که می‌بایست واژه‌ای پیدا کرد که دقیقاً به معنی خود تساوی باشد.

بحثهای مفصل با اهل فن برای یافتن واژهٔ مناسب و خوش‌آهنگی که بتواند جایگزین این «تساوی» در زبان فارسی شود به نتیجه‌ای نرسید. لذا مترجم موقتاً (تا زمانی‌که واژهٔ رسایی پیدا نشده) واژهٔ قابلیت انطباق با را برای این منظور برگزیده و در همه جا به کار برده است. در واقع مراد از واژهٔ قابلیت انطباق با در این کتاب دقیقاً همان تساوی هندسی است، و هر زمان که خواننده با این واژه مواجه می‌شود باید در ذهن خود تساوی هندسی را مجسم سازد.

واژهٔ دیگری که در این ترجمه کراراً به کار برده شده واژهٔ بُنداشت به جای واژهٔ آکسیوم (axiom) ـــ البته نه به معنای اقلیدسی آن ـــ است که از ساخته‌های فرهنگستان زبان است. همان‌گونه که می‌دانیم، اقلیدس گزاره‌هایی را که بدون دلیل می‌پذیرد به دو دستهٔ پوستولاها (postulates) یا اصول موضوعه (که حقایق هندسی هستند)، و آکسیوم‌ها یا علوم متعارفه (بدیهیات اولیه) ـــ که حقایق کلی هستند ـــ تقسیم می‌کند. ولی امروزه که این تقسیم‌بندی از میان رفته است، دیگر چیزی به‌نام علوم متعارفه وجود ندارد و آکسیوم و پوستولا، هردو، به یک معنی اصل موضوع به کار برده می‌شوند. چون مؤلف هر دو این واژه‌ها را به دفعات زیاد به یک معنی به کار برده است، مترجم اصل موضوع (یا بعضی اوقات اصل) را به‌جای پوستولا و بنداشت را به‌جای آکسیوم به‌کار برده تا نشان دهد که مؤلف کدام واژه را در چه مقامی به‌کار برده است.

نکتهٔ دیگری که مورد توجه مترجم بوده رعایت سبک مؤلف در به‌کار بردن بعضی نمادهاست. مؤلف نماد $\triangle ABC$ را برای مثلث ABC، نماد $\square ABCD$ را برای چهارضلعی ABCD، و نماد $\measuredangle ABC$ را برای زاویهٔ ABC انتخاب کرده است. ولی در بیشتر موارد نیز می‌نویسد: مثلث $\triangle ABC$ و چهارضلعی $\square ABCD$، و زاویهٔ $\measuredangle ABC$، که در واقع، اگر صحیح بخوانیم، باید اولی را مثلث مثلث ABC و دومی را چهارضلعی چهارضلعی ABCD و بالاخره سومی را زاویهٔ زاویهٔ ABC بخوانیم که نادرستی آنها حاجت به بیان نیست. اما با شناختی که مترجم از مؤلف و آثار دیگر او داشته چنین انگاشته است که خود مؤلف واقف به این مطلب بوده و این نمادها را همراه با لفظ آنها، آگاهانه و صرفاً به‌منظور تأکید و جلوگیری از اشتباه احتمالی مورد استفاده قرار داده است. مترجم با اینکه این نحوهٔ بیان را نمی‌پسندیده، از همین روش پیروی کرده و در پاره‌ای موارد از این نمادها همراه با نام آنها استفاده کرده و مثلاً نوشته است مثلث $\triangle ABC$ و... .

دیباچه

در این کتاب هندسه نااقلیدسی و تنظیم مجدد مبانی هندسه اقلیدسی پس از آن، به‌صورت داستانی پرماجرا و دلکش عرضه می‌شود. این راز که چرا اصل توازی اقلیدسی را نمی‌توانستند ثابت کنند، در طی ۲۰۰۰ سال در پرده ابهام مانده بود تا اینکه هندسه نااقلیدسی کشف و مدلهای اقلیدسی آن عدم‌امکان چنین اثباتی را آشکار ساختند. این کشف مفهوم سنتی هندسه را به‌عنوان توصیفی صحیح از فضای فیزیکی در هم ریخت. بیش از همه، تحت تأثیر مبانی هندسه[1] داویت هیلبرت، اندیشه جدیدی پدید آمد که در آن وجود هندسه‌های یکسان سازگار بسیاری مورد قبول واقع شد، و هر کدام یک نظام منطقی صوری محض بود که می‌توانست برای مدل‌سازی واقعیت فیزیکی سودمند باشد یا نباشد. آلبرت اینشتین می‌گوید که بدون این اندیشه جدید هندسه، نمی‌توانسته است نظریه نسبیت خود را ارائه دهد. (اینشتین، ۱۹۲۱، فصل ۱). هیلاری پاتنم، فیلسوف معروف، می‌گوید «واژگونی هندسه اقلیدسی مهمترین رویداد در تاریخ علم از نظر یک معرفت‌شناس است» (۱۹۹۷، ص. x). در فصل ۸ این کتاب، درباره سردرگمی فلسفی موجود تا آن زمان بحث می‌شود.

کتاب حاضر برای چند گروه از دانشجویان مفید است. برای معلمان هندسه دبیرستانها و دانشکده‌ها مبانی هندسه اقلیدسی و مقدمه‌ای از هندسه هذلولوی (با اتکا به مدلهای اقلیدسیِ آن) به‌روشی دقیق ارائه شده است. برای دانشجویان رشته‌های علوم نظری تاریخ و استلزامهای فلسفیِ کشف هندسه نااقلیدسی ذکر شده است (به‌عنوان مثال، تدریس این کتاب در دانشگاه کُلگیت به‌عنوان جزئی از یک درس در انقلابهای علمی، موفق از آب در آمده است)، برای دانشجویان رشته ریاضی، علاوه بر آموزش مشروح هندسه تبدیلی و مثلثات هذلولوی، تمرینهای چالش‌برانگیز، که با کمال تأسف، بیشتر متنهای درسی ریاضی فاقد آنها هستند، با یک دید تاریخی آورده شده است.

1. *Grundlagen der Geometrie*

بسط هندسه نااقلیدسی را به‌منظور زنده کردن مطالعه هندسه اقلیدسی انجام داده‌ام. معتقدم که این نحوه عمل، یک کتاب سنتی هندسهٔ اقلیدسی دانشگاهی را جالبتر می‌سازد. برای مشخص کردن نقایص تلاشهایی که در اثبات اصل توازی اقلیدسی وجود داشته، مبانی بنداشتی هندسه اقلیدسی را به دقت بررسی کرده‌ام. برای اثبات سازگاری نسبی هندسه هذلولوی، ویژگیهای تبدیل در دوایر اقلیدسی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای توجیه درستی رسم نیم‌خطهای موازی حدی مورد نظرِ یانوش بویویی از هندسه تصویری (نسبتهای ناهمساز، چهاره‌های توافقی، و ویژگیهای نگاشت منظری) استفاده شده است.

به جای اصول خطکش و نقاله معمولی متداول در هندسه دبیرستانی، صورتهای اصلاح‌شده بنداشتهای هیلبرت برای هندسه اقلیدسی را به کار برده‌ام. کلیه احکام مربوط به خطکش و نقاله در قضیه ۳.۴، فصل ۴، گنجانده شده‌اند، و از آن به بعد اندازه‌گیری پاره‌خطها و زوایا را می‌توان به روش معمولی انجام داد. در این صورت، این تغییر در عمل کمتر از آنچه در اصل است خود را نشان می‌دهد. در اینجا اصل بر این گذاشته شده است که در یک عرضه تاریخی دقیق برخاسته از مبانی هندسه، مفاهیم هندسه محض از مفاهیم عددی جدا شوند و یادآوری شود که دستگاههای عددی محض را می‌توان دوباره با استفاده از هندسه بنا کرد.

دستگاه عددی که بدین‌گونه ساخته می‌شود، ممکن است، در صورت حذف بنداشت ددکیند، با دستگاههای اعداد حقیقی تفاوت داشته باشد، ولی در عوض راه را برای هندسه‌های جدید مذکور در پیوست ب هموار می‌سازد. در واقع از براهین پیوستگی فقط در چند جا در این کتاب استفاده شده است، و برای همه، جز یکی از آنها، فرضیه‌های مقدماتی‌تر (نظیر اصل پیوستگی مقدماتی، یا اصل پیوستگی دایره، یا بنداشت ارشمیدس) کافی بوده‌اند. بنداشت ددکیند در اینجا تنها برای اثبات وجود نیم‌خطهای موازی حدی در هندسه هذلولوی (قضیه ۶.۶، فصل ۶) به کار رفته است. تحقیقات جدید من نشان داده‌اند که حتی در آنجا، اصل پیوستگی مقدماتی و بنداشت ارشمیدس کافی هستند (ولی برهان آن دشوار است). البته این بنداشت برای به‌دست آوردن یک دستگاه بنداشتی که جزمی باشد ضروری است، ولی بقیه بنداشتهای شبه هیلبرتی به روح هندسه اقلیدسی نزدیکترند، به‌طوری‌که دانش‌آموزان تیزهوش دبیرستانی و افراد تحصیل‌کرده معمولی می‌توانند این کتاب را بهتر بفهمند.

جنبه منحصر به فرد این کتاب این است که بعضی قضایای تازه در تمرینات آورده شده‌اند، و سپس فصلهای بعد بر آنها بنا شده‌اند. تجربه تدریس من از ویراستهای قبلی این کتاب مرا متقاعد کرده است که این روش برای درک عمیق دانشجویان بسیار مفید است (دانشجویان نه تنها با انجام‌دادن آن را فرا می‌گیرند بلکه از نتایج جدیدی که خود به‌دست می‌آورند لذت می‌برند).

اگر دانشجویان تعداد کافی از تمرینات هر فصل را حل نکنند، در دنبال کردن فصلهای بعد دچار مشکل می‌شوند. در شش فصل اول دو مجموعه تمرین وجود دارد. تمرینهای «اصلی» که چالش‌برانگیزترین تمرینات هستند و همه دانشجویان باید درباره آنها فکر کنند، ولی احتمال اینکه دانشجویان رشته کارشناسی ریاضی آنها را حل کنند بیشتر است. این وجه تمایز در چهار فصل آخر حذف شده است. بیشتر تمرینهای فصلهای ۷ و ۹ و ۱۰ تمرینهای «اصلی» هستند، درحالی‌که تمرینهای فصل ۸ برای یک متن ریاضی، غیر عادی به نظر می‌رسند و محتوای تاریخی و فلسفی دارند. برای بیشتر تمرینها راهنماییهایی ارائه شده است و در ضمن یک حل‌المسائل برای معلمان تهیه و در دسترس قرار داده شده است. در انتهای هر یک از شش فصل اول پروژه‌هایی نیز برای تحقیقات بیشتر کتابخانه‌ای، گنجانده شده است.

افزوده‌های مهم در این ویرایش سوم به قرار زیرند. فصل اول اکنون شامل بخش هشدار در باب خطر نمودارهاست، ولی بخش جدیدی نیز درباره نیروی نمودارها در شناخت هندسی به همراه دارد، چنان‌که این مطلب با دو برهان از قضیه فیثاغورس نشان داده شده است. در فصل ۲، (منطق و هندسه وقوع)، بخش کوتاهی درباره صفحات تصویری و آفین اضافه کرده‌ام. همان‌گونه که از تمرین «اصلی» ۱۳، فصل ۶، و نیز دو بخش تمرینهای «ک» در فصل ۷ می‌توان دید، هندسه تصویری گذشته از جاذبیت ذاتی، برای درک بعضی از ویژگیهای هندسه هذلولوی ضروری است. در فصل ۳، بخش مربوط به بنداشتهای پیوستگی به‌صورت جدیدی نوشته شده است، بعضی‌از تمرینهای «اصلی» در چاپهای قبل، که حل آنها برای دانشجویان دشوار بوده است، حالا در همان بخش حل شده‌اند، و نیز، بنداشت ارسطو را به آن بخش افزوده‌ام، که جایگزین بنداشت ارشمیدس برای کسی است که می‌خواهد بی‌نهایت کوچکها را در هندسه وارد کند در فصل ۴، تمرینهای تازه زیادی را برای درک عمیقتر دانشجویان افزوده‌ام.

فصل ۵ (تاریخچه اصل توازی) با توجه به دریافتهای جدید تاریخی مقتبس از مقاله‌های جدید جرمی گری (۱۹۸۹)، ب. ا. روزنفلد (۱۹۸۸)، و روبرتو تورتی (۱۹۷۸) (←کتاب‌شناسی)، بیش از همه دستخوش تغییر شده است. بنداشت کلرو بررسی شده است. تلاشهای زیاد لژاندار برای اثبات اصل توازی بررسی شده است. نظرهای اجمالی ولی جالب لامبرت و تاورینوس درباره امکان وجود هندسه‌ای بر «کره‌ای با شعاع موهومی» مورد تأکید قرار گرفته، و در یک بخش جدید از فصل ۷ (مدلی از صفحه هذلولوی از فیزیک) و نیز در فصل ۱۰ (مختصات وایرشتراس) اثبات شده است. بخش تاریخچه فصل ۶ افزایش پیدا کرده است. در فصلهای ۵، ۶ و ۷، نیز تمرینات جدیدی آورده شده است. فصل ۸ (استلزامهای فلسفی) تا اندازه‌ای تغییر یافته است، و من از توصیه‌های خوانندگان تشکر می‌کنم، زیرا افرادی که در ریاضیات کار می‌کنند چندان به فلسفه علاقه نشان

نمی‌دهند. در بقیه کتاب تغییرات جزئی صورت گرفته است، به استثنای مبحث مربوط به خمیدگی و ژئودزیکها (راه درست اندیشیدن درباره «خط راست») در پیوست الف، که خیلی بیشتر شده است.

اصطلاحات و نمادگذاریها در سرتاسر کتاب استاندارد هستند. به پیروی از پرونویتس و جردن (۱۹۶۵)، آن جزء از هندسه اقلیدسی را که مستقل از اصل توازی است، «هندسهٔ نَتاری» نامیده‌ام (نام سنتیِ آن که گمراه‌کننده است «هندسه مطلق» است و چنین می‌نمایاند که هندسه‌های دیگر به آن وابسته‌اند). برای دو نوع توازی که در هندسه هذلولوی وجود دارد نامهای «مجانبی» و «واگرا» را برگزیده‌ام. به نظر من این نامها بر اصطلاحات متعدد گمراه‌کننده‌ای که در کتابها به کار رفته‌اند برتری قاطعی دارند. قضیه‌ها و شکلها برحسب فصل شماره‌گذاری شده‌اند. مثلاً قضیه ۴.۱، قضیه ۱ از فصل ۴ است. اشاراتی از قبیل «کاکستر (۱۹۶۸)» ارجاعی است به کتاب‌شناسی آخر کتاب (کتاب‌شناسی به جای اینکه به ترتیب الفبایی مرتب شده باشد، برحسب موضوع مرتب شده است).

اینک چند توصیه برای برنامه دروس مختلف:

۱. یک درس یک ترمی برای معلمان هندسهٔ آینده و/یا دانشجویانی که رشته اصلی آنها ریاضیات است ولی استعداد متوسطی دارند. فصلهای ۱ـ۶ و چهار بخش اول فصل ۷ را تدریس کنید، و اگر وقت داشتید فصل ۸ را اضافه کنید. در تعیین تمرینها، تمرینهای «اصلی» (شاید به استثنای تمرینهای اصلی فصل ۱)، بخش اعظم تمرینهای مربوط به میان‌بود از فصل ۳، تمرینهای ۲۱ـ۳۱ از فصل ۴، و بالاخره تمرینهای ۱۳ـ۲۶ از فصل ۵ را حذف کنید و فقط خودآزمایی و تمرینهای کـ۱ (ک منظور مدل کلین است)، کـ۲، کـ۳، کـ۵، کـ۱۱، کـ۱۲، کـ۱۷، و کـ۱۸ از فصل ۷ را تعیین کنید.

۲. یک درس یک ترمی برای معلمان هندسه آینده و/یا آنانی که ریاضیات رشته اصلی آنهاست و بهتر از دانشجویان با استعداد متوسط هستند. قضیه فصل ۷ و بسیاری از تمرینهایی را که در (۱) حذف کرده‌اید به برنامه (۱) اضافه کنید.

۳. یک درس یک ترمی برای آموزش عمومی و/یا دانشجویان علوم مقدماتی. محور اصلی این درس فصلهای ۱، ۲، ۵، و سه بخش اول فصلهای ۶ و ۷ و همه فصل ۸ خواهد بود. به‌علاوه معلم باید مواد فصلهای ۳ تا ۶ (نظیر بنداشتهای هیلبرت، قضیه ساکری‌ـلژاندر، و برخی از قضایای هندسه هذلولوی) را به‌طور انتخابی مورد بحث قرار دهد، ولی نباید براهین خیلی زیاد از این دانشجویان بخواهد. مطالب آسان فصل ۸، به‌ویژه برای چنین درسی خیلی مناسب است.

۴. یک درس دو ترمی برای دانشجویانی که رشته آنها ریاضیات است. اگر وقت دارید تمام کتاب را تدریس کنید.

از این‌رو این کتاب منبعی است برای طیف وسیعی از دانشجویان از ضعیف گرفته تا قوی، از غیر ریاضی‌خوانان ولی تحصیل‌کرده‌ها گرفته تا نابغه‌های ریاضی.

مرحوم بیشاپ، اسقف معروف، وقتی که به تدریس یک درس مقدماتی در منطق مشغول بود، به ماهیت چون و چرادار منطق کلاسیک پی‌برد و کتابی مؤثر در تحلیل ریاضی نوشت. کتاب خود من، از یک درس مقدماتی در هندسه که در دانشگاه کالیفرنیا، در سانتاکروز در سالهای ۱۹۷۰ تدریس می‌کردم، وقتی‌که محیط دانشگاه از یک آرمانگرایی شادی‌بخش و تجربه آکنده بود نشأت گرفته است. آه چه روزهای خوب فراموش نشدنی بود، دوست من! (متأسفانه محیط دانشگاهی امروز حال و هوای آن روزهای خود را از دست داده است ــ جز چند چراغ روشنی‌بخش نظیر دوستان من رالف آبراهام، دوراندیش و پدیدآورنده سری کتابهای عالی در ریاضیات بصری و بررسی چندشاخه‌ای خائوس، الههٔ عشق و زمین؛ و شیمیدان نوآور و مبتکر، فرانک اندروز، معلم خلاق حل مسائل و مؤلف «هنر و تمرین دوست‌داشتن»[1]، کس دیگری نمانده است.) خوشحالم از اینکه ویراستهای پیشین این کتاب، با ترکیبی استثنایی از دقت و تاریخچه، با استقبال گرم خوانندگان مواجه شده است. این امر از یک نیاز واقعی برای «تلطیف» متنها و درسهای ریاضی حکایت دارد. به‌عنوان مثال، اخیراً که در یک کلاس پردانشجو درس حسابان می‌دادم، شگفت‌زده شدم وقتی دیدم دانشجویان (به‌ویژه دانشجویان غیرریاضی) پس از تحقیق و نوشتن مقاله در تاریخ حسابان (عده زیادی مجذوب شخصیت نیوتن شده بودند)، در میزان ارتباط حسابان با رشته خود، و دربارهٔ ترس خود از این موضوع وحشت‌آور، چه اندازه به هیجان آمده بودند. این‌گونه مقالات تمرین خوبی برای پیشرفت مهارتهای نویسندگی نیز هستند که بسیاری از دانشجویان به آن نیازمندند. معلمان می‌توانند مقالاتی از پروژه‌های انتهای فصلهای ۱ تا ۶ و مباحث فصل ۸ را برای آنان تعیین کنند.

تاریخ کشف هندسه نااقلیدسی یک مطالعه موردی ارزنده و در دسترس درباره مشکل بزرگ ما آدمیان در پرداختن به فرضیه‌های ریشه‌دار و پذیرش مدلهای جدید است. مشاهده اشتباهات افراد خیلی کاردان هنگام رویارویی با پیشامدهای ناآشنای جدیدی که خودشان یا فرهنگ آنان آنها را نمی‌پذیرفته‌اند به راستی آموزنده و دلنشین است ــ ساکری در هندسه جدید به جوابی دست می‌یابد ولی آن را نمی‌پذیرد زیرا به نظر او «تهوع‌آور» می‌آمده است؛ لژاندر براهینی استادانه ولی غلط، یکی پس از دیگری از اصل توازی اقلیدس ارائه داده است؛ لامبرت به یک هندسه ممکن «بر کره‌ای به شعاع موهومی» می‌اندیشیده است؛ فارکاش بویویی برهان نادرستی از اصل توازی اقلیدس منتشر می‌کند پس از اینکه پسرش قبلاً یک هندسه نااقلیدسی را منتشر کرده بود؛ گاوس،

1. *The Art and Practice of Loving*

نگران از انتشار کشفیاتش نمی‌دانسته که رویه‌های با خمیدگی منفی ثابت او ابزاری برای اثبات سازگاری هندسه نااقلیدسی فراهم کرده است؛ یا چارلز داجسن (با نام مستعار لوئیس کارول) از اقلیدس در مقابل «رقیب تازه‌اش» دفاع می‌کرده است. نکته الهام‌بخش این است که ما شاهد موردی بودیم که یانوش بویویی و لباچسفکی این ایده جدید را قبل از آنکه فرهنگ محیط آن را درک کند عرضه کردند، و جای بسی تأسف است که می‌بینیم آنان در دوران حیات خود چقدر کم مورد تحسین قرار گرفتند.

وِرنر ارهارت، پایه‌گذار «مؤسسه تربیتی مشورتی ارهارت»[1]، که نزدیک به یک میلیون نفر از تعلیمات او بهره برده‌اند، پیام غیرتخصصی این کتاب را دریافت و مکاتبهٔ بویویی با پدرش در فصلهای ۵ تا ۶ را در حضور هزاران تن از طرفداران این مؤسسه در سان‌فرانسیسکو برای حاضران قرائت کرد. خوشحالم که بدین وسیله سپاس و قدردانی خود را به او و دانشجویانم در سانتاکروز ابراز می‌دارم که با شور و شوق خودشان برای توجه به این درس به من روحیه بخشیده‌اند (به‌ویژه از رابرت کورتیس که متعاقباً مقاله‌ای در مجله هندسه[2] درباره ساختمانهای هندسه هذلولوی منتشر کرده است سپاسگزارم). توصیه‌های خوانندگان در طی سالهای گذشته نیز کمک مؤثری در بهبود این کتاب کرده است که ضمن تشکر از آنان، آنها را به کار بسته‌ام. همچنین از دوستان عزیزم در شرکت فری‌من، از جمله جان استاپلز فقید، تشکر می‌نمایم که بدون ارائه ابتکارات آنان، این کتاب فراهم نمی‌آمد.

ماروین ج. گرینبرگ
سان‌فرانسیسکو، کالیفرنیا

1. Erhard Seminar Training (est)　2. *Journal of Geometry*

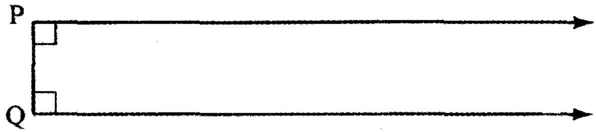
مقدمه

کسی که هندسه نمی‌داند از این در داخل نشود.
کتیبه سردر ورودی آکادمی افلاطون

بیشتر مردم نمی‌دانند که در حدود یک سده و نیم پیش انقلابی در زمینه هندسه روی داد که از لحاظ علمی به عمق انقلاب کوپرنیکی در نجوم، و از جنبه نتایج فلسفی به اهمیت نظریه تکامل داروین بود. کاکستر هندسه‌دان کانادایی می‌نویسد: «تأثیر کشف هندسه هذلولوی در تصوری که از حقیقت و واقعیت داریم آنچنان عمیق بوده است که به دشواری می‌توانیم تصور کنیم که امکان وجود هندسه‌ای غیر از هندسه اقلیدسی تا چه اندازه در سال ۱۸۲۰ تکان‌دهنده جلوه کرده است.» اما همه ما امروزه نام هندسه فضا‌ـزمان را در نظریه نسبیت اینشتین شنیده‌ایم. «در واقع، هندسه پیوستار فضا‌ـزمان به حدی به هندسه‌های نااقلیدسی وابسته است که قدری آگاهی از این هندسه‌ها شرط لازم برای درک کامل کیهان‌شناسی نسبیتی است.»

هندسه اقلیدسی، هندسه‌ای که شما در دبیرستان خوانده‌اید، هندسه‌ای است که بیشتر برای تجسم جهان فیزیکی به کار می‌بریم. این هندسه از کتابی به‌نام اصول به دست ما رسیده که اقلیدس، ریاضیدان یونانی، در حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح نگاشته است. تصوری که ما بر اساس این هندسه از جهان فیزیکی پیدا کرده‌ایم تا حد زیادی توسط آیزاک نیوتن در اواخر سده هفدهم ترسیم شده است.

هندسه‌هایی که اقلیدسی نیستند از مطالعه عمیقتر اصل توازی پیدا شده‌اند. دو نیم‌خط موازی عمود بر پاره‌خط PQ در نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:



در هندسه اقلیدسی، هنگامی که به سمت راست حرکت می‌کنیم، فاصله بین این دو نیم‌خط همواره مساوی با فاصلهٔ P تا Q باقی می‌ماند. با وجود این در اوایل سده نوزدهم دو هندسه دیگر مطرح شد. یکی هندسه هذلولوی (از کلمه، یونانی هایپربالین[۱] به معنی «افزایش یافتن») که در آن فاصله میان نیم‌خطها افزایش می‌یابد، و دیگری هندسه بیضوی (از کلمه یونانی الیپین[۲] «کوتاه شدن») که در آن این فاصله رفته‌رفته کم می‌شود و سرانجام نیم‌خطها همدیگر را می‌برند. این هندسه‌های نااقلیدسی را بعدها ک. ف. گاوس و گ. ف. ب. ریمان در قالب هندسه‌های کلی‌تری بسط دادند (همین هندسه کلی‌تر است که در نظریه نسبیت عام اینشتین مورد استفاده قرارگرفته است).[۳]

در این کتاب ما به هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی خواهیم پرداخت. هندسه هذلولوی تنها به تغییر یکی از بنداشتهای اقلیدس نیاز دارد، و به همان آسانی هندسه دبیرستانی قابل درک است. از سوی دیگر، هندسه بیضوی شامل مفهوم توپولوژیک تازه «سوناپذیری» است، زیرا همه نقاط صفحه بیضوی که بر یک خط نیستند در یک طرف آن خط قرار می‌گیرند. از این هندسه نمی‌توان به همان سهولت هندسه اقلیدسی صحبت کرد. بنابراین بحث مختصر درباره هندسه بیضوی را در متن کتاب انجام داده‌ام و در پیوست الف اشارات بیشتری آورده‌ام. (اشتباه نشود! منظور من این نیست که ارزش هندسه بیضوی کمتر از ارزش هندسه هذلولوی است.) فهم هندسه بیضوی مستلزم درک کامل محاسبات دیفرانسیل و انتگرال بوده، و لذا بیرون از ظرفیت این کتاب است (در پیوست الف مختصری راجع به آن بحث‌شده است).

فصل ۱ با تاریخچه مختصری در باب هندسه در دوران قدیم آغاز می‌شود و به بیان اهمیت بسط روش بنداشتی توسط یونانیان ادامه می‌یابد. همچنین پنج اصل اقلیدس معرفی و به یکی از تلاشهای لژاندر برای اثبات اصل پنجم پرداخته می‌شود. برای پیدا کردن نقص برهانهای لژاندر (و برهانهای دیگر)، لازم است که مبانی هندسه دوباره دقیقاً مورد بررسی قرار

1. *hyperballein* 2. *elleipein*

۳. نظریه نسبیت خاص اینشتین که برای مطالعه ذرات زیراتمی لازم است، بر اساس هندسه ساده‌تر فضا_زمان که واضع آن هـ. مینکوسکی است نهاده شده است. نامهای «هندسه هذلولوی» و «هندسه بیضوی» را ف. کلاین برگزیده است. بعضی از مؤلفان این هندسه‌ها را به‌ترتیب «هندسه لباچفسکی» و «هندسه ریمانی» می‌نامند که اصطلاحاتی گمراه‌کننده‌اند.

گیرد. ولی، پیش از آنکه بتوانیم اساساً هندسه‌ای بنا کنیم، باید به بعضی از اصول بنیادی منطق آگاهی داشته باشیم. این اصول در فصل ۲ به‌گونه‌ای غیررسمی دوباره بررسی شده‌اند. در این فصل عناصر متشکله یک برهان دقیق را از نظر می‌گذرانیم و به‌ویژه به روش اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف تکیه می‌کنیم. در فصل ۲ به مفهوم بسیار مهم مدل برای یک دستگاه بنداشت می‌پردازیم که با مدلهای متناهی برای بنداشتهای وقوع و نیز مدلهای حقیقی تصویری و آفین تبیین می‌شود.

فصل ۳ را با بحثی از برخی نقایص در نحوه ارائه هندسه توسط اقلیدس آغاز، و این نقایص را با ارائه کامل بنداشتهای داویت هیلبرت (با اندکی تغییر) و نتایج مقدماتی آنها بر طرف کرده‌ایم. ممکن است هنگام اثبات قضایایی که خودبه‌خود بدیهی به نظر می‌رسند بی‌حوصله شوید. اما، اگر بخواهید با اطمینان در فضای نااقلیدسی پیش بروید باید به این کار اساسی تن دردهید.

مطالعه نتایج بنداشتهای هیلبرت، به‌جز اصل توازی را در فصل ۴ ادامه داده‌ایم. موضوع این مطالعه را هندسه نتاری نامیده‌ایم. بعضی از قضیه‌های اقلیدسی (مثل قضیه زاویه بیرونی) را که شما با آنها آشنایی دارید، با روشی غیر از روشهایی که توسط اقلیدس به‌کار رفته‌اند اثبات خواهیم کرد، که این تغییر به علت شکافهای منطقیِ موجود در برهانهای اقلیدس لازم بوده است. همچنین برخی قضایا را که اقلیدس نمی‌توانست بر آنها واقف باشد (مانند قضیه ساکری-لژاندر) ثابت خواهیم کرد.

با اتکا به پایه‌های محکمی که در فصول مقدم بر فصل ۵ گذاشته شده‌اند، آمادگی خواهیم داشت که در فصل ۵ چند تلاش مهم را که برای اصل توازی صورت گرفته‌اند مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم (در تمرینات مجال خواهید داشت که نقایصی را در نمونه‌های دیگر پیدا کنید). بر اثر این مطالعات، شیوه تفکر اقلیدسی شما چنان متزلزل می‌شود که می‌توانیم در فصل ۶ «دنیای تازه شگفت‌انگیز» راکشف کنیم، دنیایی راکه در آن مجموع زوایای مثلثها متفاوت است، مستطیل وجود ندارد، خطوط موازی ممکن است به‌طور مجانبی واگرا یا همگرا باشند. در ضمن این کار، داستان هیجان‌انگیز تاریخی اکتشاف تقریباً همزمان هندسه هذلولوی توسط گاوس، بویویی، و لباچفسکی در اوایل سده نوزدهم را ورق خواهیم زد.

این هندسه با اینکه نا‌آشناست، به همان سازگاری هندسه اقلیدسی است. این نکته را در فصل ۷، هنگام بررسی سه مدل اقلیدسی که در تجسم هندسه هذلولوی نیز ما را یاری می‌کنند ثابت خواهیم کرد. مدلهای پوانکاره‌ای این برتری را دارند که در آنها زوایا به روش اقلیدسی اندازه گرفته می‌شوند، برتری مدل بلترامی-کلاین در نمایش خطوط توسط پاره‌خطهای اقلیدسی است. همچنین

در فصل ۷ از مطالبی از هندسه اقلیدسی بحث خواهیم کرد که در کتابهای دبیرستانی ذکری از آنها نشده است.

فصل ۸ به طریقی کلی برخی از استلزامهای فلسفی هندسه‌های نااقلیدسی را دربرمی‌گیرد. این عرضه تعمداً به‌گونه‌ای جدلی صورت گرفته است، و منظور از مباحث مقاله مانند، برانگیختن خواننده و تشویق او به تفکر و مطالعه بیشتر است.

در فصل ۹ شناخت تازه‌ای از هندسه را که توسط روش تبدیل («برنامه ارلانگر» فلیکس کلاین) به دست می‌آوریم عرضه می‌کنیم. همه حرکتهای صفحات اقلیدسی و هذلولوی را رده‌بندی می‌کنیم، از آنها برای حل مسائل استفاده کرده و آنها را به صورت تحلیلی در مدلهای دکارتی و پوانکاره‌ای دنبال می‌کنیم، گروههای تبدیلاتی را که با بنداشتهای قابل انطباق ما سازگارند مشخص می‌سازیم، و مبحث جذاب تقارن را با تعیین همه گروههای متقارن متناهی (که اساساً لئوناردو داوینچی بر آن واقف بوده) معرفی می‌کنیم.

فصل ۱۰ عمدتاً به مثلثات صفحه هذلولوی، با اشاره به نظریه مساحت و رویه‌های با خمیدگی ثابت منفی اختصاص داده شده است. از بین سایر نتایج، مشابه هذلولوی قضیه فیثاغورسی را ثابت می‌کنیم، و برای محیط و مساحت دایره، برای روابط بین مثلثهای قائم‌الزاویه و چهارضلعی‌های لامبرت، و برای دایرهٔ محیطی مثلث دستورهایی به دست می‌آوریم. دستگاههای مختصاتِ مختلف قابل‌استفاده برای هندسه تحلیلی در صفحه هذلولوی را تعریف می‌کنیم. در پیوست الف مطالب بیشتری از هندسه بیضوی که در سراسر کتاب ذکر شده می‌آوریم. سپس هندسه دیفرانسیل را با شرح مختصری از بینشهای عالی گاوس و ریمان معرفی می‌کنیم.

بسیار حائز اهمیت است که شما تا می‌توانید تمرینات را حل کنید، زیرا نتایج تازه‌ای از حل آنها حاصل می‌شود که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با حل همه تمرینات، ممکن است شما هم به جایی برسید که از هندسه به‌اندازه من لذت ببرید.

هندسه هذلولوی معمولاً به‌عنوان یک کنجکاوی تاریخی تلقی می‌شده است. بعضی از دانشجویان که فکر عملی دارند از من می‌پرسند این هندسه به چه درد می‌خورد. به پیروی از تمثیل اقلیدس[1]، می‌توانم به آنها یک سکه بدهم (زیرا غلامی ندارم که این‌کار را برایم انجام دهد) و بگویم که شما دارید از این راه پول درمی‌آورید. گاهی من از آنها می‌پرسم موسیقی و هنر عالی به چه درد می‌خورند، یا آنها را به موضوعات ۵ و ۸ برای تهیه مقاله در فصل ۸ ارجاع می‌دهم. اگر باز هم سماجت نشان دهند، آنها را به تحقیقات لونه‌بورک درباره قدرت دید در فضای مرئی (فصل ۸)، به مکانیک کلاسیک، به تحقیقات جاری در توپولوژی، به نظریه ارگودیک

۱. تمثیل اقلیدس در صفحه ۱۶ آمده است.ـم.

و نظریه توابع خودریخت ارجاع می‌دهم (←فصل «منابعی برای مطالعه بیشتر»، ص ۴۸۰). این کتاب و درسی که آن ارائه می‌دهد برای افرادی که اهل عمل هستند فرصتی به دست می‌دهد تا فکر خود را به کار اندازند. همان‌گونه که ژاک آدامار، ریاضیدان بزرگ فرانسوی، می‌گوید «کاربرد عملی زمانی پیدا می‌شود که در جستجوی آن نباشیم و می‌توان گفت که پیشرفت تمدن تماماً بر این اصل استوار است». حتی خیالپروران بی‌دست و پا دوهزار سال برای اثبات اصل توازی اقلیدسی صرف کردند، و اگر این کار را نمی‌کردند، امروزه هیچ فضاپیمایی برای کشف کهکشانها وجود نداشت.

۱

هندسه اقلیدسی

اصل توازی ... در دوران کهن، حل نهایی مسئله‌ای بود که بایستی ریاضیات یونان را زمانی دراز پیش از اقلیدس به خود مشغول داشته باشد.

هانس فرویدنتال

منشأ هندسه

واژه «گئومتری»[1] از دو واژه یونانی «گئو»[2] به معنی زمین، و «متراین»[3] به معنی اندازه‌گیری آمده است؛ هندسه در اصل علم اندازه‌گیری زمین بوده است. هرودوت، مورخ یونانی(سده پنجم ق.م.)، پیدایش هندسه را به نقشه‌برداران مصری نسبت می‌دهد. ولی تمدنهای دیگر (بابلی، هندی، چینی) هم اطلاعات هندسی زیاد داشته‌اند.

هندسه باستان در واقع مجموعه‌ای از روشهای «سرانگشتی» بود که از راه آزمایش، بررسی شباهتها، حدسها و شواهد اتفاقی، دست یافتن به آنها میسر بود. خلاصه، هندسه موضوعی بود تجربی که جوابهای تقریبی آن معمولاً برای مقاصد عملی کافی بودند. بابلیهای ۲۰۰۰ تا ۱۶۰۰

1. *geometrein* 2. *geo* 3. *metrein*

سال پیش از میلاد مسیح محیط دایره را ۳ برابر قطرش می‌گرفتند، یعنی، π را مساوی ۳ اختیار می‌کردند. این همان مقداری است که ویتروویوس معمار رومی به آن داده بود و در نوشته‌های چینی همان مقدار پیدا شده است. حتی یهودیان باستان این مقدار را مقدس می‌شمردند و می‌پنداشتند که کتاب مقدس آن را تجویز کرده است (کتاب اول پادشاهان، باب ۷، آیه ۲۳)، و تلاش خاخام نهه‌میا برای تبدیل π به $\frac{۲۲}{۷}$ به نتیجه‌ای نرسید. مصریان ۱۸۰۰ ق.م. بر طبق پاپیروس ریند[1] مقدار تقریبی π را چنین می‌گرفته‌اند: $\pi \sim (\frac{۱۶}{۹})^۲ \sim ۳٫۱۶۰۴$.[2]

حدسهای مصریان در پاره‌ای موارد درست و در پاره‌ای دیگر نادرست بود. یکی از کارهای برجسته آنان پیدا کردن دستور صحیح برای حجم هرم ناقص مربع‌القاعده بوده است. از سوی دیگر، چنین می‌پنداشتند که دستوری که برای مساحت مستطیل صحیح است برای هر چهارضلعی نامشخص نیز صحیح است. هندسه مصری به معنی یونانی کلمه، علم نبود بلکه صرفاً انبانی بود پر از قواعد محاسباتی، بی‌هیچ انگیزش یا توجیهی.

بابلیان در حساب و جبر خیلی از مصریان پیشرفته‌تر بودند. همچنین قضیه فیثاغورس را ــ که در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع طول وتر مساوی با مجموع مربعات طول دو ضلع دیگر است ــ خیلی پیش از آنکه فیثاغورس به دنیا بیاید می‌دانستند. تحقیقات اخیر اوتو نویگه باوئر تأثیر جبر بابلیان بر ریاضیات یونانی را که قبلاً نامعلوم بود مکشوف ساخته است.

ولی یونانیان، و پیش از همه تالس از میلتوس، اصرار می‌ورزیدند که احکام هندسی باید از راه استدلال قیاسی ثابت شوند، نه از راه سعی و خطا. تالس با محاسباتی که از ریاضیات بابلی و مصری در دست بود، و قسمتی از آن درست و قسمتی نادرست بود، آشنایی داشت. وی ضمن کوشش برای تمایز بین قضایای درست از نادرست، نخستین هندسه منطقی را بنیاد نهاد (تالس به سبب پیشگویی خورشیدگرفتگی سال ۵۸۵ ق.م. نیز مشهور است). استخراج منظم قضایا از راه برهان، از مشخصات ریاضیات یونانی بوده و کاملاً تازگی داشته است.

نظامی را که تالس آغاز کرده بود، مدت دو سده توسط فیثاغورس و شاگردانش ادامه یافت. معاصران فیثاغورس به او به دیده پیامبری دینی می‌نگریستند. او به ابدیت روح و تناسخ معتقد بود. او از پیروان خود یک جمعیت برادری تشکیل داد که آداب تهذیب و تزکیه‌ای خاص خود

---

۱. طوماری در مصر پیدا شد که از کهن‌ترین اسناد ریاضیات در مصر باستان است و در سال ۱۸۵۸ عتیقه‌فروش اسکاتلندی، الکساندر هنری ریند آن را خریداری کرد و از این رو به نام او مشهور شد.ــم.

۲. در سالهای اخیر مقدار تقریبی π با تعداد ارقام اعشاری زیاد به کمک رایانه‌ها حساب شده است و مقدار آن تا ۵ رقم اعشاری تقریباً ۳٫۱۴۱۵۹ است. در ۱۷۸۹ یوهان لامبرت ثابت کرد که π مساوی هیچ کسری (عدد گویا) نیست. در ۱۸۸۲ لیندمان ثابت کرد که π عددی است غیرجبری، بدین‌معنی که در هیچ معادله جبری با ضرایب گویا صدق نمی‌کند.

داشت و پیرو گیاه‌خواری و اشتراک اموال بود. تمایز فیثاغورسیان از دیگر گروههای مذهبی در این بود که آنان اعتلای روح و یگانگی با خدا را از راه مطالعه موسیقی و ریاضی میسر می‌دانستند. در موسیقی، فیثاغورس نسبتهای صحیح فواصل هارمونیک را حساب کرد. در ریاضیات، خواص مرموز و شگفت‌انگیز اعداد را تعلیم می‌داد. مقاله هفتمِ اصول اقلیدس که مقاله‌ای درباره نظریه اعداد است در مکتب او تدریس می‌شد.

زمانی‌که فیثاغورسیان اعداد گنگ نظیر $\sqrt{۲}$ را کشف کردند به سختی یکه خوردند (فصل ۲، صص ۴۹ـ۵۱). در آغاز کوشیدند که این کشف را پوشیده نگه دارند. پروکلوس مورخ می‌نویسد: «همه می‌دانیم مردی که نخستین بار نظریه اعداد گنگ را آشکار ساخت هنگام غرق یک کشتی از میان رفت تا چیزی که بیان‌نشدنی و تصورناپذیر است برای همیشه پوشیده بماند». از آنجا که فیثاغورسیان $\sqrt{۲}$ را عدد نمی‌شمردند، جبر خود را به صورت هندسی درآوردند تا بتوانند $\sqrt{۲}$ و اعداد گنگ دیگر را با پاره‌خط (مثلاً $\sqrt{۲}$ را با قطر مربعی به ضلع واحد) نشان دهند.

پی‌ریزی منظم هندسه مسطحه در مکتب فیثاغورس را بقراطِ ریاضیدان (با طبیبی به همین نام خلط نشود) در حدود سال ۴۰۰ ق.م. درکتاب «اصول» سر و صورتی داد. با اینکه این کتاب گم شده است می‌توانیم با اطمینان خاطر بگوییم که بخش اعظم مقاله‌های ۱ تا ۴ اصول اقلیدس را که یک سده بعد منتشر شده، دربرداشته است. فیثاغورسیان هرگز قادر نبودند نظریه تناسبهایی را که بر طولهای گنگ نیز جاری باشد بسط دهند. این کار بعداً به دست ائودوکسوس، که نظریه‌اش در پنجم اصول گنجانیده شده است، انجام گرفت.

سده چهارم ق.م. ناظر شکوفایی آکادمی علوم و فلسفه افلاطون (که در حدود سال ۳۸۷ ق.م. بنا نهاده شده) بود. افلاطون درکتاب جمهوری می‌نویسد: «مطالعه ریاضیات قسمتی از ذهن را توسعه می‌دهد و به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است؛ زیرا که درکِ حقیقت تنها از راه ریاضیات میسر است». افلاطون یاد می‌داد که جهان اندیشه مهمتر از جهان مادی حواس است: زیرا جهان مادی سایه جهان اندیشه است. جهان مادی غاری است تاریک که بر روی دیوارهای آن تنها سایه‌های جهان واقعی خارجی را که با نور خورشید روشن شده است می‌بینیم. خطای حواس باید از راه تمرکز اصلاح شود، که خود این تمرکز از راه مطالعه ریاضیات حاصل می‌شود. روش سقراطی محاوره، اصولاً روش برهان غیرمستقیم است که با آن نشان داده می‌شود که یک حکم زمانی نادرست است که به تناقضی منجر شود. افلاطون کراراً برهان گنگ بودن طول قطر مربعی به ضلع واحد را به‌عنوان مثالی برای یک برهان غیرمستقیم آورده است (برهان خلف، فصل ۲، ص ۴۲ـ۵۱). نکته جالب اینجاست که این گنگ بودن طول هرگز نمی‌توانسته

از راه اندازه‌گیری عینی، که همیشه متضمن یک حاشیه کوچک خطای تجربی است حاصل شود.

اقلیدس شاگرد مکتب افلاطون بود. او در حدود ۳۰۰ ق.م. روش قاطع هندسه یونانی و نظریه اعداد را در «اصول» سیزده جلدی‌اش منتشر کرد. با تنظیم این شاهکار، اقلیدس تجربه و کارهای مهم پیشینیان خود در سده‌های جلوتر را در یک جا گرد آورد: تجارت فیثاغورسیان را در مقاله‌های اول تا چهارم و هفتم و نهم؛ نتایج کارهای آرخوتاس را در مقاله هشتم؛ کارهای ائودوکسوس را در مقاله‌های پنجم و ششم و دوازدهم، و کارهای تیایتتوس را در مقاله‌های دهم و سیزدهم. کتاب اقلیدس چنان به‌طور کامل جانشین کوششهای پیشین در شناساندن هندسه شد که کمتر نشانه‌ای از آن کوششها به جا ماند. جای تأسف است که بازماندگان اقلیدس نتوانستند حق او را در تألیف کتاب ادا کنند، چون او مؤلفی است که اثرش بیش از هر کسی در تاریخ بشریت خوانده شده است. روش او در هندسه متجاوز از دو هزار سال بر تعلیم این ماده مسلط بود. وانگهی روش بنداشتی که اقلیدس به کار برده، الگویی است برای آنچه ما امروز «ریاضیات محض» می‌نامیم. «محض» به معنی «اندیشه محض» است: هیچ تجربه عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست ـــ تنها باید مراقب استدلال در اثبات قضایا بود.

اصول اقلیدس از این حیث هم «محض» است که متضمن هیچ کاربرد عملی نیست. البته، هندسه اقلیدس موارد استعمال زیادی در مسائل عملی مهندسی داشته است، ولی در اصول به آنها اشاره‌ای نشده است. در افسانه آمده است که یکی از آموزندگان مبتدی هندسه از اقلیدس پرسید: «از آموختن این مطالب چه چیزی عاید من می‌شود؟» اقلیدس غلامش را فراخواند و گفت: «سکه‌ای به او بده، چون که می‌خواهد از آنچه فرا می‌گیرد چیزی عایدش شود». این‌گونه تلقی از کاربرد ریاضیات در میان بسیاری از ریاضیدانان محض تا به امروز متداول مانده است ـــ اینان ریاضیات را صرفاً برای خودش، و برای زیبایی و ظرافت ذاتیش فرا می‌گیرند.

چنان‌که بعداً خواهیم دید، جای شگفتی است که ریاضیات محض اغلب کاربردهایی پیدا می‌کند که خالق آن هرگز خوابش را هم نمی‌دیده است ـــ دورنمای «غیرعملی» ریاضیات محض، در نهایت، برای اجتماع مفید است. گذشته از آن، آن بخشهایی از ریاضیات هم که «کاربردی» نبوده‌اند برای اجتماع ارزش دارند، خواه به‌عنوان آثاری زیبا که با هنر و موسیقی قابل مقایسه‌اند، و خواه از لحاظ سهم بزرگی که در بسط فهم و خودآگاهی آدمی داشته‌اند.[۱]

۱. برای کسب اطلاعات بیشتر درباره ریاضیات قدیم، ر.ک. به
Bartel van der Waerden, *Science Awakening* (1961).

روش بنداشتی

ریاضیدانان برای کشف قضایا ممکن است از سعی و خطا، محاسبه حالات خاص، حدس بر اثر الهام، و یا از هر راه دیگری استفاده کنند. روش بنداشتی روشی است برای اثبات درستی قضایا. برای برخی از قضایای مهم در ریاضیات، اساساً برهانهای ناقص داده شده است (خواهیم دید که حتی اقلیدس هم در این زمینه مقصر بوده است). ولی مهم نیست، زیرا که دلیل درست، سرانجام (اغلب بسیار دیر) فراهم و جهان ریاضی خشنود می‌شود.

بنابراین، برهانها به ما اطمینان می‌دهند که قضایا درست‌اند. در بسیاری از موارد این برهانها قضایای کلی‌تری را به ما می‌دهند. مثلاً، مصریان و هندیان به تجربه دریافته بودند که هرگاه اضلاع مثلثی ۳ و ۴ و ۵ باشند، آن مثلث قائم‌الزاویه است. اما یونانیان ثابت کردند که اگر اضلاع a، b، و c از مثلثی در رابطه $a^2 + b^2 = c^2$ صدق کنند، این مثلث قائم‌الزاویه است. برای کسب اطمینان از درستی این قضیه لازم است بی‌نهایت بار به آزمایش بپردازیم (و به‌علاوه، آزمایشها تنها اندازه تقریبی اشیا را به ما می‌دهند). بالاخره، برهان بینش شگرفی از روابط بین اشیای مختلف مورد مطالعه به ما می‌بخشد و ما را ملزم می‌سازد که اندیشه‌های خود را به‌گونه‌ای منسجم سازمان دهیم. شما در پایان فصل ۶ به ارزش آن پی خواهید برد (اگر زودتر پی نبرده باشید).

روش بنداشتی چیست؟ اگر بخواهم از راه استدلال محض شما را متقاعد سازم که حکم S_1 را بپذیرید، باید بتوانم نشان دهم که این حکم به‌طور منطقی از حکم S_2، که شما آن را پذیرفته‌اید، نتیجه می‌شود. ولی اگر شما S_2 را قبول نداشته باشید، من باید نشان دهم که S_2 چگونه به‌طور منطقی از یک حکم S_3 نتیجه می‌شود. ممکن است لازم شود این عمل را چند بار تکرار کنم تا به حکمی برسم که شما آن را می‌پذیرید و نیازی به اثبات آن نیست. این حکم نقش یک بنداشت (یا اصل موضوع) را ایفا می‌کند. اگر نتوانم به حکمی برسم که شما آن‌را به‌عنوان مبنای استدلال بپذیرید، دچار «تسلسل» خواهم شد، یعنی باید دلیل پشت دلیل بیاورم بی‌آنکه پایانی داشته باشد.[1]

پس باید دو شرط مسلم شوند تا درستی برهانی را بپذیریم:

شرط ۱. پذیرفتن احکامی به‌نام «بنداشت» یا «اصل موضوع» که به هیچ توجیهی نیاز نداشته باشند.

---

۱. و یا ممکن است در مرحله‌ای از برهان به همان حکمی که اثبات آن مورد نظر است بازگردیم، که در این صورت می‌گوییم گرفتار «تسلسل» شده‌ایم. اصولاً در این گونه موارد به‌جای اینکه بگوییم دچار تسلسل می‌شویم، بهتر است بگوییم دچار «دور باطل» می‌شویم.ـم.

شرط ۲. توافق بر اینکه کی و چگونه حکمی «به‌طور منطقی» از حکم دیگر نتیجه می‌شود، یعنی توافق در برخی از قواعد استدلال.

کار عظیم اقلیدس این بود که چند اصل ساده یا چند حکم که بی‌نیاز از توجیهی پذیرفتنی بودند دستچین کرد، و از آنها ۴۶۵ گزاره را نتیجه گرفت، که بسیاری از آنها پیچیده بوده، و به‌طور شهودی بدیهی نبودند، و تمام اطلاعات هندسی زمان او را در برداشتند. یک دلیل بر زیبایی اصول اقلیدس این است که این همه را از آن اندک نتیجه گرفته است.

اصطلاحات تعریف‌نشده

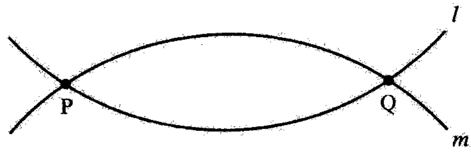
در اینکه برای پذیرفتن درستی یک برهان چه لازم است، بحث کردیم. اینک شرطی را ارائه می‌کنیم که آن را مسلم می‌شماریم:

شرط صفر. تفاهم متقابل در معنی واژه‌ها و نمادهایی که در سخن به کار برده می‌شوند.

تا وقتی که اصطلاحاتی را که به کار می‌بریم برای هر دوی ما آشناست و از آنها به نحوی سازگار استفاده می‌کنیم در تفاهم متقابل مشکلی وجود ندارد. اگر من اصطلاح ناآشنایی را به کار برم، شما حق دارید تعریف آن را از من بخواهید. تعاریف را به دلخواه نمی‌توان داد؛ تعاریف تابع قواعدی استدلالی هستند که در شرط ۲ به آنها اشاره کردیم (ولی آنها را مشخص نکردیم). مثلاً اگر زاویه قائمه را زاویه °۹۰ تعریف کنم و زاویه °۹۰ را زاویه قائمه تعریف کنم، از قاعده «استدلال دوری» عدول کرده‌ام.

همچنین، هر اصطلاحی را که به کار می‌بریم نمی‌توانیم تعریف کنیم. برای تعریف یک اصطلاح باید اصطلاحات دیگری را به کار بریم، و برای تعریف این اصطلاحات باید باز هم از اصطلاحات دیگری استفاده نماییم، و به همین ترتیب. اگر مجاز نباشیم برخی از اصطلاحات را تعریف‌نشده بپذیریم دچار دور یا تسلسل خواهیم شد.

اقلیدس نهایت سعی خود را به عمل آورده است تا همه اصطلاحات هندسی را تعریف کند. او «خط مستقیم» را چنین تعریف می‌کند: «خطی که به نحوی هموار بر نقاطی که بر خود آن هستند قرار داشته باشد». این تعریف، تعریف چندان سودبخشی نیست زیرا برای فهمیدن آن شما باید تصوری از خط داشته باشید. پس بهتر است «خط» را به‌صورت اصطلاحی تعریف‌نشده بپذیریم. همچنین اقلیدس «نقطه» را «چیزی که هیچ جزء ندارد» تعریف می‌کند ــ که باز چندان روشن نیست. پس نقطه را نیز به صورت اصطلاحی تعریف‌نشده می‌پذیریم. اینک پنج اصطلاح تعریف‌نشده را که مبنایی برای تعریف همه اصطلاحات هندسیِ دیگر در هندسه مسطحه اقلیدسی هستند می‌پذیریم:



شکل ۱.۱

«نقطه»

«خط»

«واقع بر»، (مثلاً : دو نقطه بر یک خط یکتا واقع‌اند)

«میان‌بود»، (مثلاً : نقطه C میان نقاط A و B است [همچنین می‌گوییم «نقطه C بین نقاط A و B است»])

«قابلیت انطباق»

برای هندسه فضایی ناگزیریم یک اصطلاح هندسی تعریف‌نشده دیگر، یعنی «صفحه» را بپذیریم و اصطلاح «واقع بر» را تعمیم دهیم تا قرارگرفتن نقاط و خطوط را بر صفحه میسر سازیم. در این کتاب خود را به هندسه مسطحه، یعنی به یک صفحه تنها محدود می‌کنیم (مگر اینکه خلاف آن ذکر شود)، لذا صفحه را چنین تعریف می‌کنیم: صفحه مجموعه نقاط و خطوطی است که گفته می‌شود همه آنها «بر آن واقع‌اند».

عبارتهایی هستند که اغلب با عبارت «واقع بر» مترادف‌اند. به جای اینکه بگوییم «نقطه P بر خط l واقع است»، گاهی می‌گوییم «خط l از نقطه P می‌گذارد» یا «P بر l واقع است»، که با نماد $\mathrm{P_I}l$ نشان داده می‌شود.[1] اگر نقطه P هم بر خط l واقع باشد و هم بر خط m، می‌گوییم «l و m در نقطه P مشترک‌اند»، یا «l و m در نقطه P متقاطع‌اند»، یا «l و m در نقطه P متلاقی‌اند»، یا «l، m را در نقطه P می‌برد».

دومین اصطلاح تعریف‌نشده یعنی «خط» را با «خط مستقیم» مترادف می‌گیریم. صفت «مستقیم» که با نام «خط» همراه می‌شود گمراه‌کننده است. همچنین، از خطوط منحنی صحبت نمی‌کنیم. با اینکه واژه «خط» تعریف نخواهد شد، بنداشتهای هندسه ما کاربرد آن را محدود خواهند ساخت. مثلاً، یکی از بنداشتها می‌گوید دو نقطه بر یک خط یکتا واقع‌اند. بدین‌ترتیب خطوط l و m در شکل ۱.۱ نمی‌توانند معرف دو خط در هندسه ما باشند، زیرا که هر دو از نقاط P و Q می‌گذرند.

اصطلاحات ریاضی دیگری هم وجود دارند که ما ناگزیریم از آنها استفاده کنیم و چون تعریفی

۱. عبارتهای «بر ... می‌گذرد» و «بر... قرار دارد»، صورتهای دیگری است برای بیان «واقع بر».

برای آنها قائل نمی‌شویم، باید آنها را به فهرست اصطلاحات تعریف‌نشده بیفزاییم. پیشتر به آنها نپرداختیم به این دلیل که آنها ماهیت خاص هندسی ندارند، بلکه چیزهایی هستند که اقلیدس آنها را «مفاهیم رایج» می‌نامد. ولی، چون ممکن است درباره این اصطلاحات دچار ابهام شویم، ذکر چند نکته را ضروری می‌دانیم.

واژه «مجموعه» در همه ریاضیات امروزی بنیادی است و اکنون در دبستانها هم به کار برده می‌شود. بنابراین تردیدی نیست که شما با کاربرد آن کاملاً آشنایی دارید. فکر کنید مجموعه «انبوهی از اشیا» است. دو مفهوم وابسته به آن هستند: یکی «تعلق داشتن به» یک مجموعه یا «عضو یا عنصر بودن» در یک مجموعه، مثل این قرارداد که می‌گوییم همه نقاط و همه خطها به این صفحه «تعلق دارند». اگر هر عضو از مجموعه S، عضوی از مجموعه T هم باشد، می‌گوییم S در T «گنجیده است» یا «جزئی از» T است یا «زیرمجموعه» T است. ما «پاره‌خط»، «نیم‌خط»، «دایره»، و سایر اصطلاحات هندسی را به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط در نظر می‌گیریم. با وجود این، در تعریف ما (به‌واسطه دوگانی در فصل ۲)، «خط مجموعه‌ای از نقاط نیست. هرگاه بخواهیم به مجموعه نقاط واقع بر خط l اشاره کنیم، آن مجموعه را با $\{l\}$ نشان می‌دهیم.

در زبان مجموعه‌ها، دو مجموعه S و T را زمانی مساوی یکدیگر می‌گوییم که هر عضو S عضو T باشد و برعکس. مثلاً S، مجموعه همه مؤلفان اصول اقلیدس (مسلماً) مساوی با مجموعه‌ای است که تنها عضو آن اقلیدس است. پس در این مورد «مساوی بودن» به معنی «یکی بودن» است.

اقلیدس واژه «مساوی» را در معنی متفاوت دیگری هم به‌کار می‌برد. مثلاً در این حکم: «در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور قاعده با هم مساوی‌اند». منظور او این است که در یک مثلث متساوی‌الساقین تعداد درجه‌های زاویه‌های مجاور به قاعده مساوی است، نه اینکه آن دو زاویه یکی هستند. لذا در این گونه موارد برای جلوگیری از اشتباه، ما دیگر از واژه «مساوی» به‌تعبیر اقلیدس استفاده نمی‌کنیم، بلکه به‌جای آن اصطلاح تعریف‌نشده قابل انطباق را به‌کار خواهیم برده و می‌گوییم «در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور قاعده قابل انطباق‌اند». همچنین نمی‌گوییم «اگر AB مساوی AC باشد، ΔABC متساوی‌الساقین است.» (بنابر تعریفی که ما از واژه «مساوی» کرده‌ایم اگر AB با AC مساوی باشد، ΔABC اساساً یک مثلث نخواهد بود بلکه تنها یک پاره‌خط است.) به جای آن می‌گوییم: «اگر AB قابل انطباق با AC باشد، ΔABC متساوی‌الساقین است». این کاربرد از اصطلاح تعریف‌نشده قابل انطباق، کلی‌تر از مفهومی است که شما به آن عادت کرده‌اید. این اصطلاح نه تنها برای مثلثها، بلکه برای زاویه‌ها و پاره‌خطها هم به‌کار می‌رود. برای اینکه بدانید این واژه را در کجا به‌کار برید، چنین تجسم کنید که اشیای قابل انطباق، «شکل و اندازه‌شان یکی است».

البته (همان‌طور که اقلیدس در «مفاهیم رایج» خود عمل کرده است) باید تصریح کنیم که «هر شیء با خودش قابل انطباق است» و «اشیای قابل انطباق با یک شیء، خود با هم قابل انطباق‌اند». احکامی از این قبیل را بعداً در میان بنداشتهای قابلیت انطباق (فصل ۳) خواهیم گنجانید.

فهرست اصطلاحات تعریف‌نشده‌ای را که در بالا آورده‌ایم متعلق به داویت هیلبرت (۱۸۶۲_۱۹۴۳) است. وی در کتابش به‌نام مبانی هندسه (۱۸۹۹) نه تنها تعریف اقلیدس را روشن ساخته است، بلکه شکافهایی را هم که در برخی از براهین اقلیدس وجود داشته، پر کرده است. هیلبرت دریافته است که برهان اقلیدس برای ملاک «دو ضلع و زاویه بین آنها» در قابلیت انطباق مثلثها، بر اساس یک فرض بیان‌نشده (اصل برهمنهش) استوار شده است، و این ملاک را باید یک بنداشت به شمار آورد. هیلبرت همچنین از کتاب موریتس پاش، که در ۱۸۸۲ نخستین کتاب دقیق در هندسه را منتشرکرده، استفاده کرده است. پاش فرضهای بیان‌نشده اقلیدس در باب میان‌بود را صریح ساخته است (ر. ک. به فصل ۳). از جمله ریاضیدانانی که تلاش کرده‌اند تا بنیاد دقیقی برای هندسه اقلیدسی بریزند باید از جوزیه پئانو، م. پیری، ورونسه، اُ. وبلن، رابینسون، اِ. و. هانینگتون و هـ. گ. فوردر نام برد. هر یک از این ریاضیدانان صورتی از اصطلاحات تعریف‌نشده را به کار می‌برد که با فهرست اصطلاحات تعریف‌نشده هیلبرت تفاوت دارد. مثلاً پیری تنها به دو اصطلاح تعریف‌نشده اکتفا کرده است (در نتیجه، بنداشتهای او پیچیده‌تر شده‌اند). انتخاب اصطلاحات تعریف‌نشده اختیاری است. انتخابهای هیلبرت از آن جهت معروف است که دستاوردی ظریف از هندسه مشابه خود اقلیدس ارائه کرده است.

چهار اصل اول اقلیدس

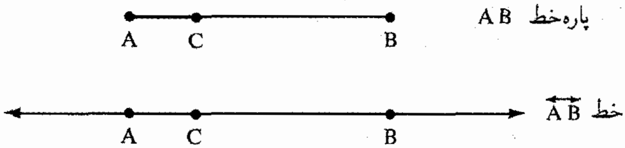
اقلیدس هندسه خود را بر اساس پنج فرض بنیادی به نام بنداشت یا اصل موضوع[1] بنا نهاده است.

اصل اول اقلیدس. به‌ازای هر نقطه P و هر نقطه Q که با P مساوی نباشد، خط یکتایی مانند l وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد.

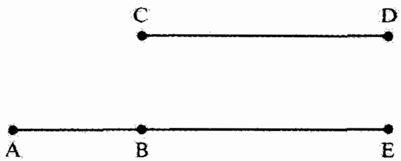
این اصل اغلب به‌صورت غیر رسمی چنین بیان می‌شود: «هر دو نقطه خط یکتایی را مشخص می‌سازند.» ما یگانه خط گذرنده از نقاط P و Q را با $\overleftrightarrow{PQ}$ نشان می‌دهیم.

برای بیان اصل دوم به تعریف زیر نیاز داریم.

۱. از این به بعد برای کوتاهی کلام به جای «اصل موضوع» فقط واژه «اصل» را به کار خواهیم برد مگر در مواردی که ابهامی ایجاد کند که در آن صورت اشاره خواهیم کرد.ـم.



شکل ۲.۱



شکل ۳.۱ $CD \cong BE$.

تعریف. دو نقطه A و B داده شده‌اند. پاره‌خط AB مجموعه‌ای است که اعضای آن نقاط A و B و همه نقاطی هستند که بر $\overleftrightarrow{AB}$، واقع بوده و بین A و B قرار دارند (شکل ۲.۱). دو نقطه مفروض A و B دو سر پاره‌خط AB نامیده می‌شوند.[1]

اصل دوم اقلیدس. به‌ازای هر پاره‌خط AB و هر پاره‌خط CD نقطه یکتایی چون E وجود دارد به‌طوری که B بین A و E است و پاره‌خط CD با پاره‌خط BE قابل انطباق است (شکل ۳.۱).

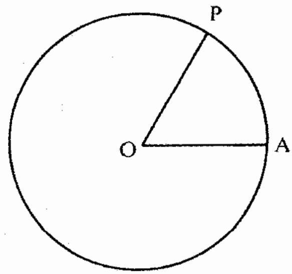
این اصل اغلب به‌طور غیررسمی چنین بیان می‌شود: «هر پاره‌خط AB را می‌توان به‌اندازه پاره‌خط BE، که با پاره‌خط داده شده CD قابل انطباق است، امتداد داد.» توجه کنید که در این اصل ما اصطلاح تعریف نشده «قابل انطباق» را به روشی در بالا به کار برده‌ایم و برای بیان این مطلب که CD با BE قابل انطباق است از علامت متداول $CD \cong BE$ استفاده می‌کنیم.

برای بیان اصل سوم، به تعریف دیگری نیاز داریم.

تعریف. دو نقطه O و A داده شده‌اند. مجموعه همه نقاطی مانند P به‌طوری که پاره‌خط OP با پاره‌خط OA قابل انطباق باشد دایره‌ای به مرکز O نامیده می‌شود، و هر یک از پاره‌خطهای OP شعاع این دایره نام دارد.

از مفهوم رایج اقلیدس که پیش از این به آن اشاره کردیم («هر چیز با خودش قابل انطباق است») نتیجه می‌شود که $OA \cong OA$، پس A نیز نقطه‌ای بر دایره‌ای است که هم‌اکنون تعریف کردیم.

۱. توجه درباره نمادگذاری: در بسیاری از کتابهای هندسه دبیرستانی، $\overline{AB}$ برای نمایش «پاره‌خط AB» به کار برده شده است.



شکل ۴.۱ دایره به مرکز O و شعاع OA.

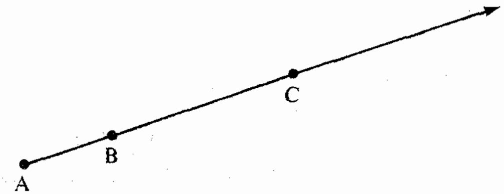
اصل سوم اقلیدس. به‌ازای هر نقطه O و هر نقطه A که با O مساوی نباشد دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA وجود دارد (شکل ۴.۱).

در حقیقت چون ما زبان مجموعه‌ها را بیشتر از زبان اقلیدس به‌کار می‌بریم، واقعاً لزومی به فرض این اصل نیست. این اصل نتیجه‌ای است از نظریه مجموعه‌ها که می‌گوید: مجموعه نقاطی نظیر P وجود دارد که به‌ازای آنها $OP \cong OA$. اقلیدس در ذهن خود به ترسیم دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA می‌اندیشیده است؛ و این اصل به ما می‌گوید که چنین ترسیمی، مثلاً، با پرگار مجاز است. به‌طور مشابه، در اصل دوم شما مجازید پاره‌خط AB را با رسم پاره‌خط BE با یک خط کش نامدرج [1] امتداد دهید. این نحوه بیان ما از عدم ارجاع به ترسیم در برهانها، اقلیدس را مبرا می‌کند.[2] ولی شما با ترسیمات توسط خط‌کش و پرگار در تمرین اصلی ۱ برخورد خواهید کرد.

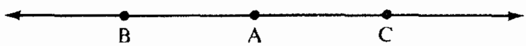
تعریف. نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ عبارت است از مجموعه نقاط واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ که به پاره‌خط AB تعلق دارند و همه نقاط نظیر C چنان‌که B میان A و C باشد. اصطلاحاً می‌گویند نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ از رأس A خارج‌شده و جزئی از $\overleftrightarrow{AB}$ است (شکل ۵.۱).

۱. به خاطر سادگی، از این به بعد در همه جا خط‌کش به جای «خط‌کش نامدرج» به کار برده خواهد شد، مگر اینکه صریحاً مشخص شده باشد.ـم.

۲. با وجود این، تعیین اینکه دقیقاً رسم هندسی کدام‌یک از مسائل تنها با خط‌کش و پرگار میسر است، خود در ریاضیات مسئله جالبی است. تا سده نوزدهم ثابت نشده بود که حل ترسیمی مسائلی نظیر تثلیث یک زاویه غیرمشخص، تربیع یک دایره، یا تکثیر یک مکعب با پرگار و خط‌کش امکان‌پذیر نیست. پیر وانتزل ثابت کرد که با تبدیل مسئله هندسی به مسئله جبری می‌توان نشان داد که حل مسائل با خط‌کش و پرگار تنها زمانی میسر است که حل این مسائل به حل معادلات جبری با استفاده از اعمال: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و جذر منجر شود. در معادلات جبری ویژه‌ای که برای مسائلی نظیر تثلیث زاویه نوشته می‌شود، به این دلیل مسئله حل نشدنی است که ریشه سوم لازم است. البته می‌توان یک زاویه را با به کار بردن ابزارهای دیگری نظیر یک خط‌کش مدرج و پرگار به سه قسمت مساوی تقسیم کرد: (←تمرین ۳ و پروژه‌های ۱، ۲، و ۴). ی. بویویی ثابت کرد که «تربیع دایره» در صفحه هذلولوی امکان‌پذیر است.



شکل ۵.۱ نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$.



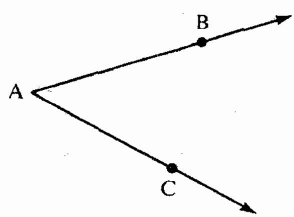
شکل ۶.۱ نیم‌خطهای متقابل.

تعریف. نیم‌خطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را متقابل گوییم هرگاه متمایز باشند و از یک نقطه A خارج شوند و جزئی از یک خط $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ باشند (شکل ۶.۱).

تعریف. یک «زاویه با رأس A» عبارت است از نقطه A و دو نیم‌خط متمایز نامتقابل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ (به نام ضلعهای زاویه) که از نقطه A خارج شده‌اند[۱] (شکل ۷.۱).

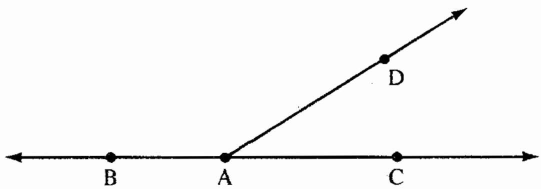
ما از نماد $\measuredangle A$، $\measuredangle BAC$ یا $\measuredangle CAB$ برای نشان دادن زاویه استفاده می‌کنیم.

تعریف. هرگاه دو زاویه $\measuredangle BAD$ و $\measuredangle CAD$ در ضلع $\overrightarrow{AD}$ مشترک باشند و دو ضلع دیگرِ آنها $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، نیم‌خطهای متقابل باشند آن دو زاویه مکمل یکدیگرند یا زاویه‌های مکمل نام دارند (شکل ۸.۱).

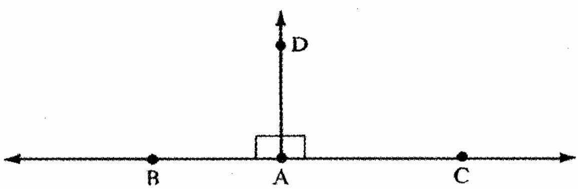


شکل ۷.۱ زاویه با رأس A.

۱. مطابق این تعریف چیزی نظیر «زاویه نیم‌صفحه» وجود ندارد. ما این عبارت را حذف می‌کنیم، زیرا بیشتر احکامی که ما در مورد زاویه صادر می‌کنیم شامل زاویه نیم‌صفحه نمی‌شوند. این تعریف، شامل زاویه صفر نیز نمی‌شود. [منظور از «زاویه نیم‌صفحه» زاویه‌ای است که اضلاعش بر امتداد هم باشند.ـ م.]



شکل ۸.۱ زاویه‌های مکمل.



شکل ۹.۱ زاویه‌های قائمه $\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle BAD$.

تعریف. زاویه $\sphericalangle BAD$ را قائمه گویند هرگاه مکملش زاویه‌ای قابل انطباق با آن باشد (شکل ۹.۱).

بدین‌ترتیب ما توانستیم زاویه قائمه را بدون توسل به «درجه» با استفاده از مفهوم تعریف نشده قابلیت انطباق زاویه‌ها تعریف کنیم. «درجه» به‌طور رسمی تا پیش از فصل ۴ تعریف نخواهد شد، ولی گاه‌وبی‌گاه در بحثهای غیررسمی به آن اشاره خواهیم کرد.

اکنون می‌توانیم اصل چهارم اقلیدس را بیان کنیم.

اصل چهارم اقلیدس. همه زاویه‌های قائمه با یکدیگر قابل انطباق‌اند.

این اصل مبین نوعی همگنی است. هر چند دو زاویه قائمه ممکن است از یکدیگر «بسیار دور» باشند ولی «یک اندازه» دارند. لذا این اصل معیاری طبیعی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها به ما می‌دهد.[۱]

۱. در مقابل، هیچ معیار طبیعی برای اندازه‌گیری درازا در هندسه اقلیدسی وجود ندارد. واحدهای درازا (فوت، متر و غیره) باید به دلخواه انتخاب شوند. از سوی دیگر، واقعیت جالب توجه در هندسه هذلولوی این است که معیاری طبیعی برای اندازه‌گیری درازا را می‌پذیرد (فصل ۶).

اصل توازی

چهار اصل اول اقلیدس همیشه به راحتی مورد قبول ریاضیدانان بوده است ولی اصل پنجم، اصل توازی، تا سده نوزدهم سخت موجب جدل و چون‌وچرا بوده است. در واقع، چنان‌که بعداً خواهیم دید، توجه به صورتهای مختلف اصل توازی اقلیدس است که موجب بسط و توسعه هندسه‌های نااقلیدسی است.

در اینجا اصل پنجم را به صورت اصلی، بدان گونه که در اصول آمده است، بیان نمی‌کنیم. به جای آن اصل ساده‌تری را (که بعداً نشان خواهیم داد با خود اصل پنجم اقلیدس منطقاً هم‌ارز است) عرضه خواهیم کرد. این صورت تازه معمولاً اصل پلی‌فیر [1] نامیده می‌شود، که در کتاب هندسه اقلیدسی اثر جان پلی‌فیر در ۱۷۹۵ منتشر شده است ــ اگر چه پروکلوس (۴۱۰ـ۴۸۵ ب.م.) خیلی بیش از او به آن اشاره کرده است. ما آن را اصل توازی اقلیدسی خواهیم نامید، زیرا این اصل، هندسه اقلیدسی را از هندسه‌های دیگری که بر اساس نوعی اصل توازی بنا شده‌اند متمایز می‌سازد. مهمترین تعریف در کتاب حاضر تعریف زیر است:

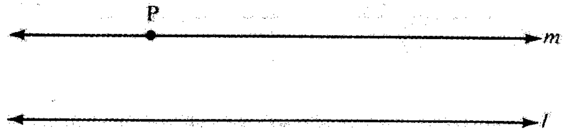
تعریف. دو خط l و m با هم موازی‌اند هرگاه متقاطع نباشند، یعنی نقطه‌ای پیدا نشود که بر هر دو خط واقع باشد. این امر را با $l \| m$ نمایش می‌دهیم.

اولاً توجه داشته باشید که فرض ما این است که خطها در یک صفحه قرار دارند (زیرا که بنا به قرارداد، همه نقطه‌ها و خطها در یک صفحه واقع‌اند مگر آنکه خلاف آن تصریح شود؛ در فضا خطوط ناهم‌صفحه‌ای وجود دارند که متقاطع نیستند و خطوط متنافر نامیده می‌شوند نه موازی). ثانیاً توجه کنید که این تعریف چه نمی‌گوید: نمی‌گوید که دو خط به یک فاصله از یکدیگرند، یعنی نمی‌گوید که فاصله دو خط در همه جا یکی است. از رسم دو خط موازی که در آن خطها به‌ظاهر متساوی‌الفاصله‌اند گمراه نشوید. ما در اینجا می‌خواهیم دقیق باشیم، پس نباید مفروضاتی را که به صراحت بیان نکرده‌ایم در برهان خود وارد سازیم. ضمناً، سریع نتیجه نگیرید که خطهای موازی متساوی‌الفاصله نیستند. ما خود را به هیچ‌یک از این وسوسه‌ها تسلیم نمی‌کنیم و داوری را برای بعد از موقعی می‌گذاریم که موضوع را به دقت مطالعه کرده باشیم. در اینجا تنها چیزی که از آن اطمینان داریم این است که دو خط موازی متقاطع نیستند.

اصل توازی اقلیدس. به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر آن تنها یک خط مانند m وجود دارد که از P می‌گذارد و با l موازی است (شکل ۱.۱۰).

چرا این اصل باید تا این اندازه مایه جدل باشد؟ این اصل ممکن است در نظر شما «بدیهی»

1. *Playfair's Postulate*



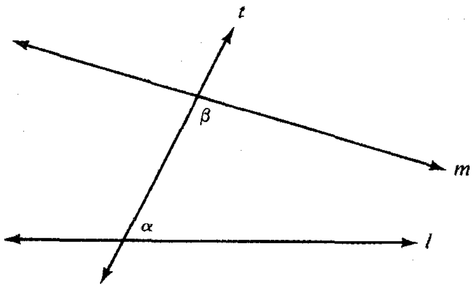
شکل ۱۰.۱ خطوط l و m موازی‌اند.

جلوه کند، شاید بدین علت که در شرایطی بوده‌اید که می‌بایستی طبق مفاهیم اقلیدسی فکر کنید. اما اگر ما بنداشتهای هندسی را انتزاعهایی از تجربه انگاریم، می‌توانیم تفاوت اساسی میان این اصل و چهار اصل دیگر را دریابیم. دو اصل اول از تجربیات ما با ترسیم با یک خط‌کش منتزع شده‌اند؛ اصل سوم از تجربیات ما از ترسیم با پرگار ناشی می‌شود. اصل چهارم شاید تجریدی با بداهت کمتر در نظر آید، ولی این اصل هم از تجربیات ما درباره اندازه‌گیری زاویه‌ها با نقاله نتیجه می‌شود (که در این اندازه‌گیری مجموع دو زاویه مکمل 180° است و اگر دو زاویه مکمل با یکدیگر قابل انطباق باشند، اندازه هر یک باید 90° باشد).

اصل پنجم با هر چهار اصل فوق متفاوت است، بدین معنی که نمی‌توانیم به‌طور تجربی تحقیق کنیم که آیا دو خط همدیگر را می‌برند یا نه، زیرا ما فقط پاره‌خطها را می‌توانیم رسم کنیم نه خطها را. می‌توانیم پاره‌خطها را بیشتر امتداد دهیم تا ببینیم که آیا همدیگر را می‌برند یا نه، ولی نمی‌توانیم آنها را تا بی‌نهایت امتداد دهیم. تنها وسیله ما این است که توازی را به‌طور نامستقیم با استفاده از ملاکِ دیگری غیر از تعریف فوق تحقیق کنیم.

چه ملاک دیگری برای توازی l و m می‌تواند وجود داشته باشد؟ اقلیدس فکر رسم خط قاطعی مانند t (متقاطع با l و m در دو نقطه متمایز) و اندازه‌گیری اندازه زاویه‌های درونی α و β، واقع در یک طرفِ t را عرضه کرده است. اقلیدس پیش‌بینی کرده است که هرگاه مجموع دو زاویه α و β کمتر از 180° باشد، دو خط l و m (اگر به قدر کافی امتداد داده شوند) یکدیگر را در یک طرف t، در همان زاویه‌های α و β می‌برند (شکل ۱۱.۱). در واقع اصل پنجم اقلیدس همین است.

اشکالی که در این ملاک توازی وجود دارد این است که [این ملاک] مبتنی بر فرضی است که در واقع با اصل توازی که در بالا ذکر کردیم منطقاً هم‌ارز است (هم‌ارزی اصول توازی، فصل ۴). پس برای متقاعد ساختن خود به صحت اصل توازی نمی‌توانیم از این ملاک ـــ که به دور در استدلال منجر می‌شود ـــ استفاده کنیم. خود اقلیدس از ماهیت چون‌وچرادار اصل توازی آگاهی داشته است، زیرا استفاده از آن را تا آنجا که می‌توانسته (تا اثبات بیست‌ونهمین قضیه خود) به تأخیر انداخته است.



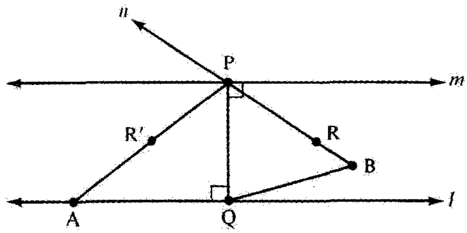
شکل ۱۱.۱

تلاش برای اثبات اصل توازی

یادآوری می‌کنیم که یک بنداشت در ابتدا چنان ساده و بدیهی تصور می‌شود که کسی نمی‌تواند در درستی آن تردید کند، ولی، اصل توازی از همان آغاز، به این عنوان که خصوصیات یک فرض ثابت نشده را دارا نیست مورد حمله قرار گرفت. ریاضیدانان در طی دوهزار سال تلاش کردند تا آن را از چهار اصل دیگر نتیجه گیرند و یا اصل دیگری را که به خودی‌خود بداهت بیشتری داشته باشد جانشین آن سازند. همه تلاشها برای اینکه آن را از چهار اصل دیگر نتیجه گیرند به ناکامی انجامید، زیرا آنچه را که اصطلاحاً برهان می‌نامیدند، همیشه متضمن فرضی نهایی بود که درستی آن قابل‌اثبات نبود. جانشین ساختن آن هم با اصولی که به‌خودی‌خود از بداهت بیشتری برخوردار باشند به اصولی منجر می‌شد که به‌طور منطقی با اصل توازی هم‌ارز بودند و بدین‌ترتیب از این جانشینها هم نتیجه‌ای عاید نمی‌شد. ما این تلاشها را که بسیار آموزنده‌اند در فصل ۵ به تفصیل بررسی خواهیم کرد. اکنون به یکی از آنها می‌پردازیم.

آدرین ماری لژاندر، دانشمند فرانسوی (۱۷۵۲ـ۱۸۳۳)، یکی از بهترین ریاضیدانان عصر خود بود که در بسیاری از شاخه‌های علوم ریاضی کشفیات مهمی دارد. اصل توازی ذهن این دانشمند را چنان به خود مشغول کرده بود که در طی ۲۹ سال، اصول هندسه‌اش را مرتباً تجدید چاپ کرد و در هر بار یکی از کوششهای تازه‌اش در مورد اصل توازی را یکی پس از دیگری در آنها درج نمود.[۱] در اینجا به ذکر یکی از کوششهای او می‌پردازیم (شکل ۱۲.۱).

۱. ترجمه دیویس از اصول، رایجترین متن هندسه در ایالات متحده در سده نوزدهم بود. شهرت لژاندر بیشتر به خاطر روش کمترین مربعات در آمار، قانون تقابل مربعی در نظریه اعداد، و چندجمله‌ایهای لژاندر در معادله دیفرانسیل است. تلاش او برای اثبات اصل توازی به دو قضیه مهم در هندسه نتاری منجر شده است (فصل ۴).
توضیح. اگر p و q دو عدد اول فرد متمایز باشد، دستور $(q|p)(p|q) = (-۱)^{(۱/۴)(p-۱)(q-۱)}$ را قانون تقابل مربعی می‌نامند. در این دستور، نماد $(c|p)$ را برابر با ۱ گرفته می‌شود اگر همنهشتی $x^۲ \equiv c$ (پیمانه p) جواب
←



شکل ۱.۱۲

آدرین ماری لژاندر

نقطه P ناواقع بر خط l داده شده است. عمود PQ (Q پای عمود) را از P بر l وارد و فرض می‌کنیم m خطی باشد که از P بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود شده است. پس، m با l موازی است، زیرا l و m یک عمود مشترک $\overleftrightarrow{PQ}$ دارند. فرض می‌کنیم n خط دلخواهی غیر از m و $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد که از P رسم شده است. باید نشان دهیم که خط n خط l را می‌برد. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PR}$ نیم‌خطی از n بین $\overrightarrow{PQ}$ و یک نیم‌خط m که از P خارج شده است باشد. نقطه‌ای مانند R′ در آن طرفی از $\overrightarrow{PQ}$ که R در آن نیست وجود دارد چنان‌که $\measuredangle QPR \cong \measuredangle QPR'$. پس Q درون $\measuredangle RPR'$ قرار دارد. چون خط l از نقطه Q درون $\measuredangle RPR'$ می‌گذرد، باید یکی از ضلعهای این زاویه را

داشته باشد و ۱− گرفته می‌شود هر گاه این همنهشتی جواب نداشته باشد. مثلاً (۶|۱۹) برابر با ۱ گرفته می‌شود، زیرا همنهشتی (پیمانه ۱۹)۶ $\equiv x^2$ دارای جوابهای (۱۴ و ۵) است. در حالی‌که (۳۹|۴۷) برابر با ۱− است زیرا همنهشتی (پیمانه ۴۷)۳۹ $\equiv x^2$ جواب ندارد.ـم.

ببرد. اگر l ضلع $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ را ببرد، مطمئناً n را هم خواهد برید. فرض می‌کنیم l ضلع $\overrightarrow{\mathrm{PR'}}$ را در نقطه A ببرد و B تنها نقطه‌ای بر ضلع $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ باشد چنان‌که $\mathrm{PA} \cong \mathrm{PB}$. پس $\Delta\mathrm{PQA} \cong \Delta\mathrm{PQB}$ (ض‌زض)؛ بنابراین $\measuredangle \mathrm{PQB}$ قائمه است و از آنجا B بر l (و n) واقع است.

ممکن است این احساس به شما دست دهد که این برهان کاملاً معقول است، ولی چگونه می‌توانید بگویید درست است؟ باید درستی هر مرحله را اول با تعریف دقیق هر اصطلاح ثابت کنید. مثلاً باید معنی «عمود بودن» دو خط را تعریف کنید ــ وگرنه چگونه می‌توانید درستی ادعای موازی بودن l و m را صرفاً به سبب دارا بودن یک عمود مشترک بپذیرید؟ (اول باید، اگر بتوانید، آن را به‌صورت یک قضیه جداگانه ثابت کنید). بایستی درستی ملاک قابلیت انطباق (ض‌زض) را در آخرین حکم قبول کنید. باید «درون» یک زاویه را تعریف و ثابت کنید خطی که از درون یک زاویه می‌گذرد باید یکی از اضلاع آن را ببرد. در اثبات همه این چیزها باید خاطرجمع باشید که تنها از چهار اصل اول استفاده می‌کنید و از هیچ حکمی هم‌ارز اصل پنجم کمک نمی‌گیرید و گرنه گرفتار برهان دوری می‌شوید.

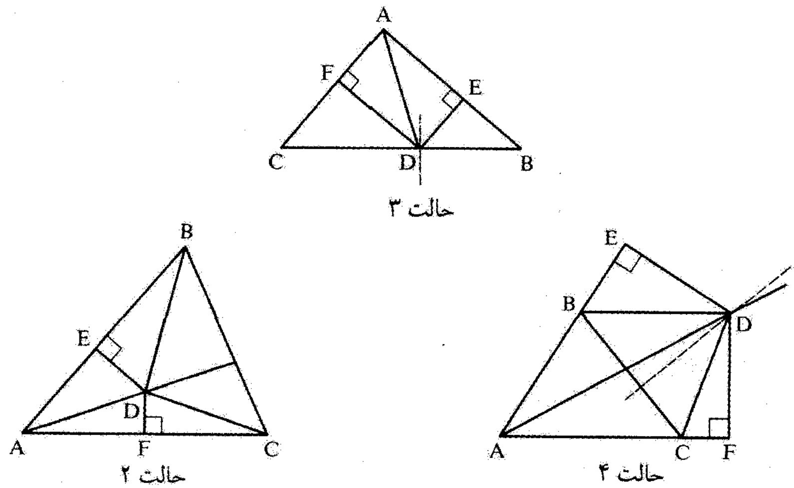
بدین‌ترتیب پیش از آنکه بتوانیم نقایص را پیدا کنیم. باید کارهای زیادی انجام دهیم. ما این کار مقدماتی را در چند فصل بعد انجام خواهیم داد تا بتوانیم با اطمینان خاطر بگوییم که برهان پیشنهادی لژاندر صحیح است یا نیست. (برهان لژندار شامل چند حکم است که نمی‌توان آنها را به کمک چهار اصل اول ثابت کرد.) با انجام این‌کار، بهتر می‌توانیم مبانی هندسه اقلیدسی را بفهمیم. خواهیم دید که بخش اعظم این هندسه مستقل از نگره توازی است و در هندسه هذلولوی نیز درست است.

خطر نمودارها

نمودارها در فهم هندسه پیوسته ما را یاری کرده‌اند ــ و در اصول اقلیدس و در این کتاب هم آمده‌اند. ولی همواره این خطر هست که نموداری موجب مغالطه شود. یک نمودار ممکن است تا حدی نادقیق یا معرف حالت ویژه‌ای باشد. اگر قرار باشد نقصهایی را که در براهینی نظیر برهان لژاندر وجود دارند پیدا کنیم، نباید با نمودارهایی که موجه به‌نظر می‌رسند گمراه شویم.

آنچه در زیر می‌آید برهانی است معروف و تا حدی پیچیده که مدعی اثبات این است که همه مثلثها متساوی‌الساقین هستند. فعلاً سعی کنید خود را در متن هندسه دبیرستانی قرار دهید. (بعد از این فصل انتظار می‌رود که شما همیشه این اطلاعات را دم دست داشته باشید.) ببینید آیا می‌توانید نقص این استدلال را پیدا کنید.

$\Delta\mathrm{ABC}$ داده شده است. نیمساز $\measuredangle\mathrm{A}$ و عمودمنصف BC، روبه‌روی زاویه $\measuredangle\mathrm{A}$ را رسم کرده و حالات مختلف این دو خط را بررسی کنید (شکل ۱۳.۱).



شکل ۱۳.۱

حالت ۱. نیمساز $\measuredangle A$ و عمودمنصف پاره‌خط BC موازی یکدیگرند یا یکی هستند. در هر دو حالت، نیمساز $\measuredangle A$ عمود بر BC است و بنابر تعریف، ارتفاع است. بنابراین، مثلث متساوی‌الساقین است. (این نتیجه‌گیری از این قضیه اقلیدس به‌دست می‌آید: اگر نیمساز و ارتفاع مرسوم از یک رأس در مثلثی بر هم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.)

اکنون فرض می‌کنیم نیمساز $\measuredangle$A و عمودمنصف BC نه موازی باشند و نه منطبق. پس یکدیگر را درست در یک نقطه D می‌برند، و سه حالت ممکن است پیش آید:

حالت ۲. نقطه D درون مثلث است.

حالت ۳. نقطه D روی ضلع مثلث است.

حالت ۴. نقطه D بیرون مثلث است.

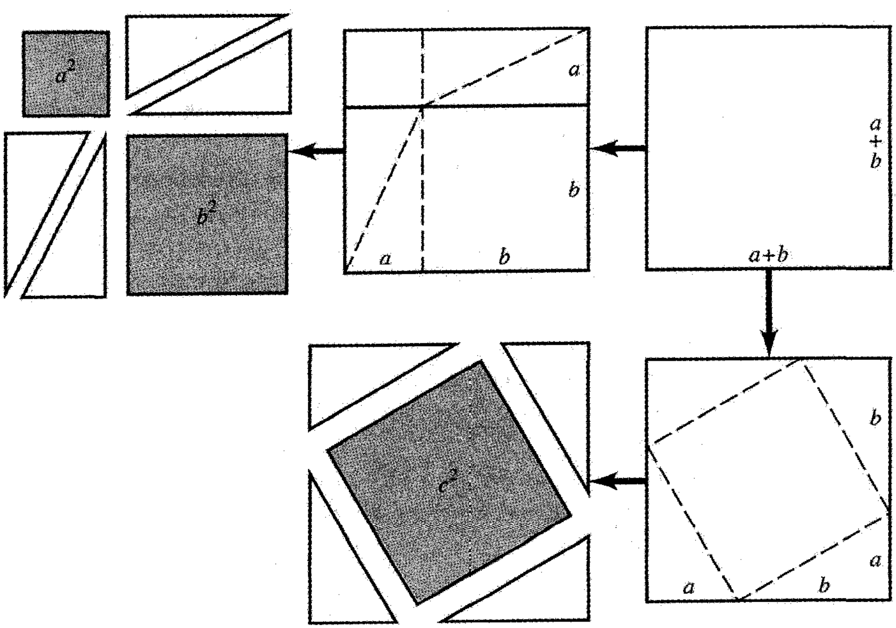
در همه حالات DE را عمود بر AB و DF را عمود بر AC رسم کنید. برای حالتهای ۲ و ۴، D را به B و C وصل کنید. اکنون برهان زیر در هر حالتی صادق است (شکل ۱۳.۱).

$DE \cong DF$، زیرا همه نقاط واقع بر نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند؛ $DA \cong DA$، و $\measuredangle DEA$ و $\measuredangle DFA$ قائمه‌اند. بنابراین ΔADE و ΔADF قابل انطباق‌اند ــبنابر قضیه اقلیدسی وتر و یک ضلعــ (می‌توانستیم از قضیه (ض‌زز) با $DA \cong DA$ و زاویه‌های قائمه و

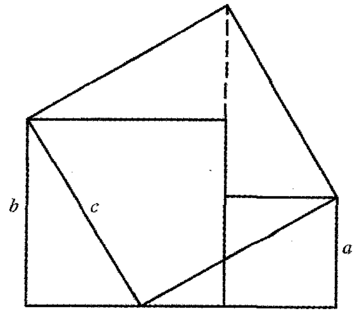
زاویه‌های نصف شده نیز استفاده کنیم). بنابراین $AE \cong AF$. اما $DC \cong DB$ زیرا همه نقاط عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند. همچنین $DF \cong DE$ و $\measuredangle DEB$ و $\measuredangle DFC$ قائمه‌اند. بدین ترتیب، بنابر قضیه وتر و یک ضلع، ΔDEB با ΔDFC قابل انطباق است و لذا $BE \cong FC$. از اینجا نتیجه می‌شود $AC \cong AB$ ــ در حالتهای ۲ و ۳ از راه جمع و در حالت ۴ از راه تفریق. پس مثلث متساوی‌الساقین است.

قدرت نمودارها

هندسه برای بشر (اما نه برای رایانه‌ها)، یک موضوع عینی است. نمودارهای درست کمک زیادی به درک براهین و کشف قضایای جدید می‌کنند. یکی از بهترین مثالها از این دست، شکل ۱۴.۱ است که صحت قضیه فیثاغورس را در هندسه اقلیدسی فوراً آشکار می‌سازد (برهان اقلیدس خیلی پیچیده‌تر بوده است). شکل ۱۵.۱ یک نمودار ساده‌تر است که برهانی را از راه برش به ذهن القا می‌کند.



شکل ۱۴.۱



شکل ۱۵.۱

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) اصل توازی اقلیدسی بیان می‌کند که به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر l، خط یکتایی مانند m وجود دارد که از P می‌گذارد و با l موازی است.

(۲) یک «زاویه» به‌صورت فضای بین دو نیم‌خط تعریف می‌شود که از یک نقطه مشترک خارج شده باشند.

(۳) بیشتر قضایایی که در اصول اقلیدس آمده خود اقلیدس کشف کرده است.

(۴) بنابر تعریف، خط m زمانی با خط l «موازی» است که به‌ازای هر دو نقطه P و Q از m، فاصله P از l برابر با فاصله Q از l باشد.

(۵) لزومی نداشته است که اقلیدس اصل توازی را کشف کند، زیرا ریاضیدان فرانسوی، لژاندر، آن را ثابت کرده است.

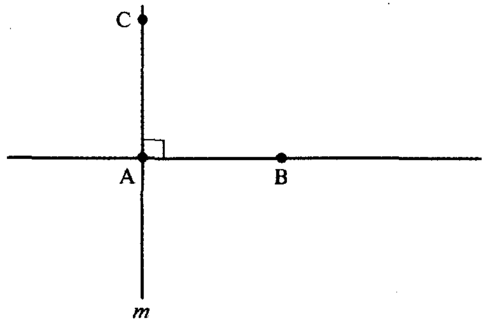
(۶) «مورب» نسبت به دو خط، خطی را گویند که هر دوی آنها را در نقاط متمایز ببرد.

(۷) بنابر تعریف، «زاویه قائمه» زاویه‌ای است ۹۰°.

(۸) «بنداشتها» یا «اصلهای موضوع» احکامی هستند که پذیرفته می‌شوند بی‌آنکه درستی آنها بعداً ثابت شود، در حالی که «قضایا» یا «گزاره‌ها» احکامی هستند که با استفاده از بنداشتها ثابت می‌شوند.

(۹) $\sqrt{۲}$ را «عدد گنگ» می‌نامیم زیرا نمی‌توان آن را به صورت خارج‌قسمت دو عدد درست بیان کرد.

(۱۰) یونانیان قدیم اولین افرادی بودند که برای اطمینان از درستی احکام ریاضی در اثبات آنها پافشاری می‌کردند.



شکل ۱۶.۱ خطوط متعامد.

تمرین

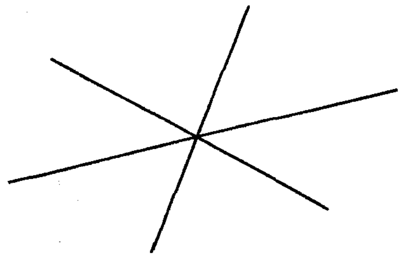
در تمرینهای ۱ تا ۴ از شما خواسته شده است که بعضی از اصطلاحات آشنای هندسی را تعریف کنید. این تمرینها برای دوره کردن این مفاهیم داده شده‌اند و نیز تمرینهایی برای بیان دقیق تعاریف هستند. وقتی چیزی را تعریف می‌کنید می‌توانید از پنج اصطلاح تعریف نشده هندسی و همه اصطلاحات هندسی دیگری که تاکنون در متن یا در تمرینهای پیش از آن تعریف شده‌اند استفاده کنید.

در برخی موارد پیدا کردن یک تعریف مستلزم اندکی تفکر است. مثلاً چگونه می‌خواهید تعامد را برای دو خط l و m تعریف کنید؟ نخستین کوشش شما ممکن است این باشد که بگویید «l و m یکدیگر را قطع می‌کنند و در نقطه برخورد زاویه قائمه می‌سازند». از مفهومهای «قطع کردن» و «زاویه قائمه» مجازیم استفاده کنیم زیرا این اصطلاحات قبلاً تعریف شده‌اند. ولی معنی این حکم که دو خط با هم زاویه قائمه می‌سازند چیست؟ بدیهی است برای نشان دادن منظور خود می‌توانیم از رسم شکل استفاده کنیم، ولی مسئله این است که باید موضوع لفظاً، تنها با استفاده از اصطلاحاتی که قبلاً تعریف شده‌اند بیان شود. بنابر تعریف صفحه ۲۴، زاویه از دو نیم‌خط نامتقابل که از یک رأس خارج می‌شوند تشکیل شده است. لذا می‌توانیم l و m را عمود بر هم تعریف کنیم هرگاه در یک نقطه A یکدیگر را ببرند و نیم‌خطی مانند $\overrightarrow{AB}$ بر l و نیم‌خطی مانند $\overrightarrow{AC}$ بر m وجود داشته باشند چنان‌که $\measuredangle BAC$ قائمه باشد. **این تعامد را با $l \perp m$ نشان می‌دهیم** (شکل ۱۶.۱).

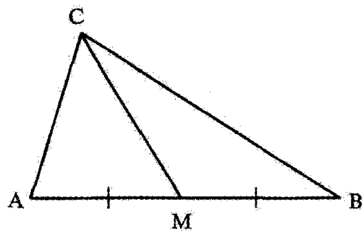
۱. اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

(الف) نقطه M وسط پاره‌خط AB.

(ب) عمودمنصف پاره‌خط AB (می‌توانید از اصطلاح «نقطه وسط» که هم‌اکنون تعریف کردید استفاده کنید).



شکل ۱.۱۷ خطوط متقارب.



شکل ۱.۱۸ میانه.

(ج) نیم‌خط $\overrightarrow{BD}$ نیمساز $\measuredangle ABC$ (نقطه مفروض D بین A و C است).

(د) هم‌خطی نقاط A، B، و C.

(ه) تقارب خطهای l، m، و n (شکل ۱.۱۷).

۲. اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

(الف) مثلث ΔABC حاصل از سه نقطه غیرهم‌خط A، B، و C.

(ب) رأسها، اضلاع و زاویه‌های ΔABC («اضلاع» پاره‌خط هستند نه خط).

(ج) ضلعهای مقابل به و مجاور به رأس A از ΔABC.

(د) میانه‌های یک مثلث (شکل ۱.۱۸).

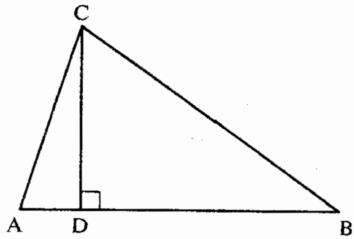
(ه) ارتفاعهای یک مثلث (شکل ۱.۱۹).

(و) مثلث متساوی‌الساقین، قاعده و زاویه‌های مجاور به قاعده.

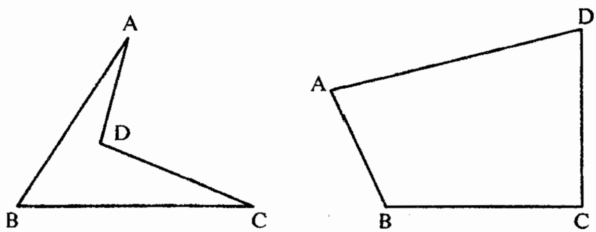
(ز) مثلث متساوی‌الاضلاع.

(ح) مثلث قائم‌الزاویه.

۳. چهار نقطه A، B، و C، و D که هیچ سه‌تای از آنها بر یک خط نیستند طوری داده شده‌اند که هر جفت از پاره‌خطهای AB، BC، و CD و DA نقطه مشترکی ندارند یا فقط در



شکل ۱۹.۱ ارتفاع.



شکل ۲۰.۱ چهارضلعی.

یکی از دو سر مشترک‌اند. حال می‌توانیم چهارضلعی □ABCD را چنین تعریف کنیم که از چهار پاره‌خط یادشده درست شده، و این چهار پاره‌خط اضلاع آن، و این چهار نقطه چهار رأس آن نامیده می‌شوند (شکل ۲۰.۱). (توجه داشته باشید که ترتیب نوشتن حروف مهم است. مثلاً □ABCD ممکن است چهارضلعی نباشد، بدین معنی که ممکن است AB، CD را ببرد. اگر □ABCD معرف یک چهارضلعی باشد، این چهارضلعی همان چهارضلعی □ACDB نخواهد بود. کدام جایگشت از چهار حرف A، B، C، و D همان چهارضلعی □ABCD را به‌وجود می‌آورد؟) با استفاده از این تعریف مفاهیم زیر را تعریف کنید:

(الف) زاویه‌های □ABCD.

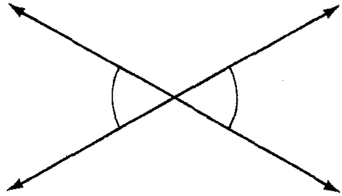
(ب) اضلاع مجاور □ABCD.

(ج) اضلاع روبه‌رو در □ABCD.

(د) قطرهای □ABCD.

(ه) یک متوازی‌الاضلاع (از واژه «موازی» استفاده کنید).

۴. زاویه‌های متقابل به رأس (شکل ۲۱.۱) را تعریف کنید. چگونه می‌خواهید ثابت کنید که زاویه‌های متقابل به رأس قابل انطباق‌اند؟ (فقط طرح اثباتی را بریزید ــ وارد جزئیات نشوید.)



شکل ۲۱.۱ زاویه‌های متقابل به‌رأس.

۵. با استفاده از یک مفهوم رایج (ص۱۹) قضیه زیر را ثابت کنید: هرگاه P و Q دو نقطه دلخواه از دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA باشند، آنگاه $\mathrm{OP} \cong \mathrm{OQ}$.

۶. (الف) دو نقطه A و B و نقطه سوم C بین آنها داده شده است. (توجه داشته باشید که واژه «بین» از اصطلاحات تعریف نشده است.) آیا می‌توانید راهی بیندیشید که به کمک اصول ثابت کنید که C بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ واقع‌است؟

(ب) فرض می‌کنیم که توانستید ثابت کنید C بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ قرار دارد. آیا می‌توانید به کمک تعریف «نیم‌خط» و اصول ثابت کنید که $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$؟

۷. هرگاه S و T دو مجموعه باشند، اجتماع $(T \cup S)$ و اشتراک $(T \cap S)$ آنها چنین تعریف می‌شود:

(i) یک شیء را متعلق به $(S \cup T)$ می‌شمارند اگر و تنها اگر به S یا به T (یا به هر دوی آنها) متعلق باشد.

(ii) یک شیء را متعلق به $(S \cap T)$ می‌شمارند اگر و تنها اگر هم به S متعلق باشد و هم به T.

دو نقطه A و B داده شده‌اند. دو نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ و $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ را در نظر می‌گیریم. نموداری رسم کنید که نشان دهد $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cap \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \mathrm{AB}$ و $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cup \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$. چه بنداشتهای دیگری درباره اصطلاح تعریف نشده «بین» می‌بایستی فرض کنیم تا بتوانیم این تساویها را ثابت کنیم؟

۸. برای اینکه نیاز به تعریف دقیق را بیشتر نشان دهیم، تعریفهای زیر را که برای مستطیل ممکن هستند در نظر می‌گیریم:

(i) یک چهار ضلعی با چهار زاویه قائمه.

(ii) یک چهارضلعی که همه زاویه‌هایش قابل انطباق‌اند.

(iii) متوازی‌الاضلاعی که لااقل یک زاویه قائمه دارد.

در این کتاب ما تعریف (i) را اختیار می‌کنیم. ممکن است تجربه شما از هندسه اقلیدسی این

فکر را در شما ایجاد کند که این سه تعریف هم‌ارزند. طرحی ساده برای اثبات این هم‌ارزی بریزید و دقیقاً توجه داشته باشید که کدام قضایا را به‌طور ضمنی مفروض می‌گیرید. در هندسه هذلولوی این تعریفها موجب پیدایش سه مجموعه چهارضلعی متفاوت می‌شوند (فصل ۶). با در دست داشتن تعریف «مستطیل» تعریفی برای مربع بیاورید.

۹. آیا می‌توانید راهی بیندیشید که به کمک اصول ثابت کنید که به‌ازای هر خط l:

(الف) نقطه‌ای واقع بر l وجود دارد؟

(ب) نقطه‌ای غیرواقع بر l وجود دارد؟

۱۰. آیا می‌توانید راهی بیندیشید که به کمک اصول ثابت کنید صفحه ناتهی است، یعنی نقطه‌ها و خطها «وجود دارند»؟ (با استاد خود این مسئله را مطرح کنید که وقتی می‌گوییم موجودات ریاضی از قبیل نقطه و خط «وجود دارند» یعنی چه).

۱۱. آیا فکر می‌کنید که اصل توازی اقلیدسی «بدیهی» است؟ دلایل خود را ضمن مقاله کوتاهی بیان کنید.

۱۲. نقص این برهان که «همه مثلثها متساوی‌الساقین‌اند» چیست؟ (همه قضایای هندسه اقلیدسی که در برهان به کار برده شده‌اند صحیح‌اند.)

۱۳. اگر عدد π به‌صورت نسبت محیط هر دایره به قطرش تعریف شده باشد، اول چه قضیه‌ای را باید ثابت کنیم تا این تعریف موجه باشد؟ (مثلاً اگر من یک عدد جدید ϕ را نسبت مساحت هر دایره به قطرش «تعریف کنم» این تعریف موجه نخواهد بود. قضیه مورد نیاز در بخش ۲.۲۱ کتاب موییز، ۱۹۹۰، آمده است).

۱۴. آیا فکر کنید بتوان روش بنداشتی را برای موضوعهایی غیر از ریاضیات هم به کار برد؟ آیا قانون اساسی ایالات متحده (به انضمام تمام اصطلاحاتی که در آن آمده است) فهرست بنداشتهایی است که دادگاههای فدرال روشهای قانونی‌خود را منطقاً از آنها اقتباس می‌کنند؟ آیا فکر می‌کنید «حقایقی» که در بیانیه استقلال تأکید شده‌اند «خودبه‌خود بدیهی» هستند؟

۱۵. تفسیری بر کاربرد روش بنداشتی اسپینوزا بنویسید که نامبرده آن را در کتابی به عنوان زیر در ۱۶۷۵ نوشته است: قوانین اخلاقی به‌ترتیب هندسی نظم یافته و به پنج جزء تقسیم شده‌اند: جزء اول در خدا؛ جزء دوم در ماهیت و منشأ باورها؛ جزء سوم در ماهیت و منشأ عواطف؛ جزء چهارم در اسارت انسان یا نیروی احساسات؛ جزء پنجم در نیروی عقل یا آزادی انسان. (قسمت عمده نظر خود را به جزءهای چهارم و پنجم اختصاص دهید.)

تمرینهای اصلی

۱. در این دسته از تمرینها می‌خواهیم حل چند مسئله اساسی اقلیدسی را از راه ترسیم با خط‌کش و پرگار از نظر بگذرانیم. این گونه ترسیمها از دوران باستان تا سده نوزدهم که سرانجام همه مسائل ترسیمی کهن حل شدند ریاضیدانان را شیفته خود کرده بود.

(الف) پاره‌خط AB داده شده است. عمودمنصف آن را رسم کنید. (راهنمایی: همان‌گونه که در شکل ۲۲.۱ نشان داده شده است AB را به‌صورت قطری از یک لوزی درآورید.)

(ب) خط l و یک نقطه P بر آن داده شده‌اند. از P خطی عمود بر l رسم کنید. (راهنمایی: نقطه P را وسط پاره‌خطی واقع بر l بگیرید.)

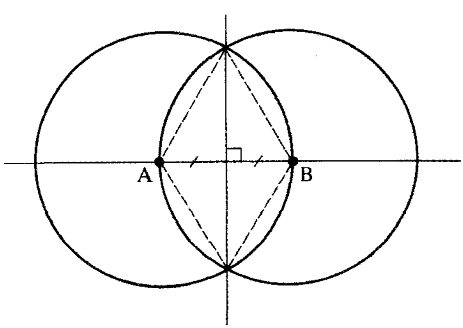
(ج) خط l و نقطه P ناواقع بر آن داده شده‌اند. از P خطی رسم کنید که بر l عمود باشد. (راهنمایی مثلث متساوی‌الساقین ΔABP را که قاعده AB آن بر l باشد بسازید و از (الف) استفاده کنید.)

(د) خط l و نقطه P ناواقع بر آن داده شده‌اند. از P خطی به موازات l رسم کنید. (راهنمایی: از (ب) و (ج) استفاده کنید.)

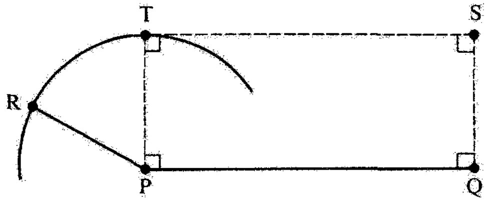
(ه) نیمساز یک زاویه را رسم کنید. (راهنمایی: از این قضیه اقلیدس که عمودمنصف قاعده مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه روبه‌رو به قاعده آن است، استفاده کنید.)

(و) مثلث ΔABC و پاره‌خط $DE \cong AB$ داده شده‌اند. در یک طرف خط مفروض $\overleftrightarrow{ED}$ نقطه‌ای مانند F بیابید. به‌طوری‌که $\Delta DEF \cong \Delta ABC$

(ز) زاویه $\sphericalangle ABC$ و نیم‌خط $\overrightarrow{DE}$ داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند F در یک طرف خط مفروض $\overleftrightarrow{DE}$ پیدا کنید به‌طوری‌که $\sphericalangle FDE \cong \sphericalangle ABC$.



شکل ۲۲.۱



شکل ۲۳.۱

۲. اقلیدس پرگار را فروریختنی فرض می‌کرد. یعنی اگر دو نقطه P و Q داده شده باشند پرگار می‌تواند دایره‌ای به مرکز P رسم کند که از Q بگذرد (اصل سوم)؛ ولی، نوک پرگار نمی‌تواند به مرکز دیگر O برده شود تا دایره‌ای با همان شعاع رسم کند. وقتی نوک پرگار حرکت داده شد، پرگار «فرو می‌ریزد». ترسیمهای مربوط به تمرین ۱ را بررسی کنید و ببینید که آیا می‌شود آنها را با پرگار فروریختنی رسم کرد؟ (در این تمرینها وقتی می‌گوییم خطی «داده شده» است، منظور این است که دو یا چند نقطه بر آن داده شده‌اند.)

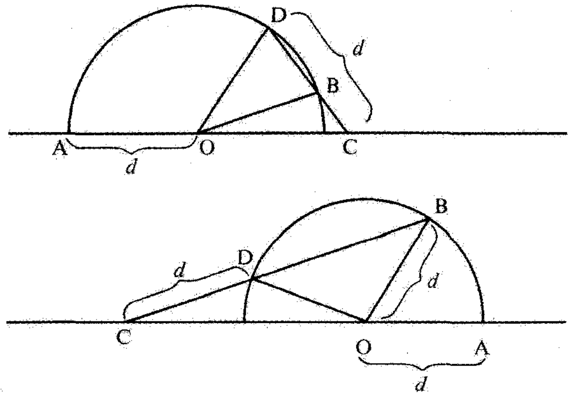
(الف) سه نقطه P، Q، و R داده شده‌اند. با یک خط‌کش و یک پرگار فروریختنی مستطیل $\square$PQST به ضلع PQ را چنان رسم کنید که $PT \cong PR$ (شکل ۲۳.۱).

(ب) پاره‌خط PQ و نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ داده شده‌اند. نقطه C را بر $\overleftrightarrow{AB}$ پیدا کنید چنان‌که $PQ \cong AC$. (راهنمایی: با استفاده از (الف) مستطیل $\square$PAST$(PT \cong PQ)$ را رسم کنید، سپس دایره‌ای به مرکز A رسم کنید که از S بگذرد.)

تمرین (ب) نشان می‌دهد که شما می‌توانید پاره‌خطها را با یک پرگار فروریختنی و یک خط‌کش انتقال دهید. پس می‌توانید همه ترسیمها را چنان‌که گویی پرگار شما «فروریختنی» نیست انجام دهید.

۳. خط‌کشی که در تمرینهای پیش به کار بردید نامدرج فرض شده بود (اگر هم مدرج بود فرض این بود که مجاز نبوده‌اید از درجه‌بندی آن استفاده کنید). اما اکنون فرض می‌کنیم که بر این خط‌کش دو نشانه طوری گذاشته شده باشد که فاصله‌ای مانند d را مشخص سازند: ارشمیدس نشان داده است چگونه می‌توانیم ثلث زاویه‌ای را رسم کنیم.

اگر زاویه‌ای به رأس O داده شده باشد، دایره‌ای مانند γ به شعاع d و مرکز O رسم می‌کنیم تا اضلاع این زاویه را در نقاط A و B ببرد. حال خط‌کش را چنان قرار می‌دهیم که یکی از نشانه‌های آن بر نقطه‌ای مانند C از خط $\overleftrightarrow{OA}$ بگذرد به‌طوری که O بین A و C قرار گیرد و نشانه دیگر در نقطه‌ای مانند D بر دایره واقع باشد و در عین حال امتداد خط‌کش از B بگذرد به‌طوری که B، C،



شکل ۲۴.۱

و D بر یک استقامت باشند (شکل ۲۴.۱). ثابت کنید COD ∢ که بدین‌ترتیب به‌دست می‌آید یک سوم زاویه AOB ∢ است. (راهنمایی: از قضایای اقلیدس در باب زاویه‌های بیرونی و مثلث متساوی‌الساقین استفاده کنید.)

۴. عدد $\rho = (۱ + \sqrt{۵})/۲$ را یونانیان نسبت زرین می‌نامیدند و مستطیلی را که نسبت اضلاعش مساوی ρ بود مستطیل زرین[۱] می‌خواندند. ثابت کنید که یک مستطیل زرین را می‌توان با خط‌کش و پرگار به طریق زیر رسم کرد:

(الف) رسم یک مربع □ABCD.

(ب) پیدا کردن نقطه M وسط AB.

(ج) پیدا کردن نقطه E به‌طوری‌که B میان A و E باشد و $\mathrm{MC} \cong \mathrm{ME}$ (شکل ۲۵.۱).

(د) پیدا کردن پای عمود مرسوم از E بر $\overleftrightarrow{\mathrm{DC}}$.

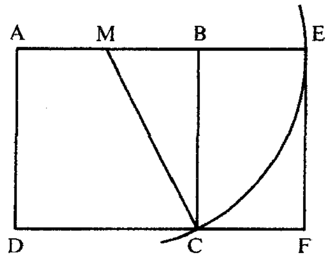
(ه) در این صورت □AEFD مستطیل زرین است (از قضیه فیثاغورس در ΔMBC استفاده کنید).

(و) به‌علاوه □BEFC مستطیل زرین دیگری است (ابتدا نشان دهید که $1/p = p - ۱$).

حل دو تمرین بعد مستلزم داشتن اطلاعاتی در زمینه مثلثات است.

۵. مصریان می‌پنداشتند که هرگاه a، b، c، و d طول اضلاع یک چهارضلعی باشند مساحت آن، S، از دستور $(a + c)(b + d)/۴$ به‌دست می‌آید. ثابت کنید که در واقع

۱. برای کاربرد نسبت زرین در اعداد فیبوناچی و آرایشهای برگی (phyllotaxis) ←کتاب
H. M. S. Coxeter's *Introduction to Geometry (1969), Chapter 11.*



شکل ۲۵.۱

$$۴S \leq (a+c)(b+d)$$

و تساوی تنها زمانی برقرار است که چهارضلعی مستطیل باشد (راهنمایی: دو برابر مساحت مثلث برابر است با $ab\sin\theta$ که θ زاویه میان دو ضلع به طولهای a و b است و $\sin\theta \leq ۱$. در اینجا هم تساوی تنها زمانی برقرار است که θ زاویه قائمه باشد.)

۶. به‌طریق مشابه ثابت کنید که هرگاه a، b، و c اضلاع یک مثلث باشند، مساحت آن، S، در نامساوی

$$۴S\sqrt{۳} \leq a^۲ + b^۲ + c^۲$$

صدق می‌کند. تساوی تنها زمانی برقرار است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. (راهنمایی: هرگاه θ یعنی زاویه بین b و c چنان انتخاب شده باشد که حداکثر برابر با ۶۰° باشد، از دستورهای زیر استفاده کنید

$$۲S = bc\sin\theta$$

$$۲bc\cos\theta = b^۲ + c^۲ - a^۲ \quad \text{(قانون کسینوسها)}$$

$$\cos(۶۰ - \theta) = \frac{\cos\theta + \sqrt{۳}\sin\theta}{۲}$$

۷. فرض می‌کنیم در $\triangle ABC$ ضلع AB با ضلع AC قابل انطباق نباشد. فرض می‌کنیم D محل تلاقی نیمساز $\measuredangle A$ با عمودمنصف ضلع BC باشد. اگر E، F، و G به‌ترتیب پای عمودهای مرسوم از D بر $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$، و $\overleftrightarrow{BC}$ باشند، ثابت کنید:

(الف) D بیرون $\triangle ABC$ روی دایره محیطی آن واقع است.

(ب) یکی از دو نقطه E یا F درون مثلث و دیگری بیرون آن واقع است.

(ج) E و F و G هم‌خط‌اند.

(از هر چه می‌دانید استفاده کنید، از جمله از مختصات در صورت لزوم.)

پروژه

۱. مقاله‌ای بنویسید و در آن به تفصیل بیان کنید که چرا تثلیث یک زاویه غیرمشخص یا تربیع دایره، تنها با خط‌کش و پرگار غیرممکن است؛ جونز، موریس، و پیرسون؛ (۱۹۹۱)؛ ایوز (۱۹۶۳ـ۱۹۶۵)؛ کوتوزوف (۱۹۶۰)؛ یا موییز (۱۹۹۰) را ببینید. بیان کنید که چگونه زاویه‌های غیرمشخص را می‌توان به سه قسمت مساوی تقسیم کرد اگر مجاز باشیم یک سهمی یا یک هذلولی یا یک کونکوئید یا یک لیماسون نیز رسم کنیم (پرسینی و شربرت، ۱۹۷۱).

۲. اینک دو قضیه معروف دیگر در نظریه ترسیمات هندسی:

(الف) گ. مور ریاضیدان دانمارکی، و ل. ماسکرونی ایتالیایی مستقل از یکدیگر کشف کردند که همه نقاط در هندسه اقلیدسی را می‌توان با یک پرگار تنها پیدا کرد. البته خط را نمی‌توان با پرگار رسم کرد، ولی می‌توان آن را با پیدا کردن دو نقطه‌اش به‌وسیله پرگار مشخص نمود. با این نظر، مور و ماسکرونی نشان دادند که خط‌کش مورد نیاز نیست.

(ب) از سوی دیگر، ی. اشتاینر ریاضیدان آلمانی، و ی. و. پونسله ریاضیدان فرانسوی نشان دادند که کلیه ترسیمهای اقلیدسی را می‌توان تنها با یک خط‌کش انجام داد مشروط بر اینکه ابتدا یک دایره تنها و مرکز آن داده شده باشد.

گزارشی در باب این دو کشف جالب تهیه کنید (ایوز ۱۹۶۳ـ۱۹۶۵، و کوتوزوف، ۱۹۶۰).

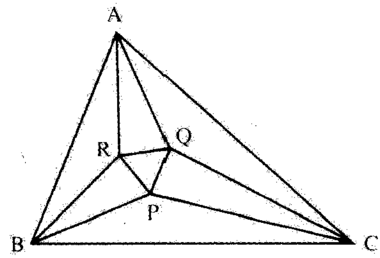
۳. مثلث غیرمشخص ΔABC داده شده است. از رأس هر زاویه دو نیم‌خط رسم کنید که آن زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند. اگر P، Q، و R نقاط تقاطع نیم‌خطهای مجاور به هم باشند ثابت کنید (قضیه مورلی[۱]) ΔPQR یک مثلث متساوی‌الاضلاع است (شکل ۲۶.۱ و «مقدمه‌ای بر هندسه»، کاکستر، ۱۹۶۹).

۴. یک n ضلعی زمانی منتظم نامیده می‌شود که همه اضلاعش با هم و همه زوایایش با هم قابل انطباق باشند. با خط‌کش و پرگار یک پنج ضلعی منتظم و یک شش ضلعی منتظم رسم کنید. هفت ضلعی منتظم را نمی‌توان بدین طریق رسم کرد. در واقع، گاوس این قضیه جالب را ثابت کرده است که یک nضلعی منتظم قابل ترسیم است اگر و تنها اگر عدد n نخستین توان همه عاملهای اول فرد را اختیار کند و صورت $۲^{۲^m} + ۱$ را داشته باشد (مثلاً ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷). گزارشی درباره این قضیه با استفاده از کلاین (۱۹۵۶) تهیه کنید. اعداد اول به‌صورت فوق، اعداد اول فرما نام دارند. اعدادی که در بالا نام بردیم تنها آنهایی هستند که تاکنون شناخته

---

۱. برای حالت عکس و تعمیم مورلی، ←مقاله

D.j Kleven, Morley's Theorem a converse, *American, Mathematical Monthly*, 85 (1978), 100-105.



شکل ۲۶.۱ قضیه مورلی.

شده‌اند. گاوس عملاً ۲۵۷ ضلعی منتظم یا ۶۵۵۳۷ ضلعی منتظم را رسم نکرده است. او تنها نشان داده است که معادله چندجمله‌ای مینیمالی را که در $\cos(۲\pi/n)$ صدق کند برای چنین nی می‌توان در میدان اعداد اصم حل کرد (موبیز ۱۹۹۰). ریاضیدانانِ (وسواسیِ) دیگری خود را وقف این ترسیم کرده‌اند. رسم‌کننده $n = ۶۵۵۳۷$ ضلعی ده‌سال کارکرد و درجه Ph.D دریافت کرد. جایزه کسی که درستی این کار را تحقیق کند چه باید باشد؟

۵. زندگی‌نامه کوتاهی از ارشمیدس تهیه کنید (بل، ۱۹۶۱، مرجع خیلی خوبی است). ارشمیدس برخی از مفاهیم حسابان را ۱۴ سده پیش از نیوتن و لایپنیتس کشف کرده است.

۲

منطق و هندسه وقوع

برهان خلف. . . گامی است ظریفتر از هرگام شطرنج: شطرنج‌باز ممکن است یک پیاده یا حتی یک سوار را فدای بازی کند، ولی ریاضیدان خود بازی را فدا می‌کند.

گ. ه. هاردی

منطق غیرصوری

در مبحث پیش با اصول و تعاریف اساسی هندسه اقلیدسی، که برای دقت بیشتر اندکی تغییر داده شده بودند، آشنا شدیم. می‌خواستیم به اثبات بعضی از قضیه‌ها یا گزاره‌هایی که نتیجه منطقی این اصول هستند بپردازیم. ولی تمرینهای مبحث پیش شاید به شما هشدار داده باشند که انتظار مشکلاتی می‌رود که باید پیش از هر چیز از پیش پا برداشته شوند. مثلاً، در اصول اقلیدس چیزی وجود ندارد که تضمین کند نقطه‌ای بر یک خط (یا خارج آن) وجود دارد! ممکن است این گفته به نظر شما مسخره بیاید؛ زیرا اگر نقطه‌ای بر آن نباشد اساساً خطی وجود نخواهد داشت. (به هر جهت

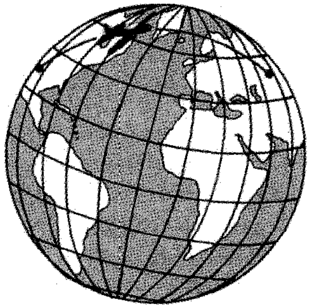
این چه خطی است که می‌خواهند به خورد ما بدهند؟) به تعبیری اعتراض شما بجا خواهد بود، زیرا اگر استنباط من از «خط» تا این اندازه با استنباط شما از آن مغایرت داشته باشد، زبان همدیگر را نخواهیم فهمید و شرط صفر ــ تفاهم متقابل درباره درک متقابل واژه‌ها و نمادها ــ نقض خواهد شد.

پس بگذارید روشنتر صحبت کنم. این بازی را باید برحسب قواعدی انجام دهیم که در شرط ۲ به آنها اشاره کردیم ولی توضیح کافی درباره آنها ندادیم. متأسفانه، بحث کامل درباره آنها مستلزم تبدیل محتوای کتاب از هندسه به منطق نمادی است. به جای چنین بحثی من تنها بعضی از قواعد اساسی استدلال را که شما، در مقام یک موجود منطقی از پیش می‌دانید بازگو می‌کنم.

قاعده منطق صفر. در ارائه یک برهان، استفاده از هر فرضی که قبلاً بیان نشده باشد مجاز نیست.

علت اینکه در فصل اول به خود زحمت دادیم تا همه بنداشتهای خود را به فهرست درآوریم این بود که درباره فرضهای اساسی، حتی در باب بدیهی‌ترین آنها، کاملاً روشن بشویم. با اینکه «بدیهی» است که دو نقطه فقط یک خط را معین می‌کنند ولی اقلیدس آن را به عنوان اولین اصل خود به کار می‌برد. لذا اگر ضمن برهانی بخواهیم بگوییم که بر هر خط نقطه‌هایی واقع است، باید این گفته را به‌صورت اصل دیگری بیان کنیم (یا آن را ثابت کنیم، که نمی‌توانیم). به‌عبارت دیگر، باید تمام ورقهای خود را رو کنیم. اگر تمرینهای ۶، ۷، ۹، و ۱۰ فصل اول را دوباره بخوانید، چند فرض «بدیهی» پیدا خواهید کرد که مجبوریم آنها را روشن سازیم. این کار بعداً صورت خواهد گرفت.

شاید شما تاکنون دریافته باشید که میان بنداشتها و اصطلاحات تعریف نشده پیوندی اساسی وجود دارد. چنان‌که دیده‌ایم، اصطلاحات تعریف نشده برای اجتناب از دور یا تسلسل ضروری‌اند. ولی معنی این گفته این نیست که می‌توانیم این اصطلاحات را هر گونه که دلمان بخواهد به کار بریم. بنداشتها به ما می‌گویند که دقیقاً چه خصوصیاتی از اصطلاحات تعریف نشده را مجازیم در براهین خود به‌کار بریم. هنگام صحبت از این مفاهیم ممکن است ویژگیهای دیگری را در فکر خود در نظرگرفته باشید، ولی مجاز نیستید آنها را در یک برهان به کار برید (قاعده صفر). مثلاً وقتی شما از خط منحصر به فردی که با دو نقطه مشخص می‌شود سخن به میان می‌آورید، محتملاً شاید آن را به این عنوان که «مستقیم» است یا اینکه «کوتاهترین فاصله بین دو نقطه است» بنگارید. اصلهای اقلیدس اجازه چنین فرضی را به ما نمی‌دهند. وانگهی، از یک لحاظ ممکن است این ویژگیها متناقض به نظر آیند. اگر بنا باشد شما در روی زمین حرکت کنید و مثلاً از سانفرانسیسکو به مسکو بروید، کوتاهترین راه، کمانی از یک دایره عظیمه است (خط راست بین دو نقطه از درون زمین می‌گذرد). در واقع هوانوردان وقتی می‌خواهند زودتر به مقصد برسند هواپیمای خود را بر یک دایره عظیمه هدایت می‌کنند (شکل ۱.۲).



شکل ۱.۲ کوتاهترین راه بین دو نقطه روی کره کمانی است از دایره عظیمه که مرکزش مرکز کره و شعاعش شعاع کره، مثلاً دایره استواست.

قضیه و برهان

همه قضایای ریاضی احکام شرطی هستند، احکامی به‌صورت

اگر [فرض]، آنگاه [حکم]

در برخی موارد، قضیه ممکن است تنها یک حکم را بیان کند؛ در این حالت، بنداشتهای دستگاههای خاص ریاضی، ضمنی (مفروض) و در حکم فرض هستند. اگر قضیه‌ای به‌صورت شرطی نوشته نشده باشد می‌توان آن را به‌صورت شرطی درآورد. مثلاً،

«زوایای مجاور به قاعده در یک مثلث متساوی‌الساقین با هم قابل انطباق‌اند.»

را می‌توان چنین تعبیر کرد:

«اگر مثلثی دو ضلع قابل انطباق داشته باشد، آنگاه زاویه‌های روبه‌رو به این دو ضلع قابل انطباق‌اند.»

به عبارت دیگر، یک حکم شرطی می‌گوید که یک شرط (فرض) شرط دیگری (حکم) را ایجاب می‌کند. اگر فرض را با H و حکم را با C و جمله «ایجاب می‌کند» را با پیکان $\Rightarrow$ نشان دهیم، هر قضیه به‌صورت $H \Rightarrow C$ درمی‌آید. (در مثال فوق، H یعنی «دو ضلع یک مثلث قابل انطباق‌اند» و C یعنی «زاویه‌های روبه‌رو به این اضلاع قابل انطباق‌اند».)

اما هر حکم شرطی، قضیه نیست. مثلاً حکم

«اگر ΔABC مثلث باشد، آنگاه آن مثلث متساوی‌الساقین است»

یک قضیه نیست. چرا؟ ممکن است بگویید این حکم «نادرست» است و حال آنکه قضایا «درست» هستند. اجازه بدهید از به کار بردن واژه‌های گرانبار «درست» و «نادرست» اجتناب کنیم زیرا سؤال برانگیز هستند و ما را به مباحث پیچیده‌تر می‌کشانند.

در یک دستگاه مفروض ریاضی، تنها احکامی را قضیه[1] می‌نامیم که برهانی برای آنها فراهم آمده باشد. این ادعا را که هر مثلثی متساوی‌الساقین است می‌توانیم «با رسم مثلثی که متساوی‌الساقین نباشد»، مثل مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۳ و ۴ و ۵، رد کنیم.

لذا، جان کلام، مفهوم برهان است. بنابه تعریف، برهان فهرستی است از احکام همراه با توجیهی برای درستی هر یک، که به نتیجه مطلوب منتهی می‌شود. در این کتاب معمولاً به هر یک از حکمهای برهان شماره‌ای داده می‌شود و ملاک درستی آن بین دو پرانتز به‌دنبال آن می‌آید.

قاعده منطق ۱. شش نوع توجیه مجاز برای احکام در برهانها وجود دارد:

(۱) «بنابر فرض ...»

(۲) «بنابر بنداشت ...»

(۳) «بنابر قضیه ...» (که قبلاً ثابت شده است).

(۴) «بنابر تعریف ...»

(۵) «بنابر مرحله ...» (یک مرحله قبل در برهان)

(۶) «بنابر قاعده منطق ...».

بعدها در این کتاب براهین ما کمتر صوری خواهند بود، و هر جا این توجیه‌ها بدیهی باشند آنها را حذف خواهم کرد (قبلاً هشدار می‌دهیم که امکان دارد این‌گونه حذفها به نتایج نادرستی منجر شوند.) یک توجیه ممکن است چند نوع از توجیه‌های مذکور در بالا را دربرداشته باشد.

اکنون که برهان را شرح دادیم کاش می‌توانستیم بگوییم چگونه باید آن را پیدا کرد یا ساخت. اما این راز پرداختن به ریاضیات است. برخی از شیوه‌هایی که برای اثبات قضایا به کار می‌روند از راه تجربه یا تقلید از آنچه دیگران کرده‌اند آموخته شده‌اند. ولی برای اثبات یا رد هر گزاره در ریاضیات، هیچ روش ویژه معینی وجود ندارد. (وقتی به‌دقت بنگریم، نبود چنین روش ویژه‌ای) از قضیه دشواری از منطق ریاضی ناشی می‌شود و به همین دلیل است که رایانه‌ها هرگز قادر نخواهند بود دکان ریاضیدانان را، به اصطلاح، تخته کنند (دولونگ، ۱۹۷۰، فصل ۵).

با این حال، برخی از توصیه‌ها ممکن است شما را در اقامه برهان یاری کنند. اولاً مطمئن شوید که معنی دقیق هر اصطلاحی را که در قضیه مورد بحث آمده است به روشنی می‌فهمید. در صورت لزوم، تعاریف را بار دیگر از نظر بگذرانید. ثانیاً آنچه را که می‌خواهید ثابت کنید پیوسته

---

۱. یا در برخی موارد گزاره، نتیجه، یا لم. «قضیه» و «گزاره» به‌جای یکدیگر به کار برده می‌شوند؛ «نتیجه» نتیجه بلافصل یک قضیه است، و «لم» «یک قضیه کمکی» است. از لحاظ منطقی همه آنها یک معنی دارند؛ این عنوان تنها نشانه تأکید مؤلف است.

به‌یاد داشته باشید. اگر آن‌چیز، مثلاً، متضمن خطوط موازی است به گزاره‌های پیشین که اطلاعاتی درباره خطوط موازی به شما می‌دهند مراجعه کنید. هرگاه گزاره دیگری را سراغ گرفتید که ظاهراً به کار مسئله‌ای که در دست دارید می‌خورد، به‌دقت بررسی کنید و ببینید که آیا واقعاً به کار می‌آید یا نه. شکل رسم کنید تا در تجسم مسئله یاور شما باشد.

برهان خلف[1]

عادی‌ترین نوع برهان در این کتاب، برهان خلف است. در این نوع برهان وقتی می‌خواهید یک حکم شرطی نظیر $H \Rightarrow C$ را ثابت کنید، نقیض C را درست می‌انگارید. برای اینکه این فرض جدید با H اشتباه نشود، آن را فرض برهان خلف می‌نامیم. فرض برهان خلف فرضی است موقتی که با کمک استدلال، حکم باطلی را از آن نتیجه می‌گیریم (باطل بدین معنی که نافی حکمی است که درستش بر ما مسلم است). چنین حکمی ممکن است فرض قضیه یا فرض برهان خلف ما را نفی کند. ممکن است قضیه‌ای را که قبلاً ثابت شده یا حتی بنداشتی را منتفی سازد. وقتی نشان داده شد که نقیض C به حکم باطلی منجر شده است، از آنجا درستی حکم C نتیجه می‌شود، این، چیزی است که نتیجه برهان خلف نامیده می‌شود. به‌طور خلاصه:

قاعده منطق ۲. برای اثبات یک حکم $H \Rightarrow C$، نقیض حکم C (فرض برهان خلف) را درست می‌انگاریم و در استنتاج منطقی خود، در صورت لزوم با استفاده از H، حکم باطلی را از آن نتیجه می‌گیریم.

این قاعده را با اثبات گزاره زیر (گزاره ۱.۲) روشن می‌سازیم: اگر l و m دو خط متمایز ناموازی باشند، l و m در یک نقطه یکتا اشتراک دارند.

برهان:

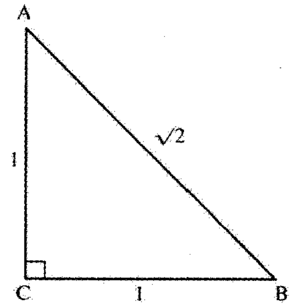
(۱) چون l و m موازی نیستند، یک نقطه مشترک دارند (بنابر تعریف «موازی»).

(۲) چون می‌خواهیم یکتایی را برای این نقطه مشترک ثابت کنیم، نقیض آن را که l و m در دو نقطه متمایز A و B اشتراک دارند (فرض برهان خلف) درست می‌انگاریم.

(۳) پس بیش از یک خط وجود دارد که A و B بر آنها قرار دارند (مرحله ۲ و فرض قضیه، $l \neq m$).

(۴) A و B روی یک خط واقع‌اند (اصل اول اقلیدس).

1. reductio ad absurdum



شکل ۲.۲

(۵) بنابراین، l و m تنها در یک نقطه یکتا اشتراک دارند (۳ یا ۴ متناقض است، نتیجه برهان خلف). ■

ملاحظه می‌کنید که در مراحل ۲ و ۵، به جای نوشتن «قاعده منطق ۲» به‌عنوان توجیه، به‌ترتیب «فرض برهان خلف» و «نتیجه برهان خلف» که گویاتر هستند را نوشتیم.

به‌عنوان مثالی دیگر، یکی از قدیمی‌ترین برهانهای خلف را که توسط فیثاغورسیان کشف (و سخت موجب تأسف آنان) شده است، در نظر می‌گیریم. در اقامه این برهان از برخی از واقعیات هندسه اقلیدسی و اعداد، که شما آنها را می‌دانید و به طور غیررسمی به بیان آنها می‌پردازیم، استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم ΔABC مثلثی است متساوی‌الساقین و قائمه در $C \measuredangle$. می‌توانیم واحد طول را چنان بگیریم که درازای هر ساق برابر با ۱ باشد. حکم قضیه این است که اندازه درازای وتر عددی است گنگ (شکل۲.۲).

به‌موجب قضیه فیثاغورس درازای وتر برابر با $\sqrt{۲}$ است، پس باید ثابت کنیم که $\sqrt{۲}$ عددی است گنگ، یعنی عدد گویا نیست.

عدد گویا چیست؟ عددی است که می‌توان آن را به‌صورت p/q، یعنی خارج‌قسمت دو عدد صحیح p و q نوشت. مثلاً ۱/۲، ۲/۳ و ۵/۱ = ۵ اعداد گویا هستند. می‌خواهیم ثابت کنیم $\sqrt{۲}$ از این گونه اعداد نیست.

ابتدا نقیض آن را درست می‌انگاریم، یعنی می‌پذیریم $\sqrt{۲}$ عددی است گویا (فرض برهان خلف). به‌عبارت دیگر $\sqrt{۲} = p/q$، که در آن p و q اعدادی صحیح ولی نامشخص‌اند. می‌دانیم که هر عدد گویا را می‌توان به ساده‌ترین صورت درآورد، به نحوی که صورت و مخرج عامل مشترکی نداشته باشند. مثلاً ۴/۶ را می‌توان به‌صورت ساده ۲/۳ نوشت که عامل مشترک ۲ از صورت و مخرج حذف شده است. پس می‌توانیم فرض کنیم p و q عامل مشترکی ندارند.

حال با حذف مخرج داریم

$$\sqrt{۲}q = p$$

یا

$$۲q^۲ = p^۲$$

این تساوی می‌گوید که $p^۲$ باید عدد زوجی باشد (زیرا $p^۲$ دو برابر عدد صحیح دیگری، مثل $q^۲$، است). اگر $p^۲$ زوج باشد، پس p باید زوج باشد، زیرا مربع یک عدد فرد، عددی فرد است). یعنی می‌توانیم بنویسیم

$$p = ۲r$$

که r عددی است صحیح (بنابراین زوج است). اکنون در معادله بالا به جای p مقدار $۲r$ می‌گذاریم. در نتیجه

$$۲q^۲ = (۲r)^۲ = ۴r^۲$$

یعنی

$$q^۲ = ۲r^۲$$

این تساوی می‌گوید q نیز باید عددی زوج باشد؛ بنابراین q عددی زوج است. یعنی صورت و مخرج کسر p/q هر دو زوج و بر ۲ بخشپذیرند. این نتیجه باطلی است، زیرا که فرض شده بود p و q عامل مشترکی ندارند. لذا $\sqrt{۲}$ عددی است گنگ (نتیجه برهان خلف). ■

نقیض

در اثبات به روش برهان خلف ما با «فرض خلاف» آغاز می‌کنیم. اغلب موارد، صورت ضد یا نقیض یک حکم برای ما روشن نیست، لذا باید قواعد مربوط به نقیض را بدانیم.

ابتدا چند کلمه درباره نمادهایی که به کار می‌بریم صحبت می‌کنیم. اگر S حکمی باشد، نقیض یا ضد آن را به $\sim S$ نشان می‌دهیم. مثلاً اگر S حکم «p زوج است» باشد، $\sim S$ حکم «p زوج نیست» یا «p فرد است» خواهد شد.

قاعده زیر برای آن مواردی است که خود S حکمی منفی است. این قاعده حکم می‌کند که نقیض نقیض یک حکم به مثبت بودن آن حکم منجر می‌شود.

قاعده منطق ۳. حکم $\sim(\sim S)$ همان حکم S است.

از این قاعده برای نقیض حکم «$\sqrt{۲}$ گنگ است» استفاده کردیم و ضد[1] آن را به‌صورت «$\sqrt{۲}$ گویاست» به‌جای «$\sqrt{۲}$ گنگ نیست» نوشتیم.

قاعده دیگری که در روش برهان خلف قبلاً از آن استفاده کرده‌ایم قاعده به‌دست آوردن نقیض یک استلزام است. برای اثبات $H \Rightarrow C$ فرض می‌کنیم H مستلزم C نباشد، یعنی H و $\sim C$ همزمان درست باشند. این نقیض را به‌صورت نمادی با $H \wedge \sim C$ نشان می‌دهیم که $\wedge$ علامت اختصاری برای «و» است. حکمی که شامل حرف ربط «و» باشد، حکم عطفی نامیده می‌شود. بنابراین:

قاعده منطق ۴. حکم «$\sim [H \Rightarrow C]$» به‌معنی $H \wedge \sim C$ است.

به‌عنوان مثال، حکم شرطی «هرگاه ۳ عددی فرد باشد، آنگاه $۳^۲$ عددی است زوج» را در نظر می‌گیریم. بنابر قاعده ۴، نقیض این حکم، حکم خبری «۳ عددی است فرد و $۳^۲$ عددی است فرد» خواهد بود.

چگونه یک حکم عطفی را نقض می‌کنیم؟ حکم عطفی $S_۱ \wedge S_۲$ بدین معنی است که $S_۱$ و $S_۲$ هر دو درست‌اند. نقیض آن بدین معنی است که یکی از آنها درست نباشد، یعنی اثبات نقیض یکی از آنها.

قاعده منطق ۵. حکم «$\sim [S_۱ \wedge S_۲]$» به همان معنی «$\sim S_۱ \vee \sim S_۲$» است.

حکمی که شامل حرف ربط «$\vee$»، یعنی «یا» باشد حکم فصلی نامیده می‌شود. واژه ریاضی «یا» مثل واژه کاربرد روزانه‌اش مانع جمع نیست. حکم عطفی $(۳ = ۱) \wedge (۲ = ۱)$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه بخواهیم نقیض آن را پیدا کنیم، باید (بنابر قاعده ۵) بنویسیم $(۳ \neq ۱) \vee (۲ \neq ۱)$. البته هر دو نابرابری معتبرند. لذا وقتی ریاضیدان می‌نویسد «$S_۱ \vee S_۲$» منظورش این است که «یا $S_۱$ درست است، یا $S_۲$ درست و یا هر دو درست‌اند.»

اینک حکم باطل را دقیقتر توضیح می‌دهیم. منظور ما از حکم باطل، ترکیب عطفی S با نقیض آن یعنی«$S \wedge \sim S$» است. چنین حکمی تناقض نامیده می‌شود. پس باطل بودن به معنی دربرداشتن تناقض است. دستگاهی از بنداشتها که از آن تناقضی نتیجه نشود دستگاه سازگار گفته می‌شود.

۱. مؤلف محترم کلمات متضاد و متناقض را مترادف گرفته است که به نظر مترجم صحیح نیست. دو حکم زمانی متناقض هستند که نه می‌توانند همزمان درست باشند و نه می‌توانند همزمان نادرست باشند ــ در صورتی دو گزاره متضاد نمی‌توانند همزمان درست باشند ولی می‌توانند همزمان نادرست باشند.ــم.

سور

بیشتر احکام ریاضی شامل متغیر هستند. مثلاً، قضیه فیثاغورس حکم می‌کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، هرگاه a و b درازای ساقها و c درازای وتر باشد، آنگاه $c^2 = a^2 + b^2$. در اینجا a، b، و c اعدادی متغیرند و مثلثی که این اعداد معرف درازای اضلاعش هستند مثلثی است متغیر.

متغیرها را به دو صورت مختلف می‌توان مشخص کرد. اول به‌طور عمومی، مثل متغیر x در عبارتهای زیر:

«به‌ازای هر x ...»
«به‌ازای جمیع مقادیر x ...»
«هر x داده شده ...»
«هر x مفروض ...»
«x هر چه باشد ...»

دوم به طور وجودی، مثل متغیر x در عبارتهای زیر:

«به‌ازای بعضی از مقادیر x ...»
«xی وجود دارد چنان‌که ...»
«xی هست که ....»
«xهایی هستند که ...»

اولین اصل اقلیدس را در نظر می‌گیریم که به‌طور غیررسمی حکم می‌کند که دو نقطه P و Q خط یکتای l را مشخص می‌کنند. در اینجا P و Q می‌توانند هر دو نقطه نامشخص باشند، پس سور عمومی دارند، در حالی‌که l سور وجودی دارد. زیرا گفته شده «وجود دارد» وقتی که P و Q «داده شده‌اند».

باید تأکید کنیم حکمی که با «به‌ازای هر ...» شروع می‌شود مستلزم وجود چیزی نیست. حکم «هر حیوان تک‌شاخی یک‌شاخ دارد» مستلزم وجود حیوانات تک‌شاخ نیست.

هرگاه متغیر x سور عمومی داشته باشد، آن را چنین نمایش می‌دهند : $\forall x$، (و می‌خوانند «به‌ازای همه xها» یا «به‌ازای هر x»). هرگاه متغیر x سور وجودی داشته باشد آن را معمولاً با $\exists x$: نشان می‌دهند (و می‌خوانند «xی وجود دارد چنان‌که ...»). پس از آنکه سور متغیر x تعیین شد، حکمی درباره x بیان می‌شود که می‌توانیم آن‌را به‌صورت $S(x)$ بنویسیم (می‌خوانیم «حکم S درباره x»). بنابراین، حکمی‌که دارای سور عمومی برحسب متغیر x باشد به‌صورت $\forall x S(x)$ نشان داده خواهد شد.

اکنون می‌خواهیم قواعدی برای ساختن احکام سوری به‌دست آوریم. نقیض حکم $S(x)$ را

که به‌ازای جمیع مقادیر x صادق است چگونه می‌توانیم بیان کنیم؟ این کار را می‌توانیم به سادگی با این تصدیق که به‌ازای بعضی از مقادیر x، حکم $S(x)$ صادق نیست انجام دهیم. به‌عبارت دیگر، نقیض حکم «هر xی ویژگی S دارد» حکم «xی وجود دارد که ویژگی S را ندارد» است.

قاعده منطق ۶. حکم «$\sim [\forall x S(x)]$» به همان معنی «$\exists x \sim S(x)$» است.

مثلاً، برای نقیض حکم «هر مثلثی متساوی‌الساقین است» باید تصدیق کرد «مثلثی وجود دارد که متساوی‌الساقین نیست».

همچنین برای بیان نقیض حکم «xی وجود دارد که ویژگی $S(x)$ دارد» باید تصدیق شود که «هر xی فاقد ویژگی $S(x)$ است».

قاعده منطق ۷. حکم «$\sim [\exists x S(x)]$» به همان معنی حکم «$\forall x \sim S(x)$» است.

مثلاً برای نقیض حکم «مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که متساوی‌الاضلاع است» باید تصدیق کرد که «هیچ مثلث قائم‌الزاویه‌ای متساوی‌الاضلاع نیست».

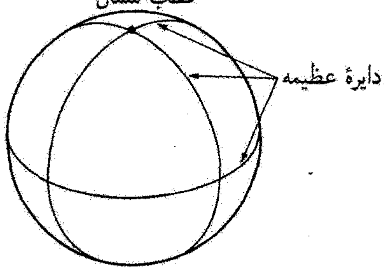
چون احکام سوری در عمل شامل چند متغیر هستند، قاعده‌های بالا را باید چند بار به کار برد. معمولاً پس از اندکی تمرین نقیض چنین احکامی را خیلی سریع به‌دست خواهید آورد. اگر موفق نشدید می‌توانید قاعده‌های فوق را به کار بندید.

اکنون نقیض اصل اول اقلیدس را پیدا می‌کنیم. این اصل حکمی است درباره همه جفت نقاط P و Q؛ بیان نقیض آن بدین معنی است که، برطبق قاعده ۶، تصدیق کنیم نقاطی چون P و Q وجود دارند که در این اصل صدق نمی‌کنند. اصل اول متضمن یک حکم عطفی است که بیان می‌کند P و Q بر خطی چون l واقع‌اند و این خط یکتاست. برای بیان نقیض این حکم، از قاعده ۵ پیروی می‌کنیم. تصدیق l بدین صورت درمی‌آید که «P و Q بر هیچ خطی واقع نیستند» یا «P و Q بر بیش از یک خط واقع‌اند». پس نقیض اصل اول حکم می‌کند «دو نقطه P و Q هستند که بر هیچ خطی واقع نیستند و یا بر بیش از یک خط واقع‌اند».

اگر به مثال کره زمین بازگردیم، و «خط» را یک دایره عظیمه انگاریم، می‌بینیم که چنین نقاط P و Qیی وجود دارند. P و Q را قطبهای شمال و جنوب بگیرید. بی‌نهایت دایره عظیمه از قطبها می‌گذرند (شکل ۳.۲).

احکام ریاضی اغلب به‌طور غیرصوری بیان می‌شوند. گاهی ممکن است مجبور شوید آنها را با عبارات دیگری بیان کنید تا بیان نقیض آنها ممکن شود. مثلاً حکم زیر را در نظر بگیرید:

«اگر خطی یکی از دو خط موازی را ببرد، آنگاه دیگری را هم می‌برد.»



شکل ۳.۲

این حکم، حکمی است شرطی که به‌صورت: «اگر ... آنگاه ...» آمده است و نقیض آن، بنابر قاعده ۴، باید چنین باشد:

«خطی یکی از دو خط موازی را می‌برد و دیگری را نمی‌برد.»

اگر این حکم مبهم جلوه می‌کند، سبب این است که در حکم اصلی سورهای نهانی وجود داشته‌اند که ما نادیده گرفته‌ایم. حکم اصلی از هر خطی که یکی از دو خط موازی را ببرد صحبت می‌کند، و این دو خط می‌توانند هر دو خط موازی دلخواهی باشند: در حکم اصلی، سورهای عمومی ضمنی وجود دارند. پس برای به‌دست آوردن نقیض درست آن باید از قاعده‌های ۶ و ۴ پیروی کنیم، که چنین خواهد شد:

«دو خط موازی وجود دارند و خطی هست که یکی از آنها را می‌برد و دیگری را نمی‌برد.»

استلزام

قاعده دیگری که به قاعده قیاس استثنایی[1] یا قاعده تفکیک معروف است چنین بیان می‌شود:

قاعده منطق ۸. هرگاه P و $P \Rightarrow Q$ دو مرحله از یک برهان باشند، Q نیز مرحله‌ای قابل توجیه از آن برهان است.

این قاعده تقریباً تعریفی است از آنچه که ما استلزام می‌نامیم. مثلاً، بنداشتی داریم که می‌گوید: اگر $\measuredangle A$ و $\measuredangle B$ قائمه باشند، آنگاه $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ (اصل چهارم). حال ضمن اقامه یک برهان ممکن است به دو زاویه قائمه بربخوریم. قاعده ۸ به ما اجازه می‌دهد که قابلیت انطباق آنها را، مرحله‌ای از برهان بشماریم.

مواظب باشید که حکم شرطی $P \Rightarrow Q$ را با عکس آن $Q \Rightarrow P$ اشتباه نگیرید. مثلاً عکس اصل چهارم چنین خواهد شد «اگر $\measuredangle A \cong \measuredangle B$، آنگاه $\measuredangle A$ و $\measuredangle B$ قائمه‌اند» که باطل است.

1. *madus ponens*

ولی، گاهی ممکن است یک حکم شرطی و عکسش هر دو درست باشند. در این حال $Q \Rightarrow P$ و $P \Rightarrow Q$ هر دو درست‌اند و می‌نویسیم $P \Leftrightarrow Q$ (می‌خوانیم «p اگر و تنها اگر، Q» یا «p منطقاً با Q هم‌ارز است»). کلیه تعریفها بدین صورت‌اند. مثلاً سه نقطه بر یک استقامت قرار دارند اگر و تنها اگر بر یک خط واقع باشند. برخی از قضایا هم بدین صورت بیان می‌شوند، مثل قضیه «یک مثلث متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر دو زاویه‌اش با هم قابل انطباق باشند».

قاعده بعدی معرف چند روش دیگر از «استلزام» است که در براهین به کار برده می‌شوند.

قاعده منطق ۹. (الف) $[[P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow R]] \Rightarrow [P \Rightarrow R]$

(ب) $[P \wedge Q] \Rightarrow P, [P \wedge Q] \Rightarrow Q$

(ج) $[\sim Q \Rightarrow \sim P] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q]$

جزء (ج) بیان می‌کند که هر استلزام $P \Rightarrow Q$ منطقاً با عکس نقیض خود یعنی $\sim Q \Rightarrow \sim P$، هم‌ارز است. اجزای قاعده ۹ را راستگو می‌نامند، زیرا آنها صرفاً از لحاظ شکل معتبرند، نه از لحاظ معنی P، Q، و R. برعکس، صحت دستوری نظیر $P \Rightarrow Q$، چنان‌که اکنون دیده‌ایم، به معنی آن بستگی دارد. راستگوهای خیلی زیادی وجود دارند، و قاعده بعدی ناشناخته‌ترین آنها را معرفی می‌کند.

قانون طرد شقّ ثالث و برهان موردی

قاعده منطق ۱۰. به‌ازای هر حکم P، P یا $\sim P$ درست است (قانون طرد شقّ ثالث)[1].

مثلاً، نقطه P و خط l داده شده‌اند. ممکن است ادعا کنیم که P بر l قرار دارد یا ندارد. اگر این مطلب مرحله‌ای از برهان باشد، معمولاً می‌خواهیم بقیه برهان را به چند مورد بشکنیم ـــ یک برهان در مورد این فرض که P بر l قرار دارد و برهان دیگر در مورد این فرض که P بر l قرار ندارد. هر دو برهان باید داده شوند، در غیر این‌صورت برهان ناقص است. برهانی از این نوع برای گزاره ۱۶.۳ داده شده است که مدعی است خطی وجود دارد که از P می‌گذرد و بر l عمود است.

بعضی اوقات تعداد موارد از دو بیشتر است. مثلاً این قضیه که یک زاویه یا حاده است، یا

۱. قانون طرد شقّ ثالث از مشخصات منطق دو‌ـ‌ارزشی کلاسیک است: یک حکم یا درست است یا نادرست؛ شق ثالثی نظیر «نمی‌دانیم» وجود ندارد. ریاضیدانان ساخت‌گرا (نظیر براور، بیشاپ، بیزون، و اشتولتسنبرگ) به استفاده غیرموجه از این قاعده هنگامی که مسئله وجود مطرح است ایراد می‌گیرند. به عقیده آنان برای اینکه ثابت کنیم یک شیء ریاضی وجود دارد باید روش مؤثری برای ساختن آن فراهم کنیم. فرض وجود نداشتن شیء (فرض برهان خلف) و استخراج تناقضی از آن قانع‌کننده نیست (لذا استفاده از قاعده منطق ۶ را در مجموعه‌های نامتناهی نیز رد می‌کنند). جنبه «ساختی» هندسه اقلیدس به‌طور سنتی به «ترسیمهای با خط‌کش و پرگار» اشاره دارد (تمرینهای اصلی، فصل ۱). ما در سرتاسر کتاب توجه بیشتری به این جنبه خواهیم داشت.

قائمه، یا منفرجه ــ سه حالت دارد. باید سه برهان بیاوریم ــ یکی برای هر فرض موردی. شما این برهان را وقتی به کار خواهید برد که ملاک ض‌ض‌ض را برای قابلیت انطباق مثلثها، در تمرین ۳۲، فصل ۳، به کار می‌برید. این روش برهان موردی (به‌درستی) در تلاش نادرست در فصل ۱ برای اثبات متساوی‌الساقین بودن همه مثلثها به کار برده شده بود.

قاعده منطق ۱۱. فرض می‌کنیم ترکیب فصلی احکام $S_۱ \vee S_۲ \vee \cdots \vee S_n$ از پیش مرحله‌ای درست در یک برهان باشد. فرض می‌کنیم که درستی براهین C از راه فرضهای موردی هر یک از احکام $S_۱$، $S_۲$، ...، و S_n محقق شده‌اند. در این صورت می‌توان C را به‌عنوان مرحله‌ای درست در برهان، نتیجه گرفت (برهان موردی).

در اینجا به بحث خود درباره منطق خاتمه می‌دهیم. به هیچ وجه مدعی نیستیم که همه قواعد منطقی را فهرست کرده‌ایم، بلکه فقط آنهایی را فهرست کرده‌ایم که برای مقاصد ما ضروری هستند. (برای بحث بیشتر، ← دولونگ، ۱۹۷۰، و کتاب‌شناسی‌اش).

هندسه وقوع

منطقی را که بیان کردیم، اینک در مورد یک جزء بسیار مقدماتی از هندسه به نام هندسه وقوع به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم تنها اصطلاحات تعریف نشده «نقطه» و «خط» و تنها رابطه تعریف نشده «وقوع» بین یک نقطه و یک خط باشد، که مانند پیش بیان می‌شود که «P بر l واقع است». یا «$\mathrm{P}\,\mathrm{I}\,l$» یا «$l$ از P می‌گذرد» در این هندسه از «میان‌بود» یا «قابلیت انطباق» صحبتی نیست. (ما اکنون در تدارک ایجاد یک هندسه بنداشتی جدید هستیم که شکافهای هندسه اقلیدسی را پر کند و در سایر هندسه‌ها نیز به‌کار رود. این مسئله در فصلهای آینده ادامه‌یافته و از تعاریف صوری فصل ۱ استفاده خواهد شد).

این اصطلاحات تعریف نشده از سه بنداشت تبعیت می‌کنند که اولین آنها مانند اصل اول اقلیدس است.

بنداشت وقوع ۱. به‌ازای هر نقطه P و هر نقطه Q که با P مساوی نیست، تنها یک خط l وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد.

بنداشت وقوع ۲. به‌ازای هر خط l، دست کم دو نقطه متمایز واقع بر آن وجود دارد.

بنداشت وقوع ۳. سه نقطه متمایز وجود دارند که هیچ خطی بر هر سه آنها واقع نمی‌شود.

این بنداشتها، شکافی را که در تمرینهای ۹ و ۱۰ فصل ۱، به آن اشاره کردیم پر می‌کنند. اکنون می‌توانیم تصدیق کنیم که هر خط، نقطه‌هایی ــ دست کم دو تا و شاید بیشتر ــ بر خود دارد و همه نقطه‌ها بر یک خط قرار ندارند. به‌علاوه، می‌دانیم که بنابر بنداشت ۳ و قاعده ۹(ب) منطق، هندسه باید دست کم سه نقطه داشته باشد. یعنی بنداشت وقوع ۳، ترکیب عطفی دو حکم زیر است:

۱. نقطه‌های متمایزی مانند A، B، و C وجود دارند.

۲. به‌ازای هر خط، دست کم یکی از این نقاط بر این خط قرار ندارد.

قاعده ۹(ب) می‌گوید که ترکیب عطفی دو حکم، هر یک از آنها را به‌طور جداگانه ایجاب می‌کند. لذا می‌توانیم نتیجه بگیریم که سه نقطه متمایز وجود دارند (قاعده ۸).

هندسه وقوع چند اصطلاح تعریف شده از قبیل «هم‌خط»، «متقارب»، «موازی»، عیناً با همان تعریف که در فصل ۱ دیدیم، دارد. بنداشت وقوع ۳ را می‌توان چنین نیز نوشت که «سه نقطه ناواقع بر یک خط وجود دارند». خطهای موازی باز هم خطهایی هستند که نقطه مشترک ندارند.

چه نوع قضایایی را می‌توانیم با استفاده از این مجموعه انگشت‌شمار بنداشتها ثابت کنیم؟ قضایای زیاد جالب را هیچ، ولی چندتایی هستند که شما می‌توانید به‌عنوان تمرین ثابت کنید.

گزاره ۱.۲. هرگاه l و m خطوط متمایز غیرموازی باشند، l و m تنها یک نقطه مشترک دارند.

گزاره ۲.۲. سه خط متمایز وجود دارند که متقارب نیستند.

گزاره ۳.۲. به‌ازای هر خط، دست کم یک نقطه وجود دارد که بر آن واقع نیست.

گزاره ۴.۲. به‌ازای هر نقطه، دست کم یک خط هست که از آن نقطه نمی‌گذرد.

گزاره ۵.۲. به‌ازای هر نقطه P، دست کم دو خط متمایز وجود دارند که از P می‌گذرند.

مدل

هنگامی که بنداشتهای وقوع در بخش پیش را مطالعه می‌کردید ممکن است نقطه‌ها و پاره‌خطهای بلندی را در نظر مجسم کرده باشید که بر صفحه کاغذ رسم شده باشند. با این نحوه تجسم، بنداشتها حکمهای درستی در نظر جلوه می‌کنند. ما این امر را چنین تعبیر می‌کنیم که این نقطه‌ها و پاره‌خطهای بلند مدلی برای هندسه وقوع هستند.

کلی‌تر بگوییم، اگر یک دستگاه بنداشتی داده شده باشد، می‌توانیم اصطلاحات تعریف نشده را به نوعی خاص تعبیر کنیم، یعنی به آنها معانی خاص بدهیم. این کار را تعبیر دستگاه می‌نامیم. در

این صورت می‌توانیم بپرسیم که آیا بنداشتهایی که بدین‌گونه تعبیر شده‌اند حکمهای درستی هستند یا خیر. اگر درست بودند، این تعبیر را یک مدل می‌نامیم. وقتی از این دیدگاه به موضوع بنگریم، امکان یافتن تعبیرهایی غیر از ترسیمات معمولی پاره‌خط و نقطه، برای اصطلاحات تعریف نشده «نقطه»، «خط»، و «وقوع» میسر می‌شود.

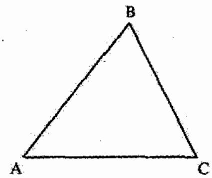
مثال ۱. مجموعه سه حرفی $\{A, B, C\}$ که آنها را سه نقطه می‌نامیم، در نظر می‌گیریم: «خطها» آن زیرمجموعه‌هایی خواهند بود که دقیقاً شامل دو حرف باشند ـــ $\{A, B\}$،$\{A, C\}$، $\{B, C\}$. یک «نقطه» را «واقع» بر یک «خط» می‌گیریم هرگاه این نقطه عضوی از آن زیرمجموعه باشد. لذا، با این تعبیر، A بر $\{A, B\}$ و $\{A, C\}$ قرار دارد ولی بر $\{B, C\}$ قرار ندارد. برای اینکه ببینیم این تعبیر یک مدل هست یا نیست، باید بررسی کنیم که آیا تعبیرهایی که از بنداشتها می‌شوند حکمهای درستی هستند یا نیستند. برای بنداشت وقوع ۱، اگر P و Q دو تا از حرفهای A، B، و C باشند، $\{P, Q\}$ تنها «خط»ی است که هر دو نقطه بر آن قرار دارند. برای بنداشت ۲، اگر $\{P, Q\}$ «خط» دلخواهی باشد، P و Q دو «نقطه»ی متمایزند که بر یک خط قرار دارند. برای بنداشت ۳، می‌بینیم که A، B، و C سه نقطه واقع بر یک خط نیستند.

فایده مدلها چیست؟ ویژگی اصلی هر مدل از یک دستگاه بنداشت این است که در این مدل همه قضایای دستگاه، حکمهایی صحیح‌اند. این بدین علت است که نتیجه منطقی حکمهای درست، خود احکامی درست‌اند. (بنابر تعریف «مدل»، وقتی بنداشتها در مدل تعبیر شوند، احکامی درست خواهند بود. قضیه‌ها نتیجه‌های مستقیم بنداشتها هستند.) لذا، فوراً می‌فهمیم که پنج گزاره‌ای که در مبحث پیشین ذکر کردیم در هندسه سه‌نقطه‌ای فوق (مثال ۱) صادق هستند.

فرض می‌کنیم حکمی در یک دستگاه صوری داشته باشیم که هنوز ندانیم قضیه هست یا نیست؛ یعنی هنوز ندانیم که این حکم را می‌توان ثابت کرد یا نه. می‌توانیم به مدلهای خود نگاه کنیم و ببینیم که این حکم در این مدلها درست است یا خیر. اگر یک مدل پیدا کنیم که حکم مورد نظر در آن صادق نباشد، می‌توانیم مطمئن باشیم که هیچ برهانی برای آن وجود ندارد. شما، بدون تردید، با آزمایش درستی احکام هندسی از راه رسم تصاویر آشنایی دارید. البته عکس آن صحیح نیست، زیرا اگر ترسیمی موجب شد که حکمی درست به نظر آید، معنایش این نیست که می‌توانید آن حکم را ثابت کنید. این مطلب در صفحات ۳۰ـ۳۲ نشان داده شده بود.

مزیت چند مدل داشتن این است که ممکن است حکمی در یک مدل درست باشد ولی در مدل دیگر درست نباشد. مدلها «آزمایشگاهها»یی برای تجربه کردن با دستگاههای صوری هستند.

به تجربه اصل توازی اقلیدسی می‌پردازیم. این حکمی در دستگاه صوری هندسه وقوع است



شکل ۴.۲ ویژگی توازی بیضوی (هیچ خطوط موازی وجود ندارد). هندسه وقوع سه‌نقطه‌ای.

که «به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر آن، تنها یک خط بر P می‌گذرد که با l موازی است.» مطابق ترسیمهایی که انجام می‌دهیم این به نظر درست می‌آید (اگر چه نمی‌توانیم یکتا بودن توازی را تحقیق کنیم، زیرا نمی‌توانیم پاره‌خطهای خود را تا بی‌نهایت امتداد دهیم). ولی‌در باب مدل سه‌نقطه‌ای خودمان چطور؟ آشکارا دیده می‌شود که در این مدل هیچ خطوط موازی وجود ندارد: $\{A, B\}$،$\{B, C\}$ را در نقطه B، و $\{A, C\}$ را در نقطه A می‌برد؛ $\{B, C\}$،$\{A, C\}$ را در نقطه C می‌برد. (می‌گوییم این مدل دارای ویژگی توازی بیضوی است.)

پس، می‌توانیم نتیجه بگیریم که از روی اصول وقوع به تنهایی، هیچ اثباتی برای اصل توازی ممکن نیست؛ در واقع، در هندسه وقوع نمی‌توانیم ثابت کنیم که خطوط موازی وجود دارند. همچنین حکم «هر دو خط یک نقطه مشترک دارند» (ویژگی توازی بیضوی) را نمی‌توان از روی بنداشتهای هندسه وقوع ثابت کرد، زیرا اگر بتوانیم آن را ثابت کنیم، در مدل رسم معمولی (و در مدلهای مثالهای ۳ و۴) صدق خواهد کرد.

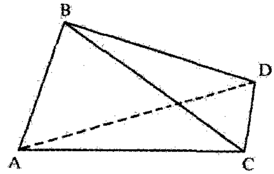
توصیف فنی چنین وضعی این است که حکم «خطوط موازی وجود دارند» «مستقل» از بنداشتهای وقوع است. یک حکم را زمانی مستقل از بنداشتهای مفروض گوییم که نشود آن را از روی آن بنداشتها ثابت یا رد کرد. مستقل بودن، از راه ساختن دو مدل برای بنداشتها ثابت می‌شود: یک مدل که در آن، حکم صادق باشد و یک مدل که در آن، صادق نباشد. از این روش در فصل ۷ به نحو قاطع استفاده خواهیم کرد تا یک‌بار برای همیشه به این پرسش جواب دهیم که اثبات اصل توازی ممکن است یا ممکن نیست.

یک دستگاه بنداشت زمانی کامل نامیده می‌شود که هیچ حکم مستقلی در زبان دستگاه وجود نداشته باشد، یعنی، هر حکم را در زبان دستگاه بتوان از روی بنداشتها ثابت یا رد کرد. لذا بنداشتهای هندسه وقوع کامل نیستند. می‌توان ثابت کرد که بنداشتهای هندسه اقلیدسی و هندسه هذلولوی، که بعداً آورده می‌شوند، کامل هستند.[۱]

---

۱. ←مقاله تارسکی در:

The Axiomatic Method, Henkin, Suppes, and Tarski; (1959).



شکل ۵.۲ ویژگی توازی اقلیدسی. هندسه وقوع چهارنقطه‌ای.

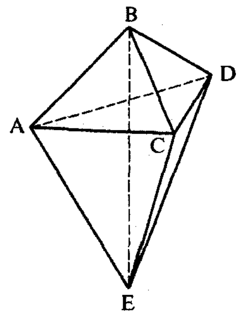
مثال۲. فرض می‌کنیم «نقطه‌ها» نقطه‌های واقع بر کره، «خطها» دوایر عظیمه کره، و «وقوع» به معنی عادی کلمه، یعنی، نقطه واقع بر یک دایره عظیمه باشد. در این تعبیر نیز خطوط موازی وجود ندارند. با وجود این، این تعبیر مدلی برای هندسه وقوع نیست، زیرا همان‌گونه که قبلاً اشاره کردیم، تعبیر بنداشت وقوع ۱ دیگر صادق نیست ــ بی‌نهایت دایره عظیمه وجود دارد که از قطبهای شمال و جنوب کره می‌گذرند (شکل۳.۲).

مثال۳. گیریم نقطه‌های ما چهار حرف A، B، C، و D باشند. فرض می‌کنیم خطها هر شش مجموعه‌ای باشند که هر یک دقیقاً شامل دو حرف از این حرفها باشد: $\{A, B\}$،$\{A, C\}$،$\{A, D\}$،$\{B, C\}$،$\{B, D\}$، و $\{C, D\}$. فرض می‌کنیم «وقوع»، مانند مثال ۱، همان عضویت در مجموعه باشد. به‌عنوان تمرین می‌توانید تحقیق کنید که این مدلی برای هندسه وقوع بوده و اصل توازی اقلیدسی در این مدل صادق است (شکل۵.۲).

مثال۴. فرض می‌کنیم «نقطه‌ها» پنج حرف A، B، C، و D باشند.[۱] فرض می‌کنیم «خطها» همه ده مجموعه‌ای باشند که هر یک دقیقاً شامل دو حرف از این حرفها باشد، و «وقوع» به معنی عضویت در مجموعه، مانند مثالهای ۱ و ۳ باشد. می‌توانید تحقیق کنید که حکم زیر درباره خطوط موازی مشخصه هندسه هذلولوی، در این مدل صدق می‌کند: «به‌ازای هر خط l و هر نقطه P واقع بر l، دست کم دو خط وجود دارند که از P می‌گذرند و با l موازی‌اند» (شکل۶.۲).

اکنون اجمالاً به اهمیت مدلها می‌پردازیم. مدلها ممکن است برای اثبات استقلال حکمی از بنداشتهای مفروضی به‌کار روند. یعنی مدلها می‌توانند برای اثبات ناممکن بودن

۱. هندسه وقوعی که تنها از تعداد زیاد متناهی نقطه تشکیل شده باشد هندسه متناهی نامیده می‌شود. یک بحث تفریحی و سرگرم‌کننده از هندسه‌های متناهی (با کاربردهای آن در رشد بوته گوجه‌فرنگی) در فصل چهارم کتاب بک، بلیچر، و کرو (۱۹۶۹) آمده است. برای اطلاعات عمیقتر استیونسون (۱۹۷۲) یا دمبوسکی (۱۹۶۸) را ببینید. برای مثالهای بیشتر، تمرینهای پایان همین فصل را ببینید.



شکل ۶.۲ ویژگی توازی هذلولوی. هندسه وقوع ۵ نقطه‌ای.

اثبات یا رد حکمی از روی بنداشتها به کار روند. وانگهی، اگر یک دستگاه بنداشت مدلهای متعددی، که اساساً از هم متفاوت‌اند، داشته باشد ــ مانند مدلهای مثالهای ۱، ۳، و ۴ که اساساً از هم متفاوت‌اند ــ در آن صورت دامنه کاربرد آنها وسیع است. گزاره‌هایی که از روی اصول چنین دستگاهی ثابت می‌شوند خودبه‌خود در داخل هر یک از مدلها احکام درستی هستند. ریاضیدانان چه بسا پی می‌برند که یک دستگاه بنداشت که با مدل ذهنی خاص پدید آمده است، در مدلهایی آنچنان متفاوت کاربرد پیدا می‌کند که هرگز خوابش را هم نمی‌دیدند.

از سوی دیگر، وقتی همه مدلهای یک دستگاه بنداشت با هم یکریخت باشند، مجموعه بنداشتهای آن را جازم خوانند (بنداشتهای هندسه اقلیدسی و هندسه هذلولوی، که بعداً در این کتاب آورده می‌شوند، بنداشتهایی جازم‌اند.) مزیت بنداشتهای جازم این است که آنها هم ویژگیهای مدلی را که به زبان سیستم قابل بیان است، به‌طور کامل توصیف می‌کنند.[1] (به‌عنوان مثالی ساده از یک دستگاه جازم، فرض کنید که به سه بنداشت وقوع، بنداشت چهارمی اضافه کنیم که تصدیق کند چهار نقطه متمایز وجود ندارند؛ بدیهی است که مدل سه نقطه‌ای مثال ۱ تنها مدل در حد یکریختی، برای دستگاه چهاربنداشتی جدید است.)

بالاخره، وجود مدلها دلیلی برای سازگاری دستگاه بنداشت است. مثلاً، اگر هندسه وقوع ناسازگار بود، برهان فرضی یک تناقض به برهان یک تناقض در نظریه مجموعه کاملاً نمایان مجموعه سه‌حرفی A، B، و C ترجمه می‌شد (مثال ۱).

---

۱. این یک قضیه غیربدیهی (غیرساختاری) از منطق ریاضی است که قضیه تمامیت گودل خوانده می‌شود، که می‌گوید اگر سیستمی جازم باشد، آنگاه برای هر حکم S، یک برهان S یا یک برهان $\sim S$ وجود دارد.

یکریختی مدلها

می‌خواهیم این مفهوم را که دو مدل «اساساً یکی» یا یکریخت هستند دقیقاً روشن کنیم: برای هندسه‌های وقوع، این بدان معنی است که یک تناظر یک‌به‌یک $P \leftrightarrow P'$ بین نقاط دو مدل و یک تناظر یک‌به‌یک $l \leftrightarrow l'$ بین خطوط دو مدل وجود دارد چنان‌که P بر l واقع است اگر و تنها اگر P' بر l' واقع باشد؛ این تناظر یک یکریختی از یک مدل بر روی مدل دیگر نامیده می‌شود.

مثال۵. مجموعه $\{a, b, c\}$ از سه حرف را که فعلاً آنها را «خط» می‌نامیم، در نظر می‌گیریم. «نقطه‌ها» آن زیرمجموعه‌هایی هستند که دقیقاً دو حرف‌اند ــ$\{a, b\}$، $\{a, c\}$، و $\{b, c\}$. فرض می‌کنیم وقوع، عضویت در مجموعه باشد. مثلاً «نقطه» $\{a, b\}$ بر «خط» a و بر «خط» b واقع است ولی بر c واقع نیست. این مدل مسلماً از لحاظ ساختاری، عیناً نظیر مدل سه نقطه‌ای مثال ۱ است ــتنها چیزی که تغییر داده شده، نماد است. تناظرهای زیر یک یکریختی را به‌روشنی نشان می‌دهند:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A} \leftrightarrow \{a, b\} & \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \leftrightarrow b \\ \mathrm{B} \leftrightarrow \{b, c\} & \{\mathrm{B}, \mathrm{C}\} \leftrightarrow c \\ \mathrm{C} \leftrightarrow \{a, c\} & \{\mathrm{A}, \mathrm{C}\} \leftrightarrow a \end{array}$$

توجه دارید که A فقط بر $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ و $\{\mathrm{A}, \mathrm{C}\}$ واقع است؛ «نقطه» متناظرش $\{a, b\}$ فقط بر «خطها»ی متناظر a و b واقع است. نظیر همین بررسی برای B و C نشان می‌دهد که در این تناظر «وقوع» محفوظ می‌ماند. از سوی دیگر، هرگاه تناظر دیگری نظیر

$$\begin{array}{l} \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \leftrightarrow a \\ \{\mathrm{B}, \mathrm{C}\} \leftrightarrow b \\ \{\mathrm{A}, \mathrm{C}\} \leftrightarrow c \end{array}$$

را برای «خطها» اختیار می‌کردیم که همین تناظر را برای «نقطه‌ها» حفظ نماید، نمی‌توانستیم یک یکریختی داشته باشیم؛ زیرا، مثلاً، نقطه A بر $\{\mathrm{A}, \mathrm{C}\}$ واقع است ولی«نقطه» متناظر $\{a, b\}$ بر «خط» متناظرش c واقع نیست.

برای اینکه این مفهوم را که مدلهای یکریخت «اساساً یکی» هستند بهتر نشان دهیم، دو مدل با خصوصیات توازی متفاوت در نظر می‌گیریم چنان‌که یکی ویژگی توازی بیضوی داشته باشد و دیگری ویژگی توازی اقلیدسی. حال می‌گوییم که این مدلها یکریخت نیستند: فرض کنیم که به‌عکس، بتوان یک یکریختی برقرار کرد. اگر خط l و نقطه P ناواقع بر آن داده شده باشند، هر

خط گذرنده از P، به موجب ویژگی توازی بیضوی، l را می‌برد. بنابراین هر خط گذرنده از نقطه متناظر P' خط متناظر l' را می‌برد، ولی این امر با ویژگی اقلیدسی مدل دوم متناقض است.

بعدها، احتیاج داریم از مفهوم «یکریختی» برای مدلهای هندسه‌ای پیچیده‌تر از هندسه وقوع ــ هندسه نتاری ــ استفاده کنیم. در هندسه نتاری، علاوه بر رابطه وقوع، روابط میان‌بود و قابلیت انطباق، را خواهیم داشت و به یک «یکریختی» نیاز داریم که این نسبتها را نیز حفظ کند.

عقیده کلی این است که یک یکریختی از دو مدل یک دستگاه بنداشت، تناظری است یک‌به‌یک بین اشیا اساسی دستگاه، که کلیه روابط اساسی دستگاه را حفظ کند.

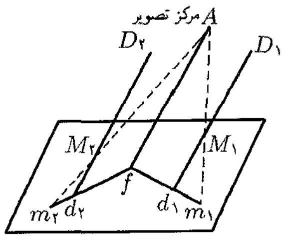
مثال دیگری که در فصل ۹ از آن صحبت خواهیم کرد دستگاه بنداشت برای یک «گروه» است. به بیانی خالی از دقت، یک گروه مجموعه‌ای است همراه با یک عمل ضرب برای عناصرش، که در چند بنداشت معمولی جبر صدق می‌کند. یکریختی در گروهها، یک نگاشت یک‌به‌یک $x \longrightarrow x'$ از یک مجموعه به روی مجموعه دیگر است که ضرب را حفظ می‌کند، یعنی $(xy)' = x'y'$.

صفحه تصویری و آفین

اکنون، خیلی به اختصار از دو نوع مدل هندسه وقوع که از اهمیت خاصی برخوردارند صحبت می‌کنیم. در دوران نوزایی، حدود سده پانزدهم، نقاشان یک نظریه نگاشت منظری پدید آوردند تا بتوانند منظره‌های سه‌بعدی را به‌صورت واقعی در صفحه مجسم سازند. در این نظریه، تصاویر نقاط منظره را از تلاقی خطوط واصل از چشم ناظر (یا مرکز تصویر) به آن نقاط، با صفحه بوم به دست می‌آورند و بدین ترتیب نقشی واقعی از منظره را بر بوم نشان می‌دهند. بیان ریاضی این نظریه، هندسه تصویری نامیده می‌شود.

در این روش تصویرنگاری، تصاویر خطوط موازی واقع در صفحه متقاطع با صفحه بوم، متقاطع نموده می‌شوند (از جنبه عینی چنین به نظر می‌رسد که این تصاویر در نقطه‌ای از افق یکدیگر را می‌برند[1]). این مطلب نوعی بسط هندسه اقلیدسی است که در آن خطوط موازی «در بی‌نهایت

۱. A چشم ناظر یا مرکز تصویر است، D_1 و D_2 دو خط موازی هستند که تصاویر آنها در نقطه f واقع در افق که



به نقطه فرار موسوم است، متقاطع‌اند. مکان نقطه f خط l_∞ است.ـ م.

همدیگر را می‌برند»؛ لذا به جای ویژگی توازی اقلیدسی، ویژگی توازی بیضوی در صفحه منبسط گذاشته می‌شود. ما این بسط را دقیقاً انجام خواهیم داد. نخست چند تعریف.

تعریف. صفحه تصویری مدلی است از بنداشتهای وقوع که ویژگی توازی بیضوی دارد (هر دو خط متلاقی‌اند)، و هر خط دست‌کم سه نقطه دارد (تقویت‌شده بنداشت وقوع ۲).

در بسط صفحه اقلیدسی که اکنون مطرح کردیم تنها ویژگیهای وقوع آن (بدون ویژگیهای میان‌بود و قابلیت انطباق) مورد استفاده قرار می‌گیرد. جزء وقوع محض هندسه اقلیدسی، هندسه آفین نامیده می‌شود، که به تعریف زیر منجر می‌شود.

تعریف. صفحه آفین مدلی است از هندسه وقوع که ویژگی توازی اقلیدسی دارد.

مثال ۳ در این فصل مثالی است از کوچکترین صفحه آفین (۴ نقطه و ۶ خط).

گیریم $\mathscr{A}$ یک صفحه آفین باشد. رابطه $l \sim m$ بر خطهای $\mathscr{A}$ را به معنای $(l = m \vee l || m)$ می‌گیریم. روشن است که این رابطه بازتابی $(l \sim l)$ و متقارن $(l \sim m \Longrightarrow m \sim l)$ است. حال ثابت می‌کنیم که این رابطه ترایا نیز هست یعنی $(l \sim m \wedge m \sim n \Rightarrow l \sim n)$: اگر دو تا از این خطها مساوی باشند، بلافاصله نتیجه حاصل می‌شود، لذا فرض می‌کنیم که سه خط متمایز l، m، و n داریم به‌طوری‌که $l||m$ و $m||n$. برعکس، فرض می‌کنیم l خط n را در نقطه P ببرد. P بر m واقع نیست، زیرا $l||m$. بنابراین دو خط متمایز l و n داریم که با m موازی بوده و از P می‌گذرند، که با ویژگی توازی اقلیدسی $\mathscr{A}$ متناقض است، پس $l \sim m$.

رابطه‌ای که بازتابی، متقارن و ترایا باشد رابطه هم‌ارزی نامیده می‌شود. روابط هم‌ارزی کراراً در ریاضیات ظاهر می‌شوند و خیلی مهم‌اند. هر وقت که این روابط ظاهر شوند، ما رده‌های هم‌ارزی را که با این روابط تعیین می‌شوند در نظر می‌گیریم: مثلاً، رده هم‌ارزی خط l، $[l]$، بنابه تعریف، مجموعه‌ای است متشکل از همه خطوط هم‌ارز با l ــ یعنی خط l و همه خطوط موازی با آن در $\mathscr{A}$. در مدل دکارتی آشنای صفحه اقلیدسی، مجموعه خطهای افقی یک رده هم‌ارزی است، مجموعه همه خطهای متعامد یک مدل دیگر رده هم‌ارزی است، مجموعه خطوط با شیب واحد رده هم‌ارزی سوم است، و غیره. رده‌های هم‌ارزی، ما را از هم‌ارزی به برابری می‌برند: $l \sim m \Leftrightarrow [l] = [m]$.

به دلایل تاریخی و عینی، ما این رده‌های هم‌ارزی را نقاط واقع در بی‌نهایت می‌نامیم، ما این مفهوم مبهم را در چارچوب نظریه مجموعه‌ها روشن ساخته‌ایم. حال مدل $\mathscr{A}$ را با افزودن این نقاط به یک مدل جدید $\mathscr{A}^*$ بسط می‌دهیم و نقاط $\mathscr{A}$ را به دلیل اهمیتشان نقاط «معمولی» می‌خوانیم. بعداً رابطه وقوع را با این بیان که هر یک از این رده‌های هم‌ارزی بر هر یک از خطوط

آن رده قرار دارد، تعمیم می‌دهیم: $[l]$ بر خط l و بر هر خط m موازی با l قرار دارد. بدین ترتیب، در صفحه بسط یافته $\mathscr{A}^*$، خطهای l و m دیگر موازی نیستند، بلکه در $[l]$ یکدیگر را می‌برند.

از آنجا که می‌خواهیم $\mathscr{A}^*$ نیز یک مدل هندسه وقوع باشد، به یک مرحله دیگر نیازمندیم. برای آنکه اصل اول اقلیدس صادق باشد، نیاز به افزودن خط تازه‌ای داریم که همه نقاط بی‌نهایت (و فقط همین نقاط) بر آن قرار داشته باشند: این خط در بی‌نهایت را که مجموعه همه نقاط در بی‌نهایت است را با l_∞ نشان می‌دهیم. اینک «صفحه تصویری» بودن $\mathscr{A}^*$ را که مکمل تصویری $\mathscr{A}$ نامیده می‌شود بررسی می‌کنیم:

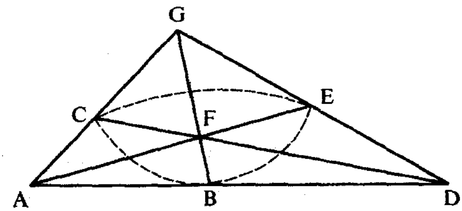
تحقیق بنداشت وقوع ۱. اگر P و Q دو نقطه معمولی باشند، هر دو بر خط یکتایی از $\mathscr{A}$ قرار دارند (زیرا بنداشت وقوع ۱ در $\mathscr{A}$ برقرار است) و این نقاط بر خط بی‌نهایت، l_∞، واقع نیستند. اگر P یک نقطه معمولی و Q نقطه‌ای بر بی‌نهایت $[m]$ باشد، آنگاه یا P بر m واقع است و $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}} = m$، یا به موجب ویژگی توازی اقلیدسی، P بر خط یکتای n موازی با m قرار دارد و Q نیز (بنابه تعریف وقوع برای نقاط واقع در بی‌نهایت) بر n واقع است، لذا $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}} = n$ اگر P و Q دو نقطه در بی‌نهایت باشند، آنگاه $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}} = l_\infty$.

تحقیق بنداشت وقوع ۲ تقویت‌شده. هر خط m از $\mathscr{A}$ دست‌کم دونقطه بر خود دارد (به موجب بنداشت وقوع ۲ در $\mathscr{A}$)، و اکنون یک نقطه سوم $[m]$ در بی‌نهایت را به آن افزوده‌ایم. وجود دست‌کم سه نقطه بر l_∞ از وجود سه خط متقارب در $\mathscr{A}$ (نظیر خطوط واصل بین سه نقطه ناهم‌خط، که با بنداشت وقوع ۳ حاصل شده) نتیجه می‌شود؛ رده‌های هم‌ارزی آن سه خط، حکم را ثابت می‌کنند.

تحقیق بنداشت وقوع ۳. این بنداشت قبلاً در $\mathscr{A}$ صادق بود.

تحقیق ویژگی توازی بیضوی. اگر دو خط معمولی در $\mathscr{A}$ یکدیگر را نبرند، آنگاه به یک رده هم‌ارزی متعلق خواهند بود، و در آن صورت یکدیگر را در بی‌نهایت می‌برند. یک خط معمولی m، خط l_∞ را در $[m]$ می‌برد. ■

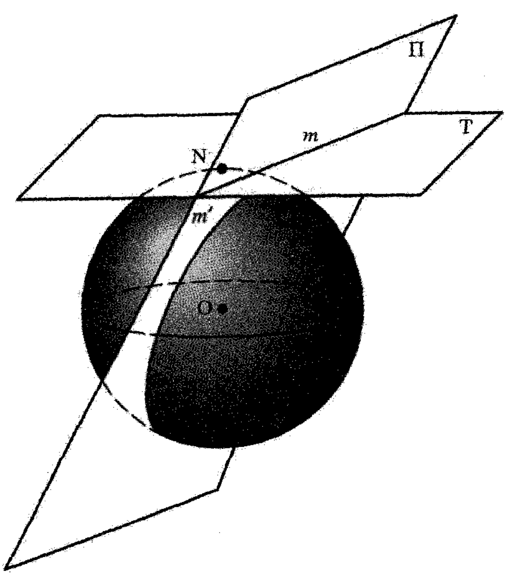
مثال ۶. در شکل ۷.۲ کوچکترین صفحه تصویری، مکمل تصویری کوچکترین صفحه آفینِ نشان داده شده است؛ این صفحه ۷ نقطه و ۷ خط دارد. خط نقطه‌چین می‌تواند معرف خط واقع در بی‌نهایت باشد، زیرا وقتی آن خط و سه نقطه C، B، و E واقع بر آن را برداریم، ۴ نقطه و ۶ خط از صفحه آفین به‌جا می‌مانند که با صفحه مثال ۳، شکل ۵.۲، یکریخت است.



شکل ۷.۲ کوچکترین صفحه تصویری (۷ نقطه‌ای).

صفحه اقلیدسی معمولی، درست به‌عنوان یک مدل هندسه وقوع (بدون ساختارهای قابلیت انطباق، و میان‌بود آن) صفحه آفین حقیقی نامیده می‌شود، و مکمل تصویری آن، صفحه تصویری حقیقی خوانده می‌شود. شرح مختصاتی این صفحات در تمرینهای اصلی ۹ و ۱۰ داده شده‌اند؛ یک مدل دیگر یکریخت با صفحه تصویری حقیقی در تمرین ۱۰ (ج)، و یک مدل «منحنی» یکریخت با صفحه آفین حقیقی در تمرین اصلی ۵ داده شده‌اند.

مثال۷. برای تجسم مکمل تصویری $\mathscr{A}^*$ از صفحه آفین حقیقی $\mathscr{A}$، $\mathscr{A}$ را صفحه T، مماس برکره S در فضای ۳بعدی اقلیدسی در قطب شمال آن، N، تصور کنید (شکل۸.۲). اگر O مرکز



شکل ۸.۲

کره S باشد، می‌توانیم هر نقطه P از صفحه T را با یک خط اقلیدسی که نیمکره شمالی S را تنها در یک نقطه P' می‌برد، به O وصل کنیم؛ این عمل یک تناظر یک‌به‌یک بین نقاط Pی T و نقاط P' از نیمکره شمالی S به ما می‌دهد (N متناظر با خود N است). همچنین اگر خط غیرمشخص m از T داده شده باشد، با یک صفحه $\prod$ گذرنده از O که کره را در یک دایره عظیمه و نیمکره شمالی را در یک نیم‌دایره عظیمه m' می‌برد، m' را به O وصل می‌کنیم. این عمل یک تناظر یک‌به‌یک بین خطوط m از صفحه T و نیمدایره‌های عظیمه m' از نیمکره شمالی به‌دست می‌دهد، تناظری که به روشنی وقوع را حفظ می‌کند.

حال اگر l در T با m موازی باشد، صفحات گذرنده از O که با این خطوط موازی معین می‌شوند یکدیگر را در خطی می‌برند که در صفحه نصف‌النهار قرار دارد، خطی که (چون از O می‌گذرد) نصف‌النهار را در دو نقطه متقاطر می‌برد. از این رو، خط در بی‌نهایت $\mathscr{A}^*$ را می‌توان در یکریختی، به‌صورت نصف‌النهار S که نقاط متقاطرش مشخص شده‌اند تجسم کرد (این نقاط باید مشخص شوند، در غیر این‌صورت، بنداشت یکم وقوع نقض می‌شود). به‌عبارت دیگر $\mathscr{A}^*$ را می‌توان با نیمکره شمالی که نقاط متقاطرش در روی نصف‌النهار به هم چسبیده‌اند مشخص کرد، ولی ما نمی‌توانیم این چسبندگی را خیلی خوب مجسم کنیم، زیرا می‌توان ثابت کرد که چسبانیدن در فضای اقلیدسی ۳ بعدی را بدون پاره کردن نیمکره نمی‌توان انجام داد.

صفحات تصویری مهمترین مدلهای هندسه وقوع محض نیستند. بعداً خواهیم دید که هندسه‌های اقلیدسی، هذلولوی، و البته بیضوی، همگی «زیرهندسه‌های» هندسه تصویری در نظر گرفته می‌شوند. این کشف که به وسیله کیلی صورت گرفته بود او را به این ادعا وادارکرد که «هندسه تصویری، تمامی هندسه است»، که یک ساده‌سازی بیش از حد از آب درآمد.

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) «فرض» یک قضیه فرضی است که حکم قضیه را ایجاب می‌کند.

(۲) یک قضیه را می‌توان با رسم دقیق نمودار ثابت کرد.

(۳) در یک برهان دقیق، بیان اینکه مرحله‌ای «بدیهی» است، یک توجیه مجاز است.

(۴) به هیچ طریق نمی‌توان برنامه‌ای به رایانه داد تا هر حکم ریاضی را ثابت یا رد کند.

(۵) «رد» یک حکم به معنی اثبات نقیض آن است.

(۶) یک مدل از یک دستگاه بنداشت با «تعبیر»ی از آن دستگاه، یکسان است.

(۷) فیثاغورسیان از راه برهان خلف به وجود طولهای گنگ پی بردند.

(۸) نقیض حکم «اگر ۳، عددی است فرد، آنگاه ۹ عددی است زوج» حکم «اگر ۳ عددی است فرد، آنگاه ۹ عددی است فرد» است.

(۹) نقیض ترکیب عطفی، ترکیب فصلی است.

(۱۰) حکم «$۲ = ۱$ و $۲ \neq ۱$» مثالی از یک تناقض است.

(۱۱) در حکم «در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده قابل انطباق‌اند» سورهای نهانی وجود ندارد.

(۱۲) احکام «برخی از مثلثها متساوی‌الاضلاع‌اند» و «مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود دارد» هر دو به یک معنی‌اند.

(۱۳) عکس حکم «اگر مرا هل بدهی، می‌افتم» می‌شود «اگر مرا هل بدهی، نمی‌افتم».

(۱۴) دو حکم زیر منطقاً هم‌ارزند: «هرگاه $l||m$، l و m نقطه مشترکی ندارند» و «هرگاه l و m در یک نقطه مشترک باشند، l و m موازی نیستند».

(۱۵) اگر یک حکم شرطی درست باشد، عکس آن نیز درست است.

(۱۶) اگر حکمی مستلزم حکم دومی باشد و حکم دوم مستلزم حکم سوم، آنگاه حکم اول مستلزم حکم سوم است.

(۱۷) نقیض «هر مثلثی متساوی‌الساقین است» خواهد شد «هیچ مثلثی متساوی‌الساقین نیست».

(۱۸) ویژگی توازی هذلولوی چنین تعریف می‌شود: «به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر آن، دست کم دو خط از P به موازات l رسم می‌شوند».

(۱۹) حکم «هر نقطه لااقل دو خط دارد که بر آن می‌گذرند» مستقل از بنداشتهای هندسه وقوع است.

(۲۰) «اگر $l||m$ و $m||n$، آنگه $l||n$» مستقل از بنداشتهای هندسه وقوع است.

تمرین

۱. فرض می‌کنیم S حکم خودارجاعی «حکم S نادرست است» باشد. نشان دهید که S چه درست باشد چه نادرست، آنگاه تضادی درگفته ما هست (این، همان پارادوکس دروغگوست. کورت گودل صورتی از آن را به عنوان نقطه شروع برای قضیه ناتمامیت معروف خود در منطق به‌کار برده است، دولونگ ۱۹۷۰).

۲. (الف) نقیض $[P \vee Q]$ چیست؟

(ب) نقیض $[P\wedge \sim Q]$ چیست؟

(ج) با استفاده از قواعد منطق که در متن آورده شده‌اند، نشان دهید که $P \Longrightarrow Q$ به همان معنی $[\sim P \vee Q]$ است. (راهنمایی: نشان دهید که هر دوی آنها نقیض یک حکم‌اند.)

(د) یک راه نمادی نوشتن قاعده ۲ برای برهان خلف چنین است:

$$[[H\wedge \sim C] \Longrightarrow [S\wedge \sim S]] \Longrightarrow [H \Longrightarrow C]$$

معنی عبارت اخیر را توضیح دهید.

۳. نقیض اصل چهارم اقلیدس را پیدا کنید.

۴. نقیض اصل توازی اقلیدسی را پیدا کنید.

۵. عکس احکام زیر را بنویسید:

(الف) هرگاه خطوط l و m موازی باشند، آنگاه قاطع t که l و m را می‌برد، زوایای متبادل درونی قابل انطباق پدید می‌آورد.

(ب) هرگاه مجموع اندازه زوایای درونی در یک طرف قاطع t کمتر از ۱۸۰° باشد، خطوط l و m در همان طرف قاطع t یکدیگر را می‌برند.

۶. هر پنج گزاره هندسه وقوع را که در این فصل آمده ثابت کنید. در دلایل خود از بنداشت وقوع ۲ استفاده نکنید.

۷. برای هر جفت از بنداشتهای هندسه وقوع تعبیری پیدا کنید که تنها همان دو بنداشت در آن صدق کنند و بنداشت سوم صادق نباشد (این امر نشان خواهد داد که بنداشتهای وقوع مستقل از یکدیگرند، بدین معنی که ممکن نیست یکی از آنها را از روی دوتای دیگر ثابت کرد.)

۸. ثابت کنید که تعبیرهای مثالهای ۳ و ۴ این فصل مدلهایی از هندسه وقوع‌اند که ویژگیهای توازی اقلیدسی و هذلولوی به‌ترتیب در آنها صدق می‌کنند.

۹. در هر یک از تعبیرهای زیر از اصطلاحات تعریف نشده، کدام‌یک از بنداشتهای هندسه وقوع صدق می‌کند و کدام یک صدق نمی‌کند؟ بگویید که آیا هر تعبیر ویژگی توازی بیضوی را دارد یا نه؟ اقلیدسی یا هذلولوی را چطور؟

(الف) «نقطه‌ها» نقطه‌های واقع بر یک صفحه کاغذ و «خطها» دوایر مرسوم در آن صفحه و «وقوع» به معنی قرارگرفتن نقطه بر دایره است.

(ب) «نقطه‌ها» خطهای فضای اقلیدسی سه‌بعدی، «خطها» صفحات فضای اقلیدسی سه‌بعدی و «وقوع» رابطه معمولی قرارگرفتن یک خط در یک صفحه است.

(ج) عیناً مانند (ب) جز اینکه خود را به خطوط و صفحات گذرنده‌بر یک نقطه ثابت معمولی O محدود می‌کنیم.

(د) دایره‌ای را در صفحه اقلیدسی ثابت می‌گیریم. «نقطه» را به معنی نقطه اقلیدسی معمولی «درون» دایره می‌گیریم، «خط» را به معنی وتر دایره می‌گیریم و فرض می‌کنیم «وقوع» به معنی معمولی قرار داشتن نقطه بر وتر باشد. (وتر یک دایره، پاره‌خطی است که دو سرش بر محیط دایره قرار دارد.)

(ه) کره ثابتی را در فضای سه‌بعدی اقلیدسی اختیار می‌کنیم. دو نقطه برکره را متقاطر گوییم اگر بر یک قطر کره قرار داشته باشند؛ مثلاً قطبهای شمال و جنوب، دو نقطه متقاطرند. «نقطه» را مجموعه $\{P, P'\}$ متشکل از دو نقطه متقاطر برکره و «خط» را دایره عظیمه C از کره می‌گیریم. یک «نقطه» $\{P, P'\}$ بر یک «خط» «قرار دارد» اگر یکی از نقاط P و P' بر دایره عظیمه C قرار داشته باشد (در این صورت نقطه دیگر نیز بر C قرار خواهد داشت).

۱۰. (الف) ثابت کنید که وقتی هر یک از دو مدل هندسه وقوع درست سه «نقطه» برخورد داشته باشد، مدلها باید یکریخت باشند.

(ب) هرگاه دو مدل درست دارای چهار نقطه باشند آیا باید یکریخت باشند؟ اگر چنین فکر می‌کنید، ادعای خود را ثابت کنید، اگر چنین فکر نمی‌کنید یک مثال نقض ارائه دهید.

(ج) نشان دهید که مدل تمرینهای ۹(ج) و ۹(ه) یکریخت‌اند. (راهنمایی: نقطه O در تمرین ۹(ج) را مرکز کره تمرین ۹(ه) بگیرید و کره را با خطها و صفحات گذرنده از O ببرید.)

۱۱. مدلی در هندسه وقوع بسازید که نه ویژگیهای توازی بیضوی یا هذلولوی داشته باشد، و نه ویژگیهای اقلیدسی. (این ویژگیها به هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر l اشاره دارند. مدلی بسازید که هرگاه در آن P و lها را متفاوت بگیریم، ویژگیهای توازی متفاوت داشته باشند.)

۱۲. فرض می‌کنیم در مدلی از هندسه وقوع هر «خط» دست‌کم سه «نقطه» متمایز برخود دارد. کمترین تعداد «نقطه‌ها» و کمترین تعداد «خطها»یی که چنین مدلی می‌توانند داشته باشند چیست؟ بعد فرض می‌کنیم که این مدل ویژگی توازی اقلیدسی داشته باشد. نشان دهید که کمترین تعداد «نقطه»ها و کمترین تعداد «خطها»یی که این مدل می‌تواند داشته باشد به‌ترتیب ۹ و ۱۲ است.

۱۳. قیاسهای زیر از لوئیس کارول گرفته شده‌اند. کدام‌یک از آنها برهانی صحیح است؟

(الف) هیچ وزغی شاعرانه نمی‌خواند، بعضی اردکها ناشاعرانه می‌خوانند. پس بعضی از اردکها وزغ نیستند.

(ب) طلا سنگین است، هیچ چیز جز طلا به او آرامش نمی‌دهد. پس هیچ چیز سبک به او آرامش نمی‌دهد.

(ج) همه شیرها درنده‌اند؛ برخی از شیرها قهوه نمی‌نوشند. پس، بعضی از موجودات که قهوه نمی‌نوشند درنده نیستند.

(د) بعضی‌از بالشها نرم‌اند؛ هیچ میله فلزی نرم نیست. پس، بعضی از میله‌های فلزی بالش نیستند.

۱۴. نمونه زیر را که مثالی درباره ساختارهای یکریخت است توسط یک دانشجوی رشته موسیقی تفسیر کنید: رومئو و ژولیت و داستان وست ساید.

۱۵. گفته زیر از هنرمند معروف دیوید هانتر را تفسیر کنید. تنها فایده منطق، نوشتن کتاب در باب منطق و تدریس آن است؛ منطق در رفتار آدمی کاربردی ندارد.

تمرینهای اصلی

۱. فرض می‌کنیم $\mathscr{M}$ یک صفحه تصویری باشد. $\mathscr{M}'$ را به این صورت جدید تعریف می‌کنیم که «نقاط» $\mathscr{M}'$ را خطهای $\mathscr{M}$ و «خطها»ی $\mathscr{M}'$ را نقاط $\mathscr{M}$، با یک رابطه وقوع یکسان می‌گیریم. ثابت کنید که $\mathscr{M}'$ یک صفحه تصویری (به‌نام صفحه دوگان $\mathscr{M}$) است. سپس فرض می‌کنیم $\mathscr{M}$ فقط تعداد متناهی نقطه داشته باشد. ثابت کنید که همه خطوط $\mathscr{M}$ تعداد نقاط یکسانی برخود دارند (راهنمایی: شکل ۴۳.۷)

۲. فرض می‌کنیم بنداشتهای زیر را به بنداشتهای هندسه وقوع افزوده‌ایم:

(i) ویژگی توازی اقلیدسی.

(ii) وجود تنها تعداد متناهی نقطه.

(iii) وجود خطوط l و m به‌طوری که تعداد نقاط واقع بر l با تعداد نقاط واقع بر m متفاوت باشد. نشان دهید که این دستگاه بنداشتی ناسازگار است (راهنمایی: ثابت کنید که (i) و (ii) مستلزم نقیض (iii) است.)

۳. ثابت کنید که هر صفحه تصویری $\mathscr{B}$ با مکمل تصویری یک صفحه آفین $\mathscr{A}$ یکریخت است (راهنمایی: همان کاری را می‌کنیم که در مثال ۶ کردیم، خط دلخواه m را در $\mathscr{B}$ می‌گیریم و آن را «خط در بی‌نهایت» تصور می‌کنیم؛ m و نقاط واقع بر آن را برمی‌داریم و ثابت می‌کنیم آنچه مانده یک صفحه آفین $\mathscr{A}$ است و $\mathscr{B}$ با مکمل $\mathscr{A}^*$ یکریخت است.) یک کشف جالب این است که $\mathscr{A}$ الزاماً تا حد یکریختی یکتا نیست (هارتس‌هورن، ۱۹۶۷).

۴. با نشانیدن صفحه آفین تمرین ۲ در صفحه مکملش، با کمک گرفتن از تمرین ۱، راه‌حل دیگری برای تمرین اصلی ۲ پیدا کنید.

۵. تعبیر زیر از هندسه وقوع را در نظر می‌گیریم، با یک کره سوراخ‌شده در سه‌بعدی فضای اقلیدسی، یعنی با کره‌ای که یک نقطه N از آن برداشته شده باشد، آغاز می‌کنیم. «نقطه»ها را نقطه‌های کره سوراخ‌شده می‌گیریم. به‌ازای هر دایره از کره اصلی که از N می‌گذرد، دایره سوراخ‌شده‌ای را که از برداشتن N حاصل شده یک «خط» و «وقوع» را به معنی اقلیدسی قرارگرفتن یک نقطه بر یک دایره سوراخ‌شده تعبیر می‌کنیم. آیا این تعبیر یک مدل است؟ اگر چنین است کدام ویژگی توازی را دارد؟ آیا با هیچ‌یک از مدلهایی که شما می‌شناسید یکریخت است؟ (راهنمایی: اگر N قطب شمال باشد، کره سوراخ شده را از نقطه N بر صفحه Π، مماس برکره در قطب‌جنوب، تصویرکنید، شکل ۹.۲. با استفاده از این واقعیت که صفحات گذرنده از N، کره را در دوایر و صفحه Π را در خطوط می‌برند حل خواهد شد. برای یک بحث بامزه از این تعبیر، ←سود، فصل ۳، ۱۹۹۱.)

۶. حکم زیر را در هندسه وقوع در نظر می‌گیریم: «به‌ازای هر دو خط l و m یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه نقاط واقع بر l و مجموعه نقاط واقع بر m وجود دارد.» ثابت کنید که این حکم مستقل از بنداشتهای هندسه وقوع است.

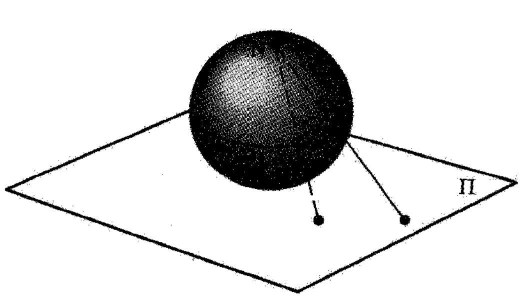
۷. فرض می‌کنیم که $\mathscr{M}$ یک صفحه تصویری متناهی باشد که بنابر تمرین، تمرین اصلی ۱، همه خطوط آن تعداد یکسانی نقطه بر خود دارند. فرض می‌کنیم این تعداد $n + ۱$ باشد. ثابت کنید:

(الف) بر هر نقطه از $\mathscr{M}$، $n + ۱$ خط می‌گذرد.

(ب) تعداد کل نقطه‌های واقع در $\mathscr{M}$ برابر با $n^۲ + n + ۱$ است.

(ج) تعداد کل خطوط واقع در $\mathscr{M}$ برابر با $n^۲ + n + ۱$ است.

۸. فرض می‌کنیم $\mathscr{A}$ یک صفحه آفین متناهی باشد که بنابر تمرین اصلی ۲، همه خطوط آن تعداد یکسانی نقطه بر خود دارند. این تعداد را با n نشان می‌دهیم. ثابت کنید:



شکل ۹.۲

(الف) بر هر نقطه از $\mathscr{A}$، $n+1$ خط از صفحه می‌گذرد.

(ب) تعداد کل نقطه‌های $\mathscr{A}$ برابر n^2 است.

(ج) تعداد کل خطوط $\mathscr{A}$ برابر $n(n+1)$ است.

(راهنمایی: از تمرین اصلی ۷ استفاده کنید.)

۹. «نقطه‌ها»ی صفحه آفین حقیقی، همه زوجهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی‌اند. یک «خط» با یک سه‌تایی مرتب (u, v, w) از اعداد حقیقی معین می‌شود که یا $u \neq 0$ یا $v \neq 0$، و به صورت مجموعه همه «نقطه»های (x, y) که در معادله خطی $ux + vy + w = 0$ صدق می‌کنند تعریف می‌شود. «وقوع» به‌عنوان عضویت در مجموعه تعریف می‌شود. تحقیق کنید که همه بنداشتهای یک صفحه آفین در این تعبیر صدق می‌کنند.

۱۰. در صفحه تصویری حقیقی یک «نقطه»ی $[x, y, z]$ با یک سه‌تایی مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی، که همه همزمان صفر نیستند، تعیین می‌شود و از همه سه‌تایی‌هایی به صورت (kx, ky, kz)، که در آن $k \neq 0$ عدد حقیقی دلخواهی است، تشکیل شده است. بنابراین $[kx, ky, kz] = [x, y, z]$. یک خط در صفحه تصویری حقیقی با یک ۳ تایی مرتب (u, v, w) از اعداد حقیقی، که همه همزمان صفر نیستند، معین و به عنوان مجموعه همه «نقطه»های $[x, y, z]$ تعریف می‌شود که مختصات آنها در معادله خطی $ux + vy + wz = 0$ صدق می‌کنند. «وقوع»، عضویت در مجموعه تعریف می‌شود. تحقیق کنید که همه بنداشتهای یک هندسه تصویری در این تعبیر صدق می‌کنند. ثابت کنید که اگر $z = 0$ را معادله «خط در بی‌نهایت» انگاریم، با تخصیص «نقطه»ی آفین (x, y)، «مختصات همگن» $[x, y, 1]$، و تخصیص «خطها»ی آفین به «خطها»ی تصویری به طریق معمولی، صفحه تصویری حقیقی با مکمل تصویری صفحه آفین حقیقی یکریخت می‌شود. ثابت کنید که مدلهای تمرین ۱۰(ج) هم با صفحه تصویری حقیقی یکریخت‌اند.

۱۱. (الف) وقتی تعبیری از بنداشتها برای اثبات مدل بودن این تعبیر داده می‌شود، شما باید تحقیق کنید که تعبیرهای این بنداشتها صادق‌اند. اگر شما این تحقیق را دقیقاً، نه به‌طور سرسری، انجام دهید، عملاً براهین صدق بنداشتها را آورده‌اید. این براهین در کدام نظریه بنداشتی آورده شده‌اند؟ این مسئله را خصوصی‌تر برای مدلهایی که در متن و تمرینات این فصل آمده‌اند در نظر بگیرید.

(ب) بعضی از تعبیرها به یک کره در «فضای اقلیدسی» مربوط می‌شوند، با این پیش‌فرض که شما قبلاً با نظریه این چیزها آشنایی دارید، اکنون مبانی بنداشتی نظریه ساده‌تر صفحه اقلیدسی را دقیقتر می‌سازیم. آیا این کار شما را نگران می‌کند؟ توضیح دهید.

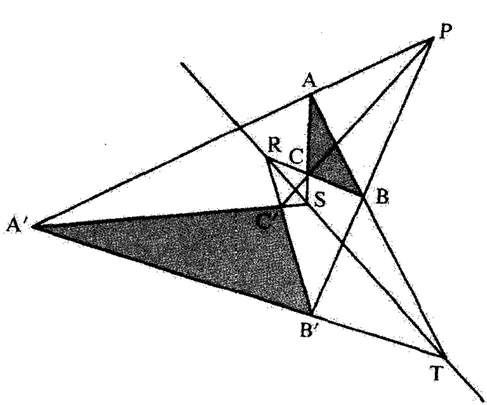
(ج) آیا یک دستگاه ناسازگار (نظیر دستگاه تمرین ۲ اصلی) می‌تواند مدل داشته باشد؟ شرح دهید.

۱۲. فقط به این دلیل که هر مرحله در برهان توجیه شده است، صحت برهان تضمین نمی‌شود: توجیهات ممکن است غلط باشند. مثلاً توجیه ممکن است یکی‌از شش نوع برهان مجاز در قاعده منطق ۱ نباشد، یا ممکن است به یک قضیه قبلی مربوط شود که کاربردی نباشد، یا ممکن است استنتاج غلط از یک تعریف (از قبیل «خطوط موازی متساوی‌الفاصله‌اند») گرفته شود. از این رو برای تحقیق صحت توجیهات در برهان اول باید یک برهان ثانی آورده شود. ولی در این صورت چگونه می‌توانیم به صحت «برهان» دوم مطمئن باشیم؟ آیا باید یک «برهان» سوم و همین‌طور بی‌نهایت برهان بیاوریم؟ بحث کنید.

پروژه

۱. حکم زیر از ریاضیدان فرانسوی ژ. دزارگ است: «هرگاه رأسهای متناظر دو مثلث چنان باشند که خطوط واصل بین آنها متقارب باشند، نقاط تلاقی اضلاع متناظرشان بر یک استقامت‌اند.» (شکل ۱۰.۲.) این حکم مستقل از بنداشتهای صفحات تصویری است: در صفحه تصویری حقیقی صادق است، ولی‌صفحات تصویری دیگری وجود دارند که در آنها صادق نیست. شرحی در باب این استقلال قضیه تهیه کنید (آرتزی، ۱۹۶۵، یا استیونسون، ۱۹۷۲).

۲. یک یکریختی از یک صفحه تصویری $\mathscr{M}$ بر روی صفحه دوگانش $\mathscr{M}'$، قطبی‌بود $\mathscr{M}$، نامیده می‌شود (تمرین اصلی ۱). بنابر تعریف «یکریختی»، این عمل به هر نقطه A از $\mathscr{M}$ یک خط $p(\mathrm{A})$ از $\mathscr{M}$ به نام قطبی A، و به هر خط m از $\mathscr{M}$ یک نقطه $\mathrm{P}(m)$ از $\mathscr{M}'$ به‌نام قطب آن تخصیص می‌دهد، به‌طوری که A بر m قرار دارد اگر و فقط اگر $\mathrm{P}(m)$ بر $p(\mathrm{A})$ قرار داشته باشد.



شکل ۱۰.۲ قضیه دزارگ.

قطع مخروطی γ که از راه این قطبی‌بود تعیین می‌شود مجموعه همه نقاط A است به‌طوری‌که A بر قطبی‌اش $p(\mathrm{A})$ قرار داشته باشد. $p(\mathrm{A})$، بنابر تعریف، خط مماس بر قطع مخروطی در A است. نقطه B، بنابر تعریف، درون γ است اگر هر خط گذرنده از B ، γ را در دو نقطه ببرد. این تعریف[۱] خیلی مجرد از «قطع مخروطی» را می‌توان با بیان آشناتری (با استفاده از مختصات) نظیر مجموعه جواب برای یک معادله درجه دوم همگن با ۳ متغیر تطبیق داد. نظریه مقاطع مخروطی یکی از مهمترین مباحث در هندسه تصویری مسطحه است. گزارشی در این باب با استفاده از یک متن هندسه تصویری خوب، (نظیر کاکستر ۱۹۶۰) تهیه کنید. قطبی‌بود نقش مهمی در فصل ۷ دارد (تمرین اصلی ۱۳، فصل ۶).

۳. ارسطو پایه‌گذار منطق کلاسیک شناخته شده است. تا سالهای ۱۹۳۰، منطق‌دانان مهم عبارت بودند از «لایبنیتس، بول، فرگه، راسل، وایت‌هد، هیلبرت، اکرمن، اسکولم، گودل، چرچ، تارسکی، و کلین. با استفاده از دولونگ (۱۹۷۰) و کتاب‌شناسی مراجع‌اش، گزارشی از تاریخ منطق تهیه کنید.

---

۱. گوته، شاعر معروف، می‌گوید: «ریاضیدانان مثل فرانسویان هستند: هر چه به آنها بگویید آن را به زبان خود ترجمه می‌کنند و بلافاصله چیزی کاملاً متفاوت تحویلتان می‌دهند.»

۳

بنداشتهای هیلبرت

در ارزش‌دهی به اثر اقلیدس به‌عنوان یک شاهکار منطقی،
سخت مبالغه شده است.

برتراند راسل

نقایص کار اقلیدس

حال که قواعد استدلال خود را روشن کردیم (فصل ۲)، اکنون به اصول اقلیدس برمی‌گردیم. در تمرینهای ۹ و ۱۰ فصل ۱ دیدیم که اقلیدس در بیان فرضهای خود از ذکر این نکات غفلت کرده است که نقطه و خط وجود دارند، همه نقاط بر یک خط واقع نیستند، و بر هر خط دست کم دو نقطه واقع است. این فرضها را در فصل ۲ با افزودن دو بنداشت وقوع دیگر روشن ساختیم.

در تمرینهای ۶ و ۷ فصل ۱، دیدیم که برخی از فرضها در باب «میان‌بود» لازم است. در واقع اقلیدس هرگز به صراحت به این مفهوم اشاره نکرده است، ولی به‌طور ضمنی واقعیاتی را درباره

آن پذیرفته است که در نمودارها آشکار هستند. در فصل ۱، خطر استدلال از روی نمودار را دیدیم، پس تصریح این فرضهای ضمنی لازم بوده است.

تعداد کمی از براهین اقلیدس بر اساس استدلال از روی نمودار بنا شده‌اند. برای دقیقتر ساختن این براهین، به دستگاه بنداشتهای صریح بزرگتری نیاز داریم. دستگاههای متعددی از این گونه بنداشتها تاکنون پیشنهاد شده‌اند، ولی ما صورت تغییریافته‌ای از دستگاه بنداشتهای داویت هیلبرت را عرضه می‌کنیم. دستگاه هیلبرت نخستین دستگاهی نیست که پیشنهاد شده است، ولی شاید بنداشتهای او شهودی‌ترین و محققاً از حیث روش نزدیکترین بنداشتها به اصل اقلیدس بوده‌اند.[۱]

داویت هیلبرت

هیلبرت در مدت ربع اول سده بیستم برجسته‌ترین شخصیت ریاضی در جهان بود.[۲] تحقیقات برجسته و اصیل او میدان وسیعی از ریاضیات و همچنین فیزیک را در برمی‌گیرند. او شاید بیش از همه، به‌خاطر پژوهشهایش در مبانی هندسه و نیز مبانی نظریه اعداد جبری، فضاهای با ابعاد نامتناهی، و منطق ریاضی شهرت یافته است. او قهرمان بزرگ روش بنداشتی است. همه موضوعهای فوق‌الذکر را به استثنای فیزیک در قالب روش بنداشتی ریخته است (گرچه در زمینه فیزیک هم موفق شد با روشهای ریاضی به یاری فیزیکدانان بشتابد). بالاتر از همه، او آینده‌نگر

۱. فراموش نکنیم که هیچ کار جدی در زمینه ساختن بنداشتهای تازه برای هندسه نااقلیدسی انجام نشده بود تا اینکه کشف هندسه نااقلیدسی ریاضیدانان را بدین سمت سوق داد که دوباره مبانی هندسه اقلیدسی را بررسی کنند. شگفت اینکه پارادوکس هندسه نااقلیدسی باید به ما کمک کند تا هندسه اقلیدسی را بهتر بفهمیم.

۲. خواندن شرح حال هیلبرت به قلم گیرای کنستانس رید را صمیمانه به شما توصیه می‌کنیم. این کتاب خالی از اصطلاحات فنی و متضمن شور و هیجان دورانی است که گوتینگن مرکز ریاضیات جهان بوده است.

برای ریاضیات بود. در سال ۱۹۰۰ (درکنگره ریاضیدانان در پاریس)، ۲۳ مسئله از مهمترین مسائل ریاضیات این سده را پیش‌بینی و مطرح کرد.

از او نقل شده که می‌گفته است: «آدمی همیشه باید به‌جای نقطه و خط و صفحه بتواند میز و صندلی و لیوان آبجو بگذارد.» به‌عبارت دیگر، چون هیچ‌یک از ویژگیهای نقطه و خط و صفحه، غیر از ویژگیهایی که با بنداشتها داده شده‌اند، نمی‌توانند در استدلال مورد استفاده قرار گیرند، پس شما می‌توانید این موجودیتهای تعریف نشده را به هر نامی که دلتان می‌خواهد بنامید.

بنداشتهای هیلبرت به پنج گروه تقسیم شده‌اند: وقوع، میان‌بود، قابلیت انطباق، پیوستگی، و توازی. ما قبلاً بنداشتهای سه‌گانه وقوع را در فصل ۲ دیده‌ایم. در بخشهای بعد متوالیاً به گروه‌های دیگر بنداشتهای او خواهیم پرداخت.

بنداشتهای میان‌بود

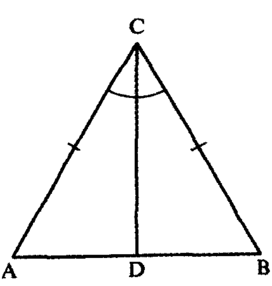
برای اینکه بتوانیم نیاز به بنداشتهای میان‌بود را نشان دهیم برهانی را که در زیر برای قضیه «زوایای مجاور به قاعده در مثلث متساوی‌الساقین قابل انطباق‌اند» آورده شده در نظر می‌گیریم. این برهان از آن اقلیدس نیست. گرچه آن هم نقصهایی دارد (ر.ک. گولوس، ۱۹۶۸، ص ۵۷)، اما برهانی است که در برخی کتابهای هندسه دبیرستانی آورده شده است.

برهان:

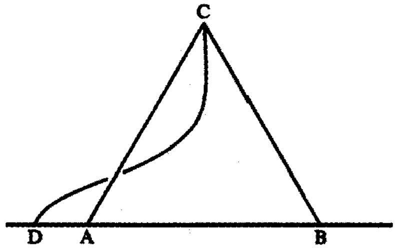
$\triangle ABC$ با $AB \cong AC$ داده شده است. می‌خواهیم ثابت کنیم $\measuredangle B \cong \measuredangle A$ (شکل ۱.۳).

(۱) فرض می‌کنیم که نیمساز $\measuredangle C$ ضلع AB را در D ببرد (هر زاویه یک نیمساز دارد).

(۲) در $\triangle ACD$ و $\triangle BCD$: $AC \cong BC$ (بنابر فرض).



شکل ۱.۳



شکل ۲.۳

(۳) $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BCD$ (تعریف نیمساز یک زاویه).

(۴) $CD \cong CD$ (چیزهای مساوی با هم قابل انطباق‌اند).

(۵) $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (ض‌زض)

(۶) پس $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ (زاویه‌های متناظر در مثلثهای قابل انطباق). ■

مرحله (۱) را در نظر می‌گیریم که دلیل درستی‌اش این است که هر زاویه یک نیمساز دارد. این، حکم درستی است و می‌توان جداگانه آن را ثابت کرد. ولی ازکجا می‌دانیم که نیمساز $\sphericalangle C$، $\overleftrightarrow{AB}$ را می‌برد، یا اگر می‌برد چگونه می‌دانیم که نقطه D بین A و B واقع است؟ ممکن است این مطلب بدیهی به نظر آید، ولی اگر بخواهیم دقیق باشیم باید آن را ثابت کنیم زیرا ممکن است شکل به‌صورت ۲.۳ باشد. اگر چنین باشد، مراحل (۲) تا (۵) باز درست خواهند بود ولی ما تنها می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\sphericalangle B$ با $\sphericalangle CAD$ قابل انطباق است نه با $\sphericalangle CAB$، زیرا در ΔACD، $\sphericalangle CAD$ زاویه‌ای است که با $\sphericalangle B$ متناظر است.

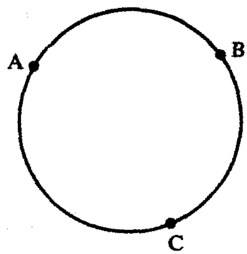
وقتی بنداشتهای میان‌بود را بیان کردیم، می‌توانیم (البته پس‌از مقدار زیادی کار) ثابت کنیم که نیمساز $\sphericalangle C$، $\overleftrightarrow{AB}$ را در یک نقطه D بین A و B می‌برد و لذا برهان فوق اصلاح می‌شود (← قضیه قطعه‌بر در ادامه این بخش). با وجود این، برهان ساده‌تری برای این قضیه وجود دارد (که در بخش بعد آورده شده است). ما قرارداد

$$A * B * C$$

را برای نشان دادن حکم «نقطه B بین نقطه A و نقطه C است» به کار خواهیم برد.

بنداشت میان‌بود ۱. اگر $A * B * C$، آنگاه A، B، و C سه‌نقطه متمایزند که بر یک خط قرار دارند، و $C * B * A$.

شکل ۳.۳



شکل ۴.۳

قسمت اول این بنداشت، شکافی را که در تمرین ۶، فصل ۱، گفتیم پُر می‌کند. قسمت دوم ($C * B * A$) بیانگر این نکته بدیهی است که «بین A و C» همان به معنی «بین C و A» است ـــ مهم نیست که C اول گفته شود یا A.

بنداشت میان‌بود ۲. دو نقطه متمایز B و D داده شده‌اند. نقاطی مانند A، C، و E بر $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند چنان‌که $A * B * D$، $B * C * D$، و $B * D * E$ (شکل ۳.۳).

این بنداشت ما را مطمئن می‌سازد که نقاطی بین B و D وجود دارند و خط $\overleftrightarrow{BD}$ به نقطه B یا نقطه D ختم نمی‌شود.

بنداشت میان‌بود ۳. اگر A، B، و C سه نقطه متمایز بر یک خط باشند، یکی و تنها یکی از آنها بین دوتای دیگر واقع است.

این بنداشت ما را مطمئن می‌سازد که خط دایره‌ای شکل نیست. اگر نقاط ما بر دایره بودند آن وقت مجبور بودیم بگوییم که هر یک از آنها بین دوتای دیگر واقع است (یا هیچ یک بین دوتای دیگر واقع نیست ـــ بستگی به این داشت که شما به کدام‌یک از دو کمان نگاه می‌کردید (شکل ۴.۳).

پیش از ذکر آخرین بنداشت میان‌بود، به بررسی بعضی از نتایج حاصل از سه بنداشت اول می‌پردازیم. یادآور می‌شویم که پاره‌خط AB به‌صورت مجموعه همه نقاط بین A و B و خود نقاط A و B تعریف می‌شود. نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ با مجموعه همه نقاط پاره‌خط AB و همه نقاطی

نظیر C تعریف می‌شود به‌طوری که $A * B * C$. بنداشت ۲ ما را مطمئن می‌سازد که نقاطی نظیر C وجود دارند و لذا نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ از پاره‌خط AB بزرگتر است. اکنون می‌توانیم دستورهایی را که در تمرین ۷، فصل ۱، دیده‌ایم ثابت کنیم.

گزاره ۱.۳ به‌ازای هر دو نقطه A و B:

(i) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$

(ii) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{\overleftrightarrow{AB}\}$.

برهان (i):

(۱) بنابر تعریف پاره‌خط و نیم‌خط، $AB \subset \overrightarrow{AB}$ و $AB \subset \overrightarrow{BA}$، لذا بنابر تعریف اشتراک، $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

(۲) برعکس فرض می‌کنیم نقطه C به اشتراک $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعلق باشد. می‌خواهیم نشان دهیم C به AB تعلق دارد.

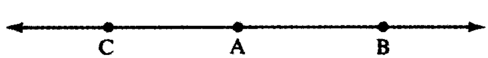
(۳) اگر $C = A$ یا $C = B$، آنگاه C یکی از دو سر AB خواهد بود. در غیر این‌صورت A، B، و C سه‌نقطه واقع بر یک خط‌اند (بنابر تعریف نیم‌خط و بنداشت ۱)، لذا درست یکی از روابط $A * C * B$، $A * B * C$، یا $C * A * B$ برقرار است (بنداشت ۳).

(۴) هرگاه $A * B * C$، آنگاه C به $\overrightarrow{BA}$ متعلق نیست، هرگاه $C * A * B$، آنگاه C به $\overrightarrow{AB}$ متعلق نیست. در هر دو حال C به هر دو نیم‌خط تعلق ندارد.

(۵) بنابراین باید رابطه $A * C * B$ صادق و C متعلق به AB باشد. ■

برهان (ii) شبیه به همین است و به‌عنوان تمرین به‌عهده خواننده واگذار می‌شود. (یادآوری می‌کنیم که $\{\overleftrightarrow{AB}\}$ مجموعه نقاطی است که بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارند.)

بعد یادآور می‌شویم که هرگاه $C * A * B$، $\overrightarrow{AC}$ را متقابل با $\overrightarrow{AB}$ گویند (شکل ۵.۳). بنابر بنداشت ۱، نقاط A، B، و C هم‌خط‌اند، و بنابر بنداشت ۳، C به $\overrightarrow{AB}$ متعلق نیست، بنابراین نیم‌خطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متمایزند. لذا این تعریف با تعریفی که در فصل ۱ آورده بودیم مطابقت می‌کند (گزاره ۶.۳). بنداشت ۲ تضمین می‌کند که هر نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ نیم‌خط متقابلی مانند $\overrightarrow{AC}$ دارد.

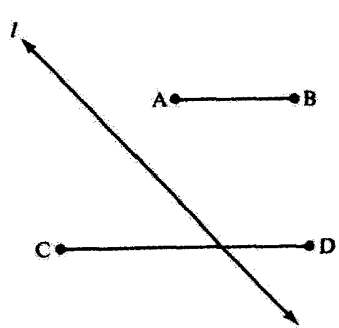


شکل ۵.۳

از شکل ۵.۳ چنین برمی‌آید که هر نقطه P واقع بر خط l گذرنده از سه نقطه A، B، و C، یا به نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ متعلق است یا به نیم‌خط متقابل آن $\overrightarrow{AC}$. این حکم شبیه حکم دوم گزاره ۱.۳ به نظر می‌آید، ولی واقعاً پیچیده‌تر از آن است. ما اکنون درباب چهار نقطه A، B، C، و P صحبت می‌کنیم، در حالی که قبلاً هر بار تنها با سه نقطه سروکار داشتیم. حقیقت این است که در اینجا با حکم قوی دیگری که «از روی تصویر بدیهی است» برمی‌خوریم که نمی‌توانیم بدون وارد کردن بنداشت دیگری آن را ثابت کنیم (تمرین ۱۷).

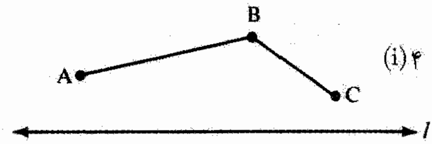
فرض می‌کنیم که حکم «هرگاه $C * A * B$، و P با A، B، و C هم‌خط باشد، آنگاه $P \in \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}$» را ویژگی جداسازی خط می‌نامیم، برخی ریاضیدانان (نظیر گولوس) این ویژگی را به‌عنوان بنداشت دیگری می‌پذیرند. ولی، در ریاضیات فرض کردن بنداشتها بیش از حد لزوم، کار ظریفی تلقی نمی‌شود (هر چند پایبندی به ظرافت به بهای کاری سخت برای اثبات احکامی که بدیهی به نظر می‌رسند تمام می‌شود). پس ما ویژگی جداسازی خط را بنداشت فرض نخواهیم کرد، بلکه آن را به‌صورت نتیجه‌ای از بنداشتهای قبلی و آخرین بنداشت میان‌بود، به‌نام بنداشت جداسازی صفحه، ثابت خواهیم کرد.

تعریف. فرض می‌کنیم l خطی دلخواه باشد و A و B دو نقطه ناواقع بر l باشند، اگر $A = B$ یا اگر پاره‌خط AB شامل نقطه‌ای واقع بر l نباشد، گوییم A و B در یک‌طرف l قرار دارند. ولی اگر $A \neq B$ و پاره‌خط AB، l را ببرد، می‌گوییم که A و B در دو طرف l قرار دارند (شکل ۶.۳). قانون طرد شق ثالث (قاعده ۱۰) به ما می‌گوید که A و B یا در یک طرف l قرار دارند یا در دو طرف آن.



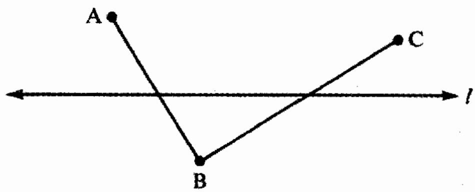
شکل ۶.۳ A و B در یک طرف l، C و D در دو طرف l قرار دارند.

بنداشت ۴ (i)



شکل ۷.۳

بنداشت ۴ (ii)



شکل ۸.۳

بنداشت میان‌بود ۴ (جداسازی صفحه). به‌ازای هر خط l و هر سه نقطه A، B، و C ناواقع بر l:

(i) هرگاه A و B در یک طرف l، و B و C در یک طرف l باشند، A و C هم در یک طرف l خواهند بود. (شکل ۷.۳).

(ii) هرگاه A و B در دو طرف l، و B و C هم در دو طرف l باشند، A و C در یک طرف l خواهند بود.

نتیجه. (iii) اگر A و B در دو طرف l، و B و C در یک طرف l باشند، A و C در دو طرف l هستند (شکل ۸.۳).

بنداشت ۴(i) به‌طور غیرمستقیم دوبعدی بودن هندسه ما را تضمین می‌کند، زیرا این بنداشت در فضای سه‌بعدی صادق نیست. (خط l ممکن بود بیرون این صفحه کاغذ باشد و پاره‌خط AC آن را ببرد. این تعبیر نشان می‌دهد که اگر ما ویژگی جداسازی خط را به‌عنوان بنداشت می‌پذیرفتیم، نمی‌توانستیم ویژگی جداسازی صفحه را ثابت کنیم.) بنداشت میان‌بود ۴ هم در اینجا مورد نیاز است تا اصل پنجم اقلیدس که از دو خط صحبت می‌کند که یکدیگر را در یک «طرف» خط موربی می‌برند، معنی داشته باشد. اکنون می‌توانیم یک طرف یک خط l را مجموعه همه نقاطی تعریف کنیم که در یک طرف l هستند و مانند نقطه خاص A، بر l قرار ندارند. اگر ما این طرف را با H_{A} نشان دهیم، اگر C در همان طرفی از l باشد که A قرار دارد، آنگاه براساس بنداشت ۴(i)، $H_{\mathrm{C}} = H_{\mathrm{A}}$. (این تعریف ممکن است دوری جلوه کند، زیرا واژه «طرف» را دوبار به کار

بردیم، ولی‌چنین نیست؛ ما قبلاً عبارت مرکب «در یک طرف» را تعریف کرده‌ایم.) عبارت دیگری که معمولاً برای یک «طرف l» به‌کار برده می‌شود، نیم‌صفحه‌ای به مرز l است.

گزاره ۲.۳ هر خط، درست مرز دو نیم‌صفحه است و این نیم‌صفحه‌ها نقطه مشترکی ندارند.

برهان:

(۱) به‌ازای هر خط l یک نقطه A ناواقع بر l وجود دارد (گزاره ۳.۲).

(۲) نقطه‌ای چون O وجود دارد که بر l واقع است (بنداشت وقوع ۲).

(۳) نقطه‌ای مانند B وجود دارد چنان‌که $A * O * B$ (بنداشت میان‌بود ۲).

(۴) پس A و B در دو طرف l هستند (بنابر تعریف)؛ لذا l دست کم دوطرف دارد.

(۵) فرض می‌کنیم C نقطه‌ای غیر از A و B باشد که بر l واقع نیست. اگر B و C در یک طرف l نباشد، C و A در یک طرف l خواهند بود (قانون طرد شق ثالث و بنداشت میان‌بود ۴(ii)). لذا مجموعه نقاط ناواقع بر l، اجتماع طرف H_A از A و طرف H_B از B است.

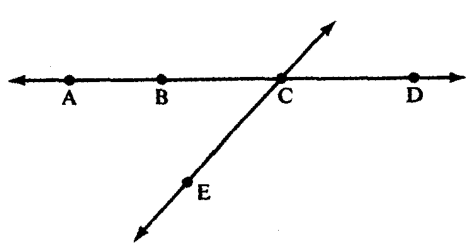
(۶) اگر C در دو طرف بود (فرض برهان خلف)، آنگاه A و B در یک طرف l واقع می‌شدند (بنداشت ۴(i)) که متناقض با مرحله (۴) بود، پس دو طرف منفصل‌اند (نقطه مشترکی ندارند) (حکم برهان خلف). ■

حال از ویژگی جداسازی صفحه برای مطالعه روابط میان‌بود بین چهار نقطه استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۳.۳ اگر $A * B * C$ و $A * C * D$ داده شده باشند، آنگاه $B * C * D$ و $A * B * D$ (شکل ۹.۳).

برهان:

(۱) A، B، C، و D چهارنقطه متمایز هم‌خط‌اند (تمرین ۱).



شکل ۹.۳

(۲) نقطه‌ای چون E ناواقع بر خط گذرنده از A، B، C، D وجود دارد (گزاره ۳.۲).

(۳) خط $\overleftrightarrow{EC}$ را در نظر می‌گیریم. چون (بنابر فرض) AD این خط را در نقطه C می‌برد، A و D در دو طرف $\overleftrightarrow{EC}$ قرار دارند.

(۴) حال می‌گوییم A و B در یک طرف $\overleftrightarrow{EC}$ هستند. برعکس، فرض می‌کنیم، A و B در دو طرف $\overleftrightarrow{EC}$ باشند (فرض برهان خلف)

(۵) پس $\overleftrightarrow{EC}$ خط $\overleftrightarrow{AB}$ را در یک نقطه بین A و B می‌برد (تعریف «دو طرف»).

(۶) آن نقطه باید C باشد (گزاره ۱.۲).

(۷) بنابراین $A * B * C$ و $A * C * B$؛ و این امر با بنداشت میان‌بود ۳ متناقض است.

(۸) پس A و B در یک طرف $\overleftrightarrow{EC}$ هستند (حکم برهان خلف).

(۹) از مراحل (۳) و (۸) نتیجه بنداشت میان‌بود ۴، نتیجه می‌شود که B و D باید در دو طرف $\overleftrightarrow{EC}$ باشند.

(۱۰) بنابراین نقطه C، نقطه تلاقی $\overleftrightarrow{EC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ بین B و D واقع است (تعریف «دو طرف»؛ گزاره ۱.۲، یعنی آن قسمت که می‌گوید نقطه تلاقی یکتاست.)

با برهانی مشابه، وقتی از $\overleftrightarrow{EB}$ استفاده کنیم ثابت می‌شود که $A * B * D$ (تمرین ۲ (ب)). ■

نتیجه. $A * B * C$ و $B * C * D$ مفروض‌اند. پس $A * B * D$ و $A * C * D$.

سرانجام به اثبات ویژگی جداسازی خط می‌پردازیم.

گزاره ۴.۳ هرگاه $C * A * B$ و l خطی گذرنده از A، B، و C باشد (بنداشت میان‌بود ۱)، به‌ازای هر نقطه P واقع بر l، P یا بر نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ قرار دارد یا بر نیم‌خط متقابل آن $\overrightarrow{AC}$.

برهان:

(۱) P یا بر $\overrightarrow{AB}$ هست یا نیست (قانون طرد شق ثالث).

(۲) اگر P بر $\overrightarrow{AB}$ واقع باشد که حکم محقق است. پس فرض می‌کنیم P بر AB نباشد در نتیجه $P * A * B$ (بنداشت میان‌بود ۳).

(۳) اگر $C = P$، آنگاه P بر $\overrightarrow{AC}$ است (بنابر تعریف)؛ پس فرض می‌کنیم $C \neq P$. لذا درست یکی از روابط $C * A * P$ یا $C * P * A$ یا $P * C * A$ برقرار است (باز هم بنداشت میان‌بود ۳).

(۴) فرض می‌کنیم که رابطه $C * A * P$ برقرار باشد (فرض برهان خلف).

(۵) می‌دانیم (بنابر بنداشت میان‌بود ۳) که درست یکی از روابط $P * C * B$، $C * P * B$ یا $C * B * P$ صادق است.

(۶) اگر $P * B * C$، آنگاه از ترکیب آن با $P * A * B$ (مرحله ۲) خواهیم داشت $A * B * C$ (گزاره ۳.۳) که مخالف فرض است.

(۷) اگر $C * P * B$، آنگاه از ترکیب آن با $C * A * P$ (مرحله ۴) خواهیم داشت $A * P * B$ (گزاره ۳.۳)، که ناقض مرحله (۲) است.

(۸) اگر $B * C * P$، آنگاه از ترکیب آن با $B * A * C$ (فرض و بنداشت میان‌بود ۱) خواهیم داشت $A * C * P$ (گزاره ۳.۳)، که ناقض مرحله (۴) است.

(۹) چون در هر سه مورد به تناقض رسیدیم، پس $C * A * P$ صادق نیست (حکم برهان خلف).

(۱۰) لذا، $A * P * C$ یا $A * C * P$ (مرحله ۳)، که بدین معنی است که P بر نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{AC}$ واقع است. ■

قضیه بعد خصوصیتی را بیان می‌کند که وضوح آن از روی شکل دیده می‌شود و پاش کشف کرده که اقلیدس آن را بدون اثبات به کار برده است.

قضیه پاش. هرگاه ΔABC مثلثی دلخواه و l خطی باشد که ضلع AB را در یک نقطه بین A و B ببرد، آنگاه l ضلع AC یا ضلع BC را هم می‌برد (شکل ۱۰.۳). اگر C بر l نباشد، l هر دو ضلع BC و AC را نخواهد برید.

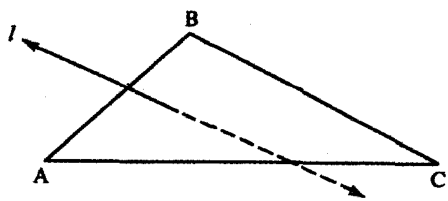
این قضیه به‌طور شهودی چنین می‌گوید که اگر خطی در مثلثی از میان یک ضلع «به درون برود» باید از میان ضلع دیگر «بیرون بیاید».

برهان:

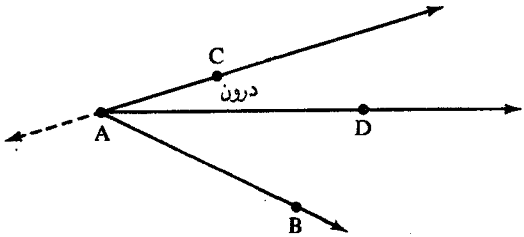
(۱) رأس C یا بر l هست یا نیست، اگر هست، قضیه محقق است (قانون طرد شق ثالث).

(۲) A و B بر l نیستند و پاره‌خط AB، l را می‌برد (فرض و بنداشت ۱).

(۳) بنابراین A و B در دو طرف l قرار دارند (بنابر تعریف).



شکل ۱۰.۳



شکل ۱۱.۳

(۴) بنابر مرحله (۱) می‌توان فرض کرد که C بر l نیست. در این صورت، C یا در آن طرفی است که A در آن واقع است و یا در آن طرف که B در آن واقع است (بنداشت جداسازی).

(۵) اگر C در طرفی از l باشد که A در آن واقع است، آنگاه C و B در دو طرف l قرار دارند و این بدان معنی است که l ضلع BC را می‌برد و AC را نمی‌برد. به همین طریق، اگر C در طرفی از l باشد که B در آن واقع است، آنگاه l ضلع AC را می‌برد و BC را نمی‌برد (بنداشت جداسازی).

(۶) حکم قضیه پاش برقرار است (قاعده منطق ۱۱ ــبرهان موردی). ■

چند قضیه دیگر در زمینه میان‌بود و جداسازی را در اینجا می‌آوریم و از شما می‌خواهیم آنها را به‌عنوان تمرین ثابت کنید.

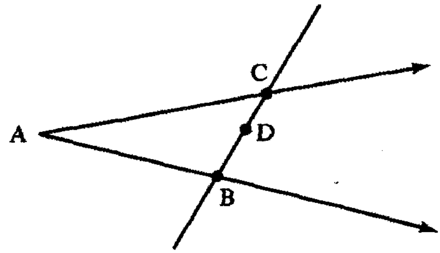
گزاره ۵.۳ اگر $A * B * C$ داده شده باشد آنگاه $AC = AB \cup BC$، و B تنها نقطه مشترک میان پاره‌خطهای AB و BC است.

گزاره ۶.۳ اگر $A * B * C$ داده شده باشد، B تنها نقطه مشترک میان نیم‌خطهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ است، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

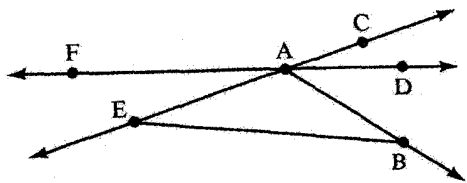
تعریف. $\sphericalangle CAB$ داده شده است. نقطه D را درون $\sphericalangle CAB$ گوییم هرگاه D در همان طرف $\overleftrightarrow{AC}$ باشد که B در آن واقع است و در همان طرف $\overleftrightarrow{AB}$ واقع باشد که C در آن واقع است (بنابراین درون یک زاویه، تقاطع دو نیم‌صفحه است.) (شکل ۱۱.۳).

گزاره ۷.۳ $\sphericalangle CAB$ و نقطه D واقع بر $\overleftrightarrow{BC}$ مفروض‌اند. آنگاه D در درون $\sphericalangle CAB$ واقع است اگر و تنها اگر $B * D * C$ (شکل ۱۲.۳).

هشدار. خیال نکنید هر نقطه‌ای که در درون زاویه‌ای باشد بر پاره‌خطی قرار دارد که یک نقطه از



شکل ۱۲.۳



شکل ۱۳.۳

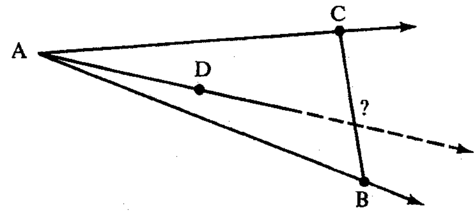
یک ضلع زاویه را به یک نقطه از ضلع دیگر آن وصل می‌کند. در واقع، چنین تصوری در هندسه هذلولوی نادرست است (تمرین ۳۶).

گزاره ۸.۳ هرگاه نقطه D در درون $\sphericalangle$CAB واقع باشد: (الف) تمام نقاط $\overrightarrow{AD}$ به استثنای نقطه A در درون $\sphericalangle$CAB هستند؛ (ب) هیچ نقطه‌ای از نیم‌خط متقابل به $\overrightarrow{AD}$ در درون $\sphericalangle$CAB نیست؛ (ج) هرگاه C $*$ A $*$ E، آنگاه B در درون $\sphericalangle$DAE است (شکل ۱۳.۳).

تعریف. نیم‌خط $\overrightarrow{AD}$ بین نیم‌خطهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ واقع است اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نیم‌خطهای متقابل نباشند و D در دورن $\sphericalangle$CAB باشد. (بنابر گزاره ۸.۳ (الف)، این تعریف به انتخاب نقطه D بر $\overrightarrow{AD}$ بستگی ندارد.)

قضیه قطعه‌بر. هرگاه $\overrightarrow{AD}$ بین $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ واقع باشد، آنگاه $\overrightarrow{AD}$ پاره‌خط BC را می‌برد (شکل ۱۴.۳).

تعریف. درون یک مثلث، اشتراک درونهای سه زاویه آن است. نقطه‌ای را بیرون مثلث می‌گوییم هرگاه در درون مثلث، و بر هیچ یک از اضلاع آن نباشد.



شکل ۱۴.۳

گزاره ۹.۳ (الف) اگر نیم‌خط r که از نقطه‌ای واقع در بیرون مثلث ΔABC رسم می‌شود ضلع AB را در نقطه‌ای بین A و B ببرد، آنگاه ضلع AC یا ضلع BC را هم می‌برد. (ب) اگر نیم‌خطی از یک نقطه واقع در درون ΔABC رسم شود، یکی از اضلاع را می‌برد، و اگر از یکی از رئوس نگذرد تنها یکی از اضلاع را می‌برد.

بنداشتهای قابلیت انطباق

اگر می‌خواستیم خیلی مقرراتی باشیم، «قابلیت انطباق»، که آخرین اصطلاح از اصطلاحات تعریف نشده ماست، و به رابطه‌ای بین پاره‌خطها یا بین زاویه‌ها اشاره دارد را باید با دو اصطلاح جایگزین می‌کردیم. ما به قابلیت انطباق، به‌عنوان رابطه‌ای بین مثلثها عادت کرده‌ایم، ولی اکنون می‌توانیم آن را چنین تعریف کنیم: دو مثلث را قابل انطباق گویند هرگاه بتوان یک تناظر یک‌به‌یک بین رأسهای آنها چنان برقرار کرد که اضلاع متناظر با هم و زاویه‌های متناظر با هم قابل انطباق باشند. وقتی می‌نویسیم $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ توجه داریم که A با D، B با E، و C با F متناظر است. نظیر این تعریفها را می‌توان برای قابلیت انطباق چهارضلعی‌ها، پنج‌ضلعی‌ها و غیره نیز به‌کار برد.

بنداشت قابلیت انطباق ۱. هرگاه A و B دو نقطه متمایز باشند و A' نقطه‌ای دلخواه باشد، آنگاه به‌ازای هر نیم‌خطی مانند r که از A' رسم شود فقط یک نقطه یکتا مانند B' بر r وجود دارد به‌طوری‌که $B' \neq A'$ و $AB \cong A'B'$ (شکل ۱۵.۳).

به‌طور شهودی بگوییم، این بنداشت می‌گوید که شما می‌توانید پاره‌خط AB را طوری حرکت داده بر r بگذارید که A بر A' قرار گیرد و B بر B'. (در تمرین ۲ اصلی، فصل ۱، نشان داده‌اید که چگونه این کار را با یک خط‌کش و یک پرگار فروریختنی انجام می‌دهید.)

بنداشت قابلیت انطباق ۲. هرگاه $AB \cong CD$ و $AB \cong EF$، آنگاه $CD \cong EF$. به‌علاوه، هر پاره‌خط با خودش قابل انطباق است.

این بنداشت جانشین نخستین اصل موضوع بدیهی اقلیدس است، که می‌گوید پاره‌خطهای قابل انطباق با یک پاره‌خط، با یکدیگر قابل انطباق‌اند. همچنین جانشین چهارمین اصل موضوع بدیهی اقلیدس است که می‌گوید پاره‌خطهایی که بر هم منطبق می‌شوند، با هم قابل انطباق‌اند.

بنداشت قابلیت انطباق ۳. هرگاه $A*B*C$، $A'*B'*C'$، $AB \cong A'B'$، و $BC \cong B'C'$، آنگاه $AC \cong A'C'$ (شکل ۱۶.۳).

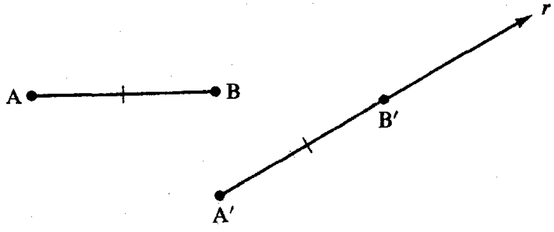
این بنداشت جانشین دومین مفهوم رایج اقلیدس است که می‌گوید اگر پاره‌خطهای قابل انطباق با هم را با پاره‌خطهای قابل انطباق «جمع کنیم» مجموعها قابل انطباق‌اند. در اینجا منظور از «جمع کردن» قرار دادن پاره‌خطها در امتداد یک خط است. مثلاً با استفاده از بنداشتهای قابلیت انطباق ۱ و ۳، می‌توانید پاره‌خط مفروض AB را دو، سه، . . .، n بار به دنبال خودش بچینید تا پاره‌خط تازه $n \cdot AB$ را به‌دست آورید (شکل ۱۷.۳).

بنداشت قابلیت انطباق ۴. هرگاه $\sphericalangle BAC$ (که بنابر تعریف «زاویه»، $\overrightarrow{AB}$ با $\overrightarrow{AC}$ متقابل نیست) و نیم‌خط نامشخص $\overrightarrow{A'B'}$ که از A' خارج شده است داده شده باشند، فقط یک نیم‌خط یکتای $\overrightarrow{A'C'}$ در یک طرف معین $\overleftrightarrow{A'B'}$ وجود دارد چنان‌که $\sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle BAC$ (شکل ۱۸.۳).

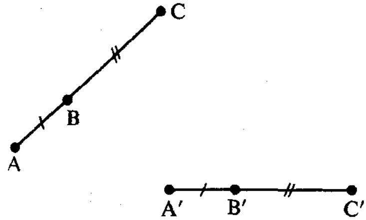
این بنداشت را می‌توان با عبارت دیگر چنین بیان کرد که یک زاویه مفروض به یک طریق می‌تواند در یک طرف یک نیم‌خط «نهاده شود» (تمرین اصلی ۱ (ز)، فصل ۱).

بنداشت قابلیت انطباق ۵. هرگاه $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ و $\sphericalangle A \cong \sphericalangle C$، آنگاه $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$. به‌علاوه، هر زاویه با خودش قابل انطباق است.

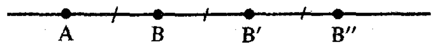
این بنداشت برای زاویه‌ها، شبیه بنداشت قابلیت انطباق ۲ برای پاره‌خطهاست؛ قسمت اول آن مبین ترایایی و قسمت دوم آن مبین بازتابی رابطه قابلیت انطباق است. از ترکیب آنها می‌توانیم



شکل ۱۵.۳



شکل ۱۶.۳



شکل ۱۷.۳ $AB'' = ۳ \cdot AB$.

متقارن بودن این رابطه را ثابت کنیم:

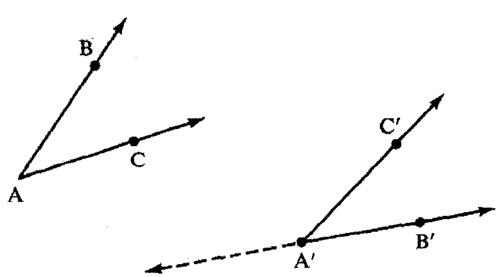
$$\measuredangle A \cong \measuredangle B \Rightarrow \measuredangle B \cong \measuredangle A$$

برهان:

$\measuredangle A \cong \measuredangle B$ (فرض) و $\measuredangle A \cong \measuredangle A$ (بازتابی)، (با قرار دادن A به‌جای C در بنداشت قابلیت انطباق ۵) مستلزم $\measuredangle B \cong \measuredangle A$ است (ترایایی). ■

(طبق استدلالی مشابه، قابلیت انطباق پاره‌خطها یک رابطه متقارن است).

طبیعی به نظر می‌آید که یک «بنداشت جمع» نیز برای قابلیت انطباق زاویه‌ها، همانند بنداشت قابلیت انطباق ۳ (بنداشت جمع برای قابلیت انطباق پاره‌خطها)، فرض کنیم. ولی، این کار را



شکل ۱۸.۳

نمی‌کنیم، زیرا چنین قضیه‌ای را می‌توان با استفاده از بنداشت قابلیت انطباق بعدی ثابت کرد (گزاره ۱۹.۳).

بنداشت قابلیت انطباق ۶ (ض‌زض). هرگاه دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی دیگر با هم قابل انطباق باشند، آن دو مثلث با هم قابل انطباق‌اند (شکل ۱۹.۳).

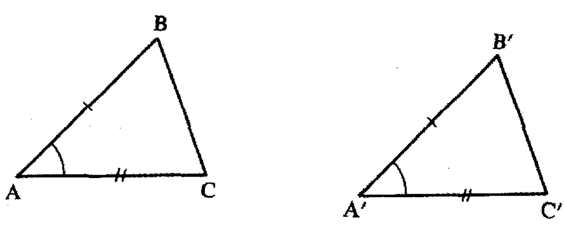
این ملاک ض‌زض برای قابلیت انطباق مثلثها، بنداشت مهمی است. این «چسبی» است که رابطه قابلیت انطباق پاره‌خطها را، به نسبت قابلیت انطباق زوایا «می‌چسباند» و به ما امکان می‌دهد که همه قضایای اساسی درباره قابلیت انطباق مثلثها را که احتمالاً شما با آنها آشنا هستید استخراج کنیم. مثلاً، این یک قضیه ساده‌ای است که بیان می‌کند می‌توانیم مثلث مفروضی را بر قاعده مفروض و نیم‌صفحه مفروض «قرار دهیم».

نتیجه برای ض‌زض. ΔABC و پاره‌خط $DE \cong AB$ داده شده‌اند. در یک طرف مفروض خط $\overleftrightarrow{DE}$ نقطه یکتای F وجود دارد به‌طوری که $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

برهان:

یک نیم‌خط یکتای $\overrightarrow{DF}$ در آن طرف مفروض وجود دارد به‌طوری $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle FDE$ و یک نقطه F را بر این نیم‌خط می‌توان چنان انتخاب کرد که نقطه یکتایی باشد به‌طوری‌که $AC \cong DF$ (بنابر بنداشتهای قابلیت انطباق ۴ و ۱). پس $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ض‌زض). ■

همان‌گونه که گفتیم، اقلیدس ض‌زض را یک بنداشت نگرفته، بلکه سعی کرده است آن را به‌عنوان قضیه‌ای ثابت کند. برهان وی اساساً چنین است. $\Delta A'B'C'$ را چنان حرکت می‌دهیم که A' بر A قرار گیرد و $\overrightarrow{A'B'}$ بر $\overrightarrow{AB}$. از آنجا که مطابق فرض $AB = A'B'$، پس B' باید بر نقطه B منطبق شود. چون $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A'$، $\overrightarrow{A'C'}$ باید بر $\overrightarrow{AC}$ قرار گیرد، و چون $AC \cong A'C'$، نقطه



شکل ۱۹.۳

C' باید بر نقطه C منطبق شود. لذا $B'C'$ بر BC، و بقیه زاویه‌ها بر بقیه زاویه‌ها منطبق خواهند شد، و بدین ترتیب مثلثها قابل انطباق می‌شوند.

این برهان برهمنهش نام دارد و از تجربه رسم دو مثلث بر یک صفحه کاغذ و بریدن یکی از آنها و گذاشتن به روی دیگری ناشی شده است اگر چه این راه برای متقاعد ساختن یک مبتدی هندسه در قبول ض‌زض راه خوبی است، ولی این، برهان نیست. اقلیدس آن را با اکراه، جز در اینجا، تنها در یک جای دیگر هم به‌کار برده است. این یک برهان نیست زیرا اقلیدس هرگز بنداشتی ذکر نکرده که به اتکای آن اَشکال بتوانند حرکت کنند بی‌آنکه اندازه و شکلشان تغییر کند.

برخی از مؤلفان جدید «حرکت» را اصطلاحی تعریف نشده می‌گیرند و بنداشتهایی برای این اصطلاح وضع می‌کنند. (مثلاً در «مبانی هندسه» اثر پیری، «نقطه» و «حرکت» تنها اصطلاحات تعریف نشده‌اند.) و در غیر این‌صورت هندسه برمبنای دیگری بنا می‌شود، یعنی «فاصله‌ها» مطرح می‌شوند و «حرکت» به‌عنوان تبدیل یک‌به‌یک صفحه بر روی خودش، که فاصله را حفظ می‌کند، تعریف می‌شود. احکام هندسه اقلیدس را می‌توان با هر دو روش اثبات کرد. در واقع فلیکس کلاین در برنامه ارلانگر خود در ۱۸۷۲، هندسه را مطالعه آن ویژگیهایی از اشکال تعریف می‌کند که بر اثر گروه خاصی از تبدیلات ناوردا می‌مانند. این مطلب در فصل ۹ مطرح خواهد شد.

در تمرین ۳۵ شما ثابت خواهید کرد که اثبات ض‌زض یا هر ملاک دیگر برای قابلیت انطباق مثلثها با هم (ض‌ض‌ض، زض‌ز، ض‌زز) از روی بنداشتهای قبل ناممکن است. مطابق معمول، روش اثبات ناممکن بودن اثبات یک حکم S، ابداع مدلی برای بنداشتهای قبلی است که در آن S درست نباشد.

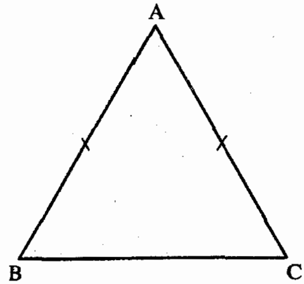
برهان ساده پاپوس (۳۰۰ ب.م.) برای قضیه قابلیت انطباق زوایای مجاور به قاعده، در مثلث متساوی‌الساقین را به‌عنوان کاربردی از ض‌زض در اینجا ذکر می‌کنیم.

گزاره ۱۰.۳ هرگاه در ΔABC، $AB \cong AC$، آنگاه $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$ (شکل ۲۰.۳).

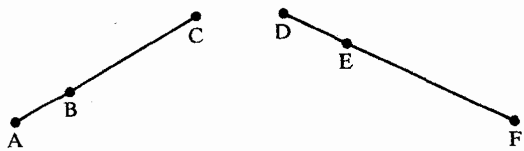
برهان:

(۱) تناظر $B \leftrightarrow A$، $C \leftrightarrow B$، و $B \leftrightarrow C$ بین رأسها در ΔABC را در نظر می‌گیریم. بر اثر این تناظر، دو ضلع و زاویه بین آنها در ΔABC به‌ترتیب با دو ضلع و زاویه بین آنها در ΔACB قابل انطباق می‌شوند (بنابر فرض بنداشت قابلیت انطباق ۵ که هر زاویه با خودش قابل انطباق است).

(۲) پس $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ (ض‌زض)، و لذا زوایای متناظر B و C قابل انطباق‌اند (بنابر تعریف قابلیت انطباق مثلثها). ■



شکل ۲۰.۳



شکل ۲۱.۳

و اینک چند قضیه آشنای دیگر درباره قابلیت انطباق، که بعضی از آنها را ثابت می‌کنیم؛ برای آنهایی که ثابت نمی‌کنیم، به تمرینات مراجعه کنید.

گزاره ۱۱.۳ (تفاضل پاره‌خطها). اگر $A*B*C$، $D*E*F$، $AB \cong DE$، و $AC \cong DF$، آنگاه $BC \cong EF$ (شکل ۲۱.۳)

گزاره ۱۲.۳ هرگاه $AC \cong DF$، آنگاه به‌ازای هر نقطه B بین C و A، فقط یک نقطه مانند E بین D و F موجود است به‌قسمی‌که $AB \cong DE$.

برهان:

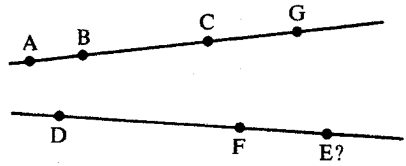
(۱) فقط یک نقطه مانند E روی $\overrightarrow{DF}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $AB \cong DE$ (بنداشت قابلیت انطباق ۱).

(۲) فرض می‌کنیم E بین D و F نباشد (فرض برهان خلف؛ شکل ۲۲.۳).

(۳) پس $E = F$، یا $D*F*E$ (تعریف $\overrightarrow{DF}$)

(۴) اگر $E = F$، آنگاه B و C دو نقطه متمایز بر $\overrightarrow{AC}$ هستند به‌قسمی‌که $AC \cong DF \cong AB$ (فرض، مرحله ۱)، که ناقض یکتا بودن بنداشت قابلیت انطباق ۱ است.

(۵) اگر $D*F*E$، آنگاه یک نقطه G بر نیم‌خط متقابل به $\overrightarrow{CA}$ وجود دارد به قسمی‌که $FE \cong CG$ (بنداشت قابلیت انطباق ۱).



شکل ۲۲.۳

(۶) پس $AG \cong DE$ (بنداشت قابلیت انطباق ۳).

(۷) بنابراین، دو نقطه متمایز B و G بر $\overrightarrow{AC}$ پیدا شدند به قسمی‌که $AG \cong DE \cong AB$ (مراحل ۱ و ۵ و ۶)، که مخالف با جزء یکتایی بنداشت قابلیت انطباق ۱ است.

(۸) $D * E * F$ (حکم برهان خلف). ■

تعریف. $AB < CD$ (یا $CD > AB$) بدین معنی است که نقطه‌ای مانند E بین C و D وجود دارد چنان‌که $AB \cong CE$.

گزاره ۱۳.۳ (مرتب‌کردن پاره‌خطها). (الف) درست یکی از شرایط زیر صادق است (سه حالتی): $AB < CD$، $AB \cong CD$ یا $AB > CD$. (ب) اگر $AB < CD$ و $CD \cong EF$، آنگاه $AB < EF$. (ج) اگر $AB > CD$ و $CD \cong EF$، آنگاه $AB > EF$. (د) اگر $AB < CD$ و $CD \cong EF$، آنگاه $AB < EF$ (ترایایی).

گزاره ۱۴.۳ مکملهای زاویه‌های قابل انطباق، قابل انطباق‌اند.

گزاره ۱۵.۳ (الف) زاویه‌های متقابل به رأس با هم قابل انطباق‌اند (ب) زاویه قابل انطباق با یک زاویه قائمه، قائمه است.

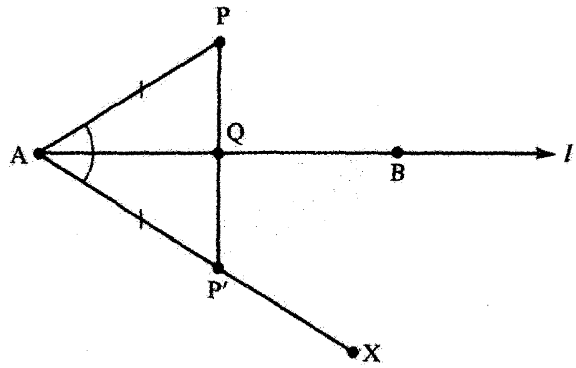
گزاره ۱۶.۳ به‌ازای هر خط l و هر نقطه P، خطی وجود دارد که از P می‌گذرد و بر l عمود است.

برهان:

(۱) اول فرض می‌کنیم که P بر l نباشد و A و B دو نقطه دلخواه بر l باشند (بنداشت وقوع ۲) (شکل ۲۳.۳).

(۲) در طرف دیگر l، که P در آن نیست، نیم‌خطی مانند $\overrightarrow{AX}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\sphericalangle XAB \cong \sphericalangle PAB$ (بنداشت قابلیت انطباق ۴).

(۳) بر $\overrightarrow{AX}$ نقطه‌ای مانند P' وجود دارد، به‌قسمی‌که $AP' \cong AP$ (بنداشت قابلیت انطباق ۱).



شکل ۲۳.۳

(۴) PP' خط l را در یک نقطه Q می‌برد (تعریف دوطرف l).

(۵) هرگاه $Q = A$، آنگاه $\overleftrightarrow{PP'} \perp l$ (تعریف $\perp$).

(۶) هرگاه $Q \neq A$، آنگاه $\Delta PAQ \cong \Delta P'AQ$ (ض‌زض).

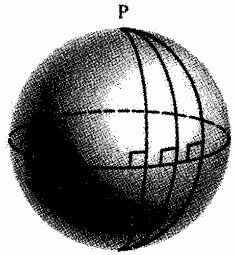
(۷) بنابراین $\measuredangle PQA \cong \measuredangle P'QA$ (زاویه‌های متناظر)، پس $\overleftrightarrow{PP'} \perp l$ (تعریف $\perp$).

(۸) حال فرض می‌کنیم P بر l باشد. چون نقاطی وجود دارند که بر l نیستند (بنداشت وقوع ۳)، می‌توانیم از یکی از آنها عمودی بر l وارد آوریم (مراحل ۵ و ۷) و از آنجا زاویه قائمه‌ای به‌دست آوریم.

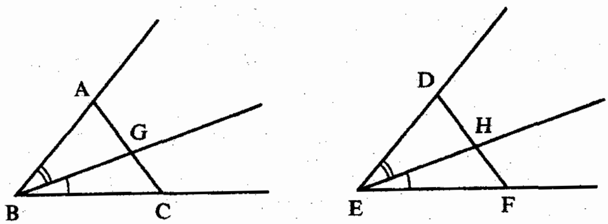
(۹) می‌توانیم زاویه‌ای قابل انطباق با این زاویه، به رأس P، جدا کنیم که یک ضلعش بر l باشد (بنداشت قابلیت انطباق ۴)؛ ضلع دیگر این زاویه جزئی است از خطی که از P بر l عمود شده است (گزاره ۱۵.۳(ب)). ■

طبیعی است که بپرسم آیا عمودی که در گزاره ۱۶.۳ از P بر l وارد کردیم یکتاست یا یکتا نیست. اگر P بر l باشد، جزء یکتایی بنداشت قابلیت انطباق ۴ ضامن، یکتایی این عمود است (گزاره ۲۳.۳). ولی اگر P بر l نباشد، یکتایی عمود را نمی‌توانیم تا فصل بعد ثابت کنیم.

توضیح درباره هندسه بیضوی. به‌گونه‌ای غیررسمی، هندسه بیضوی را می‌توان هندسه‌ای بر یک کره اقلیدسی تصور کرد که نقاط متقاطرش به‌هم چسبانده شده باشند (مدل هندسه وقوع که ابتدا در تمرین ۹ (ج) فصل ۲ شرح دادیم). «خطها»ی آن دوایر عظیمه کره هستند. وقتی که



شکل ۲۴.۳



شکل ۲۵.۳

چنین «خط» l داده شده باشد، نقطه‌ای به‌نام «قطب» l وجود دارد که هر خط گذرنده از آن نقطه بر l عمود است؛ برای تجسم این مطلب، l را دایره استوای کره و P را قطب شمال بگیرید؛ هر دایره عظیمه گذرنده از قطب شمال، بر استوا عمود است (شکل ۲۴.۳).

گزاره ۱۷.۳ (ملاک ز‌ض‌ز برای قابلیت انطباق). اگر در $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ داشته باشیم $\measuredangle A \cong \measuredangle D$، $\measuredangle C \cong \measuredangle F$، و $AC \cong DF$، آنگاه $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

گزاره ۱۸.۳ (عکس گزاره ۱۰.۳). اگر در $\triangle ABC$، $\measuredangle B \cong \measuredangle C$، آنگاه $AB \cong AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

گزاره ۱۹.۳ (جمع زوایا). می‌دانیم $\overrightarrow{BG}$ بین $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$، و $\overrightarrow{EH}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ واقع است، $\measuredangle CBG \cong \measuredangle FEH$، و $\measuredangle GBA \cong \measuredangle HED$. در این صورت $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ (شکل ۲۵.۳).

برهان:

(۱) بنابر قضیه قطعه‌بر، فرض کنیم G چنان انتخاب شده باشد که $A * G * C$.

(۲) بنابر بنداشت قابلیت انطباق ۱، فرض می‌کنیم D، F، و H چنان انتخاب شده باشند که $AB \cong ED$، $GB \cong EH$، و $CB \cong EF$.

(۳) پس $\Delta DEH \cong \Delta ABG$ و $\Delta GBC \cong \Delta HEF$ (ض‌زض).

(۴) $\measuredangle AGB \cong \measuredangle DHE$ و $\measuredangle CGB \cong \measuredangle FHE$ (مرحله ۳)، و $\measuredangle AGB$ مکمل $\measuredangle CGB$ (مرحله ۱).

(۵) $\measuredangle DHE$ مکمل $\measuredangle FHE$ است (مرحله ۴ و گزاره ۱۴.۳) و D، H و F هم‌خط‌اند (بنداشت قابلیت انطباق ۴).

(۶) $D * H * F$ (گزاره ۷.۳، با استفاده از فرض درباره $\overrightarrow{EH}$).

(۷) $AC \cong DF$ (مراحل ۳ و ۶، بنداشت قابلیت انطباق ۳).

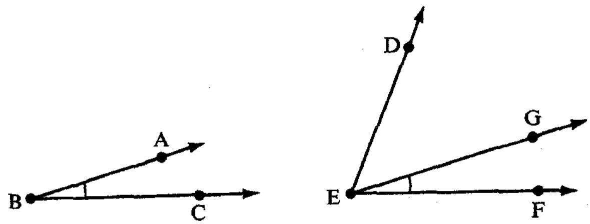
(۸) $\Delta BAC \cong \Delta EDF$ (ض‌زض، مراحل ۲، ۳، و ۷)

(۹) $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ (زاویه‌های متناظر). ■

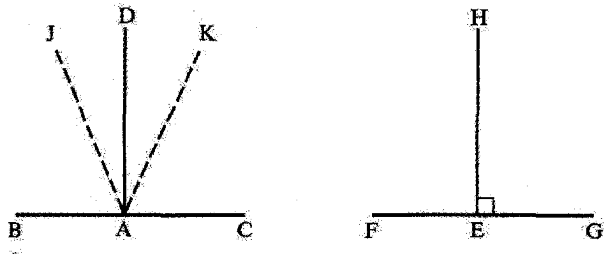
گزاره ۲۰.۳ (تفریق زوایا). $\overrightarrow{BG}$ بین $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$، و $\overrightarrow{EH}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ واقع است و $\measuredangle CBG \cong \measuredangle FEH$ و $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. در این صورت $\measuredangle GBA \cong \measuredangle HED$ (شکل ۲۵.۳).

تعریف. $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$ بدین معنی است که یک نیم‌خط $\overrightarrow{EG}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ وجود دارد به قسمی‌که $\measuredangle ABC \cong \measuredangle GEF$ (شکل ۲۶.۳).

گزاره ۲۱.۳ (مرتب کردن زوایا). (الف) درست یکی از شرایط زیر برقرار است (سه‌حالتی): $\measuredangle P < \measuredangle Q$، $\measuredangle P \cong \measuredangle Q$، یا $\measuredangle Q < \measuredangle P$. (ب) اگر $\measuredangle P < \measuredangle Q$ و $\measuredangle Q \cong \measuredangle R$، آنگاه $\measuredangle P < \measuredangle R$. (ج) اگر $\measuredangle P < \measuredangle Q$ و $\measuredangle Q \cong \measuredangle R$، آنگاه $\measuredangle P > \measuredangle R$. (د) اگر $\measuredangle P < \measuredangle Q$ و $\measuredangle Q < \measuredangle R$، آنگاه $\measuredangle P < \measuredangle R$.



شکل ۲۶.۳



شکل ۲۷.۳

گزاره ۲۲.۳ (ملاک ض‌ض‌ض برای قابلیت انطباق). ΔABC و ΔDEF داده شده‌اند. اگر $AB \cong DE$، $BC \cong EF$، و $AC \cong DF$، آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

ملاک (ززض) برای قابلیت انطباق در فصل بعد داده خواهد شد، زیرا اثبات آن دشوارتر است. گزاره بعدی را اقلیدس به‌صورت یک بنداشت عرضه کرده بود، ولی می‌توان از روی بنداشتهای هیلبرت آن را ثابت کرد.

گزاره ۲۳.۳ (اصل چهارم اقلیدس). همه زوایای قائمه با هم قابل انطباق‌اند (شکل ۲۷.۳).

برهان:

(۱) $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle CAD$ و $\sphericalangle FEH \cong \sphericalangle GEH$ (دو جفت زاویه قائمه، مطابق تعریف) داده شده‌اند. برعکس فرض می‌کنیم $\sphericalangle BAD$ قابل انطباق با $\sphericalangle FEH$ نیست (فرض برهان خلف).

(۲) پس یکی از این زاویه‌ها کوچکتر از دیگری است، مثلاً $\sphericalangle FEH < \sphericalangle BAD$ (گزاره ۲۱.۳ (الف)). لذا بنابر تعریف، نیم‌خطی مانند $\overrightarrow{AJ}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ وجود دارد به‌طوری که $\sphericalangle BAJ \cong \sphericalangle FEH$.

(۳) $\sphericalangle CAJ \cong \sphericalangle GEH$ (گزاره ۱۴.۳).

(۴) $\sphericalangle CAJ \cong \sphericalangle FEH$ (مراحل ۱ و ۳، بنداشت قابلیت انطباق ۵).

(۵) نیم‌خطی مانند $\overrightarrow{AK}$ بین $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ وجود دارد به‌طوری که $\sphericalangle BAJ \cong \sphericalangle CAK$ (مرحله ۱ و گزاره ۲۱.۳(ب)).

(۶) $\sphericalangle BAJ \cong \sphericalangle CAJ$ (مراحل ۲ و ۴ و بنداشت قابلیت انطباق ۵).

(۷) $\sphericalangle CAJ \cong \sphericalangle CAK$ (مراحل ۵ و ۶ و بنداشت قابل انطباق ۵).

(۸) پس $\sphericalangle CAD$ بزرگتر از $\sphericalangle CAK$ (مطابق تعریف) و کوچکتر از زاویه قابل انطباقش $\sphericalangle CAJ$ (مرحله ۷ و گزاره ۸.۳(ج)) است، که خلاف گزاره ۲۱.۳ است.

(۹) $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle FEH$ (حکم برهان خلف). ■

بنداشتهای پیوستگی

بنداشتهای پیوستگی برای پرکردن تعدادی از شکافهای اصول اقلیدس ضروری هستند. برهانی را که اقلیدس برای صحت نخستین گزاره‌اش می‌آورد در نظر می‌گیریم.

گزاره ۱ اقلیدس. پاره‌خطی داده شده است. مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود دارد که این پاره‌خط یک ضلع آن است.

برهان اقلیدس:

(۱) فرض می‌کنیم AB پاره‌خط داده شده باشد. به مرکز A و شعاع AB دایره BCD را رسم می‌کنیم (اصل موضوع ۳) (شکل ۲۸.۳).

(۲) باز به مرکز B و شعاع BA دایره ACE را رسم می‌کنیم (اصل موضوع ۳).

(۳) از نقطه تلاقی دو دایره، C، پاره‌خطهای CA و CB را رسم می‌کنیم (اصل موضوع ۱).

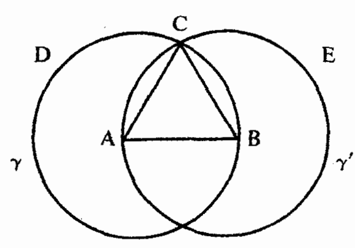
(۴) چون A مرکز دایره CDB است، AC با AB قابل انطباق است (تعریف دایره).

(۵) باز چون B مرکز دایره CAE است، BC با AB قابل انطباق است (تعریف دایره).

(۶) چون CA و CB هر یک با AB قابل انطباق است (مراحل ۴ و ۵)، با هم قابل انطباق‌اند (اولین مفهوم رایج).

(۷) بنابراین ΔABC (بنابر تعریف) متساوی‌الاضلاع است که یک ضلع آن AB است. ■

چون هر مرحله به‌ظاهر توجیه شده است، شما ممکن است شکاف منطقی در برهان را نبینید. این شکاف در ۳ مرحله نخست رخ داده است، به‌ویژه در مرحله ۳ که به صراحت بیان می‌کند که C نقطه‌ای است که در آن دو دایره یکدیگر را می‌برند (مرحله ۲ همین مطلب را تلویحاً با استفاده از همان حرف «C» برای نشان دادن جزئی از دایره‌مانند مرحله ۱ بیان می‌کند). موضوع این است که از کجا می‌دانیم نقطه C وجود دارد؟



شکل ۲۸.۳

اگر شما بر این باورید که از روی شکل روشن است که چنین نقطه Cای وجود دارد حق با شماست ــ ولی شما اجازه ندارید برای توجیه این مطلب از شکل استفاده کنید. ما نمی‌گوییم دوایر موسوم یکدیگر را نمی‌برند؛ تنها می‌گوییم که بنداشت دیگری برای تقاطع آنها با یکدیگر لازم است.

این شکاف را می‌توان با اصل پیوستگی دایره در زیر پر کرد.

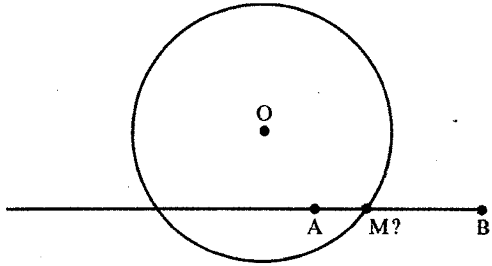
اصل پیوستگی دایره. اگر دایره γ یک نقطه در داخل دایره γ' داشته باشد و یک نقطه در خارج آن، این دو دایره یکدیگر را در دو نقطه می‌برند.

در اینجا نقطه P زمانی درون یک دایره به مرکز O و شعاع OR شمرده می‌شود که $OP < OR$ (و بیرون آن شمرده می‌شود وقتی‌که $OP > OR$.) در شکل ۲۸.۳ نقطه B در درون دایره γ' و نقطه B' (که در شکل نشان داده نشده و چنان است که A وسط BB' است) در بیرون γ' قرار دارد. این اصل برای اثبات گزاره ۲۲ اقلیدس، عکس نابرابری مثلثی، نیز لازم است (تمرین اصلی ۴، فصل ۴). شکاف دیگر، در روش اقلیدس در رسم عمود بر یک خط (گزاره ۱۲ اقلیدس، وگزاره ۱۶.۳) رخ می‌دهد. در این رسم، اقلیدس به‌طور ضمنی فرض می‌کند که اگر خطی از نقطه‌ای در درون دایره بگذرد، دایره را در دو نقطه می‌برد ــ فرضی که شما می‌توانید با اصل پیوستگی دایره توجیه کنید (تمرین اصلی ۱، فصل ۴)؛ ولی در توجیه ما از گزاره ۱۶.۳ استفاده می‌شود، لذا برای اجتناب از استدلال دوری، برهان اقلیدس باید کنارگذاشته شود. در اینجا یک حکم مفید دیگر ظاهر می‌شود (تمرین اصلی ۲، فصل ۴).

اصل پیوستگی مقدماتی. اگر یک‌سر پاره‌خطی در درون دایره باشد و سر دیگر آن در بیرون دایره، این پاره‌خط دایره را می‌برد.

می‌توانید بگویید که چرا این اصول «اصول پیوستگی» نامیده می‌شوند؟ مثلاً اگر قرار باشد در شکل ۲۹.۳، پاره‌خطی با مداد با حرکت پیوسته از A تا B رسم شود، این خط باید دایره را ببرد (در غیر این‌صورت باید یا خط سوراخ‌دار باشد یا دایره).

حکم بعد درباره پیوستگی نیست، بلکه درباره اندازه است. ارشمیدس با برخورداری از هوش سرشارش تشخیص داده بود که داشتن یک چنین بنداشتی لازم است. این بنداشت را در اینجا می‌آوریم، زیرا بعداً نشان خواهیم داد که این بنداشت نتیجه بنداشت پیوستگی ددکیند است. این بنداشت لازم است تا بتوانیم یک عدد حقیقی مثبتی را به طول $\overline{AB}$ از پاره‌خط AB تخصیص دهیم، چنان‌که در فصل ۴ بیان خواهیم کرد.



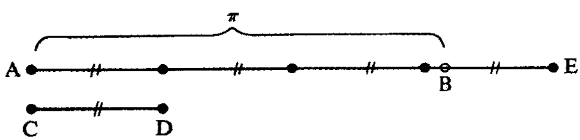
شکل ۲۹.۳

بنداشت ارشمیدس. اگر CD پاره‌خطی دلخواه، و r نیم‌خطی به مبدأ A، آنگاه به‌ازای هر نقطه $A \neq B$ بر r، عددی مانند n وجود دارد به‌طوری‌که وقتی CD، n بار با شروع از A بر r نهاده شود، نقطه‌ای مانند E پیدا می‌شود چنان‌که $n \cdot CD \cong AE$، و یا $B = E$ و یا B بین A و E قرار دارد.

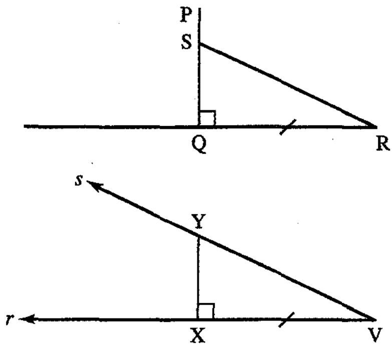
در اینجا از بنداشت قابلیت انطباق ۱ استفاده می‌کنیم تا CD را با شروع از A بر r قرار دهیم و نقطه یکتای $A_۱$ را بر r به‌دست آوریم به‌قسمی‌که $CD \cong AA_۱$، بنابر تعریف $۱ \cdot CD$ برابر $AA_۱$ است. فرض می‌کنیم $r_۱$ نیم‌خطی خارج شده از $A_۱$، واقع بر r باشد. با همین روش نقطه یکتای $A_۲$ را بر $r_۱$ پیدا می‌کنیم به قسمی‌که $A_۱A_۲ \cong CD$، و بنابر تعریف $۲ \cdot CD \cong A_۱A_۲$. از تکرار این فرایند، می‌توانیم با استقرا بر n، پاره‌خط $n \cdot CD$ را با AA_n تعریف کنیم.

مثلاً اگر AB برابر π واحد طول باشد و CD یک واحد طول، شما باید دست‌کم چهار بار پاره‌خط CD را بر π جدا کنید تا به نقطه E، فراتر از B، برسید (شکل ۳۰.۳).

محتوای شهودی بنداشت ارشمیدس این است که اگر یک پاره‌خط CD را به دلخواه، واحد طول انتخاب کنید، آنگاه هر پاره‌خط دیگر، نسبت به این واحد، طول معینی دارد (با نماد بنداشتی، طول AB رابطه به CD به‌عنوان واحد طول، حداکثر برابر n واحد است). راه دیگر نگریستن به آن، انتخاب AB به‌عنوان واحد طول است. این بنداشت می‌گوید که طول هیچ پاره‌خطی نمی‌تواند



شکل ۳۰.۳



شکل ۳۱.۳

نسبت به این واحد، بی‌نهایت کوچک باشد (طول CD رابطه به AB به‌عنوان واحد، دست کم $1/n$ واحد است).

حکم بعد، (چنان‌که در تمرین ۶، فصل ۵، نشان خواهید داد)، نتیجه‌ای از بنداشت ارشمیدس و بنداشتهای پیشین است. ولی اگر کسی بخواهد با پاره‌خطهایی به طول بی‌نهایت کوچک مجاز، هندسه بسازد می‌تواند این حکم را به‌جای بنداشت ارشمیدس بگذارد (← یادداشت من تحت عنوان «بنداشت ارسطو در مبانی هندسه هذلولوی» در مجله هندسه، مجلد ۳۳، ۱۹۸۸). گذشته از آن، بنداشت ارشمیدس صرفاً یک بنداشت هندسی نیست، زیرا بر وجود عدد حکم می‌کند.

بنداشت ارسطو. یک ضلع یک زاویه حاده و پاره‌خط AB داده شده‌اند. بر ضلع داده شده نقطه‌ای مانند Y وجود دارد به‌قسمی‌که اگر X پای عمود وارد از Y بر ضلع دیگر زاویه باشد، $XY > AB$.

خودمانی بگوییم، اگر با نقطه دلخواه Y بر ضلع داده شده شروع کنیم، وقتی Y از رأس V زاویه «بی‌نهایت دور می‌شود»، پاره‌خط عمود XY «بی‌نهایت بزرگ می‌شود» (زیرا سرانجام از هر پاره‌خط قبلاً داده شده AB بزرگتر خواهد شد). این اصل در فصل ۵، وقتی تلاش پروکلوس را برای اثبات اصل توازی اقلیدس بررسی می‌کنیم، ارزش پیدا می‌کند (شکل ۲.۵). ایده اثبات بنداشت ارشمیدس این است که اگر در آغاز کار، پاره‌خط XY از پاره‌خط داده شده AB بزرگتر نباشد، به دفعات کافی پاره‌خط VY، ابتدا از V، که بر نیم‌خط $\overrightarrow{VY}$ منتقل می‌کنیم تا به نقطه Y' برسیم به‌طوری که پاره‌خط عمود مرسوم از آن، از AB بزرگتر باشد (تمرین ۶، فصل ۵).

نتیجه مهم. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{AB}$ نیم‌خطی باشد دلخواه، و P نقطه دلخواهی که با A و B هم‌خط نیست، و $\measuredangle XVY$ زاویه حاده‌ای باشد دلخواه. در این صورت یک نقطه R بر نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\measuredangle PRA < \measuredangle XVY$.

خودمانی بگوییم، اگر با نقطه دلخواه R بر $\overrightarrow{AB}$ آغاز کنیم، وقتی R از مبدأ Aی نیم‌خط «بی‌نهایت دور می‌شود»، $\measuredangle PRA$ به صفر میل می‌کند (زیرا سرانجام از هر زاویه قبلاً داده شده $\measuredangle XVY$ کوچکتر می‌شود). از این نتیجه در فصل ۶ استفاده خواهد شد. در اثبات آن از قضیه ۲.۴، فصل ۴ (قضیه زاویه برونی) استفاده خواهد شد، و در واقع، این قضیه پس از اثبات آن باید آورده شود، ولی ما برهان آن را برای سهولت ارجاع در اینجا می‌آوریم. شما می‌توانید حالا آن را کنار بگذارید و هر وقت لازم دیدید به آن برگردید.

برهان:

فرض می‌کنیم Q پای عمود مرسوم از P بر $\overleftrightarrow{AB}$ باشد چون نقطه B جای مشخصی نیست و صرفاً برای معرفی $\overleftrightarrow{AB}$ آمده است، می‌توانیم آن را چنان انتخاب کنیم که $Q \neq B$ و Q بر نیم‌خط $\overrightarrow{BA}$ واقع باشد X و Y نقاط دلخواهی بر اضلاع $\measuredangle XVY$، یعنی نیم‌خطهای r و s، هستند. فرض می‌کنیم X' پای عمود مرسوم از Y بر خط شامل r باشد. بنابر فرض حاده بودن زاویه، و قضیه زاویه برونی، می‌توانیم نشان دهیم (از راه برهان خلف) که X' عملاً بر r قرار دارد، و لذا می‌توانیم X را همان X' بگیریم. بنداشت ارسطو تضمین می‌کند که Y می‌تواند چنان انتخاب شود که $XY > PQ$. به موجب بنداشت قابلیت انطباق ۱، بر $\overrightarrow{QB}$ یک نقطه R وجود دارد به‌قسمی‌که $QR \cong XV$. اکنون می‌گوییم $\measuredangle PRQ < \measuredangle XVY$. خلاف آن را فرض می‌کنیم. به موجب‌سه‌حالتی، نیم‌خط $\overrightarrow{RS}$ وجود دارد چنان‌که $\measuredangle QRS \cong \measuredangle XVY$، و $\overrightarrow{RS}$ یا با $\overrightarrow{RP}$ مساوی است یا بین $\overrightarrow{RP}$ و $\overrightarrow{RQ}$ واقع است. طبق قضیه قطعه‌بُر نقطه S (که صرفاً برای معرفی PQ حرف‌گذاری شده است) ممکن است به قسمی انتخاب شود که بر پاره‌خط PQ قرار داشته باشد، در این صورت SQ بزرگتر از PQ نیست. به موجب ملاک قابلیت انطباق زض‌ز، $SQ \cong XY$. بنابراین XY بزرگتر از PQ نیست، که مغایر با انتخاب Y است. ازاین‌رو $\measuredangle PRQ < \measuredangle XVY$، همان‌گونه که ادعا شده بود. اگر R بر نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ واقع باشد، آنگاه $\measuredangle PRA = \measuredangle PRQ$ و مسئله تمام است. اگر نه، R و Q بر نیم‌خط مقابل قرار دارند. به موجب قضیه زاویه برونی، اگر R' نقطه‌ای باشد چنان‌که $Q * R * R'$، آنگاه $\measuredangle PR'Q < \measuredangle PRQ < \measuredangle XVY$. وقتی بگیریم $R' = B$، به‌دست می‌آوریم $\measuredangle PBA = \measuredangle PBQ < \measuredangle XVY$. ■

شکل ۳۲.۳

هر چهار اصلی که تاکنون نام برده‌ایم در جو فکری حاکم بر هندسه کهن یونانی پدید آمده‌اند. همه آنها نتیجه بنداشت زیر هستند که به کلی تازه است.

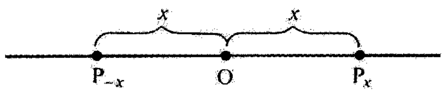
بنداشت ددکیند.[۱] فرض می‌کنیم که $\{l\}$، مجموعه همه نقاط واقع بر یک خط l، اجتماع دو زیرمجموعه مجزای ناتهی $\sum_۱$ و $\sum_۲$، $(\sum_۱ \cup \sum_۲)$، باشد به‌طوری‌که هیچ نقطه از یک زیرمجموعه بین دو نقطه از زیرمجموعه دیگر نباشد. در این صورت یک نقطه یکتای O بر l وجود دارد به‌قسمی‌که یکی از زیرمجموعه‌ها با نیم‌خطی از l به رأس O مساوی است و زیرمجموعه دیگر با مکمل آن.

بنداشت ددکیند نوعی عکس ویژگی جداسازی خط است که در گزاره ۴.۳ آمده است. این ویژگی می‌گوید که هر نقطه O واقع بر l همه نقاط دیگر l را به نقاط واقع در چپ و نقاط واقع در راست O جدا می‌کند (شکل ۳۲.۳؛ دقیقتر بگوییم $\{l\}$ اجتماع دو نیم‌خط از l است که از O خارج شده‌اند). بنداشت ددکیند می‌گوید که به‌عکس، هر جداسازی نقطه‌های واقع بر l به راست و به چپ، بر اثر یک نقطه یکتای O صورت می‌گیرد. یک جفت از زیرمجموعه‌های $\sum_۱$ و $\sum_۲$ با ویژگیهای بنداشت ددکیند، برش ددکیند از خط نامیده می‌شود.

خودمانی بگوییم، منظور از بنداشت ددکیند این است که به ما اطمینان داده شود که خط l «سوراخ» ندارد، بدین معنی که به‌ازای هر نقطه O بر l و هر عدد مثبت حقیقی x، نقاط یکتایی مانند P_{-x} و P_x وجود دارند به قسمی‌که $P_{-x} * O * P_x$، و پاره‌خطهای $P_{-x}O$ و OP_x هر دو دارای طول x (برحسب یک پاره‌خط واحد اندازه‌گیری) هستند (شکل ۳۳.۳).

بدون بنداشت ددکیند تضمینی‌نیست که، مثلاً، بگوییم پاره‌خطی به درازای π وجود دارد. با داشتن این بنداشت می‌توانیم یک دستگاه مختصات قائم در صفحه بگیریم و هندسه را به‌طور تحلیلی بسازیم، یعنی‌همان کاری را بکنیم که دکارت و فرما در سده هفدهم کردند. این دستگاه مختصات به ما امکان می‌دهد که ثابت کنیم بنداشتهای ما برای هندسه اقلیدسی جزمی‌اند، بدین

۱. این بنداشت را «یولیوس ویلهلم ریشارت ددکیند» در ۱۸۷۱ مطرح کرده است. مشابه این بنداشت در ستون آنالیز برای بیان تمامیت دستگاه اعداد حقیقی به‌کار برده شده است. نتیجه این نحوه بیان این است که هر دنباله کوشی متقارب باشد، توابع پیوسته در قضیه مقدار میانگین صدق کند، انتگرال معین یک تابع پیوسته وجود داشته باشد، و نتایج مهم دیگر. ددکیند در واقع «عدد حقیقی» را به‌صورت یک برش ددکیند در مجموعه اعداد گویا تعریف می‌کند، مفهومی که ائودوکسوس در ۲۰۰۰ سال قبل به‌کار برده است (موییز، ۱۹۹۰، فصل ۲۰).



شکل ۳۳.۳

معنی که این دستگاه مدل یکتایی (در حد یکریختی ←بخش یکریختی مدلها در فصل ۲) دارد که همان مجموعه همه جفتهای مرتب اعداد حقیقی صفحه مختصات دکارتی معمولی است.

اگر بنداشت ددکیند را حذف کنیم، بنداشتهای ما مدل دیگری پیدا می‌کنند که صفحه گنگ نامیده می‌شود. صفحه‌ای که برای عدم‌امکان تثلیث زاویه با خط‌کش نامدرج و پرگار به کار می‌رفته است (موییز، ۱۹۹۰، ص ۲۸۲ به بعد). جزمی بودن مجموعه همه بنداشتها در بورسوک‌ـاسمیلیو (۱۹۶۰، ص ۲۷۶ به بعد) ثابت شده است.

هشدار. اگر تاکنون به بنداشت ددکیند برنخورده‌اید، دنبال کردن براهین آن برای شما دشوار خواهد بود. نگران نباشید. به استثنای اثبات قضیه ۶.۶ در هندسه هذلولوی، این بنداشت برای قسمتهای اصلی این کتاب ضروری نیست. توصیه من به دانشجویان مبتدی این است که آن را کنار بگذارند و به بخش بعد، بنداشت توازی، بپردازند.

اگر چه بنداشت ددکیند مستلزم چهار اصل دیگر است و تنها بنداشت پیوستگی است که ما نیاز به پذیرفتنش داریم، باز اصلهای دیگر را هم بنداشت می‌نامیم. حال به شرح مختصر این برهان می‌پردازیم که بنداشت ارشمیدس نتیجه‌ای است از بنداشت ددکیند (و بنداشتهای قبل از آن، در این بخش).

برهان:

پاره‌خط CD و نقطه A بر خط l با نیم‌خط r از l که از A خارج شده است داده شده‌اند. با واژگان بنداشت ارشمیدس، فرض می‌کنیم $\sum_1$ متشکل از A و همه نقاط B باشند که از قرار دادن چندین بار پاره‌خط CD بر r با شروع از A به آنها دست یافته‌ایم. فرض می‌کنیم $\sum_2$ مکمل $\sum_1$ در r باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $\sum_2$ تهی است، لذا عکس آن را فرض می‌کنیم.

در آن صورت نشان می‌دهیم که یک برش ددکیند از r را تعریف کرده‌ایم (تمرین ۷(الف)). با دو نقطه P و Q در $\sum_2$ شروع می‌کنیم و می‌گوییم $A * P * Q$. باید نشان دهیم که $PQ \subset \sum_2$. فرض می‌کنیم B بین P و Q باشد. فرض می‌کنیم بتوانیم به B دست یابیم به‌طوری‌که n و E همان عناصر حکم بنداشت ارشمیدس باشند؛ پس بنابر گزاره ۳.۳، P با همان n و E دست‌یافتنی

است، که با $P \in \sum_{۲}$ متناقض است. از این رو $PQ \subset \sum_{۲}$. به همین نحو می‌توانیم نشان دهیم که وقتی P و Q دو نقطه در $\sum_{۱}$ باشند، $PQ \subset \sum_{۱}$ (تمرین ۷(ب)). لذا یک برش ددکیند داریم. فرض می‌کنیم O نقطه‌ای از r باشد که از بنداشت ددکیند به‌دست آمده است.

حالت ۱. $O \in \sum_{۱}$. در این صورت به‌ازای عددی مانند n، با قرار دادن nبار پاره‌خط CD بر r با شروع از A می‌توان به O دست یافت. با قرار دادن یک‌بار دیگر CD می‌توانیم به نقطه‌ای از $\sum_{۲}$ برسیم، اما بنابر تعریف $\sum_{۲}$، این امر غیرممکن است.

حالت ۲. $O \in \sum_{۲}$. CD را با شروع از O یک‌بار بر نیم‌خط مقابل $\sum_{۲}$ قرار می‌دهیم تا به نقطه P برسیم. P بر r قرار دارد (تمرین ۷(ب))، لذا $P \in \sum_{۱}$. پس به‌ازای عدد r، می‌توان با قرار دادن nبار پاره‌خط CD بر r، با شروع از A، به P دست یافت. با قراردادن یک‌بار دیگر CD می‌توان به O دست یافت. این امر متناقض است با $O \in \sum_{۲}$.

لذا در هر دو حالت به یک تناقض می‌رسیم و می‌توانیم فرض برهان خلف را که $\sum_{۲}$ ناتهی است رد کنیم. ■

برای اینکه تصور بیشتری پیدا کنیم از اینکه چگونه بنداشت ددکیند قضایای پیوستگی را به ما می‌دهد، اکنون با استفاده از بنداشت ددکیند برهان مجملی برای اصل پیوستگی مقدماتی می‌آوریم (این برهان منطقاً باید بعداً آورده شود، زیرا درآن از قضایای فصل ۴ استفاده خواهد شد؛ شکل ۲۹.۳).
برهان:

با تعاریف «درون» و «بیرون» دایره γ به مرکز O و شعاع OR، داریم $OA < OR < OB$ فرض می‌کنیم $\sum_{۲}$ مجموعه همه نقاط P از نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ باشد که یا بر γ قرار دارند یا در بیرون آن، و $\sum_{۱}$ مکمل آن در $\overrightarrow{AB}$ باشد. بنابر سه حالتی (گزاره ۱۳.۳ (الف))، $\sum_{۱}$ متشکل از همه نقاط پاره‌خط AB است که درون γ قرار دارند. با استفاده از تمرین ۲۷، فصل ۴، می‌توانید خود را متقاعد سازید که $(\sum_{۱}, \sum_{۲})$ یک برش ددکیند است فرض می‌کنیم M نقطه‌ای بر $\overrightarrow{AB}$ باشد که روی بنداشت ددکیند به‌دست آمده و بر γ نیست (فرض برهان خلف).

حالت ۱. $OM < OR$. پس $M \in \sum_{۱}$. فرض می‌کنیم m و r به‌ترتیب طولهای OM و OR (تعریف شده در فصل ۴) باشند. چون $\sum_{۲}$ یا M یک نیم‌خط است، نقطه‌ای مانند $N \in \sum_{۲}$ وجود دارد به‌طوری‌که MN برابر با $\frac{۱}{۲}(r-m)$ باشد (مثلاً با جدا کردن پاره‌خطی به طول $\frac{۱}{۲}(r-m)$ با استفاده از قضیه ۳.۴ (۱۱)). اما به موجب نابرابری مثلثی (نتیجه ۲ در قضیه ۳.۴) طول ON از $m + \frac{۱}{۲}(r-m) < m + (r-m) = r$ کمتر است که با $N \in \sum_{۲}$ متناقض است.

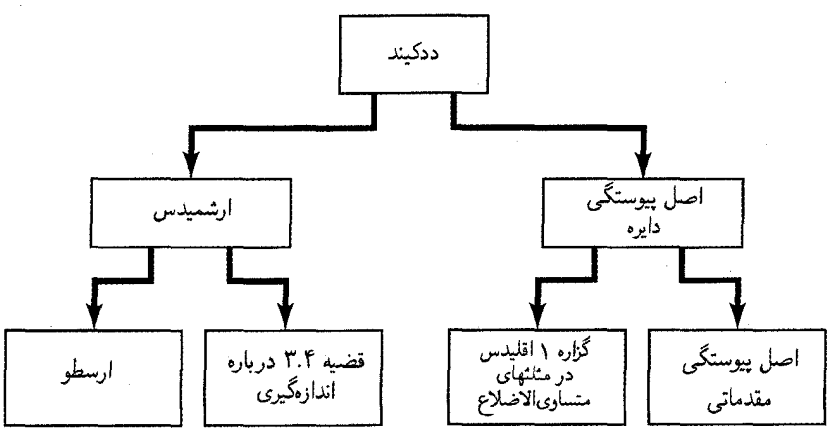
حالت ۲. $OM > OR$. با استفاده از همین استدلال با تعویض نقش $\sum_2$ و $\sum_1$.

لذا در هر دو حالت به تناقض می‌رسیم و M باید بر دایره γ باشد. ■

اثبات قشنگی برای اصل پیوستگی دایره از روی بنداشت ددکیند در صص ۲۳۸ تا ۲۴۰ ترجمه هیث و شرح بر اصول اقلیدس (۱۹۵۶) دیده می‌شود. در اینجا فرض می‌شود که بنداشت ددکیند برای نیم‌دایره‌ها صادق است، که شما می‌توانید آن را در تمرین اصلی ۴ به‌راحتی ثابت کنید، و نیز از نابرابری مثلثی و این واقعیت که وتر از ساق بزرگتر است (که در فصل ۴ ثابت‌شده) استفاده می‌شود.

استفاده ضمنی اقلیدس از اصول پیوستگی را می‌توان اغلب به کار نبرد. ما از آنها در اثبات وجود عمودها (گزاره ۱۶.۳) استفاده نمی‌کنیم. خط‌کش ما از اصل پیوستگی دایره برای اثبات وجود مثلثهای متساوی‌الاضلاع مرسوم بر یک قاعده مفروض استفاده می‌کنیم، و اقلیدس آن را برای اثبات نقاط وسط، مثل راه‌حل تمرین اصلی ۱ (الف) در فصل ۱ با خط‌کش و پرگار که شما به کار می‌برید، مورد استفاده قرار می‌دهد. ولی برای اثبات وجود نقاط وسط، راه استادانه‌ای فقط با استفاده از اصل پیوستگی خیلی مختصری که در قضیه پاش آمده (تمرین ۱۲، فصل ۴) وجود دارد.

شکل ۳۴.۳ استلزامهای بحث‌شده را (با قبول همه بنداشتهای وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق ـــ به‌ویژه ض‌زض) نشان می‌دهد.



شکل ۳۴.۳

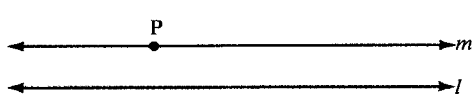
بنداشت توازی

اگر مجبور می‌شدیم به بنداشتهایی که تاکنون داشتیم اکتفا کنیم، فقط می‌توانستیم قسمتی از هندسه را بسازیم، ولی نمی‌توانستیم همه هندسه اقلیدسی را به‌انجام برسانیم. می‌توانستیم «هندسه مطلق» را بسازیم. این نامی است که اول بار یانوش بویویی به کار برده ولی گمراه‌کننده است، زیرا هندسه بیضوی و هندسه‌های دیگر را در برنمی‌گیرد (پیوست ب). من ترجیح می‌دهم به جای آن، نامی را که و. پرنوویتس و م. جردن (۱۹۶۵) توصیه کرده‌اند، یعنی «هندسه نتاری» را به‌کار برم. علت این نام‌گذاری این است که وقتی با این هندسه سروکار داریم نسبت به یکی از بنداشتهای هیلبرت، که هنوز مورد توجه قرار نداده‌ایم و از لحاظ تاریخی بحث‌انگیزترین بنداشت است، بی‌طرف می‌مانیم و با آن کاری نداریم.

بنداشت توازی هیلبرت. به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر آن، حداکثر یک خط m وجود دارد که از P می‌گذرد و با l موازی‌است (شکل ۳۵.۳).

توجه کنید که این بنداشت ضعیفتر از اصل توازی اقلیدسی است که در فصل ۱ مطرح کردیم. این بنداشت تنها حکم می‌کند که حداکثر یک خط بر P می‌گذرد که با l موازی است، در حالی‌که اصل توازی اقلیدسی علاوه بر آن حکم می‌کند که لااقل یک خط گذرنده از P موازی با l وجود دارد. علت اینکه واژه «لااقل» از بنداشت هیلبرت حذف شده این است که می‌توان آن را از روی بنداشتهای دیگر ثابت کرد (نتیجه ۲، قضیه ۱.۴، فصل ۴)؛ بنابراین لازم نیست آن را به‌عنوان جزئی از یک بنداشت فرض کنیم. این اظهار نظر از این لحاظ مهم است که ایجاب می‌کند ویژگی توازی بیضوی (نبود هیچ خط موازی) با بنداشتهای هندسه نتاری ناسازگار باشد، و لذا مجموعه دیگری از بنداشتها برای پی‌ریزی هندسه بیضوی لازم است (پیوست الف).

بنداشت توازی فهرست ۱۶ بنداشتی ما را برای هندسه اقلیدسی تکمیل می‌کند. صفحه اقلیدسی مدل این بنداشتهاست. هنگام اشاره به این بنداشتها، برای کوتاه‌نویسی، آنها را چنین نشان خواهیم داد: بنداشتهای وقوع را با و-۱، و-۲، و-۳؛ بنداشتهای میان‌بود را با م-۱، م-۲، م-۳، و م-۴؛ بنداشتهای قابلیت انطباق را با ق-۱، ق-۲، ق-۳، ق-۴، ق-۵، و ق-۶ (یا ض‌زض). بنداشتهای پیوستگی و بنداشت توازی را با نام خود آنها ذکر می‌کنیم.



شکل ۳۵.۳

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) بنداشت توازی هیلبرت عیناً مثل توازی اقلیدسی است که در فصل اول ذکر شده است.

(۲) $A * B * C$ منطقاً هم‌ارز است با $C * B * A$.

(۳) در بنداشت م-۲ لازم نیست فرض کنیم که نقطه‌ای مانند E وجود دارد به‌قسمی‌که $B * D * E$ زیرا وجود آن می‌تواند از روی بقیه بنداشتها و بنداشت م-۱، با تعویض نقشهای B و D و گرفتن E به جای A ثابت شود.

(۴) اگر نقاط A، B، و C متمایز و هم‌خط باشند ممکن است در آنِ واحد هم $A * B * C$ و هم $A * C * B$ را داشته باشیم.

(۵) «ویژگی جداسازی خط» حکم می‌کند که هر خط دو طرف دارد.

(۶) اگر نقاط A و B در دو طرف خط l باشند، هر نقطه C ناواقع بر l باید یا در آن طرف l باشد که که A در آن است و یا در آن طرف l که B در آن است.

(۷) اگر خط m موازی خط l باشد، همه نقاط m در یک طرف l قرار دارند.

(۸) اگر به‌جای بنداشت جداسازی م-۴، قضیه پاش را به‌عنوان یک بنداشت می‌پذیرفتیم، آنگاه م-۴ را می‌توانستیم به‌صورت یک قضیه ثابت کنیم.

(۹) مفهوم «قابلیت انطباق» برای دو مثلث در این فصل تعریف نشده است.

(۱۰) این نتیجه مستقیم بنداشت ق-۲ است که اگر $AB \cong CD$، آنگاه $CD \cong AB$.

(۱۱) یکی از بنداشتهای قابلیت انطباق، حکم می‌کند که اگر پاره‌خطهای قابل انطباق را از پاره‌خطهای قابل انطباق «کم کنیم»، تفاضلها با هم قابل انطباق‌اند.

(۱۲) در حکم بنداشت ق-۴ متغیرهای A، B، C، A'، و B' دارای سور عمومی و متغیر C' دارای سور وجودی است.

(۱۳) یکی از بنداشتهای قابلیت انطباق، ملاک (ض‌ض‌ض) برای قابلیت انطباق مثلثها است.

(۱۴) اقلیدس موفق نشد ملاک ض‌زض برای قابلیت انطباق مثلثها را، از روی روش به اصطلاح «برهمنهش» ثابت کند.

(۱۵) می‌توانیم روش پاپوس را برای اثبات عکس قضیه قابلیت انطباق زوایای مثلث متساوی‌الساقین با هم به‌کار بریم، هرگاه ابتدا ملاک (زض‌ز) را برای قابلیت انطباق ثابت کنیم.

(۱۶) بنداشت ارشمیدس مستقل از ۱۵ بنداشت دیگری است که در این کتاب برای هندسه اقلیدسی آورده شده‌اند.

(۱۷) معنی $AB < CD$ این است که نقطه‌ای مانند E بین C و D وجود دارد که $AB \cong CE$.

(۱۸) هندسه نتاری سابقاً «هندسه مطلق» نامیده می‌شد. این همان هندسه‌ای است که از حذف بنداشت توازی از دستگاه بنداشتهایی که در این کتاب ذکر شده‌اند، به‌دست آمده است.

تمرینهای میان‌بود

۱. $A * B * C$ و $A * C * D$ داده شده‌اند.

(الف) ثابت کنید که A، B، C، و D چهار نقطه متمایزند (اثبات آن به یک بنداشت نیاز دارد).

(ب) ثابت کنید A، B، C، و D هم‌خط‌اند.

(ج) نتیجه بنداشت م-۴ را ثابت کنید.

۲. (الف) برهان گزاره ۱.۳ را با نشان دادن تساوی $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$ کامل کنید.

(ب) برهان گزاره ۳.۳ را با نشان دادن اینکه $A * B * D$ کامل کنید.

(ج) عکس گزاره ۳.۳ را با استفاده از بنداشت م-۱ ثابت کنید.

(د) نتیجه گزاره ۳.۳ را ثابت کنید.

۳. $A * B * C$ داده شده است.

(الف) با استفاده از گزاره ۳.۳ ثابت کنید $AB \subset AC$. با تعویض A و C نتیجه بگیرید $CB \subset CA$؛ کدام بنداشت دلیل موجهی برای این تعویض است؟

(ب) با استفاده از بنداشت م-۴ ثابت کنید $AC \subset AB \cup BC$. (راهنمایی: اگر P نقطه چهارمی بر AC باشد، از خط دیگری گذرنده از P استفاده کنید تا نشان دهید $P \in BC$ یا $P \in AB$).

(ج) برهان گزاره ۵.۳ را تمام کنید. (راهنمایی: اگر $P \neq B$ و $P \in AB \cap BC$، خط دیگری از P رسم کنید تا به یک تناقض برسید).

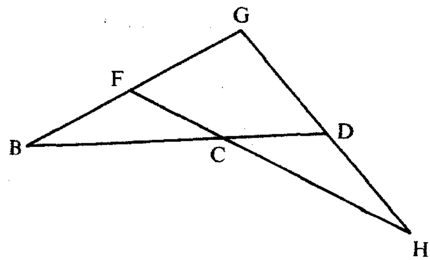
۴. $A * B * C$ داده شده است.

(الف) اگر P نقطه چهارمی هم‌خط با A، و B، و C باشد، با استفاده از گزاره ۳.۳ و یک بنداشت، ثابت کنید $\sim A * C * P \Longrightarrow \sim A * B * P$.

(ب) نتیجه بگیرید که $\overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{CA}$ ، و متقارناً $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AC}$.

(ج) با استفاده از این نتیجه‌گیری، و گزاره ۱.۳ (الف) گزاره ۳.۳ و گزاره ۵.۳ ثابت کنید که B تنها نقطه مشترک بین $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ است.

۵. $A * B * C$ داده شده است. ثابت کنید $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$، و بدین ترتیب برهان گزاره ۶.۳ را تکمیل و نتیجه‌گیری کنید که هر نیم‌خط یک نیم‌خط متقابل یکتا دارد.



شکل ۳.۳۶

۶. در بنداشت م-۲ نقاط متمایز B و D داده شده بودند و ما حکم کردیم که نقاط A، B، C، و E وجود دارند به‌طوری که $A * B * D$، $B * C * D$، و $B * D * E$. اکنون می‌توانیم نشان دهیم که لزومی به فرض وجود یک نقطه C میان B و D نبود، زیرا که می‌توانیم از روی بنداشتهای دیگر (از جمله بقیه بنداشت م-۲) و قضیه پاش (که بدون استفاده از بنداشت م-۲ ثابت شده بود) وجود C را ثابت کنیم. وظیفه شما این است که دلیلی برای درستی هر مرحله از این برهان بیاورید (بعضی مراحل به برهان خلف جداگانه نیاز دارند).

برهان:

(شکل ۳.۳۶)

(۱) خطی مانند $\overleftrightarrow{BD}$ وجود دارد که از B و D می‌گذرد.

(۲) نقطه‌ای مانند F ناواقع بر $\overleftrightarrow{BD}$ وجود دارد.

(۳) خطی مانند $\overleftrightarrow{BF}$ وجود دارد که از B و F می‌گذرد.

(۴) نقطه‌ای مانند Gوجود دارد چنان‌که $B * F * G$.

(۵) نقاط B، F، و G هم‌خط‌اند.

(۶) G و D نقاط متمایزند و D، B، و G هم‌خط نیستند.

(۷) نقطه‌ای مانند H وجود دارد چنان‌که $G * D * H$.

(۸) خطی مانند $\overleftrightarrow{GH}$ وجود دارد.

(۹) H و F نقاط متمایزند.

(۱۰) خطی مانند $\overleftrightarrow{FH}$ وجود دارد.

(۱۱) D بر $\overleftrightarrow{FH}$ نیست.

(۱۲) B بر $\overleftrightarrow{FH}$ نیست.

(۱۳) G بر $\overleftrightarrow{FH}$ نیست.

(۱۴) نقاط D، B، و G، ΔDBG را مشخص می‌کنند و $\overleftrightarrow{FH}$ ضلع BC را در نقطه‌ای بین B و G می‌برد.

(۱۵) H تنها نقطه‌ای است که هم بر $\overleftrightarrow{FH}$ واقع است و هم بر $\overleftrightarrow{GH}$.

(۱۶) بین G و D هیچ نقطه‌ای نیست که بر $\overleftrightarrow{FH}$ واقع باشد.

(۱۷) پس، $\overleftrightarrow{FH}$ ضلع BD را در نقطه‌ای مانند C بین D و B می‌برد.

(۱۸) لذا نقطه‌ای مانند C بین D و B وجود دارد. ■

۷. (الف) برش ددکیند را، به همان طریق که برای یک خط تعریف می‌کردید، برای یک نیم‌خط نیز تعریف کرده، و ثابت کنید که حکم بنداشت ددکیند بر آن جاری است (راهنمایی: یکی‌از زیرمجموعه‌ها، مثلاً $\sum_1$، شامل رأس A از r است. این زیرمجموعه را بزرگ کنید تا نیم‌خط متقابل r را شامل شود، و نشان دهید که یک برش ددکیند از خط l شامل r به‌وجود آمده است). صورتی از بنداشت ددکیند را برای برش در یک پاره‌خط نیز بیان و ثابت کنید.

(ب) قسمتی از اثبات بنداشت ارشمیدس از روی بنداشت ددکیند را، که ما جا گذاشته بودیم، تمام کنید.

۸. در مدل ۳ نقطه‌ای (مثال ۱، فصل ۲) دیدیم که اگر تنها از بنداشتهای وقوع استفاده می‌کردیم نمی‌توانستیم ثابت کنیم که هر خط بیش از دو نقطه بر خود دارد. با استفاده از بنداشتهای میان‌بود ثابت کنید که هر خط دست‌کم ۵ نقطه بر خود دارد. با ذکر برهان غیرصوری نشان دهید که هر پاره‌خط (به طریق اولی، هر خط) بی‌نهایت نقطه بر خود دارد (یک برهان صوری مستلزم استفاده از روش استقرای ریاضی است).

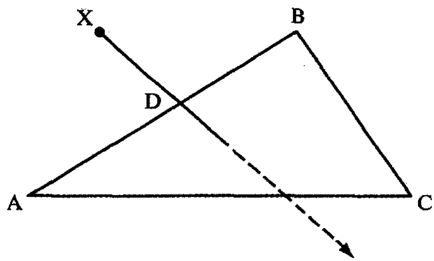
۹. خط l و یک نقطه A بر آن و یک نقطه B بیرون آن داده شده‌اند. پس هر نقطه از نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ (غیر از A) در همان طرف l واقع است که B در آن قرار دارد. (راهنمایی: از برهان خلف استفاده کنید.)

۱۰. گزاره ۷.۳ را ثابت کنید.

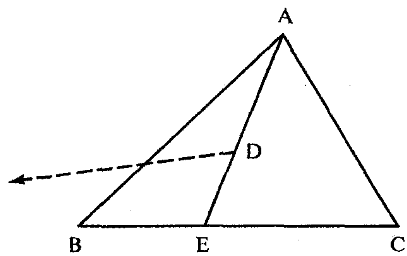
۱۱. گزاره ۸.۳ را ثابت کنید. (راهنمایی: برای گزاره ۸.۳ (ج) در دو مرحله ثابت کنید که E و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$ هستند. اول نشان دهید که EB نیم‌خط $\overrightarrow{AD}$ را نمی‌برد، سپس نشان دهید که EB نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{AF}$ را نمی‌برد. از تمرین ۹ استفاده کنید.)

۱۲. قضیه قطعه‌بر را ثابت کنید. (راهنمایی: ضد آن را مفروض بگیرید، و نشان دهید که B و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$ قرار دارند. ازگزاره ۸.۳(ج) استفاده کنید تا به تناقض برسید.)

۱۳. گزاره ۹.۳ را ثابت کنید. (راهنمایی: برای گزاره ۹.۳ (الف)، از قضیه پاش و گزاره ۷.۳



شکل ۳۷.۳



شکل ۳۸.۳

استفاده کنید (شکل ۳۷.۳). برای گزاره ۹.۳(ب) فرض کنید که نیم‌خطی از نقطه D در داخل $\triangle$ABC خارج شده است. با استفاده از قضیه قطعه‌بر و گزاره ۷.۳ نشان دهید $\overrightarrow{AD}$ ضلع BC را در نقطه‌ای مانند E می‌برد به‌قسمی‌که $A * D * E$. قضیه پاش را برای $\triangle$ABE و $\triangle$AEC به کار برید (شکل ۳۸.۳).)

۱۴. ثابت کنید که یک خط نمی‌تواند در درون یک مثلث جای گیرد.

۱۵. سه نیم‌خط a، b، و c را زمانی هم‌مبدأ می‌گوییم که هر سه از یک نقطه رسم شده باشند، و فرض می‌کنیم قرارداد $a * b * c$ بدین معنی باشد که b بین a و c قرار دارد (همان‌گونه که در ص ۸۰ تعریف کردیم). بنداشتی مشابه با بنداشت م-۱ بیان می‌کند که اگر $a * b * c$، آنگاه a، b، و c متمایز و هم مبدأ هستند و $c * b * c$. بدیهی است که این مشابهت درست است. بنداشتهایی مشابه با بنداشتهای م-۲، م-۳، و گزاره ۳.۳ بیان کنید و بگویید کدام‌یک از اجزای این بنداشتهای متشابه درست است (مواظب نیم‌خطهای متقابل باشید!)

۱۶. تعبیری پیدا کنید که در آن بنداشتهای وقوع و دو بنداشت اول میان‌بود صادق باشند ولی بنداشت م-۳ به‌ترتیب زیر صادق نباشد: سه‌نقطه بر یک استقامت وجود دارند که هیچ‌یک از آنها

بین دوتای دیگر نیست. (راهنمایی: در مدل معمولی اقلیدسی، یک رابطه میان‌بود تازه $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}$ را به این معنی‌که B وسط AC است وارد کنید.)

۱۷. تعبیری از بنداشتهای وقوع و سه بنداشت اول میان‌بود پیدا کنید که به‌ازای آنها ویژگی جداسازی خط (گزاره ۴.۳) صادق نباشد. (راهنمایی: در مدل معمولی اقلیدسی، نقطه‌ای مانند P بگیرید که به معنای اقلیدسی بین A و B باشد و تصریح کنید که A اکنون بین P و B درنظر گرفته می‌شود. بقیه روابط میان‌بود را دست نزنید. نشان دهید که P نه بر نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ واقع است و نه بر نیم‌خط متقابل آن $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.)

۱۸. یک عدد گویا به‌صورت $a/۲^n$ (a و n اعدادی صحیح) را دوتایی می‌نامیم. در تعبیرهای پروژه ۲، این فصل، خود را به مختصات دوتایی و خطوطی که از چند نقطه دوتایی می‌گذرند محدود می‌کنیم. نشان دهید که بنداشتهای وقوع، سه بنداشت اول میان‌بود، و ویژگی جداسازی خط، همه در صفحه گویای دوتایی صادق‌اند؛ نشان دهید که قضیه پاش درست نیست. (راهنمایی: خطوط $۳x + y = ۱$ و $y = ۰$ در این صفحه همدیگر را نمی‌برند.)

۱۹. یک مجموعه S از نقاط را کوژ نامند اگر هر وقت که دو نقطه A و B در S باشند، تمامی پاره‌خط AB در S باشد. ثابت کنید که یک نیم‌صفحه، درون زاویه، و درونِ یک مثلث مجموعه‌یابی کوژند، در حالی‌که بیرون مثلث کوژ نیست. آیا مثلث مجموعه‌ای کوژ است؟

تمرینهای قابلیت انطباق

۲۰. در برهان گزاره ۱۱.۳ در زیر، ملاک درستی هر مرحله را ذکر کنید.

برهان:

(۱) فرض می‌کنیم که به‌عکس، BC با EF قابل انطباق نباشد.

(۲) پس نقطه‌ای مانند G بر $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\mathrm{BC} \cong \mathrm{EG}$.

(۳) $\mathrm{G} \neq \mathrm{F}$.

(۴) چون $\mathrm{AB} \cong \mathrm{DE}$، پس از جمع کردن خواهیم داشت $\mathrm{AC} \cong \mathrm{DG}$.

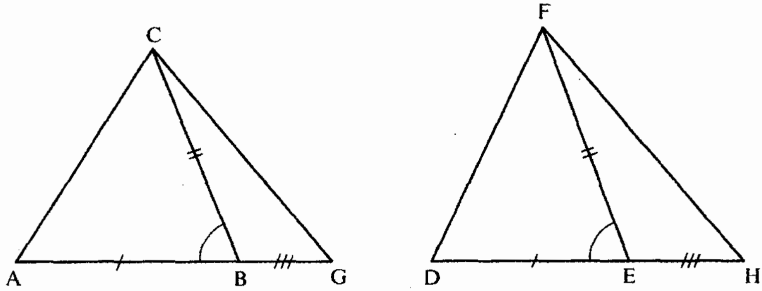
(۵) ولی $\mathrm{AC} \cong \mathrm{DF}$.

(۶) از آنجا $\mathrm{DF} \cong \mathrm{DG}$.

(۷) بنابراین، $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.

(۸) فرض ما به یک تناقض منجر شده است. لذا $\mathrm{BC} \cong \mathrm{EF}$. ■

۲۱. گزاره ۱۳.۳ (الف) را ثابت کنید. (راهنمایی: در حالتی‌که AB و CD قابل انطباق



شکل ۳۹.۳

نیستند، نقطه یکتایی مانند $F \neq D$ بر $\overrightarrow{CD}$ موجود است به‌قسمی‌که $AB \cong CF$ (چرا؟) در حالتی‌که $C * F * D$، نشان دهید $AB < CD$. در حالتی‌که $C * D * F$، با استفاده از گزاره ۱۲.۳ و برخی از بنداشتها، نشان دهید $CD < AB$.)

۲۲. با استفاده از گزاره ۱۲.۳، گزاره‌های ۱۳.۳(ب) و (ج) را ثابت کنید.

۲۳. با استفاده از تمرین پیش و گزاره ۳.۳، گزاره ۱۳.۳(د) را ثابت کنید.

۲۴. ملاک درستی هر مرحله از برهان گزاره ۱۴.۳ در زیر را بیان کنید (شکل ۳۹.۳).

برهان:

$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ داده شده است. ثابت می‌کنیم $\measuredangle CBG \cong \measuredangle FEH$.

(۱) چون نقاط A، C، و G به دلخواه بر اضلاع $\measuredangle ABC$ و $\measuredangle CBG$ (مکمل $\measuredangle ABC$) داده شده‌اند، می‌توانیم نقاط D، F، و H را بر ضلعهای زاویه دیگر و مکملش چنان بگیریم که $AB \cong DE$، $CB \cong FE$ و $BG \cong EH$.

(۲) پس $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

(۳) و از آنجا $AC \cong DF$ و $\measuredangle A \cong \measuredangle D$.

(۴) همچنین $AG \cong DH$.

(۵) از آنجا $\Delta ACG \cong \Delta DFH$.

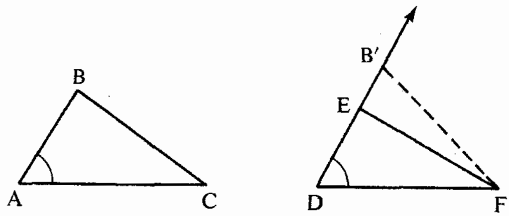
(۶) بنابراین، $CG \cong FH$ و $\measuredangle G \cong \measuredangle H$.

(۷) از آنجا $\Delta CBG \cong \Delta FEH$.

(۸) در نتیجه $\measuredangle CBG \cong \measuredangle FEH$ و این همان است که می‌خواستیم. ■

۲۵. گزاره ۱۵.۳ را از گزاره ۱۴.۳ نتیجه بگیرید.

۲۶. ملاک درستی هر مرحله از گزاره ۱۷.۳ در زیر را بیان کنید (شکل ۴۰.۳).



شکل ۴۰.۳

برهان:

ΔABC و ΔDEF داده شده به‌طوری که $\measuredangle D \cong \measuredangle A$، $\measuredangle F \cong \measuredangle C$ و $AC \cong DF$.
ثابت می‌کنیم $\Delta ABC \cong \Delta DEF$:

(۱) نقطه یکتایی مانند B' بر نیم‌خط $\overrightarrow{DE}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $DB' \cong AB$.

(۲) $\Delta ABC = \Delta DB'F$.

(۳) بنابراین، $\measuredangle C \cong \measuredangle DFB'$.

(۴) پس لازم می‌آید $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB'}$.

(۵) که در این حالت $B' = E$.

(۶) بنابراین $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. ■

۲۷. گزاره ۱۸.۳ را ثابت کنید.

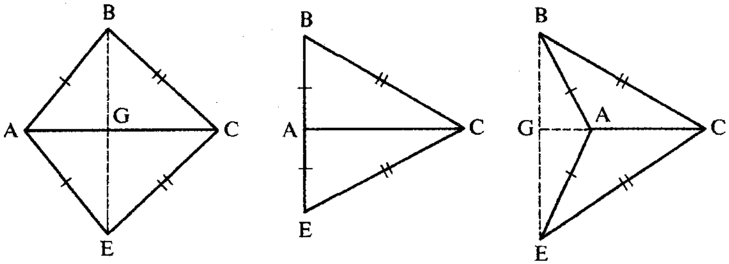
۲۸. ثابت کنید هر مثلثی که دارای سه زاویه قابل انطباق داشته باشد، متساوی‌الاضلاع است.

۲۹. گزاره ۲۰.۳ را ثابت کنید. (راهنمایی: از بنداشت ق‌ـ۴ و گزاره ۱۹.۳ استفاده کنید).

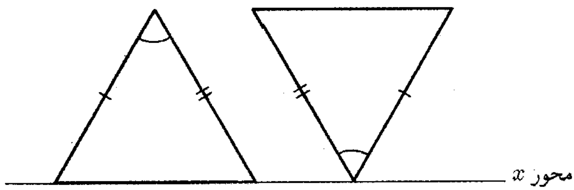
۳۰. $\measuredangle DEF \cong \measuredangle ABC$ و $\overrightarrow{BG}$ بین $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ داده شده‌اند. ثابت کنید که نیم‌خط یکتایی مانند $\overrightarrow{EH}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ وجود دارد به قسمی که $\measuredangle DEH \cong \measuredangle ABG$. (راهنمایی: نشان دهید که D و F را می‌توان چنان انتخاب کرد که $AB \cong DE$ و $BC \cong EF$، و نیز G را می‌توان چنان انتخاب کرد که $A * G * C$. از گزاره‌های ۷.۳ و ۱۲.۳ و ض‌زض برای پیدا کردن H استفاده کنید. شکل ۲۵.۳.)

۳۱. گزاره ۲۱.۳ را ثابت کنید (از تمرینهای ۲۱ـ۲۳ پیروی کنید).

۳۲. گزاره ۲۲.۳ را ثابت کنید. (راهنمایی: از نتیجه ض‌زض استفاده کنید تا مسئله را به حالتی که در آن $A = D$، $C = F$، و نقاط B و E در دو طرف $\overleftrightarrow{AC}$ باشند برگردانید. سپس هر یک از سه حالتی‌را که در شکل ۴۱.۳ آورده شده‌اند جداگانه در نظر بگیرید.)



شکل ۴۱.۳



شکل ۴۲.۳

۳۳. اگر $AB < CD$، ثابت کنید $۲AB < ۲CD$.

۳۴. فرض می‌کنیم $Q^۲$ صفحه گویای همه جفتهای مرتب (x, y) از اعداد گویا با تعابیر معمولی اصطلاحات تعریف نشده هندسی به کار رفته در هندسه تحلیلی باشد. نشان دهید که بنداشت ق-۱ و اصل پیوستگی مقدماتی در $Q^۲$ صادق نیست. (راهنمایی: پاره‌خط از $(۰ , ۰)$ تا $(۱ , ۱)$ را نمی‌توان، ابتدا از مبدأ، بر محور xها جدا کرد.)

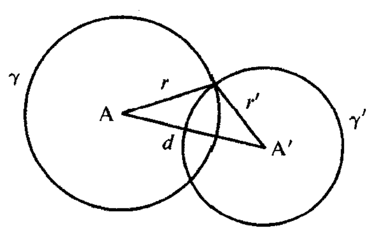
۳۵. در صفحه اقلیدسی معمولی همه با این مفهوم که هر پاره‌خط یک «درازا» دارد آشناییم. اکنون می‌پذیریم که همه «درازاها» را با «اینچ» اندازه‌گیری می‌کنیم جز پاره‌خطهای واقع بر یک خط خاص به‌نام محور x که درازاها را برحسب «فوت» اندازه‌گیری می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم در این طریق اندازه‌گیری، قابلیت انطباق پاره‌خطها به معنای داشتن «درازاهای یکسان» باشد. وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق زوایا همان معنی عادی خود را دارند. به‌طور غیررسمی نشان دهید که پنج بنداشت اول قابلیت انطباق و افزودن زاویه (گزاره ۱۹.۳) باز در این تعبیر صادق‌اند ولی ملاک ض‌زض صادق نیست (شکل ۴۲.۳). تصویری از یک «دایره» به مرکز واقع بر محور x در این تعبیر بکشید و با استفاده از آن نشان دهید که اصل پیوستگی دایره و اصل پیوستگی مقدماتی برقرار نیستند. نشان دهید که بنداشت ددکیند باز صادق است. تصاویر دیگری رسم کنید تا نشان دهید که ملاکهای ض‌ض‌ض، زض‌ز، و ض‌زز هیچ‌کدام برقرار نیستند.

۳۶. در فصل ۲ مدلهای چندی از بنداشتهای وقوع را نشان دادیم. وقتی بنداشتهای میان‌بود را اضافه می‌کنیم اکثر آن مدلها دیگر مدل نیستند (مثلاً کلیه مدلهای متناهی و مدلهایی را که در آنها «خطوط» دایره هستند از دست می‌دهیم.) ولی نشان می‌دهیم که مدل تمرین ۹(د)، که ویژگی توازی هذلولوی دارد، باز یک مدل در تعبیر طبیعی میان‌بود است. این مدل، مدل کلاین نامیده می‌شود، و بعداً در فصل ۷ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تصویری بکشید تا نشان دهید در این مدل لازم نیست یک نقطه در درون زاویه بر پاره‌خطی واقع باشد، تا نقطه‌ای از یک نیم‌خط زاویه را به نقطه‌ای از نیم‌خط دیگر آن وصل کند.

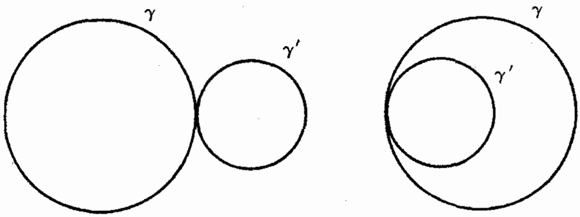
تمرینهای اصلی

۱. گیریم γ دایره‌ای به مرکز A و شعاعی به درازای r، و γ' دایره دیگری به مرکز A' و شعاعی به درازای r' و d فاصله بین A و A' باشد (شکل ۴۳.۳). فرضی درباره r و r' و d وجود دارد که ما را مطمئن می‌سازد که γ و γ' یکدیگر را در دو نقطه متمایز می‌برند. این فرض را از محاسبه یا حدس پیدا کنید. (راهنمایی: در این فرض گفته می‌شود که از اعداد r و r' و d اعدادی به‌دست می‌آیند که بعضی از بعضی دیگر کمترند.) چه فرضی برای r و r' و d ما را مطمئن می‌سازد که γ و γ' تنها در یک نقطه همدیگر را می‌برند، یعنی بر هم مماس‌اند؟ (شکل ۴۴.۳.)

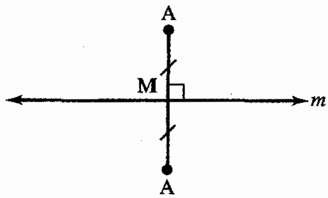
۲. بنابر تعریف، قرینه‌یابی رابطه به یک خط m، تبدیلی مانند R_m از صفحه است که نقاط m را ثابت نگاه می‌دارد و یک نقطه A ناواقع بر m را به‌صورت زیر تبدیل می‌کند. فرض می‌کنیم M پای عمود مرسوم از A بر m باشد. در این صورت بنابر تعریف، $R_m(\mathrm{A})$ نقطه یکتای A' است به‌طوری‌که $\mathrm{A}' * \mathrm{M} * \mathrm{A}$ و $\mathrm{A}'\mathrm{M} \cong \mathrm{MA}$ (شکل ۴۵.۳). در این تعریف از قضیه‌ای از فصل ۴ استفاده می‌شود که عمود مرسوم از A بر m یکتاست، در نتیجه پای عمود به گونه‌ای یکتا از تقاطع این عمود با m مشخص می‌شود. ثابت کنید که R_m یک حرکت است، یعنی، به‌ازای



شکل ۴۳.۳



شکل ۴۴.۳

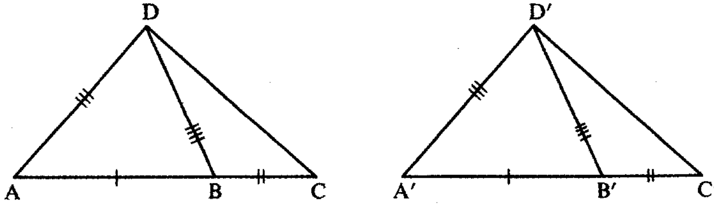


شکل ۴۵.۳

هر پاره‌خط AB، $AB \cong A'B'$. همچنین ثابت کنید که $AB \cong CD \Longrightarrow A'B' \cong C'D'$ و $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B \Longrightarrow \sphericalangle A' \cong \sphericalangle B'$ (تمامی فصل ۹ به بررسی حرکات اختصاص داده شده است؛ قرینه‌یابی موضوع گروه همه این‌گونه تبدیلات است.) (راهنمایی: برهان متضمن سه حالت است: (i) A یا B بر m قرار دارند، (ii) A و B در دوطرف m هستند، و (iii) A و B در یک طرف m هستند. در حالت (ii) فرض می‌کنیم M و N وسط AA' و BB' باشند و C نقطه تلاقی AB با m باشد. با نشان دادن اینکه $\sphericalangle A'CM \cong \sphericalangle B'CN$ و استفاده از بنداشت قابلیت انطباق ۳ ثابت کنید که $A' * C * B'$. در حالت (iii)، فرض می‌کنیم C نقطه تلاقی AB' با m باشد، و با استفاده از $(B')' = B$ و دو حالت اول نشان دهید $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C$. مواظب باشید از قضایایی که فقط در هندسه اقلیدسی معتبرند استفاده نکنید.)

توضیح. در هندسه بیضوی عمود مرسوم از A بر m یکتاست جز برای نقطه P که قطب m نامیده می‌شود (←شکل ۲۴.۳، که در آن m خط استوا و P قطب شمال)؛ تعریف قرینه‌یابی در اینجا عوض می‌شود به‌طوری‌که در هندسه بیضوی $R_m(P) = P$. آیا می‌توانید ببینید که R_m همان دوران حول P به زاویه 180° است؟ یادآوری می‌کنیم نقاط متقاطر یکی گرفته شده‌اند.

۳. احکام زیر را در باب قابلیت انطباق در نظر می‌گیریم:



شکل ۴۶.۳

(۱) $\triangle ABC$ و پاره‌خط DE داده شده‌اند به‌طوری‌که $AB \cong DE$. در این صورت در یک طرف مشخص $\overleftrightarrow{DE}$ نقطه یکتای F وجود دارد به قسمی که $AC \cong DF$ و $BC \cong EF$.

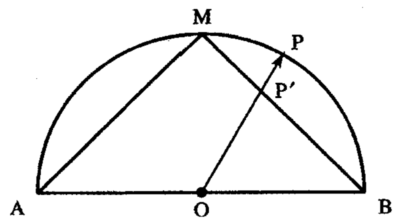
(۲) مثلثهای $\triangle ADC$ و $\triangle A'D'C'$ داده شده‌اند و $A * B * C$ و $A' * B' * C'$ مفروض‌اند. اگر $AB \cong A'B'$، $BC \cong B'C'$، و $AD \cong A'D'$ و $BD \cong B'D'$، آنگاه $CD \cong C'D'$ («تصلب یک مثلث دنباله‌دار» شکل ۴۶.۳).

احکام فوق را ثابت کنید. همچنین حکم ۲ (الف) حاصل از حکم ۲ را با قرار دادن $CD \cong C'D'$ به جای $BD \cong B'D'$ به‌عنوان فرض ثابت کنید و نتیجه بگیرید $BD \cong B'D'$.

در کتاب مبانی هندسه، اثر بورسوک و اسمیلیو، (۱۹۶۰)، به‌جای ق-۴ و ق-۵، ق-۶ که ما بنداشت گرفته‌ایم، احکام (۱) و (۲) بنداشت گرفته شده‌اند. مزیت این تغییر این است که بنداشتهای قابلیت انطباق جدید فقط برای قابلیت انطباق پاره‌خطها به کار می‌روند. در این صورت قابلیت انطباق زوایای $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ با این تصریح که می‌توان A و C (به‌ترتیب A' و C') را بر اضلاع $\sphericalangle B$ (به‌ترتیب $\sphericalangle B'$) چنان انتخاب کرد که $AB \cong A'B'$، $BC \cong B'C'$، و $AC \cong A'C'$، تعریف می‌شود. با این تعریف و حفظ همان بنداشتهای وقوع و میان‌بود پیشین، نشان دهید که ق-۴ و ق-۵ و ق-۶ را می‌توان از روی ق-۱، ق-۲، ق-۳ و احکام (۱) و (۲) ثابت کرد. (راهنمایی: ابتدا حکم ۲(الف) را از راه برهان خلف ثابت کنید. سپس نشان دهید که اگر $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$، و اگر نقاط D، D'E، و E' را بر اضلاع $\sphericalangle B$ و $\sphericalangle B'$ چنان انتخاب کنیم که $DB \cong D'B'$ و $EB \cong E'B'$، آنگاه $DE \cong D'E'$ (شکل ۴۷.۳).

۴. فرض می‌کنیم AB قطر دایره γ به مرکز O باشد. σ، یعنی اشتراک γ با یکی از نیم‌صفحه‌هایی که با $\overleftrightarrow{AB}$ تعیین می‌شود نیمدایره باز γ با دو سر A و B نامیده می‌شود. افزودن A و B نیمدایره $\bar{\sigma}$ را می‌دهد. یک رابطه میان‌بود # بر σ را چنین تعریف می‌کنیم: P#Q#R بدین معنی است که P، Q، و R نقاطی متمایز بر γ بوده و $\overrightarrow{OP} * \overrightarrow{OQ} * \overrightarrow{OR}$ (تمرین ۱۵). همچنین تصریح می‌کنیم که به‌ازای هر P در σ، A#P#B.

شکل ۴۷.۳



شکل ۴۸.۳

(الف) فرض می‌کنیم M نقطه‌ای بر σ باشد به قسمی که $\overleftrightarrow{\mathrm{MO}} \perp \overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ (شکل ۴۸.۳). فرض می‌کنیم $\mathrm{AMB} = \mathrm{AM} \cup \mathrm{MB}$. به‌ازای هر نقطه P بر σ ثابت کنید که نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$، AMB را در یک نقطه P' می‌برد و نگاشت $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$ نگاشتی است یک‌به‌یک از $\bar{\sigma}$ بر روی AMB.

(ب) تعریف می‌کنیم $\mathrm{P}'\#\mathrm{Q}'\#\mathrm{R}'$ به معنی $\mathrm{P}\#\mathrm{Q}\#\mathrm{R}$ است. اگر P'، Q'، و R' همه بر پاره‌خط AM یا همه بر پاره‌خط MB باشند، ثابت کنید $\mathrm{P}' * \mathrm{Q}' * \mathrm{R}' \Longrightarrow \mathrm{P}'\#\mathrm{Q}'\#\mathrm{R}'$.

(ج) ثابت کنید که بنداشت ددکیند برای AMB و بنابراین برای $\bar{\sigma}$ صادق است (از تمرین ۷ استفاده کنید).

پروژه

۱. گزارشی درباره برهان ت. ل. هیث (۱۹۵۶) برای اصل پیوستگی دایره تهیه کنید.

۲. وقوع، نقاط، و خطوط در صفحه حقیقی $\mathbb{R}^۲$ در تمرین اصلی ۹، فصل ۲ داده شده بودند. فاصله با دستور معمولی فیثاغورسی

$$d(\mathrm{AB}) = \sqrt{(a_۱ - b_۱)^۲ + (a_۲ - b_۲)^۲}$$

داده شده است که در آن $\mathrm{A} = (a_۱, a_۲)$ و $\mathrm{B} = (b_۱, b_۲)$. $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}$ را به‌معنی $d(\mathrm{AC}) = d(\mathrm{AB}) + d(\mathrm{BC})$ و $\mathrm{AB} \cong \mathrm{CD}$ را به‌معنی $d(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{CD})$ می‌گیریم. بنابر

تعریف، وقتی می‌گوییم $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$، که A، C، D، و F بتوانند بر اضلاع این زاویه‌ها چنان اختیار شوند که $AB \cong ED$، $CB \cong FE$، و $AC \cong DF$. با این تعابیر درستی همه بنداشتهای هندسه اقلیدسی را تحقیق کنید. (موییز، فصل ۲۶، ۱۹۹۰، یا بورسوک و اسمیلیو، فصل ۴، ۱۹۶۰).

۳. در پروژه ۲ فرض کنید به‌جای میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یک میدان اقلیدسی دلخواه F (میدان مرتبی که در آن هر عدد مثبت یک ریشه دوم دارد) گذاشته شده است. نشان دهید که همه بنداشتهای هندسه اقلیدسی، به استثنای بنداشتهای ددکیند و ارشمیدس، برقرارند. همچنین نشان دهید که اصل پیوستگی دایره برقرار است.

۴. در هندسه اقلیدسی، هیلبرت نشان داده است که رسم عمودها را با استفاده از خط‌کش (ستارهٔ مدرج) چگونه می‌توان انجام داد. در این ترسیم از این قضیه که سه ارتفاع هر مثلث متقارب‌اند استفاده شده است. گزارشی در باب قضایای هیلبرت تهیه کنید (← د. هیلبرت، ۱۹۸۷، ص ۱۰۰).

۴

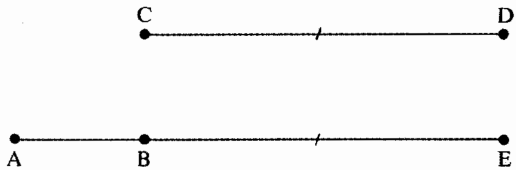
هندسه نتاری

کاش می‌شد ثابت کرد... که «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایایش کمتر از دو قائمه نیست!» ولی افسوس که این آرمان باطلی است که تاکنون کسی بدان دست نیافته است!

چ. ل. داجسون (لوئیس کارول)

هندسه‌ای بدون بنداشت توازی

در تمرینهای فصل پیش توانستید تجربه‌ای در اثبات چند قضیه مقدماتی از روی بنداشتهای هیلبرت به‌دست آورید. بسیاری از این قضایا را اقلیدس مسلم انگاشته بود. می‌توانید ببینید که پُر کردن این شکافها و اثبات دقیق هر جزء کار خسته‌کننده‌ای است. در هر حال باید نشان دهیم که اصلهای موضوع اقلیدس نتایج بنداشتهای هیلبرت‌اند. دیده‌ایم که نخستین اصل اقلیدس همان بنداشت و-۱ هیلبرت است. در زبان تازه ما دومین اصل اقلیدس چنین می‌شود: پاره‌خطهای AB و CD داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند E وجود دارد به‌طوری‌که $A * B * E$ و $BE \cong CD$.



شکل ۱.۴

این اصل را می‌توان مستقیماً از به‌کار بردن بنداشت ق-۱ هیلبرت برای نیم‌خطی که از B متقابل با $\overrightarrow{BA}$ خارج می‌شود نتیجه گرفت (شکل ۱.۴).

سومین اصل اقلیدس به تعریفی در دستگاه هیلبرت مبدل می‌شود. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA به‌صورت مجموعه نقاطی مانند P تعریف می‌شود به‌طوری که OP با OA قابل انطباق است. در این صورت بنداشت ق-۱ تضمین می‌کند که بر هر نیم‌خطی که از O خارج می‌شود چنین نقطه Pای وجود دارد.

چهارمین اصل اقلیدس —همه زوایای قائمه با هم قابل انطباق‌اند— همان‌گونه که در گزاره ۲۳.۳ نشان داده شد، به‌صورت قضیه‌ای در دستگاه هیلبرت درمی‌آید.

اصل توازی اقلیدس بعداً در این فصل مورد بحث قرار می‌گیرد. در این فصل ما به هندسه نتاری می‌پردازیم، هندسه‌ای که بنابر تعریف، مشتمل بر همه آن قضایایی است که می‌توان آنها را با استفاده از بنداشتهای وقوع، میان‌بود، قابلیت انطباق، و پیوستگی بدون استفاده از بنداشت توازی ثابت کرد. هر قضیه‌ای که تاکنون ثابت کرده‌ایم، یک قضیه در هندسه نتاری است. شما باید همه احکام را در قضایا، گزاره‌ها، و تمرینهای فصل ۳ دوره کنید، زیرا در سراسر کتاب از آنها استفاده خواهد شد. از این پس دلایل ما کمتر صورت رسمی خواهند داشت.

منظور از مطالعه هندسه نتاری چیست؟ ما نمی‌خواهیم آن را به‌خاطر خودش مطالعه کنیم. بلکه بیشتر سعی داریم نقش اصل توازی را روشن سازیم، بدین نحو که ببینیم کدام‌یک از قضایای هندسه به آن وابسته نیست، یعنی کدام‌یک از قضایا تنها از بنداشتهای دیگر نتیجه می‌شود بی‌آنکه اصل توازی در آن دخالت کند. این امر به ما امکان می‌دهد که از بسیاری از چالشهایی که بر سر راه ما هستند بپرهیزیم و ساختار منطقی دستگاه خود را خیلی روشنتر ببینیم. بعضی از پرسشهایی که می‌توانند در هندسه اقلیدسی پاسخ داده شوند (مثل اینکه آیا از یک نقطه فقط یک خط به موازات خط دیگر رسم می‌شود)، در هندسه نتاری ممکن است قابل جواب دادن نباشند، زیرا بنداشتهای آن اطلاع کافی به ما نمی‌دهند.

قضیه زاویه متبادل درونی

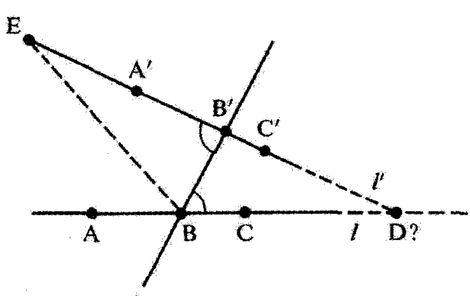
قضیه بعد نیاز به یک تعریف دارد: فرض می‌کنیم t موربی نسبت به دو خط l و l' باشد که l را در B بریده است و l' را در B'. نقاط A و C را بر l چنان می‌گیریم که $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}$؛ A' و C' را بر l' چنان می‌گیریم که A و A' در یک طرف t باشند و $\mathrm{A}' * \mathrm{B}' * \mathrm{C}'$. با این شرایط چهار زاویه زیر زاویه‌های متقابل درونی نامیده می‌شوند: $\sphericalangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{B}$، $\sphericalangle \mathrm{ABB}'$، $\sphericalangle \mathrm{C}'\mathrm{B}'\mathrm{B}$ و $\sphericalangle \mathrm{CBB}'$. هر جفت از دو جفت زوایای $(\sphericalangle \mathrm{ABB}', \sphericalangle \mathrm{C}'\mathrm{B}'\mathrm{B})$ و $(\sphericalangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{B}, \sphericalangle \mathrm{CBB}')$ یک جفت زاویه متبادل درونی نام دارند (شکل ۲.۴).

قضیه ۱.۴ (قضیه زاویه متبادل درونی). هرگاه دو خط که با موربی بریده شده‌اند یک جفت زاویه متبادل درونی قابل انطباق با هم پدید آوردند، آن دو خط موازی‌اند.

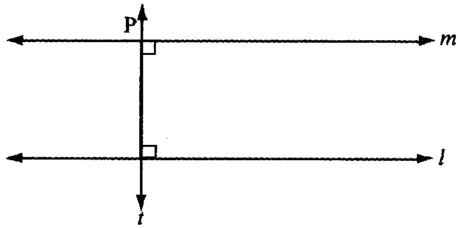
برهان:

بنابر فرض $\sphericalangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{B} \cong \sphericalangle \mathrm{CBB}'$. برعکس فرض می‌کنیم l و l' یکدیگر را در D ببرند. فرض می‌کنیم D در همان طرفی از t است که C و C' در آن هستند. بر $\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{A}'}$ نقطه‌ای مانند E وجود دارد به‌قسمی‌که $\mathrm{B}'\mathrm{E} \cong \mathrm{BD}$ (بنداشت ق‌ـ۱). پاره‌خط BB' با خودش قابل انطباق است، لذا $\Delta \mathrm{BB}'\mathrm{E} \cong \Delta \mathrm{B}'\mathrm{BD}$ (ض‌زض). به‌ویژه $\sphericalangle \mathrm{EBB}' \cong \sphericalangle \mathrm{DB}'\mathrm{B}$. چون $\sphericalangle \mathrm{DB}'\mathrm{B}$ مکمل $\sphericalangle \mathrm{EB}'\mathrm{B}$ است باید $\sphericalangle \mathrm{EBB}'$ مکمل $\sphericalangle \mathrm{DBB}'$ باشد (گزاره ۱۴.۳ و بنداشت ق‌ـ۴). این بدین معنی است که E بر l قرار دارد. لذا l و l' در دو نقطه E و D مشترک می‌شوند که با گزاره ۱.۲ از هندسه وقوع متناقض است. بنابراین $l \| l'$. ■

این قضیه دو نتیجه بسیار مهم دارد.



شکل ۲.۴



شکل ۳.۴

نتیجه ۱. دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند. بنابراین عمودی که از یک نقطه P ناواقع بر l، بر l فرود آید یکتاست (نقطه‌ای که در آن، عمود خط l را می‌برد پای عمود نامیده می‌شود).

برهان:

اگر l و l' هر دو بر t عمود باشند زوایای متبادل درونی قائمه می‌شوند و لذا با هم قابل انطباق‌اند (گزاره ۲۳.۳). ■

نتیجه ۲. اگر l خطی دلخواه و P نقطه‌ای ناواقع بر l باشد، دست کم یک خط مانند m وجود دارد که از P می‌گذرد و با l موازی است. (شکل ۳.۴)

برهان:

یک خط t وجود دارد که از P می‌گذرد و بر l عمود است، و نیز یک خط یکتای m گذرنده از P و عمود بر t وجود دارد (گزاره ۱۶.۳). چون l و m هر دو بر t عمودند، مطابق نتیجه ۱، $l \| m$. (این ترسیم کراراً مورد استفاده قرار خواهد گرفت.) ■

تکرار می‌کنیم، همواره یک خط m گذرنده از P و موازی با l وجود دارد ـــ این حکم در هندسه نتاری ثابت شده است. ولی نمی‌دانیم که m یکتاست. با اینکه اصل توازی هیلبرت می‌گوید که m در حقیقت یکتاست، ما آن اصل را مسلم نمی‌گیریم. باید ذهن خود را برای این امکان عجیب آماده سازیم که شاید خطوط دیگری هم وجود داشته باشند که از P به موازات l رسم شوند.

هشدار. شما عادت کرده‌اید که در هندسه اقلیدسی عکس قضیه ۱.۴ را به کار برید که می‌گوید: «هرگاه دو خط موازی باشند، دو زاویه متبادل درونی که از تقاطع آنها با موربی پدید می‌آیند با هم قابل انطباق‌اند». ما این عکس را ثابت نکرده‌ایم، بنابراین از آن استفاده نکنید! (معلوم خواهد شد که این قضیه عکس با اصل توازی منطقاً هم‌ارز است ـــ تمرین ۵.)

قضیه زاویه بیرونی مثلث

پیش از آنکه به فهرست کردن قضایای خود ادامه دهیم، ابتدا باید تعریف دیگری بیاوریم: در هر مثلث زاویه‌ای که مکمل یکی از زاویه‌های آن است زاویه بیرونی مثلث نامیده می‌شود. دو زاویه از مثلث را که مجاور به این زاویه بیرونی نیستند زاویه درونی غیرمجاور به آن می‌گویند. قضیه زیر، نتیجهٔ قضیه ۱.۴ است.

قضیه۲.۴ (قضیه زاویه بیرونی). زاویه بیرونی در یک مثلث از هر یک از زاویه‌های درونی غیرمجاور خود بزرگتر است (شکل ۴.۴).

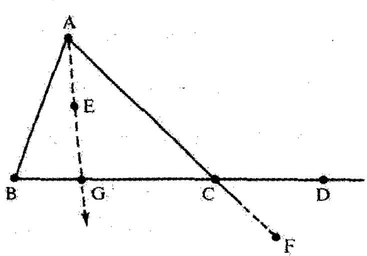
می‌خواهیم ثابت کنیم $\measuredangle ACD$ هم بزرگتر از $\measuredangle B$ است و هم بزرگتر از $\measuredangle A$.

برهان:

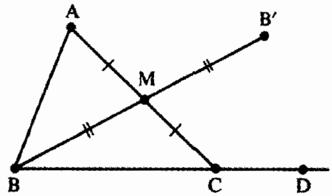
زاویه درونی غیرمجاور $\measuredangle BAC$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BAC$، آنگاه $\overleftrightarrow{AB}$ با $\overleftrightarrow{CD}$ موازی است (قضیه ۱.۴)، که متناقض با فرض ماست که این خطوط یکدیگر را در B می‌برند. فرض می‌کنیم که زاویه داخلی $\measuredangle BAC$ بزرگتر از $\measuredangle ACD$ باشد (فرض برهان خلف). پس نیم‌خطی مانند $\overrightarrow{AE}$ میان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وجود دارد چنان‌که $\measuredangle CAE \cong \measuredangle ACD$ (بنابر تعریف). این نیم‌خط $\overrightarrow{AE}$ ضلع BC را در نقطه‌ای چون G می‌برد (قضیه قطعه‌بَر، فصل ۳). ولی بنابر قضیه ۱.۴، خطوط $\overleftrightarrow{AE}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ موازی‌اند. بنابراین $\measuredangle BAC$ نمی‌تواند بزرگتر از $\measuredangle ACD$ باشد (حکم برهان خلف). همچنین چون $\measuredangle BAC$ با $\measuredangle ACD$ قابل انطباق نیست، پس $\measuredangle BAC$ باید کوچکتر از $\measuredangle ACD$ باشد (گزاره ۲۱.۳ (الف)).

برای زاویه غیرمجاور $\measuredangle ABC$، از همان برهان برای زاویه بیرونی $\measuredangle BCF$، که بنابر قضیه زاویه متقابل به‌رأس با $\measuredangle ACD$ قابل انطباق است، استفاده کنید (گزاره ۱۵.۳ (الف)). ■

قضیه زاویه بیرونی در آنچه بعداً خواهد آمد نقش بسیار مهمی دارد. این قضیه، شانزدهمین



شکل ۴.۴

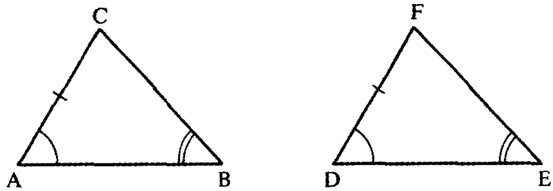


شکل ۵.۴

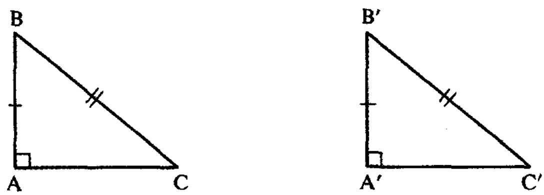
گزاره از اصول اقلیدس بوده است. نقصی که برهان اقلیدس داشته این است که از استدلال از روی نمودار گرفته شده است. او خط $\overleftrightarrow{BM}$ را که B را به وسط AC وصل می‌کند در نظر می‌گیرد و نقطه B' را چنان اختیار می‌کند که $B * M * B'$ و $BM \cong MB'$ (بنداشت ق-۱). سپس از روی نمودار می‌پذیرد که B' درون $\sphericalangle ACD$ قرار دارد (شکل ۵.۴). چون $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B'CA$، (ض‌زض)، اقلیدس به‌درستی نتیجه می‌گیرد که $\sphericalangle ACD > \sphericalangle A$.

ولی، این نقص برهان اقلیدس ممکن است با ابزاری که ما فراهم آورده‌ایم به‌آسانی برطرف شود. یعنی، چون پاره‌خط BB' ضلع AC را در M می‌برد، B و B' در دو طرف $\overleftrightarrow{AC}$ هستند (بنابر تعریف). چون BD خط $\overleftrightarrow{AC}$ را در C می‌برد، B و D هم در دو طرف $\overleftrightarrow{AC}$ قرار دارند. بنابراین، B' و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ واقع می‌شوند (بنداشت م-۴). بعد، B' و M در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ هستند، زیرا پاره‌خط MB' شامل نقطه B، محل برخورد $\overleftrightarrow{MB'}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ نیست (بنابر رسم B' و بنداشتهای م-۱ و م-۳). همچنین A و M در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ هستند زیرا پاره‌خط AM شامل نقطه C، محل برخورد $\overleftrightarrow{AM}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ نیست (بنابر تعریف نقطه وسط و بنداشت م-۳). لذا، باز بنداشت جداسازی م-۴ تضمین می‌کند که A و B' در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ باشند. بنابر تعریف «درون» (فصل ۳، پیش از گزاره ۱۷.۳)، پس نشان داده‌ایم که B' درون $\sphericalangle ACD$ قرار دارد.

توضیح درباره هندسه بیضوی. شکل ۲۴.۳ مثلثی را برکره با یک زاویه برونی و یک زاویه درونی غیرمجاور نشان می‌دهد که هر دو قائمه هستند. لذا قضیه زاویه بیرونی در اینجا صادق نیست. برهان ما برای آن بر اساس قضیه زاویه متبادل درونی طرح شده بود که در هندسه بیضوی نمی‌تواند برقرار باشد زیرا خطوط موازی وجود ندارند. برهان ما برای قضیه ۱.۴ در هندسه بیضوی فرو می‌ریزد، زیرا بنداشت م-۴، که حکم می‌کند یک خط صفحه را به دو طرف جدا می‌کند، صادق نیست. در آن برهان دیدیم که E و D از هم متمایز بودند زیرا در دو طرف خط t قرار داشتند. یا با این دید که در هندسه کروی یک دایره عظیمه کره را به دو نیمکره جدا می‌کند، اگر E و D متمایز باشند تناقضی وجود ندارد زیرا دوایر عظیمه در دو نقطه متقاطر یکدیگر را می‌برند.



شکل ۶.۴



شکل ۷.۴

برهان اقلیدس برای قضیه ۲.۴ در کره فرو می‌ریزد زیرا در آنجا «خطوط» دایره‌ای هستند و اگر پاره‌خط BM به‌قدر کافی دراز باشد، نقطه قرینه B' ممکن است بر خودش قرار گیرد (مثلاً، اگر BM یک نیم‌دایره باشد $\mathrm{B}' = \mathrm{B}$).

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه زاویه بیرونی (و قضایای پیشین)، اکنون می‌توانید به‌عنوان تمرین گزاره‌های آشنای زیر را ثابت کنید.

گزاره ۱.۴ (ملاک قابلیت انطباق ض‌زز). هرگاه $\mathrm{AC} \cong \mathrm{DF}$ و $\sphericalangle \mathrm{A} \cong \sphericalangle \mathrm{D}$ و $\sphericalangle \mathrm{B} \cong \sphericalangle \mathrm{E}$، آنگاه $\Delta\mathrm{ABC} \cong \Delta\mathrm{DEF}$ (شکل ۶.۴).

گزاره ۲.۴ دو مثلث قائم‌الزاویه با هم قابل انطباق‌اند اگر وتر و یک ضلع از یکی به‌ترتیب با وتر و یک ضلع از دیگری قابل انطباق باشد (شکل ۷.۴).

گزاره ۳.۴ (نقاط وسط). هر پاره‌خط فقط یک نقطه وسط دارد.

گزاره ۴.۴ (عمودمنصفها و نیمسازها). (الف) هر زاویه فقط یک نیمساز دارد، (ب) هر پاره‌خط فقط یک عمودمنصف دارد.

گزاره ۵.۴ در هر مثلث $\Delta\mathrm{ABC}$ بزرگترین زاویه روبه‌روی بزرگترین ضلع است و بزرگترین ضلع روبه‌روی بزرگترین زاویه، یعنی $\mathrm{AB} > \mathrm{BC}$ اگر و تنها اگر $\sphericalangle \mathrm{C} > \sphericalangle \mathrm{A}$.

گزاره ۶.۴ $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ داده شده‌اند. هرگاه $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$، آنگاه $\sphericalangle B < \sphericalangle B'$ اگر و تنها اگر $AC < A'C'$.

اندازه زاویه و پاره‌خط

تا اینجا مطالب هندسی خود را چنان انتخاب کرده بودیم که استفاده از اعدادی که اندازه زاویه و پاره‌خط را می‌دهند مورد نیاز نباشند ــ منظور ما از این کار حفظ «روح» هندسه اقلیدسی بود. ولی از این به بعد تا این اندازه به خود فشار نمی‌آوریم. قضیه بعد (قضیه ۳.۴) مدعی امکان اندازه‌گیری است و ویژگیهای آن را برمی‌شمارد. اثبات آن مستلزم استفاده از بنداشت پیوستگی برای نخستین بار است (برای رعایت سطح مقدماتی این کتاب، علاقه‌مندان را به خواندن کتاب بورسوک‌ـاسمیلیو، ۱۹۶۰، فصل ۳، بخشهای ۹ و ۱۰، ارجاع می‌دهیم). این قضیه در بعضی از کتابهای معمولی هندسه، به‌عنوان بنداشت گرفته شده است (اصول مربوط به خط‌کش و نقاله، موییز، ۱۹۹۰). قرارداد آشنای $(\sphericalangle A)^\circ$ برای تعداد درجات $\sphericalangle A$ به‌کار برده خواهد شد و $\overline{AB}$ برای اندازه درازای پاره‌خط AB (نسبت به واحد اندازه‌گیری دلخواه).

قضیه ۳.۴ (الف) به هر زاویه تنها به یک طریق می‌توان اندازه‌ای را برحسب درجه تخصیص داد که در شرایط زیر صدق کند (شکل ۸.۴):

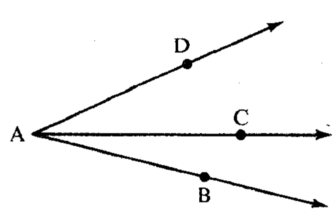
(۰) $(\sphericalangle A)^\circ$ عددی است حقیقی به‌قسمی‌که $0^\circ < (\sphericalangle A)^\circ < 180^\circ$.

(۱) $(\sphericalangle A)^\circ = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $\sphericalangle A$ قائمه باشد.

(۲) $(\sphericalangle A)^\circ = (\sphericalangle B)^\circ$ اگر و تنها اگر $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$.

(۳) اگر $\overrightarrow{AC}$ در درون $\sphericalangle DAB$ باشد آنگاه $(\sphericalangle DAB)^\circ = (\sphericalangle DAC)^\circ + (\sphericalangle CAB)^\circ$.

(۴) به‌ازای هر عدد حقیقی x بین ۰ و ۱۸۰، یک زاویه $\sphericalangle A$ وجود دارد به‌قسمی‌که $(\sphericalangle A)^\circ = x^\circ$.



شکل ۸.۴

(۵) اگر $\measuredangle B$ مکمل $\measuredangle A$ باشد، آنگاه $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = ۱۸۰^\circ$.

(۶) $(\measuredangle A)^\circ > (\measuredangle B)^\circ$ اگر و تنها اگر $\measuredangle A > \measuredangle B$.

(ب) پاره‌خط OI به‌نام پاره‌خط واحد داده شده است. برای تخصیص یک طول $\overline{AB}$ به هر پاره‌خط AB تنها یک راه وجود دارد تا ویژگیهای زیر برقرار باشند:

(۷) $\overline{AB}$ عددی حقیقی مثبت باشد و $\overline{OI} = ۱$.

(۸) $\overline{AB} = \overline{CD}$ اگر و تنها اگر $AB \cong CD$.

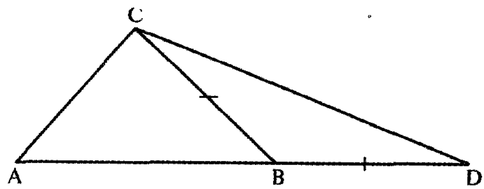
(۹) $A * B * C$ اگر و تنها اگر $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

(۱۰) $\overline{AB} < \overline{CD}$ اگر و تنها اگر $AB < CD$.

(۱۱) به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت x، پاره‌خطی چون AB وجود دارد چنان‌که $\overline{AB} = x$.

توضیح. برای اینکه شما را سردرگم نکنیم، روشی را برای تخصیص طولها ذکر می‌کنیم. با یک پاره‌خط OI به‌طول واحد کار را آغاز می‌کنیم. پس هر پاره‌خطی که از جداکردن n تا OI پشت سر هم به‌دست آید طولش برابر n خواهد بود. به‌موجب بنداشت ارشمیدس، هر پاره‌خط دیگر AB، انتهایش B، بین دو نقطه $B_{n-۱}$ و B_n قرار می‌گیرد به‌طوری که $\overline{AB_{n-۱}} = n - ۱$ و $\overline{AB}_n = n$. در این صورت طول AB، به‌موجب شرط (۹) از قضیه ۳.۴، با $\overline{AB_{n-۱}} + \overline{B_{n-۱}B}$ برابر خواهد شد، لذا می‌توانیم فرض کنیم $n = ۱$ و $B_{n-۱} = A$. اگر B در $B_{۱/۲}$ وسط پاره‌خط $AB_۱$ قرارگیرد، قرار می‌دهیم $\overline{AB_{۱/۲}} = ۱/۲$؛ در غیر این‌صورت B یا در $B_{۱/۲}$ یا در $B_{۱/۲}B_۱$، قرار می‌گیرد که فرض می‌کنیم در $AB_{۱/۲}$ باشد . اگر B در $B_{۱/۴}$ وسط پاره‌خط $AB_{۱/۲}$ واقع شود، قرار می‌دهیم $\overline{AB_{۱/۲}} = ۱/۴$ ؛ در غیر این صورت B، مثلاً، در $AB_{۱/۴}$ قرار می‌گیرد و این فرایند ادامه می‌یابد. سرانجام B یا به‌صورت وسط پاره‌خطی که طولش تعیین شده است به‌دست می‌آید، که در این حالت $\overline{AB}$ با یک عدد گویای دوتایی $a/۲^n$ معین خواهد شد؛ یا این فرایند بی‌نهایت ادامه می‌یابد که در آن حالت $\overline{AB}$ برابر حد یک دنبال نامتناهی از اعداد گویای دوتایی می‌شود، یعنی $\overline{AB}$ با یک عدد اعشاری نامتناهی در مبنای ۲ معین خواهد شد.

اگر فقط بخواهیم جمع را برای رده‌های قابلیت انطباق پاره‌خطها تعیین و سپس نابرابری مثلثی را ثابت کنیم، بنداشتهای پیوستگی لازم نیستند (نتیجه ۲، از قضیه ۳.۴، برای تعریف این عمل ر. ک. به بورسوک و اسمیلیو ۱۹۶۰، صص ۱۰۳ تا ۱۰۸). نیاز به اندازه‌گیری زوایا و پاره‌خطها با اعداد حقیقی، برای اثبات قضیه ۴.۴، تمرین اصلی ۸، و قضیه تصویر موازی است و برای چنین اندازه‌گیریهایی بنداشت ارشمیدس لازم است. ولی قسمتهای ۴ و ۱۱ از قضیه ۳.۴، براهینی که برای آنها بنداشت ددکیند لازم است، در براهین این کتاب هرگز



شکل ۹.۴

به کار برده نخواهد شد. پیوست ب را برای ساختن مختصات بدون بنداشتهای پیوستگی ببینید.

با استفاده از نماد درجه، $A\measuredangle$ را حاده گویند هرگاه $(\measuredangle A)^\circ < 90^\circ$، و منفرجه گویند هرگاه $(\measuredangle A)^\circ > 90^\circ$. از ترکیب قضایای ۲.۴ و ۳.۴، نتیجه زیر که برای اثبات قضیه ساکری-لژاندر اساسی است، به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱. مجموع اندازه‌های هر دو زاویه از مثلثی کمتر از 180° است.

در تنها موردی که مستقیماً از اندازه‌گیری پاره‌خط استفاده می‌کنیم، اثبات نتیجه بعدی است که به «نابرابری مثلثی» معروف است.

نتیجه ۲ (نابرابری مثلثی). اگر A، B و C سه نقطه ناواقع بر یک خط باشند آنگاه $\overline{AC} < \overline{AB}+\overline{BC}$.

برهان:

(۱) فقط یک نقطه مانند D وجود دارد چنان‌که $A * B * D$ و $BC \cong BD$ (بنداشت ق-۱ که برای نیم‌خط متقابل به $\overrightarrow{BA}$ به کار برده شده است) (شکل ۹.۴).

(۲) پس $\measuredangle BDC \cong \measuredangle BCD$ (گزاره ۱۰.۳: قابلیت انطباق زاویه‌های مجاور به قاعده در مثلث متساوی‌الساقین).

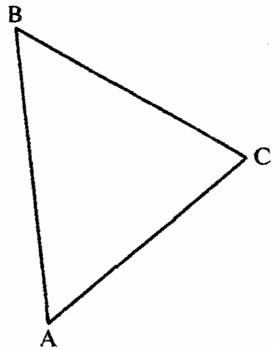
(۳) $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$ (قضیه ۳.۴ (۹)) و $\overline{BD} = \overline{BC}$ (مرحله (۱) و قضیه ۳.۴ (۸))؛ از قرار دادن $\overline{BC}$ به‌جای $\overline{BD}$ نتیجه می‌شود $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

(۴) $\overrightarrow{CB}$ بین $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CD}$ واقع است (گزاره ۷.۳)، بنابراین $\measuredangle BCD < \measuredangle ACD$ (بنابر تعریف).

(۵) $\measuredangle ADC < \measuredangle ACD$ (مراحل ۲ و ۴، گزاره ۲۱.۳ (ج)).

(۶) $AD > AC$ (گزاره ۵.۴).

(۷) بنابراین $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$ (قضیه ۳.۴ (۱۰)؛ مراحل ۳ و ۶). ■



شکل ۱۰.۴ $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ \leq ۱۸۰^\circ$.

قضیه ساکری-لژاندر

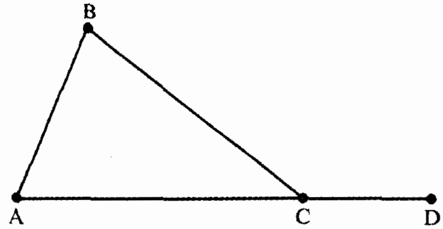
برهان قضیه بسیار مهم زیر نیازمند یک بنداشت پیوستگی (بنداشت ارشمیدس) است.

قضیه۴.۴ (ساکری -لژاندر). مجموع اندازه‌های سه زاویه از هر مثلث، کوچکتر یا مساوی ۱۸۰° است.

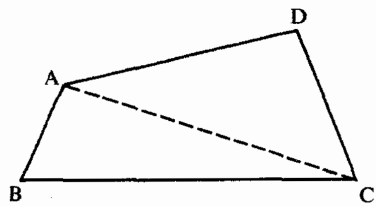
این قضیه ممکن است موجب تعجب شما شود، زیرا شما به مفهوم یک مجموع دقیقاً مساوی با ۱۸۰° عادت کرده‌اید. اما این دقت را در هندسه نتاری نمی‌توان ثابت کرد! ساکری در راه اثبات آن کوشید ولی بالاترین چیزی که توانست ثابت کند «کوچکتر یا مساوی» بود. در ۱۹۰۰، ماکس دن ثابت کرد که راهی برای اثبات این قضیه بدون استفاده از بنداشت ارشمیدس وجود ندارد.[۱]
ایده این اثبات چنین است:

برعکس فرض می‌کنیم، مجموع زوایای ΔABC بزرگتر از ۱۸۰°، مثلاً $۱۸۰^\circ + p^\circ$ باشد، که p عددی است مثبت. می‌توان (به کمک شگردی که در تمرین ۱۵ به آن دست خواهد یافت) به‌جای ΔABC مثلث دیگری گذاشت که مجموع زاویه‌هایش همان مجموع زاویه‌های ΔABC باشد ولی یکی از زوایای آن حداکثر نصف تعداد درجه‌های $(\measuredangle A)^\circ$ را داشته باشد. با تکرار این شگرد، مثلث دیگری به‌دست می‌آوریم که مجموع زاویه‌هایش همان $۱۸۰^\circ + p^\circ$ باشد ولی یک زاویه‌اش حداکثر ۱/۴ تعداد درجه‌های $(\measuredangle A)^\circ$ را داشته باشد. ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی تضمین می‌کند که اگر این عمل را به دفعات زیاد تکرار کنیم سرانجام مثلثی به‌دست می‌آوریم که مجموع زاویه‌هایش $۱۸۰^\circ + p^\circ$ ولی یک زاویه‌اش حداکثر دارای p° است. مجموع اندازه‌های

۱. رجوع کنید به استدلال تجربی در پروژه ۱. ارزش واقعی بنداشت ارشمیدس را اول بار در ۱۸۸۰ پاش و اشتولتس متوجه شدند. ورونسه و لوی‌چیوتیا اولین هندسه ناارشمیدسی را بسط دادند.



شکل ۱۱.۴ $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ \leq (\measuredangle BCD)^\circ$



شکل ۱۲.۴

درجه‌های دو زاویه دیگر بزرگتر یا مساوی ۱۸۰° خواهد شد که مخالف نتیجه ۱ قضیه ۳.۴ است. پس قضیه ثابت شده است.

نتیجه زیر از قضیه ساکری‌ـلژاندر را به‌عنوان تمرین ثابت کنید.

نتیجه ۱. در هر مثلث مجموع اندازه‌های دو زاویه برحسب درجه، کوچکتر یا مساوی اندازه زاویه بیرونی غیرمجاور به آنهاست (شکل ۱۱.۴).

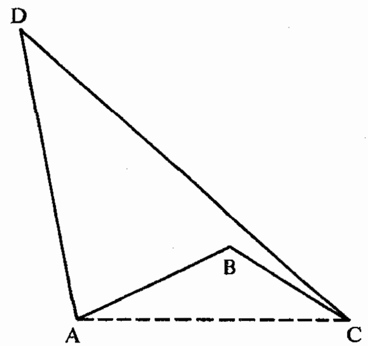
طبیعی است که می‌توان قضیه ساکری‌ـلژاندر را برای چندضلعی‌هایی جز مثلث نیز تعمیم داد. مثلاً ثابت می‌کنیم که مجموع زوایای یک $\square ABCD$ حداکثر مساوی با ۳۶۰° است. $\square ABCD$ را با قطر AC به دو مثلث ΔABC و ΔADC تقسیم می‌کنیم (شکل ۱۲.۴). بنابر قضیه ساکری‌ـلژاندر،

$$(\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle ACB)^\circ \leq ۱۸۰^\circ$$

و

$$(\measuredangle D)^\circ + (\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ \leq ۱۸۰^\circ.$$

از قضیه ۳.۴(۳) رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند



شکل ۱۳.۴

$$(\sphericalangle BAC)^\circ + (\sphericalangle DAC)^\circ = (\sphericalangle BAD)^\circ$$

و

$$(\sphericalangle ACB)^\circ + (\sphericalangle ACD)^\circ = (\sphericalangle BCD)^\circ$$

با استفاده از این روابط و جمع دو نابرابری فوق، نابرابری مطلوب به‌دست می‌آید

$$(\sphericalangle B)^\circ + (\sphericalangle D)^\circ + (\sphericalangle BAD)^\circ + (\sphericalangle BCD)^\circ \leq ۳۶۰^\circ$$

متأسفانه در این برهان ساده نقصی وجود دارد! برای به‌دست آوردن روابط فوق ما با توجه به نمودار (شکل ۱۲.۴) فرض کردیم که C در درون $\sphericalangle BAD$ و A در درون $\sphericalangle BCD$ قرار دارد. ولی اگر چهارضلعی ما مثل (شکل ۱۳.۴) بود چطور؟ در این حالت معادله‌ها صادق نیستند. برای اینکه چنین حالتی پیش نیاید، باید یک فرض کنیم: باید فرض کنیم که چهارضلعی «کوژ» است.

تعریف. $\square ABCD$ را کوژ گویند هرگاه دو ضلع روبه‌روی آن AB و CD چنان باشند که CD در یکی از دونیم‌صفحه‌ای که $\overleftrightarrow{AB}$ مرز آن است و AB در یکی از دو نیم‌صفحه‌ای که $\overleftrightarrow{CD}$ مرز آن است قرار گرفته باشد.[۱]

۱. می‌توان ثابت کرد که این شرط برای دو ضلع روبه‌روی دیگر، AD و BC، نیز صادق است؛ ر.ک. تمرین ۲۳ همین فصل. استعمال واژه «کوژ» در این تعریف با استعمال آن در تمرین ۱۹، فصل ۳ مطابقت ندارد. بدیهی است که یک چهارضلعی کوژ، همان‌گونه که در آن تمرین تعریف شده یک مجموعه کوژ نیست. ولی در هر حال می‌توانیم درون یک چهارضلعی کوژ $\square ABCD$ را چنین تعریف کنیم: هر ضلع $\square ABCD$ نیم‌صفحه‌ای را مشخص می‌کند که شامل ضلع روبه‌رو است. درون $\square ABCD$ بنابر تعریف، اشتراک چهار نیم‌صفحه‌ای است که بدین‌گونه مشخص شده باشند. حال شما می‌توانید ثابت کنید که چهارضلعی کوژ مجموعه‌ای است کوژ (که یک بخش از تمرین ۲۵ است).

درستی فرضی که در بالا کردیم اکنون از شروع با یک چهارضلعی کوژ ثابت می‌شود. پس نتیجه زیر را ثابت کرده‌ایم:

نتیجه ۲. مجموع زوایای هر چهارضلعی کوژ حداکثر برابر با ۳۶۰° است.

تبصره . قضیه ساکری‌ـلژاندر در هندسه بیضوی صادق نیست (شکل ۲۴.۳). در واقع می‌توان ثابت کرد که در هندسه بیضوی مجموع زاویه‌های یک مثلث همیشه از ۱۸۰° بزرگتر است (ر. ک. به کِی، ۱۹۶۹). چون یک مثلث می‌تواند دو یا سه زاویه قائمه داشته باشد، وتر که به‌عنوان ضلع روبه‌رو به زاویه قائمه تعریف می‌شود، لزومی ندارد یکتا باشد، و ساق که به‌عنوان یک ضلع زاویه قائمه تعریف می‌شود، لزومی ندارد که وجود داشته باشد (و اگر ضلع روبه‌رو به زاویه منفرجه ساق باشد، می‌تواند بزرگتر از وتر باشد).

هم‌ارزی اصلهای توازی

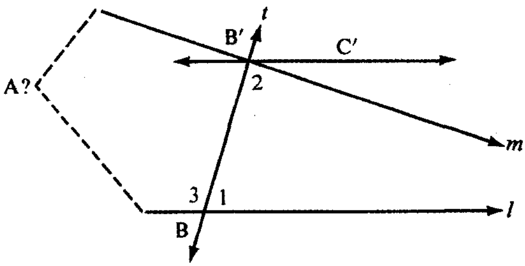
اکنون به اثبات هم‌ارزی اصل پنجم اقلیدس و اصل توازی هیلبرت می‌پردازیم. ولی، توجه داشته باشید که ما نمی‌خواهیم یکی از آنها یا هر دو آنها را ثابت کنیم. ما تنها ثابت خواهیم کرد که می‌توانیم یکی از آنها را ثابت کنیم، اگر ابتدا دیگری را پذیرفته باشیم. ابتدا اصل پنجم اقلیدس را می‌آوریم (همه اصطلاحات این حکم اکنون به دقت تعریف شده‌اند).

اصل پنجم اقلیدس. اگر دو خط با موربی چنان قطع شوند که مجموع اندازه‌های درجه‌های دو زاویه درونی واقع در یک طرف مورب کمتر از ۱۸۰° باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف مورب می‌برند.

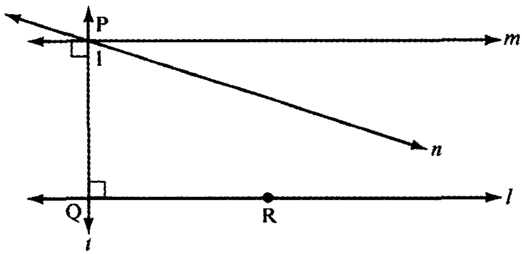
قضیه ۵.۴ اصل پنجم اقلیدس $\Leftrightarrow$ اصل توازی هیلبرت.

برهان:

ابتدا اصل هیلبرت را می‌پذیریم. وضعیت اصل پنجم اقلیدس در شکل ۱۴.۴ نشان داده شده است. $(\sphericalangle ۱)^\circ + (\sphericalangle ۲)^\circ < ۱۸۰^\circ$ (فرض) و $(\sphericalangle ۱)^\circ + (\sphericalangle ۳)^\circ = ۱۸۰^\circ$ (زاویه‌های مکمل قضیه ۳.۴(۵)). بنابراین $(\sphericalangle ۳)^\circ = ۱۸۰^\circ - (\sphericalangle ۱)^\circ > (\sphericalangle ۲)^\circ$. نیم‌خط یکتایی مانند $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\sphericalangle ۳$ و $\sphericalangle \mathrm{C'B'B}$ دو زاویه متبادل درونی قابل انطباق‌اند (بنداشت ق‌ـ۴). بنابر قضیه ۱.۴، خط $\overleftrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ با l موازی است. چون $m \neq \overleftrightarrow{\mathrm{B'C'}}$، خط m خط l را می‌برد (اصل هیلبرت). برای اتمام برهان باید ثابت کنیم که خط m خط l را در همان طرف t می‌برد که $\mathrm{C'}$ در آن واقع است. برعکس، فرض می‌کنیم این دو خط یکدیگر را در نقطه A در



شکل ۱۴.۴



شکل ۱۵.۴

طرف دیگر t ببرند. در این صورت ۲ $\measuredangle$ زاویه بیرونی برای $\Delta ABB'$ خواهد بود، در حالی‌که از زاویه درونی غیرمجاور ۳ $\measuredangle$ کوچکتر است و همین نقیض قضیه ۲.۴، اصل پنجم اقلیدس را ثابت می‌کند (فرض برهان خلف).

برعکس، اصل پنجم اقلیدس را می‌پذیریم و وضعیت اصل هیلبرت را با شکل ۱۵.۴ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم t عمود مرسوم از P بر l، و m عمود بر t از P باشد. می‌دانیم که $m||l$ (نتیجه ۱ از قضیه ۱.۴). فرض می‌کنیم که n خط دیگری گذرنده از P باشد. باید نشان دهیم که خط n خط l را می‌برد. فرض می‌کنیم ۱ $\measuredangle$ زاویه حاده‌ای باشد که n با t می‌سازد (این زاویه وجود دارد زیرا $n \neq m$). بنابراین $(\measuredangle ۱)^\circ + (\measuredangle PQR)^\circ < ۹۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ$. لذا فرض اصل پنجم برقرار است. لذا n خط l را می‌برد و بدین ترتیب اصل هیلبرت ثابت می‌شود. ■

چون اصل توازی هیلبرت و اصل پنجم اقلیدس در هندسه نتاری منطقاً هم‌ارزند، قضیه ۵.۴ به ما اجازه می‌دهد که آنها را به‌جای یکدیگر به‌کار بریم. به‌عنوان تمرین، ثابت کنید که احکام زیر هم منطقاً با اصل توازی هم‌ارزند.[۱]

۱. ترایایی توازی نیز منطقاً با اصل توازی هم‌ارز است.

گزاره ۷.۴ اصل توازی هیلبرت $\Leftrightarrow$ اگر خطی یکی از دو خط موازی را ببرد، دیگری را هم می‌برد.

گزاره ۸.۴ اصل توازی هیلبرت $\Leftrightarrow$ عکس قضیه ۱.۴ (زاویه‌های متبادل درونی).

گزاره ۹.۴ اصل توازی هیلبرت $\Leftrightarrow$ اگر مورب t دو خط l و m را ببرد، $m||l$، و $t \perp l$، آنگاه $t \perp m$.

گزاره ۱۰.۴ اصل توازی هیلبرت $\Leftrightarrow$ هرگاه $l||k$، $m \perp k$، و $n \perp l$، آنگاه یا $m||n$ یا $m = n$.

گزاره بعد حکم دیگری‌است که با اصل توازی هیلبرت هم‌ارز است، ولی فعلاً تنها می‌توانیم استلزام را در یک جهت ثابت کنیم (استلزام در جهت دیگر، در فصل ۵ ثابت خواهد شد؛ تمرین ۱۴).

گزاره ۱۱.۴ اصل توازی هیلبرت $\Leftrightarrow$ مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰° است.

مجموع زوایای مثلث

مجموع زوایای ΔABC را با $(\sphericalangle A)^\circ + (\sphericalangle B)^\circ + (\sphericalangle C)^\circ$ تعریف می‌کنیم، که (بنابر قضیه ساکری-لژاندر) تعداد درجات معین کوچکتر یا مساوی ۱۸۰° است. ۱۸۰° منهای این مجموع را کاستی مثلث، δABC، می‌نامیم. در هندسه اقلیدسی به مثلثهای بی‌کاستی عادت کرده‌ایم، یعنی عادت کرده‌ایم این کاستی را صفر بگیریم (گزاره ۱۱.۴).

منظور اصلی ما در این بخش این است که نشان دهیم هرگاه یک مثلث کاستی‌دار وجود داشته باشد، همه مثلثها کاستی‌دار هستند. یا اگر به‌صورت عکس نقیص بگیریم، هرگاه مجموع زوایا در یک مثلث ۱۸۰° باشد، در همه مثلثها ۱۸۰° است. ما حکم نمی‌کنیم که چنین مثلثی وجود دارد، و خلاف آن را نیز حکم نمی‌کنیم. ما فقط فرض وجود چنین مثلثی را بررسی می‌کنیم.

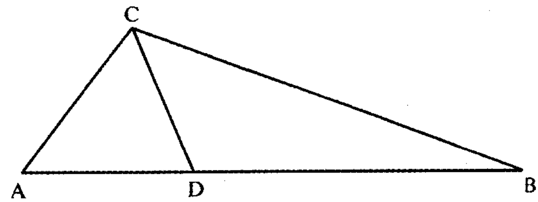
قضیه۶.۴ فرض می‌کنیم ΔABC مثلثی باشد دلخواه، و D نقطه‌ای بین A و B (شکل ۱۶.۴). در این صورت

$$\delta ABC = \delta ACD + \delta BCD \text{(مجموع کاستی)}$$

برهان:

چون $\overrightarrow{CD}$ درون $\sphericalangle ACB$ است (گزاره ۷.۳) پس $(\sphericalangle ACB)^\circ = (\sphericalangle ACD)^\circ + (\sphericalangle BCD)^\circ$ (بنابر قضیه ۳.۴(۳)). چون $\sphericalangle ADC$ و $\sphericalangle BDC$ دو زاویه مکمل هستند، پس

$$(\sphericalangle ADC)^\circ + (\sphericalangle BDC)^\circ = ۱۸۰^\circ$$



شکل ۱۶.۴

(بنابر قضیه ۳.۴(۵)). برای پیدا کردن مجموع کاستی کافی است که تعریف کاستی (180° منهای مجموع زوایا) برای هر سه مثلث مورد نظر را بنویسیم و مقادیر آنها را در معادلات فوق بگذاریم (تمرین ۱).

نتیجه. با همین فرض، مجموع زوایای ΔABC وقتی و فقط وقتی، مساوی 180° است که مجموع زوایای هر یک از ΔACD و ΔBCD مساوی 180° باشد.

برهان:

اگر ΔACD و ΔBCD هر دو دارای کاستی صفر باشند، آنگاه کاستی ΔABC مساوی صفر است (قضیه ۶.۴). برعکس، اگر ΔABC کاستی صفر داشته باشد، آنگاه بنابر قضیه ۶.۴، $\delta ACD + \delta BCD = 0$. ولی کاستی یک مثلث نمی‌تواند منفی باشد (قضیه ساکری-لژاندر). بنابراین هر یک از مثلثهای ΔACD و ΔBCD کاستی صفر دارد (مجموع دو عدد نامنفی وقتی مساوی صفر است که هر یک از آنها مساوی صفر باشد). ■

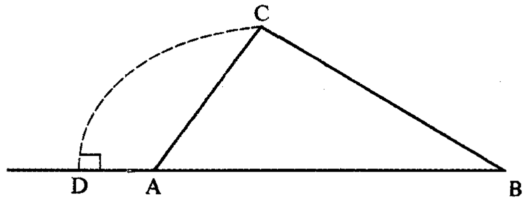
و دیگر آنکه، یادآور می‌شویم که بنابر تعریف، مستطیل چهارضلعی‌ای است با ۴ زاویه قائمه. بنابراین مجموع زوایای مستطیل 360° است. البته هنوز نمی‌دانیم که در هندسه نتاری مستطیل وجود دارد یا نه. (سعی کنید بدون استفاده از اصل توازی یا هر حکمی که با آن هم‌ارز است مستطیلی بسازید؛ تمرین ۱۹).

قضیه بعدی قضیه‌ای است که جویای آنیم. برهان آن در پنج مرحله داده خواهد شد.

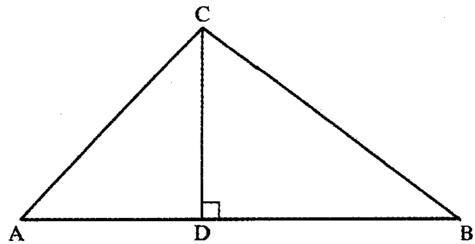
قضیه ۷.۴ هر گاه مثلثی وجود داشته باشد که مجموع زاویه‌هایش 180° باشد، آنگاه مستطیل وجود دارد. هرگاه مستطیلی وجود داشته باشد، آنگاه مجموع زاویه‌های هر مثلث مساوی با 180° است.

برهان:

(۱) مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که مجموع زاویه‌های آن 180° باشد.



شکل ۱۷.۴

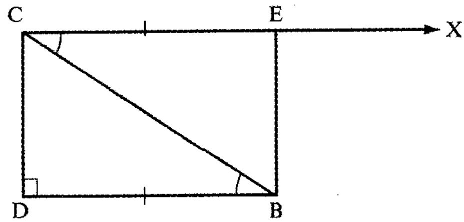


شکل ۱۸.۴

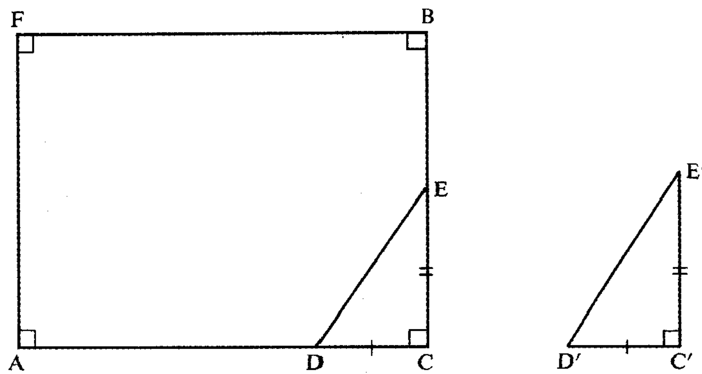
اگر ΔABC مثلث مفروض با کاستی صفر باشد (فرض). فرض می‌کنیم این مثلث قائم‌الزاویه نباشد، چون در این‌صورت مسئله حل شده است. پس دست کم دو تا از زاویه‌های آن، مثلاً $\measuredangle A$ و $\measuredangle B$ حاده‌اند، زیرا مجموع دو زاویه در هر مثلث باید کمتر از ۱۸۰° باشد (نتیجه قضیه ۳.۴). فرض می‌کنیم CD ارتفاع وارد از رأس C باشد (که بنابر گزاره ۱۶.۳ وجود دارد). ادعا می‌کنیم که D بین A و B واقع است. فرض می‌کنیم D بین A و B نباشد، مثلاً $D * A * B$ (شکل ۱۷.۴). پس زاویه درونی غیر مجاور $\measuredangle CDA$ بزرگتر از زاویه بیرونی $\measuredangle CAB$ می‌شود، که متناقض با قضیه ۲.۴ است. همچنین اگر $A * B * D$، باز به تناقض می‌رسیم. پس $A * D * B$ (بنداشت م-۳) (شکل ۱۸.۴). اکنون با توجه به نتیجه قضیه ۶.۴ نتیجه می‌گیریم که هر یک از مثلثهای قائم‌الزاویه ΔBDC و ΔADC کاستی صفر دارد.

(۲) از یک مثلث قائم‌الزاویه با کاستی صفر، یک مستطیل می‌سازیم.

فرض می‌کنیم ΔCDB مثلثی قائم‌الزاویه با کاستی صفر و $\measuredangle D$ قائمه باشد. بنابر بنداشت ق-۴ یک نیم‌خط یکتای $\overrightarrow{CX}$ در آن طرف ضلع $\overleftrightarrow{CB}$ که D در آن نیست وجود دارد به قسمی که $\measuredangle BCX \cong \measuredangle DBC$. بنابر بنداشت ق-۱، یک نقطه یکتا مانند E بر $\overrightarrow{CX}$ وجود دارد چنان‌که $CE \cong BD$ (شکل ۱۹.۴). پس $\Delta CDB \cong \Delta BEC$ (ض‌زض). بنابراین ΔBEC هم مثلثی است قائم‌الزاویه با کاستی صفر و زاویه قائمه در E. همچنین بنابر فرض $(\measuredangle DBC)^\circ + (\measuredangle BCD)^\circ = ۹۰^\circ$. لذا



شکل ۱۹.۴



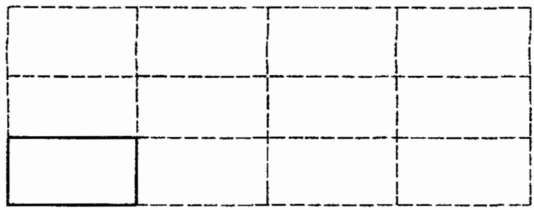
شکل ۲۰.۴

$(\measuredangle\text{DBC})^\circ + (\measuredangle\text{EBC})^\circ = ۹۰^\circ$ و $(\measuredangle\text{ECB})^\circ + (\measuredangle\text{BCD})^\circ = ۹۰^\circ$). به‌علاوه، B در درون $\measuredangle$ECD است، زیرا قضیه زاویه‌های متبادل درونی ایجاب می‌کند که $\overleftrightarrow{\text{CE}}||\overleftrightarrow{\text{DB}}$ و $\overleftrightarrow{\text{CD}}||\overleftrightarrow{\text{BE}}$ و C در درون $\measuredangle$ EBD است (به همان دلیل). بدین‌ترتیب، با استفاده از قضیه ۳.۴ (۳) برای نتیجه‌گیری $(\measuredangle\text{ECD})^\circ = ۹۰^\circ = (\measuredangle\text{EBD})^\circ$ استفاده کنیم. بدین ترتیب ثابت می‌شود که $\square$CDBE یک مستطیل است.

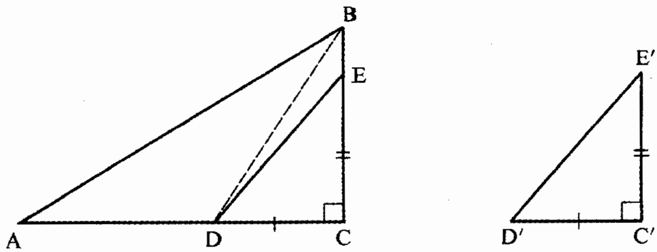
(۳) از یک مستطیل مستطیلهایی «به دلخواه بزرگ» می‌سازیم.

دقیقتر بگوییم، مثلث قائم‌الزاویه $\Delta\text{D}'\text{E}'\text{C}'$ داده شده است. مستطیل $\square$AFBC را چنان می‌سازیم که $\text{AC} > \text{D}'\text{C}'$ و $\text{BC} > \text{E}'\text{C}'$. این کار را می‌توانیم به سادگی با استفاده از بنداشت ارشمیدس انجام دهیم. نسخه‌هایی از مستطیل راکه داریم به دفعات کافی «پهلوی هم می‌گذاریم» تا مستطیل مطلوب به‌دست آید (شکلهای ۲۰.۴ و ۲۱.۴؛ شما می‌توانید این «پهلوی هم‌گذاری»ها را به‌عنوان تمرین انجام دهید).

(۴) ثابت می‌کنیم که همه مثلثهای قائم‌الزاویه کاستی صفر دارند.



شکل ۲۱.۴



شکل ۲۲.۴

این کار را با «نشاندن» مثلث قائم‌الزاویه دلخواه $\Delta D'C'E'$ در یک مستطیل، مانند مرحله ۳، سپس (با دوبار استفاده از نتیجه قضیه ۶.۴) با نشان دادن اینکه ΔACB، ΔDCB، و ΔDCE، هر یک کاستی صفر دارد، انجام می‌دهیم (شکل ۲۲.۴).

(۵) اگر هر مثلث قائم‌الزاویه کاستی صفر داشته باشد، آنگاه هر مثلث کاستی صفر خواهد داشت.

نظیر مرحله ۱، ارتفاعی رسم می‌کنیم تا مثلث غیرمشخص را به دو مثلث قائم‌الزاویه تجزیه کند (شکل ۱۸.۴) و از نتیجه قضیه ۶.۴ استفاده می‌کنیم. ■

مورخان قضیه ۷.۴ را به ساکری و لژاندر نسبت می‌دهند، ولی ما نام آنها را بر این قضیه نمی‌گذاریم تا این قضیه با قضیه ۴.۴ اشتباه نشود.

نتیجه. هرگاه یک مثلث با کاستی مثبت وجود داشته باشد، همه مثلثها کاستی مثبت دارند.

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) هرگاه دو مثلث یک کاستی داشته باشند، با هم قابل انطباق‌اند.

(۲) در هندسه نتاری، اصل چهارم اقلیدس یک قضیه است.

(۳) قضیه ۵.۴ نشان می‌دهد که اصل پنجم اقلیدس، قضیه‌ای در هندسه نتاری است.

(۴) قضیه ساکری-لژاندر می‌گوید مثلثهایی هستند که مجموع زاویه‌هاشان کمتر از 180° و مثلثهایی هستند که مجموع زاویه‌هاشان مساوی با 180° است.

(۵) قضیه زاویه متبادل درونی می‌گوید که هرگاه موربی دو خط موازی را ببرد، زاویه‌های متبادل درونی با هم قابل انطباق‌اند.

(۶) در هندسه نتاری ممکن نیست ثابت کنیم که چهارضلعی وجود دارد.

(۷) قضیه ساکری-لژاندر در هندسه اقلیدسی صحیح نیست زیرا در هندسه اقلیدسی مجموع زاویه‌های هر مثلث هرگز از 180° کمتر نیست.

(۸) بنابر تعریف «زاویه»، اندازه یک زاویه برحسب درجه نمی‌تواند مساوی 180° باشد.

(۹) مفهوم وقوع نیم‌خطی «بین» دو نیم‌خط، مفهومی است تعریف نشده.

(۱۰) در هندسه نتاری اثبات وجود خطوط موازی ناممکن است.

(۱۱) تعریف «زاویه درونی غیرمجاور» که در صفحه ۱۲۹ آمده است، کامل نیست، زیرا در آن از کلمه «مجاور» استفاده شده که هرگز تعریف نشده است.

(۱۲) زاویه بیرونی مثلث زاویه‌ای است که در درون مثلث نباشد.

(۱۳) در هندسه نتاری، ملاک ض‌ض‌ض برای قابلیت انطباق مثلثها، یک قضیه است.

(۱۴) قضیه زاویه‌های متبادل درونی، در حالت خاص، ایجاب می‌کند که هرگاه قاطعی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.

(۱۵) روش دیگر بیان قضیه ساکری-لژاندر این است که بگوییم کاستی یک مثلث نمی‌تواند منفی باشد.

(۱۶) ملاک زض‌ز برای قابلیت انطباق مثلثها، یکی از بنداشتهای هندسه نتاری است.

(۱۷) برهان قضیه ۷.۴ به بنداشت ارشمیدس وابسته است.

(۱۸) هرگاه ΔABC مثلثی غیرمشخص و C یکی از رأسهای آن باشد، عمود وارد از C بر $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AB}$ را در نقطه‌یی بین A و B می‌برد.

(۱۹) این حکم که هرگاه نقطه غیرمشخص P و خط نامشخص l داده شده باشند، حداکثر یک خط گذرنده از P وجود دارد که بر l عمود است، در هندسه نتاری یک قضیه است.

(۲۰) این حکم که زاویه‌های متقابل به رأس قابل انطباق‌اند، در هندسه نتاری یک قضیه است.

(۲۱) در برهان قضیه ۲.۴ (در باب زاویه‌های بیرونی)، قضیه ۱.۴ (در باب زاویه‌های متبادل درونی) به‌کار می‌آید.

(۲۲) شکافی را که در تلاش اقلیدس برای اثبات قضیه ۲.۴ وجود دارد می‌توان با استفاده از بنداشتهای میان‌بود که وضع کردیم، پُر کرد.

تمرین

تمرینهای زیر، تمرینهایی در هندسه نتاری هستند، مگر اینکه خلافش را ذکر کنیم. این بدان معنی است که در برهانهای خود مجازیم تنها آن قضایایی را که قبلاً داده شده‌اند (به انضمام قضایای حاصل از قضایای قبل) به کار بریم. اجازه نداریم از اصل توازی یا قضایای دیگر هندسه اقلیدسی که با آن مرتبط است استفاده کنیم.

۱. (الف) آخرین مرحله برهان قضیه ۶.۴ را تمام کنید.

(ب) ثابت کنید که مثلثهای قابل انطباق، یک کاستی دارند.

(ج) نتیجه قضیه ۷.۴ را ثابت کنید.

(د) نتیجه ۱ قضیه ۳.۴ را ثابت کنید.

۲. قضیه فیثاغورسی را (چنان‌که شما در تمرین ۱۱ (د) فصل ۶ نشان خواهید داد) نمی‌توان در هندسه نتاری ثابت کرد. بیان کنید چرا برهان اقلیدسی که شکل ۱۵.۱، فصل ۱، که به آن اشاره دارد، در هندسه نتاری صحیح نیست.

۳. عکس اصل پنجم اقلیدس را بیان کنید. این عکس را به‌عنوان قضیه‌ای در هندسه نتاری ثابت کنید.

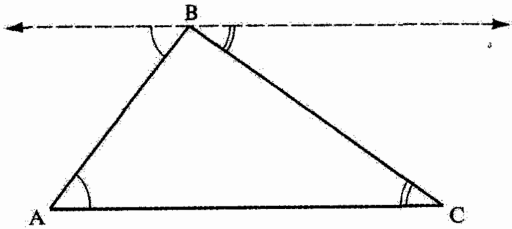
۴. گزاره ۷.۴ را ثابت کنید. نتیجه بگیرید که ترایایی توازی با اصل توازی هیلبرت هم‌ارز است.

۵. گزاره ۸.۴ را ثابت کنید. (راهنمایی: عکس قضیه ۱.۴ را بپذیرید. فرض کنید که m همان خط موازی l باشد که در برهان نتیجه ۲ از قضیه ۱.۴، از نقطه P رسم شده است و n خط دیگری موازی با l است که از P کشیده شده است. با استفاده از قابلیت انطباق زاویه‌های متبادل درونی، و یکتا بودن عمودها ثابت کنید $m = n$. سپس با قبول اصل توازی اقلیدس و استفاده از بنداشت ق-۴ و برهان خلف، عکس قضیه ۱.۴ را ثابت کنید.)

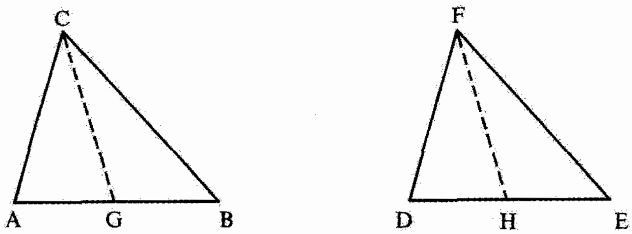
۶. گزاره ۹.۴ را ثابت کنید.

۷. گزاره ۱۰.۴ را ثابت کنید.

۸. گزاره ۱۱.۴ را ثابت کنید. (راهنمایی: شکل ۲۳.۴.)



شکل ۲۳.۴



شکل ۲۴.۴

۹. اگر آنچه هم اکنون می‌آوریم مدعی برهان ملاک قابلیت انطباق ض‌زز در هندسه نتاری باشد، نقص آن را پیدا کنید (شکل ۶.۴).

$AC \cong DF$ و $\measuredangle D \cong \measuredangle A$، $\measuredangle E \cong \measuredangle B$ داده شده‌اند. پس $\measuredangle F \cong \measuredangle C$، زیرا $(\measuredangle C)^\circ \cong ۱۸۰^\circ - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle B)^\circ = ۱۸۰^\circ - (\measuredangle D)^\circ - (\measuredangle E)^\circ = (\measuredangle F)^\circ$ (قضیه ۳.۴(۲)). پس بنابر ملاک زض‌ز (گزاره ۱۷.۳) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

۱۰. اینک برهان درستی ملاک ض‌زز را در اینجا می‌آوریم. درستی هر مرحله را توجیه کنید.

(۱) فرض می‌کنیم ضلع AB با ضلع DE قابل انطباق نباشد.

(۲) پس یا $AB < DE$ یا $DE < AB$.

(۳) هرگاه $DE < AB$، آنگاه نقطه‌ای مانند G بین A و B وجود دارد به‌قسمی‌که $AG \cong DE$ (شکل ۲۴.۴).

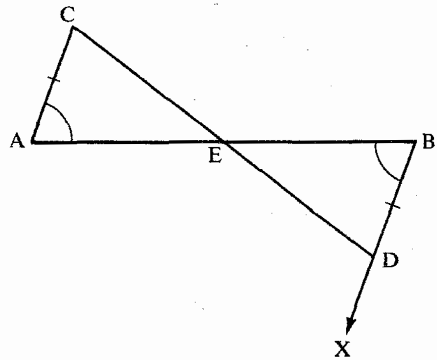
(۴) پس $\Delta CAG \cong \Delta FDE$.

(۵) لذا $\measuredangle AGC \cong \measuredangle E$.

(۶) از اینجا نتیجه می‌شود که $\measuredangle AGC \cong \measuredangle B$.

(۷) این مطلب متناقض با یکی از قضایاست (با کدام‌یک؟).

(۸) بنابراین DE کوچکتر از AB نیست.



شکل ۲۵.۴

(۹) با استدلالی مشابه که متضمن نقطه‌ای مانند H واقع بین E و D است، معلوم می‌شود که AB کوچکتر از DE نیست.

(۱۰) پس $AB \cong DE$.

(۱۱) بنابراین $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

۱۱. گزاره ۲.۴ را ثابت کنید. (راهنمایی: شکل ۷.۴، بر نیم‌خط متقابل با $\overrightarrow{AC}$ پاره‌خط AD را قابل انطباق با $A'C'$ جدا سازید. ابتدا ثابت کنید $\Delta DAB \cong \Delta C'A'B'$، سپس از مثلثهای متساوی‌الساقین و ملاک ض‌زز استفاده کنید تا به نتیجه برسید.)

۱۲. آنچه اینک می‌آوریم برهانی است بر اینکه AB نقطه وسطی دارد. درستی هر مرحله را توجیه کنید (شکل ۲۵.۴).

(۱) فرض می‌کنیم C نقطه‌ای ناواقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ باشد.

(۲) فقط یک نیم‌خط مانند $\overrightarrow{BX}$ در آن طرفی از خط $\overleftrightarrow{AB}$ که C در آن نیست وجود دارد به‌قسمی‌که $\measuredangle CAB \cong \measuredangle ABX$.

(۳) فقط یک نقطه مانند D بر $\overrightarrow{BX}$ وجود دارد چنان‌که $AC \cong BD$.

(۴) D در آن طرفی از $\overleftrightarrow{AB}$ که C در آن نیست قرار دارد.

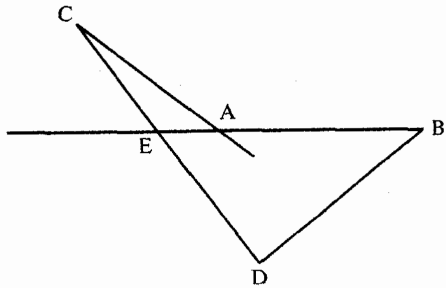
(۵) فرض می‌کنیم E نقطه برخورد پاره‌خط CD با $\overleftrightarrow{AB}$ باشد.

(۶) فرض می‌کنیم E بین A و B نیست.

(۷) پس یا $E = A$ یا $E = B$، یا $E * A * B$، یا $A * B * E$.

(۸) $\overleftrightarrow{AC}$ با $\overleftrightarrow{BD}$ موازی است.

(۹) پس $E \neq A$ و $E \neq B$.



شکل ۲۶.۴

(۱۰) فرض می‌کنیم $E * A * B$ (شکل ۲۶.۴).

(۱۱) چون $\overleftrightarrow{CA}$ ضلع EB از ΔEBD را در یک نقطه بین E و B بریده است، باید ED یا BD را هم ببرد.

(۱۲) اما این ممکن نیست.

(۱۳) لذا، A بین E و B نیست.

(۱۴) به همین دلیل B بین A و E نیست.

(۱۵) بنابراین $A * E * B$ (شکل ۲۵.۴).

(۱۶) پس $\measuredangle BED \cong \measuredangle AEC$.

(۱۷) $\Delta EBD \cong \Delta EAC$.

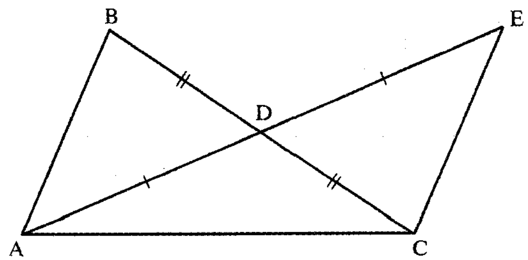
(۱۸) لذا E نقطه وسط AB است.

۱۳. (الف) ثابت کنید که پاره‌خط AB تنها یک نقطه وسط دارد. (راهنمایی: خلاف آن را فرض کنید و ازگزاره‌های ۳.۳ و ۱۳.۳ استفاده کنید تا به تناقض برسید، وگرنه، نقطه وسط ممکن دیگر E' را در شکل ۲۵.۴ اختیار کنید و از مثلثهای قابل انطباق به تناقض برسید.)

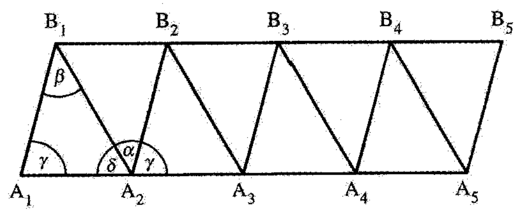
(ب) گزاره ۴.۴ (در باب نیمسازها و عمودمنصفها) را ثابت کنید. (راهنمایی: از نقاط وسط استفاده کنید.)

۱۴. نتیجه ۱ قضیه ساکری‌ـلژاندر را ثابت کنید.

۱۵. قضیه زیر را که برای اثبات قضیه ساکری‌ـلژاندر لازم است، ثابت کنید (شکل ۲۷.۴).
فرض کنید که D وسط BC و E تنها نقطه واقع بر $\overleftrightarrow{AD}$ باشد به‌طوری که $A * D * E$ و $AD \cong DE$. پس مجموع زوایای مثلث ΔAEC همان مجموع زوایای ΔABC است و $(\measuredangle EAC)^\circ$ (یا $(\measuredangle AEC)^\circ \le \frac{1}{2}(\measuredangle BAC)^\circ$). (راهنمایی: ابتدا نشان دهید $\Delta BDA \cong \Delta CDE$، سپس $(\measuredangle BAC)^\circ = (\measuredangle AEC)^\circ + (\measuredangle EAC)^\circ$.)



شکل ۲۷.۴



شکل ۲۸.۴

۱۶. این برهان، برهان دیگری برای ۴.۴ است که به لژاندر منسوب است. مراحل توجیه نشده را توجیه کنید:

(۱) فرض می‌کنیم $A_۱A_۲B_۱$ مثلثی مفروض باشد. با n نسخه از پاره‌خط $A_۱A_۲$ یک ردیف مثلث $(j = ۱, ۲, \cdots, n)A_jA_{j+۱}B_j$ را قابل انطباق با $A_۱A_۲B_۱$، چنان‌که در شکل ۲۸.۴ نشان داده شده، رسم می‌کنیم.

(۲) مثلثهای $(j = ۱, ۲, ..., n)B_jA_{j+۱}B_{j+۱}$ نیز که آخرین آنها با رسم $B_{n+۱}$ به‌دست آمده، با هم قابل انطباق‌اند.

(۳) با علامت‌گذاری زاویه‌ها مانند شکل ۲۸.۴، $\alpha + \gamma + \delta = ۱۸۰^\circ$ و $\beta + \gamma + \delta$ برابر است با مجموع زاویه‌های $A_۱A_۲B_۱$.

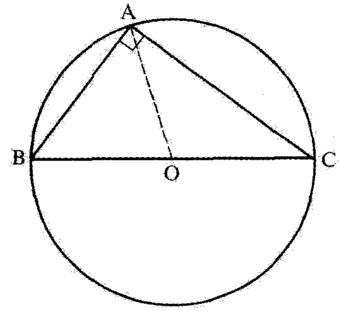
(۴) فرض می‌کنیم به‌عکس که $\beta > \alpha$.

(۵) در این صورت بنابر گزاره ۶.۴ داریم $A_۱A_۲ > B_۱B_۲$.

(۶) همچنین $\overline{A_۱B_۱} + n \cdot \overline{B_۱B_۲} + \overline{B_{n+۱}A_{n+۱}} > n \cdot \overline{A_۱A_۲}$ که از کاربرد مکرر نابرابری مثلثی حاصل شده است.

(۷) $A_۱B_۱ \cong B_{n+۱}A_{n+۱}$.

(۸) $۲\overline{A_۱B_۱} > n(\overline{A_۱A_۲} - \overline{B_۱B_۲})$.



شکل ۲۹.۴

(۹) چون n دلخواه بود، این رابطه مخالف بنداشت ارشمیدس است.

(۱۰) بنابراین مجموع زاویه‌های مثلث کوچکتر یا مساوی 180° است.

۱۷. قضیه‌های زیر را ثابت کنید:

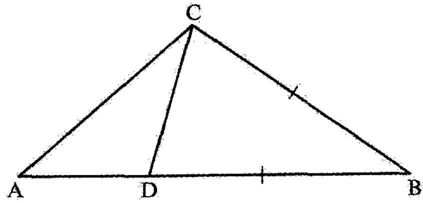
(الف) فرض می‌کنیم γ دایره‌ای به مرکز O، و A و B دو نقطه بر γ باشند. AB را وتر γ می‌نامیم. فرض می‌کنیم M وسط AB باشد. اگر $M \neq O$، آنگاه $\overleftrightarrow{OM}$ بر $\overleftrightarrow{AB}$ عمود است. (راهنمایی: در مثلثهای قابل انطباق با هم، زاویه‌های متناظر قابل انطباق‌اند.)

(ب) اگر AB وتری از دایره γ به مرکز O باشد، ثابت کنید که عمود منصف AB از O می‌گذرد.

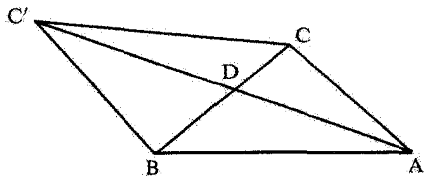
۱۸. در هندسه اقلیدسی، قضیه تالس را ثابت کنید که می‌گوید «زاویه محاط در نیم‌دایره یک قائمه است». در هندسه نتاری، ثابت کنید که این حکم مستلزم وجود مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که کاستی آن برابر صفر باشد (شکل ۲۹.۴).

۱۹. نقص برهان زیر را که برای ترسیم مستطیل به‌کار برده می‌شود پیدا کنید. فرض می‌کنیم A و B دو نقطه غیرمشخص باشند. تنها یک خط مانند l گذرنده از A و عمود بر $\overleftrightarrow{AB}$ وجود دارد (گزاره ۱۶.۳) و، همچنین، تنها یک خط مانند m گذرنده از B عمود بر $\overleftrightarrow{AB}$ وجود دارد. نقطه نامشخص C ــغیر از Bــ را بر m می‌گیریم. عمود یکتایی مرسوم از C بر l وجود دارد که l را در D می‌برد. پس $\square$ABCD مستطیل است.

۲۰. کره با «خطهای» آن که به‌صورت دوایر عظیمه تعریف می‌شوند یک مدل در هندسه نتاری نیست. اینک پیشنهادی برای رسم مستطیل بر یک کره ارائه می‌شود. فرض می‌کنیم α و β دو نصف‌النهار هستند که استوا را به‌ترتیب در A و D بریده‌اند. فرض می‌کنیم γ مداری در نیمکره شمالی باشد که α و β را به‌ترتیب در نقاط B و C بریده‌اند. چون نصف‌النهارها بر مدارها



شکل ۳۰.۴

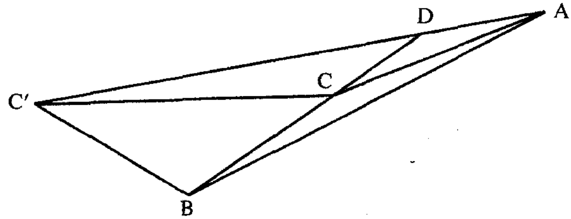


شکل ۳۱.۴

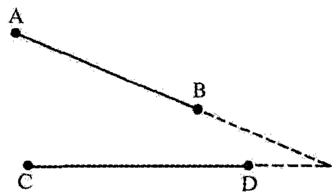
عمودند، چهارضلعی به‌رأسهای A، B، C، و D با اضلاع (منحنیهای) واقع بر α، γ، β، و استوا گذرنده از A به شمال تا B، از B به شرق تا C، از C به جنوب تا D، و از D تا A به غرب باید یک مستطیل باشد. بگویید چرا این چهارضلعی نمی‌تواند یک مستطیل باشد.

۲۱. گزاره ۵.۴ را ثابت کنید. (راهنمایی: اگر $AB > BC$، فرض می‌کنیم D نقطه‌ای بین A و B باشد چنان‌که $BD \cong BC$ (شکل ۳۰.۴). از مثلث متساوی‌الساقین ΔCBD و زاویه بیرونی $\measuredangle BDC$ استفاده کنید تا نشان دهید که $\measuredangle ACB > \measuredangle A$. از این قضیه و سه حالتی ترتیب استفاده کنید تا عکس آن را ثابت کنید.)

۲۲. گزاره ۶.۴ را ثابت کنید. (راهنمایی: $\measuredangle B < \measuredangle B'$ داده شده است. از فرض گزاره ۶.۴ برای تبدیل به حالت $A = A'$ و $B = B'$ و بودن C در درون $\measuredangle ABC'$ استفاده کنید تا بتوانید نشان دهید $AC < AC'$ (شکل ۳۱.۴). در حالتی که $C = D$، این امر آسان است ــD از قطعه‌بُر به دست آمده است. در حالت $C \neq D$، گزاره ۵.۴ مسئله را به اثبات $\measuredangle AC'C < \measuredangle ACC'$ بدل می‌کند. در حالت $B * D * C$ (شکل ۳۱.۴) می‌توانید این نابرابری را از روی قابلیت انطباق $\measuredangle BCC' \cong \measuredangle BC'C$ ثابت کنید. در حالت $B * C * D$ (شکل ۳۲.۴) از قابلیت انطباق $\measuredangle BC'C \cong \measuredangle BCC'$ و قضیه ۲.۴ برای زاویه بیرونی $\measuredangle BCC'$ از مثلث $\Delta DCC'$ و زاویه بیرونی $\measuredangle DCC'$ از مثلث $\Delta BCC'$ استفاده کنید. (عکس استلزام گزاره ۶.۴ چنان‌که نشان داده شد، از استلزام مستقیم به‌دست می‌آید، اگر از سه حالتی استفاده کنید.))



شکل ۳۲.۴



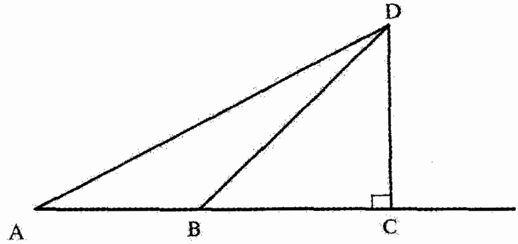
شکل ۳۳.۴

۲۳. برای این مسئله پاره‌خطهای AB و CD را نیم‌موازی می‌نامیم هرگاه پاره‌خط AB، $\overleftrightarrow{CD}$ را نبرد و پاره‌خط CD، $\overleftrightarrow{AB}$ را نبرد. بدیهی‌است اگر $\overleftrightarrow{AB}\|\overleftrightarrow{CD}$، آنگاه AB و CD نیم‌موازی‌اند، ولی لزومی ندارد عکس آن صادق باشد (شکل ۳۳.۴). تعریف کرده‌ایم که یک چهارضلعی را هنگامی کوژ می‌گوییم که یک جفت ضلع روبه‌روی آن نیم‌موازی باشند. ثابت کنید که یک جفت ضلع روبه‌روی دیگر هم نیم‌موازی‌اند. (راهنمایی: فرض کنید AB با CD نیم‌موازی است، و برعکس، AD خط $\overleftrightarrow{BC}$ را در نقطه E می‌برد. از تعریف چهارضلعی (تمرین ۳، فصل ۱) استفاده کنید تا نشان دهید که $E * B * C$ یا $B * C * E$؛ در هر دو حالت قضیه پاش را به کار ببرید تا به تناقض برسید.)

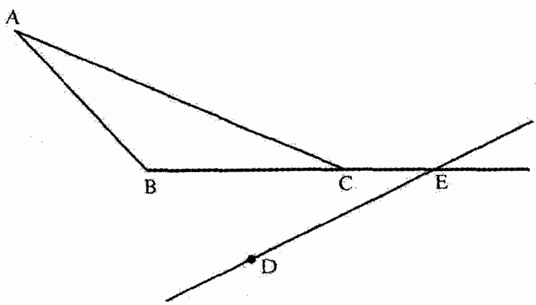
۲۴. ثابت کنید که قطرهای یک چهارضلعی کوژ همدیگر را می‌برند. (راهنمایی: از قضیه قطعه‌بر استفاده کنید.)

۲۵. ثابت کنید که اشتراک مجموعه‌های کوژ (که در تمرین ۱۹، فصل ۳ تعریف شد) مجموعه‌ای است کوژ. با استفاده از این قضیه ثابت کنید که درون یک چهارضلعی کوژ، مجموعه‌ای است کوژ، و نقطه تلاقی قطرها در درون چهارضلعی قرار دارد.

۲۶. غلاف کوژ یک مجموعه نقاط S، اشتراک همه مجموعه‌های کوژ شامل S است، یعنی، کوچکترین مجموعه کوژی که شامل S است. ثابت کنید که غلاف کوژ سه‌نقطه ناهم‌خط A، B، و C از اضلاع و درون ΔABC تشکیل شده است.



شکل ۳۴.۴



شکل ۳۵.۴

۲۷. $A * B * C$ و $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DC}$ داده شده‌اند. ثابت کنید $AD > BC > CD$. (شکل ۳۴.۴؛ از گزاره ۵.۴ استفاده کنید.)

۲۸. مثلث غیرمشخص ΔDAC و نقطه B بین A و C داده شده‌اند، ثابت کنید که $DB < DA$ یا $DB < DC$. (راهنمایی: عمودی از D بر $\overleftrightarrow{AC}$ فرود آورید و از تمرین قبل استفاده کنید.)

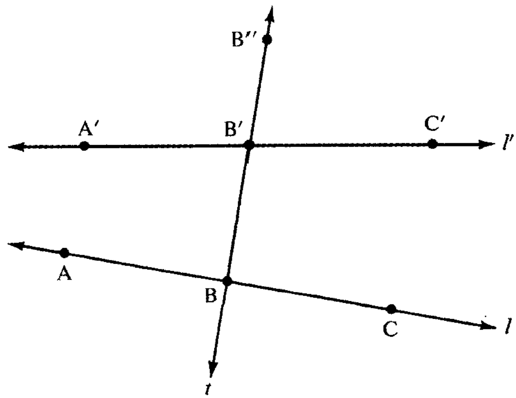
۲۹. ثابت کنید که درون یک دایره مجموعه‌ای کوژ است. (راهنمایی: از تمرین پیشین استفاده کنید.)

۳۰. اگر D نقطه‌ای در بیرون ΔABC باشد، ثابت کنید خطی مانند $\overleftrightarrow{DE}$ گذرنده از D وجود دارد که در بیرون مثلث ΔABC قرار دارد (شکل ۳۵.۴).

۳۱. فرض می‌کنیم خط l دایره γ را در دو نقطه C و D ببرد. ثابت کنید:

(الف) نقطه P از l درون γ است اگر و تنها اگر $C * P * D$.

(ب) اگر نقاط A و B در درون γ در دو طرف l باشند، نقطه محل تلاقی AB با l بین C و D قرار دارد.



شکل ۳۶.۴

۳۲. در شکل ۳۶.۴ دوجفت‌زاویه‌های($\sphericalangle A'B'B''$, $\sphericalangle ABB''$)و ($\sphericalangle C'B'B''$,$\sphericalangle CBB''$) را دو جفت زاویه متناظر گویند که از تقاطع قاطع t با دو خط l و l' پدید آمده‌اند. ثابت کنید که زوایای متناظر قابل انطباق‌اند اگر و تنها اگر زاویه‌های متبادل درونی قابل انطباق باشند.

۳۳. ثابت کنید مثلثی وجود دارد که متساوی‌الساقین نیست.

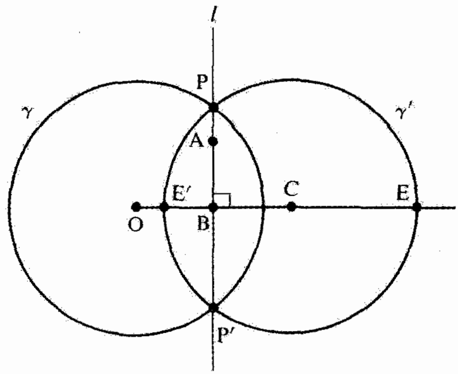
تمرینهای اصلی

۱. قضیه. اگر خط l از نقطه A در درون دایره γ بگذرد، γ را در دو نقطه می‌برد.

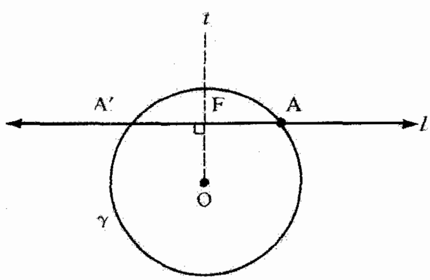
ایده اثبات به قرار زیر است. جزئیات را به‌طور مفصل با استفاده از اصل پیوستگی دایره (به‌جای اصل قوی‌تر ددکیند) و تمرین ۲۷ (شکل ۳۷.۴) شرح دهید. فرض می‌کنیم O مرکز γ باشد. نقطه B را پای عمود وارد از O بر l می‌گیریم، نقطه C را چنان می‌گیریم که B وسط OC باشد، و γ' را دایره به مرکز C و همان شعاع γ اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که γ' خط $\overleftrightarrow{OC}$ را در نقطه E' درون γ و نقطه E بیرون γ می‌برد، در نتیجه γ'، γ را در دو نقطه P و P' می‌برد و این نقاط بر خط اولیه l قرار دارند. (محل تلاقی γ را با l از راه تقاطع γ با قرنیه‌اش γ' نسبت به l تعیین می‌کنیم؛ $\leftarrow$ص ۱۲۰.)

۲. با استفاده از تمرین قبل ثابت کنید که اصل پیوستگی دایره، اصل پیوستگی مقدماتی را ایجاب می‌کند. (راهنمایی: از تمرین ۲۷ استفاده کنید.)

۳. فرض می‌کنیم l دایره γ را در یک نقطه A بریده است. اگر O مرکز γ و $l \perp \overleftrightarrow{OA}$ باشد، l را مماس در A بر γ می‌نامیم؛ در غیر این صورت l را قاطع دایره γ می‌نامیم.



شکل ۳۷.۴

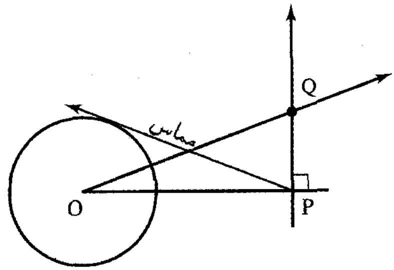


شکل ۳۸.۴

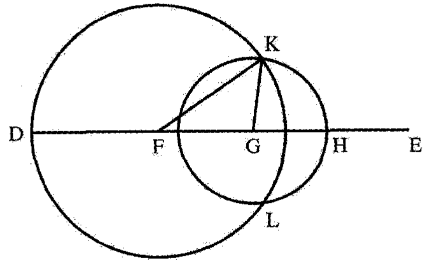
(الف) فرض می‌کنیم l قاطع γ باشد. ثابت کنید که نقطه F، پای عمود t وارد از O بر l، درون γ قرار دارد و A'، قرینه A نسبت به t دومین نقطه تلاقی l با γ است (شکل ۳۸.۴).

(ب) حال فرض می‌کنیم l بر γ مماس باشد. ثابت کنید که هر نقطه $B \neq A$ واقع بر l بیرون γ است، و بنابراین A نقطه یکتایی است که در آن l دایره γ را می‌برد.

(ج) فرض می‌کنیم P در بیرون γ باشد. با استفاده از گزاره ۳.۷، فصل ۷، اصل پیوستگی دایره را برای رسم یک خط مماس از P بر γ به‌کار برید. بیان کنید که چرا این رسم تنها در هندسه اقلیدسی معتبر است. ثابت کنید که در هندسه نتاری این خط مماس وجود دارد. (راهنمایی: فرض می‌کنیم $Q \neq P$ نقطه‌ای عمود بر $\overleftrightarrow{OP}$ در P باشد. ثابت کنید که $\overrightarrow{PQ}$، γ را نمی‌برد، در حالی‌که $\overrightarrow{PO}$ آن را می‌برد. بنداشت ددکیند را برای نیم‌خط $\overrightarrow{OQ}$ به‌کار برید؛ شکل ۳۹.۴.) وقتی یک مماس l مرسوم از P به‌دست آمده باشد، ثابت کنید که قرینه l نسبت به $\overleftrightarrow{OP}$ مماس دیگری بر γ است.



شکل ۳۹.۴

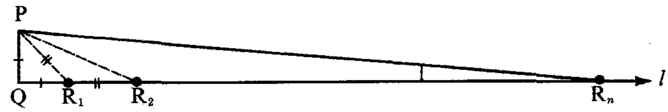


شکل ۴۰.۴

۴. عکس نابرابری مثلثی. اگر a، b، و c پاره‌خطهایی باشند که مجموع هر دو تا از آنها از سومی بزرگتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که طول اضلاعش برابر با این سه پاره‌خط است (گزاره ۲.۲، اقلیدس)، با استفاده از اصل پیوستگی دایره، نقص برهان اقلیدس را برطرف و مراحل زیر را توجیه کنید: فرض کنید $a \geq b \geq c$. نقطه نامشخص D و نیم‌خط گذرنده از آن را اختیار می‌کنیم. با شروع از D، بر این نیم‌خط نقاط F، G، و H را چنان می‌گیریم که $a = \overline{\mathrm{DF}}, b = \overline{\mathrm{FG}}, c = \overline{\mathrm{GH}}$. در این صورت دایره به مرکز F و شعاع a دایره به مرکز G و شعاع c را در K می‌برد، و $\Delta\mathrm{FGK}$ مثلثی است که این گزاره دنبال آن می‌گردد (شکل ۴۰.۴).

۵. ثابت کنید که عکس نابرابری مثلثی اصل پیوستگی دایره را ایجاب می‌کند (با پذیرفتن بنداشتهای وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق).

۶. ثابت کنید: اگر b و c طولهای دو پاره‌خط باشند، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر c و ساق b وجود دارد اگر و تنها اگر $c > b$. (راهنمایی برای جزء «اگر»: بر خط دلخواهی یک نقطه مانند C می‌گیریم و عمودی از این نقطه بر خط رسم می‌کنیم. بر این خط عمود، نقطه‌ای مانند A وجود دارد به‌قسمی‌که $\overline{\mathrm{AC}} = b$. به مرکز A و شعاع c دایره α را رسم می‌کنیم. چون نقطه C درون این



شکل ۴۱.۴

دایره است پس α خط اولیه را در نقطه‌ای مانند B می‌برد. ΔABC مثلث قائم‌الزاویه مطلوب است.)

۷. نشان دهید که چگونه تمرین قبل راه‌حلی برای تمرین اصلی ۳(ج) به‌دست می‌دهد که مانع استفاده از بنداشت ددکیند می‌شود. (راهنمایی: قرار دهید $c = \overline{OP}$ و b را شعاع دایره γ بگیرید و $\measuredangle A$ را در O با $\overrightarrow{OP}$ به‌عنوان یک ضلع جدا کنید.)

۸. برهان زیر برهانی است در هندسه نتاری که ارشمیدس برای «نتیجه مهم» بنداشت ارسطو، فصل ۳، آورده است. باید ثابت کنیم که اگر عدد حقیقی مثبت a داده شده باشد، نقطه‌ای مانند R بر l یافت می‌شود به‌قسمی‌که $(\measuredangle QRP)^\circ < a^\circ$. (به‌گونه‌ای شهودی با گرفتن R به قدر کافی دور روی خط l می‌توانیم زاویه‌ای هر قدر کوچک که بخواهیم به‌دست آوریم.) ایده مسئله این است که دنباله‌ای از زاویه‌های $\measuredangle QR_1P$، $\measuredangle QR_2P$، ...رسم کنیم که هر یک از آنها حداکثر نصف زاویه قبل از خودش باشد. مراحل زیر را توجیه کنید (شکل ۴۱.۴):

نقطه‌ای مانند R_1 بر l وجود دارد چنان‌که $PQ \cong QR_1$ (چرا؟)، در نتیجه ΔPQR_1 متساوی‌الساقین است. از اینجا نتیجه می‌شود که $(\measuredangle QR_1P)^\circ \leq 45^\circ$ (چرا؟). بعد، یک نقطه R_2 وجود دارد به‌قسمی‌که $Q * R_1 * R_2$ و $PR_1 \cong R_1R_2$، در نتیجه ΔPR_1R_2 متساوی‌الساقین است. در نتیجه $(\measuredangle QR_2P)^\circ \leq 22\frac{1}{2}^\circ$ (برای توجیه این مرحله، از نتیجه ۱ قضیه ساکری‌ـلژاندر استفاده کنید). اگر به همین ترتیب ادامه دهیم زاویه‌هایی به‌دست می‌آوریم مساوی یا کوچکتر از $11\frac{1}{4}^\circ$ و $5\frac{5}{8}^\circ$ و غیره. در نتیجه به‌موجب ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی، سرانجام زاویه $\measuredangle QR_nP$ را به دست می‌آوریم با $(\measuredangle QR_nP)^\circ < a^\circ$.

پروژه

۱. استدلال زیر استدلالی است رهگشا که نشان می‌دهد بنداشت ارشمیدس برای اثبات قضیه ساکری‌ـلژاندر لازم است. می‌دانیم که در روی کره، مجموع زاویه‌های هر مثلث از 180° بزرگتر است (کی، ۱۹۶۹)؛ این مطلب متناقض با قضیه ساکری‌ـلژاندر نیست، زیرا کره یک مدل

در هندسه نتاری نیست. نقطه ثابت O را روی کره در نظر می‌گیریم. N، یعنی مجموعه همه نقاط کره را که فاصله آنها از O بی‌نهایت کوچک است در نظر می‌گیریم. خط را قوسی از دایره عظیمه در N تعبیر می‌کنیم. «میان‌بود» را با تعبیر معمولی‌اش بر یک قوس، و «قابلیت انطباق» را مانند هندسه کروی می‌گیریم. در این صورت N مدلی از بنداشتهای وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق می‌شود که بنداشت ارشمیدس و قضیه ساکری-لژاندر در آن صادق نیستند. همچنین اگر نقطه O را در صفحه اقلیدسی ثابت فرض کنیم و N را همسایگی‌های بی‌نهایت کوچک بگیریم، مجموع زاویه‌های هر مثلث 180° است که باز اصل پنجم اقلیدس در N برقرار نیست (زیرا نقطه تلاقی خطوط خیلی دور گرفته می‌شود)؛ از این رو، عکس گزاره ۱۱.۴ نمی‌تواند به تنهایی از روی بنداشتهای وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق ما ثابت شود (بنداشت ارسطو لازم است؛ فصل ۵).

برای شرح دقیق این استدلال، اگر آلمانی می‌دانید، به هسنبرگ و دیلر (۱۹۶۷) مراجعه کنید؛ در غیر این‌صورت، به فصل ۳۲، موییز (۱۹۹۰)، مراجعه کنید، که میدان مرتب اقلیدسی می‌سازد که ارشمیدسی نیست.

۲. به برهان قضیه ۳.۴ که در بورسوک و اسمیلیو، فصل ۳، بخشهای ۹ و ۱۰، داده شده مراجعه کنید. کلید برهان در این است که در مجموعه مرتب اعداد گویای دوتایی (تمرین ۱۸، فصل ۳) هر برش ددکیند، یک عدد حقیقی یکتا را مشخص می‌کند.

۳. در برهان ما برای قضیه ۷.۴ باز بنداشت ارشمیدس مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای این برهان به مارتین (۱۹۸۲)، فصل ۲۲، که مانع استفاده ما از این بنداشت می‌شود، مراجعه کنید.

۴. کره‌ای به شعاع r داده شده است. فرض می‌کنیم ϵ یک عدد حقیقی مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{2}\pi r$، و N_ϵ مجموعه همه نقاطی بر کره باشد که فاصله آنها از نقطه ثابتی از کره کمتر از ϵ است. «خط»، «میان‌بود»، و «قابلیت انطباق» را همان‌گونه تعبیر می‌کنیم که در پروژه ۱ گفته بودیم. در این صورت، N_ϵ در بنداشتهای وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق ما یک مدل نیست. بگویید کدام‌یک از بنداشتها، صادق است و کدامها صادق نیست، برای آنها که صادق نیستند، به‌طور تجربی بیان کنید که چرا در N صدق می‌کنند.

۵

تاریخچه اصل توازی

[کار معجزه‌آسای اثبات اصل پنجم اقلیدس]، بسان بتی عیّار شبهای بسیار، خواب و آرام از من ربوده و پیوسته مرا با خود بر «فراز و نشیبها» کشانیده بود. ولی همواره، درست همان دم که می‌اندیشیدم به آن دست یافته‌ام، اشتباه پیش‌بینی نشده‌ای در مقابلم قد علم می‌کرد، و این پری فریبا به هوا می‌پرید، با تمسخر قهقهه می‌زد ها، ها، ها!

چ. ل. داجسون (لوئیس کارول)

کارهایی را که تاکنون انجام داده‌ایم خلاصه کنیم. در تعاریف و اصلهای اقلیدس برای هندسه مسطحه، شکافهایی را کشف کردیم. با معرفی تعاریف و بنداشتهای (تغییر صورت‌داده‌شده) هیلبرت این شکافها را پرکردیم و مبانی این هندسه را استوار ساختیم. سپس برای این مبانی بنایی از قضایا برپا کردیم. اما بنایی که تاکنون برپا شده است بر اصل توازی استوار نیست؛ این بنا را «هندسه نتاری» نامیدیم. یک دلیل برای اینکه بنای هندسه بر اساس توازی را به تعویق انداختیم این است که اعتماد به این اصل کمتر از بنداشتهای دیگر است.

ممکن است فکر کنید که این اصل پیچیده‌تر از اصلهای دیگر است، و نیز ممکن است حس کنید که نفی آن خلاف عقل سلیم است. آلبرت اینشتین زمانی گفته است که «عقل سلیم، در واقع، چیزی نیست جز لایه‌هایی از مفاهیم پیش پنداشته، که بخش اعظم آنها پیش از سن هجده‌سالگی در حافظه و احساس ما انباشته شده‌اند».

مؤید این مسئله که خود اقلیدس نیز کاملاً به این اصل اعتماد نداشته، این واقعیت است که او استفاده از آن را برای اثبات گزاره‌ها، تا آنجا که ممکن بوده ــ تا گزاره بیست‌ونهم‌اش ــ به تعویق انداخته است. ما در این فصل چند تلاش روشنگر را که برای اثبات اصل توازی اقلیدس صورت گرفته بررسی می‌کنیم. (تلاشهایی دیگر را می‌توانید در بونولا (۱۹۵۵)؛ گری (۱۹۸۹)؛ و روزنفلد (۱۹۸۸)، پیدا کنید). باید تأکید کنیم که بیشتر این تلاشها را ریاضیدانان به‌نام و استثنایی صورت داده‌اند، که فاقد صلاحیت نبوده‌اند. اگر چه هر تلاش نقصی داشته است، کوششها معمولاً هدر نرفته‌اند؛ زیرا فرض می‌کنیم همه مراحل را، جز یکی بتوانیم توجیه کنیم، وقتی مرحله خدشه‌دار را پیدا می‌کنیم، حکم دیگری به دست می‌آوریم که در کمال تعجب با اصل توازی هم‌ارز است.[۱] شما این مجال را دارید که این کار لذت‌بخش را در تمرینهای ۸ تا ۱۳ انجام دهید.

پروکلوس

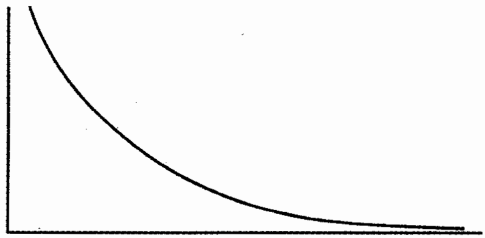
پروکلوس (۴۱۰ تا ۴۸۵ م.)، که شرح او [بر کتاب اصول] یکی‌از منابع اصلی اطلاعات ما در زمینه هندسه یونان است، از اصل توازی بدین‌گونه انتقاد کرده است: «این را باید حتی از شمار اصول موضوعه بیرون آورد. زیرا این قضیه‌ای است که دشواریهای زیادی در بر دارد، که بطلمیوس در کتابی به حل آنها همت گماشته است. . .این حکم که، چون [دو خط] را هر چه بیشتر امتداد دهیم بیش از پیش به هم نزدیک می‌شوند و سرانجام همدیگر را می‌برند، پذیرفتنی است ولی نه همیشه». پروکلوس یک هذلولی را مثال می‌زند که آن اندازه که بتوان تصور کرد به مجانبهایش نزدیک می‌شود بی‌آنکه هرگز آنها را ببرد (شکل ۱.۵). این مثال نشان می‌دهد که لااقل می‌توان تصوری مخالف نتیجه‌گیری‌های اقلیدس هم داشت.[۲] پروکلوس می‌گوید: «پس روشن است که باید برای قضیه کنونی برهانی بیابیم، و این مخالف ماهیت خاص اصلهای موضوع است».

در مدتی بیش از دو هزار سال بعضی از بهترین ریاضیدانان برای اثبات اصل پنجم اقلیدس

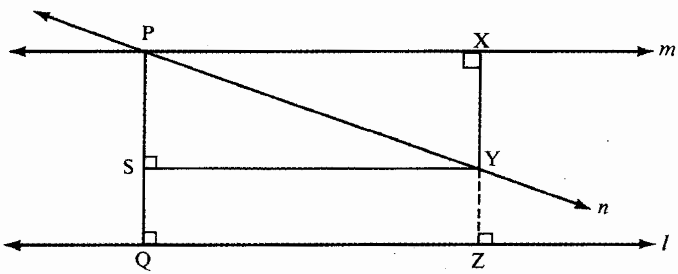
---

۱. در واقع این استدلال نارسا تنها ثابت می‌کند که حکم توجیه نشده مستلزم اصل توازی است؛ عکس آن به دلایل بیشتر نیاز دارد. من هیچ تلاشی را که بی‌محتوا باشد معرفی نمی‌کنم.

۲. دانشجویان همواره به شکل ۱.۵ معترض‌اند، از این لحاظ که هذلولی «خط راست» نیست. ما پذیرفتیم که این واژه را به کار نبریم، زیرا تعریف دقیقی نداریم. یک تعریف دقیق را می‌توان در هندسه دیفرانسیل داد (پیوست الف).



شکل ۱.۵



شکل ۲.۵

تلاش کردند. اثبات، مطابق اصطلاح ما یعنی‌چه؟ لزومی ندارد که اصل توازی را به مثابه یک بنداشت بپذیریم؛ باید بتوانیم آن را از روش بنداشتهای دیگر ثابت کنیم. اگر امکان می‌داشت که اصل پنجم اقلیدس را بدین‌گونه ثابت کنیم، آنگاه این اصل در هندسه نتاری به‌صورت یک قضیه درمی‌آمد و تمام هندسه اقلیدسی را دربرمی‌گرفت. تا آنجا که می‌دانیم، نخستین تلاشی که برای اثبات به‌عمل آمده از آن بطلمیوس بوده است. بی‌آنکه وارد جزئیات این برهان بشویم (هیث، ۱۹۵۶، صفحات ۲۰۴ تا ۲۰۶) باید بگوییم که او، بی‌آنکه خود متوجه باشد، اصل توازی هیلبرت را پذیرفته است. در فصل ۴ دیدیم که اصل توازی هیلبرت با اصل پنجم اقلیدس هم‌ارز است (قضیه ۵.۴)، در نتیجه بطلمیوس آنچه را می‌خواسته ثابت کند قبول کرده است، یعنی استدلال او اصولاً به دور منجر می‌شده است.

پروکلوس سعی کرده است اصل توازی را چنین ثابت کند (شکل ۲.۵): دو خط موازی l و m داده شده‌اند. فرض می‌کنیم خط n خط m را در نقطه P بریده است. می‌خواهیم نشان دهیم که n، خط l را هم می‌برد (گزاره ۷.۴). فرض می‌کنیم Q پای عمود مرسوم از P بر l باشد (نتیجه ۱ قضیه ۱.۴). اگر n بر $\overleftrightarrow{PQ}$ منطبق باشد پس l را در Q بریده است. در غیر این‌صورت، نیم‌خطی

مانند $\overrightarrow{PY}$ از n بین $\overrightarrow{PQ}$ و نیم‌خطی مانند $\overrightarrow{PX}$ از m قرار دارد. فرض می‌کنیم که X پای عمود مرسوم از Y بر m باشد.

حال وقتی نقطه Y بر خط n از نقطه P بی‌نهایت دور شود، پاره‌خط XY اندازه‌اش بی‌نهایت بزرگ می‌شود و سرانجام از پاره‌خط PQ تجاوز می‌کند. بنابراین Y باید از l بگذرد و در طرف دیگر آن قرار گیرد، یعنی n باید l را ببرد.

مطالب بند بالا جان کلام برهان پروکلوس است؛ برهان نسبتاً پیچیده‌ای است که شامل حرکت و پیوستگی است. از آن گذشته، درستی هر مرحله از برهان را می‌توان نشان داد جز اینکه نتیجه‌ای که می‌خواهیم از آن به دست نمی‌آید! (در تمرین ۶ از شما خواسته شده است که اصل ارسطو را که XY بی‌نهایت بزرگ می‌شود، ثابت کنید، که «بی‌نهایت» به معنی «بی‌کران» گرفته شده است. مثلاً دنباله $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۷}{۸}$، $\frac{۱۵}{۱۶}$، $\frac{۳۱}{۳۲}$، ... بی‌نهایت زیاد می‌شود ولی در اینجا «بی‌نهایت» به‌معنی «بی‌کران» نیست، زیرا که این اعداد همیشه از ۱ کمترند و ۱ کرانی است برای این اعداد.)

چگونه می‌توان درستی آخرین مرحله را ثابت کرد؟ فرض می‌کنیم عمود YZ را از Y بر l فرود آورده‌ایم. آن وقت شما می‌توانید بگویید که (۱) X، Y، و Z هم‌خط‌اند، و (۲) $XZ \cong PQ$. بنابراین هنگامی‌که XY از PQ بزرگتر می‌شود، باید از XZ هم بزرگتر شود. در نتیجه Y باید در طرف دیگر l قرار گیرد. در اینجا نتایج واقعاً از احکام (۱) و (۲) حاصل می‌شوند. مشکل این است که برهانی برای درستی این دو حکم وجود ندارد!

اگر گفته ما شما را به تأمل وامی‌دارد علتش این است که شکل ۲.۵ احکام (۱) و (۲) را درست جلوه می‌دهد. باید یادآوری کنیم که ما مجاز نیستیم برای درستی برهان یک مسئله از شکل استفاده کنیم. هر مرحله باید از روی بنداشتها و یا از روی قضایایی که قبلاً ثابت شده‌اند ثابت شود. (بعداً نشان خواهیم داد که اثبات احکام (۱) و (۲) در هندسه نتاری ممکن نیست. اثبات این احکام تنها در هندسه اقلیدسی ممکن است، آن هم تنها با استفاده از اصل توازی. این امر برهان پروکلوس را به برهان دوری بدل می‌کند.)

تجزیه و تحلیلی که هم اکنون از برهان نارسای پروکلوس به‌عمل آوردیم نشان می‌دهد تا چه اندازه باید مراقب طرز تفکر خود درباره خطوط موازی باشیم. شاید شما خطوط موازی را مانند ریلهای راه‌آهن تجسم می‌کنید که در همه جا فاصله‌هاشان از همدیگر مساوی است و بستهای ریلها بر هر دو خط عمودند. این تجسم تنها در هندسه اقلیدسی درست است. بدون اصل توازی، تنها چیزی که درباره دو خط موازی می‌توانیم بگوییم این است که مطابق تعریف «توازی»، آنها نقطه مشترکی ندارند. نمی‌توانید فرض کنید که متساوی‌الفاصله‌اند؛ حتی نمی‌توانید فرض کنید که یک

عمود مشترک دارند. به مصداق این گفته که «چیز یک بار مصرف» را فقط یک بار به کار می‌بریم «وقتی واژه‌ای را به‌کار می‌بریم معنای آن همان است که می‌خواهیم باشد، نه بیشتر نه کمتر».

والیس

مهمترین تلاشی که بعداً برای اثبات اصل توازی به عمل آمده است از منجم و ریاضیدان ایرانی خواجه نصیرالدین طوسی است (۱۲۰۱ تا ۱۲۷۴). ولی‌چون در اثبات او چند فرض وجود دارد که درستی آنها ثابت نشده است از ذکر آن صرف‌نظر می‌کنیم و به جان والیس[۱] می‌پردازیم. والیس تلاش برای اثبات اصل توازی در هندسه نتاری را کنار گذاشت و در

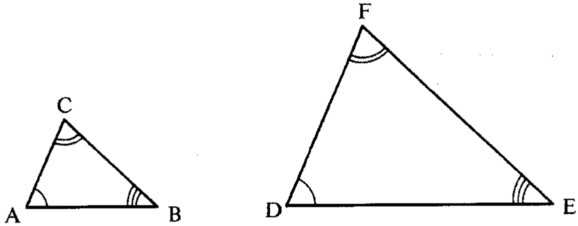
جان والیس

عوض بنداشت تازه‌ای را که حس می‌کرد بیش از اصل توازی مقبول است مطرح کرد، سپس اصل توازی را از روی این بنداشت تازه و بنداشتهای دیگر هندسه نتاری ثابت کرد.

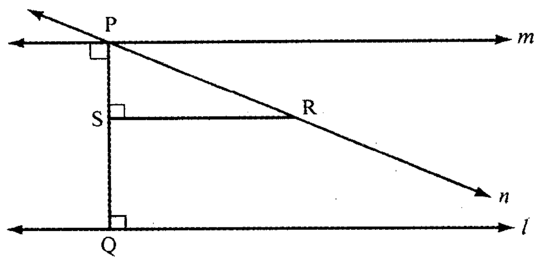
اصل والیس. مثلث نامشخص ΔABC و پاره‌خط نامشخص DE داده شده‌اند. مثلثی مانند

۱. والیس (۱۶۱۶ تا ۱۷۰۳)، ریاضیدان پیشتاز انگلیسی پیش از نیوتن بود. در رساله‌اش به‌نام حساب بی‌نهایت کوچکها (*Arithmetica infinitorum*)، (که مورد مطالعه نیوتن قرارگرفته) نماد ∞ را برای «بی‌نهایت» وارد کرد، دستورهایی برای بعضی از انتگرالها به‌دست آورد و دستور معروف حاصل‌ضرب نامتناهی خود را معرفی کرد:

$$\frac{\pi}{۲} = \frac{۲ \times ۲ \times ۴ \times ۴ \times ۶ \times ۶ \times ۸ \times \cdots}{۱ \times ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۵ \times ۷ \times ۷ \cdots}$$



شکل ۳.۵



شکل ۴.۵

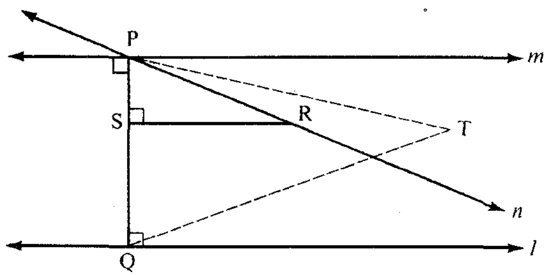
ΔDEF (به ضلع DE) وجود دارد که با ΔABC متشابه است (و چنین نشان داده می‌شود $\Delta \mathrm{DEF} \sim \Delta \mathrm{ABC}$). (شکل ۳.۵.)

یادآوری می‌کنیم که مثلثهای متشابه مثلثهایی را گویند که بتوان یک تناظر یک‌به‌یک بین رئوس آنها برقرارکرد به قسمی که زوایای متناظر قابل انطباق باشند. در هندسه اقلیدسی ثابت شده است که اضلاع متناظر در مثلثهای متشابه متناسب‌اند (تمرین ۱۸)؛ مثلاً هر ضلع ΔDEF ممکن است دو برابر ضلع نظیرش از ΔABC باشد. لذا معنی شهودی اصل والیس این است که شما می‌توانید مثلث را هر اندازه که بخواهید، بی‌آنکه از شکل طبیعی بیندازید، بزرگ یا کوچک کنید.

با استفاده از اصل والیس، اصل توازی را می‌توان چنین ثابت کرد (شکل ۴.۵):

برهان:

نقطه‌ای مانند P ناواقع بر l در نظر می‌گیریم و مانند پیش، خط m را موازی با l ــ با رسم عمود $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$ بر l و رسم عمود m بر $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$ــ می‌کشیم. فرض می‌کنیم که n خط دیگری گذرنده از P باشد. باید نشان دهیم که خط n خط l را می‌برد. مانند پیش، نیم‌خطی از n به مبدأ P را که بین $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$ و یک نیم‌خط از m قرار دارد، در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر نقطه R بر n خط $\overleftrightarrow{\mathrm{RS}}$ را بر $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$ عمود می‌کنیم (برای وجود یکتایی همه این عمودها ← گزاره ۱۶.۳ و نتیجه ۱، قضیه ۱.۴).



شکل ۵.۵

حال اصل والیس را برای ΔPSR و پاره‌خط PQ به کار می‌بریم. این اصل به ما می‌گوید که نقطه‌ای مانند T وجود دارد به‌قسمی‌که ΔPSR با ΔPQT متشابه است، به‌علاوه فرض می‌کنیم که T در همان طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد که R در آن قرار دارد (شکل ۵.۵) ـــ در غیر این‌صورت، قرینه‌اش را نسبت به $\overleftrightarrow{PQ}$ پیدا می‌کنیم.

بنابر تعریف مثلثهای متشابه، $\measuredangle TPQ \cong \measuredangle RPS$. اما، چون این زاویه‌ها در نیم‌خط $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS}$ به‌عنوان یک ضلع مشترک‌اند، و چون T در همان طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ واقع است که R در آن قرار دارد، تنها راه قابلیت انطباق آنها تساوی $\overrightarrow{PT}$ و $\overrightarrow{PR}$ است (بنداشت ق‌ـ۴). بنابراین $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PT}$، یعنی T بر n واقع است. همچنین $\measuredangle PQT \cong \measuredangle PSR$، زیرا هر دو قائمه‌اند؛ بنابراین T بر l نیز واقع است. لذا n و l در نقطه T یکدیگر را می‌برند. پس m تنها خطی است که از P به موازات l کشیده شده است. ■

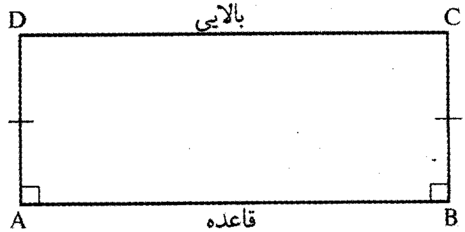
دیگر دلیلی وجود ندارد که اصل والیس را پذیرفتنی‌تر از اصل پنجم اقلیدس بدانیم، زیرا معلوم خواهد شد که بایستی اصل والیس و اصل‌پنجم اقلیدس منطقاً هم‌ارز باشند (تمرین ۷(الف)).

ساکری

در اینجا می‌خواهیم به‌کار جالب توجه‌کشیش و منطق‌دان یسوعی، جیرولامو ساکری (۱۶۶۷ـ۱۷۳۳) اشاره کنیم. نامبرده درست پیش از مرگش کتاب کوچکی به‌نام اقلیدس عاری از هرگونه نقص[1] منتشر کرد که در واقع مورد توجه قرار نگرفت تا یک قرن و نیم بعد که ائوجینو بلترامی آن را مجدداً کشف کرد.

فکر ساکری این بود که از یک برهان خلف استفاده کند. او نقیض اصل توازی را پذیرفت و

1. *Euclides ab omni naevo vindicatus*



شکل ۶.۵ چهارضلعی ساکری.

سپس کوشید تا تناقضی را از آن نتیجه بگیرد. به‌ویژه، بعضی از چهارضلعی‌هایی را (شکل ۶.۵) که زوایای مجاور به قاعده‌شان قائمه و اضلاع این زوایا قابل انطباق بودند مورد مطالعه قرار داد. این چهارضلعی‌ها بعدها به چهارضلعی‌های ساکری معروف شدند. در هندسه نتاری به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که زوایای دو رأس دیگر قابل انطباق‌اند (تمرین ۱)، یعنی، $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.

سه حالت ممکن است پیش بیاید:

حالت ۱: زاویه‌های بالایی قائمه‌اند.

حالت ۲: زاویه‌های بالایی منفرجه‌اند.

حالت ۳: زاویه‌های بالایی حاده‌اند.

در پی اثبات حالت ۱، یعنی همان حالتی که برای هندسه اقلیدسی برقرار است، ساکری کوشش کرد نشان دهد دو حالت دیگر به تناقض منجر می‌شوند. او توانست نشان دهد که حالت ۲ منجر به تناقض می‌شود: اگر زاویه‌های بالایی منفرجه باشند، مجموع زاویه‌های چهارضلع از 360° بیشتر می‌شود، که با نتیجه ۲ قضیه ساکری‌ـلژاندر متناقض است (برای تحقیق فرض نتیجه ۲، تمرین ۱۷ را ببینید).

ولی هر اندازه کوشش کرد نتوانست تناقضی در حالت ۳ به‌دست آورد و آن را: «فرض خصمانه زاویه حاده» نامید. او موفق شد نتایج بسیار عجیبی به‌دست آورد،[1] ولی تناقضی به دست نیاورد. سرانجام از روی عجز بانگ برآورد: «فرض زاویه حاده مطلقاً غلط است، زیرا [این فرض] با ذات خط مستقیم ناسازگار است!» درست شبیه مردی که الماس نایابی را کشف کرده باشد ولی نتواند آنچه را که می‌بیند باور کند، و بانگ می‌آورد که شیشه است! با اینکه ساکری خود متوجه نشده بود، هندسه نااقلیدسی را کشف کرده بود.

۱. مراجعه کنید به ترجمه رساله ساکری توسط گ. ب. هالستد (ساکری، ۱۹۷۰).

کلرو

الکسی کلود کلرو (۱۷۱۳ـ۱۷۶۵) یکی از برجسته‌ترین هندسه‌دانان فرانسوی بود. نظیر والیس اثبات اصل موضوع توازی را وجهه همت خود قرار نداد، بلکه به‌جای آن درکتاب اصول هندسه‌اش، در ۱۷۴۱ بنداشت دیگری گذاشت.

بنداشت کلرو. مستطیل وجود دارد.

می‌توان استدلال کرد که اصل پنجم بدیهی نیست، زیرا ممکن است مسافت خیلی‌خیلی زیادی طی و تحقیق کرد که تقاطع «خطهای فیزیکی» در بی‌نهایت که در اصل پنجم گفته شده، عملاً صورت می‌گیرد. به گفته ساکری کافی است بتوان وجود یک مستطیل را، هر قدر هم «کوچک» باشد، ثابت کرد. کلرو با اتکا به این استدلال که «مستطیل در همه جا در دور و بر ما، در خانه، در باغچه، در اطاق، و در دیوار» دیده می‌شود. وجود آن را بنداشت خود قرار داد، و گفت پس چرا موضوع را به همین جا خاتمه نمی‌دهیم؟ شاید بدین علت که تلاش برای اثبات اصل پنجم اقلیدس صدها سال ادامه داشته و اکنون به‌صورت یک مشغله فکری چالشی برای ریاضیدانان در آمده است؟ یا بالاخره ریاضیدانان پذیرفته‌اند که هندسه، موضوعی درباره «فضای فیزیکی» نبوده است؟ با این‌همه اگر شما معتقدید که می‌شود یک مستطیل روی زمین رسم کرد، به کروی بودن زمین هم نمی‌توانید معتقد باشید، زیرا بر روی یک کره مستطیل وجود ندارد. اگر فکر می‌کنید که یک مستطیل فیزیکی رسم کرده‌اید، احتمال اشتباه شما کم نیست، زیرا اندازه‌گیری دقیق از لحاظ فیزیکی غیرممکن است. یا، بالاخره آیا به ذهن ریاضیدانان خطور نکرده بوده است که به‌جای اصل پنجم هر اصلی که به فکرشان می‌رسد بگذارند ــ فرق نمی‌کند چه باشد، جز اینکه خوشایند احساس باشد ــ آیا منطقاً با اصل پنجم اقلیدس هم‌ارز بوده و لذا این جایگزینی منطقی سودی نداشته است؟

اکنون ثابت می‌کنیم که بنداشت کلرو با اصل توازی در هندسه نتاری هم‌ارز است.

برهان:

اگر اصل توازی را بپذیریم، وجود مستطیل ازگزاره ۱۱.۴ و قضیه ۷.۴ به‌آسانی نتیجه می‌شود. برعکس، اگر بنداشت کلرو را بپذیریم، به موجب قضیه ۷.۴ همه مثلثها مجموع زوایایی برابر با 180° دارند، و با رسم یک قطر همه چهارضلعی‌های کوژ مجموع زوایای 360° پیدا خواهند کرد. به استدلال پروکلوس، چنان‌که در شکل ۲.۵ نشان داده شده، بازمی‌گردیم. فرض می‌کنیم S پای عمود مرسوم از Y بر $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد. S در همان طرف m قرار دارد که Y و Q قرار دارند زیرا $\overleftrightarrow{SY}$ با m موازی است (نتیجه ۱، قضیه ۱.۴). به‌علاوه $\square PXYS$ که ۳ زاویه قائمه داشت حالا معلوم

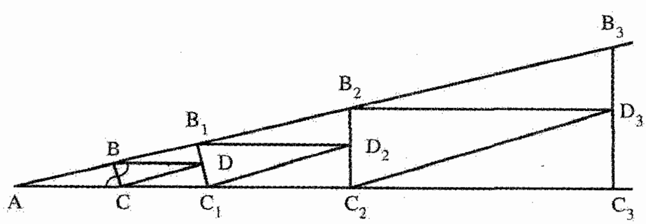
می‌شود که یک مستطیل است. می‌توانید به‌آسانی ثابت کنید (تمرین ۴) که اضلاع مقابل مستطیل با هم قابل انطباق‌اند، لذا $PS \cong XY$. طبق بنداشت ارسطو (فصل ۳)، Y را می‌توان بر نیم‌خط n چنان انتخاب کرد که $XY > PQ$. پس $PS > PQ$ و $P * Q * S$. مانند بالا Y در همان طرف l است که S هست. بنابراین در طرف دیگر l نسبت به P است. لذا l، n را در نقطه‌ای بین P و Y می‌برد. ■

لژاندر

لژاندر بی‌خبر از کار ساکری، قضیه‌های او را در هندسه نتاری، که همان قضایای ۴.۴ و ۷.۴ ما هستند، دوباره کشف کرد. او کتاب کلرو را خوانده بود و بنداشت او را نپذیرفته بود. ما قبلاً در فصل ۱ یکی از تلاشهای لژاندر را برای اثبات اصل توازی مورد بحث قرار داده‌ایم و در تمرین ۸ از شما خواسته‌ایم نقض آن را پیدا کنید. لژاندر مجموعه‌ای از تلاشهای متعدد خود را نزدیک به سال ۱۸۳۳، سال وفاتش، منتشرکرده بود. ما در اینجا تلاش او را برای اثبات 180° بودن مجموع زوایای مثلث می‌آوریم. (با استفاده از تغییری که در برهان پروکلوس در بالا دادیم، توانستیم اصل توازی هیلبرت را ثابت کنیم.)

برهان (شکل ۷.۵):

برعکس، فرض کنیم، یک ΔABC با کاستی $d \neq 0$ وجود دارد. به موجب قضیه ۴.۴ ساکری-لژاندر، $d > 0$. پس یکی از زاویه‌های مثلث، مثلاً $\sphericalangle A$ باید حاده (در واقع کمتر از 60°) باشد. در طرف دیگر $\overleftrightarrow{BC}$ که A در آن نیست، فرض می‌کنیم D نقطه یکتایی باشد چنان‌که $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle ACB$ و $BD \cong AC$ (بنداشتهای ق-۱ و ق-۴). پس $\Delta ACB \cong \Delta DBC$ (ض‌زض). همچنین $\overleftrightarrow{BD} || \overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BA} || \overleftrightarrow{DC}$ (به‌موجب قضیه ۱.۴، قضیه زاویه متبادل درونی)،



شکل ۷.۵

در نتیجه D در درون زاویه حاده $\sphericalangle A$ قرار دارد. از این رو خطی مانند l گذرنده از D وجود دارد به‌طوری که ضلع $\overrightarrow{AB}$ را در نقطه $B_۱ \neq A$ می‌برد و ضلع $\overrightarrow{AC}$ را در نقطه $C_۱ \neq A$. به دلیل توازی خطوط می‌دانیم که $B_۱ \neq B$ و $C_۱ \neq C$.

فرض می‌کنیم که $B_۱$ بر ضلع AB باشد. پس A و $B_۱$ در یک طرف $\overleftrightarrow{BD}$ خواهند بود. چون $\overleftrightarrow{BD}||\overleftrightarrow{AC}$، A و C در یک طرف $\overleftrightarrow{BD}$ واقع می‌شوند. پس $B_۱$ و $C_۱$ در یک طرف $\overleftrightarrow{BD}$ واقع می‌شود (بنداشت م-۴). اما چون D در درون $\sphericalangle A$ است، $B_۱ * D * C_۱$ (گزاره ۷.۳). همچنین داریم $A * C * C_۱$. چون $\Delta DBC \cong \Delta ACB$، کاستی ΔDBC نیز برابر با d است. بنابر ویژگی جمعی کاستی برای ۴ مثلثی که از تجزیه $\Delta AB_۱C_۱$ پدید آمده‌اند، کاستی $\Delta AB_۱C_۱$ بزرگتر یا مساوی $۲d$ است.

با تکرار این ترسیم برای $\Delta AB_۱C_۱$، مثلث $\Delta AB_۲C_۲$ را به‌دست می‌آوریم با کاستی بزرگتر یا مساوی $۴d$. با تکرار این ترسیم به تعداد n بار، مثلثی به‌دست می‌آوریم با کاستی بزرگتر یا مساوی $۲^n d$، که با بزرگ گرفتن n هر قدر بخواهیم، می‌توانیم این عدد را خیلی بزرگ کنیم. ولی کاستی هر مثلث نمی‌تواند بیشتر از ۱۸۰° باشد! این تناقض نشان می‌دهد که هر مثلثی نظیر ΔABC کاستی صفر دارد.■

آیا می‌توانید نقص این کار را ببینید؟ خیلی ساده است، زیرا ما هر مرحله را توجیه کردیم جز یکی، آن هم جمله‌ای است که با «از این‌رو» شروع می‌شود. یعنی فرضی را که در فصل ۳ (پس از گزاره ۷.۳) به شما هشدار داده شده بود اختیار نکنید. لژاندر دچار همان اشتباهی شده است که چندین سده قبل سیمپلیکیوس (بیزانسی، سده ششم)، الجوهری (ایرانی، سده نهم)، نصیرالدین طوسی و دیگران دچار شده‌اند. او غفلت کرده است ثابت کند که در هندسه نتاری کاستی هر مثلث صفر است، با این وجود، لژاندر موفق شده است قضیه زیر را در هندسه نتاری ثابت کند.

قضیه ۱.۵ فرضیه: به‌ازای هر زاویه حاده $\sphericalangle A$ و هر نقطه D در درون $\sphericalangle A$، خطی گذرنده از D وجود دارد که از A نمی‌گذرد و هر دو ضلع زاویه را می‌برد. نتیجه: مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر با ۱۸۰° است.

از مدل کلاین در فصل ۷ به سادگی متوجه می‌شویم که فرضیه قضیه ۱.۵ در هندسه نااقلیدسی صادق نیست (شکل ۵.۷). اکنون نشان می‌دهیم که این فرضیه را می‌توان در هندسه اقلیدسی ثابت کرد (لذا این فرضیه حکم دیگری هم‌ارز با اصل پنجم اقلیدس است). عمودی از نقطه D واقع در درون $\sphericalangle A$ بر یکی از اضلاع $\sphericalangle A$ وارد و فرض می‌کنیم B پای آن عمود باشد. چون $\sphericalangle A$ حاده است، پس $(\sphericalangle A)^\circ + (\sphericalangle DBA)^\circ = (\sphericalangle A)^\circ + ۹۰^\circ < ۱۸۰^\circ$. لذا $\overrightarrow{BD}$ طبق اصل پنجم اقلیدس ضلع دیگر را می‌برد. ■

لامبرت و تاورینوس

در باره اصل پنجم، یوهان هاینریش لامبرت (۱۷۲۸ـ۱۷۷۷) نوشته است:

> تردیدی نیست که بداهت این حکم اساسی خیلی کمتر از احکام دیگر است. نه تنها خودبه‌خود این احساس را به آدم می‌دهد که باید ثابت شود، بلکه تا حدی این احساس را در خواننده به‌وجود می‌آورد که می‌تواند برهانی برای آن بیابد. ولی تا آنجا که من از این موضوع می‌فهمم، این تنها یک احساس زودگذر اولیه است. کسی که اثر اقلیدس را می‌خواند هر قدر جلوتر می‌رود نه تنها از دقت براهین او بلکه همچنین از سادگی و شیوایی بیانش به حیرت می‌افتد. با توجه به این ویژگی، وضع اصل پنجم، او را سخت شگفت‌زده می‌سازد وقتی می‌بیند اقلیدس گزاره‌های دشواری را ثابت کرده که می‌توانسته است اصلاً آنها را حل نکرده رها کند.

لامبرت چهارضلعی‌هایی را بررسی کرده است که دست کم سه‌زاویه قائمه دارند و اکنون به نام او معروف شده‌اند (گرچه این چهارضلعی‌ها هفت سده پیش از او توسط دانشمند مصری ابن‌هیثم مورد بررسی واقع شده است). شما در تمرین ۱۹ فصل ۴ نشان دادید که چهارضلعی‌های لامبرت وجود دارند. یک چهارضلعی لامبرت را می‌توان (با قرینه‌یابی نسبت به ضلع بین دو زاویه قائمه) «دو برابر کرد» و یک چهارضلعی ساکری به دست آورد. مانند ساکری، لامبرت فرض زاویه حاده را رد کرد و استلزامهای «خصمانه» زاویه حاده را بررسی کرد. او ملاحظه کرد که پذیرفتن زاویه

یوهان هاینریش لامبرت

حاده قابلیت انطباق مثلثهای متشابه را ایجاب می‌کند، که آن نیز وجود یک واحد طول مطلق را در پی می‌آورد (قضیه ۲.۶، فصل ۶). او این نتیجه‌گیری را «عالی» نامید ولی دلش نمی‌خواست که این نتیجه‌گیری درست باشد، نگران بود که نبود شکلهای متناسب متشابه «دردسرهای بیشماری را به‌وجود آورد»، به‌ویژه برای منجمان (او متوجه نشده بود که می‌توانسته است یک مثلثات نااقلیدسی زیبا پدید آورد).

به‌علاوه، او متوجه شده بود که کاستی مثلث با مساحتش متناسب است (فصل ۱۰). او یادآور شده بود که بر یک کره در فضای اقلیدسی، مجموع زوایای مثلث حاصل از سه قوس از سه دایره عظیمه بزرگتر از 180° است و فزونی این مجموع بر 180° با مساحت مثلث متناسب است، و این نسبت تناسب ثابت برابر با مربع شعاع کره، r^2، است (روزنفلد، ۱۹۸۸، فصل ۱). اگر به جای r مقدار ir ($i = \sqrt{-1}$) گذاشته شود با مربع شدن، علامت منها وارد می‌شود که فزونی را در آن تناسب به کاستی بدل می‌کند. از این‌رو لامبرت دقیق‌شده بود که فرض زاویه حاده بیانگر هندسه بر یک کره به شعاع موهومی است.[1]

پنجاه سال بعد، این اندیشه بی‌نظیر در جزوه‌ای به قلم ف. آ. تاورینوس با تفصیل بیشتر منتشر شد، که فرمولهای هندسه کروی را با قرار دادن ir به جای r، به فرمولهایی که او فرمولهای «هندسه کروی لگاریتمی» نامیده بود تبدیل کرده بود (این فرمولها با روشی متفاوت در قضیه ۴.۱۰، فصل ۱۰ ثابت شده‌اند). تاورینوس تردید داشت که آیا عملاً چنین «هندسه‌ای وجود دارد یا نه». لذا نسخه‌ای از جزوه خود را برای ک. ف. گاوس فرستاد، و وقتی پاسخی دریافت نکرد نومیدانه باقی نسخه‌های خود را سوزانید.

لامبرت بسط نظریه توازیهایش را منتشر نکرد (پس از درگذشت او در ۱۷۸۶ منتشر شد). این یادداشتها شامل یک تلاش اشتباه‌آمیز در رد فرض زاویه حاده بود. خط l و فاصله d داده شده‌اند. m، مکان هندسی همه نقاط واقع در یک طرف l به فاصله d از آن، را خم هم‌فاصله می‌نامیم. نقص بسیاری از تلاشهای پیشین برای اثبات اصل توازی، این فرض تلویحی بود که m، یک خط راست است. لامبرت تلاش کرده بود این فرض را ثابت کند ولی تنها موفق شده بود ثابت کند که یک قوس m نمی‌تواند یک قوس مستدیر باشد. ساکری نیز با استفاده از حساب دیفرانسیل در تلاش برای اثبات خط بودن m دچار اشتباه شده بود.[2]

۱. در واقع این مطلب را می‌توان برحسب نشانیدن طبیعی صفحه نااقلیدسی در فضای سه‌بعدی نسبیتی توضیح داد (فصل ۷). شهرت لامبرت به دلیل اثبات گنگ بودن π، $\tan x, e^x$ است وقتی x گویا باشد، و نیز برای قوانین مهمی که برای نورشناسی و نجوم کشف کرده است. این عبارت نقل قول از ب. آ. روزنفلد است (۱۹۸۸، ص ۱۰۰).

۲. مثلاً در هندسه بیضوی: اگر l خط استوای کره باشد، خمهای هم‌فاصله، مدارات هستند.

فارکاش بویویی

تلاشهایی که برای اثبات اصل پنجم اقلیدس صورت گرفته بود به‌اندازه‌ای زیاد بود که گ. ز. کلوگل در ۱۷۶۳ موفق شد رساله دکترایی تهیه کند که در آن نقایص ۲۸ برهان مختلف از اصل توازی را پیدا کرده و در ثابت‌شدنی بودن آنها تردید کند. دایرةالمعارف‌نویس و ریاضیدان فرانسوی ژ. ل. ر. دالامبر این وضع را «افتضاح هندسه» نامیده بود. ریاضیدانان به تدریج نومید می‌شدند. فارکاش بویویی مجارستانی به پسرش یانوش نوشت:

> تو دیگر نباید برای گام نهادن در راه توازیها تلاش کنی. من پیچ‌وخمهای این راه را از اول تا آخر می‌شناسم، این شب بی‌پایان را که همه روشنایی و شادمانی زندگی مرا به کام نابودی فرو برده است سپری کرده‌ام. استدعا دارم دانش موازیها را رها کن. . .من در این اندیشه بودم که خود را در راه حقیقت فدا کنم. حاضر بودم شهیدی باشم که این نقص هندسه را برطرف سازد و پاک شده آن را به عالم بشریت تقدیم نماید. من زحمتی عظیم و سترگ کشیدم. آنچه را که من آفریدم به مراتب برتر از آفریده دیگران است. ولی باز رضای خاطر به دست نیاوردم. . .وقتی دریافتم که هیچ‌کس نمی‌تواند به پایان این شب ظلمانی راه یابد بازگشتم، بی‌تسلای خاطر بازگشتم، در حالی که برای خود و بشریت متأسف بودم.
>
> می‌پذیرم که انتظار بیجایی است که بخواهم تو از راه خود منحرف شوی. اما به نظرم

فارکاش بویویی

می‌رسد که من مدتها در این دیار سر کرده‌ام و به تمامی صخره‌های جهنمی این دریای مرده سفر کرده‌ام و همیشه هم با دکل شکسته و بادبان پاره‌پاره برگشته‌ام. تباهی وضع و سقوط من به آن دوران بازمی‌گردد. من از روی بی‌فکری زندگی و خوشبختی‌ام را به مخاطره افکندم ـــ یا امپراطور یا هیچ.[۱]

ولی بویویی جوان از هشدار پدر نهراسید، زیرا که اندیشه تازه‌ای را در سر می‌پرورانید. او فرض می‌کرد که نقص اصل توازی اقلیدس حکمی بی‌معنی نیست، و در ۱۸۲۳ توانست به پدرش بنویسد:[۲]

اکنون نقشه قطعی من این است که به محض اینکه مطالب را کامل و مرتب کردم فرصتی به دست آورم کتابی درباره توازیها منتشر کنم. فعلاً هنوز راه خود را به روشنی نمی‌بینم، ولی راهی را که در پیش گرفته‌ام نشان می‌دهد که به هدف خواهم رسید، اگر این هدف اساساً رسیدنی باشد. ولی چیزهایی که کشف کرده‌ام به‌اندازه‌ای شگفت‌انگیزند که خودم حیرت‌زده شده‌ام، و بدبختی جبران ناپذیری خواهد بود اگر اینها از دست بروند. پدرجان وقتی آنها را ببینید خواهید فهمید چه می‌گویم. در شرایط کنونی تنها چیزی که می‌توانم بگویم این است که از هیچ دنیایی تازه و شگفت‌انگیز آفریده‌ام. آنچه را که قبلاً برای شما فرستادم از لحاظ مقایسه با آنچه اکنون پدید آورده‌ام بسان خانه‌ای است مقوایی در مقابل برجی رفیع. اطمینان من به افتخاراتی که این کشفها نصیب من خواهند کرد کمتر از مباهاتی نیست که در تکمیل آنها احساس خواهم کرد.

ما در فصلهای بعد به کشف این دنیای عجیب تازه خواهیم پرداخت. یک سده بعد از آنکه یانوش بویویی این نامه را نوشت، فیزیکدان انگلیسی ج. ج. تامسون، تا حدی به شوخی چنین نوشت:

ما فضای اینشتین، فضای دوسیتر، جهانهای در حال انبساط، جهانهای قابل انقباض، جهانهای در حال ارتعاش، و جهانهای مرموز را در برابر خود داریم. در واقع، ریاضیدانی که در ریاضیات محض کار می‌کند ممکن است با نوشتن یک معادله، جهانی بیافریند و در حقیقت، اگر فردگرا باشد، می‌تواند برای خود جهانی مجزا از جهان دیگران بسازد.

---

۱. (*aut Caesar aut nihil*) شعار قیصر بورژیا، در نتیجه شعار هر جاه‌طلب.ـم.
۲. مکاتبات بین فارکاش و یانوش بویویی از مشکوفسکی، ۱۹۶۴، برداشته شده است.

در واقع هم، در ۱۹۴۹ کورت گودل، منطق‌دان مشهور، مدلی از جهان پیدا کرد که در معادلات گرانشی اینشتین صدق می‌کند، جهانی که در آن از لحاظ نظری می‌توان در زمان به عقب برگشت![۱]

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) اصل والیس مستلزم وجود مثلثهای متشابه غیرقابل انطباق است.

(۲) «چهارضلعی ساکری» یک چهار ضلعی $\square ABCD$ است که $\measuredangle CAB$ و $\measuredangle DBA$ قائمه‌اند و $AC \cong BD$.

(۳) «چهارضلعی لامبرت» یک چهارضلعی است که دست‌کم سه زاویه قائمه داشته باشد.

(۴) یک چهارضلعی که هم چهارضلعی لامبرت باشد و هم چهارضلعی ساکری، باید مستطیل باشد.

(۵) یک هذلولی به حد دلخواه به مجانبهایش نزدیک می‌شود بی‌آنکه آنها را ببرد.

(۶) یانوش بویویی، پسرش فارکاش را از کار کردن در مسئله توازیها برحذر داشت.

(۷) ساکری موفق شد فرض «خصمانه»ی زاویه حاده را رد کند.

(۸) در اثبات اصل پنجم اقلیدس، بطلمیوس آنچه را که ما اصل توازی هیلبرت نامیده‌ایم تلویحاً فرض کرده است.

(۹) این یک قضیه در هندسه نتاری است که هر گاه $l \| m$ و $m \| n$، آنگاه $l \| n$.

(۱۰) این یک قضیه در هندسه نتاری است که هر پاره‌خط منحصراً یک نقطه وسط دارد.

(۱۱) این یک قضیه در هندسه نتاری است که اگر مستطیل وجود داشته باشد، مجموع زوایای مثلث $180°$ است.

(۱۲) این یک قضیه در هندسه نتاری است که هر گاه دو خط موازی l و m را قاطعی ببرد زاویه‌های متبادل درونی قابل انطباق‌اند.

(۱۳) لژاندر ثابت کرد که در هندسه نتاری به‌ازای هر زاویه حاده $\measuredangle A$ و هر نقطه D واقع در داخل $\measuredangle A$ خطی وجود دارد که از A نمی‌گذرد ولی از D می‌گذرد و هر دو ضلع $\measuredangle A$ را می‌برد.

۱. باید اشاره کنم که تمام تلاشهایی که برای رد مدل گودل، چه بر اساس دلایل ریاضی و چه بر اساس دلایل فلسفی، به‌عمل آمده به شکست منجر شده‌اند. ر. ک. به:
"On the paradoxical time-structures of Gödel," by Howard Stein, *Journal of the Philosophy of Science*, v. 37, December 1970, p. 589.

(۱۴) کلرو نشان داد که در نمایش منطقی هندسه اقلیدسی می‌توان به‌جای اصل پنجم اقلیدس اصل «بدیهی‌تر» وجود مستطیل را گذاشت، ولی ریاضیدانان با این جایگذاری موافق نبودند و به اثبات اصل پنجم ادامه دادند.

تمرین

در اثبات تمرینهای ۱ـ۱۷ باز هم مجازید تنها از نتایجی که قبلاً از هندسه نتاری به دست آمده استفاده کنید.

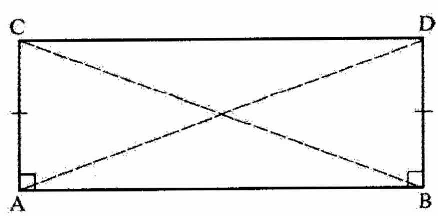
۱. فرض می‌کنیم $\square ABDC$ یک چهارضلعی ساکری باشد به‌طوری‌که $\measuredangle A$ و $\measuredangle B$ قائمه باشند و $CA \cong DB$ (شکل ۸.۵) ثابت کنید $\measuredangle C \cong \measuredangle D$. (راهنمایی: ثابت کنید $\Delta CAB \cong \Delta DBA$، سپس ثابت کنید $\Delta DCA \cong \Delta CDB$.) همچنین ثابت کنید که چهارضلعی ساکری وجود دارد.

۲. فرض می‌کنیم $\square ABDC$ یک چهارضلعی است که زاویه‌های مجاور به قاعده‌اش $\measuredangle A$ و $\measuredangle B$ قائمه‌اند. ثابت کنید که هرگاه $AC < BD$، آنگاه $(\measuredangle D)^\circ < (\measuredangle C)^\circ$ (شکل ۹.۵). (راهنمایی: اگر $AC \cong BE$ و $B * E * D$، آنگاه با استفاده از تمرین ۲۳، فصل ۴، نشان دهید که E در درون $\measuredangle ACD$ است، سپس از تمرین ۱ و قضیه زاویه بیرونی استفاده کنید.)

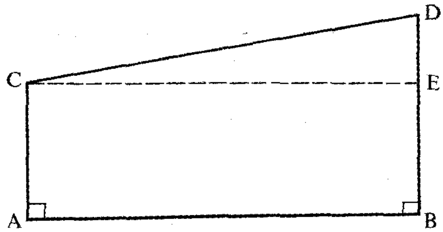
۳. با همان فرض تمرین ۲، عکس این حکم را ثابت کنید که: اگر $(\measuredangle D)^\circ < (\measuredangle C)^\circ$، آنگاه $AC < BD$. (راهنمایی: خلافش را فرض کنید که شامل دو حالت است $AC \cong BD$ و $AC > BD$. در هر حالت تناقضی از آن نتیجه بگیرید.)

۴. لامبرت ریاضیدان سوییسی‌ـآلمانی، چهارضلعی‌هایی را در نظرگرفت که لااقل سه زاویه قائمه داشتند و اکنون به نام خود او معروف‌اند (شکل ۱۰.۵). ثابت کنید:

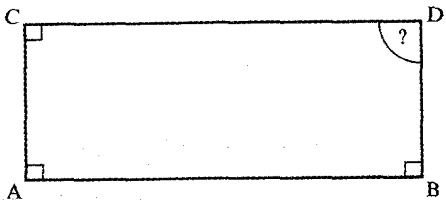
(الف) چهارمین زاویه $\measuredangle D$ در چهارضلعی لامبرت هرگز منفرجه نمی‌شود.



شکل ۸.۵



شکل ۹.۵



شکل ۱۰.۵ چهارضلعی لامبرت.

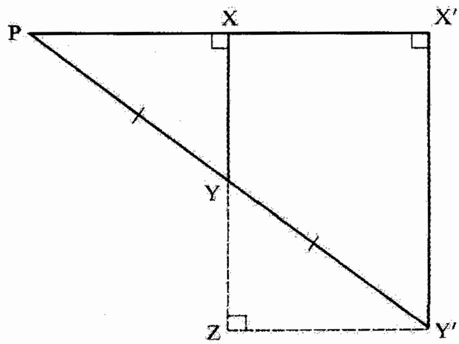
(ب) اگر $\measuredangle D$ قائمه باشد اضلاع روبه‌روی $\square ABCD$ قابل انطباق‌اند (از تمرین ۲ و برهان خلف استفاده کنید).

(ج) اگر $\measuredangle D$ حاده باشد، هر ضلع مجاور به $\measuredangle D$ از ضلع روبه‌رویش بزرگتر است، یعنی $DB > CA$ و $CD > AB$ (از تمرین ۳ استفاده کنید).

(د) یک چهارضلعی تنها و تنها زمانی چهارضلعی لامبرت و چهارضلعی ساکری است که مستطیل باشد.

می‌توانیم احکام (الف)، (ب)، و (ج) را در این تمرین با هم ترکیب کنیم و بدین صورت در آوریم: یک ضلع مجاور به زاویه چهارم از چهارضلعی لامبرت بزرگتر از ضلع روبه‌رویش یا قابل انطباق با آن است. همان‌گونه که می‌دانید، حالت (ب) در هندسه اقلیدسی همیشه صادق است؛ در فصل بعد نشان خواهیم داد که حالت (ج) همیشه صادق است اگر هندسه هذلولوی باشد. در هندسه بیضوی چهارمین زاویه چهارضلعی لامبرت همیشه منفرجه است و ضلع مجاور به زاویه چهارم همیشه از ضلع روبه‌رویش کوچکتر است.

۵. مثلث قائم‌الزاویه ΔPXY قائمه در X داده شده است. مثلث قائم‌الزاویه تازه $\Delta PX'Y'$ را چنان می‌سازیم که در زاویه حاده $\measuredangle P$ با اولی مشترک باشد ولی وترش دو برابر آن باشد (ثابت



شکل ۱۱.۵

کنید که این کار شدنی است؛ شکل ۱۱.۵). ثابت کنید که ضلع روبه‌رو به زاویه حاده حداقل دو برابر می‌شود، در حالی که زاویه مجاور به زاویه حاده حداکثر دو برابر می‌شود. (راهنمایی: XY را به اندازه‌ای امتداد دهید که بتوانید عمود $Y'Z$ را بر $\overleftrightarrow{XY}$ فرود آورید. ثابت کنید $\Delta PXY \cong \Delta Y'ZY$، و از تمرین ۴ برای چهارضلعی لامبرت $\square XZY'X'$ استفاده کنید.)

۶. از تمرین ۵ استفاده کنید تا بنداشت ارسطو را که وقتی Y از P بی‌نهایت دور شود، پاره‌خط XY بی‌نهایت بزرگ می‌شود (که در برهان پروکلوس به کار رفته) ثابت کنید (صفحه ۱۰۴). (راهنمایی: از بنداشت ارشمیدس و این واقعیت استفاده کنید که وقتی $n \to \infty$، آنگاه $\infty \leftarrow ۲^n$)[1]. آیا طول پاره‌خط PX هم بی‌نهایت زیاد می‌شود؟

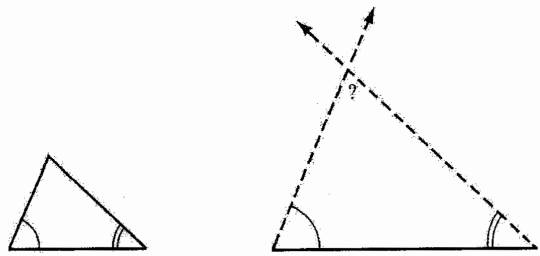
۷. (الف) ثابت کنید که اصل پنجم اقلیدس اصل والیس را ایجاب می‌کند (شکل ۱۲.۵). (راهنمایی: از بنداشت ق-۴ و این واقعیت استفاده کنید که در هندسه اقلیدسی مجموع زاویه‌های یک مثلث $^\circ$۱۸۰ است ــ گزاره ۱۱.۴.)

(ب) فرض می‌کنیم که در حکم اصل والیس فرض $AB \cong DE$ را اضافه کنیم و به جای واژه «متشابه» واژه «قابل انطباق» بگذاریم. این حکم را در هندسه نتاری ثابت کنید.

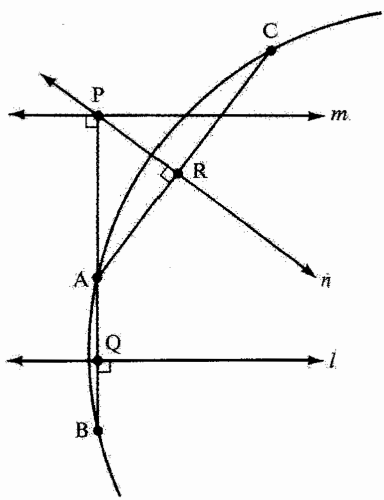
۸. برهان ناموفق لژاندر را برای اصل توازی در فصل ۱ دوباره بخوانید. نقص آن را یافته و همه مراحل صحیح را توجیه کنید. این حکم ناقص را در هندسه اقلیدسی ثابت کنید.

۹. فرض ثابت نشده‌ای را که در «برهان» اصل توازی فارکاش بویویی به شرح زیر به کار رفته پیدا کنید (شکل ۱۳.۵). نقطه P ناواقع بر خط l داده شده است، $\overleftrightarrow{PQ}$ در نقطه Q بر l عمود است و m در نقطه P بر $\overleftrightarrow{PQ}$. فرض می‌کنیم n خط دلخواهی گذرنده از P متمایز از m و $\overleftrightarrow{PQ}$

۱. اقلیدس صورت خاصی از بنداشت ارشمیدس را در مقاله پنجم در نظر می‌گیرد، ولی آن را به‌صورت «تعریف» بیان می‌کند: اگر $a < b$، آنگاه عددی مانند n وجود دارد به قسمی که $۲^n a > b$.



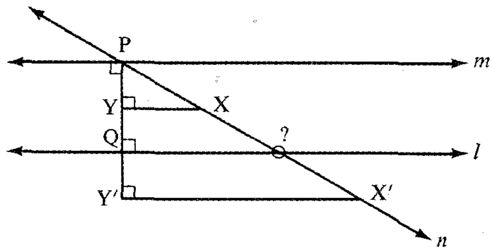
شکل ۱۲.۵



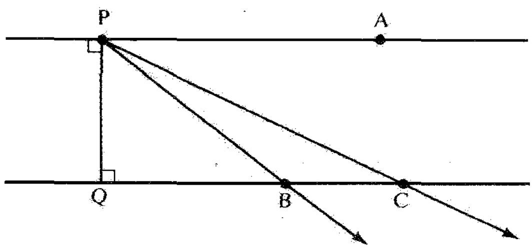
شکل ۱۳.۵

باشد. باید نشان دهیم که خط n خط l را می‌برد. فرض می‌کنیم A نقطه‌ای بین P و Q باشد، و B تنها نقطه‌ای است که $A * Q * B$ و $AQ \cong QB$. اگر R پای عمود مرسوم از A بر n باشد و C نقطه یکتایی باشد به‌طوری‌که $A * R * C$ و $AR \cong RC$. آنگاه A، B، و C هم‌خط نیستند (یا $R = P$). بنابراین یک دایره یکتای γ وجود دارد که بر آنها می‌گذرد. چون l عمود منصف وتر AB و n عمود منصف وتر AC از دایره γ هستند، پس l و n در مرکز γ یکدیگر را می‌برند (تمرین ۱۷(ب)، فصل ۴).

۱۰. برهان نافرجام زیر برای اثبات اصل توازی، مشابه با برهان پروکلوس است اما با نقصی متفاوت. به کمک تمرین ۵ این نقص را پیدا کنید (شکل ۱۴.۵). P ناواقع بر l، $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود بر l در



شکل ۱۴.۵



شکل ۱۵.۵

Q، و m عمود بر $\overleftrightarrow{PQ}$ در P داده شده‌اند. اگر n خطی نامشخص گذرنده از P غیر از m و $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد. باید نشان دهیم که خط n خط l را می‌برد. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PX}$ نیم‌خطی از n بین $\overleftrightarrow{PQ}$ و یک نیم‌خط از m باشد، و Y پای عمود مرسوم از X بر $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد. وقتی X از P بی‌نهایت دور می‌شود، PY بی‌اندازه بزرگ می‌شود تا اینکه Y سرانجام به موقعیت Y' روی $\overleftrightarrow{PQ}$ می‌رسد به قسمی که $PY' > PQ$. فرض می‌کنیم که X' موقعیت متناظر X بر خط n باشد. اما X' و Y' در یک طرف l واقع‌اند زیرا $X'Y'$ با l موازی است. ولی Y' و P در دو طرف l هستند. بنابراین X' و P در دو طرف l واقع می‌شوند، و در نتیجه پاره‌خط PX' (که جزئی از n است) l را می‌برد.

۱۱. نقص برهان ناموفق زیر را برای اثبات اصل توازی که ژ. د. ژرگون داده است پیدا کنید (شکل ۱۵.۵). نقطه P ناواقع بر l، $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود بر l در Q، m عمود بر $\overleftrightarrow{PQ}$ در P، و نقطه $A \neq P$ بر m داده شده‌اند. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PB}$ آخرین نیم‌خط بین $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PQ}$ باشد که l را در B بریده است. نقطه‌ای مانند C بر l وجود دارد به قسمی که $Q * B * C$ (بنداشتهای م-۱ و م-۲). از اینجا نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{PB}$ آخرین نیم‌خط بین $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PQ}$ نیست که l را می‌برد. بنابراین همه نیم‌خطهای بین $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PQ}$ خط l را می‌برند. لذا m تنها خط موازی با l گذرنده از P است.

۱۲. لژاندر تلاش دیگری برای اثبات صفر بودن کاستی هر مثلث، به شرح زیر، انجام داده

است. در هر مثلث $\triangle ABC$ اگر اعداد α و β که به ترتیب اندازه زوایای A و B هستند به ما داده شده باشد و عدد x طول ضلع AB باشد، آنگاه به موجب زض‌ز عدد γ که معرف اندازه زاویه سوم است به طور یکتا مشخص می‌شود. لذا می‌توانیم بنویسیم $\gamma = f(\alpha, \beta, x)$. اما اگر زاویه‌های قائمه با واحد ۱ اندازه گرفته شوند، γ عددی است بین ° و ۲. اما x یک عددی بی‌بعد نیست، زیرا به واحد دلخواه طول (مثلاً، اینچ، فوت، یا متر) بستگی دارد. از این رو فرمولی که برای γ وجود دارد نمی‌تواند عملاً شامل x باشد، لذا $\gamma = f(\alpha, \beta)$. (اگر می‌دانستیم که هندسه اقلیدسی است، می‌داشتیم $f(\alpha, \beta) = ۲ - \alpha - \beta$.) حال فرض می‌کنیم D وسط AB باشد. به موجب بنداشت ق-۴، یک نیم‌خط $\overrightarrow{DE}$ با E در همان طرف ضلع AB که C واقع است وجود دارد به قسمی که $\sphericalangle B \cong \sphericalangle ADE$. پس، به دلیل زوایای متناظر، $\overleftrightarrow{DE} \| \overleftrightarrow{BC}$ (تمرین ۳۲، فصل ۴)، لذا به موجب قضیه پاش می‌توانیم حرف E را نقطه‌ای بر AC بگیریم. چون برای هر مثلث $\gamma = f(\alpha, \beta)$، لذا $\sphericalangle C \cong \sphericalangle AED$ (یعنی$\triangle ADE$ با $\triangle ABC$ متشابه است). بنابراین چهارضلعی $\square CEDB$ مجموع زوایایی برابر با °۳۶۰ دارد. پس مثلث $\triangle CEB$ و $\triangle BED$ هر یک مجموع زوایایی برابر °۱۸۰ دارد. به موجب قضیه ۷.۴، همه مثلثها کاستی صفر دارند. نقص کار درکجاست؟ (راهنمایی: ← به تذکرات پس از قضیه ۲.۶.)

۱۳. در آغاز این فصل گفته شده بود که اگر همه مراحل یک تلاش، جز یکی، برای اثبات اصل توازی صحیح باشند، همان یک مرحله خدشه‌دار حکم دیگری است که با اصل توازی هیلبرت هم‌ارز است. نشان دهید که در تلاش پروکلوس آن حکم خدشه‌دار این است: خطوط موازی l و m که یک عمود مشترک دارند و یک نقطه Y ناواقع بر l یا m داده شده‌اند. اگر X (به‌ترتیب Z) پای عمود وارد از Y بر l (به‌ترتیب بر m) باشد، آنگاه X، Y، و Z همخط‌اند (راهنمایی: از تمرین ۴ (ب) استفاده کنید).

۱۴. ثابت کنید که اگر کاستی هر مثلث صفر باشد، اصل توازی هیلبرت صادق است (این گزاره عکس ۱۱.۴ است). (راهنمایی: ← بحث بنداشت کلرو.)

۱۵. در تمرین ۲۴ نشان خواهید داد که حکم زیر را می‌توان در هندسه اقلیدسی ثابت کرد: اگر P و Q و R سه نقطه واقع بر دایره‌ای به مرکز O باشند و اگر $\sphericalangle PQR$ حاده باشد، آنگاه $(\sphericalangle PQR)^\circ = \frac{۱}{۲}(\sphericalangle POR)^\circ$ در هندسه نتاری نشان دهید که این حکم مستلزم وجود مثلثی است با کاستی صفر (بنابراین، به‌موجب گزاره ۷.۴ و بنداشت کلرو، هندسه، هندسه اقلیدسی است).

۱۶. (دشوار) این تلاش یأس‌آمیز لژاندر در دوازدهمین و آخرین چاپ کتاب درسی هندسه‌اش در اثبات صفر بودن کاستی dی هر مثلث $\triangle ABC$ است. حرف‌گذاری را طوری انجام می‌دهیم که $\overline{AC} \geq \overline{AB}$. در این صورت روش تمرین ۱۵ فصل ۴ (ابداع لژاندر برای اثبات قضیه ۴.۴) مثلث

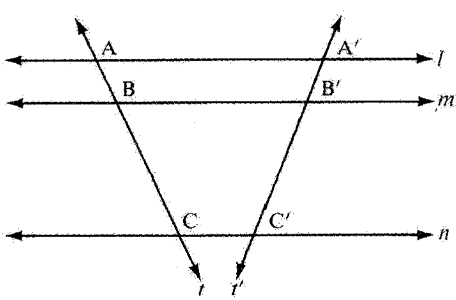
ΔAEC را به ما می‌دهد که همان کاستی d را دارد (که $\overline{AE} = ۲\overline{AD}$، D وسط BC). با توجه به $\overline{AB} \geq \overline{AC}$، می‌توان به آسانی نشان داد که $\measuredangle EAB \geq \measuredangle EAC$، لذا $\measuredangle BAC\ \tfrac{۱}{۲} \geq \measuredangle EAC$. اگر $\overline{AE} \geq \overline{AC}$، قرار می‌دهیم $B_۱ = E$ و $C = C_۱$، در غیر این‌صورت قرینه مثلث ΔAEC را نسبت به نیمساز زاویه $\measuredangle EAC$ پیدا می‌کنیم تا مثلث $\Delta AB_۱C_۱$ با کاستی d به‌دست آید، $\measuredangle BAC\ \tfrac{۱}{۲} > \measuredangle B_۱AC_۱$، $C_۱$ بر نیم‌خط $\overrightarrow{AC}$ و $\overline{AB_۱} \geq \overline{AC_۱}$. با n بار تکرار این ترسیم، ΔAB_nC_n را با کاستی d به دست می‌آوریم، $\measuredangle BAC\ ۲^{-n} \geq \measuredangle B_nAC_n$، و C_n بر نیم‌خط $\overrightarrow{AC}$ است. فرض می‌کنیم $n \to \infty$. چون $\measuredangle B_nAC_n \to ۰$، مثلثهای ΔAB_nC_n (که همه کاستی d دارند) در حد به یک مثلث تباهیده بر نیم‌خط $\overrightarrow{AC}$ همگرا می‌شوند که زوایای ۰°، ۰°، و ۱۸۰° دارند. بنابراین $d = ۰$. این استدلال را نقد کنید. (راهنمایی: نشان دهید که $B_n, C_n \to \infty$.)

۱۷. ثابت کنید چهارضلعی ساکری کوژ است. ثابت کنید چهارضلعی لامبرت یک متوازی‌الاضلاع است و هر متوازی‌الاضلاع کوژ است.

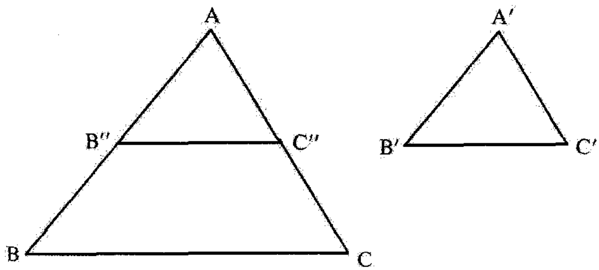
بقیه تمرینهای این فصل، تمرینهایی از هندسه اقلیدسی هستند، بدین معنی‌که شما مجازید از اصل توازی و نتایج آن، که قبلاً ثابت کرده‌ایم استفاده کنید. ما در فصل هفتم به این نتایج اشاره خواهیم کرد، همچنین مجازید از قضیه زیر که یک برهان آن در تمرین اصلی داده شده استفاده کنید.

قضیه تصویر موازی. سه خط موازی l، m، و n داده شده‌اند. فرض می‌کنیم t و t' موربهایی باشند که این خطوط را به‌ترتیب در A، B، C و A'، B'، C' بریده‌اند. در این صورت $\overline{AB}/\overline{BC} = \overline{A'B'}/\overline{B'C'}$ (شکل ۱۶.۵).

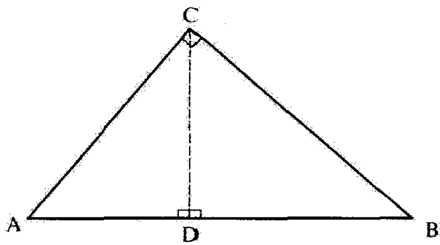
۱۸. قضیه بنیادی مثلثهای متشابه. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ یعنی $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$، $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$، و $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$ داده شده‌اند. در این صورت اضلاع متناظر متناسب‌اند، یعنی $\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{BC}/\overline{B'C'} = \overline{AC}/\overline{A'C'}$ (شکل ۱۷.۵). این قضیه را ثابت کنید. (راهنمایی:



شکل ۱۶.۵



شکل ۱۷.۵



شکل ۱۸.۵

نقطه B'' را بر $\overrightarrow{AB}$ چنان بگیرید که $AB'' \cong A'B'$ و نقطه C'' را بر $\overrightarrow{AC}$ چنان بگیرید که $AC'' \cong A'C'$. با استفاده از فرض، نشان دهید که $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$ و از زاویه‌های متناظر نتیجه بگیرید که $\overleftrightarrow{B''C''}$ با $\overleftrightarrow{BC}$ موازی است. حال از قضیه تصویر موازی استفاده کنید.)

۱۹. عکس قضیه اصلی در باب مثلثهای متشابه را ثابت کنید. (راهنمایی: B'' را مانند پیش اختیار کنید. با استفاده از قضیه پاش نشان دهید که خطی که از B'' به موازات $\overleftrightarrow{BC}$ رسم می‌شود AC را در یک نقطه C'' می‌برد، سپس از فرض، تمرین ۱۸، و ملاک ض‌ض‌ض استفاده کنید تا نشان دهید $\Delta ABC \sim \Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$.)

۲۰. ملاک تشابه ض‌زض. اگر $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A'$ و $(\overline{AB}/\overline{A'B'}) = (\overline{AC}/\overline{A'C'})$، ثابت کنید که $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. (راهنمایی: از همان روش تمرین ۱۹ استفاده کنید، و به جای ض‌ض‌ض از ض‌زض استفاده کنید.)

۲۱. قضیه فیثاغورس را ثابت کنید. (راهنمایی: فرض کنید CD ارتفاع وارد بر وتر باشد (شکل ۱۸.۵). از این واقعیت که مجموع زوایای مثلث ۱۸۰° است استفاده کنید (تمرین ۸، فصل ۴) تا نشان دهید که $\Delta ACD \sim \Delta ABC \sim \Delta CBD$. از تمرین ۱۸ و اندکی محاسبات جبری بر اساس $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ کمک بگیرید تا نتیجه را به‌دست آورید.)

۲۲. قضیه بنیادی مثلثهای متشابه (تمرین ۱۸) به ما اجازه می‌دهد که توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس را تعریف کنیم. یعنی زاویه حاده $\measuredangle A$ داده شده است. آن را به جزئی از یک مثلث قائم‌الزاویه $\triangle BAC$ قائمه در $\measuredangle C$ بدل کنید و قرار دهید:

$$\sin \measuredangle A = (\overline{BC})/(\overline{AB})$$
$$\cos \measuredangle A = (\overline{AC})/(\overline{AB}).$$

این تعاریف مستقل از انتخاب مثلث قائم‌الزاویه‌ای هستند که می‌سازید. اگر $\measuredangle A$ منفرجه و $\measuredangle A'$ مکمل آن باشد قرار می‌دهیم

$$\sin \measuredangle A = +\sin \measuredangle A'$$
$$\cos \measuredangle A = -\cos \measuredangle A'.$$

اگر $\measuredangle A$ قائمه باشد قرار می‌دهیم

$$\sin \measuredangle A = ۱$$
$$\cos \measuredangle A = ۰$$

حال مثلث نامشخص $\triangle ABC$ داده شده است، اگر a و b به‌ترتیب طولهای مقابل به A و B باشند، قانون سینوسها را ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \measuredangle A}{\sin \measuredangle B}$$

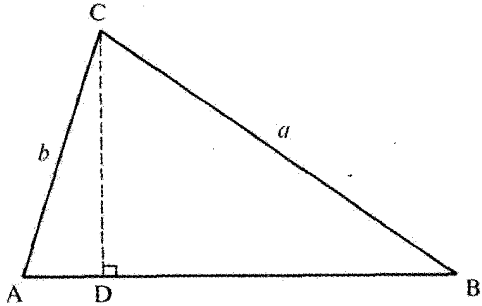
(راهنمایی: عمود CD را رسم و از دو مثلث قائم‌الزاویه $\triangle BDC$ و $\triangle ADC$ استفاده کنید تا نشان دهید که $b \sin \measuredangle A = \overline{CD} = a \sin \measuredangle B$؛ شکل ۱۹.۵.) همچنین قانون کسینوسها را ثابت کنید:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab \cos \measuredangle C$$

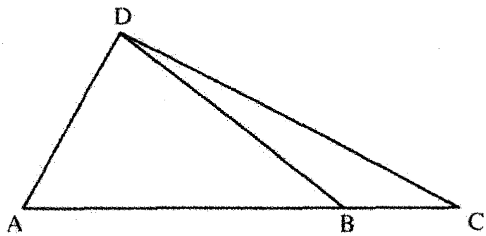
و عکس قضیه فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

۲۳. $A * B * C$ و نقطه D که با A، B، و C هم‌خط نیست داده شده‌اند (شکل ۲۰.۵). ثابت کنید

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD} \sin \measuredangle ADB}{\overline{CD} \sin \measuredangle CDB}$$
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD} \sin \measuredangle ADC}{\overline{BD} \sin \measuredangle BDC}$$



شکل ۱۹.۵



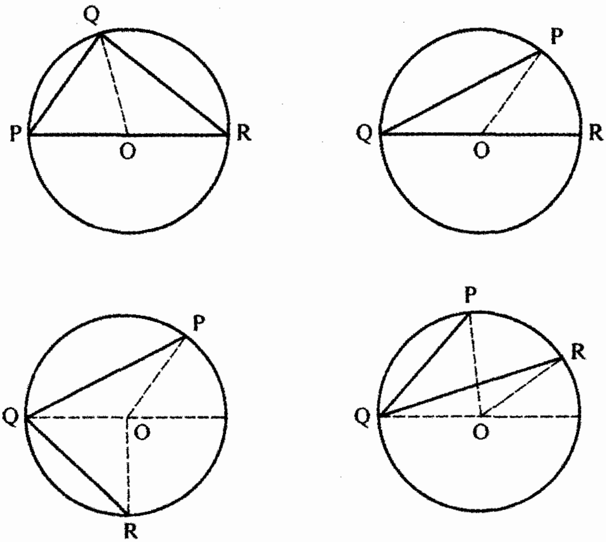
شکل ۲۰.۵

(راهنمایی: از قانون سینوسها برای محاسبه $\overline{AB}/\overline{AD}$، $\overline{CD}/\overline{BC}$، و $\overline{BD}/\overline{BC}$ استفاده کنید، و به یاد داشته باشید که $\sin \measuredangle ABD = \sin \measuredangle CBD$.)

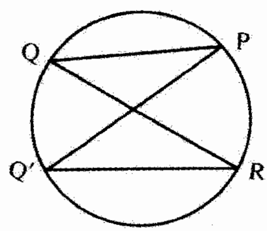
۲۴. فرض می‌کنیم γ دایره‌ای به مرکز O باشد و نقاط P، Q، و R واقع بر γ باشند. ثابت کنید که اگر P و R متقاطر باشند، آنگاه $\measuredangle PQR$ قائمه است، و اگر O و Q در یک طرف $\overleftrightarrow{PR}$ باشند، آنگاه $(\measuredangle PQR)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle POR)^\circ$. (راهنمایی: باز از این واقعیت که مجموع زوایای مثلث 180° است استفاده کنید. چهار حالت نظیر شکل ۲۱.۵ وجود دارد که باید در نظر بگیرید.) ثابت کنید وقتی O و Q در دو طرف $\overleftrightarrow{PR}$ باشند نتیجه مشابهی حاصل می‌شود.

۲۵. ثابت کنید که اگر دو زاویه محاطی روبه‌رو به یک کمان باشند قابل انطباق‌اند (شکل ۲۲.۵). (راهنمایی: از تمرین پیش استفاده کنید.)

۲۶. ثابت کنید اگر $\measuredangle PQR$ قائمه باشد، Q بر محیط یک دایره قرار دارد که PR قطر آن است. (راهنمایی: از یگانه بودن عمودها و تمرین ۲۴ استفاده کنید.)



شکل ۲۱.۵



شکل ۲۲.۵ $\measuredangle PQR \cong \measuredangle PQ'R$.

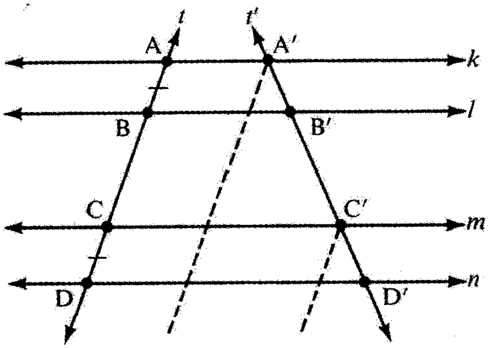
تمرینهای اصلی

این تمرینها برهانی برای قضیه تصویر موازی در هندسه اقلیدسی به‌دست می‌دهند (← متن قبل از تمرین ۱۸، و شکل ۱۶.۵).

۱. قضایای زیر را برای متوازی‌الاضلاع اقلیدسی ثابت کنید:

(الف) اضلاع مقابل (و همچنین زوایای مقابل) قابل انطباق‌اند.

(ب) متوازی‌الاضلاع مستطیل است اگر و تنها اگر قطرهایش قابل انطباق باشند، و در این حالت قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.



شکل ۲۳.۵

(ج) یک متوازی‌الاضلاع یک دایره محیطی دارد اگر و تنها اگر مستطیل باشد. (راهنمایی: برای «تنها اگر» زوایای مقابل باید روبه‌رو به نیم‌دایره باشند.)

(د) مستطیل مربع است اگر و تنها اگر قطرهایش بر هم عمود باشند.

۲. فرض می‌کنیم k، l، m، و n چهار خط موازی متمایز باشند، جز اینکه احتمالاً $l = m$. فرض می‌کنیم موربهای t و t' این موازیها را به‌ترتیب در A، B، C، D، $\mathrm{A'}$، $\mathrm{B'}$، $\mathrm{C'}$، و $\mathrm{D'}$ ببرند (شکل ۲۳.۵). اگر $\mathrm{AB} \cong \mathrm{CD}$، ثابت کنید $\mathrm{A'B'} \cong \mathrm{C'D'}$. (راهنمایی: از $\mathrm{A'}$ و $\mathrm{C'}$ خطوطی موازی با t رسم کنید و از تمرین اصلی ۱(الف) و قابلیت انطباق زاویه‌های متناظر استفاده کنید.)

۳. ثابت کنید تصویر موازی میان‌بود را حفظ می‌کند، یعنی‌اگر در شکل ۱۶.۵، $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}$، آنگاه $\mathrm{A'} * \mathrm{B'} * \mathrm{C'}$. (راهنمایی: از بنداشت م-۴ استفاده کنید.)

۴. قضیه تصویر موازی را برای حالت خاصی که نسبت طولهای $\overline{\mathrm{AB}}/\overline{\mathrm{BC}}$ عدد گویای p/q باشد ثابت کنید. (راهنمایی: AB را به p پاره‌خط قابل انطباق و BC را به q پاره‌خط قابل انطباق تقسیم کنید که در نتیجه $p + q$ پاره‌خط قابل انطباق خواهید داشت. از تمرین اصلی ۲، $p + q$ بار استفاده کنید.)

۵. حالتی که $\overline{\mathrm{AB}}/\overline{\mathrm{BC}}$ عدد غیرگویای (گنگ) x باشد حالتی است دشوار. فرض می‌کنیم $\overline{\mathrm{A'B'}}/\overline{\mathrm{B'C'}} = x'$. ایده ما این است که نشان دهیم هر عدد گویای p/q کمتر از x، از x' هم کمتر است (و عکس آن با استفاده از تقارن). این امر ایجاب می‌کند که $x = x'$، زیرا یک عدد حقیقی، کمترین کران بالای[1] همه اعداد گویای کمتر از خودش است. برای نشان دادن این مطلب، در روی $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ پاره‌خط BD را برابر با طول $p\overline{\mathrm{CB}}/q$ جدا کرده و فرض می‌کنیم $\mathrm{D'}$ تصویر موازی

1. least upper bound

D بر روی t' باشد. از $p/q < x$ نتیجه بگیرید که $B * D * A$. حال از تمرینهای ۳ و ۴ اصلی استفاده کنید تا نشان دهید $p/q < x'$.[۱]

۶. پاره‌خط AB به‌طول a برحسب پاره‌خط واحد OI داده شده است (قضیه ۳.۴). با استفاده از خط‌کش و پرگار تنها، نشان دهید چگونه پاره‌خطی به‌طول $\sqrt{a}$ را رسم می‌کنید. (راهنمایی: پاره‌خط AB را امتداد دهید تا AC به‌طول $a + ۱$ به‌دست آید. عمودی از B بر AB اخراج و فرض کنید D یکی از نقاط تلاقی این عمود با دایره به قطر AC باشد. از نظریه مثلثهای متشابه استفاده کنید تا نشان دهید که $\overline{BD} = \sqrt{a}$ برای این ترسیم، ر.ک. به تمرین اصلی ۱، فصل ۱.)

۷. اگر خط غیر مشخص l داده شده باشد، ثابت کنید که دو نقطه A و B ناواقع بر آن در یک طرف S از l قرار دارند اگر و تنها اگر بر دایره‌ای واقع در S قرار داشته باشند. (راهنمایی: اگر A و B در دو طرف l باشند، از تمرین اصلی ۱، فصل ۴، استفاده کنید. اگر در یک طرف S باشند، فرض می‌کنیم M وسط و m عمودمنصف AB باشد. هر دایره گذرنده از A و B مرکزش بر m واقع است. اگر $\overleftrightarrow{AB} || l$، یک نقطه P بین M و محل تلاقی m با l بگیرید و از دایره گذرنده از A، B، و P استفاده کنید (تمرین ۱۲، فصل ۶). در غیر این‌صورت اگر A نزدیکتر از B به l باشد، عمود مرسوم از A بر l، m را در O می‌برد. نشان دهید که دایره به مرکز O و شعاع $OA \cong OB$ در S واقع است. مطمئناً باید نشان دهید که فرض هندسه اقلیدسی در کجا به کار رفته است؛ تمرین پ-۲۰، فصل ۷.)

پروژه

۱. چون در اصول اقلیدس جبر وجود ندارد، کشف یک راه کاملاً هندسی برای پرداختن به نسبتها و مثلثهای متشابه واقعاً کار عظیمی برای ائودوکسوس بوده است. با مراجعه به هیث (۱۹۵۶) و موییز (۱۹۹۰، فصل ۲۰)، گزارشی در این باب تهیه کنید.

۲. ائودوکسوس پایه‌گذار نجوم نظری نیز بود (اثر او را بعدها بطلمیوس اصلاح کرد). در مدل او، جهان به «کره سماوی» محدود شده بود، لذا تعبیر فیزیکی اصلهای دوم و سوم اقلیدس غلط از آب درمی‌آمد! حتی کپلر و گالیله یک حد بیرونی برای جهان قایل بودند. این دکارت (۱۵۹۶-۱۶۵۰)

---

۱. این روش داهیانه اثبات، اساساً از آن ریاضیدانان یونان قدیم ائودوکسوس است. ر.ک. به مقاله E. C. Zeeman تحت عنوان «Research, Ancient and Modern» در مجله:

Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications,10 (1974):272-281, Warwick University, England.

بود که از این اندیشه که ما در فضای اقلیدسی نامتناهی بی‌کران زندگی می‌کنیم پشتیبانی می‌کرد. گزارشی از این موضوع، با استفاده از تورتی (۱۹۷۸) به‌عنوان یک مرجع، تهیه کنید.

۳. با استفاده از روزنفلد (۱۹۸۸) به‌عنوان مرجع، گزارشی درباره چند تلاش دیگر برای اثبات اصل توازی اقلیدسی در هندسه نتاری تهیه کنید.

۴. پس از قضیه ۳.۴ اشاره کردیم که تعریف عدد π به‌عنوان نسبت محیط دایره به قطرش فقط در هندسه اقلیدسی قابل توجیه است، نه در هندسه نتاری. درباره توجیه موییز (۱۹۹۰)، بخش ۲.۲۱، که در آن از نظریه مثلثهای متشابه استفاده می‌شود، گزارشی تهیه کنید.

۶

کشف هندسه نااقلیدسی

من از هیچ، دنیایی تازه و شگفت‌انگیز آفریده‌ام.
یانوش بویویی

یانوش بویویی

جالب است گاهی هنگامی‌که زمان برای ظهور اندیشه جدیدی کاملاً مناسب است، آن اندیشه در نزد چند تن، کم‌وبیش همزمان، پدیدار می‌شود. مثلاً کشف حسابان در سده هجدهم به‌وسیله نیوتن در انگلستان و لایبنیتس در آلمان، و همچنین کشف هندسه نااقلیدسی در سده نوزدهم در زمره این‌گونه رویدادها هستند. هنگامی‌که یانوش بویویی (۱۸۰۲ـ۱۸۶۰) پدرش را محرمانه ازکشفیات خود در زمینه هندسه نااقلیدسی آگاه ساخت، توصیه پدرش فارکاش، به او چنین بود:

به نظر من مصلحت این است که اگر واقعاً توفیق یافته‌ای راه‌حلی برای این مسئله بیابی، به دو دلیل باید در انتشار آن تسریع کنی: نخست بدین علت که اندیشه‌ها به آسانی و خیلی زود از یکی به دیگری، که ممکن است آنها را منتشر سازد، منتقل می‌شوند. ثانیاً بدین سبب که به نظر

درست می‌آید، که بسیاری از چیزها، همان‌گونه که همیشه بوده است، دورانی دارند که در آن همزمان در چند جا کشف شده‌اند. نظیر گلهای بنفشه که در بهاران در همه جا شکفته می‌شوند.[۱]

یانوش بویویی کشفیات خود را به‌صورت یک پیوست ۲۶ صفحه‌ای در کتاب (تنتامن[2] ، ۱۸۳۱)، که پدرش در تحقیق درباره تلاشهای انجام‌شده برای اثبات اصل پنجم اقلیدس نوشته است، منتشر کرد. پدر با شوق فراوان نسخه‌ای از این کتاب را برای دوست دیرین آلمانی‌اش، کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵)، که بزرگترین ریاضیدان مسلم آن عصر بود فرستاد. فارکاش بویویی از سی‌وپنج سال پیش با گاوس، که هر دو دانشجوی دانشگاه گوتینگن بودند، دوستی نزدیک داشت و هنگامی‌که به اتریش برگشت این دوستی دیرینه را با مکاتبه حفظ کرد.[۳] وقتی فارکاش تلاش خود را برای اثبات اصل توازی نزد گاوس فرستاد، گاوس استادانه نقص کار او را یافت و به او گوشزد کرد.

یانوش در ۱۳ سالگی بر حساب دیفرانسیل و انتگرال مسلط شده بود. پدرش نامه‌ای به گاوس نوشت و از او تقاضا کرد که این جوانک اعجوبه را در خانواده خود به‌عنوان شاگرد ریاضیدان بپذیرد. گاوس به تقاضای او جواب نداد (شاید بدین علت که به‌اندازه کافی از دست پسر خود اویگن که از خانه فرار کرده بود دردسر و ناراحتی داشت). پانزده سال بعد، وقتی فارکاش تنتامن را برای گاوس فرستاد قطعاً باید احساس کرده باشد که پسر عقیده‌اش را به او قبولانده است، و یانوش می‌بایستی انتظار داشته باشد که گاوس کار مهم او را به مردم معرفی کند. بنابراین می‌توان به درجه یأس او، پس از خواندن نامه زیر که گاوس به پدر نوشته بود، پی‌برد:

> اگر با این عبارت آغاز می‌کنم که یارای تمجید از چنین کاری را ندارم مطمئناً برای یک لحظه شگفت‌زده خواهید شد. ولی کاری جز این نمی‌توانم بکنم. تمجید از آن به منزله تمجید از خودم است. زیرا تمام محتوای کاری را که پسر شما کرده، راهی را که برگزیده و نتایجی را که به آنها دست یافته، تقریباً به‌طور تمام و کمال با تحقیقات خودم که مدت سی تا سی‌وپنج سال تمام فکر مرا به خودش مشغول داشته، یکی است. از این بابت من خود را سخت حیرت‌زده می‌یابم.
>
> اما درباره کار خودم، که تنها تاکنون اندکی از آن منتشر شده است، قصدم این بوده که اجازه ندهم تا زنده‌ام کسی از آن با خبر شود. بیشتر مردم بینش لازم را برای

---

۱. نقل از کتاب مشکوفسکی (۱۹۶۴). عنوان پیوست بویویی چنین است: «دانش فضای مطلق یا برهان استقلال درستی یا نادرستی اصل توازی اقلیدس (که از پیش نمی‌توان گفت)، به‌علاوه تربیع دایره در حالت نادرستی آن».

2. *Tentamen*, Junentutem studiosam in Elementa Matheseos Purae Introduced
(کوششی برای ارائه مقدمات ریاضیات محض به دانشجویان جوان)ـ م.

۳. برای ملاحظه مجموعه کامل مکاتبات آنها، ر.ک. به (۱۹۷۲) Schmidt and Stäckel.

درک نتایج کارهای ما ندارند و من تنها به چند تن برخورده‌ام که آنچه را که با آنان در میان گذارده‌ام با علاقه ویژه‌ای استقبال کرده‌اند. برای فهمیدن این چیزها نخست باید دقیقاً و عمیقاً دریافت که مطلوب چیست و چه باید کرد، و در این موضوع اکثر افراد کاملاً حیرت‌زده و سردرگم‌اند. از سوی دیگر، نقشه من چنین بود که سرانجام همه آنها را به روی کاغذ بیاورم تا لااقل موضوع با از میان رفتن من به فراموشی سپرده نشود.

لذا باعث کمال خوشوقتی من است که می‌بینم دیگر لازم نیست این کار (چاپ نوشته‌هایم) را انجام دهم، بخصوص که این فرزند دوست دیرین من است که به چنین شیوه‌ای عالی بر من پیشی گرفته است.[۱]

به رغم تجمیدی که گاوس در آخرین جمله‌اش از او کرده بود یانوش از جواب ریاضیدان بزرگ ناامید شد و حتی پنداشت که پدرش در نهان گاوس را از نتایج کارهای او آگاه می‌ساخته است، و گاوس اکنون سعی دارد آنها را به‌عنوان کار خویش تصاحب کند. یانوش آتشین مزاج که سیزده بار پیاپی دوئل کرده و پیروز شده بود (بر خلاف گالوا، که در اولین دوئل در بیست سالگی کشته شده بود) چنان سرخوردگی پیدا کرد که دیگر هرگز به فکر انتشار پژوهشهایش نیفتاد. ترجمه‌ای از «پیوست» جاودانی او را می‌توان در کتاب هندسه نااقلیدسی (۱۹۵۵)، اثر بونولا یافت. پدرش که این کشف مهم یانوش را نفهمیده بود، پس از آن یک تلاش داهیانه دیگری را برای اثبات اصل پنجم به‌عمل آورده است (تمرین ۹، فصل ۵).

در ۱۸۵۱، یانوش می‌نویسد:

به باور من، و نظر به متقاعد شدن خود، به عقیده هر داوری بدون تعصب، همه دلایلی که گاوس برای عدم انتشار مطلبی در این موضوع آورده، ضعیف و پا در هوا هستند، زیرا در علم، و نیز در زندگی عادی، لازم است چیزهای مورد علاقه مردم را که هنوز مبهم‌اند روشن ساخت و فقدان احساس یا احساس خفته آنان را برای قبول راستی و حق بیدار و تقویت کرد و آن را تعالی بخشید. متأسفانه، این عیب و نقص بشریت است که تنها تعداد معدودی از مردم درک و ذوق ریاضیات را دارند و به همین دلیل و مدعا گاوس برای اینکه پایدار بماند باید بخش عظیمی از کار فوق‌العاده‌اش را برای خود حفظ کند. واقعیت تلخ این است که مابین ریاضیدانان، و حتی ریاضیدانان پرآوازه، بدبختانه افراد سطحی زیادی وجود

۱. ولف (۱۹۴۵). گاوس یک ماه پیش از نامه فوق به گرلینگ نوشته است «من همه اندیشه‌ها و نتایج خود را با ظرافت بیشتری در این پیوست یافتم. از دید من این بویویی جوان، یک هندسه‌دان نابغه تراز اول است». این نوشته هر چه بیشتر انسان را به حیرت می‌اندازد که چرا گاوس یانوش را در شکوفا کردن استعداد ریاضی‌اش کمک نکرده است.

دارد، ولی این امر نباید برای یک شخص عاقل، محملی برای نوشتن چیزهای سطحی و پیش‌پا افتاده باشد و علم را با بی‌حوصلگی به وضع ذاتی‌اش رها کند. ممکن است بگویید که این پندار، غیرطبیعی و حماقت محض است. بنابراین، من حقاً این را درست نمی‌دانم که گاوس به‌جای اعتراف شرافتمندانه، قاطع، و صادقانه در قبال این کار عظیم «پیوست و تنتامن»، و به جای ابراز مسرت زیاد و علاقه و سعی در پذیرش این هدف نیک و دوری جستن از همه اینها، خود را با آرزوهای ریاکارانه شکوه‌ها وگلایه‌ها از نبود مدنیت و فرهنگ راضی نگاه‌دارد. در واقع این روند کار و شایستگی را نمی‌توان زیستن نامید.[1]

گاوس

شواهدی در دست است که گاوس پیشتر از یانوش بویویی به برخی ازکشفیات هندسه نااقلیدسی دست یافته بوده است. زیرا گاوس از پانزده سالگی، یعنی از ۱۷۹۲ (بونولا، ۱۹۵۵، فصل ۳) در هندسه نااقلیدسی کار می‌کرده است. در ۱۸۱۷، گاوس به و. اولبرس می‌نویسد: «دارم بیش از بیش متقاعد می‌شوم که ضرورت هندسه [اقلیدسی] ما، لااقل نه با عقل آدمی و نه برای عقل آدمی، نمی‌تواند ثابت شود. شاید در حیاتی دیگر بتوانیم بینشی از ماهیت فضا به دست آوریم که اکنون دست‌یافتنی نیست.» در ۱۸۲۴، گاوس به ف. آ. تاورینوس، که تلاش زیادی در بررسی نظریه توازیها به‌عمل آورده بود، چنین پاسخ می‌دهد:

> درباره تلاش شما، من چیزی (یا چیز زیادی) ندارم بگویم جز اینکه کامل نیست. حقیقت این است که استدلال شما برای اثبات اینکه «مجموع زوایای یک مثلث در صفحه ممکن نیست بزرگتر از 180° باشد» تا حدی فاقد دقت هندسی است. ولی این را به آسانی می‌توان اصلاح کرد، و تردیدی نیست که این عدم امکان را می‌توان با بیشترین دقت ثابت نمود. ولی وضع در قسمت دوم، که مجموع زوایا نمی‌تواند کمتر از 180° باشد، کاملاً متفاوت است. این نقطه‌ای است بحرانی و صخره‌ای است که همه کشتیها را در هم می‌شکند، و فکر نمی‌کنم این قسمت مسئله، شما را چندان به خود مشغول کرده باشد. من بیش از سی سال روی آن فکر کرده‌ام. باور نمی‌کنم که کسی توانسته باشد بیش از من به این قسمت دوم اندیشیده باشد، هر چند هرگز چیزی در این زمینه منتشر نکرده‌ام.
>
> پذیرفتن اینکه مجموع سه زاویه کمتر از 180° باشد به هندسه شگفت‌انگیزی منجر می‌شود که با [هندسه اقلیدسی] ما کاملاً متفاوت، ولی کاملاً سازگار است، و من آن را

۱. نقل از L. Fejes Tóth, *Regular Figures* (Macmillan, N. Y. 1964), pp.98-99.

بسط داده‌ام و از آن کاملاً راضی هستم. می‌توانم هر مسئله‌ای را در آن حل کنم بجز مسئله تعیین یک مقدار ثابت را، که از پیش نمی‌توان تعیین کرد. هر اندازه این مقدار ثابت را بزرگتر بگیریم به همان اندازه به هندسه اقلیدسی نزدیکتر می‌شویم، و هنگامی‌که بی‌نهایت بزرگ بگیریم، این هر دو یکی می‌شوند. قضایای این هندسه به‌نظر متناقض می‌آیند و شاید در نظر یک فرد مبتدی بی‌معنی جلوه کنند. ولی تفکر آرام و پی‌گیر آشکار می‌سازد که هیچ ناممکن در آنها نیست. مثلاً سه زاویه مثلث تا بخواهید می‌توانند کوچک شوند، به شرطی که اضلاع آن به‌اندازه کافی بزرگ باشند. اما اضلاع مثلث هر چه باشند مساحت مثلث نمی‌تواند از حد معینی زیادتر شود و در واقع هیچ‌گاه هم نمی‌تواند به آن برسد.

همه تلاشهای من برای یافتن یک تناقض یا یک ناسازگاری در این هندسه نااقلیدسی به شکست انجامیده است، و چیزی که در آن با ادراک ما مغایرت دارد این است که، اگر حقیقت داشته باشد، باید در فضا یک «اندازه خطی» وجود داشته باشد که خود به خود معین است (اگر چه برای ما نامعلوم است). اما چنین به نظر می‌رسد که به‌رغم گفته خردمندمآبانه «چیزی نمی‌شود گفت» حکمای مابعدالطبیعه، باید بگوییم که دانش ما درباره ماهیت واقعی فضا بسیار ناچیز است، یا بهتر بگوییم اصلاً چیزی نمی‌دانیم تا بگوییم که فلان امر مطلقاً غیرممکن است. هرگاه این هندسه نااقلیدسی حقیقت داشته باشد و بتوان آن مقدار ثابت را با همان کمیاتی که هنگام اندازه‌گیری‌هایمان در زمین و آسمان به آنها برمی‌خوریم مقایسه نماییم، آنگاه ممکن است آن مقدار ثابت را پس از تجربه تعیین کنیم. در نتیجه، من گاهی به

کارل فریدریش گاوس

شوخی آرزو کرده‌ام که کاش هندسه اقلیدسی حقیقت نداشت، در آن‌صورت ما از پیش استاندارد مطلقی برای اندازه‌گیری می‌داشتیم.

پروا ندارم از اینکه آنچه گفتم مورد سوء تعبیر کسانی واقع شود که به‌ظاهر ذهن ریاضی اندیشمندی دارند، ولی در هر حال، این را به‌عنوان یک نامه خصوصی تلقی کنید که به هیچ وجه مورد استفاده عموم یا مورد استفاده‌ای که به نحوی صورت تبلیغ پیدا کند، قرار نگیرد. شاید خودم در آینده، هنگامی‌که نسبت به امروز فراغت بیشتری دست دهد، بررسیهایم را منتشر سازم.[۱]

جای شگفتی است که گاوس، با وجود شهرت عظیمش، از علنی ساختن کشفیاتش در زمینه هندسه نااقلیدسی عملاً بیمناک بوده است. در ۱۸۲۹ به ف. و. بسل می‌نویسد که برای منتشر کردن آثار انقلابیش از «زوزه وویوتیه‌ای‌ها»[2] وحشت دارد. او به ه. ک. شوماخر گفته بوده است که «از کشیده شدن به هر نوع درگیری نفرت دارد».

منظور از «حکمای مابعدالطبیعه» که گاوس در نامه‌ای به تاورینوس، به آنها اشاره کرده بود، پیروان ایمانوئل کانت، فیلسوف عالیقدر اروپایی در اواخر سده هیجدهم و بیشتر سده نوزدهم بودند. کشف هندسه نااقلیدسی توسط گاوس، این نظر کانت را که فضای اقلیدسی، ذاتی ساختار ذهن ماست، رد می‌کرد. کانت در کتاب خود، نقد بر خرد ناب[3] (۱۷۸۱) می‌گوید که «مفهوم فضای [اقلیدسی] به هیچ‌وجه منشأ تجربی ندارد بلکه لازمه اجتناب‌ناپذیر فکر ماست».

دلیل دیگری که گاوس در ارائه کشفیات خود تردید می‌کرد کمال‌گرا بودن او بود، یعنی کسی که تنها کارهای کمال‌یافته هنری را منتشر می‌کند. تعلق خاطر شدیدش به آثار به تمام معنی کامل، از شعاری که روی مُهر او حک شده بود: «کم ولی پخته»[4] درک می‌شد. می‌گویند ریاضیدان نامی ک. گ. ی. یاکوبی (ژاکوبی) تنها به این دلیل اغلب برای تبادل نظر برای کشفیات تازه‌اش نزد گاوس می‌آمد تا گاوس را وادار کند مقالاتی را که در زمینه همان کشفیات بوده‌اند از کشوی میزش بیرون بکشد. شاید علت آن این بوده که گاوس آنچنان به کارهای ابتکاری در بسیاری از شاخه‌های

---

1. Wolfe (1945) pp. 46-47.

۲. وویوتیه (Boeotian) قسمتی از یونان قدیم است که مردم آن به کودنی و نفهمی شهره بودند. کنایه از افراد هوچی و کندذهن است. در واقع منتقدان وویوتیه‌ای هندسه نااقلیدسی ــ افراد خودخواهی که ادعا می‌کردند ثابت کرده‌اند که گاوس، ریمان، و هلمهولتس کله‌پوک‌اند ــ تا پیش از اواسط دهه ۱۸۷۰ خود را نشان نمی‌دادند. اگر شما در دهه سوم سده بیستم شاهد تلاش علیه اینشتین بودید، شاید به نوع نوشته‌هایی که این منتقدان منتشر می‌کردند پی می‌بردید... فرگه هم که هیلبرت را مانند یک شاگرد مدرسه توبیخ می‌کرد به وویوتیه‌ای‌ها پیوست. او به هیلبرت می‌گفت «دستگاه بنداشتهای تو مثل دستگاه معادلاتی است که خودت هم نمی‌توانی آنها را حل کنی» (فرویدنتال، ۱۹۶۲).

3. *Critique of Pure Reason* 4. *pauca sed matura*

ریاضی و نیز نجوم، نقشه‌برداری و فیزیک (که با همکاری و. وبر یک تلگراف پیشرفته‌تری اختراع کردند) مشغول بود که فرصت نمی‌کرد نتایج کارهایش را در باب هندسه نااقلیدسی مرتب کند. این نتایج تنها پس از درگذشت وی در میان یادداشتهایش یافت شد.

گاوس، به علت گستردگی و عمق کارهایش، «امیر ریاضیدانان»[1] نامیده شده بود. (برای توضیحات بیشتر درباره زندگی و آثار او، ر. ک. به زندگی‌نامه او توسط بل، ۱۹۳۴؛ دانینگتن، ۱۹۵۵؛ و هال، ۱۹۷۰) مراجعه کنید.

لباچفسکی

بازیگر دیگری که در این نمایشنامه تاریخی برای ربودن گوی شهرت از بویویی و گاوس قد برافراشت، ریاضیدان روسی، نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی (۱۷۹۲ـ۱۸۵۶) بود. وی نخستین کسی بود که عملاً مقاله‌ای در زمینه هندسه نااقلیدسی منتشر کرد (۱۸۲۹). او در آغاز هندسه‌اش را «هندسه موهومی» و بعد «هندسه عام» نام گذاشت. هنگامی که اثر او منتشر شد، چندان در اروپا مورد توجه قرار نگرفت؛ بیشتر بدین علت که به زبان روسی نوشته شده بود. منتقدان در دانشگاه سنت‌پترزبورگ آن را رد کردند و یک مجله ادبی روسی لباچفسکی را به‌دلیل «گستاخی و بی‌شرمی اختراع دروغ جدیدش» سخت مورد حمله قرار داد (زوزه وویوتیه‌ای‌ها، به گفته گاوس). با این وجود، لباچفسکی جسورانه به انتشار مقالات دیگرش ادامه داد،

نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی

1. Prince of Mathematicians

و سپس در ۱۸۴۰ مقاله‌ای به زبان آلمانی منتشر کرد[1] و آن را برای گاوس فرستاد. گاوس در نامه‌ای به تاریخ ۱۸۴۶ به شوماخر، آن را مورد ستایش قرار داد و در عین حال حق تقدم خود را در بسط هندسه نااقلیدسی مجدداً در این زمینه تکرار کرد؛ ولی در ضمن متذکر شد که «لباچفسکی این کار را به روش استادانه به شیوه واقعاً هندسی انجام داده است». به توصیه گاوس، لباچفسکی به عضویت افتخاری جامعه دانشمندان گوتینگن درآمد. (چرا گاوس این توصیه را برای یانوش بویویی نکرد؟)

لباچفسکی علناً با تعلیمات و اصول عقاید کانت درباره فضا به مثابه شهود ذهنی به مبارزه برخاست، در ۱۸۳۵ نوشت «تلاشهای بی‌ثمری که از زمان اقلیدس تاکنون صورت گرفته است... این بدگمانی را در من برانگیخت که حقیقت ... در داده‌ها وجود ندارد و برای اثبات آن، نظیر سایر قوانین طبیعت، کمکهای تجربی، مثلاً مشاهدات نجومی، مورد نیاز است.» (گاوس با نوشتن نامه‌ای به اولبرس باطناً موافقت خود را با این دیدگاه نشان می‌دهد که «ما نباید هندسه را با حساب که صرفاً از پیش وجود دارد، برابر بگیریم، بلکه باید آن را با مکانیک هم‌ارز بگیریم.» ریاضیدانان بزرگ فرانسوی نظیر لاگرانژ (۱۷۳۶ـ۱۸۱۳) و فوریه (۱۷۶۸ـ۱۸۳۰) سعی کرده‌اند اصل توازی را از قانون اهرم ایستا استخراج کنند.)

اریک تمپل بل، لباچفسکی را «آزادکننده بزرگ» نام داده است. بل می‌گوید نام او برای هر بچه مدرسه‌ای به‌اندازه نامهای میکل‌آنژ و ناپلئون باید آشنا باشد.[2] متأسفانه لباچفسکی در دوران حیات مورد تجلیل قرار نگرفت و در حقیقت، در ۱۸۴۶ علی‌رغم بیست سال خدمت برجسته‌ای که در مقام استاد و رئیس انجام داده بود، از دانشگاه قازان اخراج شد. او، دو سال پیش از مرگش مجبور شد، به علت نابینایی، آخرین کتابش را تقریر کند تا برایش بنویسند.

مشابهت روشهای یانوش بویویی و لباچفسکی از یک‌سو، و تفاوت اولین اثر آن دو با هم از سوی دیگر، به راستی شگفت‌انگیز است. هر دو این موضوع را بیشتر از گاوس بسط داده‌اند؛ هر دو از راه «کره حدی» (حد کره منبسطی که شعاعش به بی‌نهایت میل کرده است) در فضای سه‌بعدی به هندسه مسطحه پرداخته‌اند؛ هر دو نشان داده‌اند که هندسه روی کره‌ای که «خطوط» آن «دوایر حدی» (حد دوایری که شعاع آنها به بی‌نهایت میل کرده است) تعبیر شده‌اند، اقلیدسی است؛ هر دو نشان داده‌اند که مثلثات کروی اقلیدسی در هندسه نتاری معتبر است؛ هر دو نگاشتی از کره به صفحه نااقلیدسی ساخته‌اند تا فرمولهای مثلثات نااقلیدسی (از جمله فرمولی را که تاورینوس کشف کرده بود ــ قضیه ۴.۱۰، فصل ۱۰، برای یافتن راهی ساده‌تر با استفاده از یک مدل مسطح) را به دست آورند. هر دو در فرمولهای خود ثابتی را پیدا کرده‌اند که نمی‌دانستند چگونه توضیح دهند. آخرین کار ریمان نشان داد که این ثابت، خمیدگی صفحه نااقلیدسی است.

۱. برای ترجمه این مقاله ر.ک. به بونولا (۱۹۵۵).

2. Bell (1954, chapter 14).

بسطهای بعدی

تا وقتی مکاتبات گاوس، پس از درگذشت او در ۱۸۵۵، منتشر نشده بود جهان ریاضی هندسه نااقلیدسی را جدی نگرفته بود. (باز هم تا سال ۱۸۸۸ لوئیس کارول هندسه نااقلیدسی را به باد مسخره می‌گرفت.) برخی از بهترین ریاضیدانان (بلترامی، کلاین، پوانکاره، و ریمان) موضوع را جدی گرفتند، بسط دادند، روشن کردند و آن را در شاخه‌های دیگر ریاضیات، به‌ویژه در نظریه توابع مختلط به کار بردند. در ۱۸۶۸ بلترامی، ریاضیدان ایتالیایی، برای آخرین بار مسئله اثبات اصل توازی را پیش کشید و ثابت کرد که اثبات آن غیرممکن است! وی این کار را با نشان دادن یک مدل اقلیدسی از هندسه نااقلیدسی ثابت نمود. (ما در فصل بعد مدل او را مورد بحث قرار می‌دهیم.)

برنهارت ریمان، که یکی از دانشجویان گاوس بود، عمیقترین شناخت در هندسه را، نه تنها به منطق آن، که بر خود آن پیدا کرده بود. او در ۱۸۵۴، بر اساس هندسه ذاتی یک رویه، که گاوس آن را کشف کرده بود، هندسه‌ای در فضای اقلیدسی سه‌بعدی بنا کرد. او مفهوم یک رویه هندسی مجرد را ابداع کرد که لزومی نداشت قابل نشاندن در فضای اقلیدسی سه‌بعدی باشد، که در آن بتوان «خطها» را به‌صورت ژئودزیک تعبیر کرده و خمیدگی ذاتی رویه را دقیقاً بر آن تعریف کرد. نمونه این‌گونه هندسه‌ها، هندسه بیضوی (و البته، هندسه کروی) است که در آن خمیدگی رویه ثابت و مثبت است، در حالی که هندسه هذلولوی لباچفسکی-بویویی، رویه دارای خمیدگی ثابت منفی است. این دیدگاه هندسه‌دانان امروزی درباره «واقعیت» آن صفحات نااقلیدسی است. طرح ریمان و گاوس را فقط در پیوست الف شرح خواهیم داد، زیرا طرحی است خیلی پیشرفته‌تر که مناسب برای سطح این کتاب نیست. یک تعمیم دیگر از آن طرح، پی‌ریزی هندسه‌ای برای نظریه نسبیت عام اینشتین است.

گئورگ فریدریش برنهارت ریمان

نکته جالب اینکه در ۱۹۰۹ فیزیکدان معروف آرنولت زومرفلت رابطه مستقیمی بین نظریه نسبیت خاص و هندسه هذلولوی کشف کرده است که در ۱۹۱۲ ولادیمیر واریچاک آن را تبیین کرده و روشن ساخته است. یک مدل هندسه مسطحه هذلولوی، کره‌ای است به شعاع موهومی که در فضای سه‌بعدی فضا_زمان نسبیت خاص، نقاط متقاطرش با هم یکی شده‌اند و مؤید اندیشه لامبرت است (روزنفلد، ۱۹۸۸، صص ۲۳۰ و ۲۷۰؛ یاگلم ۱۹۷۹، ص ۲۲۲ به بعد). گذشته از آن فن جایگذاری ir به جای r توسط تاورینوس برای عبور از مثلثات کروی به مثلثات هذلولوی است که در ۱۹۲۶_۱۹۲۷، وقتی اِلی کارتان نظریه فضای متقارن ریمانی خود را مطرح می‌کرد، توضیح ساختاری پیدا کرد: کره اقلیدسی با خمیدگی $1/r^2$ «دوگان» صفحه هذلولوی با خمیدگی $-1/r^2$ است (هلگاسون، ۱۹۶۲، ص ۲۰۶).

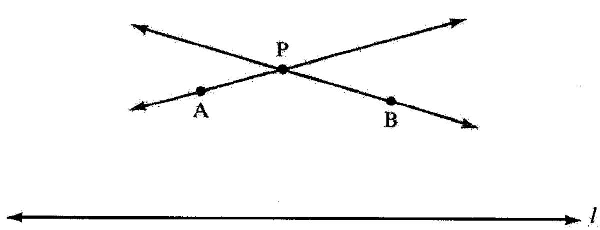
هندسه هذلولوی

اکنون ما توجه خود را به، هندسه خاصی که گاوس، بویویی، و لباچفسکی کشف کرده‌اند، و امروزه هندسه هذلولوی نامیده می‌شود، محدود می‌کنیم (برای بحث درباره هندسه بیضوی و هندسه‌های دیگر که ریمان کشف کرده، ←پیوست الف) هندسه هذلولوی بنابر تعریف، هندسه‌ای است که شما با قبول همه بنداشتهای هندسه نتاری به دست می‌آورید و به جای اصل توازی هیلبرت، نقیض آن را که ما «بنداشت هذلولوی» می‌نامیم، می‌گذارید.

بنداشت هذلولوی. در هندسه هذلولوی یک خط l و یک نقطه P ناواقع بر l وجود دارند، چنان‌که دست‌کم دو خط موازی با l از نقطه P می‌گذرند (شکل ۱.۶).

ما اکنون بلافاصله می‌توانیم نقض اساسی تلاش لژاندر را در اثبات اصل توازی ــ یعنی اینکه تمامی خط l درون $\measuredangle$APB قرار می‌گیرد بی‌آنکه هیچ‌یک از دو ضلع آن را ببرد ــ ببینیم، پدیده‌ای که لژاندر آن را ناشدنی می‌پنداشت.

لم زیر (قضیه مقدماتی) نخستین نتیجه مهم بنداشت هذلولوی است.



شکل ۱.۶

لم۱.۶ مستطیل وجود ندارد.

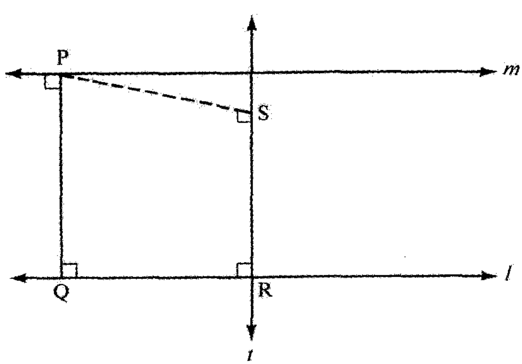
در واقع در فصل ۵ دیدیم که وجود مستطیل (بنداشت کلرو) مستلزم اصل توازی هیلبرت، یعنی نقیض بنداشت هذلولوی، است (ایده اثبات از آن پروکلوس است).

با استفاده از این لم می‌توان یک صورت کلی از بنداشت هذلولوی را ثابت کرد. اصل توازی در هندسه اقلیدسی مدعی است که به‌ازای هر خط l و هر نقطه P خارج آن، یکتایی خطوط موازی صادق است. نقیض آن، یعنی بنداشت هذلولوی می‌گوید که به‌ازای بعضی خطوط l و بعضی نقاط P ناواقع بر آنها، یکتایی خطوط موازی صادق نیست. آیا ممکن است منحصر به فرد بودن موازیها در هندسه هذلولوی برای یک خط l و یک نقطه P صادق نباشد ولی برای یک l و P دیگر صادق باشد؟ نشان خواهیم داد که این نشدنی است.

قضیه کلی هذلولوی. در هندسه هذلولوی، به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر آن، دست‌کم دو خط متمایز موازی با l از P می‌گذرد.

برهان:

عمود $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$ را بر l فرود می‌آوریم و از P عمود m را بر $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$ اخراج می‌کنیم (شکل ۲.۶). فرض کنید که R نقطه دیگری بر l باشد. عمود t را از R بر l اخراج و عمود $\overleftrightarrow{\mathrm{PS}}$ را بر t وارد می‌کنیم. حال می‌گوییم $\overleftrightarrow{\mathrm{PS}}$ با l موازی است، زیرا هر دو بر l عمودند (نتیجه ۱، قضیه ۱.۴). اکنون می‌گوییم که m و $\overleftrightarrow{\mathrm{PS}}$ دو خط متمایزند. برعکس، فرض کنیم S بر m قرار دارد. پس $\square$PQRS$\square$ مستطیل است. ولی این امر با لم ۱.۶ که در بالا ثابت شد متناقض است. ■



شکل ۲.۶

نتیجه. در هندسه هذلولوی، برای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر آن، تعداد نامتناهی خطوط موازی وجود دارد که از P می‌گذرند و با l موازی‌اند.

برهان:

کافی است نقطه R را در برهان فوق تغییر دهیم. ■

مجموع زوایا (دوباره)

از ترکیب لم ۱.۶ با قضیه ۷.۴، قضیه بعد به‌دست می‌آید.

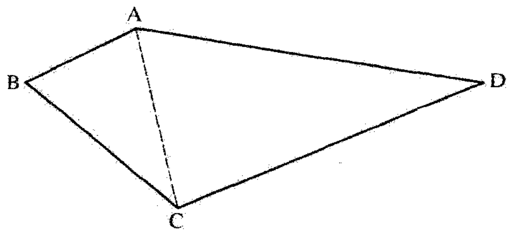
قضیه۱.۶ در هندسه هذلولوی مجموع زوایای همه مثلثها کمتر از 180° است.

اگر ΔABC مثلثی دلخواه باشد، آنگاه 180° منهای مجموع زوایای ΔABC عددی مثبت است. این عدد را کاستی مثلث نامیدیم، و نقش ارزنده‌ای در هندسه هذلولوی ایفا می‌کند (تمرین ۵ و فصل ۱۰).

نتیجه. در هندسه هذلولوی مجموع زوایای هر چهارضلعی کوژ از 360° کمتر است.

برهان:

چهارضلعی غیرمشخص $\square$ABCD داده شده است (شکل ۳.۶). قطر AC را رسم می‌کنیم، و مثلثهای ΔABC و ΔACD را درنظر می‌گیریم. بنابر قضیه ۱.۶، مجموع زوایای هر یک از این دو مثلث از 180° کمتر است. فرض محدب بودن چهارضلعی $\square$ABCD ایجاب می‌کند که $\overrightarrow{AC}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$، و $\overrightarrow{CA}$ بین $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CD}$ واقع باشد، در نتیجه بنابر قضیه ۳.۴ (۳)، $(\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle CAD)^\circ = (\measuredangle BAD)^\circ$ و $(\measuredangle ACB)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ = (\measuredangle BCD)^\circ$. از جمع ۶ زاویه نتیجه می‌گیریم که مجموع زوایای چهارضلعی $\square$ABCD از 360° کمتر است. ■



شکل ۳.۶

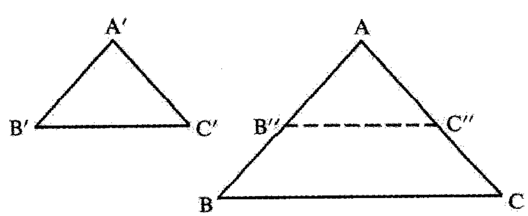
مثلثهای متشابه

اکنون اصل والیس را که نمی‌تواند در هندسه هذلولوی صادق باشد، در نظر می‌گیریم. علت صادق نبودن آن این است که، همان‌گونه که در فصل ۵ دیدیم، این اصل مستلزم اصل توازی اقلیدس است. لذا، تحت بعضی شرایط، مثلثهای متشابه وجود ندارند (نقیض اصل والیس). ولی می‌توانیم حتی جلوتر هم برویم و ثابت کنیم که تحت هیچ شرطی مثلثهای متشابه غیرقابل انطباق وجود ندارند!

قضیه۲.۶ در هندسه هذلولوی اگر دو مثلث متشابه باشند، با هم قابل انطباق‌اند. (به بیان دیگر، ملاک ززز برای قابلیت انطباق مثلثها درست است.)

برهان:

برعکس، فرض کنیم مثلثهای ΔABC و $\Delta A'B'C'$ وجود داشته باشند که متشابه باشند ولی قابل انطباق نباشند. بنابراین، هیچ‌یک از اضلاع متناظر قابل انطباق نیستند، و الا مثلثها قابل انطباق می‌شوند (زض‌ز). سه‌تاییهای (AB, AC, BC) و $(A'B', A'C', B'C')$ اضلاع این مثلثها را در نظر می‌گیریم. باید یکی از این سه‌تاییها لااقل شامل دو پاره‌خط باشد که از دو پاره‌خط متناظرش در سه‌تایی دیگر بزرگترند، مثلاً $AB > A'B'$ و $AC > A'C'$. لذا (بنابر تعریف $>$) نقاطی مانند B'' بر AB و C'' بر AC وجود دارند به‌طوری‌که $AB'' \cong A'B'$ و $AC'' \cong A'C'$ (شکل ۴.۶). بنابر ملاک ض‌زض داریم: $\Delta A'B'C' \cong \Delta AB''C''$. بنابراین، زاویه‌های متناظر قابل انطباق‌اند: $\sphericalangle AB''C'' \cong \sphericalangle B'$ و $\sphericalangle AC''B'' \cong \sphericalangle C$. چون فرض کرده بودیم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ متشابه‌اند، پس داریم $\sphericalangle AB''C'' \cong \sphericalangle B$ و $\sphericalangle AC''B'' \cong \sphericalangle C$ (بنداشت ق-۵). از آنجا لازم می‌آید که $\overleftrightarrow{BC} \| \overleftrightarrow{B''C''}$ (قضیه ۱.۴ و تمرین ۳۲، فصل ۴). پس چهارضلعی $\square BB''C''C$ کوژ است. همچنین $(\sphericalangle B)^\circ + (\sphericalangle BB''C'')^\circ = ۱۸۰^\circ = (\sphericalangle C)^\circ + (\sphericalangle CC''B'')^\circ$ (قضیه‌های ۳.۴ (۲) و ۳.۴ (۵)). نتیجه اینکه مجموع زوایای $\square BB''C''C$ برابر با ۳۶۰° است که مغایر با نتیجه قضیه ۱.۶ است. ■



شکل ۴.۶

خلاصه کلام، در هندسه هذلولوی ممکن نیست مثلثی را، بدون تغییر شکل، بزرگ یا کوچک کرد. در یک جهان هذلولوی، عکاسی ذاتاً جنبه فراواقع‌گرایی پیدا می‌کند!

یک نتیجه تکان‌دهنده قضیه ۲.۶ این است که در هندسه هذلولوی، یک پاره‌خط می‌تواند به کمک یک زاویه مشخص شود؛ یعنی، یک زاویه از یک مثلث متساوی‌الاضلاع، طول یک ضلع را به‌طور یکتا تعیین می‌کند. اغلب این مسئله به‌صورت چشمگیرتر با گفتن اینکه «هندسه هذلولوی واحد طول مطلق دارد» بیان می‌شود (←نامه گاوس به تاورینوس، که قبلاً در این فصل نقل کردیم). اگر هندسه جهان مادی هذلولوی بود، لازم نبود که واحد طول با دقت در «اداره استاندارد» نگهداری شود (این حکم بر هندسه بیضوی هم جاری است).

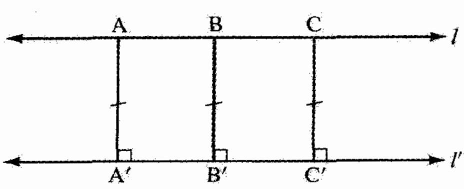
موازیهایی که عمود مشترک می‌پذیرند

در فصل ۵، هنگامی‌که درباره نقص برهان پروکلوس برای اصل توازی اظهارنظر می‌کردم، خاطر نشان ساختم که این گستاخانه است فرض کنیم خطهای موازی نظیر ریلهای راه‌آهن هستند، یعنی در همه جا از یکدیگر به یک فاصله‌اند. اکنون این نکته را دقیقتر توضیح می‌دهم. خطوط l و l' و نقاط A، B، C، و... بر l مفروض‌اند. عمودهای AA'، BB'، CC'، و... را از این نقاط بر l' فرود می‌آوریم: نقاط A و B و C و...را زمانی از l' به یک فاصله گوییم که همه این پاره‌خط‌های عمود، قابل انطباق باشند (شکل ۵.۶).

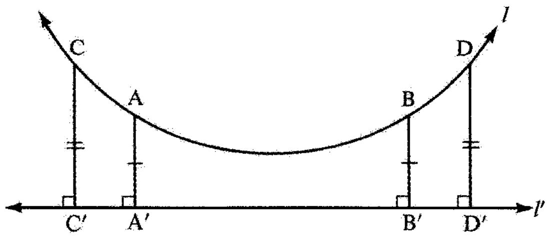
قضیه ۳.۶ در هندسه هذلولوی هرگاه l و l' دو خط متمایز موازی باشند، آنگاه هر مجموعه از نقاط l که از l' به یک فاصله باشند حداکثر دو عضو دارد.

برهان:

برعکس، فرض کنیم، مجموعه‌ای از سه عضو (سه‌نقطه) A، B، و C بر l به یک فاصله از l' وجود داشته باشند. در این حال چهارضلعی‌های $\square A'B'BA$، $\square A'C'CA$، $\square B'C'CB$



شکل ۵.۶ $AA' \cong BB' \cong CC' \cong \cdots$.



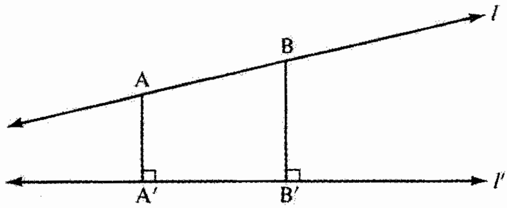
شکل ۶.۶

چهارضلعی‌های ساکری هستند (زاویه‌های مجاور قاعده قائمه، و اضلاع آنها قابل انطباق‌اند). در تمرین ۱، فصل ۵، نشان دادید که زاویه‌های بالایی چهارضلعی ساکری قابل انطباق‌اند. بنابراین، $\measuredangle B'BA \cong \measuredangle A'AB$، $\measuredangle C'CA \cong \measuredangle A'AC$، و $\measuredangle C'CB \cong \measuredangle B'BC$. بنابر ویژگی ترایایی (بنداشت ق-۵)، نتیجه می‌شود که زاویه‌های مکمل $\measuredangle B'BA$ و $\measuredangle B'BC$ قابل انطباق‌اند؛ پس، بنابر تعریف، قائمه‌اند. لذا این چهارضلعی‌های ساکری همه مستطیل‌اند. ولی در هندسه هذلولوی مستطیل وجود ندارد (لم ۱.۶). این تناقض نشان می‌دهد که A، B، و C نمی‌توانند از l' به یک فاصله باشند.■

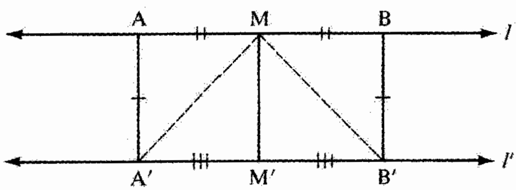
این قضیه بیان می‌کند که حداکثر دو نقطه در آن واحد بر l می‌توانند به یک فاصله از l' وجود داشته باشند. این قضیه این امکان را به‌وجود می‌آورد که جفتهایی از نقاط (A, B)، (C, D)، ... بر l چنان باشند که هر جفت آنها از l' به یک فاصله باشند ـــ یعنی اگر عمودهایی از این نقاط رسم کنیم خواهیم داشت $AA' \cong BB'$ و $CC' \cong DD'$. ولی AA' با CC' قابل انطباق نیست. شکل ۶.۶ این امر را به‌خوبی نشان می‌دهد: نکته‌ای که شکل ۶.۶ به ذهن القا می‌کند این است که نقطه واقع در «وسط» l نزدیکترین نقطه به l' است، هرگاه l از دو طرف این نقطه، به‌طور متقارن از l' دور شود. ثابت خواهیم کرد که حقیقت هم همین است (قضیه‌های ۴.۶ و ۵.۶ و تمرینهای ۴ و ۱۰).

با وجود این، باید توجه کرد که قضیه ۳.۶ امکان دیگری را قابل قبول می‌شمارد، و آن اینکه هیچ دو نقطه‌ای واقع بر l، از l' به یک فاصله نباشند! شکل ۷.۶ شاید نمودار خوبی برای این حالت باشد.

در شکل ۷.۶ هر یک از نقاط واقع بر l به فاصله‌ای متفاوت از l' قرار دارد؛ در یک امتداد از l' دور می‌شود و در امتداد دیگر به آن نزدیک می‌شود بی‌آنکه هیچ‌وقت آن را قطع کند. بنابراین لزومی ندارد جفتهای مختلف خطوط موازی شبیه یکدیگر باشند ـــ ممکن است بعضی مشابه با نمودار اول باشند و برخی مشابه نمودار دوم.



شکل ۷.۶ $BB' > AA'$.



شکل ۸.۶

قضیه۴.۶ در هندسه هذلولوی اگر دو خط موازی l و l' چنان باشند که دو نقطه A و B واقع بر l به یک فاصله از l' باشند، آنگاه l و l' عمود مشترکی دارند که کوتاهترین فاصله بین l و l' نیز هست.

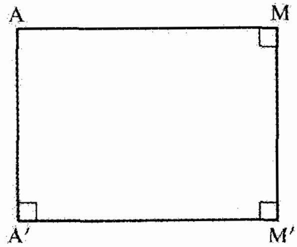
برهان:

فرض می‌کنیم دو نقطه A و B واقع بر l از l' به یک فاصله باشند. پس چهارضلعی $\square A'B'BA$ که در آن A' و B' به‌ترتیب پاهای عمودهای وارد از A و B بر l' هستند یک چهارضلعی ساکری است. فرض می‌کنیم M وسط AB باشد و M' وسط $A'B'$ (گزاره ۳.۴؛ شکل ۸.۶). این قضیه از لمی که هم اینک بیان می‌کنیم نتیجه می‌شود. ■

لم۲.۶ در چهارضلعی ساکری پاره‌خطی که وسط قاعده و وسط ضلع روبه‌روی آن را به هم وصل می‌کند، هم بر قاعده عمود است و هم بر ضلع روبه‌روی آن، و این پاره‌خط از هر دو ساق کوچکتر است (شکل ۸.۶).

برهان:

می‌دانیم که $\sphericalangle B \cong \sphericalangle A$ (تمرین ۱، فصل ۵). بنابراین $\Delta A'AM \cong \Delta B'BM$ (ض‌زض): پس اضلاع متناظر $A'M$ و $B'M$ قابل انطباق‌اند. این مسئله ایجاب می‌کند که $\Delta A'M'M \cong \Delta B'M'M$ (ض‌ض‌ض).بنابراین زوایای متناظر $\sphericalangle A'M'M$ و $\sphericalangle B'M'M$



شکل ۹.۶

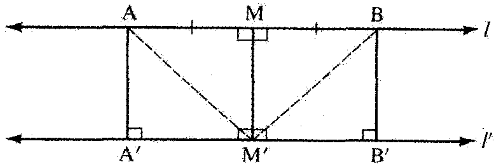
قابل انطباق‌اند. چون این دو زاویه مکمل یکدیگرند، پس باید قائمه باشند، یعنی MM' بر قاعده $A'B'$ عمود باشد. به‌علاوه از دو جفت مثلثهای قابل انطباق بالا چنین برمی‌آید: $\sphericalangle B'MM' \cong \sphericalangle A'MM'$ و $\sphericalangle B'MB \cong \sphericalangle A'MA$. از افزودن اندازه این زوایا به همدیگر خواهیم داشت $(\sphericalangle BMM')^\circ = (\sphericalangle AMM')^\circ$ (قضیه ۳.۴ (۳))، یعنی اندازه زاویه‌های مکمل $\sphericalangle AMM'$ و $\sphericalangle BMM'$ یکی است. بنابراین هر دو قائمه‌اند و MM' بر AB هم عمود است.

سپس چهارضلعی $\square A'M'MA$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۹.۶). این چهارضلعی سه زاویه قائمه دارد، پس یک چهارضلعی لامبرت است (تمرین ۴، فصل ۵). در هندسه هذلولوی زاویه چهارم باید حاده باشد، زیرا مستطیل وجود ندارد (لم ۱.۶). در تمرین ۴ (ج)، فصل ۵، نشان دادید که $AA' > MM'$، یعنی MM' کوتاهتر از AA' است. بقیه برهان که MM' از هر پاره‌خط دیگر بین l و l' کوتاهتر است به‌عنوان تمرین ۳، به عهده خواننده گذاشته شده است. ■

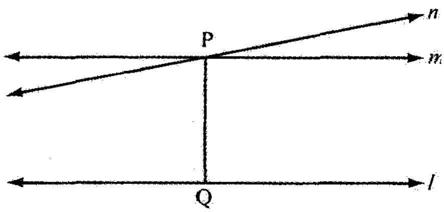
قضیه ۵.۶ در هندسه هذلولوی هر گاه دو خط l و l' یک عمود مشترک MM' داشته باشند موازی‌اند و MM' یکتاست. به‌علاوه، اگر A و B دو نقطه غیرمشخص بر l باشند به‌طوری‌که M وسط پاره‌خط AB باشد، آنگاه A و B از l' به یک فاصله‌اند.

برهان:

توازی l و l' از نتیجه اول قضیه زاویه‌های متبادل درونی (قضیه ۱.۴) نتیجه می‌شود. اگر l و l' عمود مشترک دیگری مثل NN' داشته باشند، آنگاه چهارضلعی $\square M'N'NM$ مستطیل خواهد شد که نمی‌تواند باشد (لم ۱.۶). حال فرض می‌کنیم M وسط AB باشد. عمودهای AA' و BB' را بر l فرود می‌آوریم، باید ثابت کنیم $AA' \cong BB'$ (شکل ۱۰.۶). اولاً $\Delta AM'M \cong \Delta BM'M$ (ض‌زض)، پس $AM' \cong BM'$ و $\sphericalangle AM'M \cong \sphericalangle BM'M$. بنابراین (به موجب قضیه ۳.۴)، $(\sphericalangle A'M'A)^\circ = ۹۰^\circ - (\sphericalangle AM'M)^\circ = ۹۰^\circ - (\sphericalangle BM'M)^\circ = (\sphericalangle B'M'B)^\circ$ در



شکل ۱۰.۶



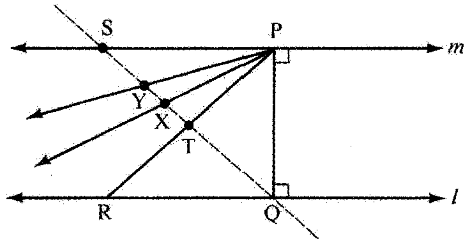
شکل ۱۱.۶

نتیجه $\sphericalangle B'M'B \cong \sphericalangle A'M'A$. پس، $\Delta BB'M' \cong \Delta AA'M'$ (ززض)، به‌طوری که اضلاع متناظر AA' و BB' قابل انطباق‌اند. ■

نیم‌خطهای موازی حدی

قضیه‌های ۴.۶ و ۵.۶ و تمرینهای ۴ و ۱۰ شناخت خوبی از نخستین نوع خطوط موازی به ما می‌دهند. می‌دانیم که چنین خطوطی از راه ترسیم معمولی به دست می‌آیند: با یک خط l و یک نقطه P ناواقع بر آن آغاز می‌کنیم (شکل ۱۱.۶). عمود $\overrightarrow{PQ}$ را از P بر l وارد و فرض می‌کنیم m عمودی باشد که از P بر $\overleftrightarrow{PQ}$ رسم شده است. پس l و m عمود مشترکی دارند که همان پاره‌خط PQ است. جفتهای نقاط واقع بر m که نسبت به $\overleftrightarrow{PQ}$ قرینه باشند از l به یک فاصله‌اند. بنابر قضیه کلی هذلولوی، خطوط دیگری مانند n، گذرنده از P، موازی با l وجود دارند. ما هنوز نمی‌توانیم بگوییم که هر خط n مانند این، دومین نوع از خطوط موازی است، زیرا که l و m می‌توانند عمود مشترکی داشته باشند که از نقطه‌ای غیر از P رسم شده باشد.

پس چگونه می‌دانیم که موازیهای نوع دوم وجود دارند؟ در اینجا بنداشت پیوستگی به میان می‌آید. آنچه هم اکنون می‌گوییم موضوعی شهودی است (شکل ۱۲.۶). نیم‌خط $\overrightarrow{PS}$ از m را اختیار می‌کنیم و نیم‌خطهای مختلف بین $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{PQ}$ را در نظر می‌گیریم. بعضی از این نیم‌خطها مثل $\overrightarrow{PR}$، l را می‌برند و برخی دیگر مانند $\overrightarrow{PY}$ آن را نمی‌برند. یک برهان پیوستگی نشان می‌دهد



شکل ۱۲.۶

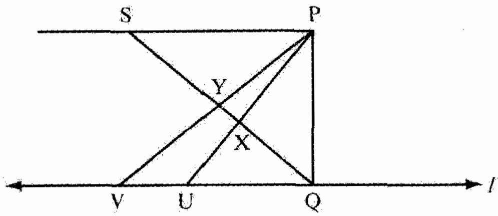
که وقتی R بر l بی‌نهایت از Q دور می‌شود، $\overrightarrow{PR}$ به سمت یک نیم‌خط حدی میل می‌کند که l را نمی‌برد. نیم‌خط $\overrightarrow{PX}$ به معنی دقیقی که هم اکنون ذکر می‌کنیم نیم‌خطی است «حدی»: هر نیم‌خط بین $\overrightarrow{PX}$ و $\overrightarrow{PQ}$، l را می‌برد، در حالی‌که هر نیم‌خط دیگر $\overrightarrow{PY}$ به‌طوری که $\overrightarrow{PX}$ بین $\overrightarrow{PY}$ و $\overrightarrow{PQ}$ باشد، l را نمی‌برد. نیم‌خط $\overrightarrow{PX}$ را می‌توان نیم‌خط موازی حدی چپ با l، گذرنده از P، نام گذارد. به همین ترتیب یک نیم‌خط موازی حدی راست در طرف دیگر $\overrightarrow{PQ}$ وجود خواهد داشت.

قضیه ۶.۶ به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر l، اگر Q پای عمود مرسوم از P بر l باشد فقط دو نیم‌خط $\overrightarrow{PX}$ و $\overrightarrow{PX'}$ در دو طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ وجود دارند که l را نمی‌برند و این ویژگی را دارند که نیم‌خطی که از P خارج می‌شود l را می‌برد اگر و تنها اگر آن نیم‌خط بین $\overrightarrow{PX}$ و $\overrightarrow{PX'}$ باشد. به‌علاوه، این نیم‌خطهای حدی نسبت به $\overleftrightarrow{PQ}$ قرینه‌اند، یعنی $\sphericalangle X'PQ \cong \sphericalangle XPQ$.

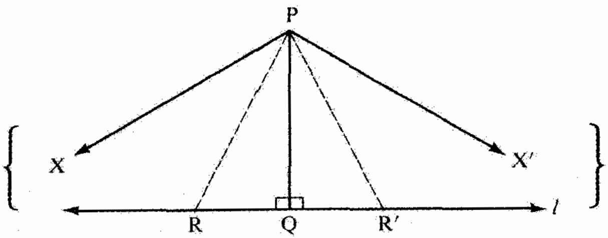
برهان:

برای اینکه وجود $\overrightarrow{PX}$ را دقیقاً ثابت کنیم خط $\overleftrightarrow{SQ}$ (ش ۱۲.۶) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\sum_1$ مجموعه همه نقاطی چون T واقع بر پاره‌خط SQ و همه نقاط واقع بر نیم‌خط متقابل به $\overrightarrow{QS}$ باشد چنان‌که $\overrightarrow{PT}$ خط l را ببرد؛ فرض می‌کنیم $\sum_2$ متمم $\sum_1$ باشد (پس $Q \in \sum_1$ و $S \in \sum_2$). بنابر قضیه قطعه‌بُر (فصل ۳)، اگر نقطه T واقع بر پاره‌خط SQ به $\sum_1$ متعلق باشد، تمام پاره‌خط TQ (در واقع $\overrightarrow{TQ}$) در $\sum_1$ قرار دارد. بنابراین $(\sum_1, \sum_2)$ یک برش ددکیند است. مطابق بنداشت ددکیند (فصل ۳)، نقطه یکتایی چون X بر $\overleftrightarrow{SQ}$ وجود دارد چنان‌که به‌ازای P_1 و P_2 واقع بر $\overleftrightarrow{SQ}$ داریم $P_1 * X * P_2$ اگر و تنها اگر X مساوی P_1 یا P_2 نباشد و $P_1 \in \sum_1$ و $P_2 \in \sum_2$.

بنابر تعریف $\sum_1$ و $\sum_2$، همه نیم‌خطهای زیر $\overrightarrow{PX}$ خط l را می‌برند و هیچ‌یک از نیم‌خطهای بالای آن، l را نمی‌برد. حال می‌گوییم که $\overrightarrow{PX}$ هم l را نمی‌برد. خلاف آن را فرض می‌کنیم که $\overrightarrow{PX}$ خط l را در نقطه U ببرد (شکل ۱۳.۶). نقطه‌ای مانند V در سمت چپ U بر l می‌گیریم، یعنی،



شکل ۱۳.۶

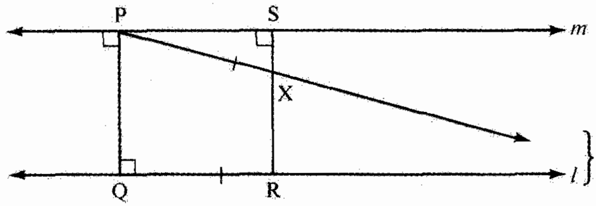


شکل ۱۴.۶

$V * U * Q$ (بنداشت م-۲). چون V و U در یک طرف $\overleftrightarrow{SQ}$ قرار دارند (تمرین ۹، فصل ۳)، V و P در دو طرف آن واقع می‌شوند. لذا پاره‌خط VP پاره‌خط SQ را در یک نقطه Y می‌برد و داریم $Y * X * Q$ (گزاره ۷.۳)، بنابراین $Y \in \sum_{۲}$، که متناقض با این واقعیت است که $\overrightarrow{PY}$ خط l را بریده است. پس نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{PX}$ نیم‌خط موازی حدی چپ است (نیم‌خط موازی حدی راست را هم به همین روش پیدا می‌کنیم).

برای اثبات تقارن، بر خلاف آن فرض می‌کنیم $\sphericalangle XPQ$ و $\sphericalangle X'PQ$ قابل انطباق نباشند، مثلاً $(\sphericalangle X'PQ)^\circ < (\sphericalangle XPQ)^\circ$. بنابر بنداشت ق-۴، نیم‌خطی بین $\overrightarrow{PX'}$ و $\overrightarrow{PQ}$ وجود دارد به‌قسمی‌که (بنابر تعریف نیم‌خط حدی) l را در نقطه R' می‌برد چنان‌که $\sphericalangle R'PQ \cong \sphericalangle XPQ$ (شکل ۱۴.۶). فرض می‌کنیم R نقطه‌ای در طرف دیگر $\overleftrightarrow{PQ}$ که R' در آن نیست چنان باشد که $R * Q * R'$ و $RQ \cong R'Q$ (بنداشت ق-۱). پس $\Delta RPQ \cong \Delta R'PQ$ (ض‌زض). بنابراین $\sphericalangle RPQ \cong \sphericalangle R'PQ$ ، و بنابر ویژگی ترایایی (بنداشت ق-۵)، $\sphericalangle RPQ \cong \sphericalangle XPQ$. اما این شدنی نیست، زیرا که $\overrightarrow{PR}$ بین $\overrightarrow{PX}$ و $\overrightarrow{PQ}$ واقع است (بنداشت ق-۴). ■

هر یک از زاویه‌های قابل انطباق $\sphericalangle XPQ$ و $\sphericalangle X'PQ$ (با کاربرد نارسا) زاویه توازی در نقطه P نسبت به خط l نامیده می‌شود و اندازه درجه آن معمولاً با $\Pi(PQ)^\circ$ نشان داده می‌شود. باید



شکل ۱۵.۶

توجه داشت که $\Pi(\mathrm{PQ})^\circ < ۹۰^\circ$، زیرا $\Pi(\mathrm{PQ})^\circ = ۹۰^\circ$ متناقض با قضیه کلی هذلولوی است (تمرین ۷ (الف)). می‌توان نشان داد هنگامی‌که P تغییر می‌کند $\Pi(\mathrm{PQ})^\circ$ جمیع مقادیر ممکن بین ۰° و ۹۰° را اختیار می‌کند (تمرین اصلی ۹). یکی از بزرگترین کشفیات بویویی و لباچفسکی یافتن دستوری برای این اندازه درجه‌هاست (قضیه ۲.۱۰). در هندسه هذلولوی پاره‌خط OI را پاره‌خط یکه طبیعی نامند هرگاه $\Pi(\mathrm{OI})^\circ = ۴۵^\circ$. تمرین اصلی ۵ نشان می‌دهد که همه این‌گونه پاره‌خطها قابل انطباق‌اند.

وجود نیم‌خطهای موازی حدی را از روی برهان پیوستگی مطابق با استانداردهای دقیق امروزی ثابت کردیم. گاوس، بویویی، و لباچفسکی این وجود را مسلم گرفته‌اند، ولی بویویی یک روش ساده ترسیم با خط‌کش و پرگار برای این نیم‌خطهای موازی حدی کشف کرده است: فرض کنید Q پای عمود مرسوم از P بر l، m خط گذرنده از P عمود بر $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$، و R نقطه دلخواهی بر l غیر از Q، و S پای عمود وارد از R بر m باشد (شکل ۱۵.۶). پس $\mathrm{PR} > \mathrm{QR}$ (تمرین ۳) و $\mathrm{PS} < \mathrm{QR}$ (تمرین ۴ (ج)، فصل ۵ در باب چهارضلعی‌های لامبرت). بنابر اصل پیوستگی مقدماتی، دایره‌ای به مرکز P و شعاعی قابل انطباق با QR، پاره‌خط SR را در نقطه یکتای X بین S و R می‌برد می‌توان ثابت کرد که $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ همان نیم‌خط موازی حدی l مرسوم از P است! (برهان پیچیده است. ←صفحه ۲۸۲، فصل ۷، پروژه ۴ در این فصل، یا قضیه ۹.۱۰.)

طبقه‌بندی موازیها

ما تاکنون از دو نوع خط موازی با خط مفروض l صحبت کرده‌ایم. نوع اول از موازیهایی مانند m تشکیل شده است به‌طوری که l و m یک عمود مشترک دارند، و m در دو طرف عمود مشترک از l دور می‌شود. نوع دوم مرکب از موازیهایی است که به‌طور مجانبی در یک امتداد به l نزدیک می‌شوند (یعنی شامل یک نیم‌خط موازی حدی در آن امتدادند) و در امتداد دیگر از l دور می‌شوند. اگر m یک خط موازی از نوع دوم باشد، تمرینهای ۷ و ۸ نشان می‌دهند که l و m

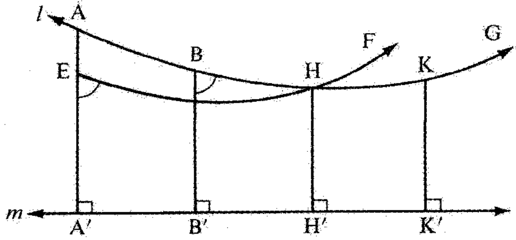
عمود مشترکی ندارند. در ضمن تلویحاً گفته‌ایم که این دو نوع خط موازی، تنها موازیهایی هستند که وجود دارند و این نکته، محتوای قضیه زیر است.

قضیه ۷.۶ اگر خط m موازی با خط مفروض l داده شده باشد، به قسمتی که شامل یک نیم‌خط موازی حدی با l در هیچ‌یک از دو امتداد نباشد، آنگاه عمود مشترکی برای l و m وجود دارد (که بنابر قضیه ۵.۶ یکتاست).

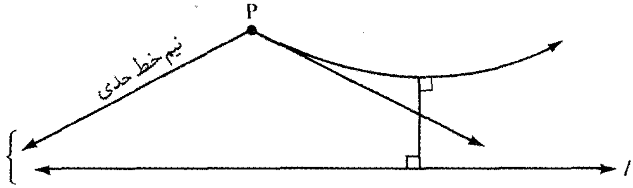
این قضیه را بورسوک و اسمیلیو (۱۹۶۰، ص۲۹۱) از راه برهان پیوستگی ثابت کرده‌اند ولی این برهان هیچ‌گونه راهی برای ترسیم عملی عمود مشترک به ما نشان نمی‌دهد. یک راه ساده برای پیدا کردن این عمود مشترک، در مدلهای کلاین و پوانکاره وجود دارد که در فصل بعد به آنها اشاره خواهیم کرد. هیلبرت راه ترسیمی سرراستی ارائه داده است که در اینجا مطرح می‌کنیم (در پروژه ۱ روش ترسیم دیگری داده خواهد شد.)

برهان:

ایده هیلبرت چنین است که دو نقطه H و K بر l به یک فاصله از m پیدا می‌کند، زیرا همین که این نقاط پیدا شدند، عمودمنصف HK که بر m عمود است جواب مسئله است (لم ۲.۶). دو نقطه نامشخص A و B بر l می‌گیریم و فرض می‌کنیم عمود AA' مرسوم از A بر m از عمود BB' مرسوم از B بر m بزرگتر باشد (شکل ۱۶.۶). فرض می‌کنیم که E نقطه‌ای بین A و A' باشد به قسمی که $A'E \cong B'B$ در همان طرف $\overleftrightarrow{AA'}$ که B در آن واقع است، فرض می‌کنیم $\overrightarrow{EF}$ نیم‌خط یکتایی باشد چنان‌که $\sphericalangle A'EF \cong \sphericalangle B'BG$، که در آن $A * B * G$. نکته مهمی که در تمرین اصلی ۲(۶) ثابت خواهد شد این است که $\overrightarrow{EF}$ نیم‌خط $\overrightarrow{AG}$ را در نقطه H می‌برد. فرض می‌کنیم که K نقطه یکتایی بر $\overrightarrow{BG}$ باشد چنان‌که $EH \cong BK$ عمودهای $\overleftrightarrow{HH'}$ و $\overleftrightarrow{KK'}$ را بر m فرود می‌آوریم. ماحصل این ترسیمها این است که $\square EHH'A'$ با $\square BKK'B'$ قابل انطباق است



شکل ۱۶.۶



شکل ۱۷.۶

(کافی است آنها را به مثلثهایی تقسیم کنید). بنابراین اضلاع متناظر HH' و KK' قابل انطباق‌اند. لذا نقاط H و K واقع بر l، از خط m به یک فاصله‌اند، همان چیزی که می‌خواستیم. ■

خلاصه کنیم، نقطه P ناواقع بر l مفروض است. درست دو نیم‌خط موازی حدی مرسوم از P برای l وجود دارند که هر یک در یک امتداد است. بی‌نهایت خطوط دیگر گذرنده از P وجود دارند که در ناحیه بین نیم‌خطهای حدی l واقع نمی‌شوند. هر یک از این خطوط به‌طور واگرا با l موازی است و با l عمود مشترک واحدی دارد (برای یکی از این خطها، عمود مشترک از P می‌گذرد ولی برای بقیه، عمود مشترک از نقاط دیگر خواهد گذشت).

توضیحی درباره اصطلاحات. در بیشتر کتابهای هندسه هذلولوی واژه «موازی» فقط برای خطوط مشتمل بر نیم‌خطهای موازی حدی، به آن معنی که مراد ماست، به‌کاربرده می‌شود. به خطوط دیگری که یک عمود مشترک می‌پذیرند نامهای مختلف «نامتقاطع»، «فراموازی»، «ابرموازی»، و «زبرموازی» داده‌اند. ولی ما همان واژه «موازی» را به معنای «نامتقاطع» به‌کار خواهیم برد. یک خط موازی با l، که شامل یک نیم‌خط موازی حدی با l در امتداد مفروض باشد، موازی مجانبی در آن امتداد نامیده خواهد شد، و یک خط موازی با l که یک عمود مشترک با l می‌پذیرد خط واگرا موازی نامیده خواهد شد. نیم‌خطهای موازی حدی را در نمودار با یک آکلاد نشان داده‌ایم (شکل ۱۷.۶).

دنیای تازه شگفت‌انگیز

در این فصل ما فقط تحقیق در «دنیای شگفت‌انگیز» هندسه هذلولوی را آغاز کرده‌ایم. شما می‌توانید با انجام تمرینها و خواندن فصل ۱۰ و بررسی کتابهایی که نام آنها در پایان این کتاب آمده است، در این هندسه پیشتر بروید. در آن صورت به موجودات ریاضی تازه‌ای نظیر مثلثهای مجانبی، نقاط آرمانی و فراآرمانی، خمهای هم‌فاصله، دایره‌های حدی و شبه‌کره بر خواهید خورد.

اگر این هندسه در نظر شما بیش از حد «دور از ذهن» جلوه می‌کند باید منتظر چیز حیرت‌انگیزی باشید. در فصل بعد خواهیم دید که هرگاه اصطلاحات اولیه هندسه هذلولوی را به طور مناسب تعبیر کنیم، آن وقت این هندسه می‌تواند به‌صورت جزئی از هندسه اقلیدسی درنظر گرفته شود!

در عین حال، ملاحظه می‌کنید که چه اندازه شناخت خود را از نقش اصل توازی P در هندسه اقلیدسی عمیق کرده‌ایم. در زبان هندسه ما هر حکم S که قضیه‌ای در هندسه اقلیدسی بوده $(P \Rightarrow S)$ و نقیض‌اش قضیه‌ای در هندسه هذلولوی است $(\sim P \Rightarrow \sim S)$، (طبق قاعده منطق ۹ (ج)) با اصل توازی در (هندسه نتاری) هم‌ارز است. مثلاً، به موجب تمرین ۱۴، فصل ۵، «مجموع زوایای هر مثلث 180° است» از این نوع احکام است. طبق تمرین ۱۲ در این فصل، «هر مثلث یک دایره محیطی دارد» از این قبیل است. به موجب قضیه ۱.۵، «هر نقطه در درون یک زاویه حاده بر خطی قرار دارد که هر دو ضلع زاویه را در دو نقطه متمایز می‌برد» سومین حکم از این دست است. لذت تهیه فهرستی طولانی از این قبیل احکام را به عهده شما محول می‌کنم (تمرین ۱۵). من مصرانه از معلم شما می‌خواهم به دانشجویانی که فهرست مفصلتری تهیه کرده‌اند جایزه‌ای بدهد.

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) نقیض اصل توازی هیلبرت می‌گوید که به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر l، دست‌کم دو خط گذرنده از P موازی با l وجود دارد.

(۲) این یک قضیه در هندسه نتاری است که هرگاه دو خط l و m در یک طرف مورب t همدیگر را ببرند، مجموع درجات زوایای درونی در همان طرف t از 180° کمتر است.

(۳) گاوس فعالیتش را در زمینه هندسه نااقلیدسی زمانی آغاز کرد که هنوز بیش از ۱۵ سال نداشت.

(۴) فیلسوف بزرگ کانت، معتقد است که ذهن ما نمی‌تواند هندسه دیگری جز هندسه اقلیدسی را درک کند.

(۵) نخستین ریاضیدانی که جزوه‌ای در زمینه هندسه هذلولوی منتشر کرد، لباچفسکی روسی بود.

(۶) قضیه قطعه‌بُر مدعی است که هرگاه نیم‌خطی از رأس A از ΔABC و در درون $\measuredangle$A رسم شود باید ضلع BC، روبه‌رو به این زاویه را ببرد.

(۷) این یک قضیه در هندسه هذلولوی است که به‌ازای هر پاره‌خط AB مربعی وجود دارد که AB یک ضلع آن است.

(۸) هر چهارضلعی ساکری یک چهارضلعی کوژ است.

(۹) در هندسه هذلولوی، هرگاه ΔABC و ΔDEF متساوی‌الاضلاع باشند و $\measuredangle A \cong \measuredangle D$، این مثلثها قابل انطباق‌اند.

(۱۰) در هندسه هذلولوی، خط l و پاره‌خط ثابت AB داده شده‌اند. مجموعه همه نقاطی که در یک طرف مفروض l قرار دارند و پاره‌خطهای عمود مرسوم از آنها بر l، با AB قابل انطباق‌اند، مساوی مجموعه نقاطی است واقع بر خطی موازی با l.

(۱۱) در هندسه هذلولوی، هر دو خط موازی یک عمود مشترک دارند.

(۱۲) در هندسه هذلولوی، چهارمین زاویه یک چهارضلعی لامبرت زاویه‌ای است منفرجه.

(۱۳) در هندسه هذلولوی، مجموع زوایای بعضی از مثلثها کمتر از 180° و مجموع زوایای برخی دیگر مساوی با 180° است.

(۱۴) در هندسه هذلولوی اگر نقطه P بر خط l نباشد و Q پای عمود وارد از P بر l باشد، زاویه توازی برای P نسبت به l زاویه‌ای است که یک نیم‌خط موازی حدی با l، مرسوم از P، با $\overleftrightarrow{PQ}$ می‌سازد.

(۱۵) بویویی نشان داد که چگونه تنها با استفاده از اصل پیوستگی مقدماتی به جای بنداشت ددکیند می‌توان نیم‌خط موازی حدی را رسم کرد.

(۱۶) در هندسه هذلولوی، اگر $l \| m$، آنگاه سه نقطه بر m وجود دارند که از l به یک فاصله‌اند.

(۱۷) در هندسه هذلولوی، اگر m خط دلخواهی موازی با l باشد، آنگاه دو نقطه بر m وجود دارند که از l به یک فاصله‌اند.

(۱۸) در هندسه هذلولوی، اگر P نقطه‌ای ناواقع بر خط l باشد، درست دو خط گذرنده از P موازی با l وجود دارد.

(۱۹) در هندسه هذلولوی، اگر P نقطه‌ای ناواقع بر خط l باشد، درست دو خط گذرنده از P وجود دارد که بر l عمودند.

(۲۰) در هندسه هذلولوی، اگر $l \| m$ و $m \| n$، آنگاه $l \| n$ (ویژگی ترایایی خطوط موازی).

(۲۱) در هندسه هذلولوی، هرگاه m شامل یک نیم‌خط موازی حدی با l باشد، l و m یک عمود مشترک دارند.

(۲۲) در هندسه هذلولوی، اگر l و m یک عمود مشترک داشته باشند، بر m نقطه‌ای وجود دارد که از همه نقاط دیگر m به l نزدیکتر است.

(۲۳) در هندسه هذلولوی، اگر m شامل یک نیم‌خط موازی حدی با l نباشد و m و l عمود مشترکی نداشته باشند، آنگاه l، m را می‌برد.

(۲۴) در هندسه هذلولوی، زوایای بالایی یک چهارضلعی ساکری زوایای قائمه‌اند.

(۲۵) هر قضیه‌ای که در هندسه نتاری درست باشد در هندسه هذلولوی هم درست است.

(۲۶) در هندسه هذلولوی، زوایای روبه‌رو در هر متوازی‌الاضلاع، قابل انطباق‌اند.

(۲۷) در هندسه هذلولوی، اضلاع روبه‌رو در هر متوازی‌الاضلاع، قابل انطباق‌اند.

(۲۸) در هندسه هذلولوی، فرض می‌کنیم $\measuredangle P$ یک زاویه حاده و X نقطه‌ای بر یکی از اضلاع آن باشد، و Y پای عمود وارد از X بر ضلع دیگر باشد. اگر X بر همان ضلعی که قرار دارد بی‌نهایت از P دور شود، Y هم بر ضلع دیگر بی‌نهایت از P دور می‌شود.

(۲۹) در هندسه هذلولوی، اگر سه نقطه هم‌خط نباشند همواره یک دایره بر آنها می‌گذرد.

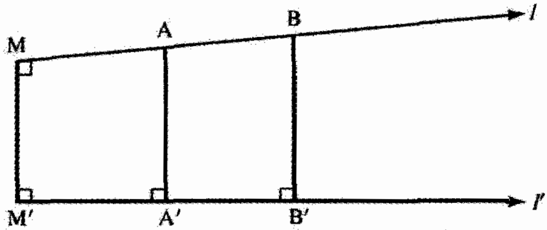
(۳۰) در هندسه هذلولوی، یک زاویه و یک خط وجود دارند به‌قسمی‌که آن خط تماماً در درون این زاویه قرار دارد.

تمرین

تمرینهای زیر تمرینهایی در هندسه هذلولوی هستند. فرض بر این است که شما بنداشت هذلولوی را پذیرفته‌اید و می‌توانید قضایایی را که در این فصل ذکر شده‌اند و نیز هر یک از قضایای هندسه نتاری را که مایل باشید به‌کار برید. ولی، از قضایای اقلیدسی که در هر یک از تمرینهای ۱۸ـ۲۶ فصل ۵، یا تمرینهای اصلی فصل ۵ آورده شده‌اند استفاده نکنید. (اکنون می‌توانیم بگوییم که قضایای هندسه نتاری درست همان احکامی هستند که هم در هندسه اقلیدسی درست‌اند و هم در هندسه هذلولوی.)

۱. ثابت کنید که اگر $\square A'B'BA$ چهارضلعی ساکری ($\measuredangle A'$ و $\measuredangle B'$ قائمه و $AA' \cong BB'$) باشد، آنگاه AB، ضلع روبه‌رو به قاعده $A'B'$، از $A'B'$ بزرگتر است. (راهنمایی: وسط M و M' این دو پاره‌خط را به‌هم وصل کنید و از تمرین ۴، فصل ۵، برای چهارضلعی‌های لامبرت $\square A'M'MA$ و $\square M'B'BM$ استفاده کنید.)

۲. فرض می‌کنیم l و l' یک عمود مشترک MM' دارند. فرض می‌کنیم A و B دو نقطه بر l باشند به‌قسمی‌که M وسط پاره‌خط AB نباشد. ثابت کنید که A و B از l' به یک فاصله نیستند.



شکل ۱۸.۶

۳. فرض می‌کنیم MM' عمود مشترک موازیهای l و l' باشد. ثابت کنید MM' کوتاهترین پاره‌خط بین هر نقطه l و هر نقطه l' است. (راهنمایی: وقتی می‌خواهید نشان دهید $MM' < AA'$، ابتدا با استفاده از تمرین ۴، فصل ۵، حالتی را که در آن AA' بر l' عمود است کنار بگذارید و برای حالت دیگر از تمرین ۲۷، فصل ۴، استفاده کنید.)

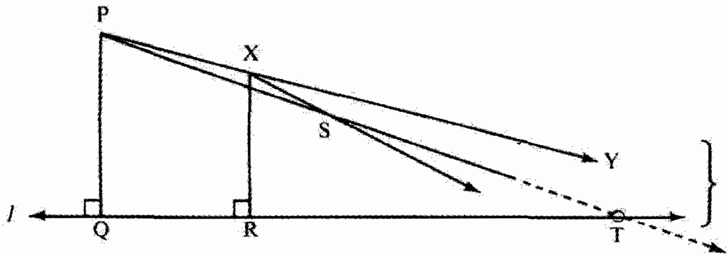
۴. باز فرض کنید پاره‌خط MM' عمود مشترک بین l و l' است. فرض کنید A و B دو نقطه از l چنان باشند که $M * A * B$، و عمودهای AA' و BB' را بر l' فرود آورید. ثابت کنید $AA' < BB'$. (راهنمایی: از تمرین ۳، فصل ۵، استفاده کنید. شکل ۱۸.۶.)

۵. دیده‌ایم که در هندسه هذلولوی کاستی هر مثلث مثبت است (قضیه ۱.۶). در هندسه اقلیدسی همه مثلثها یک کاستی صفر دارند. آیا در هندسه هذلولوی همه مثلثها می‌توانند یک کاستی داشته باشند؟ فرض کنید که بتوانند، با استفاده از ویژگی جمعی کاستی (قضیه ۶.۴) تناقضی به‌دست آورید. آیا برای کاستی مثلث کران بالایی وجود دارد؟

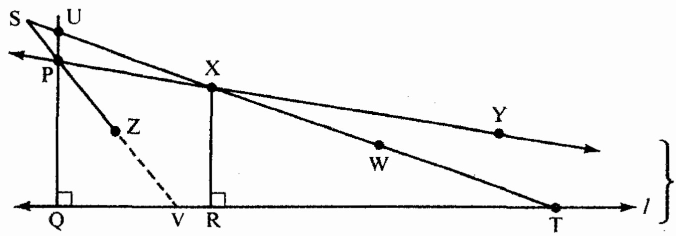
۶. خطهای موازی l و m داده شده‌اند. دو نقطه A و B را در آن طرف m که l در آن قرار ندارد، می‌گیریم؛ یعنی به‌ازای هر نقطه P واقع بر l، A و P در دو طرف m، و B و P هم در دو طرف m واقع‌اند. ثابت کنید که A و B در یک طرف l قرار دارند.

۷. (الف) ثابت کنید که زاویه توازی حاده است. بدین ترتیب که دقیقاً نشان دهید چگونه «$\Pi(PQ)^\circ = ۹۰^\circ$» مستلزم خط یکتایی موازی با l است که از P بگذرد، چیزی که با قضیه کلی هذلولوی تناقض دارد.

(ب) فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PY}$ یک نیم‌خط موازی حدی با l گذرنده از P، و X نقطه‌ای بر این نیم‌خط بین P و Y باشد. شاید بدیهی به‌نظر آید که $\overrightarrow{XY}$ یک نیم‌خط موازی حدی با l گذرنده از X است، ولی این امر نیاز به دلیل دارد. در برهان زیر برای مراحلی که ملاک درستی آنها آورده نشده، خود شما ملاک درستی را بیان کنید (شکل ۱۹.۶).



شکل ۱۹.۶

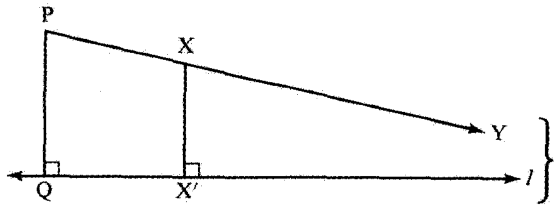


شکل ۲۰.۶

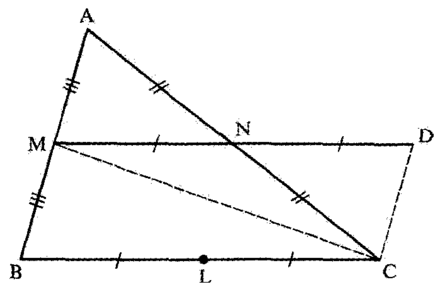
برهان:

(۱) باید ثابت کنیم که هر نیم‌خط $\overrightarrow{XS}$ بین $\overrightarrow{XY}$ و $\overrightarrow{XR}$ که در آن R پای عمود مرسوم از X بر l است، خط l را می‌برد. (۲) S و Y در یک طرف $\overleftrightarrow{XR}$ هستند. (۳) P و Y در دو طرف $\overleftrightarrow{XR}$ قرار دارند. (۴) بنابر تمرین ۶، S و Y در یک طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ هستند. (۵) S و R در یک طرف $\overleftrightarrow{PY}$ قرار دارند. $\overleftrightarrow{XY} = \overleftrightarrow{PY}$ (۶) Q و R در یک طرف $\overleftrightarrow{PY}$ هستند. (۷) Q و S در یک طرف $\overleftrightarrow{PY}$ قرار دارند. (۸) پس، $\overrightarrow{PS}$ بین $\overrightarrow{PY}$ و $\overrightarrow{PQ}$ واقع است. (۹) نقطه X در بیرون ΔPQT است. (۱۰) $\overrightarrow{XS}$، PQ را نمی‌برد. (۱۱) پس $\overrightarrow{XS}$ پاره‌خط QT را می‌برد (گزاره ۹.۳ (الف))، یعنی $\overrightarrow{XS}$ خط l را می‌برد. ■

(ج) به جای آن فرض می‌کنیم $\overrightarrow{XY}$ نیم‌خط موازی حدی با l است و $P * X * Y$. ثابت کنید $\overrightarrow{PY}$ نیم‌خط موازی حدی با l است. (راهنمایی: شکل ۲۰.۶. باید نشان دهید که $\overrightarrow{PZ}$، l را در نقطه V می‌برد. نقطه‌ای مانند S چنان بگیرید که $S * P * Z$. نشان دهید که SX، $\overleftrightarrow{PQ}$ را در نقطه U می‌برد به‌قسمی‌که $U * P * Q$. نقطه‌ای مانند W اختیار کنید به‌قسمی‌که $U * X * W$، و نشان دهید که $\overrightarrow{XW}$ میان $\overrightarrow{XY}$ و $\overrightarrow{XR}$ واقع است به‌طوری که $\overrightarrow{XW}$ در نقطه T خط l را می‌برد. برای به‌دست آوردن V از قضیه پاش استفاده کنید.)



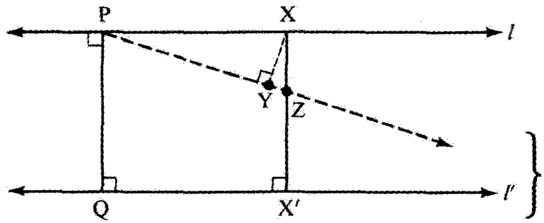
شکل ۲۱.۶



شکل ۲۲.۶

۸. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PX}$ موازی حدی با l از سمت راست، گذرنده از P باشد و Q و X' به‌ترتیب پای عمودهای وارد از P و X بر l باشند (شکل ۲۱.۶). ثابت کنید $PQ > XX'$. (راهنمایی: با استفاده از تمرین ۷ نشان دهید که $\measuredangle X'XY$ حاده و $\measuredangle X'XP$ منفرجه است و در نتیجه، تمرین ۳، فصل ۵، می‌تواند در مورد $\square PQX'X$ مورد استفاده واقع شود.) این تمرین نشان می‌دهد که فاصله X از خط l، هنگامی که X بر یک نیم‌خط موازی حدی از P بی‌نهایت دور شوند، کاهش می‌یابد. در واقع می‌توان ثابت کرد که فاصله X از خط l به صفر میل می‌کند (تمرین اصلی ۱۱).

۹. اگر L، M، و N به‌ترتیب وسط اضلاع BC، AB، و AC از ΔABC باشند، ثابت کنید که ΔAMN با ΔABC متشابه نیست (شکل ۲۲.۶) (راهنمایی: در غیر این‌صورت کاستی $\square MBCN$ صفر است). ثابت کنید که MN با BL قابل انطباق نیست، بدین‌ترتیب که خلاف آن را درست فرض کنید و نتیجه بگیرید که مجموع زوایای ΔABC برابر 180° است. (راهنمایی: D را چنان انتخاب نمایید که $M*N*D$ و $MN \cong ND$. نشان دهید که $\Delta CND \cong \Delta ANM$، و بعد $\Delta MDC \cong \Delta CBM$. سپس از معادله $180^\circ = (\measuredangle BMC)^\circ + (\measuredangle CMD)^\circ + (\measuredangle AMN)^\circ$ استفاده کنید تا به نتیجه برسید.)



شکل ۲۳.۶

۱۰. فرض می‌کنیم دو خط موازی l و l' دارای یک عمودمشترک $\overleftrightarrow{PQ}$ باشند. اگر X نقطه‌ای بر l و X' پای عمود مرسوم از X بر l' باشد، ثابت کنید هنگامی که X بر l بی‌نهایت از P دور می‌شود، پاره‌خط XX' بی‌نهایت افزایش پیدا می‌کند (شکل ۲۳.۶). (راهنمایی: در تمرین ۴ دیدیم که این پاره‌خط رفته‌رفته بزرگتر می‌شود. عمود XY را بر نیم‌خط موازی حدی بین $\overrightarrow{PX}$ و $\overrightarrow{PX'}$ فرود آورید. با استفاده از قضیه قطعه‌بر نشان دهید که $\overrightarrow{PY}$ پاره‌خط XX' را در یک نقطه Z می‌برد. با استفاده ازگزاره ۵.۴ نشان دهید $XY \leqslant XZ$. با استفاده از تمرین ۶، فصل ۵، نتیجه بگیرید که وقتی X از P دور می‌شود، XY بی‌نهایت بزرگ می‌شود.)

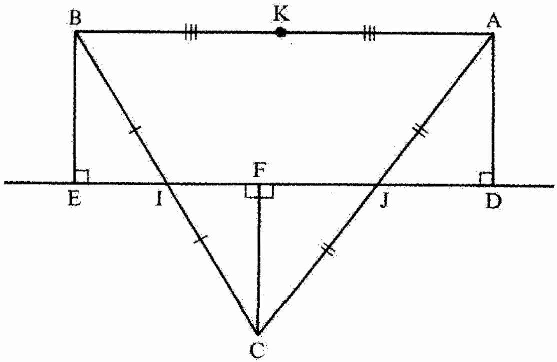
۱۱. این مسئله پنج قسمت دارد. در قسمت اول، چهار ضلعی ساکری مربوط به یک مثلث نامشخص را رسم و سپس از این ترسیم استفاده می‌کنیم.

(الف) اگر I، J، و K به‌ترتیب وسط اضلاع BC، CA، و AB از ΔABC، و AD، CF، و BE عمودهای مرسوم از رأسهای مثلث بر $\overleftrightarrow{IJ}$ باشند، ثابت کنید $AD \cong CF \cong BE$ و بنابراین $\square EDAB$ یک چهار ضلعی ساکری است (که مساحت آن با مساحت ΔABC مساوی است) (شکل ۲۴.۶).

(ب) ثابت کنید که عمودمنصف AB (یعنی عمود مرسوم از K بر $\overleftrightarrow{AB}$) بر $\overleftrightarrow{IJ}$ نیز عمود است و بنابراین $\overleftrightarrow{IJ}$ با $\overleftrightarrow{AB}$ واگرا موازی است.

(ج) یادآور می‌شویم که طول یک پاره‌خط را با رسم پاره‌خط کوتاهی بالای آن نشان می‌دهیم، مثلاً طول MN را با $\overline{MN}$ نشان می‌دهیم (قضیه ۳.۴ (ب)). ثابت کنید $\overline{IJ} = \overline{ED}/۲$ (در حالتی که $\measuredangle A$ یا $\measuredangle B$ منفرجه باشد شکل متفاوت است و برهان جداگانه‌ای مورد نیاز است). از اینجا نتیجه بگیرید که در هندسه هذلولوی $\overline{IJ} < \overline{AB}/۲$.

(د) فرض می‌کنیم $\measuredangle C$ قائمه باشد. ثابت کنید که قضیه فیثاغورس در هندسه هذلولوی صادق نیست. (راهنمایی: اگر قضیه برای مثلثهای قائم‌الزاویه ΔBCA و ΔICJ



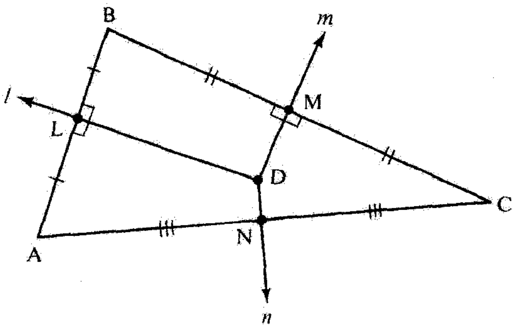
شکل ۲۴.۶

درست باشد، ثابت می‌شود $\overleftrightarrow{IJ} = \overleftrightarrow{AB}/2$ که با قسمت (ج)، در همین تمرین، متناقض است.)

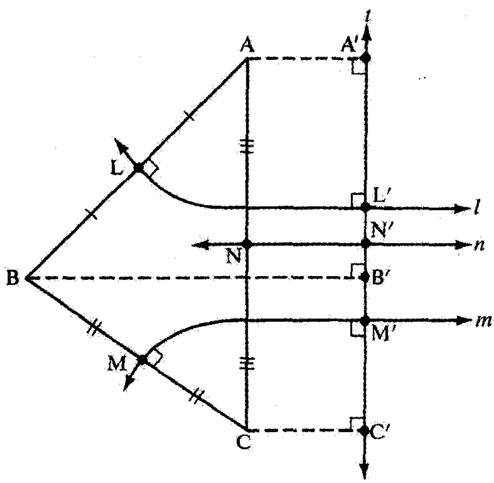
(ه) فرض می‌کنیم $BC \cong AC$. ثابت کنید که K، F، و C هم‌خط‌اند ولی F وسط CK نیست (از لم ۲.۶ و قسمت (الف) این تمرین استفاده کنید). برای کاربرد این قضیه در مکانیک، ←آدلر، ۱۹۶۶، صص ۱۹۲ و ۲۵۳ـ۲۵۷.

۱۲. در تمرین ۹، فصل ۵، برهان غلط بویویی پدر، را برای اصل توازی دیدیم. نقص برهان وی این بود که می‌پذیرفت هر مثلث یک دایره محیطی، یعنی دایره گذرنده از سه رأس آن، دارد. روش اقلیدسی در اثبات حکم این است که نشان می‌دهند سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث در یک نقطه همدیگر را می‌برند و این نقطه مرکز دایره محیطی است. نشان دهید که چگونه اصل پنجم اقلیدس در اثبات اینکه عمودمنصفهای l و m در یک نقطه مشترک‌اند مورد استفاده قرار می‌گیرد (ازگزاره ۱۰.۴ استفاده کنید) و بعد با استفاده از مثلثهای قابل انطباق ثابت کنید عمودمنصف سوم هم از این نقطه می‌گذرد و این نقطه از ۳ رأس مثلث به یک فاصله است. (راهنمایی: D، نقطه تلاقی دو عمودمنصف را به نقطه N، وسط ضلع سوم، وصل کرده و ثابت کنید $\overleftrightarrow{DN}$ بر ضلع سوم عمود است (شکل ۲۵.۶).)

۱۳. قسمتی از برهان تمرین ۱۲، یعنی آن قسمت که اگر دو عمودمنصف در یک نقطه مشترک باشند، عمودمنصف سوم هم از آن نقطه می‌گذرد، در هندسه هذلولوی کارایی دارد. در هندسه هذلولوی مثلثهایی هستند که دو عمودمنصف اضلاع آنها با هم موازی‌اند (در غیر این‌صورت می‌بایستی برهان بویویی پدر درست می‌شد). به‌علاوه، این عمودمنصفها می‌توانند به دو طریق مختلف موازی باشند. فرض می‌کنیم آنها واگرا موازی باشند، یعنی عمودمنصفهای l و m یک عمود مشترک t داشته باشند (شکل ۲۶.۶). ثابت کنید که عمودمنصف سوم، یعنی n، هم بر t عمود است.

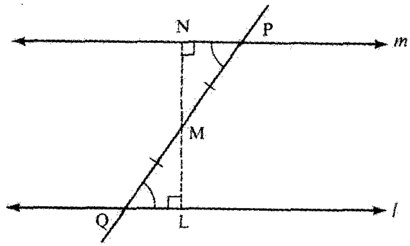


شکل ۲۵.۶



شکل ۲۶.۶

(راهنمایی: فرض می‌کنیم A'، B'، و C' به‌ترتیب پای عمودهای وارد از A، B، و C بر t باشند. فرض می‌کنیم که l، ضلع AB را در L نصف کرده باشد و در L' بر t عمود باشد، و m ضلع BC را در M نصف کند و در M' بر t عمود باشد. اگر N وسط AC باشد، با استفاده از قضیه ۵.۶ نشان دهید $AA' \cong BB'$ و $BB' \cong CC'$. پس $\square C'A'AC$ چهارضلعی ساکری است و N وسط AC، یعنی وسط ضلع روبه‌رو به قاعده است. اگر N' وسط قاعده $A'C'$ باشد، با استفاده از لم ۲.۶ نشان دهید که $n = \overleftrightarrow{NN'}$ بر t و $\overleftrightarrow{AC}$ عمود است.) (برای حالت موازی مجانبی، ←تمرین اصلی ۷.)



شکل ۲۷.۶

۱۴. در قضیه ۱.۴ ثابت شده بود که در هندسه نتاری، هرگاه زاویه‌های متبادل درونی قابل انطباق باشند، آنگاه خطوط موازی‌اند. این قضیه را در هندسه هذلولوی با این برهان که خطها واگرا موازی‌اند، یعنی یک عمود مشترک دارند، استوار سازید. (راهنمایی: فرض می‌کنیم M وسط پاره‌خط قاطع PQ باشد. عمودهای ML و MN را بر l و m فرود می‌آوریم (شکل ۲۷.۶). از روی قابلیت انطباق مثلثها ثابت کنید که L، M، و N هم‌خط‌اند.)

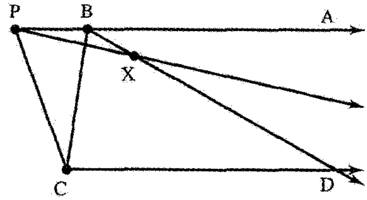
۱۵. فهرست مفصلی از احکام هم‌ارز با اصل توازی هیلبرت در هندسه نتاری تهیه کنید. این فهرست جایزه‌ای است برای همه کارهایی که شما تاکنون کرده‌اید.

۱۶. اگرچه در هندسه هذلولوی ممکن است برای برخی از مثلثها دایره محیطی وجود نداشته باشد، ثابت کنید که دایره محاطی همواره وجود دارد. (راهنمایی: ثابت کنید که برهان معمولی اقلیدسی که: «سه نیمساز در هر مثلث در نقطه‌ای متساوی‌الفاصله از سه ضلع یکدیگر را می‌برند» باز هم به‌کار می‌آید. از قضیه قطعه‌بر استفاده کنید.)

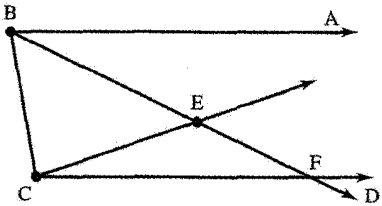
۱۷. فتوای زیر از سنت آگوستین را تفسیر کنید: «مسیحی خوب باید از ریاضیدانان و همه آنانی که به پیشگویی‌های پوچ می‌پردازند برحذر باشد. هم‌اکنون این خطر وجود دارد که ریاضیدانان با ابلیس هم‌پیمان شوند تا روح آدمی را به پلیدیها آلوده سازند و او را در اعماق دوزخ به بند بکشانند.»

تمرینهای اصلی

۱. فرض می‌کنیم A و D نقاطی در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ باشند به‌قسمی‌که $\overrightarrow{BA}||\overleftrightarrow{CD}$. در این‌صورت شکل حاصل از پاره‌خط BC (به نام قاعده) و نیم‌خطهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{CD}$ (به نام اضلاع) دو زاویه‌ای [ABCD] با رأسهای B و C نامیده می‌شود (شکل ۲۸.۶). درون [ABCD] اشتراک درونهای زاویه‌هایش $\sphericalangle ABC$ و $\sphericalangle DCB$ است؛ اگر P در درون بوده و X یکی از رأسها باشد، نیم‌خط



شکل ۲۸.۶



شکل ۲۹.۶

$\overrightarrow{XP}$ نیم‌خط درونی نامیده می‌شود. وقتی این نیم‌خطها اضلاع یک دو زاویه‌ای باشند، و وقتی هر نیم‌خط درونی مرسوم از B، $\overrightarrow{CD}$ را ببرد می‌نویسیم $\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{CD}$؛ در این‌صورت، $\overrightarrow{BA}$ را موازی حدی با $\overrightarrow{CD}$ گوییم، که تعمیم تعریف قبلی است که لازم بود $\sphericalangle DCB$ قائمه باشد، و می‌گوییم که دو زاویه‌ای [ABCD در B بسته است. $\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{CD}$ داده شده‌اند. تعمیم تمرین ۷ در زیر را ثابت کنید: اگر $A * B * P$ یا اگر $A * P * B$، آنگاه $\overrightarrow{PA}|\overrightarrow{CD}$.

۲. تقارن توازی حدی. اگر $\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{CD}$، آنگاه $\overrightarrow{CD}|\overrightarrow{BA}$. (در این حالت فقط می‌گوییم که دوزاویه‌ای [ABCD بسته است.) مراحل توجیه‌نشده در برهان را توجیه کنید (شکل ۲۹.۶).

برهان:

(۱) فرض می‌کنیم که [ABCD در C بسته نیست. (۲) پس نیم‌خط درونی $\overrightarrow{CE}$، $\overrightarrow{BA}$ را نمی‌برد. (۳) نقطه E را که فقط به‌عنوان یک برچسب نام‌گذاری شده است می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که بنابر نتیجه مهم بنداشت ارسطو، فصل ۳، داشته باشیم $\sphericalangle ECD < \sphericalangle BEC$. (۴) پاره‌خط BE، $\overrightarrow{CD}$ را نمی‌برد. (۵) نیم‌خط درونی $\overrightarrow{BE}$، $\overrightarrow{CD}$ را در یک نقطه F می‌برد و داریم $B * E * F$. (۶) چون $\sphericalangle BEC$ زاویه برونی در ΔEFC است، داریم $\sphericalangle ECF < \sphericalangle BEC$. (۷) یک تناقض است. (من مرهون لطف جورج ا. مارتین هستم که این راه‌حل را در اختیار من گذاشته است.) ■

نکته ۱. در چهار مرحله آخر، از فرض $\overrightarrow{\rm CD}|\overrightarrow{\rm EF}$ استفاده نمی‌شود؛ لذا این چهار مرحله ثابت می‌کنند که هر خط بین دو خط موازی مجانبی با هر دوی آنها موازی مجانبی و در یک امتداد است.

نکته ۲. نیم‌خطهای r و s داده شده‌اند، بنابر تعریف $r \sim s$ بدین معنی است که $r \subset s$، یا $s \subset r$، یا $r|s$. تمرینهای اصلی ۱ تا ۳ نشان می‌دهند که این یک رابطه هم‌ارزی بین نیم‌خطهاست. یک رده هم‌ارزی از نیم‌خطها را نقطه آرمانی یا یک سر می‌نامیم و این قرارداد را می‌پذیریم که این نقطه بر همه خطها (و فقط آن خطها)یی واقع است که این رده را می‌سازند. چون هر نقطه بر یک خط آن را به دو نیم‌خط متقابل ناهم‌ارز تبدیل می‌کند، می‌بینیم که هر خط دو سر دارد که بر آن قرار دارند. مجموعه همه نقاط آرمانی را «کیلی» مطلق نامیده است. (این آغاز ساختن یک مشابه هذلولوی از مکمل تصویری صفحه آفین است که در فصل ۲ شرح دادیم. ما در تمرین اصلی ۱۳ ساختن آن را ادامه می‌دهیم. مطلق، مشابه با خط در بی‌نهایتِ صفحه آفین است، ولی مطلق نمی‌تواند یک خط جدید باشد، زیرا همه خطوط قدیمی را در دو نقطه می‌برد؛ این خط در مکمل تصویری به یک قطع مخروطی بدل می‌شود.)

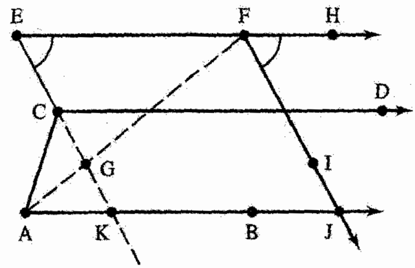
اگر R و S رأسهای r و s باشند به‌طوری که $r|s$، و Ω نقطه آرمانی باشد که با این دو نیم‌خط معین شده است، می‌نویسیم $r = {\rm P}\Omega$ و $s = {\rm S}\Omega$ و دوزاویه‌ای بسته با اضلاع r و s را مثلث تک‌مجانبی $\Delta{\rm RS}\Omega$ می‌نامیم. دو تمرین بعد نشان می‌دهند که این مثلثها در برخی از ویژگیها با مثلثهای معمولی مشترک‌اند. (شما به همین قیاس می‌توانید مثلثهای دومجانبی (با دو نقطه آرمانی) و مثلثهای سه‌مجانبی (با سه نقطه آرمانی) را تعریف کنید.)

۴. قضیه زاویه بیرونی. اگر $\Delta{\rm PQ}\Omega$ مثلث تک‌مجانبی باشد، زاویه‌های بیرونی در P و Q به‌ترتیب از زوایای درونی غیرمجاورشان بزرگترند. مراحل این استدلال را توجیه کنید.

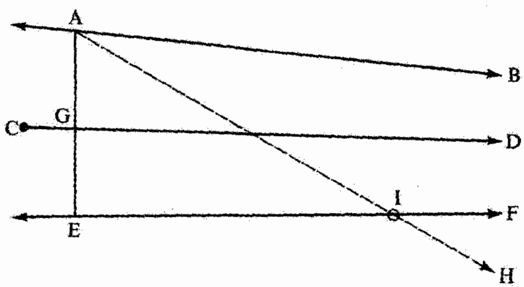
برهان (شکل ۶.۳۳):

(۱) ${\rm R} * {\rm Q} * {\rm P}$ داده شده است. باید نشان دهیم که $\measuredangle{\rm RQ}\Omega$ از $\measuredangle{\rm QP}\Omega$ بزرگتر است. (۲) فرض می‌کنیم $\overrightarrow{\rm QD}$ نیم‌خطی یکتا در همان طرف $\overleftrightarrow{\rm PQ}$ که نیم‌خط ${\rm Q}\Omega$ در آن قرار دارد چنان باشد که $\measuredangle{\rm RQD} \cong \measuredangle{\rm QP}\Omega$. (۳) هرگاه ${\rm U} * {\rm Q} * {\rm D}$، آنگاه $\measuredangle{\rm UQP} \cong \measuredangle{\rm QP}\Omega$. (۴) طبق تمرین ۱۴، $\overleftrightarrow{\rm QD}$ با $\overleftrightarrow{\rm P\Omega}$ واگرا موازی است. (۵) پس $\overrightarrow{\rm QD}$ بین $\overrightarrow{\rm QR}$ و $\overrightarrow{\rm Q\Omega}$ واقع است. (۶) $\measuredangle{\rm RQ}\Omega > \measuredangle{\rm QP}\Omega$. ■

۵. قضیه قابلیت انطباق. اگر در مثلثهای مجانبی $\Delta{\rm AB}\Omega$ و $\Delta{\rm A'B'}\Omega'$ داشته باشیم $\measuredangle{\rm BA}\Omega \cong \measuredangle{\rm B'A'}\Omega'$، آنگاه $\measuredangle{\rm AB}\Omega \cong \measuredangle{\rm A'B'}\Omega'$ اگر و تنها اگر ${\rm AB} \cong {\rm A'B'}$. برهان زیر را توجیه کنید و نتیجه بگیرید که ${\rm PQ} \cong {\rm P'Q'}$ اگر و تنها اگر که $\Pi({\rm PQ})^\circ = \Pi({\rm P'Q'})^\circ$.



شکل ۳۱.۶

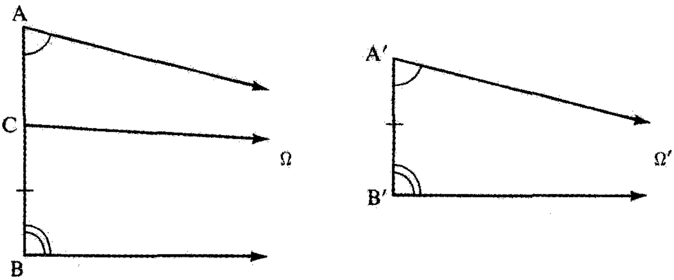


شکل ۳۲.۶

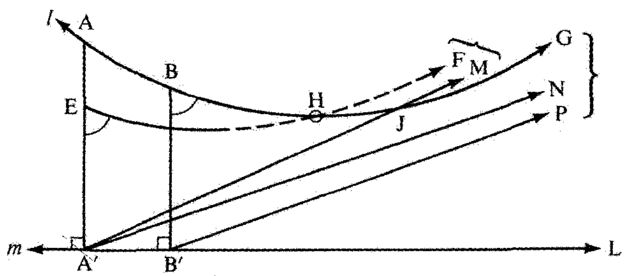
(۶) H را چنان انتخاب می‌کنیم که $E * F * H$، داریم $\overrightarrow{FH}|\overrightarrow{AB}$ (۷) $\sphericalangle HFG > \sphericalangle E$. (۸) بنابراین نیم‌خطی نظیر $\overrightarrow{FI}$ در درون $\sphericalangle HFG$ وجود دارد، به‌طوری که $\sphericalangle HFA = \sphericalangle HFA > \sphericalangle E$. (۹) $\overrightarrow{FI}$ نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ را در نقطه J می‌برد. (۱۰) $\overleftrightarrow{FJ}||\overleftrightarrow{EC}$. (۱۱) $\overleftrightarrow{EC}$ ضلع AF از ΔAFJ را می‌برد و ضلع FJ را نمی‌برد. (۱۲) لذا $\overleftrightarrow{EC}$ ضلع AJ را می‌برد که همان مورب مطلوب است. ■

نتیجه برهان (شکل ۳۲.۶):

(۸) پس AE، $\overleftrightarrow{CD}$ را در یک نقطه G می‌برد که می‌توانیم فرض کنیم بر نیم‌خط $\overrightarrow{CD}$ قرار دارد. (۹) هر نیم‌خط $\overrightarrow{AH}$ در درون $\sphericalangle GAB$، $\overleftrightarrow{EF}$ را در نقطه I می‌برد. (۱۰) چون $\overrightarrow{CD}$ در نقطه G وارد ΔAEI می‌شود و ضلع EI را نمی‌برد، باید ضلع AI را ببرد. (۱۱) بنابراین $\overrightarrow{CD}$ با $\overrightarrow{AB}$ موازی حدی است. ■



شکل ۳۵.۶

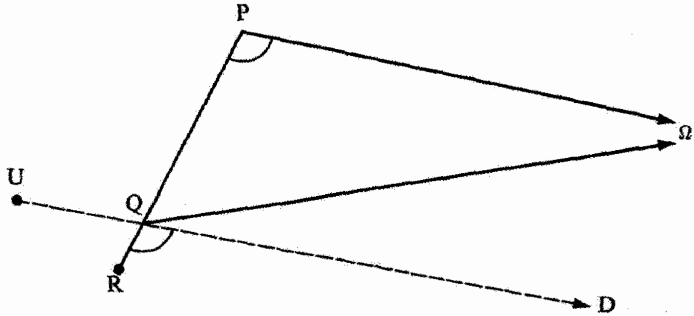


شکل ۳۶.۶

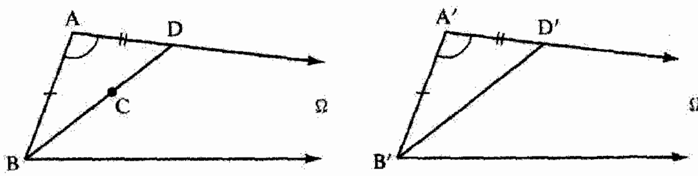
حدی با $\overrightarrow{BG}$ باشد. (۲) چون $EA' \cong BB'$ و $\sphericalangle A'EF \cong \sphericalangle B'BG$، پس $\sphericalangle EA'M \cong \sphericalangle BB'P$. (۳) $\overrightarrow{B'L}$ با $\overrightarrow{B'P}$ متفاوت است، و $\overrightarrow{A'L}$ با $\overrightarrow{A'N}$ متفاوت است. (۴) $\sphericalangle MA'L \cong \sphericalangle PB'L$. (۵) $\overrightarrow{B'P}$ با $\overrightarrow{A'N}$ موازی حدی است. (۶) بنابراین $\sphericalangle NA'L$ از $\sphericalangle PB'L$ کوچکتر است. (۷) از آنجا نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{A'M}$ بین $\overrightarrow{A'N}$ و $\overrightarrow{A'A}$ واقع است، و لذا باید $\overrightarrow{AG}$ را در نقطه J ببرد. (۸) J در همان طرف $\overrightarrow{EF}$ است که A' در آن است، بنابراین در طرف مقابل A است. (۹) پس، AJ، $\overrightarrow{EF}$ را در نقطه H می‌برد که باید بر $\overrightarrow{EF}$ باشد زیرا H در همان طرف $\overleftrightarrow{AA'}$ که J در آن است، واقع است. ■

در کجا از فرض قضیه استفاده شده بود؟

۷. در تمرینهای ۱۲ و ۱۳ عمودمنصفهای اضلاع $\triangle ABC$ را درنظر گرفتیم و نشان دادیم که (۱) هرگاه دو تا از آنها در یک نقطه مشترک باشند، سومی هم از آن نقطه می‌گذرد. (۲) اگر دو تا از آن عمودمنصفها یک عمود مشترک داشته باشند، سومی هم همان عمود مشترک را دارد. از آنجا نتیجه گرفتیم که اگر دو تا از آنها موازی مجانبی باشند، دوبه‌دو موازی مجانبی‌اند. این نتیجه را بدین‌گونه می‌توان تقویت کرد: هرگاه عمودمنصفهای l و m در امتداد نقطه آرمانی Ω موازی مجانبی



شکل ۳۳.۶



شکل ۳۴.۶

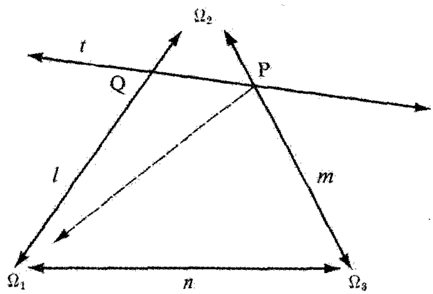
برهان (شکل ۳۴.۶):

(۱) فرض می‌کنیم $AB \cong A'B'$ و برعکس $\sphericalangle AB\Omega > \sphericalangle A'B'\Omega'$. (۲) تنها یک نیم‌خط مانند $\overrightarrow{BC}$ بین $B\Omega$ و $\overrightarrow{BA}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'\Omega'$. (۳) $\overrightarrow{BC}$، A را در یک نقطه D می‌برد. (۴) فرض می‌کنیم D' تنها نقطه‌ای بر $A'\Omega'$ باشد که $AD \cong A'D'$. (۵) پس $\Delta BAD \cong \Delta B'A'D'$. (۶) بنابراین $\sphericalangle A'B'D' \cong \sphericalangle A'B'\Omega'$، که محال است. (۷) برعکس، فرض می‌کنیم $\sphericalangle AB\Omega \cong \sphericalangle A'B'\Omega'$ و $A'B' < AB$. (۸) فرض می‌کنیم که C نقطه‌ای بر AB چنان باشد که $BC \cong B'A'$، و فرض می‌کنیم $C\Omega$ نیم‌خطی باشد که از C خارج شده و موازی حدی با $A\Omega$ باشد (شکل ۳۵.۶). (۹) پس $C\Omega$ موازی حدی با $B\Omega$ نیز خواهد بود. (۱۰) بنابر قسمت اول برهان، $\sphericalangle BC\Omega \cong \sphericalangle B'A'\Omega'$، بنابراین $\sphericalangle BC\Omega \cong \sphericalangle BA\Omega$. (۱۱) ولی $\sphericalangle BC\Omega > \sphericalangle BA\Omega$ که یک تناقض است. ■

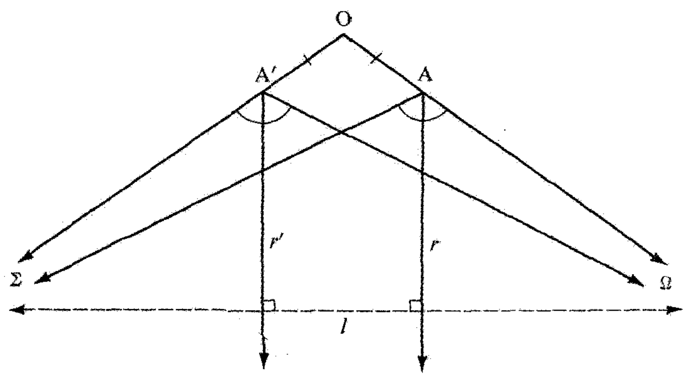
۶. نتیجه برهان قضیه ۷.۶. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\overrightarrow{EF}$، $\overrightarrow{AG}$ را می‌برد (شکل ۳۶.۶). مراحل استدلال زیر را توجیه کنید.

برهان:

(۱) فرض‌می‌کنیم $\overrightarrow{A'M}$ موازی‌حدی‌با $\overrightarrow{BC}$ باشد $\overrightarrow{EF}$،و $\overrightarrow{A'N}$ موازی‌حدی‌با $\overrightarrow{AG}$،و $\overrightarrow{B'P}$ موازی



شکل ۳۸.۶

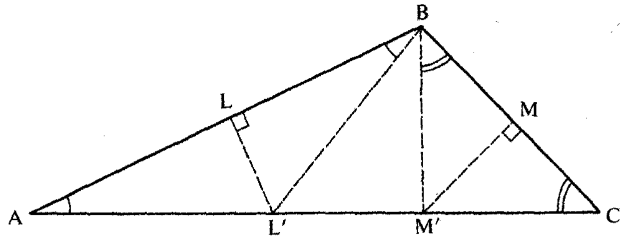


شکل ۳۹.۶

$\overrightarrow{OA'}$ موازی حدی است. ما در اینجا تنها به‌ذکر روش اثبات آن اکتفا می‌کنیم. ببینید آیا می‌توانید جزئیات این برهان را پیدا کنید (ولف، ۱۹۴۵، ص ۹۷):

فرض می‌کنیم A و A' چنان اختیار شده باشد که $OA \cong OA'$ (شکل ۳۹.۶). فرض می‌کنیم $A'\Omega$ نیم‌خط موازی حدی با $\overrightarrow{OA}$ مرسوم از A'، و $A\Sigma$ نیم‌خط موازی حدی با $\overrightarrow{OA'}$ مرسوم از A باشد. باز فرض می‌کنیم r و r' به‌ترتیب نیمسازهای $\sphericalangle \Sigma A\Omega$ و $\sphericalangle \Omega A'\Sigma$ باشند. روش اثبات این است که نشان دهیم خطوط m و m' که این نیم‌خطها را دربردارند، نه متقاطع‌اند و نه موازی مجانبی، در نتیجه، بنابر قضیه ۷.۶، یک عمودمشترک یکتای l دارند که همان خط انسداد $\sphericalangle A'OA$ است. (همچنین ←تمرین ک-۱۱، فصل ۷؛ مزیت این برهان پیچیده این است که یک راه ترسیم با خط‌کش و پرگار در اختیار ما قرار می‌دهد.)

۹. با استفاده از قضیه پیش، ثابت کنید که هر زاویه حاده یک زاویه توازی است. یعنی، اگر



شکل ۳۷.۶

باشند، آنگاه n، یعنی عمودمنصف سوم هم در همان امتداد Ω با l و m موازی مجانبی خواهد شد. این مطلب را ثابت و ملاک درستی هر مرحله را بیان کنید. دو لم زیر اساس این برهان‌اند:

لم۳.۶ $\triangle ABC$ داده شده است. فرض می‌کنیم l، m، و n به‌ترتیب عمودمنصفهای اضلاع AB، BC، و AC، و L، M، و N به‌ترتیب وسط آن اضلاع باشند. اگر $\overline{AC} \geq \overline{AB}$ و $\overline{AC} \geq \overline{BC}$ (یعنی اگر AC بزرگترین ضلع مثلث باشد)؛ آنگاه l، m، و n هر سه AC را می‌برند.

برهان:

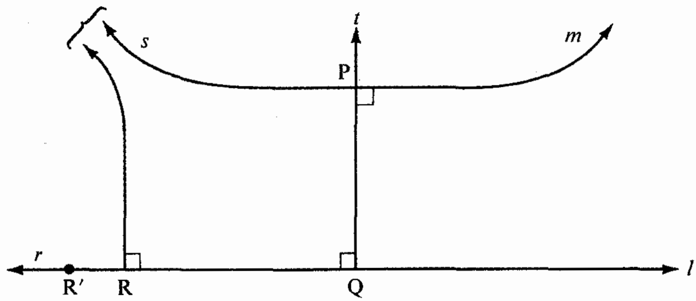
(۱) $(\measuredangle A)^\circ \geqslant (\measuredangle B)^\circ$ و $(\measuredangle C)^\circ \geq (\measuredangle B)^\circ$. (۲) پس نقطه‌ای مانند L' بر AC وجود دارد چنان‌که $\measuredangle A \cong \measuredangle L'BA$ و نقطه‌ای بر AC مانند M' وجود دارد به قسمتی که $\measuredangle C \cong \measuredangle M'BC$ (شکل ۳۷.۶). (۳) پس $AL' \cong BL'$ و $CM' \cong BM'$. (۴) بدین‌ترتیب، l خطی است که L را به L' وصل می‌کند و $m = \overleftrightarrow{MM'}$. (۵) از اینجا نتیجه می‌شود که هر سه عمودمنصف، AC را می‌برند. ■

لم۴.۶ هیچ خطی هر سه ضلع یک مثلث سه‌مجانبی (با سه رأس آرمانی) را نمی‌برد.

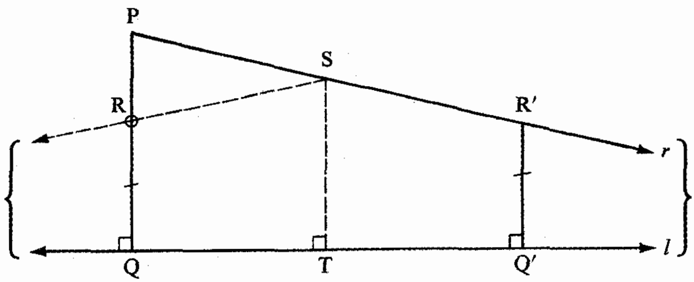
برهان:

(۱) فرض می‌کنیم که خط t، l را در Q و m را در P ببرد. (۲) پس نیم‌خط $\overrightarrow{PQ}$ از t بین نیم‌خطهای $P\Omega_2$ و $P\Omega_1$، که با l موازی حدی هستند، قرار دارد (شکل ۳۸.۶). (۳) $P\Omega_3$، نیم‌خط دیگر گذرنده از P که با n موازی حدی است، متقابل با $P\Omega_2$ است. (۴) بنابراین $P\Omega_1$ بین $\overrightarrow{PQ}$ و $P\Omega_3$ قرار دارد. (۵) ازاین‌رو، $\overrightarrow{PQ}$، n را نمی‌برد. (۶) به‌همین دلیل $\overrightarrow{QP}$، n را نمی‌برد. ■

۸. زاویه نامشخص $\measuredangle A'OA$ داده شده است. این یک قضیه در هندسه هذلولوی است که خط یکتایی مانند l، به‌نام خط انسداد این زاویه، وجود دارد به‌قسمی‌که با هر دو ضلع $\overrightarrow{OA}$ و



شکل ۴۱.۶

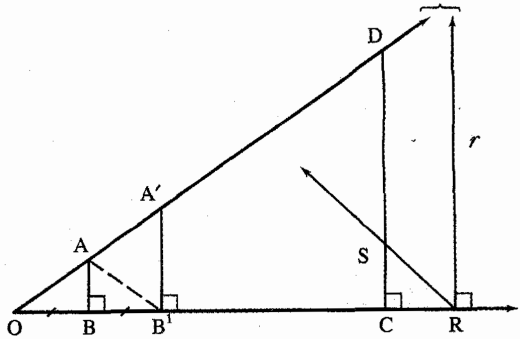


شکل ۴۲.۶

۱۱. فرض می‌کنیم نیم‌خط r که از P خارج شده است نیم‌خط موازی حدی با l، و Q پای عمود مرسوم از P بر l باشد (شکل ۴۲.۶). درستی اصطلاح «موازی مجانبی» را با اثبات اینکه به‌ازای هر نقطه R بین P و Q، نقطه‌ای مانند R' بر نیم‌خط r وجود دارد چنان‌که $P'Q' \cong RQ$، نشان دهید، که در آن Q' پای عمود مرسوم از R' بر l است. (راهنمایی: با استفاده از تمرین اصلی ۳ و قضیه ۶.۶ ثابت کنید که خط مرسوم از R که موازی مجانبی با l است، r را، در جهت مخالف r، در نقطه S می‌برد. نشان دهید که اگر T پای عمود مرسوم از S بر l باشد، نقطه R' قرینه R نسبت به $\overleftrightarrow{ST}$ نقطه مطلوب است.)

به‌طور مشابه، نشان دهید که این خطوط در امتداد دیگر واگرا هستند.

۱۲. فرض می‌کنیم l و n به‌طور مشابه، واگراموازی باشند و PQ پاره‌خط عمود مشترک آنها باشد. نقطه S وسط PQ را نقطه تقارن l و n می‌نامند. فرض می‌کنیم m عمود مرسوم از S بر PQ، Ω و Ω' نقاط آرمانی l، Σ و Σ' نقاط آرمانی n باشند (شکل ۴۳.۶). به‌موجب تمرین اصلی ۸، خطوط یکتایی وجود دارند که این نقاط آرمانی را به هم وصل می‌کنند. ثابت کنید



شکل ۴۰.۶

زاویه حاده $\measuredangle BOA$ داده شده باشد، تنها یک خط یکتا مانند l عمود بر $\overleftrightarrow{BO}$ وجود دارد که با $\overrightarrow{OA}$ موازی حدی است. (راهنمایی: قرینه $\overrightarrow{OA}$ را نسبت به $\overleftrightarrow{OB}$ پیدا کنید.)

راه دیگر، جزئیات برهان پیوستگی زیر را که از آن لباچفسکی است بیان کنید. ابتدا نشان دهید که عمودهایی بر $\overrightarrow{OB}$ وجود دارند که به‌موجب استدلال زیر $\overrightarrow{OA}$ را نمی‌برند. در شکل ۴۰.۶، B پای عمود مرسوم از A و $BB' \cong OB$. اگر عمود در B'، $\overrightarrow{OA}$ را در A' ببرد، آنگاه

$$\delta OA'B' = \delta OAB' + \delta AA'B' = ۲\delta OAB + \delta AA'B' > ۲\delta OAB$$

اگر این تضعیف در طول $\overrightarrow{OB}$ را تکرار کنیم و عمود همواره $\overrightarrow{OA}$ را ببرد، کاستی مثلثهای حاصل بی‌نهایت زیاد می‌شود. لذا باید سرانجام به‌نقطه‌ای برسیم که $\overrightarrow{OA}$ را نبرد.

دوم، با استفاده از بنداشت ددکیند «نخستین» چنین نیم‌خط r را به‌دست می‌آورید که از R اخراج شده است.

سرانجام، نشان دهید که $r|\overrightarrow{OA}$. به‌ازای هر نیم‌خط درونی $\overrightarrow{RS}$، فرض کنید C پای عمود مرسوم از S باشد؛ نشان دهید که $\overrightarrow{CS}$، $\overrightarrow{OA}$ را در نقطه D می‌برد و قضیه پاش را برای ΔOCD به‌کار برید.

۱۰. فرض می‌کنیم که l و m واگراموازی باشند و t عمودمشترک آنها باشد که l را در Q و m را در P می‌برد (شکل ۴۱.۶). اگر r نیم‌خطی از l باشد که از Q خارج شده است و S نیم‌خطی از m باشد که، در همان طرف t که r در آن واقع است، از P خارج شده باشد، ثابت کنید تنها یک نقطه مانند R بر r وجود دارد به‌طوری که عمود بر l از R با s موازی حدی است. همچنین ثابت کنید به‌ازای هر نقطه R' بر r به‌طوری $R' * R * Q$، عمود مرسوم از R' بر l با m واگراموازی است. (راهنمایی: ←تمرینهای اصلی ۳ و ۹.)

قضیه. $\mathscr{P}$ یک صفحه تصویری و p یک ویژگی قطبی‌بود (یک یکریختی از $\mathscr{P}$ بر صفحه دوگانش) است.

چون نقاط آرمانی تنها نقاط $\mathscr{P}$ هستند که بر قطبی‌هاشان قرار دارند، «مطلق» γ بنابر تعریف، یک قطع مخروطی است که با ویژگی قطبی‌بود p تعیین می‌شود و $p(\Omega)$ خط مماس بر δ در Ω است (پروژه ۲، فصل ۲). اگر Ω و Σ دو انتهای خط معمولی t باشند، بنابر تعریف، $\mathrm{P}(t)$ نقطه تقاطع دو خط مماس $p(\Omega)$ و $\mathrm{P}(\Sigma)$ است، که معنای هندسی به اصطلاح مجرد $\mathrm{P}(t)$ است. به‌علاوه درون γ مجموعه نقاط معمولی است، زیرا هر خط گذرنده از یک نقطه معمولی، معمولی است و γ را دوبار می‌برد.

تکلیف شما اثبات این قضیه است. برای اینکه شما را راه بیندازیم نشان می‌دهیم که بنداشت و-۲ را برای $\mathscr{P}$ صادق است.

(i) هر دو نقطه معمولی A و B بر یک خط معمولی $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ واقع‌اند و مطابق تعریف، بر هیچ خط «غیرعادی» قرار ندارند.

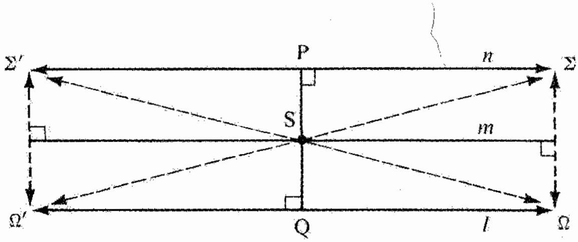
(ii) اگر یک نقطه عادی A و یک نقطه آرمانی Ω داده شده باشند، این دو نقطه بر یک خط معمولی شامل نیم‌خط $\mathrm{A}\Omega$ قرار دارند (که این خط وجود دارد و بنابر قضیه ۶.۶ یکتاست).

(iii) نقاط آرمانی Ω و Σ داده شده‌اند، فرض می‌کنیم A یک نقطه معمولی باشد و نیم‌خطهای $\mathrm{A}\Sigma$ و $\mathrm{A}\Omega$ را درنظر می‌گیریم. اگر این دو خط متقابل باشند، خط شامل آنها Ω و Σ را به هم وصل می‌کند. در غیر این صورت خط انسداد (تمرین اصلی ۸) زاویه‌ای که با این نیم‌خطهای هم‌انتها مشخص می‌شود، Ω و Σ را به هم وصل می‌کند. یکتایی خط $\Omega\Sigma$ نتیجه حاده بودن زاویه توازی است.

(iv) نقطه معمولی A و نقطه فراآرامانی $\mathrm{P}(t)$ داده شده‌اند. خط واصل بین آنها خطی است که از A بر t عمود شده است.

(v) نقطه آرمانی Ω و نقطه فراآرمانی $\mathrm{P}(t)$ داده شده‌اند. اگر Ω بر t قرار داشته باشد، این نقاط بر $p(\Omega)$ قرار دارند؛ به‌موجب تعریف وقوع، آنها بر هیچ خط غیرعادی قرار ندارند و نمی‌توانند بر یک خط معمولی u قرار داشته باشند زیرا در آن صورت u هم موازی مجانبی و هم عمود بر t خواهد بود. اگر Ω بر t نباشد، فرض می‌کنیم A نقطه‌ای بر t باشد. اگر نیم‌خط $\mathrm{A}\Omega$ بر t عمود باشد، خط شامل $\mathrm{A}\Omega$، Ω را به $\mathrm{P}(t)$ وصل می‌کند. در غیر این صورت تمرین اصلی ۹ به ما اطمینان می‌دهد که یک خط یکتای $u \perp t$ وجود دارد به‌طوری که $\mathrm{A}\Omega$ موازی حدی با u است و u، Ω را به $\mathrm{P}(t)$ وصل می‌کند.

(vi) نقاط فراآرمانی $\mathrm{P}(t)$ و $\mathrm{P}(u)$ داده شده‌اند. t، u را در نقطه معمولی A می‌برد، که

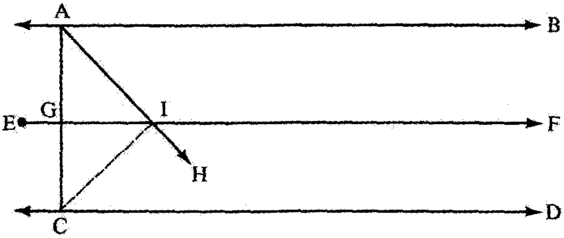


شکل ۴۳.۶

(الف) $\Omega\Sigma'$ و $\Sigma\Omega'$ یکدیگر را در S می‌برند. (ب) m، هم بر $\Omega\Sigma$ عمود است و هم بر $\Omega'\Sigma'$. (راهنمایی: از تمرین اصلی ۵، و قسمت تقارن قضیه ۶.۶ استفاده کنید.)

۱۳. مکمل تصویری صفحه هذلولوی. نقاط آرمانی را در نکته ۲، پس از تمرین اصلی ۳، تعریف کردیم. با افزودن آنها به‌عنوان سرِ خط، اطمینان حاصل می‌کنیم که خطوط موازی مجانبی یکدیگر را در یک نقطه آرمانی می‌برند. تمرین اصلی ۱۱ نشان می‌دهد که این خطوط در امتداد آن انتهای مشترک همگرا هستند. احتیاج داریم «نقاط واقع در بی‌نهایت» را نیز اضافه کنیم تا مطمئن شویم که خطوط واگراموازی یکدیگر را می‌برند. دو خط واگراموازی یک عمود مشترک یکتای t دارند. می‌توان خط سومی عمود بر t در نظر گرفت که «هم‌جهت» با دو خط اول باشد، لذا، این هر سه خط، همان‌گونه که در مکمل تصویری صفحه اقلیدسی صورت می‌گرفت، باید همدیگر را در یک نقطه ببرند. بنابراین قطب $\mathrm{P}(t)$ را به‌صورت مجموعه همه خطوطی تعریف می‌کنیم که عمود بر t هستند و مشخص می‌کنند که $\mathrm{P}(t)$ در امتداد همه آن خطوط قرار دارد، و نه در امتداد دیگر؛ قطبهای خطوط را نقاط فراآرمانی می‌نامیم. ملاحظه می‌کنیم که، برخلاف حالت اقلیدسی، $t \neq u \Longrightarrow \mathrm{P}(t) \neq \mathrm{P}(u)$ (یکتایی عمود مشترک). یک «نقطه» از مکمل تصویری $\mathscr{P}$ را یک نقطه از صفحه هذلولوی (به نام «نقطه معمولی»)، یا یک نقطه آرمانی، یک نقطه فراآرمانی تعریف می‌کنیم.

همچنین «خطوط واقع در بی‌نهایت» جدید را به‌صورت زیر اضافه می‌کنیم. قطبی $p(\mathrm{A})$ی یک نقطه معمولی A، مجموعه همه قطبهای خطوط گذرنده از A است، و آن قطبها تنها واقع بر $p(\mathrm{A})$ هستند. قطبی‌های نقاط معمولی خطوط فراآرمانی نام دارند. قطبی $p(\Omega)$ی یک نقطه آرمانی Ω متشکل از Ω و همه قطبهای خطهایی است که Ω یک سر آنهاست؛ باز $\in$ رابطه وقوع است و $p(\Omega)$ خط آرمانی نامیده می‌شود. قطبی یک نقطه فراآرمانی $\mathrm{P}(t)$ همان t است. بنابر تعریف، هر «خط» از $\mathscr{P}$ سر قطبی یک نقطه از $\mathscr{P}$ است. وقوع را قبلاً تعریف کرده‌ایم. A قطب $p(\mathrm{A})$ و Ω قطب $p(\Omega)$ است.



شکل ۶.۳۰

۳. ترایایی توازی حدی. هرگاه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ با $\overrightarrow{EF}$ موازی حدی باشند، خود نیز با هم موازی حدی هستند. هر مرحله از برهان زیر را توجیه کنید (شکل ۶.۳۰).

برهان:

(۱) $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ نقطه مشترکی ندارند. (۲) بنابراین، برحسب اینکه $\overleftrightarrow{EF}$ بین $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ باشد یا $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ هر دو در یک طرف $\overleftrightarrow{EF}$ باشند، دو حالت پیش می‌آید. (۳) در حالتی که $\overleftrightarrow{EF}$ بین $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ باشد، فرض کنیم G فصل مشترک AC با $\overleftrightarrow{EF}$ باشد. می‌توانیم فرض کنیم G بر نیم‌خط $\overrightarrow{EF}$ قرار دارد؛ در غیر این‌صورت می‌توانیم $\overrightarrow{GF}$ را درنظر بگیریم. (۴) هر نیم‌خط $\overrightarrow{AH}$ در درون $\sphericalangle GAB$ باید $\overrightarrow{EF}$ را در یک نقطه I ببرد. (۵) $\overrightarrow{IH}$ که در درون $\sphericalangle CIF$ قرار دارد باید $\overrightarrow{CD}$ را ببرد. (۶) بنابراین هر نیم‌خط $\overrightarrow{AH}$ داخل $\sphericalangle CAB$ باید $\overrightarrow{CD}$ را ببرد، لذا $\overrightarrow{AB}$ با $\overrightarrow{CD}$ موازی حدی است.■

مرحله (۷) لم کمکی زیر است. این مرحله که مستلزم چنین برهانی طولانی است حتی مورد توجه گاوس قرار نگرفته بود. در این برهان (که عرضه آن را مرهون ادوین ا. موییز هستم) از فرصتهای توازی حدی ما استفاده می‌شود. اگر تنها فرضهای خطهای موازی را ضعیفتر گرفته بودیم، چنان‌که شما در تمرین ک-۲ (ج)، فصل ۷، نشان خواهید داد، این لم کمکی نتیجه نمی‌شد.

لم کمکی. اگر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ هر دو در یک طرف $\overleftrightarrow{EF}$ باشند، می‌توانیم فرض کنیم که، مثلاً، $\overleftrightarrow{CD}$ بین $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{EF}$ قرار دارد (شکل ۶.۳۱).

برهان لم کمکی:

(۱) کافی است ثابت کنیم موربی وجود دارد که هر سه نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$، و $\overrightarrow{EF}$ را می‌برد. (۲) در حالتی که A و F در یک طرف $\overleftrightarrow{EC}$ هستند، نیم‌خط $\overrightarrow{EA}$ در درون $\sphericalangle E$ قرار می‌گیرد. (۳) پس، به موجب تقارن، $\overrightarrow{EA}$، $\overrightarrow{CD}$ را می‌برد. (۴) لذا $\overrightarrow{EA}$ موربی است که می‌خواستیم. (۵) در حالتی که A و F در دو طرف $\overleftrightarrow{EC}$ باشند، فرض می‌کنیم G نقطه تلاقی AF و $\overleftrightarrow{EC}$ باشد.

در این حالت $p(A)$، $\mathrm{P}(t)$ را به $\mathrm{P}(u)$ وصل می‌کند، یا در نقطه آرمانی Ω می‌برد، که در این حالت $p(\Omega)$ خط واصل است، یا بنابر قضیه ۷.۶، در یک نقطه فراآرمانی $\mathrm{P}(m)$ می‌برد، که در این حالت m (عمود مشترک t و u)، $\mathrm{P}(t)$ و $\mathrm{P}(u)$ را به هم وصل می‌کند.

پروژه

۱. این راه دیگری برای رسم عمود مشترک بین دو خط واگراموازی l و n است. کافی است که S، نقطه تقارن آنها را مشخص کنیم، پس برای یک عمود، می‌توان از S عمودی بر هر دو خط فرود آورد. پاره‌خط AB را بر l می‌گیریم. نقطه C را بر l چنان می‌گیریم که B وسط AC باشد و پاره‌خط $\mathrm{A'B'}$ قابل انطباق با AB را بر n جدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم M، $\mathrm{M'}$، N، و $\mathrm{N'}$ به‌ترتیب وسط $\mathrm{AA'}$، $\mathrm{BB'}$، $\mathrm{BA'}$، و $\mathrm{CB'}$ باشند. در این‌صورت خطوط $\overleftrightarrow{\mathrm{MM'}}$ و $\overleftrightarrow{\mathrm{NN'}}$ متمایزند و یکدیگر را در S می‌برند (برهان از نظریه تقارن لغزه نتیجه می‌شود، تمرینهای ۲۱ و ۲۲، فصل ۹؛ همچنین به کاکستر، ۱۹۶۸، ص ۲۶۹، که از قضیه خط وسط یلمسلو نتیجه شده است. مواظب باشید که توضیح کاکستر از خطهای وسط تا حدی نادرست است، مثلاً هیچ خط وسطی که از S می‌گذرد، l و n را نمی‌برد.)

۲. م. پیری نشان داده است که مبنای هندسه را می‌توان براساس تنها اصطلاح اولیه «نقطه» و تنها رابطه اولیه «نقطه A از نقاط B و C به یک فاصله است» بنا نهاد. بدیهی است که «هم‌خطی A، B، و C» را برحسب «میان‌بود»، یعنی به‌صورت $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}$، یا $\mathrm{C} * \mathrm{A} * \mathrm{B}$، یا $\mathrm{A} * \mathrm{C} * \mathrm{B}$ تعریف کرد. آنچه در هندسه هذلولوی بدیهی نیست یکی امکان تعریف «میان‌بود»، برحسب «هم‌خطی» است، همان کاری که ف. پ. جنکس کرده است، و دیگری این است که «هم‌خطی» در واقع ممکن است به‌عنوان تنها رابطه تعریف نشده برای هندسه هذلولوی که براساس اصل پیوستگی مقدماتی (تمرین ک-۲۱، فصل ۷) نهاده شده اختیار شود. با مراجعه به مقاله‌های زیر، گزارشی در باب همه این قضایا تهیه کنید: «یادداشتهایی در باب مفاهیم اولیه برای هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی» نگارش هـ. رویدن؛ مقاله روش بنداشتی، اثر هنکین، ساپس، و تارسکی، ۱۹۵۹، و اصلاحاتی که در آن صورت گرفته؛ مقاله و. شواب هویزر، تحت عنوان «روشهای ماورای ریاضی در مبانی هندسه»؛ در منطق، روش‌شناسی و فلسفه علم به قلم ی. بار-هیلل، آمستردام، نورث هلند، ۱۹۶۵، و نبربلومنتال و منگر ۱۹۷۰، ص ۲۲۰.

۳. هیلبرت نشان داده است که همه هندسه هذلولوی مسطحه را می‌توان از بنداشتهای وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق و یک بنداشت پیوستگی که مدعی وجود دو نیم‌خط موازی حدی

نامتقابل اخراج شده از یک نقطه ناواقع بر یک خط مفروض است نتیجه گرفت. گزارشی در باب اثبات فرض زاویه حاده ساکری از روی این بنداشتها تهیه کنید (ولف، ۱۹۴۵، ص ۷۸؛ بنداشت ارشمیدس در این برهان مورد نیاز نیست). همچنین گزارشی در باب وارد کردن مختصات بر مبنای این بنداشتها (اسمیلیو «یک راه تحلیلی تازه برای هندسه هذلولوی» مجله مبانی ریاضی، شماره ۵۰، ۱۹۶۱ صص ۱۲۹ـ۱۵۸) و مورد استعمال این گونه مختصات در اثبات اصل پیوستگی دایره (ی. اشترومر، «برهانی برای بنداشت دایره‌ای هندسه هذلولوی» در تحقیقات در علوم ریاضی سگد،[1]، شماره ۲۲، ۱۹۶۱، صص ۱۹۰ـ۱۹۵) تهیه کنید.

۴. اگر بنداشت ددکیند از بنداشتهای هندسه هذلولوی ما حذف شود، اثبات وجود نیم‌خطهای موازی حدی ناممکن می‌شود، زیرا که و. پیاس یک هندسه ارشمیدسی «نیم‌بیضوی» ساخته است که در آن بنداشت هذلولوی صادق است ولی هر جفت از خطوط موازی یک عمود مشترک یکتا دارند (ماتماتیشه آنالن[2] شماره ۱۴۳، ۱۹۶۱، ص ۲۳۳). اگر به‌جای بنداشت ددکیند، اصل پیوستگی مقدماتی گذاشته شود، برهانی برای وجود نیم‌خطهای موازی حدی، با قرار دادن در یک صفحه تصویری متری داده می‌شود (هسنبرگ و دیلر، ۱۹۶۷، ص ۲۳۹). گزارشی درباب این قضایا تهیه کنید. اگر بتوانید از ترسیم یانوش بویویی (ص ۲۱۰) برای برهان سرراست‌تری استفاده کنید، به احتمال زیاد شایسته دریافت درجه دکترا خواهید بود. (←پیوست ب و م. جی. گرینبرگ درباره «رسم موازی ی. بویویی»، مجله هندسه، ۱۲/۱، ۱۹۷۹: ۴۵ـ۶۴.)

۵. در هندسه اقلیدسی، تقسیم هر زاویه به سه قسمت مساوی با خطکش و پرگار نشدنی است. در هندسه هذلولوی، نه تنها این تقسیم نشدنی است، بلکه تقسیم هر پاره‌خط به سه قسمت مساوی با خطکش و پرگار نشدنی است! در هندسه اقلیدسی، رسم یک چهارضلعی منتظم که مساحت آن برابر با مساحت دایره مفروضی باشد، با خطکش و پرگار، نشدنی است، ولی در هندسه هذلولوی این کار شدنی است. گزارشی در این باب تهیه کنید. (←مبانی هندسه و صفحه نااقلیدسی، اثر گ. ا. مارتین، فصل ۳۴ [مطلبی که در چاپ ۱۹۸۲ افزوده شده است].)

1. *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged* 2. *Mathematische Annalen*

۷

استقلال اصل توازی

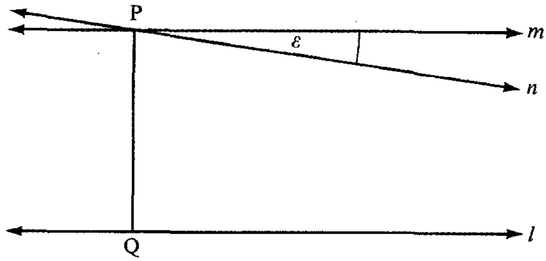
همه تلاشهای من برای یافتن یک تناقض یا یک ناسازگاری در این هندسه نااقلیدسی به شکست انجامیده است.

ک. ف. گاوس

سازگاری هندسه هذلولوی

در فصل پیش، شما با هندسه هذلولوی و چند قضیه آن، که می‌باید درنظر کسی که به هندسه اقلیدسی عادت کرده، بسیار عجیب جلوه کرده باشد، آشنا شدید. اگرچه ممکن است درستی برهان این قضایا بر اساس فرضهای ما، مورد پذیرش شما قرارگرفته باشد، ممکن است این احساس نیز به شما دست داده باشد که فرض اساسی هندسه هذلولوی ــ بنداشت هذلولوی ــ غلط است. ببینیم منظور ما از غلط‌بودن چیست؟

فرض کنید که من پذیرفته باشم وقتی شیئی، مثلاً سنگی، را رها می‌کنم به‌سمت بالا «می‌رود». می‌توانم بیرون بروم و چند سنگ را رها کنم، و اگر مخم عیب نداشته باشد متوجه می‌شوم که آنچه پذیرفته بودم غلط است.



شکل ۱.۷

حالا، چگونه آزمایشی می‌توانم انجام دهم تا نشان دهم که فرض هذلولوی غلط است، یا به‌عبارت دیگر، نشان دهم که نقیض آن، یعنی اصل توازی درست است؟ پیش از همه باید معنی این حکم را بفهمم. در مثال بالا معنی «سنگ» و «رهاکردن» آن را خیلی خوب فهمیده بودم، پس توانستم به مقتضای این فهم خود عمل کنم. اما اینکه l یک «خط» است، P نقطه‌ای است ناواقع بر آن، یا یک «موازی یکتا» با l وجود دارد که بر P می‌گذرد یعنی چه؟ می‌توانم «نقطه‌ها» و «خطها» را به کمک کاغذ و مداد و خط‌کش نشان دهم. فرض کنید $\overleftrightarrow{PQ}$ را عمود بر l و خط m را از نقطه P عمود بر $\overleftrightarrow{PQ}$ رسم کردم و سپس خط n را از P چنان رسم کردم که زاویه بسیار کوچک ϵ° با m بسازد. با استفاده از مثلثات اقلیدسی می‌توانم دقیقاً حساب کنم که چه اندازه باید بر روی m دور شوم تا به نقطه‌ای که n خط l را می‌برد برسم. ولی اگر ϵ° بسیاربسیار کوچک باشد، این نقطه ممکن است میلیونها کیلومتر دورتر باشد. در این صورت نمی‌توانم عملاً این آزمایش را انجام دهم تا بتوانم غلط بودن بنداشت هذلولوی را ثابت کنم.

ولی آیا هندسه حدیث خطهایی است که می‌توانیم رسم کنیم؟ هندسه کاربردی (مهندسی) چنین است، اما هندسه محض از خطهای آرمانی صحبت می‌کند و این خطها مفاهیم‌اند نه اشیا. تنها آزمایشهایی که می‌توانیم بر این خطهای آرمانی انجام دهیم آزمایشهای فکری هستند. پس پرسش باید این‌گونه مطرح شود: آیا می‌توانیم یک هندسه نااقلیدسی تصور کنیم؟ کانت می‌گوید نه؛ می‌گوید هیچ هندسه‌ای غیر از هندسه اقلیدسی قابل تصور نیست. البته در آن زمان هنوز کسی تصوری از هندسه دیگر نداشت. این بدین معنی است که گاوس، بویویی، و لباچفسکی «جهانی تازه» آفریدند.

پرسشهای دیگری نیز ممکن است مطرح شوند. ریاضیدانان از بسیاری از اندیشه‌های خود دست می‌کشند، خواه بدین سبب که این اندیشه‌ها به تناقضاتی منجر می‌شوند و خواه بدان علت که راه به جایی نمی‌برند، یعنی نشانی از ثمربخشی، سودمندی، یا گیرایی در آنها مشاهده نمی‌شود. آیا قبول بنداشت هذلولوی به تناقضی منجر می‌شود؟ ساکری فکر می‌کرد که می‌شود، و کوشش

کرد تا اصل توازی را از آن راه ثابت کند. آیا هندسه هذلولوی ثمربخش، مفید یا جالب است؟

جواب دادن به این پرسش را به بعد موکول می‌کنیم و نخست به پرسش قبل از آن می‌پردازیم. آیا هندسه هذلولوی سازگار است؟ امروز ما به این پرسش به‌عنوان پرسشی در مبحث ماورای ریاضی می‌نگریم، یعنی پرسشی از بیرون یک دستگاه ریاضی و درباره خود دستگاه ریاضی. پرسش درباره خط، نقطه، یا سایر موجودیتها هندسی نیست، بلکه پرسشی است درباره کل دستگاه هندسه هذلولوی.

اگر هندسه هذلولوی ناسازگار بود، یک برهان عادی ریاضی می‌توانست تناقضی پدید آورد. ساکری برای یافتن این تناقض کوشش کرد ولی توفیقی به‌دست نیاورد. آیا او چنان‌که باید و شاید تیزهوش نبوده است و باشد روزی که نابغه‌ای این تناقض را بیابد؟

از سوی دیگر، آیا می‌توان ثابت کرد که هندسه هذلولوی سازگار است ـــ آیا امکان دارد ثابت شود که هیچ راهی برای دستیابی به تناقض در آن وجود ندارد؟

می‌توان همین پرسش را درباره هندسه اقلیدسی مطرح کرد ـــ ازکجا می‌دانیم که این هندسه سازگار است؟ البته این پرسش، پیش از کشف هندسه نااقلیدسی هرگز پرسش داغی نبود، فقط بدین دلیل که همه باور داشتند که هندسه اقلیدسی سازگار است. نکته بسیار جالب توجه اینکه اگر این باور را چون فرضی صریح (ولو اینکه یک فرض ریاضی باشد) بپذیریم، ممکن است به یاری آن دلیلی بر سازگار بودن هندسه هذلولوی عرضه کنیم. این امکان را به‌صورت یک قضیه بیان می‌کنیم:

قضیه ماورای ریاضی ۱. اگر هندسه اقلیدسی سازگار باشد، هندسه هذلولوی هم سازگار است.

اگر فعلاً این قضیه را مسلم بینگاریم، نتیجه مهم زیر را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه. اگر هندسه اقلیدسی سازگار باشد، هرگز از روی بقیه اصلهای هیلبرت، برهان یا بطلانی برای اصل توازی پیدا نخواهد شد، یعنی اصل توازی مستقل از اصلهای دیگر است.

برای اثبات این نتیجه، خلاف آن را فرض می‌کنیم، یعنی می‌پذیریم که برهانی برای اصل توازی وجود داشته باشد. پس هندسه هذلولوی ناسازگار خواهد بود، زیرا بنداشت هذلولوی با یک قضیه اثبات شده‌ای تناقض دارد. ولی قضیه ماورای ریاضی ۱ حکم می‌کند که هندسه هذلولوی نسبت به هندسه اقلیدسی سازگار است. این تناقض ثابت می‌کند که هیچ برهانی برای اصل توازی وجود ندارد (برهان خلف). خود همین فرض که هندسه اقلیدسی سازگار است مؤید این است که هیچ بطلانی هم برای اصل توازی وجود ندارد. ■

بدین‌ترتیب می‌بینیم که دوهزار سال تلاش برای اثبات اصل پنجم اقلیدس بیهوده بوده است.

امید به پیدا کردن برهان برای آن، به‌همان اندازه امید به پیدا کردن روش تثلیث زاویه با استفاده از خط‌کش و پرگار تنهاست.

البته هنگامی که این را می‌گوییم، سازگاری قابل احترام هندسه اقلیدسی را می‌پذیریم. اگر ساکری، لژاندر، ف. بویویی، و دهها دانشمند دیگر در اثبات اصل پنجم اقلیدس از روی بنداشتهای دیگر، با این نیت عالی که هندسه اقلیدسی را استوارتر و زیباتر سازند، توفیق می‌یافتند، مسلماً هندسه اقلیدسی را به‌عنوان یک متن سازگار فکری کاملاً خراب می‌کردند! (خواننده عزیز، از تو مصراً می‌خواهم که با دقت زیاد به احکام پیش مراجعه کنی تا اطمینان‌یابی که آنها را فهمیده‌ای. اگر نفهمیده باشی، به‌منظور اساسی این کتاب دست نیافته‌ای.)

قضیه ماورای ریاضی ۱، به‌صورتی که در اینجا آورده شده از ائوجنیو بلترامی (۱۸۳۵ـ۱۹۰۰) است، و برهان متفاوتی بعدها توسط فلیکس کلاین (۱۸۴۹ـ۱۹۲۵) ارائه شده است.[۱] بلترامی در ۱۸۶۸ با استفاده از هندسه دیفرانسیل (مطالعه هندسه سطوح با محاسبات دیفرانسیل، که گاوس آن را بسط داده است)، سازگاری نسبی هندسه هذلولوی را ثابت کرد (شبه کره، فصل ۱۰). کلاین دریافت که می‌توان با استفاده از هندسه تصویری برهان دیگری به‌دست آورد. او در ۱۸۷۱ روش آرتور کیلی را که (در ۱۸۵۹) برای بیان اندازه فاصله و زاویه برحسب مختصات تصویری به‌کار برده بود جرح و تعدیل کرد.

برای اثبات قضیه ماورای ریاضی ۱، باید از خود بپرسیم که یک «خط» در هندسه هذلولوی یعنی چه؟ در واقع بپرسیم صفحه هذلولوی چیست؟ پاسخ واقعی این است که بگوییم نمی‌دانیم؛ زیرا این مفهوم صرفاً نوعی انتزاع است. یک «خط» هذلولوی اصطلاح تعریف نشده‌ای است که مفهوم مجردی را تعریف می‌کند که شبیه مفهوم یک خط اقلیدسی است به استثنای ویژگی توازی‌اش. پس هندسه هذلولوی را چگونه تجسم کنیم؟ در ریاضیات، نظیر هر حوزه پژوهشی دیگر، طرح درست سوال به‌همان اندازه یافتن پاسخ مهم است.

مسئله «تجسم»، یعنی پیداکردن اشیای اقلیدسی که معرف اشیا هذلولوی باشند، به‌معنی یافتن یک مدل اقلیدسی است برای هندسه هذلولوی. در فصل ۲ منظور از مدل برای یک دستگاه بنداشت را روشن ساختیم. در آنجا با ارائه مدلهای سه‌نقطه‌ای و پنج‌نقطه‌ای هندسه وقوع که اقلیدسی نیستند نشان دادیم که اصل توازی اقلیدسی مستقل از بنداشتهای هندسه وقوع است. در اینجا می‌خواهیم بدانیم که آیا اصل توازی از یک دستگاه بنداشتهای بزرگتر، یعنی هندسه نتاری، مستقل

۱. بلترامی مساعی زیادی در هندسه دیفرانسیل به عمل آورده است. کلاین بر بسیاری از شاخه‌های ریاضی مسلط و استادی بانفوذ بود. کتاب او درباره تاریخ ریاضیات سده نوزدهم معرف درجه احاطه او بر همه جنبه‌های ریاضی است. خطابه افتتاحیه او در ۱۸۷۲، برنامه ارلانگر، مطالعه گروههای تبدیلات و پایه‌های آنها را به‌صورت مفتاحی برای هندسه درآورده است (فصل ۹).

هست یا نیست. می‌توانیم با همان روش ــ با ارائه مدلهایی برای هندسه هذلولوی[1] ــ نشان دهیم که هست.

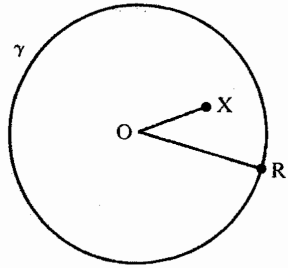
مدل بلترامی_کلاین

برای اختصار، این نخستین مدل (مدل بلترامی_کلاین) را «مدل کلاین» می‌نامیم. یک‌بار برای همیشه دایره γ را (که کیلی آن را «مطلق» نامیده) در صفحه اقلیدسی تثبیت می‌کنیم. اگر O مرکز γ و OR یک شعاع آن باشد، بنابر تعریف، درون γ مجموعه همه نقطه‌هایی نظیر X است که $OX < OR$. در مدل کلاین نقطه‌های درون γ معرف نقطه‌های صفحه هذلولوی هستند (شکل ۲.۷).

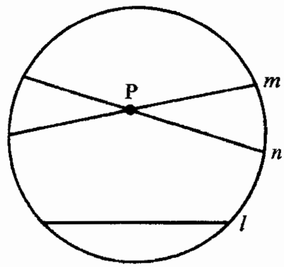
یادآوری می‌کنیم پاره‌خطی که دو نقطه A و B از دایره γ را به هم وصل می‌کند، وتر AB نامیده می‌شود. می‌خواهیم پاره‌خطها را بدون مبدأ و منتهاشان درنظر بگیریم، این پاره‌خطها را وتر باز می‌نامیم و با $A)(B$ نشان می‌دهیم. در مدل کلاین وترهای باز γ معرف خطهای صفحه هذلولوی هستند. رابطه «واقع بر» به‌معنی معمولی آن گرفته می‌شود: P بر $A)(B$ واقع است بدین معنی است که P بر خط اقلیدسی $\overleftrightarrow{AB}$ و میان A و B قرار دارد و رابطه هذلولوی «میان‌بود» با نسبت معمولی اقلیدسی «میان‌بود» بیان می‌شود که خیلی روشن است. ولی بیان «قابلیت انطباق»

اِئوجنیو بلترامی

۱. برخلاف وضعی که در هندسه وقوع وجود داشته، نمی‌توانیم برای هندسه نتاری مدلی بسازیم که ویژگی توازی بیضوی در آن صدق کند، زیرا این یک قضیه در هندسه نتاری است که خطوط موازی وجود دارند (نتیجه ۲، قضیه ۱.۴). اگر تمرین اصلی ۱۳، فصل ۶، را حل کرده باشید به‌آسانی به‌انگیزه مدل بلترامی_کلاین پی می‌برید. این همان مکمل تصویری صفحه هذلولوی است!



شکل ۲.۷



شکل ۳.۷

خیلی پیچیده‌تر است و ما بعداً در این فصل (ماهیت تصویری مدل بلترامی‐کلاین) از آن صحبت خواهیم کرد.

از شکل ۳.۷ بی‌درنگ آشکار می‌شود که بنداشت هذلولوی در این نمایش صدق می‌کند. در اینجا دو وتر باز m و n، گذرنده از P، با وتر باز l موازی‌اند. موازی در این نمایش به چه معنی است؟ بنابر تعریف، دو خط را زمانی «موازی» گویند که نقطه مشترک نداشته باشند (در تعریف «موازی» به‌جای واژه «خط»، «وتر باز» می‌گذاریم). این واقعیت که هرگاه سه وتر را امتداد دهیم ممکن است یکدیگر را در بیرون دایره γ ببرند، مهم نیست، زیرا نقاط بیرون دایره γ نقاط صفحه هذلولوی نیستند. پس برهان بلترامی‐کلاین را برای سازگاری نسبی هندسه هذلولوی چنین خلاصه می‌کنیم:

نخست فهرستی از واژه‌ها می‌سازیم تا پنج اصطلاح تعریف‌نشده («نقطه»، «خط»، «واقع بر»، «میان‌بود» و «قابلیت انطباق») را در این مدل هندسه اقلیدسی «برگردان» و تعبیر کنیم (ما این کار را فقط برای چهار اصطلاح اول کرده‌ایم). سپس همه اصطلاحات تعریف‌شده از راه برگردان همه موارد اصطلاحات تعریف‌شده تعبیر می‌شوند. مثلاً، اصطلاح تعریف‌شده «موازی»

این‌گونه تعبیر شد که در تعریف، به‌جای هر مورد از واژه «خط» واژه «وتر باز» گذاشتیم. وقتی یک‌بار برای همیشه همه اصطلاحات تعریف‌شده تعبیر شدند، باید بنداشتهای دستگاه را تعبیر کنیم. مثلاً، بنداشت وقوع ۱ در مدل کلاین چنین تعبیر می‌شود:

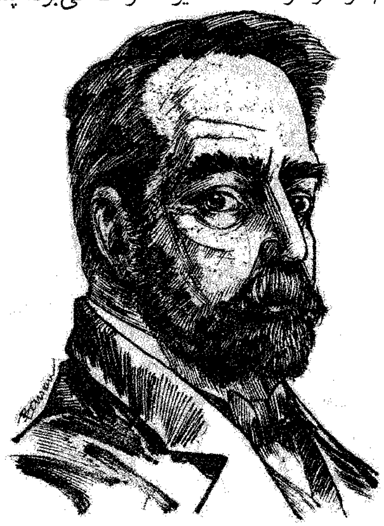
بنداشت وقوع ۱ (کلاین). دو نقطه نامشخص متمایز A و B در درون دایره γ داده شده‌اند. تنها یک وتر باز l از γ وجود دارد چنان‌که A و B هر دو بر آن واقع‌اند.

ما باید ثابت کنیم که این، یک قضیه در هندسه اقلیدسی است (و به‌طریق مشابه، تعبیرهای همه بنداشتهای دیگر را ثابت کنیم). وقتی یک‌بار برای همیشه ثابت شد که بنداشتهای تعبیرشده، قضایایی در هندسه اقلیدسی هستند، هر دلیلی بر وجود یک تناقض در هندسه هذلولوی می‌تواند از روی فهرست واژه‌های ما، به‌دلیلی بر وجود یک تناقض در هندسه اقلیدسی تعبیر شود. با استناد به این فرض ما که هندسه اقلیدسی سازگار است، نتیجه می‌گیریم که هرگز چنین دلیلی وجود ندارد. بنابراین اگر هندسه اقلیدسی سازگار باشد، هندسه هذلولوی هم سازگار خواهد بود.

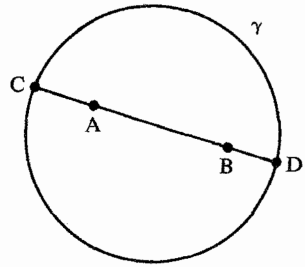
اکنون باید برگردیم و ثابت کنیم که تعبیرهای بنداشتهای هندسه هذلولوی در مدل کلاین قضایایی از هندسه اقلیدسی هستند. بنداشت و-۱ (کلاین) را که در بالا بیان کردیم ثابت می‌کنیم:

برهان:

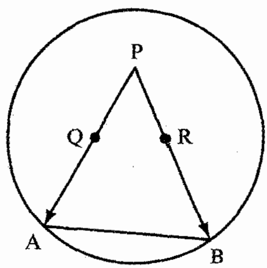
نقاط A و B در درون γ داده شده‌اند. فرض می‌کنیم $\overleftrightarrow{AB}$ خط اقلیدسی گذرنده از آنها باشد (شکل ۴.۷). این خط دایره γ را در دو نقطه متمایز C و D می‌برد. پس A و B بر وتر باز (C)(D



فلیکس کلاین



شکل ۴.۷



شکل ۵.۷ نیم‌خطهای موازی حدی.

قرار دارند و، بنابر بنداشت و-۱ از هندسه اقلیدسی، این تنها وتر بازی است که هر دوی آنها بر آن قرار دارند. ■

در مرحله دوم برهان، از قضیه‌ای از هندسه اقلیدسی که بیان می‌کند خط گذرنده از درون دایره، آن را در دو نقطه متمایز می‌برد استفاده کردیم. این را می‌توان از روی اصل پیوستگی دایره ثابت کرد (تمرین اصلی ۱، فصل ۴). تحقیق درستی تعبیر سایر بنداشتهای وقوع، بنداشتهای میان‌بود، و بنداشت ددکیند به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. درستی بنداشتهای قابلیت انطباق بعداً در همین فصل تحقیق خواهد شد.

یک جنبه زیبای مدل کلاین، آسانی تجسم نیم‌خطهای موازی حدی در آن است (شکل ۵.۷). فرض می‌کنیم P نقطه‌ای در دورن γ، ناواقع بر وتر باز A)(B باشد. A و B نقطه‌هایی بر دایره‌اند و بنابراین نقطه‌هایی از صفحه هذلولوی نیستند. این نقطه‌ها که معرف نقطه‌های آرمانی هستند دو سر خط هذلولوی، که با A)(B نشان داده شده، نامیده می‌شوند (نکته ۲ پس از تمرین اصلی ۳، فصل ۶). در این صورت نیم‌خطهای موازی حدی با وتر باز A)(B مرسوم از P، با پاره‌خطهای PA و PB، که نقطه‌های انتهایی A و B از آنها برداشته شده، نشان داده می‌شوند. روشن است که هر

نیم‌خط واقع در بین این نیم‌خطهای موازی حدی، با وتر باز $B)(A$ بریده می‌شوند؛ در حالی که بقیه نیم‌خطهایی که از P خارج می‌شوند آن را نمی‌برند. تقارن و ترایایی توازی حدی (که در تمرینهای اصلی ۲ و ۳، فصل ۶، دشواری اثباتشان را دیدید) در مدل کلاین کاملاً بدیهی هستند زیرا این یک واقعیت است که هر زاویه یک خط انسداد دارد. (در زاویه مفروض $\measuredangle QPR$ اگر A انتهای PQ باشد و B انتهای PR، وتر باز $B)(A$ خط انسداد $\measuredangle QPR$ است؛ تمرین اصلی ۸، فصل ۶).

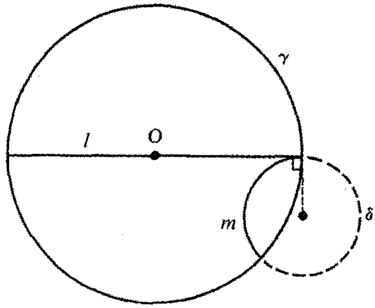
این بخش را با توجه به تعبیر مدل کلاین از «قابلیت انطباق»، یعنی ظریفترین قسمت مدل، تمام می‌کنیم. یک روش برای این تعبیر، استفاده از یک دستگاه اندازه‌گیری اندازه درجه زاویه و طول پاره‌خط است. در این حال دو زاویه قابل انطباق خواهند بود اگر یک اندازه درجه مساوی داشته باشند، و دو پاره‌خط قابل انطباق گفته می‌شوند اگر طول مساوی داشته باشند (مقایسه کنید با قضیه ۳.۴). گرفتاری در اینجا این است که روشهای اقلیدسی اندازه‌گیری درجه و درازا نمی‌توانند مفید واقع شوند. اگر، مثلاً، درازای اقلیدسی را به‌کار بریم، هر خط (یعنی هر وتر باز) دارای درازای معینی کوچکتر یا مساوی قطر دایره γ خواهد بود. این امر بنداشتهای م-۲ و ق-۱ را که نامتناهی‌بودن درازای خط را تضمین می‌کردند، برهم می‌زند.

ما بعداً از این موضوع در این فصل (در بخشهای تعامد در مدل بلترامی-کلاین و ماهیت تصویری آن) صحبت خواهیم کرد. ولی ابتدا مدلهای پوانکاره را که بیان قابلیت انطباق زوایا، در آنها آسانتر است، از نظر می‌گذرانیم.

مدلهای پوانکاره

مدلی به شکل قرص، منسوب به هنری پوانکاره [۱] (۱۸۵۴-۱۹۱۲) نیز معرف نقاط صفحه هذلولوی است که با نقاط درونی دایره اقلیدسی γ نشان داده می‌شود، ولی نمایش خطها به گونه‌ای دیگر است. اولاً تمام وترهای باز گذرنده از O، مرکز γ (یعنی همه قطرهای باز دایره γ مانند l) معرف خط هستند. بقیه خطها با کمانهای بازی از دوایر عمود بر γ نشان داده می‌شوند. دقیقتر بگوییم، فرض می‌کنیم δ دایره عمود بر γ باشد (در هر یک از نقاط تلاقی دو دایره، شعاعهای گذرنده آن نقطه برهم عمودند). از تلاقی δ و درون دایره γ، کمان باز m به‌دست می‌آید که مطابق تعریف، یک خط هذلولوی در مدل پوانکاره است. لذا هر قطر باز

۱. پوانکاره که پسرعم رئیس‌جمهور فرانسه بود، مانند گاوس کشفیات عمیقی در بسیاری از شاخه‌های ریاضی و فیزیک دارد. او حتی یک شاخه تازه از ریاضیات را به‌نام توپولوژی جبری پایه‌گذاری کرده است. او از مدلهای هندسه هذلولوی خود برای کشف قضایای تازه درباره توابع خودریخت با متغیرهای مختلط بهره گرفته است. پوانکاره فیلسوفی معتبر در علوم نیز شناخته شده است (فصل ۸).



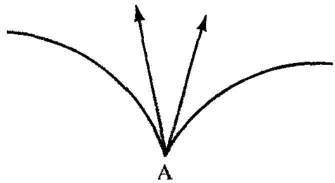
شکل ۶.۷

l از γ یا یک کمان باز m عمود بر γ را یک خط پوانکاره یا «خط P» می‌نامیم (شکل ۶.۷).

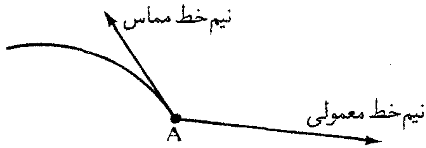
یک نقطه درون دایره γ را زمانی «واقع بر» خط پوانکاره گوییم که به معنای اقلیدسی بر آن واقع باشد. همچنین واژه «میان» [یا «بین»] تعبیر معمولی اقلیدسی خودش را دارد (برای سه نقطه A و B و C که بر کمان‌بازی از دایره δ، عمود بر γ به مرکز P، واقع باشند، B زمانی بین A و C است که $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ بین $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ و $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ باشد).

تعبیر قابلیت انطباق برای پاره‌خطها در مدل پوانکاره، درست مثل تعبیر آن در مدل کلاین پیچیده است، زیرا براساس نوعی اندازه‌گیری طولی نهاده شده است که با اندازه‌گیری معمولی اقلیدسی متفاوت است (ص ۲۶۱ـ۲۶۲). قابلیت انطباق برای زاویه‌ها همان معنی معمولی اقلیدسی را

هنری پوانکاره



شکل ۷.۷



شکل ۸.۷

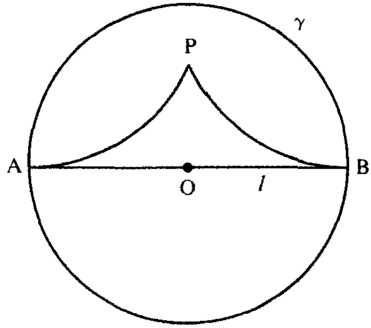
دارد، و این مزیت مهم مدل پوانکاره بر مدل کلاین[۱] است. فراموش نکنیم که اگر دو کمان جهت‌دار از دو دایره یکدیگر را در نقطه A ببرند، اندازه درجه زاویه‌ای که آنها پدید می‌آورند، بنابر تعریف، برابر با اندازه درجه زاویه بین نیم‌خطهای مماس بر آنها در نقطه A است (شکل ۷.۷). یا اگر کمان جهت‌داری از یک دایره، یک نیم‌خط معمولی را در A ببرد، اندازه درجه زاویه‌ای که آنها باهم می‌سازند، بنابر تعریف همان اندازه درجه زاویه بین نیم‌خط مماس بر دایره و نیم‌خط معمولی در A است (شکل ۸.۷).

پس از اینکه همه اصطلاحات تعریف نشده هندسه هذلولوی در مدل پوانکاره(از راه جایگذاری) تعبیر شد، تعبیر همه اصطلاحات تعریف شده به‌دست می‌آید. مثلاً دو خط پوانکاره موازی‌اند اگر و تنها اگر نقطه مشترک نداشته باشند. سپس همه بنداشتهای هندسه هذلولوی به احکامی در هندسه اقلیدسی برگردان می‌شوند. در بخش انعکاس نسبت به دایره، در ادامه این فصل نشان داده خواهد شد که این تعبیرها قضایایی از هندسه اقلیدسی هستند. بنابراین مدل پوانکاره برهان دیگری را برای سازگاری هندسه هذلولوی ــ در صورت سازگار بودن هندسه اقلیدسی ــ در اختیار ما می‌گذارد.

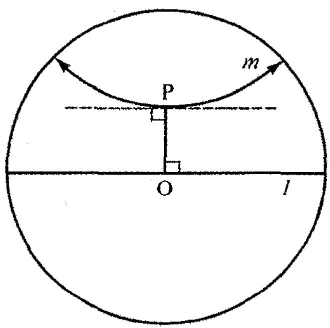
نیم‌خطهای موازی حدی در مدل پوانکاره در شکل ۹.۷ نشان داده شده‌اند. ما در اینجا l را قطر باز (A)(B) گرفته‌ایم؛ نیم‌خطها کمانهای دوایری هستند که $\overleftrightarrow{AB}$ را در نقاط A و B می‌برند و در این نقاط بر $\overleftrightarrow{AB}$ مماس‌اند. به‌آسانی می‌توان دید که وقتی به‌سوی نقطه‌های آرمانی که با نقطه‌های A و B نشان داده شده‌اند حرکت می‌کنیم، چگونه این نیم‌خطها به‌طور مجانبی به l نزدیک می‌شوند.

---

۱. به زبان علمی بگوییم، مدل پوانکاره «همدیس» است، یعنی تبدیلی است که اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند، درحالی‌که مدل کلاین چنین نیست. مثال دیگر از یک مدل همدیس، نگاشت مرکاتور از سطح زمین است.



شکل ۹.۷

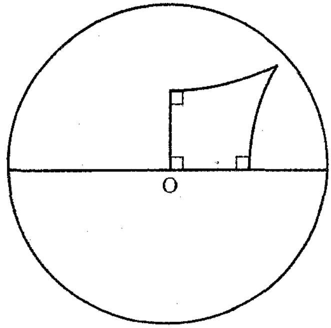


شکل ۱۰.۷

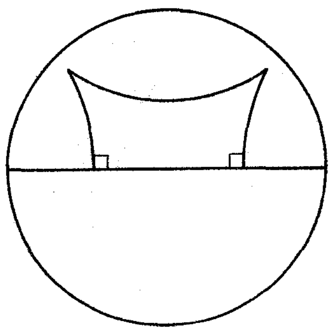
شکل ۱۰.۷ دو خط موازی پوانکاره را نشان می‌دهد که یک عمود مشترک دارند. این نمودار نشان می‌دهد که m چگونه در دو طرف عمود مشترک PO از l دور می‌شود.

شکل ۱۱.۷ یک چهارضلعی لامبرت را نشان می‌دهد. می‌توان دید که زاویه رأس چهارم حاده است. اگر قرینه این چهارضلعی را که نسبت به PO به‌دست می‌آید به چهارضلعی اضافه کنیم، شکل ۱۲.۷ به‌دست می‌آید که معرف یک چهارضلعی ساکری است.

شاید متعجب شده باشید از اینکه دو مدل متفاوت برای هندسه هذلولوی داریم: یکی منتسب به کلاین و دیگری منتسب به پوانکاره. (مدل سومی هم وجود دارد که باز منتسب به پوانکاره است و به‌زودی آن را خواهیم دید.) شاید هم این احساس را داشته باشید که این مدلها «اصلاً تفاوتی» با هم ندارند. در حقیقت هم اگر با بیان فنی بگوییم، این مدلها یکریخت هستند؛ یعنی می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین «نقطه‌ها» و «خطها»ی مدل اول و «نقطه‌ها» و «خطها»ی مدل دومی چنان پیدا کرد که نسبتهای «میان‌بود»، «وقوع»، و «قابلیت انطباق» را محفوظ نگاه دارد.

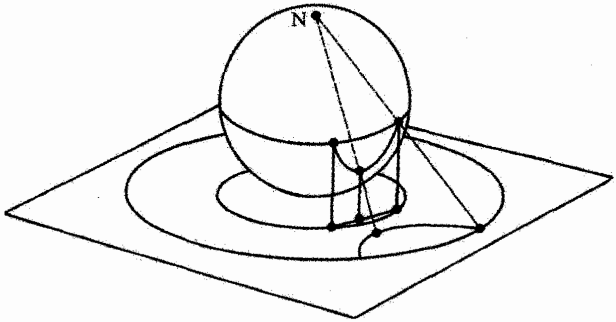


شکل ۱۱.۷



شکل ۱۲.۷

این چنین یکریختی در شکل ۱۳.۷ نشان داده شده است. ما از مدل کلاین آغاز می‌کنیم و کره‌ای را به همان شعاع دایره کلاین، در فضای اقلیدسی سه‌بعدی، درنظر می‌گیریم که برصفحه مدل کلاین نهاده شده و در مبدأ بر این صفحه مماس است. حال تصویر قائم تمام مدل کلاین را، به سمت بالا، بر نیمه زیرین این کره تعیین می‌کنیم. در این تصویر وترهای مدل کلاین به کمانهایی از دایره، عمود بر دایره استوا بدل می‌شوند. سپس نقطه N، قطب شمال کره، را مرکز تصویر قرار می‌دهیم و تصویر گنج‌نگاشتی نیمکره زیرین را برروی صفحه اول (مدل کلاین) پیدا می‌کنیم. بر اثر این تصویر، استوای کره به دایره‌ای بدل می‌شود که از دایره‌ای که در مدل کلاین به کاربرده شده بزرگتر است، و نقاط متمایز نیمکره زیرین به‌طور گنج‌نگاشتی بر نقاط متمایز درون این دایره تصویر می‌شوند. وترهای مدل کلاین بر اثر این تبدیلهای پیاپی، به‌طور یک‌به‌یک بر قطرها و کمانهای متعامد مدل پوانکاره نگاشته می‌شوند و بدین ترتیب یکریختی مدلها ثابت می‌شود.



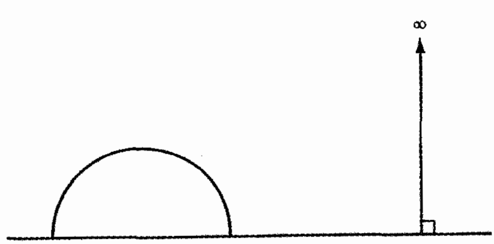
شکل ۱۳.۷

در واقع می‌توان ثابت کرد که همه مدلهای امکان‌پذیر هندسه هذلولوی با هم یکریخت‌اند، یعنی، بنداشتهای هندسه هذلولوی جزمی هستند. همین امر برای هندسه اقلیدسی نیز درست است. ماهیت جزمی هندسه اقلیدسی با وارد کردن مختصات دکارتی در صفحه اقلیدسی ثابت می‌شود. به‌طریق مشابه، ماهیت جزمی هندسه هذلولوی با وارد کردن مختصات بلترامی در صفحه هذلولوی ثابت می‌شود (برای این کار، اول باید مثلثات هذلولوی مورد مطالعه قرار گیرد).[۱]

در مدل دیگر پوانکاره که در اینجا به آن اشاره می‌کنیم، نقطه‌های صفحه هذلولوی، با نقطه‌های یکی از دو نیم‌صفحه اقلیدسی، که خود آن با یک خط ثابت اقلیدسی مشخص می‌شود، نشان داده شده‌اند. اگر از مدل دکارتی برای صفحه اقلیدسی استفاده کنیم، معمولاً این خط ثابت را محور xها می‌گیریم و سپس نیم‌صفحه بالایی را که از همه نقاط (x, y) با $y > 0$ تشکیل شده است صفحه مدل اختیار می‌کنیم. خطهای هذلولوی به دو گونه نشان داده می‌شوند:

۱. نیم‌خطهایی که از نقاط واقع بر محور xها، عمود بر محور xها رسم می‌شوند.

۲. نیم‌دایره‌هایی در نیم‌صفحه بالایی که مراکزشان بر محور xها واقع‌اند (شکل ۱۴.۷).



شکل ۱۴.۷

۱. فصل ۱۰، و نیز بورسوک و اسمیلیو (۱۹۶۰)، فصل ۶.

وقوع و میان‌بود به طریق معمولی اقلیدسی تعبیر می‌شوند. این مدل همدیس نیز هست (زاویه‌ها از راه اقلیدسی اندازه‌گیری می‌شوند). درباره اندازه‌گیری طول بعداً صحبت خواهیم کرد.

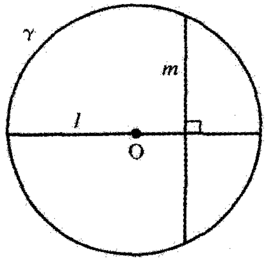
برای برقراری یکریختی بین مدل‌های پیش‌گفته، یک نقطه E را بر استوای کره مرکز تصویر، شکل ۱۳.۷، می‌گیریم و فرض می‌کنیم Π صفحه مماس بر کره در نقطه متقاطر با E باشد. تصویر گنج‌نگاشتی بر Π به مرکز E، دایره استوا را به خطی در صفحه Π و نیمکره زیرین را به نیم‌صفحه پایینی، که با این خط مشخص می‌شود، بدل می‌کند. باید توجه داشت که نقطه‌های واقع بر این خط نقطه‌های آرمانی هستند. ولی یک نقطه آرمانی از میان رفته است: نقطه E در تصویر گنج‌نگاشتی ناپدید شده است. عادت بر این است که نقطه ∞، «نقطه آرمانی در بی‌نهایت»، را متناظر با E فرض می‌کنند؛ این نقطه انتهای مشترک همه نیم‌خطهای عمود است.

تعامد در مدل بلترامی-کلاین

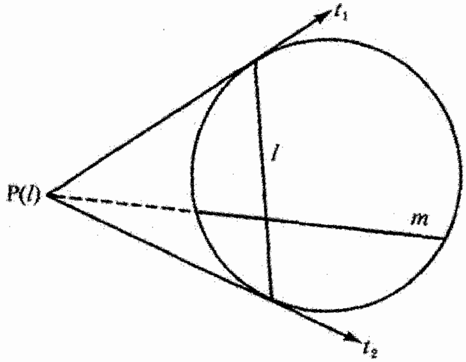
مدل کلاین همدیس نیست. قابلیت انطباق زوایا به روشی غیر از روش معمولی اقلیدسی تعبیر و بعداً در این فصل (ص ۲۷۳) بیان خواهد شد. در اینجا تنها می‌خواهیم از آن زاویه‌هایی که با مکملشان قابل انطباق‌اند، یعنی از زاویه‌های قائمه صحبت کنیم.

فرض می‌کنیم l و m وترهای باز γ باشند. برای آنکه در مدل کلاین بیان کنیم که چه موقع l بر m عمود است دو حالت را درنظر می‌گیریم:

حالت اول. یکی از دو خط l و m قطر دایره است. در این‌صورت l به معنی کلاین بر m عمود است اگر و تنها اگر l به معنی اقلیدسی بر m عمود باشد (شکل ۱۵.۷).



شکل ۱۵.۷



شکل ۱۶.۷

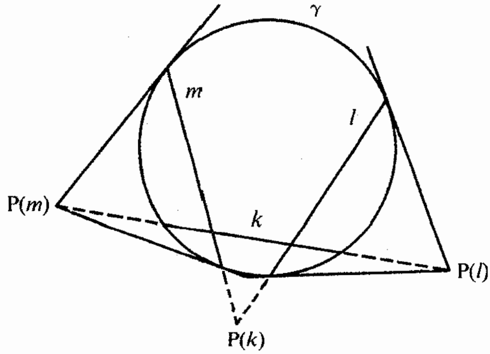
حالت دوم. نه l قطر دایره است و نه m. در این حالت به خط l یک نقطه $\mathrm{P}(l)$ واقع در بیرون γ را، که قطب l نامیده شده و به‌ترتیب زیر تعریف می‌شود وابسته می‌سازیم. فرض می‌کنیم $t_۱$ و $t_۲$ مماسهایی بر γ در دو سر l باشند. در این صورت، مطابق تعریف، $\mathrm{P}(l)$ تنها نقطه مشترک $t_۱$ و $t_۲$ است ($t_۱$ و $t_۲$ موازی نیستند، زیرا l قطر دایره نیست؛ شکل ۱۶.۷).

معلوم می‌شود l و m به معنی مدل کلاین برهم عمودند اگر و تنها اگر وقتی m را به‌معنی اقلیدسی امتداد دهیم از قطب l بگذرد.

این تعریف تعامد را بعداً در (ص ۲۷۳ـ۲۷۴) توجیه خواهیم کرد. با استفاده از آن می‌توان آسانتر نشان داد که چرا خطوط واگراموازی یک عمود مشترک دارند (قضیه ۷.۶). در فرض قضیه ۷.۶ دو خط موازی درنظر گرفته‌ایم که شامل نیم‌خطهای موازی حدی نیستند. در مدل کلاین، این بدان معنی است که وترهای باز l و m چنان داده شده‌اند که انتهای آنها یکی نیست. نتیجه قضیه ۷.۶ این است که l و m یک عمود مشترک k دارند. k را چگونه باید پیدا کنیم؟ ما در باب حالت دوم بحث می‌کنیم و حالت اول را به‌عنوان تمرین وا می‌گذاریم. با تعریفی که در بالا از تعامد کردیم، اگر k بر l و m عمود باشد، امتداد k از قطب l و قطب m خواهد گذشت. بنابراین، برای رسم k کافی است که این قطبها را با یک خط اقلیدسی بر یکدیگر وصل کنیم و k را آن وتر بازی از γ بگیریم که توسط این خط جدا شده است (شکل ۱۷.۷).[۱]

وضع دو خط نسبت به یکدیگر را، در مدل کلاین، می‌توان با بیان دلنشینی روشن کرد. نقطه‌های درون دایره γ را (که معرف همه نقاط صفحه هذلولوی هستند) نقطه عادی می‌نامیم. قبلاً هم

۱. اگر l و m سر مشترکی چون Ω داشته باشند، خط اقلیدسی واصل بین $\mathrm{P}(l)$ و $\mathrm{P}(m)$ در Ω بر γ مماس خواهد بود. به همین دلیل است که ساکری می‌گوید خطوطی که موازی مجانبی‌اند «یک عمود مشترک در بی‌نهایت دارند».

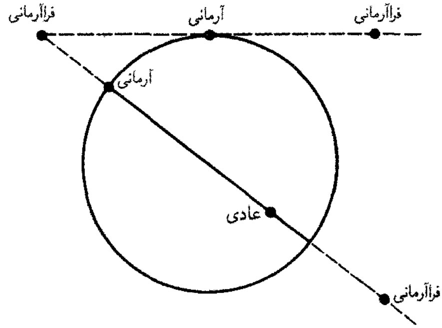


شکل ۱۷.۷

نقطه واقع بر γ را نقطه‌های آرمانی نامیده بودیم. نقطه‌های بیرون دایره γ را هم نقطه فراآرمانی نام می‌گذاریم. سرانجام به‌ازای هر قطر γ نقطه دیگری «در بی‌نهایت» را چنان می‌انگاریم که همه خطوطی که به‌معنی اقلیدسی با این قطر موازی‌اند یکدیگر را در این نقطه بی‌نهایت ببرند، درست همان‌گونه که به‌نظر می‌آید ریلهای راه‌آهن یکدیگر را در افق می‌برند. این نقطه‌های واقع در بی‌نهایت هم نقطه فراآرمانی نامیده خواهند شد. حال می‌توانیم بگوییم که دو خط کلاین برحسب اینکه متقاطع، موازی مجانبی، و یا واگراموازی باشند به‌ترتیب یکدیگر را در یک نقطه عادی، در یک نقطه آرمانی، یا در یک نقطه فراآرمانی «می‌برند». دو خط کلاین l و m که واگراموازی باشند یکدیگر را در نقطه فراآرمانی $\mathrm{P}(k)$، که قطب عمود مشترک آنها یعنی k است، می‌برند (شکل ۱۷.۷)

این شیوه بیان یادآور قضایای دیگری در هندسه هذلولوی است. مثلاً می‌دانیم که دو نقطه عادی خط یکتایی را مشخص می‌سازند. همچنین دیده‌ایم که دو نقطه آرمانی هم فقط یک خط را مشخص می‌کنند که همان خط انسداد تمرین اصلی ۸، فصل ۶، است. اکنون ببینیم اگر دو نقطه، فراآرمانی یا از دو نوع مختلف باشند چه می‌شود؟ مثلاً، یک نقطه عادی با یک نقطه آرمانی یا فراآرمانی همواره مشخص کننده یک خط یکتا هستند، ولی دو نقطه فراآرمانی ممکن است مشخص‌کننده یک خط یکتا باشند یا نباشند (شکل ۱۸.۷). مثلاً حالتی را درنظر بگیریم که یکی از نقطه‌ها نقطه عادی O باشد و دیگری نقطه فراآرمانی $\mathrm{P}(l)$، یعنی قطب خط کلاین l. خط کلاینی که O را به $\mathrm{P}(l)$ وصل می‌کند کدام خط است؟ این خط، خط یکتای کلاین m گذرنده از O است که به تعبیر مدل کلاین برخط l عمود است (شکل ۱۶.۷). حالتهای دیگر را به‌عنوان تمرین وا می‌گذاریم.

اگر شما بیشتر تمرینهای هندسه هذلولوی در فصل ۶ را حل کرده و به نتایجی دست یافته‌اید



شکل ۱۸.۷

بی‌آنکه نمودارهای معتبری که راهنمای شما باشند، پیدا کنید، مدلهای کلاین و پوانکاره باید کمک بزرگی برای شما باشند. یک تمرین سودمند این است که نمودار مضحکی نظیر شکل ۲۶.۶ در نظر بگیرید و آن عمودمنصفهای واگراموازی مثلث را دقیقتر در یکی از مدلها رسم کنید. شگفت اینکه ی. بویویی و لباچفسکی، بالاخص چون در سه‌بعدی کار می‌کردند، توانسته بودند هندسه هذلولوی را بدون چنین مدلهایی درنظر مجسم کنند. اینان بایستی، بدون تردید، دید نااقلیدسی می‌داشته‌اند.

یک مدل از صفحه هذلولوی در فیزیک

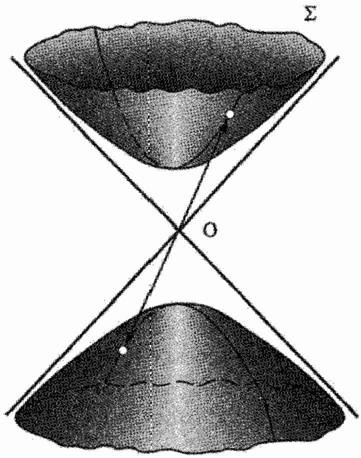
این مدل از نظریه نسبیت خاص به‌دست می‌آید. در فضای ۳بعدی $\mathbb{R}^۳$ با مختصات دکارتی x، y، و t (برای زمان)، طبق متریک مینکوفسکی، فاصله از روی دستور

$$ds^۲ = dx^۲ + dy^۲ - dt^۲$$

اندازه گرفته می‌شود. در این‌صورت نسبت به متریک مینکوفسکی رویه به معادله

$$x^۲ + y^۲ - t^۲ = -۱$$

معرف کره‌ای است به مرکز $O = (۰, ۰, ۰)$ با شعاع موهومی $i = \sqrt{-۱}$ (چنان‌که در فصل ۵ اشاره کردیم، لامبرت نخستین کسی بود که از خود پرسیده بود که آیا چنین مدلی می‌تواند وجود داشته باشد یا نه.) در اصطلاح هندسه اقلیدسی این رویه، یک هذلولی‌وار دو دامنه (رویه‌ای دورانی حاصل از دوران هذلولی $t^۲ - x^۲ = ۱$ حول محور xها) است. ما دامنه Σی آن را انتخاب



شکل ۱۹.۷

می‌کنیم: نظیر مدل ما $t \geq 1$ است. این رویه شبیه کاسه‌ای نامتناهی است (شکل ۱۹.۷). همانند تعبیر ما از «خطوط» واقع بر کره در فصل ۲، تمرین ۱۰ (ج)، در اینجا نیز خطوط از تقاطع Σ با صفحات گذرنده از O به‌دست می‌آیند؛ از این رو «خط» شاخه‌ای از یک هذلولی واقع بر دامنه Σ است.

در اینجا یک یکریختی از Σ با مدل بلترامی-کلاین Δ وجود دارد. صفحه $t = 1$ در نقطه $C = (0, 0, 1)$ بر Σ مماس است. فرض می‌کنیم Δ قرص واحد به مرکز C در این صفحه باشد. تصویر به مرکز O یک تناظر یک‌به‌یک بین نقاط Δ و نقاط Σ به ما می‌دهد (یعنی، نقطه P از Δ با نقطه P' محل تلاقی $\overrightarrow{OP}$ با Σ متناظر است). به‌طور مشابه، هر وتر m از Δ بر صفحه یکتای Π گذرنده از O قرار دارد، و m با m'، فصل مشترک Σ با Π، متناظر است. این یکریختی از مدلهای وقوع را می‌توان برای تعبیر میان‌بود و قابلیت انطباق با Σ به کار برد. یا به بیان دیگر اینها می‌توانند برحسب اندازه طول قوسی که متریک مینکوفسکی بر Σ القا کرده تعریف شوند. سپس استدلال دیگری لازم است تا تحقیق کنیم که این تناظر ما در واقع یک یکریختی از مدلهای هندسه هذلولوی است. توجیه دیگری از Σ به‌عنوان مدلی از صفحه هذلولوی در فصل ۱۰ به‌صورت تحلیلی داده خواهد شد (←بحث از مختصات وایرشتراس، در بخش مختصات در صفحه هذلولوی).

توضیح. از دیدگاه نظریه نسبیت خاص اینشتین، Σ را می‌توان با مجموعه حرکات یکنواخت

صفحه، و فاصله هذلولوی را با سرعت نسبی یک حرکت نسبت به حرکت دیگر مشخص کرد. می‌توان واژه‌نامه‌ای درست کرد که هر قضیه از هندسه هذلولوی را به قضیه‌ای از سینماتیک نسبیت و برعکس برگردان کند (یاگلم ۱۹۷۹ ص ۲۲۵ به بعد).

انعکاس نسبت به دایره

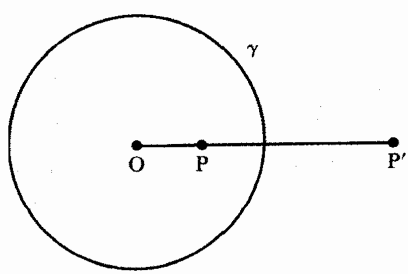
برای اینکه قابلیت انطباق در مدل پوانکاره را تعریف و درستی بنداشتهای قابلیت انطباق آن را تحقیق کنیم باید عمل انعکاس نسبت به یک دایره اقلیدسی را مطالعه کنیم. خواهیم دید که این عمل همان تعبیر تقارن محوری[1] نسبت به یک خط در صفحه هذلولوی خواهد شد. نظریه انعکاس جزئی از هندسه اقلیدسی است، لذا می‌توانیم از قضایایی که در تمرینهای ۱۸ تا ۲۶، فصل ۵، ثابت شده‌اند استفاده کنیم.

تعریف. فرض می‌کنیم γ دایره‌ای به مرکز O و شعاع r باشد. به‌ازای هر نقطه $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$، نقطه P'، منعکس P نسبت به γ، تنها نقطه‌ای است بر $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ به‌قسمی‌که $(\overline{\mathrm{OP}})(\overline{\mathrm{OP}'}) = r^{2}$، ($\overline{\mathrm{OP}}$ معرف طول پاره‌خط OP نسبت به واحد ثابت اندازه‌گیری است)؛ (شکل ۲۰.۷).

ویژگیهای زیر بی‌درنگ از تعریف انعکاس نتیجه می‌شوند:

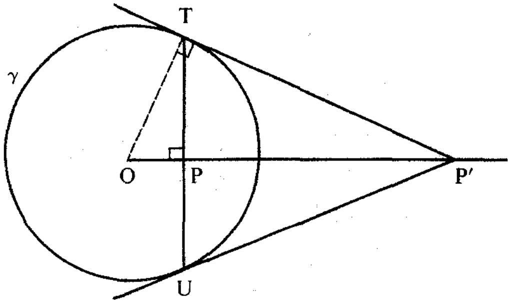
گزاره ۱.۷ (الف) $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ اگر و تنها اگر P بر دایره انعکاس γ واقع باشد. (ب) اگر P در درون γ باشد، آنگاه P' بیرون γ است، و اگر P در بیرون γ باشد P' در درون γ خواهد بود. (ج) $(\mathrm{P}')' = \mathrm{P}$.

دو گزاره بعد چگونگی تعیین منعکس یک نقطه را به وسیله خط‌کش و پرگار مشخص می‌سازند.



شکل ۲۰.۷

۱. در ادامه، منظور از تقارن یا قرینه‌یابی، همان تقارن محوری است.ـم.



شکل ۲۱.۷

گزاره ۲.۷ فرض می‌کنیم P در درون γ، و TU وتری از γ گذرنده از P، عمود بر $\overleftrightarrow{OP}$ باشند. P'، منعکس P، قطب وتر TU، یعنی نقطه تقاطع مماسهای بر γ در T و U است (شکل ۲۱.۷).

برهان:

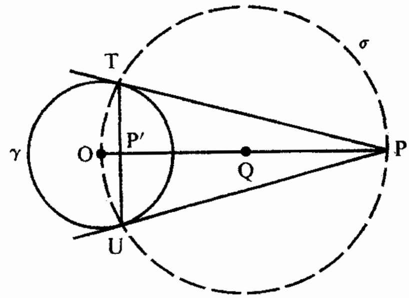
فرض می‌کنیم مماس بر γ در T، نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ را در P' ببرد. مثلث قائم‌الزاویه ΔOPT با مثلث قائم‌الزاویه $\Delta OTP'$ متشابه است (زیرا در $\sphericalangle TOP$ مشترک‌اند و مجموع زوایای آنها 180° است). پس اضلاع متناظر در آنها متناسب می‌شوند (تمرین ۱۸، فصل ۵). چون $\overline{OT} = r$ پس: $(\overline{OP})/r = r/(\overline{OP'})$، که نشان می‌دهد P' منعکس P است. با پیداکردن قرینه محوری نسبت به $\overleftrightarrow{OP}$ (تمرین اصلی ۲، فصل ۳)، می‌بینیم که مماس بر γ در U هم از P' می‌گذرد. پس P' در واقع قطب TU است. ■

گزاره ۳.۷ اگر P در بیرون γ، Q وسط پاره‌خط OP، و σ دایره به مرکز Q و شعاع $\overline{OQ} = \overline{QP}$ باشد، آنگاه دایره σ دایره γ را در دو نقطه T و U می‌برد، $\overleftrightarrow{PT}$ و $\overleftrightarrow{PU}$ بر γ مماس‌اند، و P'، منعکس P، محل تلاقی TU با OP خواهد بود (شکل ۲۲.۷).

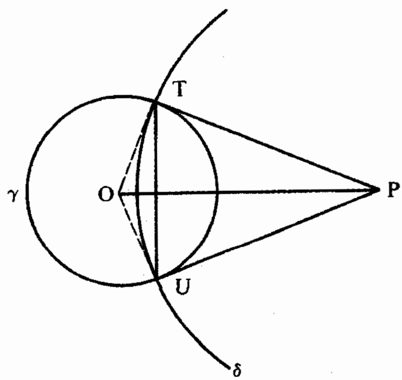
برهان:

بنابر اصل پیوستگی دایره (فصل ۳)، σ و γ همدیگر را در دو نقطه T و U می‌برند. چون $\sphericalangle OTP$ و $\sphericalangle OUP$ در نیم‌دایره σ محاط شده‌اند، قائمه‌اند (تمرین ۲۴، فصل ۵). پس $\overleftrightarrow{PT}$ و $\overleftrightarrow{PU}$ بر دایره γ مماس‌اند. اگر TU، OP را در نقطه P' ببرد، P منعکس P' خواهد بود (گزاره ۲.۷). پس P' منعکس P نسبت به دایره γ است. ■

گزاره بعد نشان می‌دهد که چگونه باید خط پوانکاره و اصل بین دو نقطه آرمانی، یعنی خط انسداد را رسم کنیم.



شکل ۲۲.۷



شکل ۲۳.۷

گزاره ۴.۷ هرگاه T و U دو نقطه نامتقاطر از γ، و P قطب TU باشند، آنگاه $PT \cong PU$، $\sphericalangle PTU \cong \sphericalangle PUT$، و $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{TU}$، و دایره δ به مرکز P و شعاع $\overline{PT} = \overline{PU}$ دایره γ را در نقاط T و U به زاویه قائمه می‌برد (شکل ۲۳.۷).

برهان:

بنابر تعریف قطب، دو زاویه $\sphericalangle OTP$ و $\sphericalangle OUP$ قائمه‌اند و لذا بنابر ملاک وتر و یک ضلع، $\Delta OTP \cong \Delta OUP$. در نتیجه $PT \cong PU$ و $\sphericalangle OPT \cong \sphericalangle OPU$. $\sphericalangle PTU$ و $\sphericalangle PUT$ زوایای مجاور به قاعده در مثلث متساوی‌الساقین ΔTPU هستند، در نتیجه با هم قابل انطباق‌اند و نیمساز $\overrightarrow{PO}$ بر قاعده TU عمود است. پس دایره δ کاملاً مشخص است، زیرا $\overline{PT} = \overline{PU}$، و بنابر فرض $\overleftrightarrow{PT}$ و $\overleftrightarrow{PU}$ بر γ مماس‌اند، لذا δ دایره γ را در نقاط تلاقی به زاویه قائمه می‌برد.■

لم۱.۷ نقطه O ناواقع بر دایره δ داده شده است. (الف) اگر از O دو خط رسم کنیم تا δ را به ترتیب در دو جفت نقاط $(P_۱, P_۲)$ و $(Q_۱, Q_۲)$ ببرند، آنگاه $(\overline{OP_۱})(\overline{OP_۲}) = (\overline{OQ_۱})(\overline{OQ_۲})$. این حاصل‌ضرب را قوت نقطه O نسبت به دایره γ گویند هرگاه O بیرون دایره باشد، و منهای این عدد را قوت O می‌نامند هرگاه نقطه O در درون دایره باشد. (ب) اگر T نقطه تماس مماس مرسوم از O بر δ باشد، آنگاه $(\overline{OT})^۲$ مساوی قوت نقطه O نسبت به دایره خواهد بود.

برهان:

(الف) چون زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم قابل انطباق‌اند (تمرین ۲۵، فصل ۵)، داریم

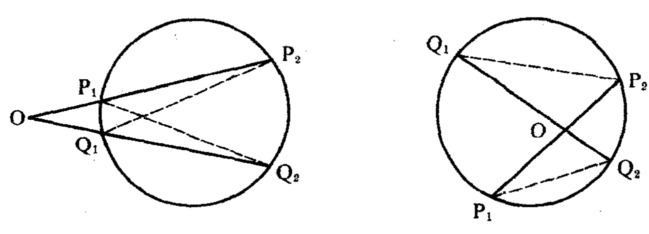
$$\measuredangle P_۲P_۱Q_۲ \cong \measuredangle P_۲Q_۱Q_۲$$
$$\measuredangle P_۱Q_۲Q_۱ \cong \measuredangle P_۱P_۲Q_۱$$

(شکل ۲۴.۷). از اینجا نتیجه می‌شود که $\Delta OP_۱Q_۲$ و $\Delta OQ_۱P_۲$ متشابه است، لذا $(\overline{OP_۱})/(\overline{OQ_۱}) = (\overline{OQ_۲})/(\overline{OP_۲})$، همان چیزی که گفته بودیم.

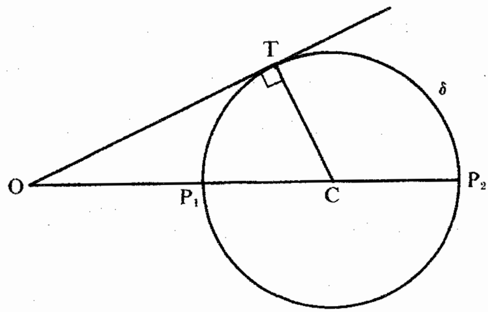
(ب) فرض می‌کنیم C مرکز دایره δ و $P_۱$ و $P_۲$ محل برخورد OC با δ باشند به‌طوری که $O * P_۱ * C * P_۲$. بنابر قضیه فیثاغورس (تمرین ۲۱، فصل ۵)،

$$\begin{aligned}(\overline{OT})^۲ &= (\overline{OC})^۲ - (\overline{CT})^۲ \\ &= (\overline{OC} - \overline{CT})(\overline{OC} + \overline{CT}) \\ &= (\overline{OC} - \overline{CP_۱})(\overline{OC} + \overline{CP_۲}) \\ &= (\overline{OP_۱})(\overline{OP_۲})\end{aligned}$$

(شکل ۲۵.۷). ■



شکل ۲۴.۷



شکل ۲۵.۷

گزاره ۵.۷ اگر P نقطه‌ای ناواقع بر دایره γ و غیرمنطبق بر O، مرکز γ، باشد و δ دایره‌ای گذرنده از P فرض شود. آنگاه δ، γ را به زاویه قائمه می‌برد اگر و تنها اگر δ از نقطه P' منعکس P نسبت به γ بگذرد.

برهان:

ابتدا فرض می‌کنیم که δ از P' بگذرد. پس نقطه C، مرکز δ، بر عمودمنصف PP' واقع است (تمرین ۱۷، فصل ۴). بنابراین $\overline{CO} > \overline{CP}$ (تمرین ۲۷، فصل ۴) و O در بیرون δ خواهد بود. لذا نقطه‌ای مانند T بر δ وجود دارد به‌قسمی‌که مماس بر δ در T از O می‌گذرد (گزاره ۳.۷). اما بنابر لم ۱.۷(ب)، $(\overline{OT})^۲ = (\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^۲$. پس T بر γ نیز واقع است و δ، γ را به زاویه قائمه می‌برد.

برعکس، فرض می‌کنیم δ دایره γ را در نقاط T و U به‌زاویه قائمه ببرد. پس مماسهای بر δ در نقاط T و U همدیگر را در O می‌برند و O در بیرون δ قرار دارد. از آنجا نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{OP}$ باید دایره δ را بار دیگر در یک نقطه Q ببرد. بنابر لم ۱.۷ (ب)، $(\overline{OP})(\overline{OQ}) = (\overline{OT})^۲ = r^۲$. یعنی $Q = P'$ منعکس P نسبت به γ است. ■

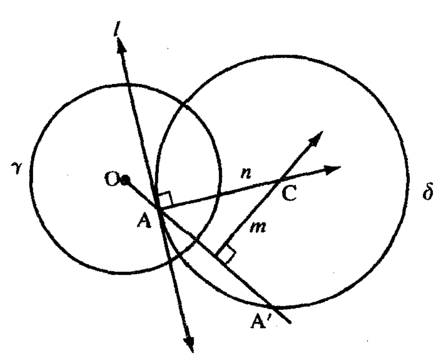
گزاره ۵.۷ را می‌توان برای رسم خط پوانکاره، واصل بین دو نقطه P و Q واقع در درون دایره γ که بر یک قطر نیستند به‌کار برد. ابتدا نقطه P' را با استفاده از گزاره ۲.۷ پیدا می‌کنیم. سپس دایره δ گذرنده از سه نقطه ناواقع بر یک خط P، Q، و P' را (با استفاده از تمرین ۱۲، فصل ۶) رسم می‌کنیم. به‌موجب گزاره ۵.۷، δ بر γ عمود خواهد بود. از تلاقی δ با درون دایره γ خط مطلوب (خط پوانکاره) به‌دست می‌آید، این، درستی تعبیر بنداشت و-۱، برای مدل قرص پوانکاره را نشان می‌دهد. تحقیق درستی، حتی برای مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره ساده‌تر است: دو نقطه P و Q

را که بر یک نیم‌خط عمودی قرار ندارند درنظر می‌گیریم. اگر عمودمنصف پاره‌خط اقلیدسی PQ محور xها را در نقطه C ببرد، نیم‌دایره به مرکز C گذرنده از نقاط P و Q، خط مطلوب پوانکاره خواهد بود.

درستی تعبیر بنداشتهای وقوع، بنداشتهای میان‌بود، و بنداشت ددکیند را هم می‌توانیم با استفاده از یکریختی با مدل کلاین تحقیق کنیم (که تحقیقهایی پیش پاافتاده‌اند).

اکنون به بنداشتهای قابلیت انطباق باز می‌گردیم. چون در مدلهای پوانکاره زاویه‌ها به معنی اقلیدسی اندازه گرفته می‌شوند، درستی تعبیر بنداشت ق‌ـ۵ به آسانی تحقیق می‌شود. بنداشت ق‌ـ۴، جداکردن زاویه‌ای قابل انطباق با زاویه‌ای مفروض به رأس A (در مدل قرصی)، را درنظر می‌گیریم. اگر A مرکز γ باشد، یک ضلع زاویه یکی از قطرها خواهد بود و عمل جداکردن به روش اقلیدسی انجام می‌گیرد. اگر A با O، مرکز دایره γ، یکی نباشد تحقیق درستی به پیدا کردن تنها دایره گذرنده از A منوط است که بر γ عمود باشد و بر خط اقلیدسی مفروض l، که از A می‌گذرد ولی از O نمی‌گذرد مماس می‌شود (به این دلیل که مماسها اندازه زاویه را مشخص می‌کنند). به‌موجب گزاره ۵.۷، δ باید از A'، منعکس A نسبت به γ، بگذرد. C مرکز δ باید بر عمودمنصف وتر AA' واقع باشد. (تمرین ۱۷، فصل ۴). این عمودمنصف را m می‌نامیم. اگر δ در A بر l مماس باشد، C نیز باید بر خط n که در نقطه A بر l عمود است واقع باشد. پس δ باید دایره‌ای به مرکز C یعنی نقطه تقاطع m و n و شعاع CA واقع باشد (شکل ۲۶.۷).

برای تعریف قابلیت انطباق پاره‌خطها، در مدل قرصی، تعریف زیر را برای درازا در اختیار داریم:



شکل ۲۶.۷

تعریف. فرض می‌کنیم A و B دو نقطه در درون γ، و P و Q دو سر خط پوانکاره گذرنده از A و B باشد. نسبت ناهمساز (PQ و AB) را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(\mathrm{AB},\mathrm{PQ}) = \frac{(\overline{\mathrm{AP}})(\overline{\mathrm{BQ}})}{(\overline{\mathrm{BP}})(\overline{\mathrm{AQ}})}$$

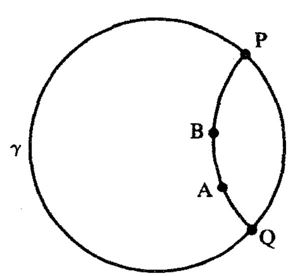
(که مثلاً $\overline{\mathrm{AP}}$ درازای اقلیدسی پاره‌خط اقلیدسی AP است). سپس $d(\mathrm{AB})$، درازای پوانکاره، را چنین تعریف می‌کنیم:

$$d(\mathrm{AB}) = \left|\log(\mathrm{AB},\mathrm{PQ})\right|$$

بیش از همه باید توجه کنیم که درازای پوانکاره به‌ترتیب نوشتن P و Q بستگی ندارد. زیرا اگر $(\mathrm{AB},\mathrm{PQ}) = x$، آنگاه $(\mathrm{AB},\mathrm{QP}) = ۱/x$ و $\left|\log(۱/x)\right| = \left|-\log x\right| = \left|\log x\right|$. به‌علاوه، چون $(\mathrm{BA},\mathrm{QP}) = (\mathrm{AB},\mathrm{PQ})$، می‌بینیم که $d(\mathrm{AB})$ به‌ترتیب نوشتن A و B بستگی ندارد.

بنابراین می‌توانیم پاره‌خطهای پوانکاره AB و CD را قابل انطباق پوانکاره‌ای تعبیر کنیم هرگاه $d(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{CD})$. با این تعبیر، درستی بنداشت ق-۲ بی‌درنگ محقق می‌شود.

فرض می‌کنیم نقطه A را بر خط پوانکاره گذرنده از P و Q ثابت نگه‌داریم و B را تدریجاً از A به سمت P حرکت دهیم، که در آن $\mathrm{Q} * \mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{P}$، مانند شکل ۲۷.۷. نسبت ناهمساز $(\mathrm{AB},\mathrm{PQ})$ تدریجاً از یک تا بی‌نهایت زیاد می‌شود. چون $(\overline{\mathrm{AP}})/(\overline{\mathrm{AQ}})$ مقداری است ثابت، $\overline{\mathrm{BP}}$ به سمت صفر میل می‌کند، و $\overline{\mathrm{BQ}}$ به سمت $\overline{\mathrm{PQ}}$. اگر B را ثابت نگه‌داریم و A را به‌تدریج از B تا Q حرکت دهیم، باز به همین نتیجه می‌رسیم. از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که به‌ازای هر نیم‌خط پوانکاره $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$، نقطه یکتایی مانند E بر $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ وجود دارد چنان‌که $d(\mathrm{CE}) = d(\mathrm{AB})$، که در آن A و B از پیش داده شده‌اند. پس درستی بنداشت ق-۱ محقق می‌شود.



شکل ۲۷.۷

حال، درستی بنداشت ق-۳ را تحقیق می‌کنیم. این هم مستقیماً از ویژگی جمعی درازای پوانکاره نتیجه می‌شود که می‌گوید هرگاه $A * C * B$ به معنی مدل قرصی باشد، آنگاه $d(AC) + d(CB) = d(AB)$. برای اثبات این ویژگی جمعی، دو سر پاره‌خط را چنان مشخص می‌کنیم که $Q * A * B * P$. در این حال نسبتهای ناهمساز (AB, PQ)، (AC, PQ)، و (CB, PQ) همه از یک بزرگترند (زیرا $\overline{AP} > \overline{BP}$، $\overline{BQ} > \overline{AQ}$، و غیره)، پس لگاریتمهای آنها مثبت‌اند و می‌توانیم علامتهای قدرمطلق را حذف کنیم. لذا:

$$\begin{aligned} d(AC) + d(CB) &= \log(AC, PQ) + \log(CB, PQ) \\ &= \log[(AC, PQ)(CB, PQ)] \end{aligned}$$

که پس از حذف جملات مشترک از صورت و مخرج چنین می‌شود:

$$(AC, PQ)(CB, PQ) = (AB, PQ)$$

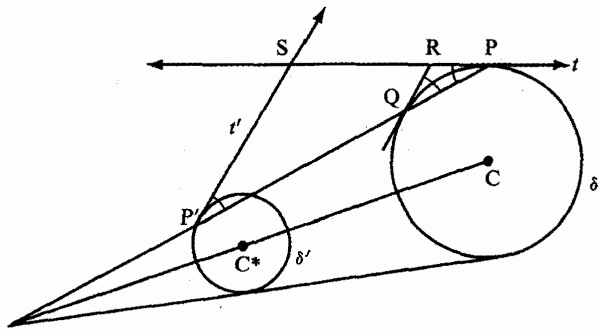
بالاخره برای تحقیق درستی بنداشت ق-۶ (ض‌زض) باید تأثیر انعکاس را بر اشیا و روابط موجود در مدل قرص بررسی کنیم.

تعریف. فرض می‌کنیم O نقطه‌ای ثابت و k عددی مثبت باشد. منظور از تجانس به مرکز O و نسبت k، تبدیلی است از صفحه اقلیدسی که نقطه O را ثابت نگه می‌دارد و هر نقطه $P \neq O$ را به نقطه یکتایی مانند P^* بر $\overrightarrow{OP}$ می‌نگارد چنان‌که $\overline{OP^*} = k \cdot \overline{OP}$ (لذا هر نقطه به‌طور شعاعی به فاصله k برابر فاصله اولیه‌اش از O برده می‌شود).

لم ۲.۷ فرض می‌کنیم δ دایره‌ای به مرکز $C \neq O$ و شعاع s باشد. بر اثر تجانس به مرکز O و نسبت k، دایره δ بر دایره δ^* به مرکز C^* و شعاع ks نگاشت می‌شود. اگر Q نقطه‌ای بر δ باشد، مماس بر δ در Q با مماس بر δ^* در Q^* موازی است.

برهان:

دستگاه مختصات قائمی به مبدأ O اختیار می‌کنیم. در این‌صورت تجانس با $(x, y) \to (kx, ky)$ داده می‌شود. تصویر یک خط به معادله $ax + by = c$ خطی است به معادله $ax + by = kc$، و چنان‌که دیده می‌شود با خط اصلی موازی است. به‌ویژه $\overleftrightarrow{CQ}$ و $\overleftrightarrow{C^*Q^*}$ با هم، و عمودهای بر آنها هم به‌ترتیب در Q و Q^* با هم موازی می‌شوند. اگر معادله δ، $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = s^2$ باشد، معادله δ^* چنین خواهد شد. $(x - kc_1)^2 + (y - kc_2)^2 = (ks)^2$، که در نتیجه لم ثابت می‌شود. ■



شکل ۲۸.۷

گزاره ۶.۷ گیریم γ دایره‌ای به شعاع r و مرکز O باشد، و δ دایره‌ای به شعاع s و مرکز C. فرض می‌کنیم O بیرون δ، p قوت نقطه O نسبت به δ (لم ۱.۷)، و $k = r^{2}/p$ باشد. در این‌صورت δ'، تصویر δ در انعکاس نسبت به γ، دایره‌ای است به شعاع ks که مرکزش C^*، تصویر C، در تجانس به مرکز O و نسبت k است. اگر P نقطه‌ای بر δ و P' منعکس آن نسبت به γ باشد مماس t' بر δ' در P'، قرینه مماس t بر δ در P نسبت به عمودمنصف PP' است (شکل ۲۸.۷).

برهان:

چون O در بیرون δ است، $\overleftrightarrow{OP}$ یا δ را در یک نقطه دیگر Q می‌برد یا بر δ در P مماس است (که در این‌صورت $Q = P$). پس

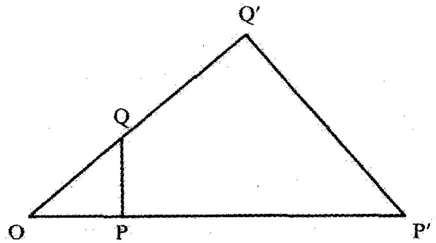
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} = \frac{r^{2}}{p}$$

که نشان می‌دهد P' تصویر Q بر اثر مجانست به مرکز O و نسبت $k = \frac{r^{2}}{p}$ است. لذا $\delta' = \delta^*$. به‌موجب لم ۲.۷، مماس t' بر δ' در P'، با مماس u بر δ در Q موازی است. به‌موجب گزاره ۴.۷ t و u یکدیگر را در یک نقطه R می‌برند به‌طوری که $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$. بنابر تمرینهای ۴، ۵، و ۳۲، فصل ۴، t و t' یکدیگر را در نقطه S می‌برند به‌قسمی‌که $\measuredangle SPP' \cong \measuredangle SP'P$. چون $\Delta PSP'$ متساوی‌الساقین است (زاویای مجاور به قاعده قابل انطباق‌اند)، S بر عمودمنصف PP' قرار می‌گیرد و لذا t' قرینه t نسبت به این عمودمنصف است. ■

نتیجه. دایره δ بر دایره γ عمود است اگر و تنها اگر δ در انعکاس نسبت به γ بر خودش نگاشت شود.

برهان:

اگر δ بر γ عمود و P نقطه‌ای بر δ باشد، آنگاه $p = (\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^{2}$ (گزاره ۵.۷ و لم



شکل ۲۹.۷

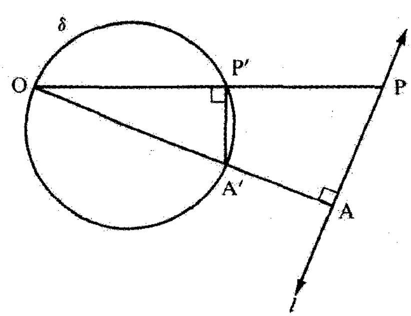
۱.۷)، پس $k = ۱$ و $\delta = \delta'$. برعکس، اگر $\delta' = \delta$، آنگاه $p = r^۲$ و δ از نقطه P'، منعکس P نسبت به γ، می‌گذرد و لذا به‌موجب گزاره ۵.۷، δ بر γ عمود است. ■

لم۳.۷ فرض می‌کنیم O مرکز دایره γ، P و Q دو نقطه که با O بر یک خط نیستند و P' و Q' به‌ترتیب منعکسهای آنها نسبت به γ باشند. آنگاه ΔPOQ با $\Delta Q'OP'$ متشابه است (شکل ۲۹.۷).

برهان:

این دو مثلث در $\measuredangle POQ$ مشترک‌اند و $(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^۲ = (\overline{OQ})(\overline{OQ'})$. پس، ملاک ض‌زض برای تشابه صادق است (تمرین ۲۰، فصل ۵). ■

گزاره ۷.۷ فرض می‌کنیم l خطی باشد که از نقطه O مرکز γ، نگذشته است. تصویر l نسبت به γ دایره‌ای است سوراخ‌دار، که نقطه O از آن برداشته شده است. اگر این دایره را کامل کنیم قطری از آن که از O می‌گذرد بر l عمود است (شکل ۳۰.۷)



شکل ۳۰.۷

برهان:

فرض می‌کنیم که A پای عمود وارد از O بر l، P نقطه دیگری بر l، و A' و P' به‌ترتیب منعکسهای A و P نسبت به γ باشند. به‌موجب لم ۳.۷، $\Delta OP'A'$ با ΔOAP متشابه است. پس $\measuredangle OP'A'$ قائمه است. لذا P' باید بر دایره δ به قطر OA' واقع باشد (تمرین ۲۶، فصل ۵). برعکس، اگر از یک نقطه P' واقع بر δ، غیر از O، شروع و فرض کنیم $\overrightarrow{OP'}$، l را در P می‌برد، اگر برهان بالا را در جهت عکس تکرار کنیم، می‌بینیم که P' منعکس P نسبت به γ است. ■

گزاره ۸.۷ فرض می‌کنیم δ دایره‌ای است که از نقطه O مرکز γ گذشته است. تصویر δ منهای O، در انعکاس نسبت به γ، خطی است مانند l که از O نمی‌گذرد. l با مماس بر δ در O موازی است.

برهان:

اگر نقطه A' متقاطر O در دایره δ، A منعکس A' نسبت به γ، و l عمود مرسوم بر $\overleftrightarrow{OA}$ در A باشد (شکل ۳۰.۷)، به موجب برهان گزاره ۷.۷، در انعکاس نسبت به γ، منعکس l دایره δ منهای نقطه O خواهد بود. پس باید δ منهای O، منعکس l نسبت به γ باشد (گزاره ۱.۷(ج)). ■

بدیهی است که تقارن نسبت به یک خط اقلیدسی، اندازه زاویه‌ها را ثابت نگاه می‌دارد ولی جهت زاویه‌های جهتدار را عوض می‌کند. گزاره بعد تعمیم این موضوع برای انعکاس است.

گزاره ۹.۷ اندازه زاویه جهتدار حاصل از تقاطع دو دایره در انعکاس ثابت می‌ماند ولی جهت آن عوض می‌شود. همین حکم بر زاویه تقاطع یک خط و یک دایره، یا دو خط نیز جاری است.

برهان:

فرض می‌کنیم l و m به‌ترتیب مماسهای مرسوم بر دایره‌های δ و σ در P، نقطه تلاقی δ و σ باشند. اگر P' منعکس P نسبت به γ، δ' و σ' تصویر δ و σ نسبت به γ، و l' و m' منعکسهای مماسهای l و m در P' نسبت به γ باشند، صحت حالت اول از این واقعیت نتیجه می‌شود که l' و m' به‌ترتیب قرینه‌های l و m نسبت به عمودمنصف PP' هستند (گزاره ۶.۷). حالتهای دیگر از گزاره‌های ۷.۷ و ۸.۷ نتیجه می‌شوند. ■

گزاره بعد نشان می‌دهد که انعکاس، نسبت ناهمسازی را که برای تعریف درازای پوانکاره به‌کار بردیم محفوظ می‌دارد.

گزاره ۱۰.۷ اگر A، B، P، و Q چهار نقطه متمایز از O، مرکز دایره γ، و A'، B'، P'، و Q' به‌ترتیب منعکسهای آنها نسبت به γ باشند، آنگاه: $(AB, PQ) = (A'B', P'Q')$.

برهان:

به موجب لم ۳.۷: $(\overline{\mathrm{AP}})/(\overline{\mathrm{OA}}) = (\overline{\mathrm{A'P'}})/(\overline{\mathrm{OP'}})$ و $(\overline{\mathrm{AQ}})/(\overline{\mathrm{OA}}) = (\overline{\mathrm{A'Q'}})/(\overline{\mathrm{OQ'}})$.

بنابراین:

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AQ}}} = \frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{OA}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{AQ}}} = \frac{\overline{\mathrm{OQ'}}}{\overline{\mathrm{OP'}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{A'P'}}}{\overline{\mathrm{A'Q'}}}. \tag{۱}$$

و همچنین

$$\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{\overline{\mathrm{OP'}}}{\overline{\mathrm{OQ'}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{B'Q'}}}{\overline{\mathrm{B'P'}}}. \tag{۲}$$

از ضرب معادلات (۱) و (۲)، حکم نتیجه می‌شود. ■

گزاره ۱۱.۷ اگر دایره δ بر دایره γ عمود باشد، در انعکاس نسبت به δ، γ بر γ و درون γ بر درون γ نگاشت می‌شوند. انعکاس نسبت به δ وقوع، میان‌بود، و نیز قابلیت انطباق به معنی مدل قرص پوانکاره برای درون γ را حفظ می‌کند.[۱]

برهان:

از نتیجه گزاره ۶.۷ چنین برمی‌آید که γ بر خودش نگاشته می‌شود. فرض می‌کنیم P نقطه‌ای درون γ، و $\mathrm{P'}$ منعکس آن نسبت به δ، و C مرکز و s شعاع δ باشند. اگر Q و $\mathrm{Q'}$ محل تلاقی $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ با دایره γ باشند به موجب گزاره ۵.۷، $(\overline{\mathrm{CP}})(\overline{\mathrm{CP'}}) = s^{۲} = (\overline{\mathrm{CQ}})(\overline{\mathrm{CQ'}})$. چون P بین Q و $\mathrm{Q'}$ واقع است پس نامساوی $\mathrm{CQ} < \mathrm{CP} < \mathrm{CQ}$ برقرار است. با وارون کردن این نامساوی جهت نامساوی عوض می‌شود و داریم: $s^{۲}/\overline{\mathrm{CQ}} > s^{۲}/\overline{\mathrm{CP}} > s^{۲}/\overline{\mathrm{CQ'}}$ که در حقیقت همان $\mathrm{CQ'} > \mathrm{CP'} > \mathrm{CQ}$ است. پس $\mathrm{P'}$ بین Q و $\mathrm{Q'}$ قرار دارد و لذا در درون γ است.

به موجب گزاره‌های ۶.۷، ۸.۷، و ۹.۷ در انعکاس نسبت به δ، هر دایره σ که عمود بر γ باشد، یا بر دایره دیگری چون σ' عمود بر γ نگاشت می‌شود یا بر یک خط σ' عمود بر γ، یعنی بر خط گذرنده از نقطه O، مرکز γ، نگاشت می‌شود. بدیهی است این انعکاس خط σ واصل بین نقاط O و C را برخودش و هر خط دیگر σ گذرنده از O را (به موجب گزاره‌های ۷.۷ و ۹.۷) بر یک دایره سوراخ‌دار σ' در نقطه C (یعنی نقطه C از آن حذف شده) عمود بر γ، می‌نگارد. در همه این موارد، برهان بالا نشان می‌دهد جزئی از σ که در درون γ است بر جزئی از σ' که در درون γ است نگاشت می‌شود. در نتیجه خطوط پوانکاره بر خطوط پوانکاره نگاشته می‌شوند.

اگر A و B در درون γ، و P و Q دو سر خط پوانکاره گذرنده از A و B باشند، انعکاس نسبت به δ، P و Q را به دو سر خط پوانکاره گذرنده از $\mathrm{A'}$ و $\mathrm{B'}$ می‌نگارد. به موجب گزاره ۱۰.۷،

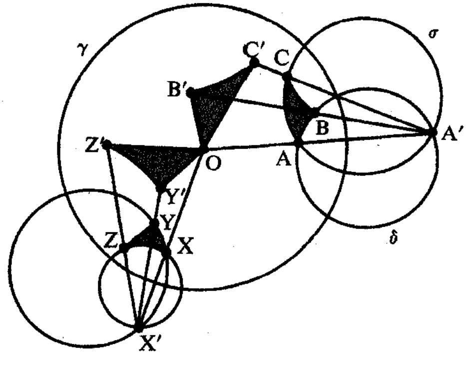
۱. به آسانی دیده می‌شود که اگر در حکم گزاره ۱۱.۷، δ خطی گرفته شود که از نقطه O، مرکز γ، گذشته است و به جای انعکاس، تقارن محوری گذاشته شود، باز هم حکم گزاره ۱۱.۷ صادق است.

$d(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{A'B'})$. لذا قابلیت انطباق بین پاره‌خطها محفوظ می‌ماند. گزاره ۹.۷ نشان می‌دهد که قابلیت انطباق زوایا هم محفوظ می‌ماند. به‌علاوه میان‌بود پوانکاره‌ای هم محفوظ می‌ماند، زیرا که B بین A و D است اگر و تنها اگر A، B، و D نقاطی واقع بر یک خط پوانکاره باشند و $d(\mathrm{AD}) = d(\mathrm{AB}) + d(\mathrm{BD})$. ■

سرانجام به تحقیق درستی بنداشت ض‌زض می‌پردازیم. دو مثلث پوانکاره $\Delta\mathrm{XYZ}$ و $\Delta\mathrm{ABC}$ در درون γ داده شده‌اند به‌قسمی‌که $\measuredangle\mathrm{A} \cong \measuredangle\mathrm{X}$، $d(\mathrm{AC}) = d(\mathrm{XZ})$ و $d(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{XY})$، (شکل ۳۱.۷). باید ثابت کنیم که این مثلثها قابل انطباق‌اند. ما ابتدا آن را به حالت $\mathrm{A} = \mathrm{X} = \mathrm{O}$ (O مرکز γ) تبدیل می‌کنیم: فرض می‌کنیم δ دایره عمود بر γ گذرنده از A و B، و σ دایره عمود بر γ گذرنده از A و C باشند. پس δ بار دیگر σ را در نقطه $\mathrm{A'}$ در بیرون γ، که منعکس A نسبت به γ است، می‌برد (گزاره ۵.۷). فرض می‌کنیم ε دایره به مرکز $\mathrm{A'}$ و شعاع s باشد چنان‌که $s^{۲} = (\overline{\mathrm{AA'}})(\overline{\mathrm{A'O}})$. چون $\overline{\mathrm{AA'}} = \overline{\mathrm{A'O}} - \overline{\mathrm{AO}}$ پس،

$$s^{۲} = (\overline{\mathrm{A'O}})^{۲} - (\overline{\mathrm{AO}})(\overline{\mathrm{A'O}}) = (\overline{\mathrm{A'O}})^{۲} - r^{۲}$$

که در آن r شعاع γ است. از اینجا معلوم می‌شود که ε بر γ عمود است (عکس قضیه فیثاغورس). بنابر تعریف ε، O منعکس A نسبت به ε است و بنابر گزاره ۱۱.۷، انعکاس نسبت به ε، مثلث پوانکاره $\Delta\mathrm{ABC}$ را به مثلث پوانکاره $\Delta\mathrm{OB'C'}$ که قابل انطباق پوانکاره‌ای با آن است، می‌نگارد. به همین ترتیب مثلث پوانکاره $\Delta\mathrm{XYZ}$ بر اثر انعکاس به مثلث پوانکاره $\Delta\mathrm{OY'Z'}$ که قابل انطباق پوانکاره‌ای با آن است نگاشت می‌شود (شکل ۳۱.۷).



شکل ۳۱.۷

لم۴.۷ اگر $d(\mathrm{OB}) = d$، آنگاه $\overline{\mathrm{OB}} = r(e^d - ۱)/(e^d + ۱)$، که e مبنای لگاریتم طبیعی و r شعاع دایره γ است.

برهان:

اگر P و Q دو سر قطر γ گذرنده از B باشند به‌قسمی‌که: $\mathrm{Q} * \mathrm{O} * \mathrm{B} * \mathrm{P}$، آنگاه $d = \log(\mathrm{OB}, \mathrm{PQ})$. اگر e را به‌توان دو طرف این تساوی برسانیم، خواهیم داشت:

$$e^d = (\mathrm{OB}, \mathrm{PQ}) = \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OQ}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{r + \overline{\mathrm{OB}}}{r - \overline{\mathrm{OB}}}$$

که اگر این معادله را برحسب $\overline{\mathrm{OB}}$ حل کنیم نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. ■

اکنون به اثبات ض‌زض بازمی‌گردیم؛ نشان داده‌ایم که می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{A} = \mathrm{X} = \mathrm{O}$. به موجب لم ۴.۷ و فرض، ض‌زض خواهیم داشت: $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OY}}$، $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{OZ}}$، و $\sphericalangle \mathrm{YOZ} \cong \sphericalangle \mathrm{BOC}$. بنابراین یک دوران مناسب اقلیدسی حول O که، در صورت لزوم، با یک قرینه‌یابی نسبت به قطر تکمیل می‌شود، مثلث اقلیدسی $\Delta\mathrm{OBC}$ را بر مثلث اقلیدسی $\Delta\mathrm{OYZ}$ می‌نگارد. این تبدیل، γ را بر خودش و دایره عمود بر γ گذرنده از B و C را بر دایره عمود بر آن گذرنده از Y و Z، می‌نگارد و درازای پوانکاره‌ای و اندازه زاویه را حفظ می‌کند. پس مثلثهای پوانکاره $\Delta\mathrm{OBC}$ و $\Delta\mathrm{OYZ}$ قابل انطباق پوانکاره‌ای هستند. ■

این تحقیق درستی ض‌زض، برهانی است برای بیان هندسی قابلیت انطباق پوانکاره‌ای.

قضیه۱.۷ در مدل قرص پوانکاره دو مثلث قابل انطباق پوانکاره‌ای هستند، اگر و تنها اگر بتوانند بر اثر یک رشته متوالی انعکاس نسبت به دوایر عمود بر γ و/یا یک رشته قرینه‌یابی نسبت به قطرهای γ، بر یکدیگر نگاشت شوند.

اکنون می‌توانیم مدل پوانکاره را در تعیین فرمول بویویی_لباچفسکی برای زاویه توازی، مورد استفاده قرار دهیم. فرض می‌کنیم $\Pi(d)$ معرف تعداد رادیانهای زاویه توازی، متناظر با فاصله پوانکاره‌ای d باشد (تعداد رادیانها برابر با $\pi/۱۸۰$ ضرب در تعداد درجه‌هاست).

قضیه۲.۷ درمدل قرص پوانکاره دستور محاسبه زاویه توازی چنین است: $e^{-d} = \tan[\Pi(d)/۲]$.

در این دستور e مبنای لگاریتم طبیعی است. تابع مثلثاتی $\tan$، به‌صورت تحلیلی نسبت $\sin/\cos$ تعریف شده است که $\sin$ و $\cos$ برحسب بسطهای سری تیلور آنها تعریف شده‌اند (در صفحه هذلولوی، $\tan$ یک زاویه نباید به‌صورت نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن در مثلث قائم‌الزاویه تعبیر شود!).

برهان:

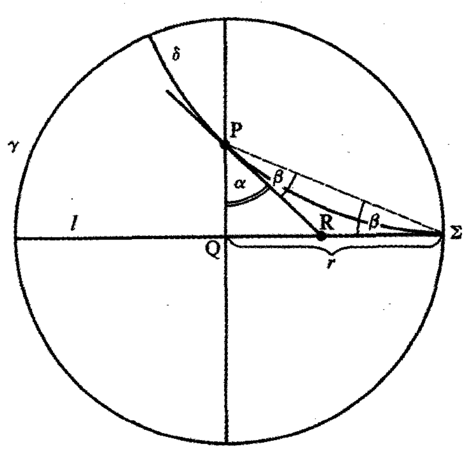
به‌موجب تعریف زاویه توازی، d فاصله پوانکاره‌ای $d(\mathrm{PQ})$ی یک نقطه P از یک خط پوانکاره l است، و $\Pi(d)$ تعداد رادیانهای زاویه‌ای است که یک نیم‌خط موازی حدی با l، گذرنده از P، با $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ می‌سازد. l را می‌توانیم قطر γ، و Q را مرکز γ بگیریم. لذا P بر قطر عمود بر l واقع خواهد شد. پس یک نیم‌خط موازی حدی که بر P بگذرد، کمانی است از یک دایره δ عمود بر γ، به‌طوری که δ در Σ، یعنی در یک سر کمان، بر l مماس باشد. بنابراین مماس بر δ در P، خط l را در نقطه R در درون γ قطع می‌کند که قطب وتر $\mathrm{P\Sigma}$ از دایره δ است، و به‌موجب گزاره ۴.۷، تعداد رادیانهای $\sphericalangle \mathrm{RP\Sigma}$ و $\sphericalangle \mathrm{R\Sigma P}$ مساوی، مثلاً، برابر β است (شکل ۳۲.۷). فرض می‌کنیم $\alpha = \Pi(d)$ تعداد رادیانهای $\sphericalangle \mathrm{RPQ}$ است. چون ۲β تعداد رادیانهای $\sphericalangle \mathrm{PRQ}$ (زاویه بیرونی $\Delta \mathrm{PR\Sigma}$) است، پس $\alpha + ۲\beta = \pi/۲$ یا $\beta = \pi/۴ - \alpha/۲$. فاصله اقلیدسی $\overline{\mathrm{PQ}}$ برابر $r \tan\beta$ است. لذا به‌موجب برهان لم ۴.۷ داریم

$$e^d = \frac{۱ + \tan\beta}{۱ - \tan\beta}$$

اگر در این رابطه به جای β مقدارش را از تساوی قبلی بگذاریم و با استفاده از رابطه مثلثاتی

$$\tan(\pi/۴ - \alpha/۲) = \frac{۱ - \tan(\alpha/۲)}{۱ + \tan(\alpha/۲)}$$

پس از اندکی عملیات جبری، دستور مطلوب را به‌دست خواهیم آورد. ■



شکل ۳۲.۷

هندسه انعکاس نسبت به دایره را آن اندازه بسط داده‌ایم که بتوانیم درستی بنداشتها را در مدل قرص پوانکاره تحقیق کنیم. بسط بیشتر را می‌توانید در تمرینها و در فصلهای ۹ و ۱۰ پیدا کنید. انعکاس کاربرد زیادی در هندسه، به‌ویژه در قضیه معروف فویرباخ درباره دایره ۹ نقطه‌ای یک مثلث و مسئله آپولونیوس، و رسم زنجیره‌هایی که حرکت مستقیم‌الخط را به حرکت منحنی‌الخط بدل می‌کنند، دارد. (ایوز ۱۹۷۲، کی ۱۹۶۹، کوتوزوف ۱۹۶۰، و پدو ۱۹۷۰).

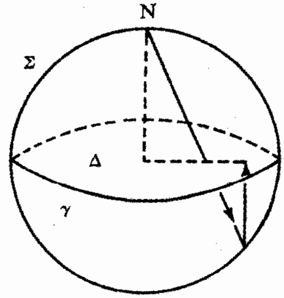
ماهیت تصویری مدل بلترامی-کلاین

اکنون که مدل بودن تعبیر قرص پوانکاره را در هندسه هذلولوی تحقیق کردیم، با استفاده از یکریختی که قبلاً از آن صحبت کردیم نتیجه می‌گیریم که تعبیر کلاین هم یک مدل برای آن است.

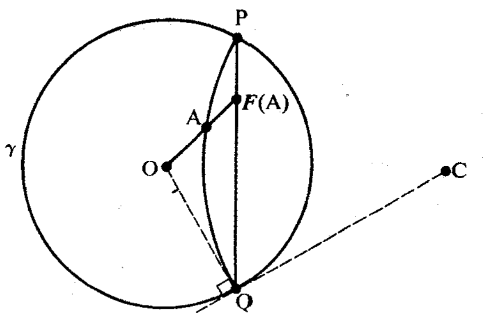
برای روشنتر ساختن مطلب، کره یکه Σ (به شعاع ۱) را که در فضای سه‌بعدی دکارتی با معادله $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ مشخص شده است درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم γ دایره یکه صفحه استوای $\sum$، با معادلات Σ و $x_3 = 0$ باشد. هم قرص کلاین و هم قرص پوانکاره را با مجموعه Δ از نقاط درون γ نمایش خواهیم داد، و ترکیب دو نگاشت زیر را یکریختی F اختیار خواهیم کرد: اگر $N = (0, 0, 1)$ قطب شمال Σ باشد، ابتدا Δ را به‌طریق گنج‌نگاشتی بر نیم‌کره جنوبی Σ، از N تصویر می‌کنیم. سپس آن را به‌طور قائم رو به بالا بر قرص Δ تصویر می‌کنیم (شکل ۳۳.۷).

یکریختی F را رفتن از مدل پوانکاره به مدل کلاین می‌گیریم. با یک تمرین ساده در زمینه مثلثهای متشابه، می‌توان نشان داد که F در دستگاه مختصات با رابطه

$$F(x_1, x_2, 0) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, 0 \right)$$



شکل ۳۳.۷



شکل ۳۴.۷

داده می‌شود. یا اگر مختص سوم (صفر) را نادیده بگیریم و از تنها متغیر مختلط $z = x_۱ + ix_۲$ استفاده کنیم، F به‌صورت

$$F(z) = \frac{۲z}{۱ + |z|^۲}$$

درمی‌آید. روشن است که F قطری از دایره γ را که دو سرش P و Q هستند برخودش می‌نگارد (ولی نقاط واقع بر این قطر را به محیط دایره نزدیک می‌کند). فرض می‌کنیم δ دایره‌ای باشد عمود بر γ که γ را در دو نقطه P و Q می‌برد. حال می‌گوییم F خط پوانکاره‌ای را که دو سرش P و Q است به وترباز (P)(Q) می‌نگارد. در واقع اگر A نقطه‌ای بر کمان δ، بین P و Q در درون γ باشد، آنگاه $F(\mathrm{A})$ نقطه تلاقی $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ با وتر PQ می‌شود (شکل ۳۴.۷).

برهان:

این را می‌توانیم چنین ثابت کنیم: فرض می‌کنیم $(c_۱, c_۲)$ مختصات نقطه C، مرکز δ باشد. به‌موجب گزاره ۳.۷ نقاط P و Q محل تلاقی دایره γ با دایره به قطر CO هستند. معادله دایره به قطر CO، پس از ساده کردن، چنین خواهد شد

$$x_۱^۲ - c_۱x_۱ + x_۲^۲ - c_۲x_۲ = ۰ \qquad (۱)$$

از ترکیب این معادله با معادله γ، یعنی $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱$، خواهیم داشت

$$c_۱x_۱ + c_۲x_۲ = ۱ \qquad (۲)$$

که این معادله، معادله خط واصل بین دو نقطه P و Q است (که قطبی C نسبت به γ نامیده

می‌شود). چون δ بر γ عمود است $\sphericalangle \mathrm{OQC}$ قائمه است، و مربع شعاع δ با استفاده از قضیه فیثاغورس چنین می‌شود

$$\overline{\mathrm{CQ}}^{۲} = \overline{\mathrm{CO}}^{۲} - \overline{\mathrm{OQ}}^{۲} = c_۱^۲ + c_۲^۲ - ۱ \qquad (۳)$$

پس معادله δ خواهد شد

$$(x_۱ - c_۱)^۲ + (x_۲ - c_۲)^۲ = c_۱^۲ + c_۲^۲ - ۱$$

یا

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۲c_۱x_۱ + ۲c_۲x_۲ - ۱ \qquad (۴)$$

اگر $\mathrm{A} = (a_۱, a_۲)$ بر δ واقع و $F(\mathrm{A}) = (b_۱, b_۲)$ تصویر A با ضابطه F باشد، به‌ازای $j = ۱, ۲$ خواهیم داشت

$$b_j = ۲a_j/(۱ + a_۱^۲ + a_۲^۲) \qquad (۵)$$

$$b_j = a_j/(c_۱a_۱ + c_۲a_۲) \qquad (۶)$$

و از آنجا نتیجه می‌شود

$$c_۱b_۱ + c_۲b_۲ = ۱ \qquad (۷)$$

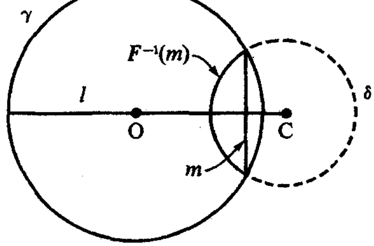
یعنی $F(\mathrm{A})$، چنان‌که ادعا شده بود، بر قطبی C واقع است. ■

اکنون برای تعریف قابلیت انطباق در مدل کلاین از یکریختی استفاده می‌کنیم. دو پاره‌خط (به‌ترتیب، دو زاویه) قابل انطباق کلاینی باهم تعبیر می‌شوند هرگاه تصاویر معکوس آنها بر اثر F (همان‌گونه که قبلاً تعریف شده بود) در مدل پوانکاره، قابل انطباق پوانکاره‌ای باشند. با این تعبیر، تحقیق درستی بنداشتهای قابلیت انطباق خیلی سرراست است. (از این تعبیر نتیجه می‌شود که مدل کلاین تنها در O همدیس است.)

اکنون به توجیه بیانی که قبلاً از تعامد در مدل کلاین (صفحه ۲۵۲) کرده بودیم می‌پردازیم. طبق تعریف بالا، دو خط کلاین l و m عمود کلاینی هستند اگر و تنها اگر تصاویر معکوس آنها، $F^{-۱}(l)$ و $F^{-۱}(m)$، خطوط پوانکاره متعامد باشند. سه حالت پیش می‌آید.

حالت اول. l و m هر دو قطر دایره هستند. در این حالت روشن است که تعامد، معنی معمولی اقلیدسی دارد.

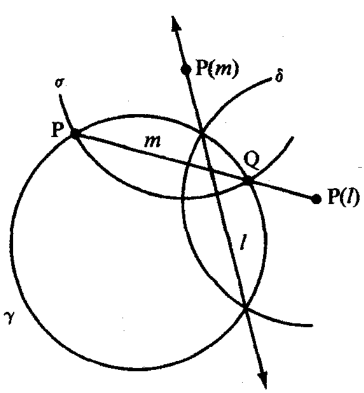
حالت دوم. تنها l قطر است. پس $F^{-۱}(l) = l$. تنها راه برای اینکه $F^{-۱}(m)$، که کمانی است



شکل ۳۵.۷

از دایره عمود δ، بتواند بر l عمود باشد این است که امتداد خط اقلیدسی l از C، مرکز δ، بگذرد (شکل ۳۵.۷). در این حالت امتداد l عمودمنصف وتر m است (تمرین ۱۷، فصل ۴). برعکس، اگر l به‌معنی اقلیدسی بر m عمود باشد، آن را نصف می‌کند. بنابراین امتداد l از C می‌گذرد و در نتیجه l بر کمان $F^{-1}(m)$ عمود است.

حالت سوم. نه l قطر است و نه m. پس $F^{-1}(l)$ و $F^{-1}(m)$ کمانهایی از دوایر δ و σ عمود بر γ هستند. فرض می‌کنیم که δ بر σ عمود باشد. بنابر گزاره ۴.۷، مراکز این دوایر قطبهای خطوط l و m، یعنی نقاط $\mathrm{P}(l)$ و $\mathrm{P}(m)$ هستند، زیرا این دوایر γ را در دو سر l و m می‌برند. فرض می‌کنیم P و Q دو سر m باشند. انعکاس نسبت به δ، P و Q را با هم عوض می‌کند، زیرا این انعکاس هم γ را برخودش می‌نگارد و هم σ را (نتیجه گزاره ۶.۷). ولی اگر P و Q نسبت به δ منعکس یکدیگر باشند، خط اقلیدسی واصل بین آنها باید از $\mathrm{P}(l)$، مرکز دایره δ، بگذرد (شکل ۳۶.۷).



شکل ۳۶.۷

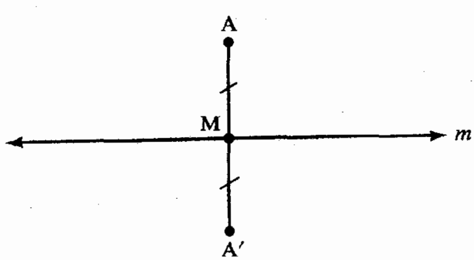
برعکس، هرگاه امتداد m از $P(l)$ بگذرد، P و Q نسبت به δ منعکس یکدیگر خواهند بود (زیرا نقاط γ بر اثر انعکاس نسبت به δ، بر نقاط خود γ نگاشت می‌شوند). به‌موجب گزاره ۵.۷، σ بر δ عمود است. ■

اینک به تعبیر قرینه‌یابی محوری در مدل کلاین می‌پردازیم. هم در هندسه اقلیدسی و هم در هندسه هذلولوی، قرینه‌یابی محوری نسبت به یک خط m، تبدیلی است مانند R_m از صفحه، که هر نقطه از m را ثابت نگه‌می‌دارد و هر نقطه A ناواقع بر m را چنین تبدیل می‌کند: فرض می‌کنیم که M پای عمود وارد از A بر m باشد. در این‌صورت، بنابر تعریف، $R_m(\mathrm{A})$ نقطه یکتایی است مانند A' به‌قسمی‌که $\mathrm{A}' * \mathrm{M} * \mathrm{A}$ و $\mathrm{A}'\mathrm{M} \cong \mathrm{MA}$ (شکل ۳۷.۷). در تمرین اصلی ۲، فصل ۳، نشان دادید که قرینه‌یابی محوری وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق را حفظ می‌کند.

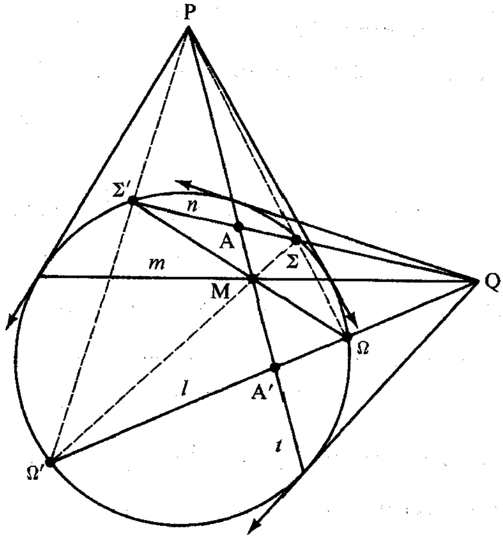
حال به مدل کلاین بازمی‌گردیم و ابتدا فرض می‌کنیم که m قطر γ نباشد و P قطب آن باشد. برای رسم عمود کلاینی از نقطه A بر خط m، خط واصل بین A و P را رسم و فرض می‌کنیم که این خط، m را در M ببرد و t وتری از γ باشد که از این خط اقلیدسی جدا شده است. اگر Q قطب t باشد، خط AQ دایره γ را در Σ و Σ' می‌برد. فرض می‌کنیم n وتر باز $(\Sigma')(\Sigma)$ باشد. خط واصل بین Σ' و M دایره γ را در نقطه Ω می‌برد. اگر Ω را به Q وصل کنیم، خطی به‌دست می‌آید که t را در A' و γ را در Ω' می‌برد (شکل ۳۸.۷).

ادعا. نقطه A' که بدین ترتیب به‌دست آمد قرینه محوری A نسبت به m در مدل کلاین است. خطوط اقلیدسی که از امتداد $\Omega\Sigma$ و $\Omega'\Sigma'$ به‌دست می‌آیند یکدیگر را در P و خطهای $\Omega\Sigma'$ و $\Omega'\Sigma$ یکدیگر را در M می‌برند.

یک دلیل برای درستی این ترسیم را در تمرین اصلی ۱۲، فصل ۶، پیدا خواهید کرد. اینک یک



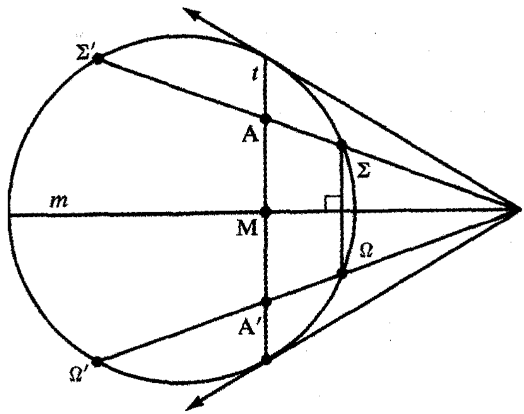
شکل ۳۷.۷



شکل ۳۸.۷

دلیل دیگر: استدلال را با در دست داشتن خطهای واگراموازی کلاینی $l = \Omega\Omega'$ و $n = \Sigma\Sigma'$ و عمود مشترک آنها، t، آغاز می‌کنیم. فرض می‌کنیم که l خط t را در A'، و n خط t را در A ببرد، و M وسط AA' به مفهوم مدل کلاین باشد. فرض می‌کنیم m، خط کلاین گذرنده از M، عمود کلاینی بر خط t باشد. m از وصل کردن M به Q، قطب t، به‌دست آمده است. نیم‌خط $\mathrm{M}\Sigma'$ با n موازی حدی است. قرینه n نسبت به m خطی است که بر A' می‌گذرد و عمود کلاینی بر t، یعنی خط l است. سر Σ' بر سر l، در همان طرف t که Σ' در آن واقع است، یعنی بر نقطه Ω'، نگاشت می‌شود. پس نیم‌خط $\mathrm{M}\Sigma'$ بر نیم‌خط $\mathrm{M}\Omega'$ نگاشت شده است. حال قرینه‌یابی نسبت به t را انجام می‌دهیم. Ω' بر Ω و $\mathrm{M}\Omega'$ بر $\mathrm{M}\Omega$ نگاشت می‌شود. ولی قرینه‌یابی‌های متوالی نسبت به عمودهای کلاینی m و t، دوران $^\circ$۱۸۰ حول M را می‌دهند. پس، $\mathrm{M}\Omega$ نیم‌خطی است متقابل با $\mathrm{M}\Sigma'$. به‌دلیل مشابه، $\mathrm{M}\Sigma$ نیم‌خطی است متقابل با $\mathrm{M}\Omega'$. چون قرینه‌یابی نسبت به m، Σ' را بر Ω' و Σ را بر Ω می‌نگارد، خطوط $\Sigma'\Omega'$ و $\Sigma\Omega$ هر دو باید عمود کلاینی بر m باشند و امتداد اقلیدسی آنها یکدیگر را در P، قطب m، ببرد.

اکنون قرینه‌یابی کلاینی را برای حالتی که m قطر γ است درنظر می‌گیریم. در این حالت P نقطه‌ای است واقع در بی‌نهایت، t عمود بر m به معنای اقلیدسی آن، و M وسط اقلیدسی وتر t است (چون قطر عمود بر وتر از وسط وتر می‌گذرد). در برهان فوق نشان داده شده بود که وتر $\Omega\Sigma$



شکل ۳۹.۷

بر قطر m عمود است، پس Ω قرینه اقلیدسی Σ است نسبت به m. بنابراین $\overleftrightarrow{\mathrm{Q}\Omega}$ قرینه اقلیدسی $\overleftrightarrow{\mathrm{Q}\Sigma}$ است و در نتیجه A' قرینه اقلیدسی معمولی A نسبت به قطر m است (شکل ۳۹.۷).

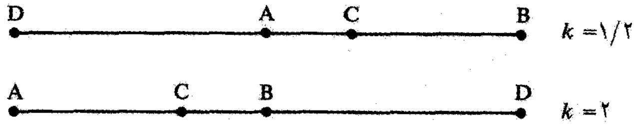
برای اینکه قرینه کلاینی را به‌گونه مختصرتری بیان کنیم، به مفهوم نسبت ناهمساز $(\mathrm{AB}, \mathrm{CD})$ که با فرمول

$$(\mathrm{AB}, \mathrm{CD}) = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AD}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$$

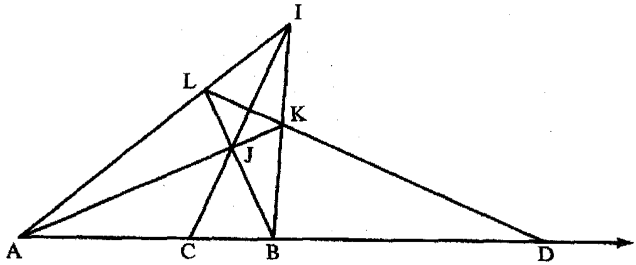
تعریف شده بود بازمی‌گردیم.

تعریف. اگر A، B، C، و D چهار نقطه متمایز هم‌خط در صفحه اقلیدسی باشند چنان‌که $(\mathrm{AB}, \mathrm{CD}) = ۱$، گوییم C و D مزدوج توافقی (یا مزدوج همساز) نسبت به AB هستند و ABCD یک چهاره توافقی است. به‌دلیل متقارن بودن نسبت ناهمساز، A و B هم مزدوج توافقی نسبت به CD هستند.

چهاره توافقی را به‌صورت $\overline{\mathrm{AC}}/\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}/\overline{\mathrm{BD}}$ هم می‌توان نوشت. چون C و D متمایزند، یکی باید بر پاره‌خط AB باشد و دیگری بر امتداد آن (به‌طوری که «C و D، AB را به‌طور درونی و بیرونی به یک نسبت تقسیم کنند»). به‌علاوه، اگر AB داده شده باشد، C و D هر یک به‌طور یکتا دیگری را معین می‌کند. مثلاً فرض می‌کنیم $\mathrm{A} * \mathrm{C} * \mathrm{B}$، و فرض کنیم $k = \overline{\mathrm{AC}}/\overline{\mathrm{CB}}$. اگر $k < ۱$، آنگاه D تنها نقطه‌ای است که $\mathrm{D} * \mathrm{A} * \mathrm{B}$ و $\overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{AB}}/(۱ - k)$ و اگر $k > ۱$، D تنها نقطه‌ای است که $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{D}$ و $\overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{AB}}/(k - ۱)$ (شکل ۴۰.۷). حالت $k = ۱$ نامعین است، زیرا نقطه‌ای چون D بر امتداد AB وجود ندارد که $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}}$. بنابراین M، وسط



شکل ۴۰.۷



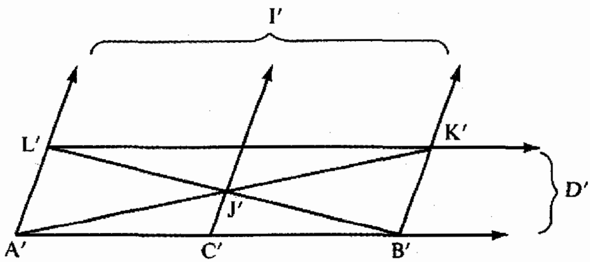
شکل ۴۱.۷

پاره‌خط AB، مزدوج توافقی ندارد. می‌توان این استثنا را با کامل کردن صفحه اقلیدسی، یعنی با افزودن یک «خط بی‌نهایت» به آن و تبدیل صفحه‌به‌صفحه تصویری حقیقی برطرف کرد (فصل ۲). پس، مزدوج توافقی M، مطابق تعریف، «نقطه بی‌نهایت» واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ است.

راه قشنگی برای رسم مزدوج توافقی C نسبت به AB با خط‌کش در دست است. دو نقطه I و J را هم‌خط با C ناواقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ اختیار می‌کنیم. اگر $\overleftrightarrow{BI}$ و $\overleftrightarrow{AJ}$ یکدیگر را در نقطه K و $\overleftrightarrow{AI}$ و $\overleftrightarrow{BJ}$ یکدیگر را در L ببرند، آنگاه $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{KL}$ یکدیگر را در نقطه D، مزدوج توافقی C، خواهند برید (شکل ۴۱.۷).

دلیل درستی این ترسیم توافقی را در صفحه ۲۷۹ـ۲۸۰ خواهیم آورد. در همین حال به عنوان تدبیری برای به‌خاطرسپردن ترسیم، خط $\overleftrightarrow{ID}$ را به بی‌نهایت «تصویر می‌کنیم». در این‌صورت شکل ما به صورت شکل ۴۲.۷ در خواهد آمد. چون $\square A'B'K'L'$ اکنون به متوازی‌الاضلاع بدل شده است، می‌بینیم که C' وسط $A'B'$ است و مزدوج توافقی آن نقطه «بی‌نهایت» D' واقع بر $\overleftrightarrow{A'B'}$ است. (این تدبیر ذهنی ممکن است به برهانی که بر اساس هندسه تصویری بنا شده منجر شود. ایوز، ۱۹۷۲، فصل ۶).

حال اگر به شکل ۳۸.۷ که در آن A' قرینه کلاینی A است مراجعه کنید، خواهید دید که A' مزدوج توافقی A نسبت به MP است. کافی است که به جای نقاط شکل ۳۸.۷ نقاط با تناظر $I\text{-}\Sigma'$، $J\text{-}\Sigma$، $K\text{-}\Omega$، $L\text{-}\Omega'$، $A\text{-}P$، $B\text{-}M$، $C\text{-}A$، و $D\text{-}A'$ بگذارید تا شکلی برای رسم مزدوج توافقی به‌دست آورید.



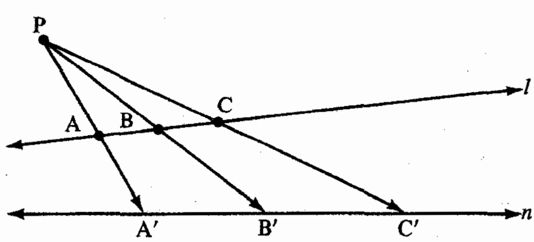
شکل ۴۲.۷

تعریف. فرض می‌کنیم خط m و نقطه P ناواقع بر آن داده شده باشد. تبدیلی از صفحه اقلیدسی به نام مانستگی توافقی به مرکز P و محور m چنین تعریف می‌شود: P و همه نقاط واقع بر m را ثابت نگاه می‌دارد. در مورد هر نقطه دیگر A، اگر نقطه تلاقی m با خط t، که P را به A وصل می‌کند، M باشد، به A نقطه یکتای A' بر t را نسبت می‌دهد به‌طوری که A' مزدوج توافقی A نسبت به MP باشد.

با این تعریف می‌توانیم قضیه خود را با عبارت دیگری بیان کنیم.

قضیه ۳.۷ اگر m خط کلاینی باشد که قطر دایره γ نباشد و P قطب آن باشد، آنگاه قرینه محوری نسبت به m در مدل کلاین، همان مانستگی توافقی به مرکز P و محور خط اقلیدسی m خواهد شد هرگاه این مانستگی به درون γ محدود شود. اگر m قطر γ باشد، قرینه‌یابی محوری نسبت به m معنی معمولی اقلیدسی را پیدا می‌کند.

برای توجیه درستی ترسیم توافقی، به مفهوم نگاشت منظری احتیاج داریم، که عبارت است از نگاشتن خطی چون l بر خطی مانند n، با مرکز تصویر نقطه P که بر هیچ‌یک از دو خط l و n نباشد (شکل ۴۳.۷). این نگاشت بر هر نقطه A از خط l یک نقطه A' از خط n را، که نقطه



شکل ۴۳.۷

برخورد $\overleftrightarrow{\mathrm{PA}}$ و n است، اختصاص می‌دهد. (اگر $\overleftrightarrow{\mathrm{PA}}$ موازی با n باشد، تصویر A نقطه بی‌نهایت روی خط n است.) P مرکز این نگاشت منظری نامیده می‌شود.

لم ۵.۷ نگاشت منظری، نسبت همساز چهار نقطه هم‌خط را حفظ می‌کند. یعنی اگر A، B، C، و D بر l، و A'، B'، C'، و D' تصویر آنها با نگاشت منظری به مرکز P بر خط n باشند، آنگاه $(\mathrm{AB},\mathrm{CD}) = (\mathrm{A}'\mathrm{B}',\mathrm{C}'\mathrm{D}')$.

برهان:

به موجب تمرین ۲۳، فصل ۵، داریم

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{\overline{\mathrm{AP}}\sin \measuredangle \mathrm{APC}}{\overline{\mathrm{BP}}\sin \measuredangle \mathrm{BPC}}$$

و

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{\overline{\mathrm{BP}}\sin \measuredangle \mathrm{BPD}}{\overline{\mathrm{AP}}\sin \measuredangle \mathrm{APD}}$$

در نتیجه

$$(\mathrm{AB},\mathrm{CD}) = \frac{(\sin \measuredangle \mathrm{APC})(\sin \measuredangle \mathrm{BPD})}{(\sin \measuredangle \mathrm{BPC})(\sin \measuredangle \mathrm{APD})}$$

اما $\sin \measuredangle \mathrm{APC} = \sin \measuredangle \mathrm{A}'\mathrm{PC}'$، $\sin \measuredangle \mathrm{PBD} = \sin \measuredangle \mathrm{B}'\mathrm{PD}'$، و غیره. بنابراین همان دستور را برای $(\mathrm{A}'\mathrm{B}',\mathrm{C}'\mathrm{D}')$ خواهیم داشت. ■

اکنون به شکل ۴۱.۷ باز می‌گردیم. فرض می‌کنیم $\overleftrightarrow{\mathrm{IJ}}$ و $\overleftrightarrow{\mathrm{KL}}$ در نقطه M همدیگر را ببرند. اگر از نگاشت‌منظری به مرکز I استفاده کنیم خواهیم داشت (لم ۵.۷): $(\mathrm{AB},\mathrm{CD}) = (\mathrm{LK},\mathrm{MD})$. همچنین از نگاشت‌منظری به مرکز J به‌دست می‌آوریم: $(\mathrm{AB},\mathrm{CD}) = (\mathrm{KL},\mathrm{MD})$. ولی بنابر تعریف نسبت ناهمساز: $(\mathrm{KL},\mathrm{MD}) = ۱/(\mathrm{LK},\mathrm{MD})$. بنابراین $(\mathrm{AB},\mathrm{CD})$ با عکس خودش مساوی است؛ یعنی: $(\mathrm{AB},\mathrm{CD}) = ۱$. پس همان‌گونه که ادعا شده بود ABCD یک چهاره توافقی است. این خود مؤید درستی ترسیم توافقی در صفحه ۲۷۸ است. ■

حال، قضیه ۳.۷ را برای محاسبه درازای پاره‌خط در مدل کلاین به‌کار می‌بریم. مطابق روش کلی که در این کتاب داشته‌ایم، تعریف درازا در مدل کلاین، از برگرداندن به مدل پوانکاره از راه عکس یکریختی F و استفاده از تعریف درازا، که قبلاً در آن داده شده بود، صورت می‌گیرد. بنابراین $d'(\mathrm{AB})$، درازای یک پاره‌خط در مدل کلاین، با دستور $d'(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{ZW}) = |\log(\mathrm{ZW},\mathrm{PQ})|$ داده می‌شود که در آن $\mathrm{A} = F(\mathrm{Z})$ و $\mathrm{B} = F(\mathrm{W})$ و P و Q دو سر خط پوانکاره گذرنده از نقاط Z و W هستند. به‌موجب قضیه پیش که در شکل ۳۴.۷ نمایش داده شده بود، P و Q دو سر خط کلاین گذرنده از نقاط A و B نیز هستند.

قضیه بعد نشان می‌دهد که چگونه باید $d'(\mathrm{AB})$ را مستقیماً برحسب A، B، P، و Q حساب کنیم. در اثبات آن به این تبصره نیاز داریم که: «نسبت ناهمساز $(\mathrm{AB},\mathrm{PQ})$ در هر قرینه‌یابی کلاینی محفوظ می‌ماند». اگر قرینه‌یابی را نسبت به قطر γ به‌دست آوریم، مطلب روشن است. در غیراین‌صورت، بنابر قضیه ۳.۷، تقارن کلاینی یک مانستگی توافقی است که R، مرکز آن، در بیرون γ است. قرینه‌یابی محوری در صفحه هذلولوی ویژگی هم‌خطی را حفظ می‌کند. پس، نگاشت هر خط کلاین l بر قرینه کلاینی آن، n، درست همان نگاشت منظری به مرکز R است. بنابراین از لم ۵.۷ اطمینان حاصل می‌شود که نسبت ناهمساز محفوظ می‌ماند.

قضیه۴.۷ اگر A و B دو نقطه در درون γ و P و Q دو سر وترگذرنده از A و B باشند، درازای کلاینی پاره‌خط AB از فرمول

$$d'(\mathrm{AB}) = \frac{۱}{۲}|\log(\mathrm{AB},\mathrm{PQ})|$$

به‌دست می‌آید.

برهان:

در تحقیق درستی بنداشت ض‌زض برای مدل قرص پوانکاره، دیدیم که هر خط پوانکاره ممکن است با یک انعکاس نسبت به دایره عمودی مناسب، بر یک قطر دایره نگاشته شود. گزاره ۱۰.۷ تضمین می‌کند که نسبتهای ناهمساز در انعکاس محفوظ می‌مانند. تبدیلی از مدل کلاین که بر اثر یکریختی F با این انعکاس متناظر می‌شود، یک مانستگی توافقی است (قضیه ۳.۷)، و بنابر تبصره فوق‌الذکر، نسبتهای ناهمساز، هم‌خطی نقاط را حفظ می‌کنند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که A و B بر یک قطر قرار دارند.

فرض می‌کنیم $\mathrm{A} = F(\mathrm{Z})$ و $\mathrm{B} = F(\mathrm{W})$، پس به‌موجب تعریف، $d'(\mathrm{AB}) = d(\mathrm{ZW})$. پس از یک دوران مناسب (که نسبتهای ناهمساز را حفظ می‌کند) می‌توان فرض کرد که قطر مفروض، محور حقیقی است. پس مختصات دو سر آن، یعنی، P و Q به‌ترتیب برابر ۱− و ۱+ است. اگر مختصات Z و W اعداد حقیقی $\mathscr{Z}$ و $\mathscr{W}$ باشند، آنگاه،

$$(\mathrm{ZW},\mathrm{PQ}) = \frac{۱+\mathscr{Z}}{۱-\mathscr{Z}} \cdot \frac{۱-\mathscr{W}}{۱+\mathscr{W}}$$

و

$$(\mathrm{AB},\mathrm{PQ}) = \frac{۱+F(\mathscr{Z})}{۱-F(\mathscr{Z})} \cdot \frac{۱-F(\mathscr{W})}{۱+F(\mathscr{W})}$$

اما

$$۱ - F(\mathscr{X}) = ۱ - \frac{۲\mathscr{X}}{۱ + |\mathscr{X}|^۲} = \frac{۱ - ۲\mathscr{X} + |\mathscr{X}|^۲}{۱ + |\mathscr{X}|^۲}$$

$$۱ + F(\mathscr{X}) = \frac{۱ + ۲\mathscr{X} + |\mathscr{X}|^۲}{۱ + |\mathscr{X}|^۲}$$

لذا

$$\frac{۱ + F(\mathscr{X})}{۱ - F(\mathscr{X})} = \frac{۱ + ۲\mathscr{X} + |\mathscr{X}|^۲}{۱ - ۲\mathscr{X} + |\mathscr{X}|^۲}$$

چون $\mathscr{X}$ مقداری است حقیقی، پس $\mathscr{X} = \pm|\mathscr{X}|$. در نتیجه

$$\frac{۱ + F(\mathscr{X})}{۱ - F(\mathscr{X})} = \left(\frac{۱ + \mathscr{X}}{۱ - \mathscr{X}}\right)^۲$$

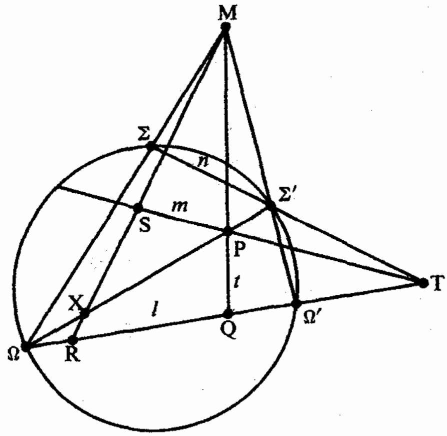
از این فرمول و فرمولی که از آن با قراردادن $\mathscr{W}$ به‌جای $\mathscr{X}$ به‌دست می‌آید نتیجه می‌شود که $(\mathrm{AB}, \mathrm{PQ}) = (\mathrm{ZW}, \mathrm{PQ})^۲$، و اگر از دو طرف این تساوی لگاریتم بگیریم، قضیه مطلوب ثابت می‌شود. ■

بالاخره نتایج حاصل را برای اثبات درستی رسم نیم‌خط موازی حدی (صفحه ۲۱۰) توسط ی. بویویی به‌کار می‌بریم. خط کلاین l و یک نقطه P ناواقع بر آن داده شده‌اند. نقطه Q، پای عمود کلاینی t مرسوم از P بر l است، و m عمود کلاینی بر t گذرنده از P. اگر R نقطه دیگری بر l، و S پای عمود کلاینی مرسوم از R بر m باشد، ترسیم بویویی براساس این ادعا نهاده شده است که اگر نیم‌خط موازی حدی با l در امتداد $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$، گذرنده از P، RS را در X ببرد، آنگاه PX با QR قابل انطباق کلاینی است.

فرض می‌کنیم T و M به‌ترتیب، قطبهای t و m باشند و Ω و Ω' دو سر l. خطوط واصل از Ω و Ω' به M، دایره γ را در دو نقطه Σ و Σ' می‌برند که دو سر قرینه کلاینی l نسبت به m خواهند بود.

همان‌گونه که شکل ۴۴.۷ نشان می‌دهد چهار نقطه هم‌خط Ω، X، P، Σ' نگاشت منظر چهار نقطه هم‌خط Ω، R، Q، Ω' (به‌همان ترتیب)، به مرکز M هستند. بنابر لم ۵.۷، این نگاشت منظری نسبتهای ناهمساز را حفظ می‌کند، پس $(\mathrm{RQ}, \Omega\Omega') = (\mathrm{XP}, \Omega\Sigma')$. از قضیه ۴.۷ چنین برمی‌آید که: $d'(\mathrm{XP}) = d'(\mathrm{RQ})$، و این رابطه خود مؤید درستی ادعای بویویی است. (در حالتی که m قطر دایره γ باشد، M نقطه‌ای در بی‌نهایت می‌شود و لذا به جای لم ۵.۷، از قضیه تصویر موازی (قبل از تمرینهای ۱۸ـ۲۶، فصل ۵) استفاده می‌کنیم تا بتوانیم برابری نسبتهای ناهمساز فوق را نتیجه بگیریم.) ■

توضیح. روشی که در اثبات قضایای ۲.۷ و ۴.۷ به‌کار بردیم برای حل مسائل دیگر در مدلهای



شکل ۴۴.۷

پوانکاره و کلاین بی‌اندازه مفیدند. نحوه عمل از این قرار است که شکل مورد بررسی را می‌توان، با یک رشته از قرینه‌یابی‌های متوالی هذلولوی، به موضع خاصی حرکت داد که یک یا چند تا از خطهای هذلولوی با قطر دایره مطلق γ نشان داده شوند و نقطه O مرکز دایره γ شود. حرکت دادن به این وضع خاص ویژگیهای هندسی شکل را عوض نمی‌کند و استدلالهای مقدماتی و محاسبات برای حل مسئله، در این وضع خاص، بر اساس هندسه اقلیدسی صورت می‌گیرد.

مثلاً اگر $P' \neq O$ و P، آنگاه حکم $OP \cong OP'$، خواه به معنی اقلیدسی، پوانکاره‌ای، یا کلاینی تعبیر شده باشد (به موجب لم ۴.۷ و قضیه ۴.۷)، یک ارزش راستی دارد، و $\measuredangle POP'$ در هر سه تعبیر یک اندازه دارد. به‌ویژه، یک دایره هذلولوی به مرکز هذلولوی O در هر دو مدل با یک دایره اقلیدسی به مرکز O نشان داده می‌شود.

چند کاربردهای قشنگ از این روش را در تمرینهای ک‌ـ۱۵، ک‌ـ۱۷ تا ک‌ـ۲۰، و پ‌ـ۵، در فصلهای ۹ و ۱۰ خواهید دید. مطالعه کلی حرکتهای هندسی در فصل ۹ صورت خواهد گرفت.

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) اگر چه دو هزار سال تلاش بی‌وقفه برای اثبات اصل توازی به‌عنوان قضیه‌ای در هندسه نتاری موفقیت‌آمیز نبوده است، ممکن است روزی برسد که نابغه‌ای به اثبات آن دست یابد.

(۲) اگر به بنداشتهای هندسه نتاری، اصل توازی بیضوی را (که هیچ دو خط موازی وجود ندارند) اضافه کنیم، هندسه سازگار دیگری به‌دست می‌آوریم که هندسه بیضوی نامیده می‌شود.

(۳) همه نقاط فراآرمانی در مدل کلاین نقطه‌هایی از صفحه اقلیدسی هستند که در بیرون γ واقع‌اند.

(۴) مدلهای کلاین و پوانکاره هر دو «همدیس»اند، بدین معنی که قابلیت انطباق زوایا، همان معنی معمولی اقلیدسی را دارد.

(۵) در مدل پوانکاره، «خطها» با همه قطرهای باز یک دایره ثابت γ و همه آن کمانهایی از دوایر متقاطع با γ، واقع در درون γ، نمایش داده می‌شوند.

(۶) به‌ازای هر وتر غیرمشخص $(A)(B)$ از دایره γ، مماسهای بر γ در A و B یکدیگر را در نقطه یکتایی می‌برند که قطب آن وتر نامیده می‌شود.

(۷) در مدل پوانکاره دو خط پوانکاره «متعامد» تعبیر می‌شوند اگر و تنها اگر به معنی معمولی اقلیدسی متعامد باشند.

(۸) در مدل کلاین دو وتر باز «متعامد» تعبیر می‌شوند اگر و تنها اگر به معنی معمولی اقلیدسی متعامد باشند.

(۹) انعکاس نسبت به یک دایره، همه دوایر را بر دوایر می‌نگارد.

(۱۰) در مدل پوانکاره، نقطه‌های فراآرمانی نمایشی ندارند.

(۱۱) چهار نقطه در یک صفحه اقلیدسی زمانی یک چهاره توافقی تشکیل می‌دهند که هم‌خط باشند و نسبت ناهمساز آنها مساوی ۱ باشد.

(۱۲) هرگاه نقطه O بیرون دایره δ باشد و T نقطه تماس مماس مرسوم از O بر δ باشد، قوت نقطه O نسبت به δ مساوی با مربع فاصله O تا T است.

(۱۳) فرض می‌کنیم P نقطه‌ای بر دایره δ باشد. هرگاه P' و δ' به‌ترتیب منعکسهای P و δ نسبت به دایره دیگر γ باشند به‌طوری که γ از مرکز δ و P نگذرد، مماس بر δ' در P' با مماس بر δ در P موازی است.

(۱۴) منعکس مرکز دایره δ، مرکز دایره δ'، منعکس δ، است.

(۱۵) برای اینکه نقطه M، وسط پاره‌خط AB، به‌ازای جمیع نقاط A و B، مزدوج توافقی AB باشد باید صفحه اقلیدسی، با افزودن خطی از نقاط واقع در بی‌نهایت بسط داده شده به‌صورت صفحه تصویری حقیقی درآید.

(۱۶) اگر حکمی از هندسه هذلولوی مسطحه هنگام تعبیر در مدلهای کلاین یا پوانکاره صادق باشد، این حکم قضیه‌ای در هندسه هذلولوی است.

تمرینهای ذیل (که همه تمرینهای اصلی هستند) به سه دسته تقسیم شده‌اند: (۱) تمرینهای ک، مربوط به مدل کلاین؛ (۲) تمرینهای پ، مربوط به مدل پوانکاره و دایره؛ (۳) تمرینهای ت، مربوط به چهاره‌های توافقی، قضایای منلائوس، سوا (چوا)، ژرگون، و دزارگ.

تمرینهای ک

ک-۱. درستی تعبیر بنداشتهای وقوع، میان‌بود، و ددکیند را برای مدل کلاین تحقیق کنید (بنداشت ارشمیدس از بنداشت ددکیند، فصل ۳، نتیجه می‌شود؛ برای تعبیر م-۴، ←تمرین ۱، فصل ۴).

ک-۲. (الف) فرض می‌کنیم که l قطری از γ باشد و m وتر بازی از آن، که l را نمی‌برد و دو سرش غیر از دو سر l هستند. نموداری رسم کنید که معرف k عمود مشترک l و m در مدل کلاین، باشد. (راهنمایی: از قطب m و بیان تعامد در حالت اول، صفحه ۲۵۱ استفاده کنید.)

(ب) فرض می‌کنیم که l و m وترهای باز متقاطعی از γ باشند. در هندسه هذلولوی قضیه معتبری وجود دارد حاکی از اینکه به‌ازای هر دو خط متقاطع نامتعامد، خط سومی عمود بر یکی از آنها وجود دارد که با دیگری به‌طور مجانبی موازی است (تمرین اصلی ۹، فصل ۶).دو خطی را که عمود بر l و به‌طور مجانبی با m موازی‌اند در مدل کلاین (به‌ترتیب از چپ و راست) رسم کنید. این نشان می‌دهد که زاویه توازی می‌تواند هر زاویه حاده‌ای باشد. توضیح دهید.

(ج) در صفحه اقلیدسی هر سه خط موازی یک مورب مشترک دارند. در مدل کلاین سه خط موازی رسم کنید که یک مورب مشترک نداشته باشند.

ک-۳. (الف) در مدل کلاین یک نقطه آرمانی و یک نقطه عادی همواره یک خط یکتای کلاین را مشخص می‌کنند. این مطلب را به‌صورت قضیه‌ای درباره نیم‌خطهای موازی حدی در هندسه هذلولوی درآورید.

(ب) فرض می‌کنیم که نقاط فراآرمانی $\mathrm{P}(l)$ و $\mathrm{P}(m)$ به‌ترتیب قطبهای خطوط کلاین l و m باشند. در شکل ۱۸.۷ دیدید که لزومی ندارد خط اقلیدسی واصل بین $\mathrm{P}(l)$ و $\mathrm{P}(m)$ دایره γ را ببرد، و بنابراین لزومی ندارد که یک خط کلاین را مشخص سازد. نشان دهید تنها حالتی که در آن خط واصل بین $\mathrm{P}(m)$ و $\mathrm{P}(l)$ یک خط کلاین به‌وجود می‌آورد حالتی است که l و m واگراموازی باشند.

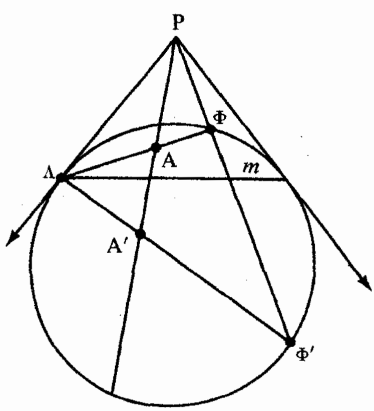
(ج) فرض می‌کنیم که نقطه فراآرمانی $P(l)$ قطب خط کلاین l باشد، و Ω یک نقطه آرمانی، و Ω به‌طور یکتا به‌وسیله یک نیم‌خط r در امتداد Ω مشخص شده باشد. l و r چه شرط لازم و کافی داشته باشند تا $P(l)$ و Ω یک خط کلاین را مشخص سازد؟ این موضوع را به‌صورت قضیه‌ای در هندسه هذلولوی بیان کنید.

ک‌ـ۴. وترهای غیرقطری l و m از دایره γ داده شده‌اند. فرض می‌کنیم که امتداد اقلیدسی m از قطب l بگذرد. ثابت کنید که امتداد اقلیدسی l نیز از قطب m می‌گذرد. (راهنمایی: از معادله ۲، صفحه ۲۷۲، یا از نظریه دوایر متعامد استفاده کنید.)

ک‌ـ۵. با استفاده از مدل کلاین نشان دهید که در صفحه هذلولوی یک پنج ضلعی با پنج زاویه قائمه و یک شش ضلعی با ۶ زاویه قائمه وجود دارد. (راهنمایی: با دو خط که یک عمود مشترک دارند شروع کنید. قطبهای این دو خط را تعیین کرده و سپس خط مناسبی از هر یک از قطبها رسم کنید و . . .) آیا به‌ازای هر $n \geq 5$، یک n ضلعی با n زاویه قائمه وجود دارد؟

ک‌ـ۶. دلیل درستی ترسیم زیر را برای تعیین نقطه A'، قرینه کلاینی A نسبت به m، که ساده‌تر از ترسیمی است که در شکل ۳۸.۷ داده شده، بیان کنید: فرض می‌کنیم که Λ یک سر m و P قطب m باشد. Λ را به A وصل می‌کنیم تا γ را در نقطه Φ ببرد. Φ را به P وصل می‌کنیم تا خط حاصل γ را در نقطه Φ' قطع کند. از تقاطع $\overleftrightarrow{AP}$ و $\Lambda\Phi'$ نقطه A' به‌دست می‌آید (شکل ۴۵.۷).

ک‌ـ۷. پاره‌خط AA' در مدل کلاین داده شده است. روش پیدا کردن وسط هذلولوی آن را با خط‌کش و پرگار نشان دهید (شکلهای ۳۸.۷ و ۳۹.۷).



شکل ۴۵.۷

ک‌ـ۸. در مدل کلاین مثلثهایی رسم کنید که عمودمنصفهای اضلاعشان: (الف) واگراموازی باشد و (ب) موازی مجانبی باشد (تمرین ۱۳ و تمرین اصلی ۷، فصل ۶).

ک‌ـ۹. فرمول

$$F(\mathscr{Z}) = \frac{۲\mathscr{Z}}{۱ + |\mathscr{Z}|^۲}$$

را برای یکریختی F از مدل پوانکاره بر مدل کلاین ثابت کنید (شکل ۳۳.۷). فرمول مربوط به عکس این یکریختی چیست؟ اندازه زاویه در مدل کلاین چنان تعریف شده است که F اندازه زاویه را حفظ می‌کند. نموداری بکشید که مبین آن باشد.

ک‌ـ۱۰. فرض می‌کنیم $\mathrm{A} = (۰, ۰)$، $\mathrm{B} = (۰, ۱/۲)$، و l قطری از γ باشد که با محور xها بریده شده است.

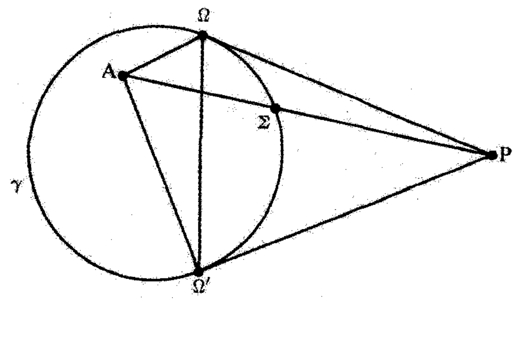
(الف) درازای کلاینی $d'(\mathrm{AB})$، را پیدا کنید.

(ب) مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB را در مدل کلاین پیدا کنید.

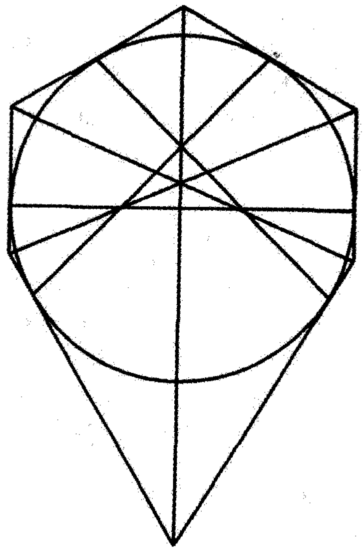
(ج) معادله مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که فاصله کلاینی آنها از l مساوی $d'(\mathrm{AB})$ باشد. این مکان یک «خم هم‌فاصله» است (فصل ۱۰، ص۴۱۰ـ۴۱۱).

ک‌ـ۱۱. فرض می‌کنیم A نقطه‌ای عادی و Ω و Ω' دو نقطه آرمانی باشند. اگر P قطب وتر $\Omega\Omega'$ باشد و نیم‌خط اقلیدسی $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ دایره γ را در Σ ببرد، ثابت کنید $\mathrm{A}\Sigma$ نیمساز $\measuredangle\Omega\mathrm{A}\Omega'$ در مدل کلاین است (شکل ۴۶.۷). با استفاده از این حکم، درستی رسم خط انسدادی را که در تمرین اصلی ۸، فصل ۶، داده شده بود ثابت کنید. (راهنمایی: از قضیه ۶.۶ استفاده کنید.)

ک‌ـ۱۲. در تمرین ۱۶، فصل ۶، این قضیه را ثابت کردید که نیمسازهای زاویه‌های مثلث در هندسه هذلولوی (در واقع در هندسه نتاری) متقارب‌اند. با استفاده از رسم نیمسازها که در تمرین



شکل ۴۶.۷



شکل ۴۷.۷ قضیه بریانشون.

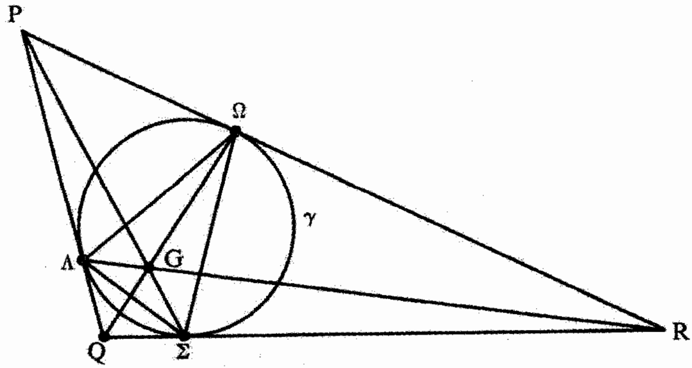
پیش بیان شد، و فهرست واژه‌های مدل کلاین، این قضیه را به قضیه معروفی از هندسه اقلیدسی که به بریانشون[1] منسوب است برگردانید (شکل ۴۷.۷). بدین‌ترتیب برهانی هذلولوی برای قضیه‌ای اقلیدسی داده می‌شود (برای برهان اقلیدسی ر.ک. به کاکستر و گرایتسر، ۱۹۶۷، ص ۷۷).

ک-۱۳. در هندسه هذلولوی قضیه‌ای است حاکی از اینکه در درون هر مثلث سه‌مجانبی $\Delta\Sigma\Omega\Lambda$، نقطه یکتایی مانند G وجود دارد به‌قسمی‌که از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است. نشان دهید که این قضیه در مدل کلاین نتیجه‌ای از قضیه ژرگون در هندسه اقلیدسی است که می‌گوید اگر Λ، Σ، و Ω نقاط تماس دایره محاطی ΔPQR با اضلاع آن باشند، آنگاه پاره‌خطهای $P\Sigma$ و $Q\Omega$ و $R\Lambda$ متقارب‌اند (شکل ۴۸.۷ و تمرین ت-۹). نشان دهید که به معنی اندازه درجه در مدل کلاین داریم $(\measuredangle\Lambda G\Sigma)^\circ = ۱۲۰^\circ$. (راهنمایی: در حالت خاصی که یک ضلع $\Delta\Sigma\Omega\Lambda$ قطر دایره است، با استفاده از مانستگی توافقی آن را به حالتی بدل کنید که بتوان قضیه ژرگون را برای آن به‌کار برد.)

ک-۱۴. برای بیان درازای کلاینی $d'(AB) = ۱/۲|\log(AB, PQ)|$ برحسب مختصات $A = (a_۱, a_۲)$ و $B = (b_۱, b_۲)$، ثابت کنید اگر P و Q دو سر خط کلاین گذرنده از A و B را به‌طور مناسب اختیار کنیم فرمول زیر را خواهیم داشت:

---

۱. قضیه بریانشون: قطرهای یک شش ضلعی محیط بر یک قطع مخروطی، متقارب‌اند (دوگان قضیه پاسکال)-م.



شکل ۴۸.۷

$$(\mathrm{AB}, \mathrm{PQ}) = \frac{a_۱b_۱ + a_۲b_۲ - ۱ - \sqrt{(a_۱ - b_۱)^۲ + (a_۲ - b_۲)^۲ - (a_۱b_۲ - a_۲b_۱)^۲}}{a_۱b_۱ + a_۲b_۲ - ۱ + \sqrt{(a_۱ - b_۱)^۲ + (a_۲ - b_۲)^۲ - (a_۱b_۲ - a_۲b_۱)^۲}}$$

راهنمایی: اگر $\mathscr{Z}$ و $\mathscr{W}$ به‌ترتیب مختصات مختلط A و B باشند، آنگاه $t\mathscr{Z} + (۱ - t)\mathscr{W}$ و $u\mathscr{Z} + (۱ - u)\mathscr{W}$ به‌ترتیب مختصات مختلط P و Q خواهند بود که در آنها t و u ریشه‌های معادله درجه دوم $Dx^۲ + ۲Ex + F = ۰$ هستند، و این معادله گویای این حقیقت است که P و Q بر دایره به شعاع واحد قرار دارند. ضرایب D، E، و F را پیدا کنید و نشان دهید که

$$(\mathrm{AB}, \mathrm{PQ}) = \frac{t(۱ - u)}{u(۱ - t)} = \frac{E + F - \sqrt{E^۲ - DF}}{E + F + \sqrt{E^۲ - DF}}$$

ک‌ـ۱۵. با استفاده از فرمولی که برای درازای کلاینی در قضیه ۴.۷ داده شده است برهانی را برای فرمول بویویی‌ـلباچفسکی، قضیه ۲.۷، در مدل کلاین نتیجه بگیرید. (راهنمایی: رأس زاویه توازی α را در مرکز O مطلق بگیرید و نشان دهید که d' فاصله کلاین مربوط به α با رابطه

$$d' = \frac{۱}{۲} \log \frac{۱ + \cos\alpha}{۱ - \cos\alpha}$$

داده می‌شود. سپس از فرمول مثلثاتی نصف زاویه استفاده کنید.)

ک‌ـ۱۶. (الف) نشان دهید که یک خط دکارتی l به معادله $Ax + By + C = ۰$ قاطع

دایره واحد است اگر و تنها اگر

$$A^۲ + B^۲ - C^۲ > ۰$$

عبارت سمت چپ این نابرابری را با $|l|^۲$ نشان می‌دهیم.

(ب) ثابت کنید که هرگاه $\mathrm{P}' = (x', y')$ قرینه کلاینی نقطه $\mathrm{P} = (x, y)$ نسبت به خط l باشد، آنگاه

$$x' = \frac{|l|^۲ x - ۲A(Ax + By + C)}{|l|^۲ + ۲C(Ax + By + C)}$$

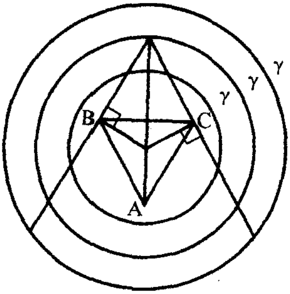
$$y' = \frac{|l|^۲ y - ۲B(Ax + By + C)}{|l|^۲ + ۲C(Ax + By + C)}$$

(راهنمایی: از قضیه ۳.۷ استفاده کنید. در حالت $C = ۰$ محاسبه قرینه اقلیدسی آسان است. هرگاه $C \neq ۰$، به‌موجب معادله (۲) صفحه ۲۷۲، مختصات نقطه L، قطب خط l، چنین است: $(-A/C, -B/C)$؛ ابتدا باید مختصات نقطه M، محل تلاقی خط $\overleftrightarrow{\mathrm{LP}}$ با l، و سپس مختصات P'، مزدوج توافقی P، را نسبت به L و M حساب کنید.)

ک‌ـ۱۷. خط عمود بر نیمساز $\measuredangle$A در A، نیمساز بیرونی $\measuredangle$A نام دارد. (زیرا این دو نیم‌خط متعامد، نیمسازهای دو زاویه مکمل در A هستند). در تمرین ۱۶، فصل ۶، ثابت کردید که نیمسازهای (درونی) ΔABC در نقطه I، مرکز دایره محاطی داخلی، متقارب‌اند. این، یک قضیه در هندسه نتاری است.

(الف) ثابت کنید که در هندسه اقلیدسی، نیمساز درونی $\measuredangle$A با نیمسازهای بیرونی $\measuredangle$B و $\measuredangle$C متقارب است.

(ب) از مدل کلاین نتیجه بگیرید که در هندسه هذلولوی، نیمساز درونی $\measuredangle$A با نیمسازهای بیرونی $\measuredangle$B و $\measuredangle$C در یک نقطه که ممکن است عادی، آرمانی، یا فراآرمانی باشند، متقارب است (شکل ۴۹.۷). (راهنمایی برای (الف): نشان دهید که نیمساز یک زاویه مکان هندسی نقاط درونی زاویه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند، و نیمسازهای بیرونی موازی نیستند. راهنمایی برای (ب): I را مرکز Oی مطلق γ بگیرید و با استفاده از ک‌ـ۱۱ توجه کنید که نیمسازهای درونی هذلولوی، که قطرهای γ هستند، بر نیمسازهای درونی اقلیدسی منطبق‌اند. بنابراین، نیمسازهای بیرونی هذلولوی، که بر قطرهای γ عمودند، بر نیمسازهای بیرونی اقلیدسی منطبق‌اند.)



شکل ۴۹.۷ سه وضع ممکن مطلق.

ک‌ـ۱۸. این، یک قضیه در هندسه اقلیدسی است که ارتفاعهای یک مثلث حاده متقارب‌اند و خطهایی که ارتفاعهای مثلث منفرجه را در بر دارند متقارب‌اند (مسئله ۸، فصل ۹). با به کار بردن این قضیه در مدل کلاین نتیجه بگیرید که در هندسه هذلولوی ارتفاعهای یک مثلث حاده متقارب‌اند و خطهای شامل ارتفاعهای یک مثلث منفرجه، در یک نقطه که ممکن است عادی، آرمانی، یا فرارمانی باشد «متقارب»اند. (راهنمایی: مثلث را طوری قرار دهید که یک رأس آن نقطه O باشد. نشان دهید که در این حالت خطهای کلاین شامل ارتفاعهای بر عمودهای اقلیدسی مرسوم از رئوس بر اضلاع متقابل، منطبق می‌شوند. با استفاده از قضیه قطعه‌بُر و قضایای زاویه بیرونی تحقیق کنید که در مثلث حاده، نقطه تلاقی نقطه‌ای است عادی.)

ک‌ـ۱۹. این یک قضیه در هندسه اقلیدسی است که میانه‌های یک مثلث متقارب‌اند (تمرین ۶۹، فصل ۹). نشان دهید که این قضیه با یک نحوه خاص استدلال در مدل کلاین در هندسه هذلولوی هم صادق است.[۱] (راهنمایی: اگر O وسط هذلولوی AB باشد، وسط اقلیدسی آن نیز هست. اگر P و Q وسط اضلاع AC و BC باشند، با استفاده از تمرین ۱۱(ب)، فصل ۶، نشان دهید که $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ موازی اقلیدسی هستند؛ یعنی $\overleftrightarrow{PQ}$، $\overleftrightarrow{AB}$ را در مزدوج توافقی O نسبت به A و B «می‌برد». در این صورت، از رسم مزدوج توافقی در شکل ۵۰.۷، قضیه نتیجه می‌شود.)

ک‌ـ۲۰. متوازی‌الاضلاع را چهارضلعی‌ای تعریف کرده‌ایم که در آن خطهای شامل اضلاع مقابل موازی‌اند.

۱. دوشیزه ملیسا اشمیتس (Melissa Schmitz) دانشجوی دوره کارشناسی دانشگاه دولتی نیویورک در جنیسیو (Geneseo) یک برهان هندسه نتاری در فضای سه‌بعدی برای من فرستاده است که از آن بوسولینی است. همچنین با استفاده از رایانه پیدا کرده است که در هندسه هذلولوی، مرکزوار مثلث بر دوسوم میانه‌ها از رأس قرار ندارد (چنان‌که در هندسه اقلیدسی است). پرسش بعد: آیا خط اویلر (تمرین ۶۹، فصل ۹) در متمم تصویری صفحه هذلولوی وجود دارد؟

(الف) ثابت کنید که در هندسه اقلیدسی یک چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر اضلاع مقابلش قابل انطباق باشند. نشان دهید که در هندسه هذلولوی قابلیت انطباق اضلاع مقابل الزامی نیست.

در بقیه این تمرین، هندسه، هذلولوی فرض می‌شود.

(ب) چهارضلعی $\square$ABCD که اضلاع مقابلش قابل انطباق‌اند داده شده است. ثابت کنید که زاویه‌های مقابل قابل انطباق‌اند و خطوط شامل اضلاع مقابل واگراموازی‌اند (از تمرین ۱۴، فصل ۶، استفاده کنید). چنین چهارضلعی را متوازی‌الاضلاع متقارن می‌نامیم.

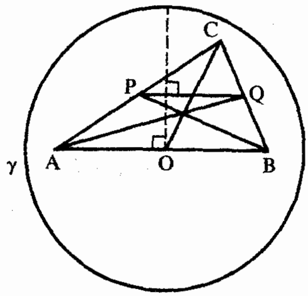
(ج) ثابت کنید که وسط اقطار یک متوازی‌الاضلاع متقارن $\square$ABCD یک نقطه S است، که این S، نقطه تقارن برای هر دو جفت ضلع مقابل است (تمرین اصلی ۱۲، فصل ۶، و شکل ۲۷.۶).

(د) نشان دهید که قطرها بر هم عمودند اگر و تنها اگر چهار ضلع قابل انطباق باشند، و در آن صورت $\square$ABCD یک دایره محاطی به مرکز S خواهد داشت.

(هـ) نشان دهید که قطرها قابل انطباق‌اند اگر و تنها اگر چهار زاویه چهارضلعی قابل انطباق باشند؛ در این صورت نشان دهید که قابلیت انطباق هر چهارضلع الزامی نیست.

(می‌توانید این احکام را از راه استدلال مستقیم یا با استفاده از مدل کلاین تحقیق کنید، بدین ترتیب که S را در مرکز Oی مطلق قرار دهید و توجه کنید که در این‌صورت $\square$ABCD یک متوازی‌الاضلاع اقلیدسی است.)

ک‌ـ۲۱. جنکس ثابت کرده است که در هندسه هذلولوی، «میان‌بود»، «قابلیت انطباق»، و «توازی مجانبی»، هر سه را می‌توان برحسب وقوع تنها تعریف کرد (یک نتیجه مهم دریافت این است که هر هم‌خطی صفحه هذلولوی یک حرکت می‌شود؛ فصل ۹). اظهارات وی به شرح زیرند: نمودارها را در مدل کلاین رسم می‌کنیم تا ببینیم قضیه از چه قرار است. اول، سه خط متمایز a، b، و c یک مثلث مجانبی abc می‌سازند اگر و تنها اگر به‌ازای هر نقطه P بر یکی از آنها ـــ مثلاً a ـــ یک خط یکتای $p \neq a$ گذرنده از P وجود داشته باشد که با b و c موازی باشد (p را مورب مجانبی گذرنده از P می‌نامند). دوم، $a|b$ اگر و تنها اگر یک خط c وجود داشته باشد به‌طوری که a، b و c یک مثلث مجانبی بسازند. سوم، به فرض معلوم بودن سه نقطه P، Q، و R بر یک خط m، $P * Q * R$ اگر و تنها اگر یک خط $a \neq m$ گذرنده از P، یک خط $b \neq m$ گذرنده از R و یک خط c داده شده باشد چنان‌که a، b، و c یک مثلث مجانبی بسازند، و هر خط گذرنده از Q دست‌کم یکی از اضلاع abc را ببرد. چهارم، پاره‌خط PQ بر a با پاره‌خط P′Q′ بر a' قابل انطباق است اگر و تنها اگر (۱) $a|a'$ و هر دو با خط واصل بین نقطه تقاطع موربهای مجانبی



شکل ۵۰.۷

گذرنده از P و P' و نقطه تقاطع موربهای مجانبی گذرنده از Q و Q' موازی باشند یا (۲) هر دو با خط α'' که بر آن یک پاره‌خط $P''Q''$ قابل انطباق با PQ و $P'Q'$ وجود دارد، به معنی (۱) موازی باشند. با استفاده از لم ۵.۷ و قضیه ۴.۷ و رسم نمودار در مدل کلاین، دلیل درستی (۱) را بیان کنید.

تمرینهای پ

پ‌ـ۱. با استفاده از فهرست واژه‌ها برای مدل قرص پوانکاره، قضایای زیر از هندسه هذلولوی را به قضایای هندسه اقلیدسی برگردانید:

(الف) هرگاه دو مثلث متشابه باشند، قابل انطباق‌اند.

(ب) هرگاه دو خط واگراموازی باشند، یک عمود مشترک دارند که یکتاست.

(ج) چهارمین زاویه یک چهارضلعی لامبرت، حاده است.

پ‌ـ۲. گزاره مشابه با گزاره ۶.۷ را وقتی نقطه O در داخل δ قرار دارد و قوت آن، p، نسبت به δ منفی است بیان و ثابت کنید.

پ‌ـ۳. فرض می‌کنیم δ دایره‌ای به مرکز C باشد و α دایره‌ای به مرکز A که از C نمی‌گذرد. اگر A' منعکس A نسبت به δ و α' تصویر α بر اثر انعکاس نسبت به δ باشد، ثابت کنید که A' منعکس C نسبت به α' است و لذا A' مرکز α' نیست. (راهنمایی: با توجه به اینکه β'، تصویر β، بر اثر انعکاس نسبت به δ، خطی است عمود بر α، نشان دهید که هر دایره β گذرنده از A' و C بر α' عمود است.)

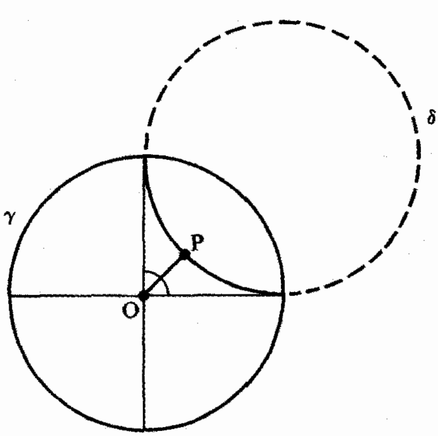
پ‌ـ۴. فرض می‌کنیم l خط پوانکاره‌ای باشد که قطر γ نیست، پس l کمانی است از دایره δ

عمود بر γ. ثابت کنید که در مدل پوانکاره، قرینه‌یابی هذلولوی نسبت به l با انعکاس نسبت به γ نشان داده می‌شود. (راهنمایی: از گزاره ۷.۱۰، و نتیجه گزاره ۷.۶ استفاده کنید.)

پ‌ـ۵. فرض می‌کنیم C نقطه‌ای در مدل قرص پوانکاره باشد. ثابت کنید که در مدل پوانکاره، یک دایره به مرکز C به معنی هندسه هذلولوی، با یک دایره اقلیدسی نشان داده می‌شود که مرکزش C نیست مگر آنکه C بر O، مرکز دایره γ، منطبق باشد. (راهنمایی: ابتدا فرض کنید $\mathrm{C} = \mathrm{O}$، و از لم ۷.۴ استفاده کنید. سپس با قرینه‌یابی نسبت به خط پوانکاره، که عمودمنصف پوانکاره‌ای پاره‌خط پوانکاره OC است، مجموعه دوایر به مرکز O را بر مجموعه دوایر به مرکز هذلولوی C بنگارید. از تمرینهای پ‌ـ۳ و پ‌ـ۴ استفاده کنید.)

پ‌ـ۶. در یک صفحه هذلولوی با یکای طول مفروض، فاصله d را که زاویه توازی $\Pi(d)^\circ$ برای آن مساوی ۴۵° باشد، ثابت شوایکارت می‌نامند. شوایکارت نخستین کسی بود که متوجه شد اگر $\Delta\mathrm{ABC}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با قاعده BC باشد، آنگاه طول ارتفاع وارد از A بر BC، با این ثابت، که کوچکترین کران بالا برای طول همه این گونه ارتفاعهاست، کراندار شده است. ثابت کنید که برای تابع درازایی که برای مدل قرص پوانکاره تعریف کردیم، ثابت شوایکارت برابر با $\log(۱ + \sqrt{۲})$ است (شکل ۷.۵۱). (راهنمایی: ثابت شوایکارت عبارت است از d، درازای پوانکاره‌ای پاره‌خط OP در شکل ۷.۵۱. نشان دهید که درازای اقلیدسی OP برابر است با $\sqrt{۲} - ۱$ و از لم ۷.۴ برای پیدا کردن d استفاده کنید.)

پ‌ـ۷. فرض می‌کنیم α دایره‌ای به مرکز A و شعاع r و β دایره‌ای به مرکز B و شعاع s



شکل ۷.۵۱

باشد. اگر $A \neq B$ و C تنها نقطه واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ باشد چنان‌که $\overline{AC}^{2} - \overline{BC}^{2} = r^{2} - s^{2}$، خط گذرنده از C عمود بر $\overleftrightarrow{AB}$ محور اصلی دو دایره نامیده می‌شود.

(الف) ثابت کنید (مثلاً، با دخالت دادن محورهای مختصات) که نقطه C وجود دارد و یکتاست، و هر نقطه مانند P غیر از A و B، P بر محور اصلی واقع است اگر و تنها اگر $\overline{PA}^{2} - \overline{PB}^{2} = r^{2} - s^{2}$.

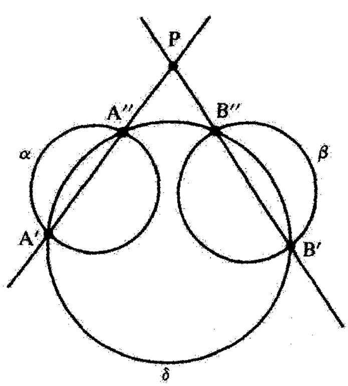
(ب) به‌ازای هر نقطه X بیرون α و بیرون β، فرض می‌کنیم T نقطه‌ای باشد از α به‌طوری‌که $\overleftrightarrow{XT}$ بر دایره α در آن نقطه مماس باشد. همچنین فرض می‌کنیم U نقطه تماس $\overleftrightarrow{XU}$ با β باشد. ثابت کنید $\overline{XT} = \overline{XU}$ اگر و تنها اگر X بر محور اصلی، α و β واقع باشد.

(ج) ثابت کنید که اگر α و β یکدیگر را در نقاط P و Q ببرند، $\overleftrightarrow{PQ}$ محور اصلی، آنهاست.

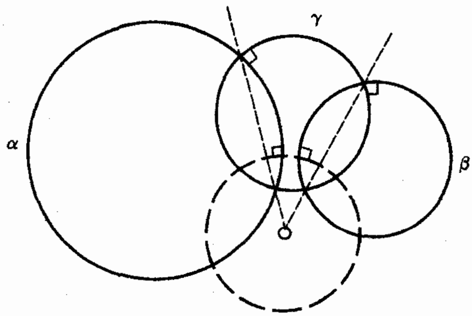
(د) ثابت کنید اگر α و β در نقطه C بر هم مماس باشند، محور اصلی، مماس مشترک آنهاست که از C می‌گذرد.

(هـ) فرض می‌کنیم X نقطه‌ای در بیرون α و β باشد. ثابت کنید X بر محور اصلی α و β واقع است اگر و تنها اگر قوت نقطه X نسبت به α و β یکی باشد (لم ۱.۷).

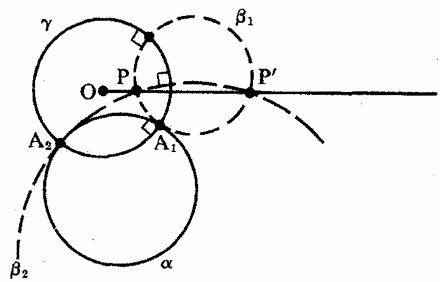
پ-۸. دو دایره نامتقاطع α و β با مراکز نامنطبق A و B داده شده‌اند. دلیل درستی رسم محور اصلی دو دایره α و β را به کمک خط‌کش و پرگار در زیر، بیان کنید: دایره نامشخص δ را رسم می‌کنیم تا α را در نقاط A' و A'' و β را در نقاط B' و B'' ببرد. نقطه P محل تلاقی $\overleftrightarrow{A'A''}$ و $\overleftrightarrow{B'B''}$، بر محور اصلی واقع است. بنابراین محور اصلی عمودی است که از P بر $\overleftrightarrow{AB}$ فرود می‌آید. (راهنمایی: از نقطه P مماسهای PS، PT، و PU را به‌ترتیب بر δ، α، و β رسم کنید و از تمرین پ-۷(ب) و پ-۷(ج) استفاده کنید تا نشان دهید $\overline{PT} = \overline{PS} = \overline{PU}$ (شکل ۵۲.۷).)



شکل ۵۲.۷



شکل ۵۳.۷

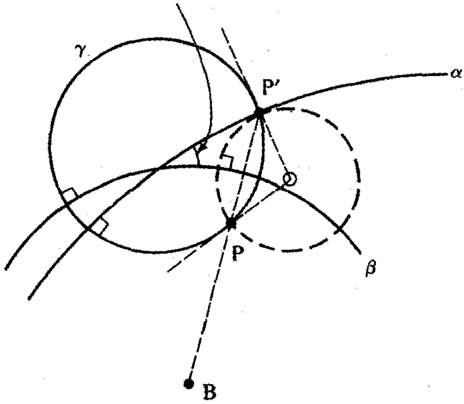


شکل ۵۴.۷

پـ۹. با استفاده از تمرین پـ۷و از راه ترسیم با خط‌کش و پرگار، ثابت کنید که در مدل پوانکاره، دو خط پوانکاره واگراموازی، یک عمود مشترک دارند. (راهنمایی: برحسب اینکه خط پوانکاره قطری از γ یا کمانی از یک دایره α عمود بر γ باشد، یا اینکه محورهای اصلی متقاطع باشند یا نباشند، چهار حالت پیش می‌آید که باید درنظر بگیرید. یک حالت آن در شکل **۵۳.۷** نشان داده شده است. در حالتی که محورهای اصلی موازی باشند، از این حقیقت که عمودمنصف هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد استفاده کنید (تمرین ۱۷، فصل ۴).)

پـ۱۰. خط پوانکاره نامشخص l و نقطه پوانکاره P ناواقع بر آن داده شده‌اند. در مدل پوانکاره دو نیم‌خط از P چنان رسم کنید که با l نیم‌خطهای موازی حدی باشند. (اگر l کمانی از دایره α عمود بر γ باشد و γ را در A_1 و A_2 ببرد؛ آنگاه مسئله به رسم یک دایره β_i گذرنده از P برمی‌گردد که بر γ عمود بوده و به‌ازای هر $i = 1, 2$، در A_i بر α مماس باشد. ←شکل **۵۴.۷** وگزاره **۵۰.۷**.)

پـ۱۱. در مدل پوانکاره یک زاویه حاده داده شده است. خط پوانکاره یکتایی رسم کنید که بر یکی از اضلاع این زاویه عمود و با دیگری نیم‌خط موازی حدی باشد. (راهنمایی: اگر

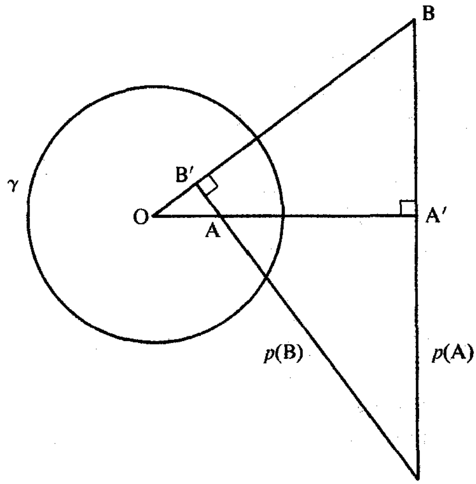


شکل ۵۵.۷

هر دو خط پوانکاره کمانهایی از دوایر متعامد α و β باشند، فرض کنید P' نقطه تلاقی γ با آن جزئی از α باشد که شامل نیم‌خط مفروض است، و P نقطه تلاقی دیگر $\overleftrightarrow{P'B}$ (B مرکز β) با γ باشد (شکل ۵۵.۷) نشان دهید P و P' نسبت به دایره β منعکس یکدیگرند. سپس نقطه تلاقی مماسهای بر γ در P و P' را پیدا کرده و با تمرین اصلی ۹، فصل ۶، مقایسه کنید.)

پ-۱۲. دایره γ به مرکز O داده شده است. نقطه غیرمشخص $P \neq O$ را درنظر می‌گیریم. اگر P' منعکس P نسبت به γ باشد، خط گذرنده از P' و عمود بر $\overleftrightarrow{OP}$ قطبی P نسبت به γ نام دارد و با $p(P)$ نشان داده می‌شود. اگر P در بیرون γ باشد، قطبی آن خطی است که نقاط تماس مماسهای مرسوم از P بر γ را به هم وصل می‌کند (شکل ۲۲.۷). هنگامی که P بر γ واقع باشد، قطبی آن در P بر γ مماس است، و این تنها موردی است که در آن P بر $p(P)$ قرار دارد. ویژگی دوگانی زیر را ثابت کنید: B بر $p(A)$ واقع است اگر و تنها اگر A بر $p(B)$ واقع باشد. (راهنمایی: فرض می‌کنیم B بر $p(A)$ واقع، و B' پای عمود وارد از A بر $\overleftrightarrow{OB}$ باشد (شکل ۵۶.۷). نشان دهید $\Delta OAB'$ با $\Delta OBA'$ متشابه است و نتیجه بگیرید که B' منعکس B نسبت به γ است. برای مطالعه اهمیت عمل قطبی معکوس در نظریه مقاطع مخروطی کاکستر و گرایتسر، ۱۹۶۷، فصل ۶).

پ-۱۳. مجموعه دوایری که همه در یک محور اصلی شریک باشند دسته دایره هم‌محور نام دارد. سه نوع دسته دایره را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:



شکل ۵۶.۷

(۱) خط t و نقطه C بر آن داده شده‌اند. مجموعه دوایر مماس بر t در C، دسته دایره هم‌محور مماس نام دارد.

(۲) نقاط A و B داده شده‌اند. مجموعه دوایر گذرنده از دو نقطه A و B، دسته دایره هم‌محور متقاطع نام دارد و A و B دو نقطه حدی این دسته دایره هستند.

(۳) دایره γ و خط t نامتقاطع با آن داده شده‌اند. مجموعه دوایری، مانند δ، که با γ در محور اصلی t شریک باشند دسته دایره هم‌محور نامتقاطع نام دارد.

احکام زیر را ثابت کنید:

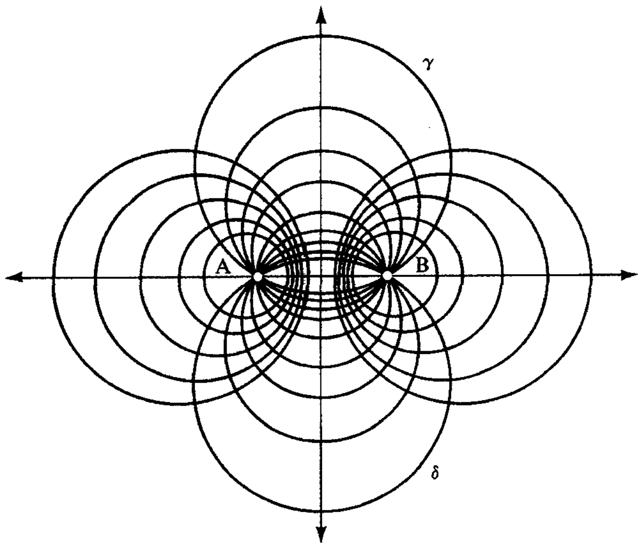
(الف) دو دایره ناهم‌مرکز فقط به یک دسته دایره تعلق دارند.

(ب) یک دسته دایره C داده شده است. همه جفتهای دوایر متعلق به C، یک محور اصلی دارند و مراکز همه این دوایر بر خطی عمود بر این محور اصلی قرار دارند که خط‌المرکزین C نام دارد. (راهنمایی: تمرین پ-۷.)

پ-۱۴. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) مجموعه همه دوایر عمود بر دو دایره مماس γ و δ در C، دسته دایره مماسی در C است که خط‌المرکزین آنها، خط t، مماس مشترک γ و δ است.

(ب) مجموعه همه دوایر عمود بر دو دایره نامتقاطع γ و δ، دسته دایره متقاطعی است که خط‌المرکزین آنها، t، محور اصلی γ و δ است، و نقاط حدی همه آنها دو نقطه‌اند که هر عضو این دسته در آن دو نقطه، خط‌المرکزین γ و δ را می‌برند.



شکل ۵۷.۷

(ج) مجموعه همه دوایر عمود بر دو دایره متقاطع γ و δ در دو نقطه A و B، دسته دایره متقاطعی است که خط‌المرکزین آنها $\overleftrightarrow{AB}$، و محور اصلی آنها عمودمنصف AB است (شکل ۵۷.۷).

پ-۱۵. سه دایره α، β، و γ داده شده‌اند. آیا همواره یک دایره چهارم δ عمود بر هر سه دایره وجود دارد؟ اگر وجود دارد، آیا یکتاست؟ (راهنمایی: محورهای اصلی سه دایره را دوبه‌دو رسم کنید. مرکز دایره δ باید بر هر سه محور و در بیرون هر سه دایره واقع باشد.)

پ-۱۶. دایره γ به مرکز O داده شده است.

(الف) $P \neq O$، و P' منعکس P نسبت به دایره γ مفروض‌اند. ثابت کنید که انعکاس نسبت به γ، دسته خطهای گذرنده از P' را بر دسته دوایر متقاطع گذرنده از P و O، و دسته دایره متعامد هم‌مرکز به مرکز P' را بر دسته دایره نامتقاطعی که محور اصلی آنها عمودمنصف OP است می‌نگارد.

(ب) خط l گذرنده از O داده شده است. ثابت کنید که انعکاس نسبت به γ دسته خط موازی با l را بر دسته دایره مماس بر l در نقطه O می‌نگارد.

پ-۱۷. منظور از صفحه انعکاسی صفحه اقلیدسی است که با افزودن نقطه ∞ به آن، که بنابر قرارداد، برهمه خطوط اقلیدسی واقع و بر هیچ دایره اقلیدسی واقع نیست، به‌دست می‌آید.

منظور ما از «دایره» یا یک دایره اقلیدسی معمولی است یا خطی در صفحه انعکاسی. دو خط موازی اقلیدسی هنگامی که تا حد خطوط انعکاسی امتداد داده شوند، یکدیگر را در ∞ می‌برند؛ هرگاه هر یک از این خطها را دایره‌ای فرض کنیم، این دوایر در ∞ بر هم مماس می‌شوند. دایره معمولی γ به مرکز O داده شده است. منعکس O نسبت به γ را نقطه ∞ تعریف می‌کنیم. مراد ما از انعکاس نسبت به یک «دایره» یا یک انعکاس نسبت به یک دایره معمولی است و یا قرینه‌یابی نسبت به یک خط. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) انعکاس نسبت به یک «دایره مفروض»، «دوایر» را بر «دوایر» می‌نگارد.

(ب) هرگاه A و B منعکس یکدیگر نسبت به دایره α باشند، و A، B، و α بر اثر انعکاس نسبت به دایره دیگر β به‌ترتیب بر A' و B' و α' نگاشت شوند، آنگاه A' و B' منعکس یکدیگر نسبت به α' خواهند بود. (راهنمایی برای (ب): با توجه به اینکه انعکاس، تعامد را حفظ می‌کند، نشان دهید که هر «دایره» γ' گذرنده از A' و B' بر α' عمود است. از گزاره‌های ۵.۷ و ۹.۷ استفاده کنید.)

پ-۱۸. علاوه بر دسته دایره‌های مماس، متقاطع، و نامتقاطع که در تمرین پ-۱۳ تعریف کردیم، سه دسته دایره دیگر را در صفحه انعکاسی به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

(۱) همه دوایری که مرکز آنها نقطه داده شده‌ای باشد.

(۲) همه خطوطی که از نقطه عادی داده شده‌ای بگذرند.

(۳) یک خط داده شده و همه خطوط موازی با آن.

به‌علاوه، اگر دسته دایره‌ای داده شده باشد، محور اصلی آن را «دایره» دیگری که به همین دسته دایره تعلق دارد می‌گیریم. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) دو «دایره» متمایز، تنها به یک دسته دایره تعلق دارند.

(ب) یک دسته دایره، به‌عنوان یک مجموعه، در انعکاس نسبت به هر «دایره» از خود آن دسته، مجموعه‌ای است ناوردا. (راهنمایی برای (ب): برای سه نوع دسته دایره‌ای که هم اکنون نام بردیم، حکم بدیهی است. برای سه نوع دسته دایره هم‌محور، از دو تمرین پیش استفاده کنید.)

پ-۱۹. در مدل قرص پوانکاره یک چهارضلعی منتظم رسم کنید. (راهنمایی: نقطه $A \neq O$ را بر خط $y = x$ بگیرید. فرض کنید که B (به‌ترتیب، D) قرینه آن نسبت به محور xها (به‌ترتیب، yها) باشد و C از دوران A به زاویه $180°$ در حول O به‌دست آمده باشد. نشان دهید $\square ABCD$ یک چهارضلعی منتظم است. توجه داشته باشید هنگامی که A به O نزدیک می‌شود، $\sphericalangle A$ به زاویه قائمه میل می‌کند، در حالی که وقتی A به سمت انتهای آرمانی نیم‌خط $\overrightarrow{OA}$ حرکت کند، $\sphericalangle A$ به صفر میل می‌کند.)

پ‌ـ۲۰. با استفاده از مدل پوانکاره نشان دهید که در صفحه هذلولوی، در یک طرف S از یک خط l دو نقطه A و B وجود دارند که هیچ دایره گذرنده از A و B تماماً در S قرار نمی‌گیرد. این امر نشان می‌دهد که حکم تمرین اصلی ۷، فصل ۵، حکم دیگری هم‌ارز با اصل توازی اقلیدس است. (راهنمایی: l را قطر قرص پوانکاره بگیرید و از تمرین پ‌ـ۵ استفاده کنید.)

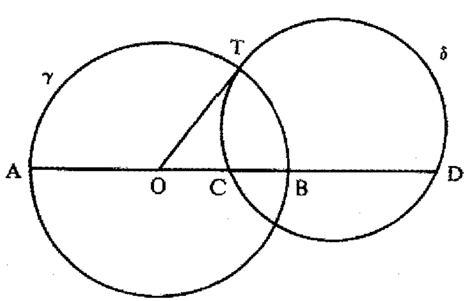
تمرینهای ت

ت‌ـ۱. هرگاه A، B، C، و D چهار نقطه متمایز هم‌خط، M وسط AB، و C و D در یک طرف M بر $\overleftrightarrow{AB}$ باشند، و $r = \overline{MA}$، آنگاه C و D نسبت به AB مزدوج توافقی هستند اگر و تنها اگر $r^{2} = (\overline{MD})(\overline{MC})$.

ت‌ـ۲. هرگاه γ و δ دو دایره متعامد باشند، AB قطری از γ باشد، و δ خط $\overleftrightarrow{AB}$ را در نقاط C و D ببرد، آنگاه C و D مزدوجهای توافقی نسبت به AB هستند؛ برعکس، اگر قطر دایره‌ای توسط دایره دیگر به نسبت توافقی بریده شده باشد، آن دو دایره متعامدند (شکل ۵۸.۷). (راهنمایی: اگر T یک نقطه تلاقی γ و δ باشد، با استفاده از لم ۱.۷ نشان دهید که این دوایر متعامدند اگر و تنها اگر $(\overline{OT})^{2} = (\overline{OC})(\overline{OD})$. حال از تمرین ت‌ـ۱ استفاده کنید.)

ت‌ـ۳. سه نقطه هم‌خط A، B، و C داده شده‌اند. ثابت کنید که چهارمین نقطه تقسیم توافقی، یعنی D، منعکس C است نسبت به دایره‌ای که قطر آن AB باشد. (راهنمایی: از تمرین ت‌ـ۲ و گزاره ۵.۷ استفاده کنید.)

ت‌ـ۴. کمیتهای جهت‌دار. دو نقطه A و B داده شده‌اند. ترتیب دلخواهی (یعنی، جهتی) برای $\overleftrightarrow{AB}$ درنظر بگیرید. در این‌صورت درازای AB، برحسب اینکه جهت از A به B مثبت یا



شکل ۵۸.۷

منفی باشد، مثبت یا منفی خواهد شد. این درازای علامت‌دار با $\underline{\mathrm{AB}}$ نشان داده خواهد شد. پس $\underline{\mathrm{AB}} = -\underline{\mathrm{BA}}$. اگر C نقطه سومی بر خط جهت‌دار $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ باشد، بنابر تعریف، نسبت علامت‌داری که C پاره‌خط AB را به آن نسبت تقسیم می‌کند با $\underline{\mathrm{AC}}/\underline{\mathrm{CB}}$ نمایش داده می‌شود.

(الف) ثابت کنید که این نسبت علامت‌دار مستقل از جهتی است که به خط نسبت داده شده است و نقطه C به‌طور یکتا با این نسبت مشخص می‌شود. (توجه داشته باشید که اگر نسبت، علامت‌دار نباشد، نقطه C یکتا نخواهد بود.)

(ب) خطهای موازی l و m داده شده‌اند. فرض می‌کنیم موربهای t و t' خطهای l و m را به‌ترتیب در B، C و B'، C' ببرند، و فرض می‌کنیم خط t خط t' را در نقطه A بریده باشد. ثابت کنید $\underline{\mathrm{AB}}/\underline{\mathrm{BC}} = \underline{\mathrm{AB}'}/\underline{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}$ (تمرین ۱۸، فصل ۵).

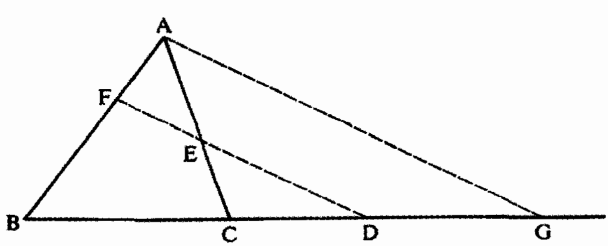
ت‌ـ۵. قضیه منلائوس. $\Delta\mathrm{ABC}$ و نقطه‌های D بر $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$، E بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$، و F بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ که بر هیچ‌یک از رأسهای مثلث واقع نیستند، داده شده‌اند. بنابر تعریف،

$$[\mathrm{ABC}/\mathrm{DEF}] = (\underline{\mathrm{AF}}/\underline{\mathrm{FB}})(\underline{\mathrm{BD}}/\underline{\mathrm{DC}})(\underline{\mathrm{CE}}/\underline{\mathrm{EA}})$$

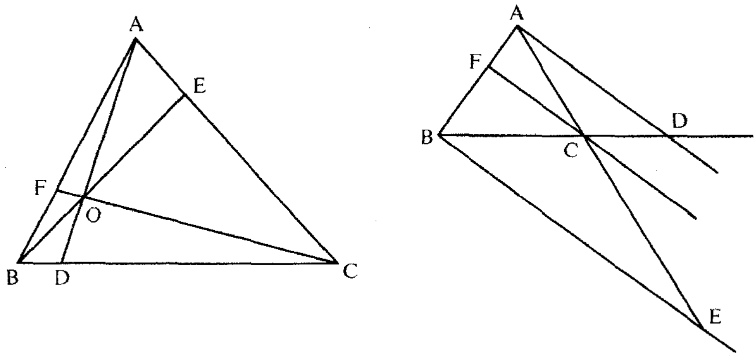
را عدد خطی‌بود می‌گوییم. شرط لازم و کافی برای اینکه D، E، و F بر یک خط l باشند (شکل ۵۹.۷) این است که $[\mathrm{ABC}/\mathrm{DEF}] = -۱$. (راهنمایی: اگر D، E، و F بر یک خط l باشند، فرض می‌کنیم که خط m مرسوم از A به‌موازات l، $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$ را در G ببرد. با استفاده از تمرین ت‌ـ۴ نسبتهای

$$\underline{\mathrm{AF}}/\underline{\mathrm{FB}} = \underline{\mathrm{GD}}/\underline{\mathrm{DB}} \quad \text{و} \quad \underline{\mathrm{CE}}/\underline{\mathrm{EA}} = \underline{\mathrm{CD}}/\underline{\mathrm{DG}}$$

را به‌دست آورید و نتیجه بگیرید که عدد خطی‌بود، ۱− است. برعکس با استفاده از تمرین ت‌ـ۴، نشان دهید که $\overleftrightarrow{\mathrm{EF}}$ نمی‌تواند با $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$ موازی باشد. اگر این خطوط یکدیگر را در D' ببرند، با استفاده



شکل ۵۹.۷



شکل ۶۰.۷

از اولین قسمت برهان و فرض نشان دهید $\underline{BD}/\underline{DC} = \underline{BD'}/\underline{D'C}$ و از تمرین ت-۴ (الف) استفاده کنید.)

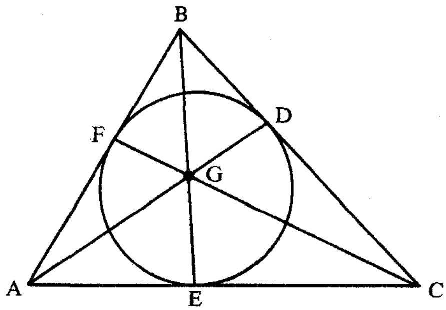
ت-۶. قضیه سوا (چوا). ΔABC و سه نقطه D، E، و F به‌ترتیب بر $\overleftrightarrow{BC}$، $\overleftrightarrow{AC}$، و $\overleftrightarrow{AB}$ داده شده‌اند. خطوط $\overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{BE}$، و $\overleftrightarrow{CF}$ متقارب و یا موازی‌اند اگر و تنها اگر $[ABC/DEF] =$ ۱+ (شکل ۶۰.۷). (راهنمایی: فرض کنید که این سه خط در نقطه O متقارب باشند. قضیه منلائوس را برای ΔADB و ΔADC به‌کار برید تا دو عبارت متفاوت برای $\underline{OD}/\underline{AO}$ به‌دست آورید. سپس یکی از این عبارتها را بر دیگری تقسیم کنید تا ببینید که عدد خطی‌بود ۱+ است. اگر سه خط موازی باشند، از تمرین ت-۴(ب) استفاده کنید. برعکس، اگر عدد خطی‌بود ۱+ باشد و سه خط موازی نباشند، فرض کنید $\overleftrightarrow{BE}$ و $\overleftrightarrow{CF}$ یکدیگر را مثلاً در نقطه O ببرند و $\overleftrightarrow{AO}$ خط $\overleftrightarrow{BC}$ را در D' ببرد. از اولین قسمت برهان و فرض استفاده کنید تا نشان دهید که $\underline{BD}/\underline{DC} = \underline{BD'}/\underline{D'C}$ و بعد از تمرین ت-۴ (الف) استفاده کنید.)

ت-۷. چهار نقطه هم‌خط A، B، C، و D داده شده‌اند. نسبت ناهمساز علامت‌دار آنها، یعنی $(\underline{AB}, \underline{CD})$، چنین تعریف می‌شود: $(\underline{AB}, \underline{CD}) = (\underline{AC}/\underline{CB})/(\underline{AD}/\underline{DB})$.

(الف) ثابت کنید ABCD یک چهاره توافقی است اگر و تنها اگر $(\underline{AB}, \underline{CD}) =$ ۱−. (ب) ثابت کنید که نسبتهای ناهمساز علامت‌دار در نگاشت منظری و تصویر موازی محفوظ می‌مانند (لم ۵.۷ و قضیه تصویر موازی، قبل از تمرین ۱۸، فصل ۵).

ت-۸. ثابت کنید ABCD یک چهاره توافقی است اگر و تنها اگر

$$۱/\underline{AB} = \frac{۱}{۲}(۱/\underline{AC} + ۱/\underline{AD})$$



شکل ۶۱.۷

ت‌ـ۹. فرض می‌کنیم که دایره محاطی ΔABC به‌ترتیب در نقاط D، E، و F بر اضلاع BC، CA، و AB مماس باشد. ثابت کنید AD، BE، و CF در نقطه G که نقطه ژرگون ΔABC نام دارد، متقارب‌اند (شکل ۶۱.۷). (راهنمایی: بنابر تمرین ۱۶، فصل ۶، I مرکز دایره محاطی درونی بر هر سه نیمساز واقع است. پس سه جفت مثلث قائم‌الزاویه، که هر جفت با هم قابل انطباق‌اند، پدید می‌آیند که می‌توانند برای تحقیق درستی ملاک قضیه سوا (چوا) به‌کار آیند.)

ت‌ـ۱۰. با استفاده از قضیه منلائوس، قضیه دزارگ را بدان گونه که در پروژه ۱، فصل ۲، بیان شده است ثابت کنید. (راهنمایی: با توجه به شکل ۱۰.۲، قضیه منلائوس را برای ΔBCP، ΔCAP، و ΔABP بنویسید، سپس هر سه معادله را در هم ضرب کنید تا $[ABC/RST] = -۱$ را به‌دست آورید. یک بار دیگر از قضیه منلائوس استفاده کنید.)

ت‌ـ۱۱. قضایای منلائوس و سوا را می‌توان برای اثبات قضایای معروف پاپوس و پاسکال، و اثبات وجود نقاط ویژه یک مثلث به‌کار برد. با مراجعه به کی (۱۹۶۹)، یا کاکستر و گرایتسر (۱۹۶۷)، گزارشی درباره این قضایا تهیه کنید.

۸

استلزامهای فلسفی

به راه‌حلهای خود مدتها اندیشیده‌ام اما هنوز نمی‌دانم چگونه باید به آنها بپردازم.

ک. ف. گاوس

هندسه فضای فیزیکی چیست؟

نشان داده‌ایم که هرگاه هندسه اقلیدسی سازگار باشد، هندسه هذلولوی هم سازگار است، زیرا می‌توانیم برای آن مدلهایی در هندسه اقلیدسی بسازیم. برعکس، می‌توان ثابت کرد که اگر هندسه هذلولوی سازگار باشد، هندسه اقلیدسی هم سازگار است، زیرا «دایره‌های حدی» بر «کره حدی» در فضای هذلولوی مدلی است از خطوط صفحه اقلیدسی (← کولتسیکی، ۱۹۶۱، بخش ۱۷). بدین ترتیب، هر دو هندسه به یک اندازه سازگارند.

اکنون، اگر منطقی صحبت کنیم، می‌توانید قبول کنید که هندسه هذلولوی شایسته آن است که پابه‌پای هندسه اقلیدسی حرکت کند. ولی ممکن است این احساس هم به شما دست داده باشد

که هندسه هذلولوی اصلاً یک سرگرمی فکری است، در حالی که هندسه اقلیدسی دقیقاً معرف جهان فیزیکی‌ای است که ما در آن زندگی می‌کنیم، و در نتیجه، اهمیت خیلی بیشتری دارد. اکنون این دیدگاه را اندکی عمیقتر مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مهندسی و معماری، به‌طور قطع، دوگواه صادق هستند بر اینکه هندسه اقلیدسی در اندازه‌گیری معمولی فاصله‌هایی که زیاد بزرگ نیستند بی‌اندازه مفید است. ولی هنگامی که با فاصله‌های بزرگتر سروکار پیدا می‌کنیم، قدرت نمایش هندسه اقلیدسی قطعیت کمتری پیدا می‌کند. مثلاً، اگر از جنبه فیزیکی «خط» را به مسیری که یک پرتو نورانی طی می‌کند تعبیر کنیم، در آن صورت می‌توانیم سه منبع نورانی به فواصل بسیار زیاد از هم را درنظر بگیریم و با آنها یک مثلث فیزیکی بسازیم. حال می‌خواهیم زاویه‌های این مثلث فیزیکی را اندازه بگیریم و تحقیق کنیم که آیا مجموع زوایای این مثلث 180° هست یا نیست (قاعدتاً چنین آزمایشی مسئله اقلیدسی بودن یا هذلولوی بودن فضا را فیصله خواهد داد).

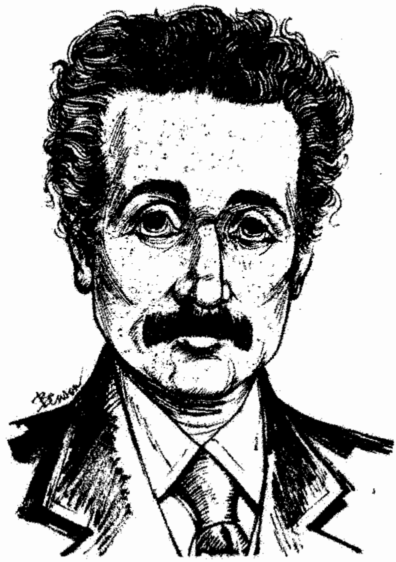
ف. و. بسل، یکی از دوستان نزدیک گاوس، این اندازه‌گیری را انجام داد و برای این کار، سه زاویه اختلاف منظر یک ستاره دوردست را سه رأس مثلث اختیار کرد، ولی نتیجه کار مجاب‌کننده نبود. چرا؟ زیرا در هر آزمایش فیزیکی خطاهای تجربی دخالت دارند. هرگز ابزارهای ما کاملاً دقیق نیستند. فرض کنید معلوم شد مجموع زوایا برابر 180° است. اگر حداکثر خطای ابزار ۱/۱۰۰ درجه باشد، فقط می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموع سه زاویه بین $179{,}99^\circ$ و $180{,}01^\circ$ است. نمی‌توانیم با اطمینان کامل بگوییم که واقعاً 180° است.

از سوی دیگر، فرض می‌کنیم که این اندازه‌گیریها مجموع 179° را به ما بدهد. با اینکه تنها می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموع زوایا بین $178{,}99^\circ$ و $179{,}01^\circ$ است، ولی می‌توانیم اطمینان داشته باشیم که مجموع از 180° کمتر است. به‌عبارت دیگر، نتیجه قطعی چنین آزمایشی این خواهد بود که فضا هذلولوی است![1] به نتیجه قطعی نرسیدن آزمایش بسل فقط نشان می‌دهد که اگر فضا هذلولوی باشد، کاستیهای مثلثهای زمینی بسیار ناچیزند.

تکرار می‌کنیم: به سبب خطای تجربی، هرگز یک آزمایش فیزیکی نمی‌تواند به‌طور قطع ثابت کند که فضا اقلیدسی است ـــ تنها می‌تواند ثابت کند که فضا نااقلیدسی است.

می‌توانیم بحث را موشکافانه‌تر انجام دهیم. باید به ماهیت ابزارهایمان پی‌ببریم ـــ آیا طرح ساختن آنها بر اساس مفروضات اقلیدسی ریخته نشده است؟ باید در تعبیری که از «خط» می‌کنیم

۱. اگر اندازه‌گیری مجموعی برابر با 181°، با خطای حداکثر $0{,}01^\circ$، به ما می‌داد، نتیجه می‌گرفتیم که فضا بیضوی است.



آلبرت اینشتین

شک کنیم ــآیا ممکن نیست که پرتوهای نور مسیر منحنی داشته باشند؟ باید تفحص کنیم که آیا فضا، به‌ویژه فضای با ابعاد کیهانی، را نمی‌توان با هندسه‌هایی جز این دو توصیف کرد.

گرایش عملی کنونی به طرح پرسش اخیر است. برطبق عقیده اینشتین، فضا و زمان جدایی ناپذیرند و هندسه فضاـزمان متأثر از ماده است، به‌طوری که پرتوهای نور براثر جاذبه ثقلی اجرام، واقعاً خمیده شده‌اند. دیگر، فضا به‌صورت جعبه تهی نیوتنی تصور نمی‌شود که سنگهایی که درون آن گذاشته می‌شوند تأثیری بر کرانه‌های آن نداشته باشند. مسئله خیلی پیچیده‌تر از آن است که اقلیدس یا لباچفسکی می‌پنداشتند ــهیچ‌یک از هندسه‌های آنان برای تصوری که اکنون از فضا داریم کفایت نمی‌کند. این امر از ارزش تاریخی هندسه نااقلیدسی ما نمی‌کاهد. اینشتین می‌گوید: «من برای این تعبیر هندسه ارزش زیادی قائلم، زیرا اگر با آن آشنا نشده بودم، هرگز قادر به بسط نظریه نسبیت نمی‌شدم.»[1]

اینک پاسخ معروف پوانکاره به این پرسش که کدام هندسه درست است:

> اگر هندسه دانشی تجربی بود نمی‌توانست دانشی دقیق باشد و پیوسته دستخوش تجدیدنظر قرار می‌گرفت. . . بنابراین بنداشتهای هندسی نه شهودهای ترکیبی قبلی هستند و نه حقایق تجربی، بلکه قرارداد هستند. انتخاب ما از میان همه قراردادهای ممکن، به‌وسیله حقایق

۱. ←جورج گاموف (۱۹۵۶)، که می‌گوید چگونه اینشتین با الهام گرفتن از اندیشه‌های گئورگ فریدریش برنهارت ریمان هندسه مناسبی برای نسبیت عام به‌وجود آورد.

تجربی رهبری می‌شود. ولی انتخاب ما آزاد است و فقط به لزوم اجتناب از هرگونه تناقض محدود می‌شود. لذا این اصول هستند که می‌توانند دقیقاً درست باقی بمانند، حتی اگر قوانین تجربی که موجب پذیرفته شدن آنها شده‌اند تقریبی باشند. به‌عبارت دیگر، بنداشتهای هندسه (سخن از بنداشتهای حساب نیست) تنها عبارت‌اند از تعاریف در لباس مبدّل. پس درباره این پرسش که «آیا هندسه اقلیدسی درست است؟» چه باید اندیشید؟ این پرسشی بی‌معنی است، درست مثل اینکه بپرسیم آیا دستگاه متری درست است و اوزان و مقیاسهای قدیم نادرست‌اند؟ آیا مختصات دکارتی درست است و مختصات قطبی نادرست؟...[هیچ هندسه‌ای نمی‌تواند درست‌تر از هندسه دیگر باشد، تنها ممکن است مناسبتر باشد].[1]

ممکن است فکر کنید که هندسه اقلیدسی مناسبترین هندسه است ـــ این هندسه برای مهندسی معمولی است، نه برای نظریه نسبیت. از این گذشته لونه‌بورک مدعی است که فضای مرئی، فضایی که از راه چشم در مغز ما تصویر می‌شود، با هندسه هذلولوی توجیه‌پذیرتر است.[2]

فیلسوفان هنوز در باب فلسفه قراردادگرایی پوانکاره اختلاف‌نظر دارند. یک مکتب که شامل نیوتن، هلمهولتس، راسل، و وایت‌هد است، مدعی است که فضا دارای متریک یا استاندارد اندازه‌گیری ذاتی است. مکتب دیگر که ریمان، پوانکاره، کلیفورد، و اینشتین را دربر می‌گیرد، بر این عقیده است که این متریک از روی قرارداد مشخص می‌شود. بحث در این باب ممکن است بسیار ظریف باشد (← تورتی، ۱۹۷۸، فصل ۴).

ریاضیات از چه سخن می‌گوید؟

بحث پیشین بر این موضوع که هندسه، و به‌طور کلی ریاضیات، از چه سخن می‌گوید پرتویی تازه می‌افکند. هندسه از پرتوهای نور صحبت نمی‌کند، ولی مسیر یک پرتو نور ممکن است تعبیری فیزیکی از اصطلاح هندسی تعریف نشده «خط» باشد. یک وقت برتراند راسل گفته بود که «ریاضیات موضوعی است که در آن نه می‌دانیم از چه صحبت می‌کنیم، و نه می‌دانیم آنچه می‌گوییم درست

---

۱. هـ. پوانکاره (۱۹۵۲)، ص ۵۰؛ همچنین ← موضوع تهیه مقاله ۱۸، انتهای همین فصل.

۲. ← کتاب او به نام Mathematical Analysis of Binocular Vision (آنالیز ریاضی رؤیت با دوربین) و مقاله او در «*Optical Society of America Journal*» اکتبر، ۱۹۵۰، ص ۶۲۹، و نیز مقاله‌هایی که اَ. بلانک، در همان مجله دسامبر ۱۹۵۸، ص ۹۱۱، و مارس ۱۹۶۱، ص ۳۳۵ نوشته است؛ و شرح در ترودو (۱۹۸۷)، صص ۲۵۱ـ۲۵۴.

است». سبب این است که برخی از اصطلاحات اولیه از قبیل «نقطه»، «خط»، و «صفحه» تعریف نشده‌اند و می‌توانیم به‌جای آنها اصطلاحات دیگری بگذاریم بی‌آنکه در درستی نتایج تأثیری داشته باشند. به‌جای اینکه بگوییم «دو نقطه فقط یک خط را مشخص می‌کنند» می‌توانیم بگوییم «دو آلفا فقط یک بتا را مشخص می‌کنند». با وجود تغییری که در اصطلاحات دادیم باز هم اثبات همه قضایای ما معتبر خواهد ماند، زیرا که دلایل درست به شکل و نمودار وابسته نیستند، بلکه فقط بر بنداشتهای وضع‌شده و قواعد منطق بستگی دارند. بنابراین، هندسه تمرینی است کاملاً صوری برای استخراج برخی نتایج از بعضی مقدمات صوری. در ریاضیات احکامی ساخته می‌شوند به‌صورت «هرگاه چنین باشد، آنگاه چنین می‌شود»، و اساساً در آن صحبتی از معنی فرضها یا راست بودن آنها نیست. مفاهیم اولیه (از قبیل «نقطه» و «خط») که در فرضها ظاهر می‌شوند به‌طور ضمنی با این بنداشتها تعریف می‌شوند، قواعدی که انگار به ما می‌گویند چگونه باید بازی کرد.[۱]

برای اینکه تفاوت اساسی دیدگاهها را نشان دهیم نوشته‌های زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم (تورتی، ۱۹۸۷، ص ۲۳۵). گوتلوب فرگه (۱۸۴۸ـ۱۹۲۵)، که پایه‌گذار منطق ریاضی جدید به‌شمار می‌آید، به هیلبرت می‌نویسد:

> من نام بنداشت را به گزاره‌هایی می‌دهم که درست‌اند ولی ثابت نشده‌اند. زیرا شناخت آنها از منبعی که منطقی نیست و نمی‌توانیم آن را شهود فضایی بنامیم، نشأت می‌گیرد. البته درستی بنداشتها ایجاب می‌کند که با هم متناقض نباشند، مطلبی که نیاز به برهان ندارد.

فرگه دید سنتی خود را بیان کرده است. هیلبرت پاسخ می‌دهد:

> از وقتی که من فکر کردن، نوشتن، و صحبت کردن در این موضوع را شروع کرده‌ام، دقیقاً همیشه مخالف آن را گفته‌ام. اگر این بنداشتها که به‌دلخواه وضع شده‌اند با هم متناقض نباشند یا یکی از نتایج آنها تناقضی دربر نداشته باشد، درست هستند و اشیایی را که آنها تعریف می‌کنند وجود دارند. از نظر من معیار درستی و وجود همین است.

هیلبرت می‌دانست که هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی سازگارند. در نتیجه آنها برای او «وجود داشتند» و هر دو برای او «درست» بودند. این کشف که هندسه اقلیدسی را «حقیقت محض» نمی‌پندارد، اثر «آزادی‌بخشی» بر ریاضیدانان داشته است، به‌طوری که آنان خود را آزاد می‌بینند که هر مجموعه‌ای از بنداشتها را که دلشان بخواهد ابداع کنند و بر آنها نتایجی مترتب سازند. در

---

۱. برای تعبیر روشنتر این دیدگاه، که به هیلبرت منسوب است، ← مقاله ک. گ. همپل (۱۹۴۵).

حقیقت این آزادی ممکن است به حساب افزایش عظیمی گذاشته شود که در کلیت ریاضیات جدید پیدا شده است. ژان دیودونه[1] در نوشته‌ای در ۱۹۶۱، درباره کشف هندسه نااقلیدسی توسط گاوس چنین گفته است:

> [این کشف] در تاریخ ریاضیات نقطه عطف بسیار مهمی بود، که اولین مرحله از مفهوم تازه‌ای از رابطه بین جهان واقعی و مفاهیم ریاضی را، که گمان می‌رفت به آن مربوط‌اند، نشان می‌دهد. با کشف گاوس، این دیدگاه ساده‌لوحانه که موجودات ریاضی تنها مثالی، (به‌معنی افلاطونی) از موجودات محسوس هستند دیگر پذیرفتنی نبود، و تدریجاً جای خود را به درک مسائل پیچیده‌تر داد، به‌طوری که امروزه چنین به‌نظر می‌رسد که ریاضیات و واقعیت، تقریباً به‌طور کامل از هم مستقل شده‌اند و تماس آنها اسرارآمیزتر از همیشه شده است.

آرای مختلف درباره مبانی ریاضیات

اشتباه است که گفته شود ریاضیات فقط یک بازی صوری است که با نمادها صورت می‌گیرد و معنی وسیعتری ندارد. ریاضیدانان بنداشتها را به‌دلخواه نمی‌سازند. محتمل به‌نظر نمی‌رسد که کسی هندسه‌ای بسازد که در آن فرض شود دو زاویه قائمه غیرمکمل هیچ‌گاه با هم قابل انطباق نخواهند بود. بنداشتها باید به نتایجی دلپسند و ثمربخش منجر شوند. البته، ممکن است برخی از بنداشتها که دلپسند نمی‌نمایند نتایجی شگفت‌انگیز به بار آورند ــ چنین بود وضع بنداشت هذلولوی، که در حقیقت در سراسر عمر گاوس، بویویی، و لباچفسکی بر آنان پوشیده مانده بود. با وجود این، هرگاه دستگاههای بنداشت نتایج جالب توجه به بار نیاورند، مورد توجه قرار نمی‌گیرند و سرانجام به‌دست فراموشی سپرده می‌شوند.

در مخالفت با این توصیف که ریاضیات را یک «بازی صوری» می‌پندارد، ر. کورانت و ه. رابینز (در کتاب پرمحتوای خود به‌نام ریاضیات چیست؟) بر این نکته تکیه می‌کنند که «در این حکم که ریاضیات چیزی نیست جز دستگاهی از نتایج ناشی از تعاریف و اصولی که باید سازگار باشند و گرنه به دلخواه ریاضیدانان ابداع می‌شوند، خطر بزرگی برای خود حیات علم نهفته است. اگر این توصیف درست بود ریاضیات نمی‌توانست توجه هیچ هوشمندی را به خود جلب کند، بلکه بازی‌ای بود با تعاریف، قواعد، و قیاسهای صوری، بی‌هیچ انگیزه یا هدفی.»

1. J. Dieudonné, “L’Oeuvre Mathématique de C. F. Gauss,” Poulet-Malassis Alençon: L’Imprimerie Alençonnaise, 1961.

هرمان وایل خاطرنشان ساخته است که: «ساخته‌های یک ذهن ریاضی‌وار هم آزادند و هم لازم. هر ریاضیدان احساس می‌کند که در تعریف مفاهیم خودش آزاد است و می‌تواند بنداشتهایش را هرگونه که دلش می‌خواهد اقامه کند. ولی مسئله اینجاست که آیا موفق می‌شود توجه همکاران ریاضیدانش را به ساخته‌های ذهنی خود جلب کند؟ ما نمی‌توانیم جلوی این احساس را بگیریم که برخی بر روی ساختارهای ریاضی که از تجمیع تلاشهای جامعه ریاضیدانان پدید آمده‌اند مُهر بزنند که آن ساختارها دستخوش رویدادهای تاریخی خود نبوده‌اند.»[1]

دستگاههای بنداشتی ثمربخش هم ممکن است در دنیای ریاضیات بحث‌انگیز باشند، مانند بنداشتهایی که جورج کانتور، اِ. تسرملو و دیگران برای مجموعه‌های نامتناهی وضع کرده‌اند. بحث‌وجدل از اینجا به‌وجود می‌آید که برخی از برجسته‌ترین ریاضیدانان (مانند وایل، براور، و ارت بیشاپ در مورد مجموعه‌های نامتناهی) اساساً هیچ‌یک از این بنداشتها را قبول ندارند. اگر بنداشتها احکامی واقعاً صوری و بی‌معنی بودند، چگونه ممکن بود این همه نظرهای مخالف و موافق درباره آنها ابراز شود؟ آیا هرگز کسی درباره قواعد بازی شطرنج چون‌وچرا می‌کند؟ به نظر می‌رسد که دیدگاه صورت‌گرایانه ــ که ریاضیات فقط یک بازی صوری است ــ راه گریزی است برای اجتناب از روبه‌رو شدن با مسئله دشوار فلسفی و روانشناختی ماهیت ابداعات یا کشفیات ریاضی. راستی وقتی ریاضیدانی حکم می‌کند که چیزی وجود دارد چه می‌خواهد بگوید؟ زمانی که فیثاغورسیان کشف کردند که وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را نمی‌توان با همان واحدی که برای اندازه‌گیری ساقها به‌کار می‌رود اندازه گرفت، سعی کردند آن را پوشیده نگاه دارند و چنین طولهایی را «گنگ» نامیده‌اند. امروزه از اعدادی نظیر $\sqrt{۲}$ ناراحت نیستیم. حتی ریاضیدانان خود را با اعداد «موهومی» از قبیل $i = \sqrt{-۱}$ که کاردان در ریاضیات وارد کرده است، وفق داده‌اند.[2]

مهمترین موضع «بنیادگرایی» در فلسفه ریاضی از آن لئوپولد کرونکر است، که فرمانروای دنیای ریاضیات آلمان در اواخر سده نوزدهم بود. این گفته او است که «اعداد صحیح را خدا آفرید ــ و مابقی را آدمی». به‌ویژه او نظریه اعداد ترتیبی و اعداد اصلی ترامتناهی کانتور را بی‌اعتبار اعلام کرده است. بعد از آن هیلبرت با این بیان که «هیچکس را یارای آن نیست که ما را از بهشتی که

1. H.Weyl, "A Half-Century of Mathematics," *American Mathematical Monthly*, 58 (1951): 523-553.

۲. ژاک آدامار درباره کاردان چنین می‌نویسد: «طبعاً هم باید انتظار داشت که کشف اعداد موهومی که به جنون نزدیکتر است تا منطق، و در واقع تمام دانش ریاضی را تحت‌الشعاع خود قرار داده است، به‌دست مردی صورت گیرد که همیشه زندگی بی‌بندوبارش از لحاظ اخلاقی ناپسند بوده و از دوران کودکی از توهمات عجیب خود رنج می‌برده است...» (آدامار، ۱۹۴۵).

کانتور آفریده بیرون براند» به دفاع از او برخاسته است. متعاقباً کرونکر یک واپسگرای کثیف قلمداد شده است که رد اندیشه‌های انقلابی جدید کانتور از سوی او کانتور را به بیمارستان روانی فرستاده (بل، ۱۹۶۱). بی‌تردید این یک افسانه است و مسائل فلسفی مربوط به مشاجرات کرونکر-کانتور هنوز خاتمه نیافته است (فانگ، ۱۹۷۶).

در سده بیستم، نظریه مجموعه‌های کانتور را بنداشتهای تسرملو-فرانکل (Z-F) دقت بخشید و آن را به صورت یک «حقیقت مطلق» در آورد که پایه‌ای برای همه ریاضیات شد. ولی هنوز بگومگوهایی در باب یک بُنداشت، بنداشت انتخاب (AC)، وجود داشت، و عدم قطعیت بر ایده دیگر کانتور که «فرض» نامیده می‌شد —فرض پیوستار (CH)، سایه افکنده بود. اولین شماره فهرست ۲۳ مسئله‌ای معروف هیلبرت در ۱۹۰۰، اثبات یا رد CH بود. چهل سال بعد، کورت گودل مدلی از بنداشتهای دیگر Z-F ایجاد کرد که در آن هم AC درست بود هم CH، که عدم امکان رد آنها را نشان می‌داد. تاریخ زمانی تکرار شد که در ۱۹۶۳ مدلهایی ابداع شدند[1] که در آنها یا AC غلط بود یا CH، یا هر دو. لذا AC و CH به‌صورت بنداشتهایی مستقل از دیگر بنداشتهای Z-F و مستقل از یکدیگر درآمدند. بنابراین یک مجموعه غیرکانتوری معتبر هم به‌وجود آمد، درست مثل هندسه نااقلیدسی که معتبر بود.

در ریاضیات رازی هست که شاید بیش از هر چیز دیگر برای آدمی جالب توجه باشد. اگر ابداعات ریاضی صرفاً محصول تخیلات دلخواه ریاضیدانان باشد، چطور می‌شود که برخی از آنها کاربردهایی فیزیکی پیدا می‌کنند، نظیر کاربردهایی که با آنها می‌توان مدارهای حرکت را آن‌قدر دقیق حساب کرد که آدمی بتواند بر کره ماه فرود آید؟ هنگامی که یونانیان به بسط نظریه بیضیها می‌پرداختند، هرگز تصور نمی‌کردند که این نظریه روزی کاربردی برای «رقابتهای فضایی» پیدا کند.[2]

غرض از طرح این مسائل و دیدگاهها گیج کردن شما نیست. بلکه برای این است که نشان داده شود ریاضیات زنده است، دائماً در حال تغییر است، و ناتمام. وانگهی، بنابر قضیه ماورای ریاضی کورت گودل، چنین مقدر است که ریاضیات تا ابد ناتمام بماند. او ثابت کرده است که همیشه بعضی از احکام معتبر ریاضی هستند که اثبات آنها، حتی به یاری دستگاههای بنداشتهایی که وسعت دامنه آنها به «حساب» هم می‌رسد، میسر نیست (دولونگ، ۱۹۷۰). به‌عبارت دیگر، گودل یک برهان صوری برای عدم‌کفایت براهین صوری تدارک دیده است.

شاید مطالب زیر از نوشته رنه تام واکنشی مناسب نسبت به قضیه ناتمامی گودل به‌شمار آید:

1. P. J. Cohen and R. Hersh, "Non-Cantorian Set Theory," *Scientific American*, 217 (December, 1967).

2. E. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics," *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13 (1960): 1 ff.

کورت گودل

ریاضیدان باید شهامت پای‌بندی به عقاید شخصی خود را داشته باشد. در آن صورت تصدیق خواهد کرد که وجود ساختارهای ریاضی مستقل از ذهن شخصی است که به آنها می‌اندیشد. صورت این وجود، بی‌تردید، با صورت وجود ملموس و مادی جهان خارجی تفاوت دارد، ولی با این‌همه، به نحوی دقیق و عمیق با وجود عینی مرتبط است. زیرا اگر ریاضیات فقط یک بازی بی‌ثمر و محصول تصادفی فعالیتهای مغزی ما باشد، پس پیروزی بی‌چون و چرای آن را در توصیف جهان چگونه می‌توانیم توضیح دهیم؟ ریاضیات نه‌تنها در قوانین خشک و مرموز فیزیک آشکارا دیده می‌شود، بلکه به شکلی نهفته‌تر، اما تردیدناپذیرتر، در توالی نامتناهی و تفنن‌آمیز صورتها در جهان جانداران و بی‌جانان و پیدایش و نابودی تقارنهای آنها نیز تجلی می‌کند. چنین است که فرض افلاطونی مُثُل (در مورد ساختمان عالم) ــ علی‌رغم ظواهرش ــ طبیعی‌ترین و از لحاظ فلسفی اقتصادی‌ترین فرض به‌شمار می‌رود. ولی ریاضیدانان در هر لحظه تنها یک تصور جزئی و ناقص از این عالم مثال دارند... ما باید بار دیگر آن را با تجدید بنایی همیشگی و پیوسته در وجود خود بیافرینیم... با این اعتقاد به‌وجود یک جهان مثالی، ریاضیدان بیش از حد نگران حدود روشهای صوری نخواهد بود؛ او خواهد توانست مسئله ثبات را به فراموشی بسپارد، زیرا عالم مُثُل از امکانات عملی ما بسیار فراتر است، و نسبت غائی ایمان ما به‌درستی یک قضیه، در شهود ما جای دارد

ــبراساس ریشه واژه‌ای که مدتهاست فراموش‌شده، قضیه نیز چیزی جز آنچه رؤیت می‌شود نیست.[۱]

آشفتگی

در نخستین چاپ این کتاب، این فصل را با گفته الهام‌بخش رنه تام، (بنیانگذار «نظریه فاجعه») به پایان رساندم. پرس‌وجوی بیشتر در این مسائل، مرا به یک نتیجه تأسف‌انگیزتری رسانید، و آن اینکه در حال حاضر بیان روشن و قابل درکی از چه بود احکام ریاضیات محض وجود ندارد. فلسفه ریاضیات دچار آشفتگی شده است!

ادعای من دایر بر اینکه دیدگاه صورت‌گرا همانا طفره رفتن از مسئله است، با تأیید روشنگر ژان دیودونه در زیر ثابت شده است.[۲]

> در اساس، ما به واقعیت ریاضی معتقدیم، ولی البته، هنگامی که فلاسفه با تمسک به پارادوکس خود، ما را مورد حمله قرار می‌دهند، شتابان خود را در پس صورت‌گرایی پنهان می‌کنیم و می‌گوییم «ریاضیات فقط ترکیبی از نمادهای بی‌معنی است»، و آن وقت فصلهای ۱ و ۲ نظریه مجموعه‌ها را پیش می‌کشیم. سرانجام آنها ما را به حال خود می‌گذارند و ما با آن احساسی که هر ریاضیدانی دارد و می‌اندیشد که با یک چیز واقعی سروکار دارد، به ریاضیات خود بازمی‌گردیم، همان کاری را که همواره کرده‌ایم. این نحوه تفکر احتمالاً فریبی بیش نیست ولی شخص را کاملاً سبک می‌کند. این است طرز تلقی بورباکی از مبانی ریاضیات.

در مقاله تازه‌ای که روبن هرش[۳] نوشته، قویاً موضع فلسفی کار ریاضیدانی نشان داده می‌شود که «در ایام هفته طرفدار فلسفه افلاطونی است و در روزهای یکشنبه پیرو صورت‌گرایی». هرش بر این عقیده است که تنش ناشی از وجود دیدگاههای متضاد در ماهیت کار، باید بر اعتماد به نفس شخصی که می‌بایست بیش از همه از تناقض نفرت داشته باشد، اثر گذارد.

1. R. Thom, "Modern Mathematics: An Educational and Philosophic Error?" *American Scientist*, November, 1971, p. 695 ff. The translation here is my own from the original (in *L'Age de Science*, III (3): 225).

2. "The work of Nicholas Bourbaki," *Amer. Math. Monthly*, 77 (1970): 134-145.

3. "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics," *Advances in Math.*, 31 (1979): 31-50.

دیودونه می‌پذیرد که دید افلاطونی محتملاً یک توهم است. در یک مقاله بسیار جالب، گابریل اشتولتسنبرگ[1] چنین استدلال می‌کند که توهم عبارت است از فریفته شدن بر اثر زبان کنونی اشیا و ویژگیهاشان، زبانی که به‌ظاهر ــ ولی فقط به‌ظاهر ــ دارای معنی است. عمل روانشناختی پذیرش این ظاهر، مفهومی از «واقعیتی» آنچنان قوی پدید می‌آورد، که بسیار دشوار است شخص خود را از آن کنار کشد و درباره آن تردید کند.

ما قبلاً نمونه‌هایی از این‌گونه توهمات را دیده‌ایم. اگر فرض ما این است که نقاط و خطوط صفحه «اشیای حقیقی» هستند، در این صورت یا در اصل اقلیدس صدق می‌کنند یا نمی‌کنند (با اعتقاد به اینکه هندسه اقلیدسی یا «درست» است یا «نادرست»). به‌گونه‌ای مشابه، هرگاه مجموعه‌ها «اشیای حقیقی» باشند، آنگاه یا در فرض پیوستار کانتور صدق می‌کنند یا نمی‌کنند (گودل معتقد بود که صدق نمی‌کنند).

توهم اساسی، بنابر گفته اشتولتسنبرگ (و پیش از او، براور)، این عقیده است که یک حکم ریاضی می‌تواند «درست» باشد بی‌آنکه کسی به شناخت آن قادر باشد. قدرت این عقیده آنچنان است که تنها معدودی از ریاضیدانان پیرو «ساختارگرایی» خواسته‌اند از آن دست بکشند. آنان بر این عقیده‌اند که «$\mathscr{S}$ درست است» علامتی است برای بیان حالتی از دانستن، که شخص با استدلال بدان رسیده است. اشتولتسنبرگ (۱۹۷۸) (در همانجا، ص ۲۶۵) ادعا می‌کند که:

> آنچه را که آدم در نتیجه استدلال «در می‌یابد» یا «کشف می‌کند» این است که یک ساختار (که در جریان استدلال ساخته و پرداخته می‌شود) صورتی را آشکار می‌سازد؛ صورتی از آن نوع که، بنابر قراردادهای استعمال زبان ریاضی که تثبیت شده‌اند، به هر کسی که آن را مشاهده می‌کند حق می‌دهد بگوید «$\mathscr{S}$ درست است». ولی «$\mathscr{S}$ درست است» فقط چیزی است که شخص می‌گوید، نه چیزی که «درمی‌یابد»؛ خود این عبارت، فقط یک «برچسب» برای چیزی است که شخص در نتیجه و پایان برهان درمی‌یابد؛ و این چیزی است که آن را فقط با ساختن یک برهان می‌توان یافت ــ نه بدین علت که نیازمندیم از برهان به‌عنوان «نردبانی» برای رسانیدن خود به موضعی برای دریافت آن استفاده کنیم، بلکه به این دلیل که آنچه را که شخص درمی‌یابد «درون» ساختاری است که با عمل «ساختن برهان» به‌وجود آمده است.

1. "Can an Inquiry into the Foundations of Mathematics Tell Us Anything Interesting about Mind?" in *Psychology and Biology of Language and Thought*, Essays in Honor of Eric Lenneberg, G. Miller and Elizabeth Lenneberg, eds., New York: Academic Press (1978): 221-269.

یک نتیجه جالب این وضعیت این است که «کسی که در پی دانستن حکم ریاضی است» به درون فلسفه ریاضیات کشیده می‌شود (همان‌گونه که «ناظر» براثر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به درون فلسفه فیزیک راه‌یافته است).

اگر آشفتگی فلسفی واقعاً نتیجه یک توهم زبانی باشد، در این صورت بینشهای عمیقی برای ایجاد یک دستگاه زبان تازه ضروری است. قاعدتاً این دستگاه تنها یک تجدید صورتبندی از کاربرد جاری آن نخواهد بود (اگر چنین باشد ارزش زحمتش را ندارد)، بلکه ابزاری خواهد بود برای حصول به حد بالاتری از ادراک.

از سوی دیگر، «توهم» افلاطونی ارزش زیاد خود را از لحاظ تجربی نشان داده است (مثلاً، گودل دیدگاه افلاطونی را در دریافتهای خود پذیرفته است). ممکن است روزی توجیه روشنی برای تجربه‌های افلاطونی پیدا شود (نظیر آنچه در سده بیستم، منطقی‌دان ابراهام رابینسون برای بی‌نهایت کوچکهای «وهمی» پیدا کرد که پایه‌گذاران حسابان در سده هفدهم از آن استفاده کرده بودند). علم فیزیک حتی در بدترین آشفتگی در مبانی فلسفی‌اش به پیشرفت خود ادامه داده است. لذا، به‌اصطلاح، «ریاضی‌کاران» از تداوم یافتن مسئله آزاردهنده نادیده گرفته شدن معنای قضایای خود نگرانی نخواهند داشت.

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) از راه آزمایش فیزیکی نمی‌توانیم تحقیق کنیم که هندسه هذلولوی درست است یا نیست، زیرا موضوع هندسه هذلولوی بحث در موجودات طبیعی نیست.

(۲) هرگاه مفاهیم تعریف‌نشده هندسه را به‌طور فیزیکی تعبیر کنیم، یعنی، مثلاً «خط» را «مسیر یک پرتو نور در فضای تهی» تعبیر کنیم، آنگاه جا دارد پرسیده شود که آیا این تعبیر یک مدل از هندسه اقلیدسی هست یا نیست. ولی به‌علت خطاهای تجربی، آزمایشهای فیزیکی هرگز نمی‌توانند با قاطعیت ثابت کنند که آن یک مدل است.

(۳) هندسه هذلولوی سازگار است اگر و تنها اگر هندسه اقلیدسی سازگار باشد.

(۴) پوانکاره بر این عقیده بود که این پرسش که کدام هندسه «درست» است بی‌معنی است، و تنها پرسش با معنی این است که کدام‌یک از هندسه‌ها برای فیزیک «مناسبتر» است.

(۵) مناسبترین هندسه برای فیزیک نجومی نه هندسه اقلیدسی است نه هندسه هذلولوی، بلکه هندسه پیچیده‌تر فضا-زمان است که اینشتین با استفاده از ایده‌های ریمان آن را بسط داده و کامل کرده است.

(۶) مدلهای کلاین و پوانکاره با اینکه به ظاهر متفاوت به‌نظر می‌آیند، ولی در واقع باهم یکریخت‌اند.

(۷) با اینکه هندسه هذلولوی به همان سازگاری هندسه اقلیدسی است، کاربردی در هیچ‌یک از شاخه‌های ریاضیات یا علوم دیگر ندارد.

چند موضوع برای تهیه مقاله

۱. درباره این گفته آلبرت اینشتین نظر بدهید: «تا آنجا که قضایای ریاضی گویای واقعیت هستند، محرز نیستند، و تا آنجا که محرز هستند، گویای واقعیت نیستند.» (برای بسط این موضوع ←همپل، ۱۹۴۵.)

۲. با استفاده از کتابهای گرون‌باوم و پوانکاره و نیگل مقاله کوتاهی از مباحثه‌هایی که در زمینه فلسفه سنت‌گرایی به عمل آمده است، تهیه کنید.

۳. با مراجعه به لونه‌بورک و بلانک (پانوشت دوم صفحه ۳۰۸)، مقاله کوتاهی درباره کاربرد هندسه هذلولوی در رؤیت با دوربین تهیه کنید.

۴. می‌توان گفت که کشف هندسه نااقلیدسی به بسط تازه و همه جانبه منطق ریاضی منجر شد. با استفاده از کتاب دولونگ (۱۹۷۰)، فصلهای ۱ و ۲، مطلبی درباره این بیان تهیه کنید.

۵. ژاک آدامار می‌گوید: کاربرد عملی وقتی پیدا می‌شود که در جست‌وجوی آن نباشیم، و می‌توان گفت که پیشرفت تمدن تماماً بر این اصل متکی است. به‌ندرت پیش می‌آید که پژوهشهای مهم ریاضی مستقیماً به‌منظور کاربرد عملی معینی صورت گیرند: الهام‌بخش در این پژوهشها اشتیاق است؛ اشتیاق به دانستن و فهمیدن، که انگیزه کلی هر کار علمی است.

داویت هیلبرت در همین زمینه عقیده دارد که با وجود اهمیت کاربردهای ریاضیات، این کاربردها نباید ملاک ارزش قرار داده شوند، و یاکوبی ریاضیدان، می‌گوید که: «تنها هدف هر دانشی اعتلای روح آدمی است».

با وجود این، لباچفسکی معتقد بود که «هیچ شاخه‌ای از ریاضیات، هر اندازه هم که مجرد باشد، روزی نیست که برای پدیده‌های جهان واقعی به‌کار نرود.»

۶. «سؤال و جواب سقراطی در زمینه ریاضیات» را در کتاب رنیبی، (۱۹۶۷)، بخوانید و درباره مسائلی از آن که در زیر آمده بحث کنید:

(الف) «آیا مرموز نیست که آدمی بتواند درباره چیزهایی که وجود ندارند بیشتر آگاهی پیدا کند تا درباره چیزهایی که وجود دارند؟»

(ب) «چه توضیحی برای این امر دارید، چنان‌که اغلب پیش می‌آید، ریاضیدانانی که بسیار دور از یکدیگرند و هیچ‌گونه تماسی باهم ندارند، مستقل از یکدیگر حقایق واحد را کشف می‌کنند؟»

۷. شرحی بر نوشته زیر که به پولانی[1] منسوب است بنویسید:

اکنون می‌توانیم به پارادوکس شاخه‌ای از ریاضیات توجه کنیم که بر پایه دستگاهی از بنداشتها استوار شده است که به‌خودی خود بدیهی تلقی نمی‌شوند و در واقع معلوم نیست که دوبه‌دو با هم سازگار باشند. به‌کار بردن حد اعلای هوش و دقت برای اثبات قضایای منطق یا ریاضیات، در حالی که مقدمات این استنتاجها خوش‌بینانه پذیرفته شده‌اند، بی‌آنکه اساسی برای این پذیرفتن داده شده باشد... روی هم‌رفته ممکن است مضحک و عبث جلوه کند. آدم را به یاد دلقکی می‌اندازد که با وقار و تأنی دو ستون را در وسط میدان نمایش کار می‌گذارد، دری را که محکم بسته است بین آنها نصب می‌کند، دسته کلید بزرگی را از جیب درمی‌آورد و کلید آن در را به‌زحمت زیاد پیدا و آن را باز می‌کند، سپس از در داخل می‌شود و آن را با دقت دوباره می‌بندد ــ در حالی که میدان دو طرف پایه‌ها باز است و او می‌تواند دور بزند و به آن طرف برود بی‌آنکه به مانعی برخورد کند.

۸. شرحی درباره مطالب زیر بنویسید:

همان‌گونه که ذوق ادبی یا هنری وجود دارد، ذوق علمی هم وجود دارد... [این] حس زیبایی می‌تواند درباره ثمربخش بودن نتیجه آتی ــ که اگر سخن دقیق بگوییم، اکثر اوقات قبلاً چیزی از آن نمی‌دانیم ــ به ما کمک کند و من جز آن چیز دیگری نمی‌بینم که به ما امکان پیش‌بینی دهد... بی‌آنکه چیز دیگری بدانیم حس می‌کنیم که این راه تحقیق ارزش دنبال کردن را دارد... هر کسی آزاد است که آن را حس زیبایی بنامد یا ننامد. بی‌شک روش فکری هندسه‌دانان یونانی هنگامی که به پژوهش در بیضی پرداختند، از این‌گونه بوده است، زیرا که هیچ راه قابل‌تصور دیگری وجود نداشته است.[2]

ما خیلی به ریاضیات می‌پردازیم و احکام آن را به دلیل زیبایی معنویشان تأیید می‌کنیم... زیرا اگر این شور و هیجان فرونشیند، ما دیگر ریاضیات را نمی‌فهمیم، مفاهیم آن از هم می‌پاشند و برهانها استحکام خود را از دست می‌دهند، ریاضیات بی‌معنی می‌شود و در انبوهی از مکررگویی‌های پوچ فرو می‌رود...[3]

---

۱. Michael Polanyi در رساله‌اش به نام معرفت شخصی، ۱۹۶۴، فصل ۶، بخشهای ۹ـ۱۱.

۲. از کتاب ژاک آدامار به‌نام: روانشناسی ابداع در پهنه ریاضیات.

۳. از پولانی در معرفت شخصی.

همه معتقدیم که ریاضیات هنر است. مؤلف یک کتاب ریاضی، یا معلم یک کلاس درس سعی می‌کند زیبایی ریاضیات را به خوانندگان و شنوندگان خود القا کند، و در این تلاش همیشه باید ناموفق باشد. تردیدی نیست که ریاضیات علمی است منطقی؛ هر قضیه از قضایایی که قبل از آن به‌دست آمده به‌دست می‌آید. در عین حال، تمامی آن که قطعه‌ای از هنر است، خطی نیست؛ بدتر از همه، دریافت آن باید آنی باشد.[۱]

۹. شرحی بر گفته‌های زیر بنویسید:[۲]

> برای من، و فکر می‌کنم برای بیشتر ریاضیدانان، واقعیت دیگری وجود دارد که من آن را «واقعیت ریاضی» می‌نامم. مابین ریاضیدانان یا فلاسفه هیچ‌گونه بحثی درباره ماهیت واقعیت ریاضی نیست... کسی که بتواند توضیح قانع کننده‌ای از واقعیت ریاضی بدهد به حل بسیاری از دشوارترین مسائل ماورای طبیعی دست خواهد یافت... من عقیده دارم که واقعیت ریاضی بیرون از وجود ماست، و وظیفه ما کشف یا مشاهده آن است، و قضایایی را که ثابت می‌کنیم و با آب و تاب به‌عنوان «ابداعات» خود درباره آنها داد سخن می‌دهیم، اساساً حاشیه‌ای بر مشاهدات ما هستند. بسیاری از فیلسوفان مشهور جهان، از افلاطون به این طرف، به‌صورتی چنین نظری داشته‌اند...

هاینریش هرتز کاشف امواج رادیویی می‌گوید:

> آدمی نمی‌تواند از این احساس بگریزد که: فرمولهای ریاضی وجودی مستقل دارند، بینشی خاص خود دارند، عاقلتر از شما و حتی عاقلتر از کاشفین خود هستند، و ما بیشتر از آنچه در اصل در درون آنها نهاده شده است از آنها چیز دریافت می‌کنیم.

۱۰. شرحی بر نکات زیر از کورت گودل بنویسید:[۳]

> من دلیلی نمی‌بینم که چرا باید به این‌گونه ادراک، یعنی به شهود ریاضی، کمتر از ادراک حسی عقیده داشته باشیم، آن شهودی که ما را وامی‌دارد تا نظریه‌های طبیعی را بنا کنیم و

1. Emil Artin, "Review of *Algèbre* by N. Bourbaki," *Bulletin American Mathematical Society*, 59 (1953): 474.

۲. از کتاب «عذر تقصیر یک ریاضیدان»، ۱۹۴۰، اثر گ. ه. هاردی.

3. K. Gödel, "What Is Cantor's Continuum Problem?" in Benacerraf and Putnam's *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed. (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964), p. 271.

انتظار داشته باشیم که ادراک حسی آتی با آنها سازگاری نشان دهند، و به‌علاوه باور داشته باشیم که سؤالی که اکنون نمی‌توانیم به آن پاسخ دهیم، معنایی دارد و ممکن است در آینده بتوانیم پاسخی برای آن بیابیم. مشکل‌آفرینی پارادوکسهای نظریه مجموعه‌ها برای ریاضیات به مراتب کمتر از مشکل‌آفرینی فریب حواس در جهان طبیعی نیست. . .مسلماً ریاضیات «مفروض» با آن عناصر مجردی که محتوای اندیشه‌های تجربی ما را تشکیل می‌دهند ارتباط نزدیکی دارد. ولی به هیچ‌وجه نتیجه نمی‌شود که مفروضات از این نوع دوم (شهودهای ریاضی)، چنان‌که کانت مدعی است، به سبب آنکه نمی‌توانند به‌صورت بعضی اعمال خاص توسط حواس ما تداعی شوند، چیزهای ذهنی محض باشند، بلکه ممکن است آنها هم معرف جنبه‌ای از واقعیت عینی باشند. اما چون در نقطه مقابل احساسات ما قرارگرفته‌اند، حضورشان در وجود ما می‌تواند به‌علت نوع دیگری از وابستگی بین ما و واقعیت باشد.

در قطعه بالا، گودل عمدتاً از شهود نظریه مجموعه‌ها صحبت می‌کند. ولی تا آنجا که به شهود هندسی مربوط می‌شود، گودل عقیده دارد که باید عبارات زیر افزوده شوند:

اگر دقیق بگوییم شهود هندسی، شهود ریاضی نیست، بلکه شهود طبیعی پیش از تجربه است. شهود فضای اقلیدسی ما، در جنبه ریاضی محض خود، کاملاً صحیح است، یعنی به‌درستی معرف ساختاری است که در عالم اشیای ریاضی وجود دارد؛ حتی از لحاظ طبیعی هم درست است، ولی «در مقیاس کوچک».[۱]

۱۱. شرحی بر نقل قول زیر از رولف ر. لوهریش بنویسید:

برقراری ارتباط با یک دستگاه تازه ریاضی یا بازی، مانع خاصی پیش‌رو دارد. هر ریاضیدانی یک بازی مرجح دارد. اگر یک بازی تازه با بازیهایی که او به آنها عادت کرده است زیاد تفاوت داشته باشد، ممکن است که علاقه او را به خود جلب نکند. . .

خیلی بعید است که یک دستگاه ریاضی از اول به‌صورت بنداشتی معرفی شود. بنداشتی‌سازی موفق ثمره تمرین فکری است. هنگامی که دستگاهی بنداشتی شد، امکان اینکه فعالیت ریاضی همچون یک بازی صورت گیرد وجود پیدا می‌کند، یعنی، به‌صورت یا نمادها با اتکا به دستگاههای قاعده‌دار که به‌صورت ابداعاتی تداعی می‌شوند. ولی این امر دلیل بر آن نیست که ریاضیدانی که دستگاه را اختراع، یا احیاناً کشف کرده قصد بازی داشته است. . . رابرتز و من ایمان راسخ داریم که چیزی هست که بتوان بر آن نام جهان ریاضی نهاد. ما معتقدیم که با این اسبابهای پیچیده و داده‌های تجربی که با تمرین فکری عرضه می‌شوند

۱. نامه خصوصی به مؤلف، اکتبر ۱۹۷۳.

می‌توان ارزش هستی‌شناختی تعارضاتی را که به این جهان تعلق دارند در نهایت درجه دقت تعیین کرد (این‌گونه تعارضات را باید [به‌عنوان] ارزشهای علامتی از علامتها انگاشت، و این علامتها دستگاههای نمادی‌ای هستند که یا معلوم‌اند و یا باید به‌اتکای دستگاههای جدید مفاهیمی که دامنه آنها پیوسته در حال گسترش است اختراع شوند)...اگر این گفته راست باشد، هر ریاضیدان در واقع ممکن است خود را یکی از کاشفان جهان ریاضی بپندارد و هر دستگاه جدید ریاضی به مثابه آغازگر جهانی باشد که هر جهان دیگری را در بر می‌گیرد.

۱۲. با استفاده از منابع کتابخانه آموزشگاه خود، مقاله کوتاهی درباره بسط هندسه در یونان باستان تهیه کنید. ممکن است، به‌ویژه، ریاضیات زنانهٔ «هوپاتیا[۱]» مورد علاقه شما واقع شود.

۱۳. شرحی بر نکات زیر درباره نقش واقعی منطق در ریاضیات بنویسید:

گرچه منطق ضامن سلامت کار یک ریاضیدان است، ولی منبع تغذیه او نیست. نان روزانه او را مسائل مهمی که موجب پیشرفت او می‌شوند تأمین می‌کنند. ما آموخته‌ایم که منشأ دانش خود را تماماً منبع واحدی بدانیم که از چند علامت و چند قاعده برای استفاده از آن علامتها درست شده است. این دژی است که نمی‌توانیم بدون خطر قحطی خود را در آن محصور سازیم. ولی در صورت تردید یا احساس خطر از خارج، این آزادی را داریم که خود را منزوی کنیم.[۲]

همه فیزیک‌دانان و بسیاری از ریاضیدانان به‌نام، با دیده خواری به برهان می‌نگرند.[۳]

با این همه در دانش، اکتشاف از برهان استنتاجی خشک مهمتر است. بدون اکتشاف، چیزی وجود ندارد تا استنتاج بر آن بتازد و آن را به نظم درآورد.[۴]

۱۴. گزارشی تهیه کنید درباره نقد ایمره لاکاتوش از فلسفه صورتگرایی ریاضیات و اندیشه‌های او در باب چگونگی کشف ریاضیات، بدان‌گونه که در کتابش[۵]، آمده است:

---

1. Hypatia

2. A. Weil, "the Future of Mathematics," *American Mathematical Monthly*, 57 (1950); 295-306.

3. G. H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge University Press, New York, 1940, p.15.

4. E. T. Bell, *Development of Mathematics*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1945, p. 83.

5. *Proofs and Refutation: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1976.

اقلیدس شیطانی بوده است نابغه، به‌ویژه در تاریخ ریاضیات و آموزش ریاضیات چه در سطوح مقدماتی و چه در سطوح خلاقیت. . . دو فعالیت مغزی حدس زدن و ثابت کردن در سنت اقلیدسی دقیقاً از هم جدا شده‌اند. . . این کمینه فکری فلسفی، که روش اقلیدسی مصون از خطاست، مدلهای سنتی آمر در ریاضیات را تغذیه می‌کرده و مانع نشر و گفتگو از حدسیات بوده، و بالا گرفتن نقد ریاضی را غیرممکن می‌ساخته است. . . کشف هندسه نااقلیدسی (توسط لباچفسکی در ۱۸۲۹، و بویویی در ۱۸۳۱) تصور مصونیت از خطا را سخت فروریخته است. . . در منطق کشف علمی، منطقی که به نحوی خطاناپذیر به نتایجی منجر شود، هیچ مصونیت از خطا وجود ندارد. یک منطق کشف خطاپذیر وجود دارد که همانا منطق پیشرفت علمی است.

۱۵. با استفاده از کتاب موییز، (۱۹۹۰)، فصل ۲۴، مقاله مشروحی درباره نظریه مساحت در هندسه هذلولوی تهیه کنید.

۱۶. گزارشی در باب رساله دکترای برتراند راسل[1] تهیه کنید. نشان دهید چگونه راسل با توانایی زیاد نظریه‌های کانت و فلاسفه دیگر را درباره هندسه رد می‌کند و سپس تصور نادرست خود را از فضا (که بعدها اینشتین رد کرده است) بیان می‌دارد. (←نقد درباره تورتی ۱۹۷۸، فصل ۴)

۱۷. گزارشی در باب فصل ۳ از کتاب عالی و پرمحتوای روبرتو تورتی،[2] تهیه کنید. این فصل درباره مبانی هندسه است. در زیر نقل قولی از او را می‌آوریم:

این واقعیت که این نیم‌دایره‌ها در [مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره] در همه نتایج بنداشتهای هیلبرت (برای هندسه نتاری) رفتاری دقیقاً مانند خطهای اقلیدسی دارند، حاکی از یک تشابه عمیق بین آنهاست، که ممکن است موجب یکه خوردن تنها آنانی شود که اطلاعات چندانی از ریاضیات ندارند. عقیده به اینکه خط به‌معنی چیزی کاملاً متفاوت در هندسه بویویی-لباچفسکی و هندسه اقلیدسی است، منطقی‌تر از این نیست که بگوییم قلب، در کالبدشناسی و فیزیولوژی فیلها و قورباغه‌ها، معنایی کاملاً متفاوت دارد.

۱۸. پوانکاره برای اینکه این سخن خود را که «بی‌معنی است بپرسیم کدام هندسه درست است» بهتر نشان دهد، «جهانی» مانند U آفریده است که در فضای اقلیدسی، درون یک کره S به شعاع R را اشغال کرده است، که قوانین فیزیکی زیر در آن صدق می‌کنند:

1. *An Essay on the Foundation of Geometry*, Dover reprint, 1956.

2. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré* (1978).

(الف) در هر نقطه P در درون S، دمای مطلق T مستقیماً با $R^۲ - r^۲$ متناسب است که در آن r فاصله P از مرکز S است.

(ب) طول و عرض و ارتفاع هر شیء با دمای مطلق آن مستقیماً تغییر می‌کند.

(ج) همه اشیای U دمای مکانهای خود را آناً اختیار می‌کنند.

(د) نور در امتداد کوتاهترین مسیر از یک نقطه به نقطه دیگر حرکت می‌کند.

نشان دهید که یک فرد ساکن U، وقتی با یک دماسنج یا یک «متر» اندازه‌گیری می‌کند، نمی‌تواند تغییر دما و اندازه خود را دقیقاً تعیین کند و هرگز نمی‌تواند به مرز جهان خود، S، برسد و چنین به نظرش می‌آید که فاصله این مرز از او بی‌اندازه زیاد است. پوانکاره نشان داده است که کوتاهترین راه بین دو نقطه A و B در U کوتاهترین کمان از دایره گذرنده از A و B است که S را به زاویه قائمه می‌برد. بنابراین اگر ناظری «پاره‌خط راست» را در جهان خود به‌صورت مسیر یک پرتو نور تعبیر کند، به این نتیجه خواهد رسید که هندسه «درست» جهان او هندسه هذلولوی است. به‌عبارت دیگر، این ناحیه‌ای از فضای اقلیدسی است که به علت قوانین فیزیکی متفاوت و غیرقابل کشفش به نظر ساکنانش نااقلیدسی جلوه می‌کند. با مراجعه به اثر پوانکاره (۱۹۵۲)، تورتی (۱۹۷۸)، و گرون باوم (۱۹۶۸) شرحی در این باب تهیه کنید.

۱۹. مقاله‌ای در باب موضوعی دلخواه بنویسید.

۹

تبدیلهای هندسی

تمام عمرم را صرف برنامه کلاین در هندسه دیفرانسیل کردم.
و. بلاشکه

برنامه‌ای اِرلانگر کلاین

فلیکس کلاین در ۱۸۷۲، یک سال پس از انتشار اثر قاطع و کوبنده‌اش درباره «مدلهای تصویری برای هندسه‌های نااقلیدسی»، (در ۲۳ سالگی) به استادی دانشگاه ارلانگن منصوب شد. در خطابه افتتاحیه‌اش برای عضویت در هیئت علمی دانشگاه، اصل وحدت‌بخش تازه‌ای را برای رده‌بندی هندسه‌های گوناگونی که به‌سرعت شکوفا می‌شدند و نیز روابط بین آنها مطرح کرد. این خطابه که برنامه ارلانگر[1] نام گرفته، تأثیر عظیمی بر تمامی ریاضیات تا به امروز داشته است.[2]

کلاین گروه همه خودریختی‌های یک ساختار ریاضی را راهگشای این امر می‌داند. ما در فصل ۲، مفهوم یکریختی از مدلی بر روی مدل دیگر را تعریف کردیم. در فصل ۷، از یکریختی خاصی

1. *Erlanger Programme*

۲. برای مطالعه ترجمه انگلیسی سخنرانی کلاین،← خبرنامه جامعه ریاضی نیویورک، شماره ۲، ۱۸۹۳، ۲۱۵ـ۲۴۹.

برای مرتبط ساختن مدلهای صفحه هذلولوی پوانکاره و کلاین به یکدیگر استفاده نمودیم. اینک هر یکریختی که مدلی را برروی خود آن مدل بنگارد، خودریختی آن مدل می‌نامیم. بدین‌ترتیب خودریختی، یک نگاشت یک‌به‌یک (تبدیل) از هر مجموعه مبنا از اشیای واقع در مدل برروی خودش است، که روابط اساسی بین آن اشیا را محفوظ نگاه می‌دارد.

اهمیت خودریختی‌ها نخستین بار در ارتباط با مسئله حل یک معادله جبری به‌وسیله رادیکالها شناخته شد. اواریست گالوا (۱۸۱۱ـ۱۸۳۲) نشان داد که حل یک معادله به‌وسیله رادیکالها فقط و فقط زمانی ممکن است که گروه خودریختی‌های میدان توسیعی حاصل از ریشه‌های معادله، گروهی حل‌پذیر باشد. این امر کشف خاص آبل را ایجاب می‌کرد که می‌گفت معادله کلی درجه ۵ را نمی‌توان به وسیله رادیکالها حل کرد. بعدها کلاین رابطه‌ای را بین گروه دورانهای یک دوازده وجهی و ریشه‌های معادله درجه ۵ کشف کرد که دلیل حل‌پذیری معادله اخیر را به وسیله توابع بیضوی نشان می‌داد.

اینک مثالی برای ساده‌ترین نوع خودریختی هندسی.

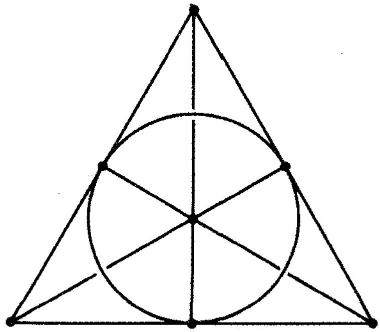
مثال ۱. مدلهای هندسه وقوع (فصل ۲) را درنظر می‌گیریم. مجموعه‌های مبنای اشیا، مجموعه‌های نقاط و خطوط‌اند، و تنها رابطه اساسی، وقوع یک نقطه و خط است. بنابراین یک خودریختی T هر نقطه P و هر خط l را بر یک نقطه $\mathrm{P'}$ و یک خط l' می‌نگارد به‌طوری که P بر l قرار دارد اگر و تنها اگر $\mathrm{P'}$ بر l' قرار داشته باشد. بنابر بنداشت وـ۱، هر خط با دو نقطه واقع بر آن مشخص می‌شود، لذا وقتی اثر T بر نقاط معلوم باشد، T به مثابه نگاشتی از خطوط معین است، یعنی

$$T(\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}) = \overleftrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$$

چون T وقوع را حفظ می‌کند و نگاشتی یک‌به‌یک بر روی مجموعه خطوط است، این ویژگی را دارد که سه نقطه O، P، و Q هم‌خط‌اند اگر و تنها اگر تصاویر آنها، یعنی $\mathrm{O'}$، $\mathrm{P'}$، و $\mathrm{Q'}$، هم‌خط باشند. از این رو، یک خودریختی از یک مدل هندسه وقوع را هم‌خطی می‌نامند.

مثلاً در مدل سه‌نقطه‌ای، هر جایگشتی از سه نقطه ناهم‌خط یک هم‌خطی است. ولی، برای صفحه تصویری ۷ نقطه‌ای (شکل ۱.۹)، می‌توانید نشان دهید که از تعداد ۵۰۴۰ $= 7!$ جایگشت این نقاط، ۱۶۸ جایگشت هم‌خطی‌اند (تمرین ۱).

نکته قابل توجه اینکه گذشته از آنکه یک خودریختی روابط اساسی را حفظ می‌کند، و همه روابطی را هم که می‌توان از روی آنها تعریف کرد حفظ می‌نماید. مثلاً یک هم‌خطی از یک صفحه وقوع، توازی را حفظ می‌کند ($l||m \Rightarrow l'||m'$).



شکل ۱.۹

گروه

تبدیلهای یک مجموعه روی خودش می‌توانند در هم ضرب شوند، بدین‌ترتیب که ابتدا یک تبدیل T را اعمال می‌کنیم و سپس تبدیل دیگر S را. از این‌رو، تبدیل مرکب ST با معادله

$$ST(x) = S(T(x)) \tag{۱}$$

به‌ازای جمیع مقادیر x در مجموعه تعریف می‌شود.

اینکه با این تعریف ضرب برای دو تبدیل، می‌توان گفت که $\mathscr{G}$، مجموعه همه خودریختی‌های یک ساختار، خود ساختار گروهی دارد، بدین معنی که دارای ویژگیهای زیر است:

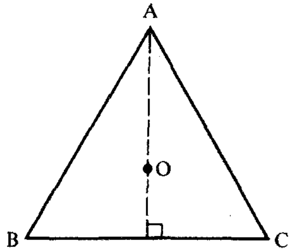
۱. $S, T \in \mathscr{G} \Rightarrow ST \in \mathscr{G}$.

۲. $I \in \mathscr{G}$ (که I تبدیل همانی است که همه اشیا را ثابت نگاه می‌دارد؛ تبدیل همانی به‌ازای جمیع مقادیر $T \in \mathscr{G}$ در رابطه $IT = T = TI$ صدق می‌کند).

۳. $T \in \mathscr{G} \Rightarrow T^{-۱} \in \mathscr{G}$ (که $T^{-۱}$، معکوس T، با معادله‌های $TT^{-۱} = I = T^{-۱}T$ مشخص می شود).

۴. به‌ازای جمیع مقادیر $S, T, U \in \mathscr{G}$، داریم $S(TU) = (ST)U$ (این قانون شرکت‌پذیری نتیجه مستقیم معادله (۱) ضرب است).

برای نمایش این ویژگیها، دورانهای حول یک نقطه O را در نظر می‌گیریم که بعداً به‌طور دقیق تعریف خواهیم کرد، ولی فعلاً می‌توانیم آن را به‌عنوان تبدیلی تصورکنیم که تمامی صفحه را به‌اندازه زاویه‌ای معین حول O دوران می‌دهد. اگر T دورانی به زاویه t° ساعتگرد و S دورانی به زاویه s° در همان جهت باشد، ST دورانی است به زاویه $(s+t)^\circ$ ساعتگرد. $T^{-۱}$ دورانی به زاویه t° پادساعتگرد است. I را می‌توان دورانی به زاویه ۰° تصور کرد.



شکل ۲.۹

هشدار. در حالت کلی حاصل‌ضرب ST، مساوی با حاصل‌ضرب TS، به‌ترتیب عکس نیست. مثال زیر گواه این مطلب است.

مثال۲. مثلث متساوی‌الاضلاع ΔABC را که رأسهای آن نسبت به O به‌طور متقارن قرار گرفته‌اند درنظر می‌گیریم (شکل ۲.۹). اگر T دورانی به زاویه °۱۲۰ پادساعتگرد حول O، و S تقارن نسبت به ارتفاع $\overleftrightarrow{\mathrm{AO}}$ باشد، TS نقطه C را ثابت نگاه می‌دارد و جای A و B را با هم عوض می‌کند. (در واقع TS تقارن نسبت به $\overleftrightarrow{\mathrm{CO}}$ است)؛ درحالی که ST، B را ثابت نگاه می‌دارد و جای A و C را با هم عوض می‌کند. (ST تقارن نسبت به $\overleftrightarrow{\mathrm{BO}}$ است).

اگر دو تبدیل S و T تصادفاً چنین باشند که $ST = TS$، می‌گویند این دو تبدیل با هم جابه‌جا می‌شوند. یک مشت تبدیل که در آن هر دو تبدیل با هم جابه‌جا شوند جابه‌جایی (یا به احترام ریاضیدان بزرگ نروژی ن. ه. آبل، آبلی) نامیده می‌شوند. مثلاً هر دو دوران حول یک نقطه O جابه‌جایی هستند.

یک هندسه هر چه ساختار بیشتر داشته باشد، گروه خودریختی‌های آن کوچکتر است. هندسه نتاری، همان هندسه وقوع است با روابط اضافی میان‌بود و قابلیت انطباق. بنابراین گروه خودریختی‌های هندسه نتاری زیرگروه هم‌خطی‌هایی است چون T، که برای آنها میان‌بود و قابلیت انطباق ناوردا هستند. یعنی برای آنها

$$\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{A}' * \mathrm{B}' * \mathrm{C}'$$

$$\mathrm{AB} \cong \mathrm{CD} \Longrightarrow \mathrm{A}'\mathrm{B}' \cong \mathrm{C}'\mathrm{D}'$$

(ما تصویر هر شیء چون X ـــنقطه، خط، دایره، و غیره‌ـــ را بر اثر تبدیل T به‌صورت X′ نشان می‌دهیم). چنین فرض نکرده‌ایم که T قابلیت انطباق زوایا را حفظ می‌کند، زیرا می‌توانیم ثابت کنیم که چنین می‌کند: اگر $\sphericalangle\mathrm{ABC} \cong \sphericalangle\mathrm{DEF}$، می‌توانیم مطابق بنداشت، ق‌ـ۱، فرض کنیم که $\mathrm{AB} \cong \mathrm{DE}$ و $\mathrm{BC} \cong \mathrm{EF}$، لذا $\mathrm{AC} \cong \mathrm{DF}$ (ض‌زض)؛ چون T قابلیت انطباق

پاره‌خطها را محفوظ نگاه می‌دارد داریم $\Delta A'B'C' \cong \Delta D'E'F'$ (ض‌ض‌ض)، بنابراین $\measuredangle A'B'C' \cong \measuredangle D'E'F'$. همچنین باید توجه داشت که هرگاه تبدیلی میان‌بود را حفظ کند، باید (مطابق بنداشتهای م‌ـ۱ و م‌ـ۳) یک هم‌خطی باشد.

هدف اصلی ما در این فصل این است که همه خودریختی‌های صفحات اقلیدسی و هذلولوی را به نحو آشکاری تعیین، و آنها را طبق ویژگیهای هندسی، به‌ویژه ناورداهاشان، رده‌بندی کنیم.

ویژگی یا رابطه‌ای را بر اثر یک تبدیل یا گروهی از تبدیلات «ناوردا» گوییم که آن ویژگی یا رابطه پس از انجام این تبدیلات هم برقرار باشد. یک شکل هندسی را زمانی «ناوردا» گوییم که بر اثر این تبدیلات بر روی خود نگاشته شود.

«ناوردایی» و «گروه» دو مفهوم وحدت‌بخش در برنامه ارلانگر کلاین هستند. گروههای تبدیلات سالها بود که در هندسه به کاربرده می‌شدند، ولی اصالت کار کلاین وارونه کردن نقشها بود، بدین معنی که گروه را شیء اصلی مورد نظر قرار داد و عملکرد آن را بر هندسه‌های مختلف درنظر گرفت و ناورداهای آن را به‌دست آورد. مثلاً گروه $PSL(۲, \mathbb{R})$[1]، با تبدیلات تصویری ۲ × ۲ با ضرایب حقیقی (گزاره ۲۶.۹)، هم بر صفحه هذلولوی عمل می‌کند و هم بر خط تصویری حقیقی. در عمل اخیر، رابطه ناهمساز چهار نقطه، ناوردای اصلی است؛ در حالی که در عمل اول درازای پاره‌خط (که با روابط ناهمساز در مدلهای کلاین و پوانکاره محاسبه می‌شود)، ناوردای اصلی است.

کلاین هندسه‌های زیر را به‌صورت زیرگروههای هندسه تصویری حقیقی در صفحه رده‌بندی کرده است:

۱. هندسه آفین، مطالعه ناورداهای زیرگروه آن دسته از تبدیلات تصویری (به نام تبدیلات آفین) است که خط را در بی‌نهایت ناوردا نگاه می‌دارند.

۲. هندسه هذلولوی، مطالعه ناورداهای زیرگروه آن دسته از تبدیلات تصویری است که یک قطع مخروطی حقیقی («مطلق») را ناوردا نگاه می‌دارند.

۳. هندسه بیضوی، مطالعه ناورداهای زیرگروه آن دسته از تبدیلات تصویری است که قطع مخروطی موهومی مفروض را ناوردا نگاه می‌دارند.

۴. هندسه سهمومی، مطالعه ناورداهای زیرگروه آن دسته از تبدیلات آفین (به نام تشابهات) است که دو نقطه، دایره‌ای موهومی واقع در بی‌نهایت را ناوردا نگاه می‌دارند (کاکستر، ۱۹۶۰، ص ۳۶۲).

۵. هندسه اقلیدسی، ناورداهای زیرگروه آن دسته از تشابهاتی (به نام حرکات) است که طول را (که برحسب پاره‌خط دلخواه انتخابی تعریف‌شده) حفظ می‌کنند.

در طی دو دهه، پیش از ایراد سخنرانی کلاین، کیلی و سیلوستر نظریه کلی ناورداهای جبری

1. Projective Special Linear

را همراه با روشی نظام‌مند برای تعیین مولدها و روابط آنها پی‌ریزی کرده و بسط داده بودند.[۱] پیشنهاد کلاین این بود که هندسه مسائل تصویری را به مسائل جبری نظریه ناورداها که در آن این‌گونه مسائل با روشهای جبری معینی می‌توانند حل شوند، بدل کنیم.[۲]

نشان داده شده است که روش کلاین در پیدا کردن اعمال یا نمایشهای مختلف یک گروه و ناورداهای آنها نه تنها در هندسه، بلکه در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات و فیزیک می‌تواند ثمربخش باشد.

در فیزیک، مثلاً ناوردایی معادلات ماکسول در الکترومغناطیس بر اثر تبدیلات لورنتس، فکر پی‌ریزی هندسه تازه فضا_زمان را، که گروه خودریختی‌هایش گروه لورنتس است، به ذهن مینکوفسکی القا کرد. این آغاز پیدایش نظریه نسبیت بود، که زمانی اینشتین نام «نظریه ناوردایی» را برای آن درنظر گرفته بود. در فیزیک اتمی، نظم و ترتیبهایی که در جدول تناوبی ظاهر شده‌اند، نتیجه مستقیم ناوردایی بر اثر دوران هستند. در فیزیک مقدماتی ذرات، تأمل در ناوردایی و تقارن، به چند پیش‌بینی قابل ملاحظه منجر شده است. به گفته ا. ویگنر، در آینده به خوبی می‌توانیم «به‌جای اینکه سعی کنیم قوانین ناوردایی را از آنچه معتقدیم قوانین طبیعت هستند استخراج کنیم، سعی کنیم قوانین طبیعت را استخراج و معتبر بودن آنها را به‌وسیله قوانین ناوردایی بیازماییم.»[۳]

در این فصل به کاوش ماهیتی که دیدگاه کلاین به هندسه‌های مسطحه اقلیدسی و هذلولوی می‌بخشد خواهیم پرداخت، و از روی بنداشتهای خود مشخصات کلیه حرکتهای ممکن را به‌دست خواهیم آورد و چگونگی پیدایش آنها را از قرینه‌یابی محوری نشان خواهیم داد (جدول ۱.۹ ص ۳۵۸). سپس با استفاده از این تبدیلات نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان محاسبات را برحسب مختصات در مدلهای خود انجام داد. برنامه کلاین را با جانشین ساختن بنداشتهای گروهی به جای بنداشتهای قابلیت انطباق، تکمیل خواهیم کرد. سرانجام روشهای نظریه گروهها را برای مسائل قرینه‌یابی به‌کار خواهیم برد.

کاربرد تبدیل در مسائل هندسی

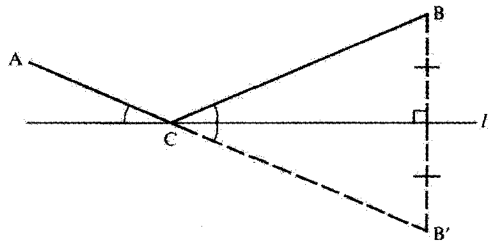
در اینجا ذکر چند مثال[۴] از مسائل هندسی که می‌توانند با استفاده از تبدیل به آسانی حل شوند، می‌پردازیم. در حل آنها از بعضی از خواص قرینه‌یابی، دوران، انتقال و تجانس، که در بخشهای

1. J. Dieudonné and J. Carrell, *Invariant theory, Old and New*, Academic Press, 1971.

2. Part 3 of Klein's *Geometry*, which is Part 2 of his *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Dover, 1948.

3. E. Wigner "Invariance in Physical Theory", *Proceedings of the American Philosophical Society*, 93 (1949): 521-526.

۴. صدها مثال دیگر در رساله سه‌جلدی ماندگار تبدیلات هندسی اثر ای. م. یاگلوم، در ۱۹۶۲ توسط انجمن ریاضی آمریکا منتشر شده است. (هر سه جلد توسط مرکز نشر دانشگاهی ترجمه و منتشر شده است.ـم.)



شکل ۳.۹

بعد مطرح خواهند شد، استفاده می‌کنیم. هدف از عرضه این مسائل در اینجا نشان دادن کارایی روشهای تبدیل به‌طور عینی است. پس از مطالعه نظریه‌ای که بعداً می‌آید، راه‌حل مسائل را بهتر درک خواهید کرد و توصیه می‌کنم این راه‌حلها را بعداً دوباره با دقت بخوانید و سپس دریافت خود را با تمرینهای ۶۹ـ۷۷ بیازمایید.

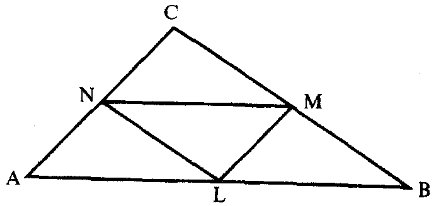
مسئله۱. دو نقطه A و B در یک طرف خط l داده شده‌اند. بر l نقطه‌ای مانند C پیدا کنید به‌قسمی‌که $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ و $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ با l زوایای قابل انطباق بسازند (اگر l یک آینه باشد، ACB مسیری است که شعاع نورانی طی می‌کند تا بر اثر منعکس‌شدن در l از A به B برود).

حل. (شکل ۳.۹) فرض می‌کنیم B' قرینه B نسبت به l باشد. پس C فصل مشترک AB' است با l.

مسئله۲. نقطه Q وقتی مرکز تقارن شکل F نامیده می‌شود که اگر A به F متعلق باشد و Q وسط AA'، آنگاه A' هم به F متعلق باشد. نشان دهید که یک شکل می‌تواند فقط صفر، یک یا بی‌نهایت مرکز تقارن داشته باشد.

حل. Q یک مرکز تقارن است اگر و تنها اگر شکل بر اثر یک نیم‌دور (دوران 180°) H_{Q} حول نقطه Q ناوردا بماند. یک مثلث صفر مرکز تقارن دارد، یک دایره یک مرکز تقارن، و یک خط بی‌نهایت مرکز تقارن دارد. فرض می‌کنیم شکل F دو مرکز تقارن Q و Q' داشته باشد. در این‌صورت $H_{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}') = \mathrm{Q}''$ مرکز تقارن سوم، $H_{\mathrm{Q}'}(\mathrm{Q}'') = \mathrm{Q}'''$ مرکز تقارن چهارم و ... است.

توضیح. دو مسئله قبل در هندسه نتاری بیان و حل شدند. برای بقیه مسائل، هندسه اقلیدسی فرض می‌شود.



شکل ۴.۹

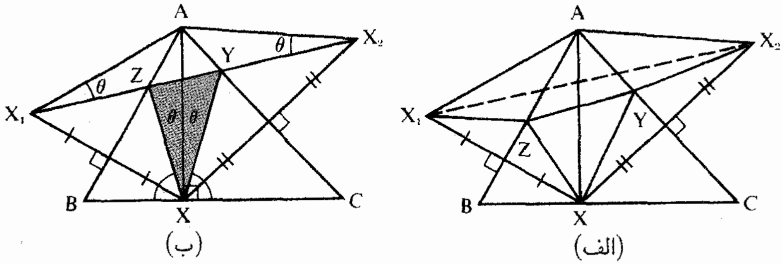
مسئله۳. فرض می‌کنیم L، M، و N به‌ترتیب وسط اضلاع AB، BC، و CA از ΔABC باشند. فرض می‌کنیم $O_۱$، $O_۲$، و $O_۳$ به‌ترتیب مراکز دوایر محیطی ΔALN، ΔBLM، و ΔCMN، و $P_۱$، $P_۲$، و $P_۳$ به‌ترتیب مراکز دوایر محاطی همین مثلثها باشند. نشان دهید $\Delta O_۱O_۲O_۳ \cong \Delta P_۱P_۲P_۳$.

حل. (شکل ۴.۹) ملاحظه می‌کنید که هر یک از این سه مثلث از دیگری بر اثر یک انتقال به‌دست آمده است ــ مثلاً ΔLBM از انتقال ΔALN در امتداد $\overrightarrow{AB}$ به فاصله $\overline{AL} = \overline{LB}$ به‌دست آمده است. این انتقال، دایره محیطی یک مثلث (و مرکز آن) را بر دایره محیطی (و مرکز) دیگری منتقل می‌کند؛ همچنین است برای دوایر محاطی. بنابراین نه تنها داریم $P_۱P_۲ \cong AL \cong O_۱O_۲$ و غیره، که به ما می‌دهد $\Delta O_۱O_۲O_۳ \cong \Delta P_۱P_۲P_۳$، بلکه همچنین می‌بینیم که اضلاع متناظر این دو مثلث با هم موازی‌اند.

مسئله۴. مثلثی با سه زاویه حاده داده شده است. مثلثی با محیط مینیمم در آن محاط کنید (مسئله فاینانو)[1].

حل. مثلث ΔXYZ را محاط در ΔABC بدان‌گونه که در شکل ۵.۹(الف) دیده می‌شود درنظر می‌گیریم. اگر $X_۱$ و $X_۲$ به‌ترتیب قرینه‌های X رابطه به $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ باشند، محیط ΔXYZ با طول خط شکسته $X_۱ZYX_۲$ مساوی خواهد شد. اگر X را ثابت بگیریم، این طول زمانی مینیمم می‌شود که Z و Y چنان انتخاب شده باشند که برروی $X_۱X_۲$ قرار گیرند، و در آن صورت طول پاره‌خط $\overline{X_۱X_۲}$ با محیط مثلث ΔXYZ برابر خواهد شد. داریم $AX_۱ \cong AX \cong AX_۲$ و $\measuredangle X_۱AX_۲ \cong ۲\measuredangle A$. حال اگر X را تغییر دهیم، زاویه رأس مثلث متساوی‌الساقین $\Delta X_۱AX_۲$ ثابت می‌ماند و قاعده $\overline{X_۱X_۲}$ با نسبت مستقیم با $\overline{AX}$ تغییر می‌کند (در حقیقت رابطه مثلثاتی $\overline{X_۱X_۲} = ۲\overline{AX}\sin\measuredangle A$ برقرار است). بنابراین، محیط زمانی مینیمم می‌شود که $\overline{AX}$ مینیمم

1. Fagnano's problem



شکل ۵.۹

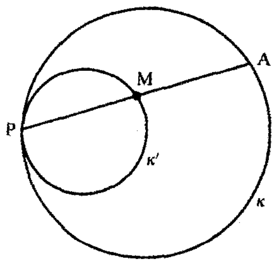
باشد؛ و این امر زمانی رخ می‌دهد که X پای ارتفاع مرسوم از A باشد (شکل ۵.۹(ب)). تحقیق این امر را که Y و Z هم باید پای ارتفاع مرسوم از B و C باشند، به‌عنوان تمرین ۷۴ به‌عهده خواننده گذاشته شده است. بنابراین تنها مثلث محاطی با محیط مینیمم، مثلثی است که از پای سه ارتفاع ΔABC حاصل می‌شود و به مثلث پادک معروف است.

مسئله۵. سه خط موازی داده شده‌اند. مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که رأسهای آن بر این سه خط باشند.

حل. نقطه دلخواه A را بر خط l اختیار می‌کنیم. خط دوم m را به‌زاویه ۶۰° حول A دوران می‌دهیم تا به وضع جدید m' درآید. فرض می‌کنیم C محل تلاقی خط m' با خط دیگر n باشد. هرگاه B نقطه‌ای بر m باشد که از دوران C حول A به زاویه ۶۰° در جهت مخالف به‌دست آمده است، ΔABC جواب مسئله است.

مسئله۶. بر اضلاع ΔABC سه مثلث متساوی‌الاضلاع در بیرون آن می‌سازیم. نشان دهید که مثلث حاصل از مراکز این مثلثها متساوی‌الاضلاع است.

حل. مراکز این مثلثها را $O_{۱}$، $O_{۲}$، و $O_{۳}$ می‌نامیم، و دورانهای $R_{۱}$، $R_{۲}$، و $R_{۳}$ به زاویه ۱۲۰° پادساعتگرد را به‌ترتیب حول $O_{۱}$، $O_{۲}$، و $O_{۳}$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $R_{۱}(A) = B$ و $R_{۲}(B) = C$ و $R_{۳}(C) = A$. اما $R_{۲}R_{۱}$ دورانی است ساعتگرد به زاویه ۱۲۰° حول $O'_{۳}$، محل تلاقی دو خط، که یکی از $O_{۱}$ و دیگری از $O_{۲}$ رسم شده باشد و هر یک با $\overleftrightarrow{O_{۱}O_{۲}}$ زاویه ۶۰° بسازد. پس $\Delta O_{۱}O_{۲}O'_{۳}$ متساوی‌الاضلاع است. چون $R_{۳}^{-۱}$ دورانی است ساعتگرد به زاویه ۱۲۰° که A را به C می‌بَرد، پس باید داشته باشیم $R_{۳}^{-۱} = R_{۲}R_{۱}$ و $O'_{۳} = O_{۳}$.



شکل ۶.۹

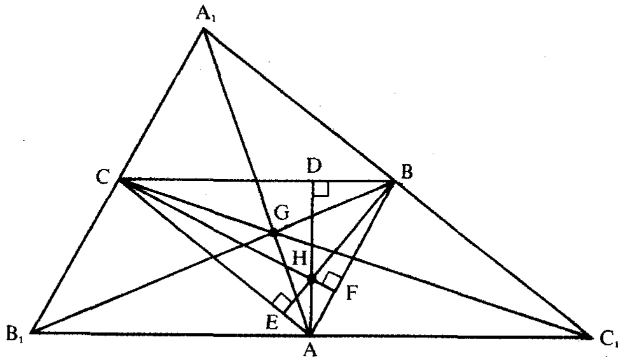
مسئله۷. دایره κ و نقطه P بر آن داده شده است. κ' مکان هندسی نقطه M وسط همه وترهای PA از κ را که از P می‌گذرند، پیدا کنید.

حل. (شکل ۶.۹) چون κ' از κ بر اثر یک تجانس به مرکز P و نسبت تجانس ۱/۲ به‌دست می‌آید. پس κ' دایره‌ای است به قطر OP، که O مرکز κ است.

مسئله۸. مثلث ΔABC مفروض است. O مرکز دایره محیطی (محل تلاقی سه عمودمنصف)، نقطه G مرکزوار (محل تلاقی سه میانه) و نقطه H مرکز ارتفاع (محل تلاقی سه ارتفاع) را درنظر می‌گیریم. در تمرین ۱۲، فصل ۶، نشان دادید که O وجود دارد. یک استدلال ساده، با استفاده از هندسه تحلیلی (تمرین ۶۹) نشان می‌دهد که فاصله G تا هر رأس به‌اندازه ۲/۳ میانه، گذرنده از آن رأس است. بنابراین تجانس T به‌مرکز G و رابطه تجانس ۱/۲−، مثلث ΔABC را بر مثلث میانک $\Delta A'B'C'$، که رأسهای آن به‌ترتیب وسط BC، CA، و BB هستند می‌نگارد. مسئله‌ای که اکنون طرح می‌کنیم این است که نشان دهید H وجود دارد؛ O، G، و H بر یک خط (به نام خط اویلر مثلث ΔABC) قرار دارند و G بر ۲/۳ فاصله H تا O واقع است.

حل. تجانس T^{-1}، مثلث ΔABC را بر $\Delta A_1B_1C_1$ که اضلاع آن با اضلاع متناظر ΔABC موازی و طول هر ضلع آن دو برابر طول ضلع نظیر آن است، می‌نگارد (شکل ۷.۹). پس مثلث ΔABC مثلث میانک $\Delta A_1B_1C_1$ است، و ارتفاع‌های مثلث ΔABC عمودمنصف‌های $\Delta A_1B_1C_1$ هستند و بنابراین در یک نقطه H متقارب‌اند.

تجانس اولیه T، چون یک تشابه است، تعامد را حفظ می‌کند و بنابراین مرکز ارتفاع H از مثلث ΔABC را بر مرکز ارتفاع مثلث میانک $\Delta A'B'C'$، که همان O باشد، می‌نگارد؛ چون G مرکز T و نسبت آن ۱/۲− است، نتیجه مطلوب از تعریف تجانس حاصل می‌شود.



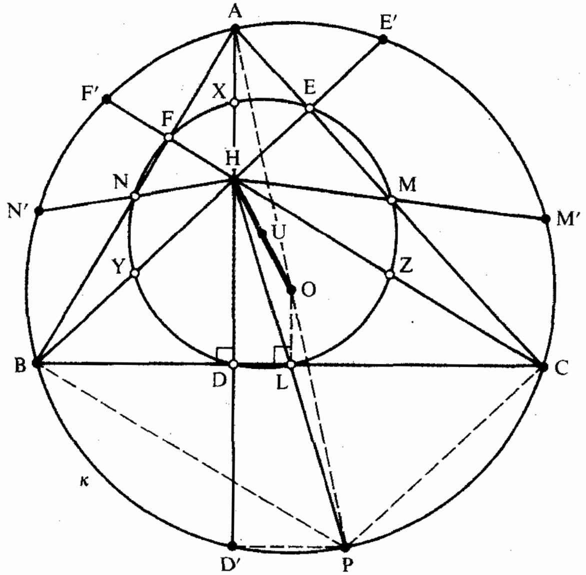
شکل ۷.۹

مسئله۹. فرض می‌کنیم H مرکز ارتفاع، O مرکز دایره محیطی، L، M، و N وسط اضلاع، و D، E، و F پای ارتفاعهای ΔABC باشند. نشان دهید که L، M، N، D، E، F و وسط پاره‌خطهای HA، HB، و HC نقاطی واقع بر یک دایره به مرکز U هستند، که واقع بر خط اویلر و وسط پاره‌خط HO است (دایره ۹ نقطه‌ای ΔABC).

حل. تجانس T به مرکز H و رابطه ۲ را درنظر می‌گیریم. هرگاه نشان دهیم که T هر ۹ نقطه را بر دایره محیطی κ از مثلث ΔABC می‌نگارد، نتیجه مطلوب از لم ۲.۷، فصل ۷، به‌دست می‌آید وقتی که آن را برای تجانس T^{-1} و نسبت ۱/۲ به‌کار بریم (T^{-1}، κ را بر دایره‌ای که شعاع آن نصف شعاع κ و مرکز آن وسط OH است می‌نگارد). واضح است که T وسط HA، HB، و HC را بر نقاط A، B، و C از دایره κ می‌نگارد.

فرض می‌کنیم P نقطه‌ای بر κ، متناظر با A، باشد (شکل ۸.۹). چون ACP$\measuredangle$ در یک نیم‌دایره محاط است، لذا $\overleftrightarrow{\mathrm{PC}}\perp\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$، پس $\overleftrightarrow{\mathrm{PC}}$ با ارتفاع $\overleftrightarrow{\mathrm{BH}}$ موازی است. همچنین $\overleftrightarrow{\mathrm{PB}}\|\overleftrightarrow{\mathrm{CH}}$. بدین‌ترتیب PCHB$\square$ یک متوازی‌الاضلاع است، و از این‌رو وسط قطر HP بر نقطه L، وسط BC، منطبق خواهد شد. این نشان می‌دهد که $T(\mathrm{L}) = \mathrm{P}$ بر κ قرار دارد (و با استدلالی مشابه معلوم می‌شود که $T(M)$ و $T(N)$ نیز بر κ قرار دارند).

فرض می‌کنیم نیم‌خط $\overleftrightarrow{\mathrm{HD}}$، κ را در D' ببرد. چون $\mathrm{AD}'\mathrm{P}\measuredangle$ در نیم‌دایره‌ای از κ محاط است، پس $\overleftrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overleftrightarrow{\mathrm{DL}}$ = $\overleftrightarrow{\mathrm{AD}'}$، $\overleftrightarrow{\mathrm{D}'\mathrm{P}}\perp$ یعنی $\overleftrightarrow{\mathrm{D}'\mathrm{P}}\|\overleftrightarrow{\mathrm{DL}}$، که ایجاب می‌کند D وسط HD' باشد (زیرا L وسط HP است). بدین‌ترتیب $T(\mathrm{D}) = \mathrm{D}'$ بر κ قرار دارد (و همچنین هستند $T(\mathrm{E})$ و $T(\mathrm{F})$).



شکل ۸.۹

حرکت و تشابه

از این پس واژه «خودریختی» فقط برای خودریختی از هندسه نتاری، یعنی برای تبدیلی که وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق را محفوظ نگاه می‌دارد، به کار خواهد رفت.

تعریف. یک تبدیل T از تمامی صفحه برروی خودش یک حرکت یا یک طولپایی[1] نامیده می‌شود، هرگاه طول بر اثر T ناوردا بماند؛ یعنی به‌ازای هر پاره‌خط AB، $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$.

گزاره ۱.۹ (الف) هر حرکت یک خودریختی است. (ب) حرکتها زیرگروهی ازگروه خودریختی‌ها را تشکیل می‌دهند.

برهان:

(الف) فرض می کنیم T یک حرکت باشد. اگر $\mathrm{AB} \cong \mathrm{CD}$ آنگاه

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{C'D'}}$$

لذا $\mathrm{A'B'} \cong \mathrm{C'D'}$. این امر که T میان‌بود را هم حفظ می‌کند از قضیه ۳.۴ (۹) نتیجه می‌شود، که گویای این است که $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}$ اگر و تنها اگر $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}}$.

۱. بعضی از مؤلفان این تبدیل را حرکت صلب می‌نامند. اصطلاح «حرکت» به مفهومی که ما در اینجا به‌کار برده‌ایم، به‌معنی حرکت پیوسته یک جسم فیزیکی به معنای رایج آن نیست، هر چند که از همان واژه استفاده شده است.

(ب) باید ویژگیهای (۱) تا (۳) در تعریف گروه را محقق سازید که تمرینی است ساده. ■

گزاره ۲.۹ خودریختی اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

برهان:

اگر خودریختی T داده شده باشد، می‌توان اندازه جدید زاویه $\sphericalangle \mathrm{A}$ را اندازه تصویر آن، $(\sphericalangle \mathrm{A}')^\circ$ بر اثر T تعریف کرد. در تمرین ۳ نشان خواهید داد که این اندازه جدید در همه ویژگیهای اساسی (۱) تا (۶)، قضیه ۳.۴، صدق می‌کند. اما بنابر همین قضیه، اندازه زاویه برحسب درجه با این ویژگیها یکتاست. بنابراین $(\sphericalangle \mathrm{A})^\circ = (\sphericalangle \mathrm{A}')^\circ$. ■

نتیجه ۱. هرگاه مثلث $\Delta \mathrm{A'B'C'}$ تصویر مثلث $\Delta \mathrm{ABC}$ بر اثر یک خودریختی باشد، $\Delta \mathrm{A'B'C'}$ با $\Delta \mathrm{ABC}$ متشابه است.

برهان:

زاویه‌های متناظر، قابل انطباق‌اند. ■

نتیجه ۲. در یک صفحه هذلولوی، هر خودریختی یک حرکت است.

برهان:

بنابر قضیه ۲.۶، $\Delta \mathrm{ABC} \cong \Delta \mathrm{A'B'C'}$، بنابراین $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$. ■

در واقع، چنان‌که قبلاً در مدل کلاین (تمرین ک‌ـ۲۱، فصل ۷) مشاهده کردیم، هر هم‌خطی از صفحه هذلولوی برروی خودش یک حرکت است.

به موجب نتیجه ۱، هر خودریختی از یک صفحه اقلیدسی یک تشابه نامیده می‌شود. تشابه، بنابر تعریف، هم‌خطی‌ای است که اندازه زاویه را حفظ می‌کند. مثالی از یک تشابه که حرکت نباشد تجانس[1] به مرکز O و رابطه $k \neq 0$ است: اگر $k > 0$ (به‌ترتیب $k < 0$) این تبدیل T، O را ثابت نگاه می‌دارد و هر نقطه دیگر P را بر نقطه یکتای $\mathrm{P'}$ بر نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (به‌ترتیب بر نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$) می‌نگارد به‌طوری که

$$\overline{\mathrm{OP'}} = |k|\overline{\mathrm{OP}}$$

۱. مفهوم تجانس کلی‌تر از مفهومی است که در صفحه ۲۶۳ آوردیم؛ در آنجا فقط حالت $k > 0$ درنظر گرفته شده بود. تجانس، تشابه مرکزدار نیز نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که تشابه به‌صورت هم‌خطی‌ای که دایره را محفوظ می‌دارد مشخص می‌شود (صفحه ۳۷۶).

اگر مختصات دکارتی به مبدأ O را به‌کار گیریم، این تبدیل با

$$(x, y) \to (kx, ky)$$

نشان داده می‌شود. بنابراین اگر A و B به‌ترتیب دارای مختصات $(a_۱, a_۲)$ و $(b_۱, b_۲)$ باشند، داریم:

$$(\overline{\mathrm{A'B'}})^۲ = (ka_۱ - kb_۱)^۲ + (ka_۲ + kb_۲)^۲ = k^۲(\overline{\mathrm{AB}})^۲$$

یعنی $\overline{\mathrm{A'B'}} = |k|\overline{\mathrm{AB}}$. با توجه به این تساوی می‌توانید نشان دهید که T، میان‌بود و قابلیت انطباق را حفظ می‌کند، (تمرین ۴) که قسمت «شرط کافی» برای گزاره بعدی است.

گزاره ۳.۹ تبدیل T از یک صفحه اقلیدسی یک تشابه است اگر و تنها اگر عدد مثبت و ثابتی مانند k وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر پاره‌خط AB

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = k\overline{\mathrm{AB}}$$

برهان:

اگر تشابه T و پاره‌خط AB داده شده باشند، نقطه‌ای مانند C که با A و B بر یک خط نیستند، اختیار می‌کنیم و $\Delta\mathrm{A'B'C'}$ متشابه با $\Delta\mathrm{ABC}$ را درنظر می‌گیریم. براساس قضیه اساسی درباره مثلثهای متشابه (تمرین ۱۸، فصل ۵)، عدد ثابت مثبتی مانند k وجود دارد چنان‌که رابطه اضلاع متناظر در این دو مثلث مساوی k باشد. اگر D نقطه دیگری باشد، به‌کار بردن همین استدلال در مورد $\Delta\mathrm{ACD}$ (یا $\Delta\mathrm{BCD}$، اگر A، C، و D هم‌خط باشند) تساوی $\overline{\mathrm{C'D'}} = k\overline{\mathrm{CD}}$ را می‌دهد. و هرگاه D و E برخط $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ واقع باشند، همین برهان هنگامی که برای $\Delta\mathrm{CDE}$ به‌کار برده شود تساوی $\overline{\mathrm{D'E'}} = k\overline{\mathrm{DE}}$ را خواهد داد. پس k رابطه ثابتی به‌ازای هر پاره‌خط است. ■

برهانی که هم اکنون آوردیم، همراه با تمرین ۴، نتیجه زیر را به‌دست می‌دهد.

نتیجه. یک تبدیل یک‌به‌یک T از صفحه اقلیدسی برروی خودش یک خودریختی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $\Delta\mathrm{ABC}$ داشته باشیم $\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{A'B'C'}$.

از این قضیه می توان چنین نتیجه گرفت که صفحات هذلولوی دارای توابع فاصله ناوردای $\mathrm{AB} \to \overline{\mathrm{AB}}$ هستند، درحالی که صفحات اقلیدسی چنین نیستند. مطابق دیدگاه کلاین، هر تابع یا رابطه‌ای که بر اثر گروه خودریختی‌های یک ساختار، ناوردا نباشد جزء ذاتی نظریه این ساختار نیست، بلکه جزئی است از نظریه یک ساختار جدید که بر اثر آن تبدیلاتی که آن را ناوردا نگاه

می‌دارند تشریح می‌شود. لذا اگر بخواهیم فاصله، جزئی از هندسه اقلیدسی باشد، باید هندسه اقلیدسی را به‌عنوان موضوعی فقط برای مطالعه ناورداهای گروه حرکات اقلیدسی دوباره تعریف کنیم. کلاین نام هندسه سهموی را برای مطالعه ناورداهای گروه کامل تشابهات اقلیدسی پیشنهاد کرده است. ما این اصطلاح را به‌کار نمی‌بریم ولی باید بدانید که مؤلفان دیگر آن را به‌کار می‌برند.[۱]

قرینه‌یابی

بنیادی‌ترین نوع حرکت، که کلیه حرکتهای دیگر را از آن تولید خواهیم کرد، قرینه‌یابی R_m است نسبت به خطِ m، که محور آن نامیده می‌شود (ص ۱۲۰ـ۱۲۱). تصویر نقطه A بر اثر R_m را با A^m نشان می‌دهیم. قرینه‌یابی یک نقطه دوبار نسبت به m، نقطه را به‌جای اولش برمی‌گرداند، لذا $R_m R_m = I$ و یا $R_m = (R_m)^{-1}$. تبدیلی که با عکس خودش مساوی باشد ولی همانی نباشد، برگشت نامیده می‌شود. دوران یک نقطه به زاویه 180° حول یک نقطه، مثالی از یک برگشت است. (در تمرین ۹ نشان خواهید داد که غیر از این دو، برگشت دیگری وجود ندارد.)

نقطه ثابت یک تبدیل T نقطه‌ای است مانند A به‌قسمی‌که $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$. نقاط ثابت یک قرینه‌یابی R_m نقاطی هستند واقع بر m. ما از نقاط ثابت برای رده‌بندی حرکات استفاده خواهیم کرد.

لم۹.۱ اگر خودریختی T دو نقطه A و B را ثابت نگه‌دارد، یک حرکت است و هر نقطه را بر خط $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ ثابت نگاه می‌دارد.

برهان:

چون $\mathrm{AB} = \mathrm{A}'\mathrm{B}'$، مقدار ثابت k در نتیجه ۲ گزاره ۹.۲ مساوی یک است. فرض می‌کنیم C نقطه سومی بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ باشد. حالت $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}$ را درنظر می‌گیریم (برای دو حالت دیگر هم استدلال به همین‌گونه است). در این‌صورت داریم $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}'$ و $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AC}'}$. پس طبق بنداشت ق‌ـ۱، $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. ■

لم۹.۲ اگر یک هم‌ریختی سه نقطه ناواقع بر خطی را ثابت نگاه دارد، یک همانی است.

برهان:

اگر A، B، و C ثابت بمانند مطابق لم ۹.۱، تمام نقاط خطوط واصل بین این سه نقطه هم ثابت می‌مانند. اگر D بر هیچ‌یک از این سه خط واقع نباشد، نقطه‌ای مانند E بین A و B انتخاب

۱. هرمان وایل بر آن است که (برای هندسه سه‌بعدی) گروه حرکات، همان خودریختی‌های فیزیکی فضاست؛ زیرا جرم و بار یک الکترون یک استاندارد طول مطلق برای ما فراهم می‌سازد.

می‌کنیم. بنابر قضیه پاش، خط $\overleftrightarrow{\mathrm{DE}}$ ضلع دیگر $\Delta\mathrm{ABC}$ را در یک نقطه F می‌برد. چون E و F ثابت هستند، بنابر لم ۱.۹، D هم ثابت است. ■

گزاره ۴.۹ اگر یک خودریختی دو نقطه A و B را ثابت نگه‌دارد و تبدیل همانی نباشد، این تبدیل یک قرینه‌یابی است نسبت به خط $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$.

برهان:

لم ۱.۹ تضمین می‌کند که هر نقطه از $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ ثابت بماند. فرض می‌کنیم C نقطه‌ای در بیرون AB و F پای عمود وارد از آن بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ باشد. چون خودریختی‌ها اندازه زاویه را حفظ می‌کنند، تعامد را حفظ خواهند کرد. لذا C' باید بر $\overleftrightarrow{\mathrm{CF}}$ قرار داشته باشد. لم ۲.۹ تضمین می‌کند که $\mathrm{C}' \neq \mathrm{C}$، و چون $\overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{C'F}}$ پس C' قرینه C است نسبت به $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$. ■

گزاره بعد نشان می‌دهد که «حرکت» مفهوم دقیقی است که روش اقلیدس درباره برهم‌نهادن مثلثی بر مثلث دیگر را موجه می‌سازد.

گزاره ۵.۹ $\Delta\mathrm{ABC} \cong \Delta\mathrm{A'B'C'}$ اگر و تنها اگر حرکتی وجود داشته باشد که نقاط A، B، و C را به‌ترتیب به نقاط A'، B'، و C' بفرستد، و این حرکت یکتاست.

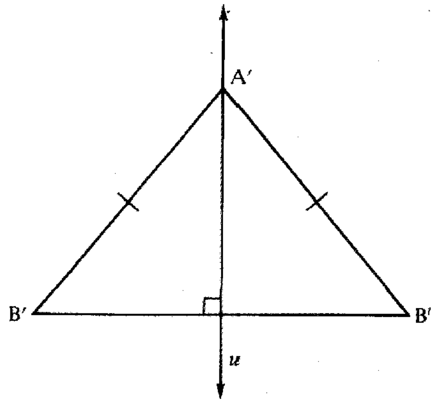
برهان:

یکتایی از لم ۲.۹ نتیجه می‌شود، زیرا اگر T و T' اثر یکسانی بر A، B، و C داشته باشند، آنگاه $T^{-1}T'$ این نقاط را ثابت نگاه می‌دارد، و بنابراین $T^{-1}T' = I$، یعنی $T = T'$. روشن است که هر حرکت، $\Delta\mathrm{ABC}$ را بر مثلثی قابل انطباق با خودش می‌نگارد (ض‌ض‌ض). بنابراین، برعکس، فرض می‌کنیم $\Delta\mathrm{ABC} \cong \Delta\mathrm{A'B'C'}$، و این حرکت را انجام می‌دهیم. می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{A}' \neq \mathrm{A}$ و t عمودمنصف AA' باشد. لذا قرینه‌یابی رابطه به t، A را به A' می‌فرستد و B و C را به نقاط B^t و C^t. اگر نقاط اخیر B' و C' باشند، گزاره ثابت شده است، لذا فرض می‌کنیم $\mathrm{B}' \neq \mathrm{B}^t$. داریم

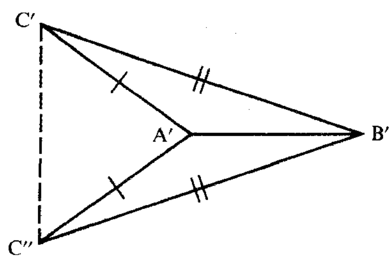
$$\mathrm{A'B'} \cong \mathrm{AB} \cong A'\mathrm{B}^t$$

فرض می‌کنیم u عمودمنصف $\mathrm{B'B}^t$ باشد، پس R_u، B^t را به B' می‌فرستد (شکل ۹.۹). در این قرینه‌یابی A' ثابت می‌ماند، زیرا اگر A' و B^t و B' هم‌خط باشند، A'، وسط $\mathrm{B'B}^t$ خواهد بود و بر u قرار دارد، در حالی که اگر، هم‌خط نباشند، u عمودمنصف مثلث متساوی‌الساقین $\Delta\mathrm{B'A'B}^t$ است و u از رأس A' می‌گذرد.

پس ترکیب R_uR_t زوج (A, B) را بر زوج $(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$ می‌فرستد. اگر C را هم به C' بفرستد؛



شکل ۹.۹



شکل ۱۰.۹

مسئله تمام است؛ در غیر این‌صورت فرض می‌کنیم اثرش بر C، C'' باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{A'C'} \cong \mathrm{AC} \cong \mathrm{A'C''}$$

$$\mathrm{B'C'} \cong \mathrm{BC} \cong \mathrm{B'C''}$$

لذا $\Delta \mathrm{A'B'C''} \cong \Delta \mathrm{A'B'C'}$. یک استدلال ساده با مثلثهای قابل انطباق (شکل ۱۰.۹) نشان می‌دهد که C' قرینه C'' است نسبت به $v = \overleftrightarrow{\mathrm{A'B'}}$. از این‌رو $R_v R_u R_t$ حرکتی است که می‌خواستیم. ■

نتیجه. هر حرکت، حاصل‌ضرب حداکثر سه قرینه‌یابی است.

این مطلب در جریان اثبات گزاره بالا (وقتی همانی را «حاصل‌ضرب صفر تقارن» و تقارن را «حاصل‌ضرب یک تقارن» بگیریم) ثابت می‌شود.

حال می‌خواهیم حاصل‌ضرب دو قرینه‌یابی $T = R_l R_m$ را بررسی کنیم. اگر l، m را در یک نقطه A ببرد، T دوران حول A نامیده می‌شود؛ اگر l و m یک عمود مشترک t داشته باشند، T انتقال در امتداد t نامیده می‌شود. سرانجام، در صفحه هذلولوی فقط اگر l و m در امتداد یک نقطه آرمانی Ω موازی مجانبی باشند، T تغییرمکان موازی در امتداد Ω نام دارد. این حالتها، دوبه‌دو ناسازگارند، ولی مطابق قرارداد، حرکتِ همانی، هم دوران، هم انتقال، و هم تغییر مکان موازی به‌شمار می‌آید (این موردی است که $l = m$).

گزاره۴.۹ اهمیت نقاط ثابت را در بررسی حرکات نشان می‌دهد. یک ابزار مهم دیگر خطوط ناورداست؛ خط l را بر اثر T ناورداگویند هرگاه $l = l'$. این تعریف ایجاب نمی‌کند که همه نقاط واقع بر l ثابت بمانند؛ تنها ایجاب می‌کند که اگر نقطه‌ای از l بر اثر T حرکت کند، به‌نقطه دیگری از l برود. مثلاً، تنها خطوطی که علاوه بر m بر اثر تقارن R_m ثابت می‌مانند، خطهای عمود بر m هستند (تمرین ۷).

دوران

گزاره ۶.۹ هرگاه $m \perp l$، A نقطه تلاقی l و m، و $T = R_l R_m$، آنگاه به‌ازای هر نقطه $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$، A وسط $\mathrm{BB'}$ است.

برهان:

هرگاهBبرlیا برmباشد، حکم واضح است. پس فرض می‌کنیم که برهیچ‌یک نباشد(شکل ۱۱.۹).

اگر C پای عمود مرسوم از B بر m باشد. $\mathrm{B'}$ در آن طرفی از l و m قرار دارد که B در آن نیست، و $\mathrm{C'}$ در آن طرف l که C در آن نیست. از قابلیت انطباق $\sphericalangle \mathrm{BAC} \cong \sphericalangle \mathrm{B'AC'}$ نتیجه می‌گیریم که این زاویه‌ها باید متقابل به رأس باشند، بنابراین A و B و $\mathrm{B'}$ بر یک استقامت‌اند. چون $\mathrm{AB} \cong \mathrm{AB'}$، پس A وسط $\mathrm{BB'}$ است. ■

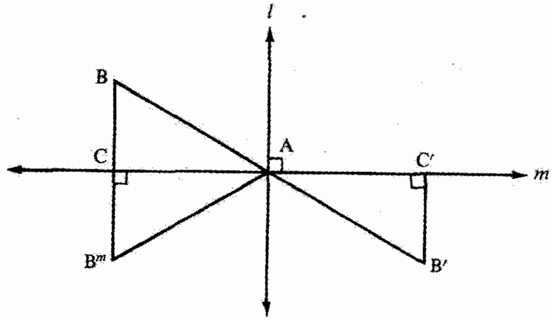
حرکت T درگزاره ۶.۹ را می‌توان دوران حول A به زاویه 180° تلقی کرد. ما آن را نیم‌دور حول A می‌نامیم و به H_A نشان می‌دهیم. تصویر هر نقطه P بر اثر H_A با P^A نشان داده خواهد شد.

نتیجه. H_A یک برگشت است و خطهای ناوردای آن خطهای گذرنده از A هستند.

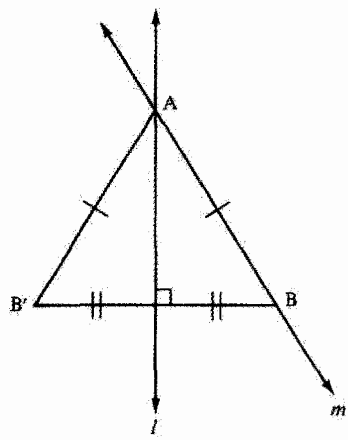
گزاره ۷.۹ حرکت $T \neq I$ یک دوران است اگر و تنها اگر T فقط یک نقطه ثابت داشته باشد.

برهان:

فرض می‌کنیم T فقط یک نقطه ثابت مثل A داشته باشد. نقطه‌ای مانند $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$ انتخاب و فرض می‌کنیم که l عمودمنصف $\mathrm{BB'}$ باشد. چون $\mathrm{AB} \cong \mathrm{AB'}$، A بر l قرار دارد



شکل ۱۱.۹

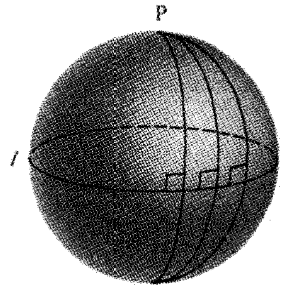


شکل ۱۲.۹

و حرکت R_lT، هم نقطه B را ثابت نگاه می‌دارد و هم نقطه A را. اگر $R_lT = I$، آنگاه $T = R_l$، که تناقض با این فرض است که T فقط یک نقطه ثابت دارد. بنابراین اگر $m = \overleftrightarrow{AB}$، گزاره ۴.۹ ایجاب می‌کند که $R_lT = R_m$، لذا $T = R_lR_m$، و T دورانی حول A است (شکل ۱۲.۹).

برعکس، اگر دوران $T = T_lR_m$ حول A داده شده باشد، فرض می‌کنیم که نقطه $B \neq A$ ثابت بماند. پس $B^l = B^m$ ، لذا از وصل این دو نقطه به B خطی به‌دست می‌آید که هم بر l عمود است و هم بر m، که نشدنی است. ■

توضیح. این برهان در صفحه بیضوی صدق نمی‌کند، زیرا در آنجا ممکن است خطهای متقاطع



شکل ۱۳.۹

دارای یک عمود مشترک باشند؛ در واقع، به‌ازای هر نقطه P، خطی مانند l به‌نام قطبی P وجود دارد چنان‌که l بر هر خط گذرنده از P عمود است (شکل ۱۳.۹).

در صفحه بیضوی، نیم‌دور H_{P} حول P همان قرینه‌یابی R_l نسبت به l است. (لم ۱.۹ و لم ۲.۹ هم در صفحه بیضوی درست نیستند.) می‌توان نشان داد که دورانها تنها حرکتهای صفحه بیضوی هستند (اوالد، ۱۹۷۱، ص ۵۰). در مدل کروی با نقاط متقاطر مشخص، حرکتها با دوران اقلیدسی حول خطهایی گذرنده از مرکز کره نشان داده می‌شوند (آرتسی ۱۹۶۵، ص ۱۸۱).

اگر قسمت اول برهان گزاره ۷.۹ را دوباره بخوانید و به شکل ۱۲.۹ مراجعه کنید، خواهید دید که گزاره زیر را که نخستین حالت گزاره اصلی ۱۹.۹ برای سه قرینه‌یابی است، در ضمن ثابت کرده‌ایم.

گزاره ۸.۹ اگر T دورانی حول A و m خط غیرمشخصی گذرنده از A باشد، یک خط یکتای l وجود دارد که از A می‌گذرد به‌قسمی که $T = R_l R_m$. هرگاه l بر m عمود نباشد و d تعداد درجات زاویه حاده بین l و m باشد، به‌ازای هر نقطه $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$ داریم

$$(\sphericalangle \mathrm{BAB}')^\circ = ۲d^\circ$$

(بدین ترتیب، مثلاً برای بیان دورانی به زاویه ۹۰° حول A به‌صورت $R_l R_m$، باید خطوط l و m را دو خط گذرنده از A انتخاب کنیم که با هم زاویه ۴۵° می‌سازند.)

هشدار. دوران $R_l R_m$ همان دوران $R_m R_l$ نیست مگر آنکه $l \perp m$. به‌طور شهودی، یکی از این دورانها «دورانی است ساعتگرد» به زاویه $۲d^\circ$ حول A، در حالی که دیگری «دورانی است پادساعتگرد» به‌زاویه $۲d^\circ$. به‌عنوان استدلالی دقیقتر توجه می‌کنیم که

$$(R_m R_l)(R_l R_m) = R_m (R_l^۲) R_m = R_m I R_m = R_m^۲ = I$$

لذا R_lR_m عکس R_mR_l است. در تمرین ۹ نشان خواهید داد که، تنها دورانی که با عکس خود برابر است دوران نیم‌دور است.

گزاره ۹.۹ مجموعه دوران‌های حول نقطه مفروض A، یک گروه جابه‌جایی است.

برهان:

بنابر تعریف تبدیل همانی، دورانی است حول A. هم اکنون نشان دادیم که عکس یک دوران حول A دورانی است حول A. باید نشان دهیم که TT'، حاصل‌ضرب دورانها حول A، دورانی است حول A. فرض می‌کنیم $T' = R_lR_m$. بنابر گزاره ۸.۹، خط یکتای k گذرنده از A وجود دارد چنان‌که $T = R_kR_l$. پس

$$TT' = (R_kR_l)(R_lR_m) = R_k(R_l^2)R_m = R_kIR_m = R_kR_m$$

که دورانی است حول A. برای اثبات جابه‌جایی، مجدداً از گزاره ۸.۹ استفاده کرده خط یکتایی مانند n پیدا می‌کنیم به‌طوری که $T^{-1} = R_nR_m$. پس $T = R_mR_n$ و

$$T'T = (R_lR_m)(R_mR_n) = R_l(R_m^2)R_n = R_lR_n$$

چون $TT' = R_kR_m$ بنابراین $R_k(TT')R_m = R_k^2R_m^2 = I$. ولی از طرفی داریم:

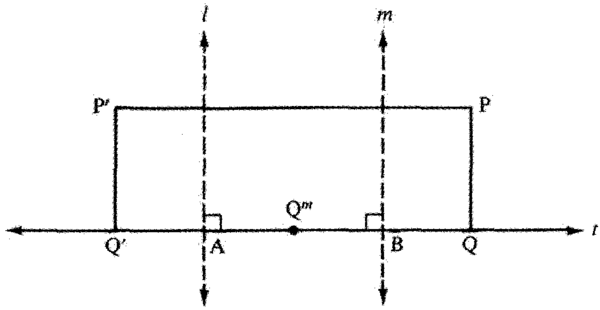
$$R_k(T'T)R_m = R_k(R_lR_n)R_m = (R_kR_l)(R_nR_m) = TT^{-1} = I$$

بنابراین $T'T = TT'$. ■

هشدار. دورانهای حول نقطه‌های مختلف هرگز جابه‌جایی‌پذیر نیستند (مگر اینکه دست کم یکی از آنها همانی باشد). زیرا اگر T دورانی حول A باشد و T′ دورانی حول B، $T'T$، A را به A″ می‌فرستد، در حالی که TT'، A را به (A″)′ می‌فرستد. به‌علاوه حاصل‌ضرب این‌گونه دورانها، ممکن است یک دوران باشد یا نباشد (تمرین ۱۰).

انتقال

حال به انتقال $T = R_lR_m$ که در آن l و m یک عمود مشترک t دارند بازمی‌گردیم. ویژگیهای هندسی انتقال در صفحات هذلولوی با ویژگیهای آن در صفحات اقلیدسی متفاوت است (برخلاف دوران، که در هر دو هندسه رفتار واحدی دارد).



شکل ۱۴.۹

گزاره ۱۰.۹ فرض می‌کنیم $l\perp t$ در A و $m\perp t$ در B باشد و $T = R_lR_m$. اگر Q بر t قرار داشته باشد، آنگاه $\overline{\mathrm{OO'}} = ۲(\overline{\mathrm{AB}})$. اگر P بر t نباشد، P′ در همان طرف t قرار دارد که P در آن واقع است. اگر صفحه اقلیدسی باشد $\overline{\mathrm{PP'}} = ۲(\overline{\mathrm{AB}})$، و اگر هذلولوی باشد $\overline{\mathrm{PP'}} > ۲(\overline{\mathrm{AB}})$.

برهان:

(شکل ۱۴.۹) ما این حالت را درباره $\overline{\mathrm{QQ'}}$ هنگامی که $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{Q}$ ثابت می‌کنیم و حالتهای دیگر را به‌عنوان تمرین به خواننده وامی‌گذاریم. اگر $\overline{\mathrm{BQ}} < \overline{\mathrm{AB}}$ آنگاه $\mathrm{A} * \mathrm{Q}^m * \mathrm{B}$ و

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QQ'}} &= \overline{\mathrm{Q'A}} + \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BQ}} \\ &= \overline{\mathrm{Q}^m\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BQ}^m} \\ &= ۲\overline{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

اگر $\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{AB}}$، آنگاه $\mathrm{Q'} = \mathrm{A}$ و $\overline{\mathrm{QQ'}} = ۲(\overline{\mathrm{AB}})$. اگر $\overline{\mathrm{BQ}} > \overline{\mathrm{AB}}$، آنگاه $\mathrm{Q}^m * \mathrm{A} * \mathrm{B}$ و $\overline{\mathrm{Q}^m\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{Q}^m\mathrm{B}} - \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BQ}} - \overline{\mathrm{AB}}$. بنابراین $\mathrm{Q}^m * \mathrm{A} * \mathrm{Q'} * \mathrm{Q}$ و داریم

$$\begin{aligned}۲\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{QQ}^m} &= \overline{\mathrm{QQ'}} + ۲\overline{\mathrm{Q'A}} \\ &= \overline{\mathrm{QQ'}} + ۲(\overline{\mathrm{BQ}} - \overline{\mathrm{AB}})\end{aligned}$$

یعنی $\overline{\mathrm{QQ'}} = ۲\overline{\mathrm{AB}}$.

اگر P بر t نباشد، P و P^m برخطی عمود بر m قرار دارند که با t موازی است، و لذا در یک طرف t قرار می‌گیرند؛ همچنین است برای P^m و P′ که در یک طرف t قرار خواهند گرفت. لذا بنابر بنداشت م-۴، P و P′ در یک طرف t خواهند بود. فرض می‌کنیم که Q پای عمود مرسوم از P بر t باشد. چون T تعامد را حفظ می‌کند، Q′ پای عمود مرسوم از P′ است بر t؛ و

چون T یک حرکت است، $\mathrm{P'Q'} \cong \mathrm{PQ}$. بنابراین $\square\mathrm{PQQ'P'}$ یک چهارضلعی ساکری است. در هندسه اقلیدسی این چهارضلعی یک مستطیل است و اضلاع مقابلش قابل انطباق‌اند، لذا $\overline{\mathrm{PP'}} = \overline{\mathrm{QQ'}} = ۲(\overline{\mathrm{AB}})$. در هندسه هذلولوی، ضلع بالایی بزرگتر از قاعده است (تمرین ۱، فصل ۶)، بنابراین $\overline{\mathrm{PP'}} > \overline{\mathrm{QQ'}} = ۲(\overline{\mathrm{AB}})$. ■

نتیجه. اگر انتقالی یک نقطه ثابت داشته باشد. این انتقال یک حرکت همانی است.

گزاره ۱۱.۹ اگر T انتقالی در امتداد t، و m خط غیرمشخصی عمود بر t باشد، آنگاه خط یکتایی چون l عمود بر t وجود دارد به‌طوری‌که $T = R_l R_m$.

برهان:

فرض می‌کنیم m خط t را در Q ببرد و l عمودمنصف $\mathrm{QQ'}$ باشد. پس $R_l T$ نقطه Q را ثابت نگاه می‌دارد. فرض می‌کنیم که P نقطه دیگری بر m باشد چنان‌که مانند قبل، $\square\mathrm{PQQ'P'}$ یک چهارضلعی ساکری باشد. چون l در وسط قاعده $\mathrm{QQ'}$ بر آن عمود است، برضلع بالایی $\mathrm{PP'}$ هم در وسطش عمود می‌شود (لم ۲.۶، ص ۲۰۵)، لذا P قرینه $\mathrm{P'}$ است نسبت به l. بنابراین $R_l T$ هر نقطه واقع بر m را ثابت نگاه می‌دارد، و از آنجا $R_l T = R_m$ و

$$T = (R_l^۲)T = R_l R_m$$

درباره یکتایی، اگر $T = R_k R_m$، آنگاه

$$R_l = T R_m = R_k$$

و $l = k$. ■

گزاره ۱۲.۹ اگر خط t داده شده باشد، مجموعه انتقالها در امتداد t، یک گروه جابه‌جایی است.

این برهان، نظیر برهان گزاره ۹.۹ است، تنها به‌جای استفاده از گزاره ۸.۹ از گزاره ۱۱.۹ باید استفاده کرد. ■

گزاره ۱۳.۹ فرض می‌کنیم $T \neq I$، انتقالی در امتداد t باشد. اگر صفحه اقلیدسی باشد، t و همه خطهای موازی با آن، خطهای ناوردای T هستند. اگر صفحه هذلولوی باشد، t تنها خط ناوردای T است.

برهان:

ناوردا بودن t روشن است. در حالت اقلیدسی، اگر $u \| t$، T انتقالی در امتداد u نیز هست (گزاره ۹.۴)، لذا u ناورداست. در هر دو حالت، اگر u، t را در A ببرد، $\mathrm{A'}$

بر t قرار دارد و $\mathrm{A}' \neq \mathrm{A}$، لذا A' بر u واقع نبوده و u ناوردا نیست. فرض می‌کنیم که در حالت هذلولوی، u ناوردا و با t موازی باشد. نقطه دلخواهی مانند P بر u انتخاب می‌کنیم؛ پس $u = \overleftrightarrow{\mathrm{PP}'}$. ولی ما قبلاً دیده‌ایم که P و P' به یک فاصله از t قرار دارند، بنابراین u و t یک عمود مشترک m دارند (قضیه ۴.۶). نشان داده‌ایم که m ناوردا نیست و چون T تعامد را حفظ می‌کند، m' نیز بر $t = t'$ و $u = u'$ عمود است. این امر با یکتا بودن عمود مشترک در هندسه هذلولوی متناقض است (قضیه ۵.۶).■

گزاره ۱۴.۹ حرکت T، خط t و نقطه B بر t داده شده‌اند. در این‌صورت T انتقالی است در امتداد t اگر و تنها اگر نقطه یکتای A بر t وجود داشته باشد به‌قسمی‌که T حاصل‌ضرب نیم‌دورهای $H_A H_B$ باشد.

برهان:

فرض می‌کنیم m خطی عمود بر t در نقطه B باشد. اگر T انتقالی در امتداد t باشد، بنابر گزاره ۱۱.۹، خط یکتای $l \perp t$ وجود دارد چنان‌که $T = R_l R_m$. اگر خط l خط t را در A ببرد، آنگاه

$$H_A H_B = (R_l R_t)(R_t R_m) = R_l(R_t^2)R_m = R_l R_m = T$$

استدلال را برعکس انجام می‌دهیم تا عکس گزاره اثبات شود. ■

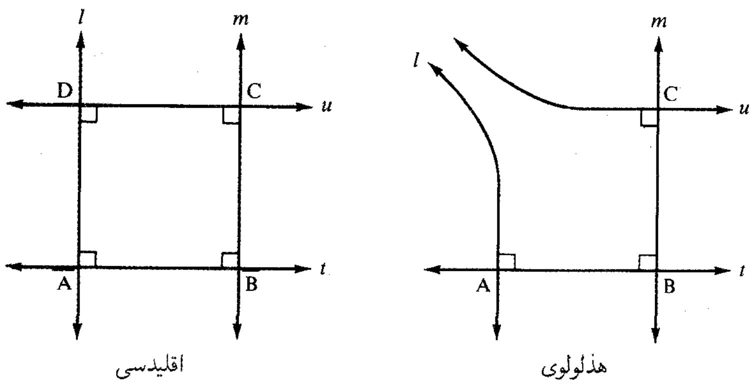
نیم‌دور

پس از آنکه نشان دادیم حاصل‌ضرب دو نیم‌دور یک انتقال است، حال طبیعی است که بپرسیم: حاصل‌ضرب سه نیم‌دور چیست؟ باز هم جواب بستگی به این دارد که هندسه اقلیدسی باشد یا هذلولوی.

گزاره ۱۵.۹ در صفحه اقلیدسی، حاصل‌ضرب سه نیم‌دور $H_{\mathrm{A}} H_{\mathrm{B}} H_{\mathrm{C}}$ یک نیم‌دور است. در صفحه هذلولوی، وقتی A، B، و C هم‌خط باشند، حاصل‌ضرب فقط یک نیم‌دور است؛ و اگر هم‌خط نباشند حاصل‌ضرب ممکن است یک دوران، یک انتقال، یا یک تغییر مکان موازی باشد.

برهان:

فرض می‌کنیم که A، B، و C بر یک خط t واقع، و l، m، و n به‌ترتیب در این نقاط بر t



شکل ۱۵.۹

عمود باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{A}}H_{\mathrm{B}}H_{\mathrm{C}} &= (R_lR_t)(R_tR_m)(R_nR_t) \\ &= R_l(R_t^{۲})R_mR_nR_t \\ &= (R_lR_mR_n)R_t \\ &= R_kR_t \end{aligned}$$

که در آن خط $k\perp t$ با ویژگی $R_kR_n = R_lR_m$ از گزاره ۱۱.۹ به‌دست آمده است. اگر k خط t را در D ببرد، نشان داده‌ایم که $H_{\mathrm{A}}H_{\mathrm{B}}H_{\mathrm{C}} = H_{\mathrm{D}}$.

فرض می‌کنیم که A، B، و C هم‌خط نباشند، $t = \overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$، و $l\perp t$ در A و $m\perp t$ در B باشند. می‌توانیم فرض کنیم که C بر m واقع است (در غیر این‌صورت، به‌جای B پای عمود مرسوم از C بر t را می‌گذاریم و به‌جای A نقطه‌ای را که توسط گزاره ۱۴.۹ به‌دست آمده است قرار می‌دهیم). فرض می‌کنیم که u عمود مرسوم از C بر m باشد (شکل ۱۵.۹). پس،

$$H_{\mathrm{A}}H_{\mathrm{B}}H_{\mathrm{C}} = (R_lR_t)(R_tR_m)(R_mR_u) = R_l(R_t^{۲})(R_m^{۲})R_u = R_lR_u$$

در حالت اقلیدسی، l خط u را در D می‌برد و بر u عمود است (گزاره‌های ۷.۴ و ۹.۴)، لذا $H_{\mathrm{A}}H_{\mathrm{B}}H_{\mathrm{C}} = H_{\mathrm{D}}$. در حالت هذلولوی، l و u ممکن است تلاقی کنند، واگراموازی، یا موازی مجانبی باشند (تمرین ۱۰، فصل ۶)؛ اگر تلاقی در نقطه D باشد، آنگاه $H_{\mathrm{A}}H_{\mathrm{B}}H_{\mathrm{C}}$ دورانی است حول D، ولی نیم‌دور نیست زیرا $\sphericalangle$D چهارمین زاویه یک چهارضلعی لامبرت است. ■

نتیجه. در صفحه اقلیدسی، حاصل‌ضرب دو انتقال در امتدادهای متفاوت، باز یک انتقال است؛ و مجموعه همه انتقالها در امتداد همه خطوط، یک گروه جابه‌جایی است (برهان این نتیجه در تمرین ۱۳ به خواننده واگذار شده است).

نقاط آرمانی در صفحه هذلولوی

حال به مطالعه تأثیر حرکت بر نقطه‌های آرمانی می‌پردازیم. یک نقطه آرمانی Ω، بنابر تعریف، یک رده هم‌ارزی از نیم‌خطهاست، که در آن نیم‌خطها در یک طبقه‌اند اگر یکی شامل دیگری باشد، یا موازیهای حدی برای یکدیگر باشند (تمرینهای اصلی ۲ و ۳، فصل ۶، تضمین می‌کنند که این وضعیت معرف یک رابطه هم‌ارزی نیست).

چون توازی حدی برحسب وقوع و میان‌بود تعریف شده است (ص ۲۰۸)، بنابراین حرکت نسبت توازی حدی را حفظ می‌کند. از این‌رو می‌شود نیم‌خط غیرمشخص r از طبقه Ω را انتخاب کرد و تصویر آن r' بر اثر T را درنظر گرفت و تصویر Ω' را به‌صورت طبقه r' تعریف کرد. اگر $\Omega = \Omega'$ (که بدین معنی است که r' موازی حدی r است یا یکی از این دو شامل دیگری است)، Ω را نقطه آرمانی ثابت T گوییم.

اگر خط t که شامل یک نیم‌خط r است داده شده باشد، طبقه r و طبقه نیم‌خط متقابل به آن دو سر t نامیده می‌شوند و گفته می‌شود که این دو سر بر t قرار دارند. دو نقطه آرمانی Ω و Σ برخط یکتای $\Omega\Sigma$ قرار دارند (یعنی، اگر نیم‌خطهای $r \in \Omega$ و $s \in \Sigma$ از یک نقطه خارج شوند و متقابل نباشند، $\Omega\Sigma$ خط انسداد در زاویه‌ای خواهد بود که از r و s درست شده است (تمرین اصلی ۸، فصل ۶). Ω و Σ را در یک طرف خط t گوییم، هرگاه هیچ‌یک از آنها یک سر t نباشد و خط $\Omega\Sigma$ با t موازی باشد. این بیان معرف یک رابطه ترایایی روی مجموعه نقطه‌های آرمانی ناواقع برخط t است.

گزاره ۱۶.۹ (الف) دو سر m تنها نقاط آرمانی ثابت تقارن R_m و هر انتقال در امتداد $m(\neq I)$ است.

(ب) اگر دورانی یک نقطه آرمانی ثابت داشته باشد، همانی است.

(ج) اگر $(\Omega، \Sigma، \Lambda)$، $(\Omega'، \Sigma'، \Lambda')$ سه‌تایی‌هایی از نقطه‌های آرمانی باشند، آنگاه حرکتی یکتا وجود دارد که یک سه‌تایی را بر سه‌تایی دیگر می‌فرستد.

برهان:

(الف) روشن است که R_m و هر انتقال $T \neq I$ در امتداد m، دو سر Σ و Ω از m را ثابت

نگاه می‌دارد. هرگاه نقطه آرمانی دیگری همچون Λ نیز ثابت بماند، خط $\Sigma\Lambda$ ناوردا می‌شود؛ اما می‌دانیم که Tخط ناوردای دیگری غیر از m ندارد (گزاره ۱۳.۹) و تنها خطهای ناوردای دیگر R_m، خطهای عمود بر m هستند که دو سر آنها بر اثر R_m به هم بدل می‌شوند.

(ب) اگر دورانی حول A، Ω را ثابت نگه‌دارد، $\mathrm{A}\Omega$ ناوردا خواهد بود؛ ولی گزاره‌های ۶.۹ و ۸.۹ ایجاب می‌کنند که فقط دوران همانی، یک نیم‌خط ناوردا، خارج شده از A، داشته باشد.

(ج) نقطه یکتای B بر $\Sigma\Omega$ وجود دارد چنان‌که $\measuredangle\Lambda\mathrm{B}\Omega$ یک زاویه قائمه است (تمرین اصلی ۱۰، فصل ۶). فرض می‌کنیم B' نقطه‌ای بر $\Sigma'\Omega'$ باشد چنان‌که $\measuredangle\Lambda'\mathrm{B}'\Omega'$ قائمه باشد. فرض می‌کنیم A نقطه غیرمشخصی غیر از B بر $\mathrm{B}\Lambda$ باشد، و C نقطه دلخواهی غیر از B بر $\mathrm{B}\Omega$. بنابر بنداشت ق-۱ نقطه‌های یکتای A' بر $\mathrm{B}\Lambda'$ و C' بر $\mathrm{B}'\Omega'$ وجود دارند به‌قسمی‌که

$$\mathrm{AB} \cong \mathrm{A'B'} \quad \text{و} \quad \mathrm{CB} \cong \mathrm{C'B'}$$

پس $\Delta\mathrm{ABC} \cong \Delta\mathrm{A'B'C'}$ (ض‌زض)، لذا بنابرگزاره ۵.۹، حرکت یکتایی چون T وجود دارد که این قابلیت انطباق را عملی سازد. روشن است که T، $(\Omega, \Sigma, \Lambda)$ را به $(\Omega', \Sigma', \Lambda')$ می‌فرستد. برعکس، هر حرکتی نظیر این می‌بایست $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ را به $(\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}')$ بفرستد، و لذا بنابرگزاره ۵.۹، T یکتاست. ■

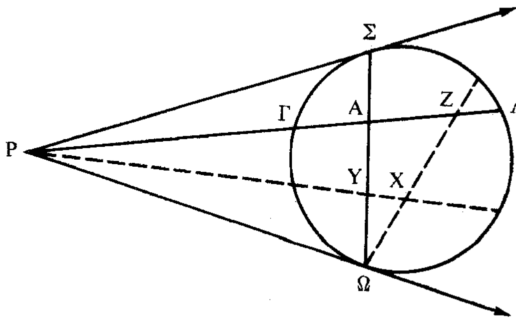
توضیح. قسمت (ج) این گزاره را می‌توان برحسب مدل کلاین به‌نحو جالبی مجسم کرد. نقاط آرمانی را با نقاط واقع بر مطلق (دایره به شعاع واحد) نشان می‌دهیم. حرکت یکتایی مانند T وجود دارد که هر سه‌تایی $(\Sigma, \Omega, \Lambda)$ واقع بر مطلق را بر سه‌تایی دلخواه دیگری می‌نگارد. اثر T بر نقاط دیگر را می‌توان به‌ترتیب زیر بیان کرد (شکل ۱۶.۹).

اگر P قطب وتر $\Omega\Sigma$ باشد، خط $\mathrm{P}\Lambda$ عمود کلاینی بر $\Omega\Sigma$ در یک نقطه A خواهد بود. پس A'، تصویر A، باید محل تلاقی $\Omega'\Sigma'$ با $\Lambda\mathrm{P}'$ باشد، که P' قطب $\Omega'\Sigma'$ است. نقطه دیگری چون B بر $\Omega\Sigma$ می‌گیریم؛ مثلاً، $\mathrm{A} * \mathrm{B} * \Omega$. بنابر قضیه ۴.۷، B'، تصویر B، نقطه یکتایی است بین A' و Ω' به‌طوری که نسبتهای ناهمساز محفوظ می‌مانند:[1]

$$(\mathrm{AB}, \Omega\Sigma) = (\mathrm{A'B'}, \Omega'\Sigma')$$

فرض می‌کنیم Γ نقطه تلاقی دیگر $\mathrm{P}\Lambda$ با مطلق باشد ـــ تصویر آن Γ'، نقطه تلاقی $\mathrm{P}'\Lambda'$

۱. نگاشت $\Omega\Sigma$ بر رابطه $\Omega'\Sigma'$ که با این تساوی نسبتهای ناهمساز داده شده است، ویژگی تصویری یا تصویربود نامیده می‌شود. این رابطه را از لحاظ هندسی می‌توان با یک رشته نگاشت منظری، حداکثر سه نگاشت، بیان کرد (ص ۲۸۰). در اصل، این یک «قضیه اساسی هندسه تصویری» است (اوالد، ۱۹۷۱، قضیه ۵.۹.۵، ص ۲۲۶).



شکل ۱۶.۹

با مطلق است. مانند قبل می‌توانیم برای تعیین تصویر هر نقطه واقع بر $\Gamma\Lambda$، از نسبتهای ناهمساز استفاده کنیم. سرانجام، هرگاه نقطه دیگر X (عادی یا آرمانی) داده شده باشد، آن را نقطه تلاقی دوخط درنظر می‌گیریم: یکی XP که $\Omega\Sigma$ را در نقطه‌ای مانند Y می‌برد، و دیگری $X\Omega$ (یا $X\Sigma$) که $\Gamma\Lambda$ را در نقطه‌ای چون Z می‌برد. پس X' نقطه تلاقی $P'Y'$ با $Z'\Omega'$ (یا $Z'\Sigma'$) است.

این نحوه پیداکردن نقطه، که حرکت T را صرفاً برحسب وقوع بیان می‌کند، این حدس را به ذهن القا می‌کند که هر هم‌خطی در صفحه هذلولوی یک حرکت است. این حدس را کارل منگر و شاگردانش ثابت کردند.[1] در صفحه اقلیدسی هم‌خطی‌های زیادی وجود دارند که حرکت یا تشابه نیستند (←تمرین ۳۴، درباره تبدیلات آفین).

تغییر مکانهای موازی

حال به مطالعه تغییر مکانهای موازی در امتداد یک نقطه آرمانی Σ می‌پردازیم.

گزاره ۱۷.۹ تغییر مکان موازی $T = R_l R_m$، که در آن l و m در امتداد نقطه آرمانی Σ موازی مجانبی هستند، داده شده است. در این‌صورت:

(الف) T نقطه عادی ثابت ندارد.

(ب) اگر k خطی گذرنده از Σ، و A نقطه‌ای بر k باشد، Σ بر h، عمودمنصف AA'، واقع

1. L. Blumenthal and K. Menger (1970, p.220). K. Menger, "The New Foundation of Hyperbolic Geometry," in J. C. Butcher (ed.), *A Spectrum of Mathematics* (Auckland and Oxford University Presses, 1971), p. 86.

این برهان در تمرین ک-۲۱، فصل ۷، مطرح شده است.

(ج) T خط ناوردا ندارد.

(د) Σ تنها نقطه آرمانی ثابت T است.

(هـ) مجموعه تغییر مکانهای موازی در امتداد Σ یک گروه جابه‌جایی است.

(و) یک حرکت با تنها یک نقطه ثابت آرمانی، یک تغییر مکان موازی است.

برهان:

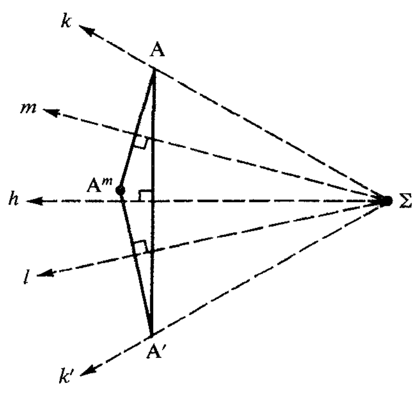
(الف) فرض می‌کنیم که A ثابت بماند. در این‌صورت خط واصل بین A و $\mathrm{A}^l = \mathrm{A}^m$، هم بر l عمود است و هم بر m، که متناقض با فرض است.

(ب) Σ بر دو عمودمنصف l و m از مثلث $\Delta \mathrm{A}\mathrm{A}^m\mathrm{A}'$ قرار دارد، لذا بنابر تمرین اصلی ۷، فصل ۶، Σ بر سومین عمودمنصف، h، نیز قرار دارد. پس R_hT، A و Σ را ثابت نگه‌می‌دارد. بنابر گزاره ۱۶.۹(ب) R_hT نمی‌تواند دورانی حول A باشد. بنابر گزاره ۴.۹، باید یک قرینه‌یابی باشد و مطابق گزاره ۱۶.۹(الف)، باید تقارنی نسبت به خط k، واصل بین A و Σ باشد (شکل ۱۷.۹).

(ج) فرض می‌کنیم خط t بر اثر T ناوردا بماند. نقطه دلخواه A را بر t می‌گیریم و h و k را مانند (ب) فرض می‌کنیم. پس $h \perp t = \overleftrightarrow{\mathrm{AA'}}$، بنابراین t بر اثر R_h هم ناوردا می‌ماند. بنابراین t بر اثر $R_k = R_hT$ ناورداست که بدین معنی است که $t \perp k$ یا $t = k$. اما خطهای موازی مجانبی h و k نمی‌توانند یک عمود مشترک داشته باشند (یا متعامد باشند).

(د) اگر T نقطه آرمانی ثابت دیگری مانند Ω داشته باشد، خط $\Omega\Sigma$ ناوردا خواهد ماند، که متناقض با (ج) است.

(هـ) برهان این قسمت عیناً نظیر برهان گزاره ۹.۹ است، فقط به‌جای استفاده از گزاره ۹.۹،



شکل ۱۷.۹

باید از قسمت (ب) گزاره ۸.۹ استفاده کرد. (و) این قسمت، از طبقه‌بندی حرکات (قضیه ۱.۹)، نتیجه می‌شود و صرفاً برای سادگی در اینجا گنجانده شده است. ■

لغزه

اکنون به آخرین نوع حرکت، یعنی لغزه در امتداد خط t می‌پردازیم، که بنابر تعریف، عبارت است از $T' = R_t T$ یعنی حاصل‌ضرب یک انتقال ناهمانی T در امتداد t، در یک تقارن R_t نسبت به t. (اگر مستقیم روی برف راه بروید، جا پاهای متوالی شما با یک لغزه به‌هم مربوط می‌شوند.)

گزاره ۱۸.۹ (شکل ۱۸.۹) فرض می‌کنیم $l \perp t$ در A، $m \perp t$ در B، $T = R_l R_m$، و $T' = R_t T$ داده شده باشند. در این‌صورت

(الف) $TR_t = T'$.

(ب) $H_{\mathrm{A}} R_m = T' = R_l H_{\mathrm{B}}$.

(ج) T' هر طرف t را به‌طرف دیگر می‌نگارد.

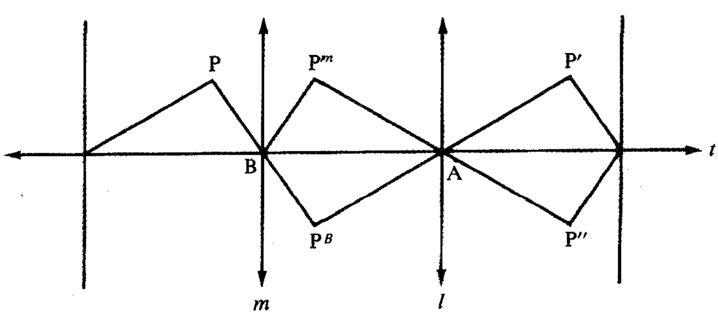
(د) T' نقطه ثابت ندارد.

(ه) t تنها خط ناوردای T' است.

(و) برعکس، هرگاه نقطه B و خط l داده شده باشند، فرض می‌کنیم t عمود مرسوم بر l در B باشد؛ دراین‌صورت $R_l H_B$ یک لغزه در امتداد t است هرگاه B بر l نباشد، و R_t است هرگاه B بر l باشد.

برهان:

(الف) و (ب) از فرمولهای $H_{\mathrm{A}} = R_t R_l = R_l R_t$ و $H_{\mathrm{B}} = R_t R_m = R_m R_t$ نتیجه



شکل ۱۸.۹

می‌شوند. (ج) روشن است و (د) از آن نتیجه می‌شود. (هـ) از (ج) و (د) نتیجه می‌شود. اما (و)، هرگاه B بر l واقع باشد، آنگاه $H_{\mathrm{B}} = R_l R_t$، لذا $R_l H_B = R_l(R_l R_t) = (R_l^{۲})R_t = R_t$. اگر B بر l نباشد، فرض می‌کنیم $m \neq l$ عمود بر t در B باشد. پس $T = R_l R_m \neq I$ و $R_l H_{\mathrm{B}} = T R_t$. ■

مشخصه لغزه در هندسه اقلیدسی این است که فقط یک خط ناوردا دارد. در هندسه هذلولوی این ویژگی موجب تمایز آن از انتقال نمی‌شود، لذا در این مورد باید این شرط را نیز، که دو طرف خط ناوردا با هم عوض می‌شوند، به آن اضافه کرد. خط ناوردا محور لغزه نامیده می‌شود.

لم یلمسلو. فرض می‌کنیم G یک لغزه، l خطی که بر اثر G ناوردا نیست، و l' تصویر l بر اثر G باشد. هنگامی که P بر l و تصویر آن P' بر l' تغییر مکان می‌دهد، وسط پاره‌خطهای PP'، همه بر t، محور G، قرار می‌گیرند. به‌علاوه، این وسطها همه از یکدیگر متمایزند، به‌استثنای حالت $G = H_{\mathrm{M}} R_l$، که در آن همه وسطها بر M منطبق‌اند؛ این حالت فقط و فقط زمانی رخ می‌دهد که t، محور G، هم بر l عمود باشد و هم بر l'.

برهان به‌عنوان تمرین ۲۱ واگذار شده است. این لم، روش تعیین محور یک لغزه را به ما می‌دهد.

طبقه‌بندی حرکات

هدف بعدی ما این است که نشان دهیم هر حرکت یک قرینه‌یابی، یک دوران، یک انتقال، یک تغییر مکان موازی، یا یک لغزه است. نخستین گام، تشریح حاصل‌ضرب سه تقارن محوری است. برای این منظور، سه نوع دسته‌خط به شرح زیر تعریف می کنیم:

۱. دسته همه خطهای گذرنده از نقطه مفروض P.

۲. دسته همه خطهای عمود بر خط مفروض t.

۳. دسته همه خطهای گذرنده از یک نقطه آرمانی Σ (نقطه در صفحه هذلولوی).

روشن است که دو خط l و m دسته‌خط یکتایی را تعیین می‌کنند (اگر l و m در صفحه هذلولوی به‌طور واگراموازی باشند، مطابق قضیه۶.۶، فصل ۶، یک عمود مشترک t دارند). به‌علاوه، اگر A نقطه دلخواهی باشد، در آن دسته‌خط، یک خط n گذرنده از A وجود دارد. به‌ازای این سه نوع دسته‌خط، n عبارت است از:

۱. خط $\overleftrightarrow{\mathrm{AP}}$ اگر $\mathrm{A} \neq \mathrm{P}$.

۲. خط عمود بر t گذرنده از A.

۳. خط $\mathrm{A}\Sigma$.

نخستین قسمت گزاره بعد، گاهی «قضیه سه‌تقارنی» نامیده می‌شود. ف. باخمان آن را بنداشتی برای ارائه هندسه‌ای بدون بنداشتهای پیوستگی یا میان‌بود اختیار می‌کند.[1]

گزاره ۱۹.۹ فرض می‌کنیم $T = R_l R_m R_n$. (۱) هرگاه l، m، و n به یک دسته‌خط متعلق باشند، T تقارنی است نسبت به یکی از خطهای این دسته. (۲) هرگاه l، m، و n به یک دسته‌خط متعلق نباشند، T یک لغزه است.

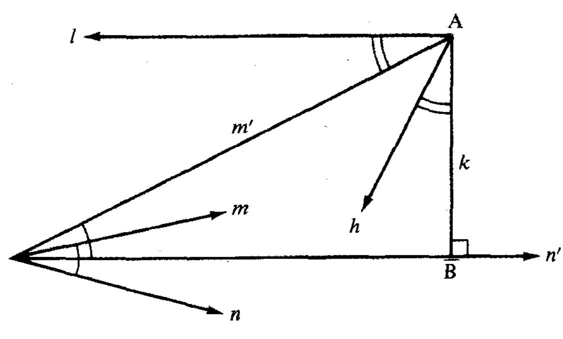
این گزاره، گزاره جالبی است و ما را به طبقه‌بندی کامل حرکات هدایت می‌کند. شاید شما ندانید که چگونه محور لغزه T به سه خط مفروض مربوط می‌شود؛ در حالتی که هندسه اقلیدسی است، تمرینهای ۵۵ـ۵۷ پاسخگوی این پرسش‌اند.

برهان:

قسمت اول گزاره ۱۹.۹ از گزاره‌های ۸.۹، ۱۱.۹، و ۱۷.۹(ب) نتیجه می‌شود. لذا فرض می‌کنیم خطها متعلق به یک دسته‌خط نباشند. نقطه مفروض A را بر l انتخاب و فرض می‌کنیم m' خطی گذرنده از A متعلق به دسته‌خطی باشد که با m و n مشخص شده است (شکل ۱۹.۹). پس خطی مانند n' موجود است به‌قسمی‌که

$$R_{m'} R_m R_n = R_{n'}$$

فرض می‌کنیم B پای عمود k مرسوم از A بر n' باشد. چون l، m'، و k از A می‌گذرند، خطی



شکل ۱۹.۹

[1]. باخمان نقطه‌های آرمانی و فراآرمانی را دسته‌خطهایی از نوع دوم و سوم معرفی می‌کند، و با استفاده از روشی که هندسه‌دان دانمارکی ی. یلمسلو کشف کرده ثابت می‌کند صفحه‌ای که بدین‌ترتیب بسط داده شده صفحه‌ای تصویری است که مختصات آن از یک میدان جابه‌جایی گرفته شده است. (پیوست ب)

مانند h موجود است چنان‌که

$$R_l R_{m'} R_k = R_h$$

بنابراین B بر h واقع نیست (بنابر فرض درباره l، m، و n)، لذا به‌موجب گزاره ۱۸.۹ (و)، $R_h H_{\mathrm{B}}$ لغزه‌ای است در امتداد عمود بر h از B. اما

$$R_h H_{\mathrm{B}} = R_h(R_k R_{n'}) = R_l R_{m'} R_k R_{m'} R_m R_n = T \quad \blacksquare$$

نتیجه. هر حاصل‌ضرب $R_l R_m H_{\mathrm{A}}$ با یک حاصل‌ضرب $R_h R_k$ مساوی است.

برهان:

فرض می‌کنیم n خطی گذرنده از A در دسته‌خطی باشد که با l و m مشخص شده است. اگر h خطی باشد به‌قسمی‌که

$$R_l R_m R_n = R_h$$

و k عمودبر n، مرسوم از A باشد، آنگاه

$$R_l R_m H_{\mathrm{A}} = R_l R_m R_n R_k = R_h R_k \quad \blacksquare$$

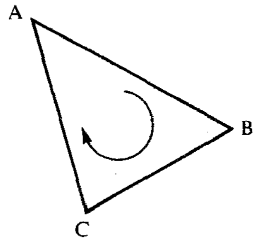
تعریف. چنان‌که قبلاً گفتیم حرکتی را مستقیم (یا خاص یا جهت‌نگهدار) می‌نامیم، هرگاه حاصل‌ضرب دو تقارن محوری بوده یا یک تبدیل همانی باشد. حرکتی غیرمستقیم (یا غیرخاص یا جهت‌برگردان) خوانده می‌شود که یک تقارن محوری یا یک لغزه باشد.

قضیه۱.۹ هر حرکت یا مستقیم است یا غیرمستقیم، و هر دو نیست. مجموعه حرکات مستقیم، یک گروه است. حاصل‌ضرب دو حرکت غیرمستقیم، حرکتی است مستقیم، در حالی که حاصل‌ضرب یک حرکت مستقیم در یک حرکت غیرمستقیم، حرکتی است غیرمستقیم.

برهان:

می‌دانیم که هر حرکت، حاصل‌ضرب حداکثر سه تقارن محوری است (نتیجه گزاره ۵.۹)، لذا طبق گزاره ۱۹.۹، هر حرکت یا مستقیم است یا غیرمستقیم. حرکات غیرمستقیم بدین‌ترتیب مشخص می‌شوند که یک خط ناوردا دارند که دو طرفش با هم عوض می‌شوند.

حاصل‌ضربهای مستقیم $(R_k R_l)(R_m R_n)$ داده شده است. اگر l، m، و n به یک دسته‌خط متعلق باشند، داریم $R_l R_m R_n = R_h$ و حاصل‌ضرب بالا به $R_k R_h$ بدل می‌شود که حرکتی است مستقیم. اگر چنین نباشد، آنگاه $R_l R_m R_n = R_h H_{\mathrm{B}}$ (گزاره‌های ۱۹.۹ و ۱۸.۹(ب))،



شکل ۹.۲۰

و نتیجه بالا به ما می‌گوید که $R_k(R_h H_{\mathrm{B}})$ حرکتی است مستقیم. از اینجا نتیجه می‌شود که حرکتهای مستقیم یک گروه تشکیل می‌دهند.

حاصل‌ضرب یک تقارن محوری و یک حرکت مستقیم، بنابر گزاره ۱۹.۹، حرکتی است غیرمستقیم. حاصل‌ضرب یک لغزه و یک حرکت مستقیم، حاصل‌ضرب پنج تقارن محوری است، که به‌موجب قسمت قبل، به‌حاصل‌ضرب سه تقارن محوری بدل می‌شود. بنابراین، طبق گزاره ۱۹.۹، حرکت غیرمستقیم است. به‌طریق مشابه، حاصل‌ضرب چهار تا شش تقارن محوری به حاصل‌ضرب دو تقارن محوری بدل می‌شود. ■

توضیح. ایده شهودی که در پشت طبقه‌بندی حرکات وجود دارد این است که می‌توان به صفحه دو «جهت» متمایز داد، به‌طوری که مثلاً، رئوس $\Delta\mathrm{ABC}$ را می‌توان در جهت «ساعتگرد» مرتب نمود (شکل ۹.۲۰). هنگامی که مثلثی بر اثر دوران، انتقال، یا تغییر مکان موازی حرکت داده شود جهت $\Delta\mathrm{A'B'C'}$ در همان جهت ساعتگرد باقی می‌ماند؛ در حالی که بر اثر تقارن محوری یا لغزه، جهت رأسها در جهت پادساعتگرد قرار می‌گیرند (برای بحث بیشتر درباره جهت، ←تمرین ۲۳).

توضیح. در صفحه بیضوی، ناوردایی که بر اثر دوران محفوظ بماند و بر اثر تقارن محوری معکوس شود وجود ندارد، زیرا هر تقارن محوری دورانی است به زاویه 180°؛ در صفحه بیضوی، تفاوتی بین حرکت مستقیم و غیرمستقیم وجود ندارد. تنها حرکت موجود در این صفحه، دوران است.

خودریختی‌های مدل دکارتی

هدف بعدی ما این است که گروههای حرکات را به سرعت و به‌صورتی روشن برحسب مختصات در مدلهای هندسه‌های خود مورد بررسی قرار دهیم. از مدل دکارتی صفحه اقلیدسی شروع کرده

جدول ۹-۱ جدول حرکات

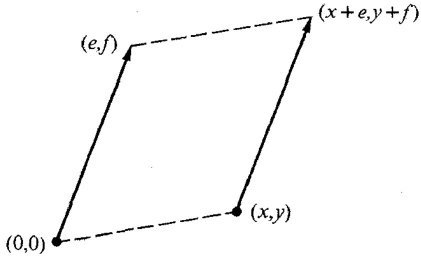
	جهت	نقطه‌های ثابت	خطهای ناوردا	نقاط آرمانی ثابت (صفحهٔ هذلولوی)
همانی	مستقیم	همه	همه	همه
تقارن R_l	غیرمستقیم	نقاط واقع بر l	l و همهٔ خطهای $m \perp l$	دوسر l
نیم‌دور H_A	مستقیم	A	همهٔ خطهای گذرنده از A	هیچ
دوران نابرگشتی	مستقیم	یک	هیچ	هیچ
انتقال اقلیدسی در امتداد t	مستقیم	هیچ	t و همهٔ خطهای $u \parallel t$	-
انتقال هذلولوی در امتداد t	مستقیم	هیچ	فقط خط t	دوسر t
تغییر مکان موازی	مستقیم	هیچ	هیچ	یک
لغزه در امتداد t	غیرمستقیم	هیچ	t	دوسر t

و در این قسمت و در قسمت بعد فرض می‌کنیم که خواننده با بردارها، ماتریسها، و اعداد مختلط تا حدودی آشنایی دارد.

ساده‌ترین تبدیلی را که باید بررسی کنیم انتقال است. همان‌گونه که در برهان گزاره ۹.۱۰ نشان داده شد، یک انتقال هر نقطه را به فاصله ثابت و در امتدادی ثابت حرکت می‌دهد (در شکل ۹.۸ هر نقطه به فاصله $2\overline{AB}$ در امتداد $\overrightarrow{BA}$ حرکت داده شده است). این امر را می‌توان با برداری به‌طول $2\overline{AB}$ نشان داد که از مبدأ مختصات خارج شده و متوجه امتداد مفروضی است. اگر (e, f) مختصات انتهای این بردار باشد، طبق تعریف جمع بردارها، انتقال با فرمول

$$T(x, y) = (x, y) + (e, f) = (x + e, y + f)$$

(شکل ۹.۲۱)، یا



شکل ۹.۲۱

$$x' = x + e$$
$$y' = y + f$$

داده می‌شود.

هرگاه انتقال دیگری چون T' را بر این بردار جدید که مختصات انتهای آن (e', f') است اعمال کنیم، (x'', y'') تصویر نقطه (x, y) بر اثر $T'T$ با فرمول

$$(x'', y'') = (x', y') + (e', f') = (x + e + e', yf + f')$$

داده می‌شود. $T'T$ انتقالی است به‌اندازه مجموع بردارهایی که T و T' تعیین می‌کنند. این مطلب همان اثبات گزاره زیر است.

گزاره ۲۰.۹ در مدل دکارتی صفحه اقلیدسی، انتقالها یک گروه جابه‌جایی تشکیل می‌دهند که با گروه بردارها بر اثر جمع، یکریخت است.

(بنابر تعریف کلی مدلهای یکریخت، دو گروه یکریخت‌اند هرگاه یک تناظر یک‌به‌یک بین آنها وجود داشته باشد که قوانین گروهی را حفظ کند؛ در اینجا دو گروه به مثابه مدلهای دستگاه بنداشتهای ۱ تا ۴ صفحه ۳۲۶ درنظر گرفته شده‌اند).

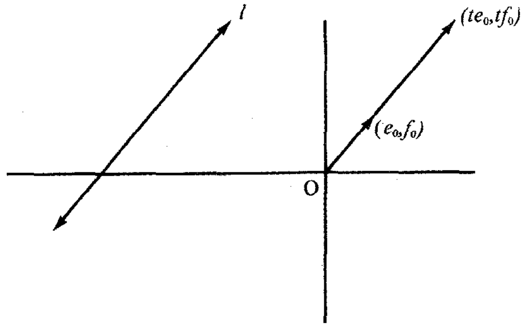
گوییم انتقالها گروه دوپارامتری تشکیل می‌دهند، زیرا به دو متغیر حقیقی (e, f) بستگی دارند.[1]

گزاره ۲۱.۹ در مدل دکارتی صفحه اقلیدسی، انتقالها در امتداد یک خط ثابت، گروهی یک‌پارامتری تشکیل می‌دهند که با گروه اعداد حقیقی بر اثر جمع، یکریخت است.

برهان:

فرض می‌کنیم $(e_\circ, f_\circ)$ بردار واحدی به موازات خط ثابت l باشد (شکل ۲۲.۹). در این‌صورت بردار متناظر با انتقال T در امتداد l به‌صورت $t(e_\circ, f_\circ) = (te_\circ, tf_\circ)$ است که $|t|$ فاصله انتقال است و t مثبت یا منفی است برحسب اینکه جهت انتقال با جهت $(e_\circ, f_\circ)$ یکسان باشد یا نباشد. اگر T' متناظر با بردار $t'(e_\circ, f_\circ)$ باشد، $T'T$ با بردار $t(e_\circ, f_\circ) + t'(e_\circ, f_\circ) = (t+t')(e_\circ, f_\circ)$

۱. نظریه گروه تبدیلاتی که به‌طور پیوسته به پارامترهای حقیقی بستگی دارند، نخستین بار به‌دست ریاضیدان بزرگ نروژی، سوفوس لی، در اواخر سده نوزدهم بسط داده شد و به‌صورت یکی از پرثمرترین ایده‌های ریاضیات و فیزیک سده بیستم درآمد. (مثلاً از این گزاره برای پیش‌بینی وجود بعضی از ذرات زیراتمی استفاده می‌شود.)
F. S. Dyson, "Mathematics in the Physical Science," *Scientific American*, September 1964.



شکل ۲۲.۹

متناظر می‌شود. بنابراین تخصیص پارامتر t به T این یکریختی را مشخص می‌کند. ■

اکنون درباره دوران حول نقطه ثابت A بحث می‌کنیم. اولین مرحله برای این امر، تبدیل مسئله به حالتی است که A مبدأ O باشد. اگر A مبدأ نباشد، فرض می‌کنیم T انتقالی در امتداد $\overleftrightarrow{\mathrm{AO}}$ باشد که A را به O می‌برد. لذا (بنابر گزاره ۱۱.۹)

$$T = R_m R_l = R_{l^*} R_m$$

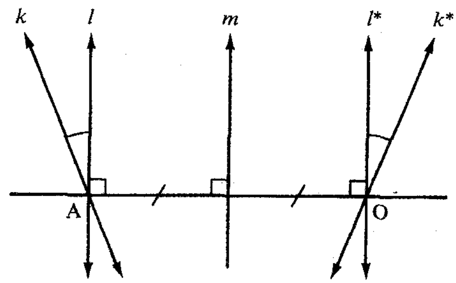
که در آن m عمودمنصف AO و l، l^* عمودهای مرسوم بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AO}}$ به‌ترتیب در نقاط A و O هستند. دوران مفروض R حول A را می‌توان (طبق گزاره ۸.۹) به‌صورت

$$R = R_l R_k$$

نوشت که در آن k از A می‌گذرد. فرض می‌کنیم k^* قرینه k نسبت به m باشد (شکل ۲۳.۹). بنابراین $R^* = R_{k^*} R_{l^*}$ دورانی در حول O است و

$$\begin{aligned} T^{-1} R^* T &= (R_l R_m)(R_{k^*} R_{l^*})(R_{l^*} R_m) \\ &= R_l R_m R_{k^*} (R_{l^*})^2 R_m \\ &= R_l (R_m R_{k^*} R_m) \\ &= R_l R_k \\ &= R \end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که دوران l حول A به‌طور یکتا با دوران R^* حول O معین می‌شود. به‌علاوه، نگاشت $R^* \to T^{-1} R^* T$ یک یکریختی از گروه دورانها حول O به گروه دورانها حول A است، که شما به آسانی می‌توانید آن را تحقیق کنید. پس می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{A} = \mathrm{O}$.



شکل ۲۳.۹

بنابر گزاره ۸.۹، دوران مفروض حول O را می‌توان به‌صورت $R = R_l R_m$، که در آن m محور xهاست، نوشت. اگر $l \perp m$، آنگاه R در مختصات مختلط به‌صورت

$$z \to -z$$

نشان داده می‌شود (گزاره ۶.۹). در غیر این‌صورت، هرگاه $\theta/۲$، $۰ < \theta/۲ < \pi/۲$، اندازه زاویه حاده l با m برحسب رادیان باشد، R در مختصات مختلط[۱] به‌صورت

$$z \to e^{i\theta} z \qquad \text{(هرگاه شیب } l \text{ مثبت باشد)}$$

$$z \to e^{-i\theta} z \qquad \text{(هرگاه شیب } l \text{ منفی باشد)}$$

نشان داده می‌شود (شکل ۶.۹ و گزاره ۸.۹). از ترکیب این حالتها ملاحظه می‌کنیم که دورانها حول O به‌طور یکتا با تبدیلات

$$z \to e^{i\theta} z \qquad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

نشان داده می‌شوند. چون $e^{i\phi}(e^{i\theta}z) = (e^{i\phi}e^{i\theta})z$، حاصل‌ضرب دو دوران حول O با حاصل‌ضرب $e^{i\phi}e^{i\theta}$ از اعداد مختلط با قدرمطلق ۱ متناظر است. این مطلب گزاره زیر را ثابت می‌کند.

گزاره ۲۲.۹ در مدل دکارتی صفحه اقلیدسی، گروه دورانها حول یک نقطه ثابت با S^1، گروه ضربی یک‌پارامتری اعداد مختلط $e^{i\theta}$ با قدرمطلق ۱ (θ پارامتر حقیقی)، یکریخت است.

حال احکام مذکور را با استفاده از مختصات مختلط ترکیب می‌کنیم. اگر مختص مختلط نقطه‌ای z باشد، انتقال آن با بردار $(e_۰, f_۰)$، عیناً مثل افزودن z به‌عدد مختلط $z_۰ = e_۰ + if_۰$

۱. یادآوری می‌کنیم که $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

است، زیرا جمع اعداد مختلط همانند جمع بردارها انجام می‌گیرد. حال اگر T یک حرکت مستقیم باشد که مبدأ O را به نقطه O' با مختص مختلط $z_\circ$ حرکت دهد، اثر انتقالی به‌اندازه $-z_\circ$ بر اثر T حرکت مستقیمی است که O را ثابت نگاه می‌دارد. مطابق قضایای پیشین، این حرکت دورانی است حول O، بنابراین به‌صورت $z \to e^{i\theta}z$ است. لذا حرکت اصلی ما مساوی است با این دوران به‌علاوه انتقالی به اندازه $z_\circ$. پس گزاره زیر را ثابت کرده‌ایم.

گزاره ۲۳.۹ گروههای حرکات مستقیم مدل دکارتی صفحه اقلیدسی با گروه سه‌پارامتری که در مختصات مختلط با

$$z \to e^{i\theta}z + z_\circ$$

نشان داده می‌شود، یکریخت است.

اکنون می‌خواهیم درباره قانون ضرب این گروه روشنتر صحبت کنیم. فرض می‌کنیم $(e^{i\theta}, z_\circ)$ پارامترهای مختلط T باشند و $(e^{i\theta'}, z'_\circ)$ پارامترهای مختلط T'. آنگاه تصویر z بر اثر $T'T$ چنین خواهد شد:

$$e^{i\theta'}(e^{i\theta}z + z_\circ) + z'_\circ = e^{i(\theta+\theta')}z + (e^{i\theta'}z_\circ + z'_\circ)$$

لذا $(e^{i(\theta+\theta')}, e^{i\theta'}z_\circ + z'_\circ)$ پارامترهای مختلط $T'T$ هستند. به‌عبارت دیگر، پارامترهای دوران درهم ضرب می‌شوند ولی پارامترهای انتقال با هم جمع نمی‌شوند ــضرب $z_\circ$ در $e^{i\theta'}$ متضمن «چرخشی» است که علت آن جابه‌جایی نبودن گروه است (که به اصطلاح فنی یک «حاصل‌ضرب نیمه‌مستقیم» S^1 در گروه جمعی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است).

به‌گونه‌ای دیگر بگوییم، فرض می‌کنیم $T = T_1R_1$ و $T' = T_2R_2$، که در آنها T_iها، $i = 1, 2$، معرف انتقال و R_iها، $i = 1, 2$، معرف دوران حول O هستند. پس

$$T'T = T_2R_2T_1R_1 = T_2R_2T_1(R_2^{-1}R_2)R_1 = T_2(R_2T_1R_2^{-1})(R_2R_1)$$

پرانتز (R_2R_1) حاصل‌ضرب دو دوران حول O و عامل T_2 در طرف چپ تساوی انتقال دوم است؛ پرانتز دیگر نیز «چرخش» را معلوم می‌کند، زیرا $R_2T_1R_2^{-1}$ انتقالی است به‌اندازه $e^{i\theta'}z_\circ$:

$$\begin{aligned} R_2T_1R_2^{-1}(z) &= R_2T_1(e^{-i\theta'}z) \\ &= R_2(e^{-i\theta'}z + z_\circ) \\ &= e^{i\theta'}(e^{-i\theta'} + z_\circ) \\ &= z + e^{i\theta'}z_\circ \end{aligned}$$

نتیجه. حرکتهای غیرمستقیم صفحه دکارتی، نمایش یکتایی به‌صورت

$$z \to e^{i\theta}\bar{z} + z_{\circ}$$

دارند.

برهان:

به‌موجب قضیه ۱.۹، کلیه حرکتهای غیرمستقیم، از قرار دادن یک حرکت غیرمستقیم خاص ــ که می‌توانیم آن را $z \to \bar{z}$، تقارن نسبت به محور Xها بگیریم ــ به‌دنبال همه حرکتهای مستقیم به‌دست می‌آیند. چون $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$، پس $e^{-i\theta}\bar{z} + \bar{z}_{\circ}$ مزدوج مختلط $e^{i\theta}z + z_{\circ}$ است که اگر به‌جای θ، $-\theta$ و به‌جای $z_{\circ}$، $\bar{z}_{\circ}$ بگذاریم نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. ■

این احکام را می‌توان به‌آسانی به تشابه تعمیم داد.

گزاره ۲۴.۹ در مدل دکارتی صفحه اقلیدسی، هر تشابه در مختصات مختلط یا به‌صورت

$$z \to w_{\circ}z_{\circ} + w_{\circ} \qquad w_{\circ} \neq \circ$$

نشان داده می‌شود (که در این حالت مستقیم نامیده می‌شود)، یا به‌صورت

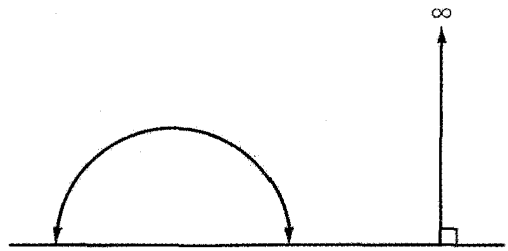
$$z \to w_{\circ}\bar{z}_{\circ} + z_{\circ} \qquad w_{\circ} \neq \circ$$

(که در این حالت غیرمستقیم نامیده می‌شود). تشابه‌های مستقیم یک گروه چهار پارامتری تشکیل می‌دهند.

دامنه $w_{\circ}$ در اینجا $\mathbb{C}^*$ یعنی گروه ضربی اعداد مختلط غیرصفر است، در حالی که دامنه $z_{\circ}$، $\mathbb{C}$ یعنی گروه جمعی همه اعداد مختلط است، که گروه تشابهات مستقیم، «ضریب نیمه مستقیم» $\mathbb{C}^*$ در $\mathbb{C}$ است. $k = |z_{\circ}|$ مقدار ثابت رابطه تشابه است. از لحاظ هندسی، معنی این نمایش این است که یک تشابه مستقیم، با یک تجانس به مرکز O که به دنبال آن یک دوران حول O و پس از آن یک انتقال می‌آید، برابر است. یک تشابه غیرمستقیم با یک تقارن نسبت به محور xها که به‌دنبال آن یک تشابه مستقیم آمده، برابر است. اثبات این امر به‌عنوان تمرین ۲۴ به خواننده واگذار شده است.

حرکت در مدل پوانکاره

حال به بیان مختصاتی حرکتهای هذلولوی می‌پردازیم، و مناسبترین نمایش برای این منظور را نیم‌صفحه بالایی پوانکاره (ص ۲۵۵) می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که خطهای پوانکاره، نیم‌خطهای



شکل ۲۴.۹

قائمی هستند که از نقاط واقع بر محور xها اخراج شده‌اند، یا نیم‌دایره‌هایی هستند که مراکزشان بر محور xها واقع‌اند. نقاط آرمانی در این مدل با نقاط واقع بر محور xها و یک نقطه در بی‌نهایت، ∞، که سر دیگر هر نیم‌خط قائم است، نشان داده می‌شوند (شکل ۲۴.۹).

در تمرین پ-۴، فصل ۷، دیده‌ایم که تقارنهای هذلولوی در مدل قرص پوانکاره به وسیله تقارن اقلیدسی نسبت به قطرهای دایره مطلق γ یا با انعکاس نسبت به دوایر δ عمود بر γ نشان داده می‌شوند. اکنون نشان می‌دهیم که در مدل نیم‌صفحه بالایی، قرینه‌یابیهای هذلولوی با تقارن اقلیدسی نسبت به خطوط قائم، یا با انعکاس نسبت به دوایر δ عمود بر محور xها، یعنی دوایری که مراکزشان بر محور xها واقع‌اند، نشان داده می‌شوند.

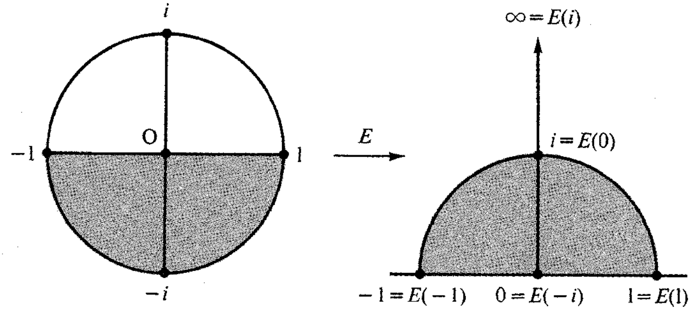
در تمرین ۳۸ نشان خواهید داد که نگاشت

$$E : z \to i\frac{i+z}{i-z}$$

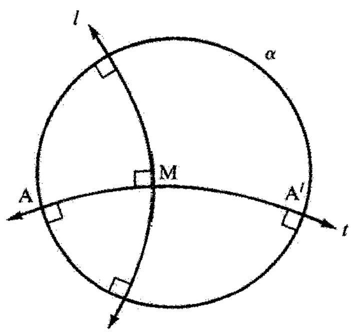
قرص واحد را به‌طور یک‌به‌یک بر نیم‌صفحه بالایی، i را به بی‌نهایت، و همه نقاط دیگر دایره واحد را به‌روی محور xها می‌فرستد.

خطهای پوانکاره مدل قرص، بر خطهای پوانکاره مدل نیم‌صفحه بالایی نگاشت می‌شوند ــ زیرا بر اثر E، همه دایره‌ها و خطهای اقلیدسی به دایره و خط اقلیدسی نگاشت می‌شوند و تعامد محفوظ می‌ماند (E همدیس است) (شکل ۲۵.۹). لذا می‌توانیم از E به مثابه یکریختی‌ای که قابلیت انطباق را در تعبیر نیم‌صفحه بالایی تعریف می‌کند استفاده کنیم (همان‌گونه که قبلاً قابلیت انطباق در مدل کلاین را از راه یکریختی F برقرار کرده بودیم ــ ص ۲۷۱).

برای سادگی، قبول می‌کنیم که قرینه‌یابی اقلیدسی نسبت به خط اقلیدسی را هم «انعکاس» بنامیم. این امر به ما امکان می‌دهد که درباره این مورد خاص، دیگر جداگانه صحبت نکنیم. شکل ۲۶.۹ یک قرینه‌یابی هذلولوی R_l رابطه به مدل قرص را نشان می‌دهد که به‌صورت انعکاس



شکل ۲۵.۹



شکل ۲۶.۹

نموده شده است. به‌ازای هر نقطه A، عمود هذلولوی t را از A بر l وارد کرده و فرض می‌کنیم M پای این عمود باشد. فرض می‌کنیم α دایره هذلولوی گذرنده از A به مرکز هذلولوی M باشد.

در تمرین پ‌ـ۵، فصل ۷، نشان دادید که α یک دایره اقلیدسی (البته با مرکز اقلیدسی متفاوت) نیز هست. پس A^l، قرینه A نسبت به l، نقطه تلاقی دیگر α با t است. اما α بر l عمود است زیرا l امتداد یک قطر هذلولوی α است و بنابراین، α بر اثر انعکاس نسبت به l بر خودش نگاشت می‌شود، و همین‌طور هم t (گزاره ۱۱.۷)، لذا A^l باید منعکس A نسبت به l باشد.

با اعمال نگاشت E، تمامی این شکل بر شکلی یکریخت در نیم‌صفحه بالایی نگاشت می‌شود. بنابراین، برهانی که هم‌اکنون آورده شد، نشان می‌دهد که R_l در مدل نیم‌صفحه بالایی هم با انعکاس نشان داده می‌شود. ■

حال به محاسبه فرمولهای این انعکاسها می‌پردازیم. به‌ازای یک خط قائم $x = k$، انعکاس با

$$(x, y) \to (۲k - x, y)$$

داده می‌شود. این انعکاس برحسب مختصات مختلط یگانهٔ $z = x + iy$ به

$$z \to ۲k - \bar{z}$$

بدل می‌شود. برای یکنواختی نمادها، از این به بعد $۲k$ را مساوی b می‌گیریم و می‌نویسیم

$$z \to -\bar{z} + b$$

به‌ازای یک دایره به مرکز $(k, ۰)$ و شعاع r، تغییر مختصات $x' = x - k$ و $y' = y$ را اعمال می‌کنیم (یعنی مرکز دایره را به مبدأ مختصات انتقال می‌دهیم)؛ تغییر مختصات مختلط آن چنین می‌شود: $z' = z - k$. لذا به موجب تعریف انعکاس z'، تصویر z' با دو معادله

$$|z'||w'| = r^۲$$
$$\frac{z'}{|z'|} = \frac{w'}{|w'|},$$

مشخص می‌شود که جواب آن چنین است:

$$w' = |w'|\frac{z'}{|z'|} = \frac{r^۲}{|z'|}\frac{z'}{|z'|} = r^۲/\bar{z'}$$

زیرا $z'\bar{z'} = |z'|^۲$. لذا در دستگاه مختصات اصلی با $w = w' + k$ خواهیم داشت

$$w = \frac{r^۲}{\bar{z} - k} + k = \frac{k\bar{z} + r^۲ - k^۲}{\bar{z} - k}.$$

برای سهولت، قرار می‌دهیم: $c = ۱/r$ و $a = kc$ و $b = r(۱ - a^۲)$، در این حال انعکاس به‌صورت

$$z \to \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a}$$

در می‌آید، که وقتی $c = ۰$ و $a = -۱$ اختیار شوند، حالت قبل پیش می‌آید. پس نشان داده‌ایم که:

گزاره ۲۵.۹ در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره صفحه هذلولوی، قرینه‌یابی در مختصات مختلط با

$$z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}-a} \quad \text{و} \quad a^{۲}+bc=۱$$

(a، b، و c اعداد حقیقی)، نشان داده می‌شود.

اکنون می‌توانیم نمایش همه حرکات مستقیم هذلولوی را معین کنیم. زیرا این حرکات حاصل‌ضرب دو قرینه‌یابی هستند. محاسبه با ملاحظات کلی زیر ساده می‌شود.

به‌ازای هر میدان ضریب K (مثل $\mathbb{R}$، میدان همه اعداد حقیقی، یا $\mathbb{C}$ ، میدان همه اعداد مختلط)، خط تصویری $\mathscr{P}^{۱}(K)$ را برای K چنین تعریف می‌کنیم که عبارت است از $K\cup\{\infty\}$، که در آن «∞» فقط به معنی نقطه دیگری است که در K نیست. به هر نقطه از این «خط»، مختصات همگن $[x_۱,x_۲]$ تخصیص داده می‌شود، که در آن $x_۱,x_۲\in K$، که هر دو همزمان صفر نیستند. این مختصات فقط با تقریب مضربی از یک اسکالر غیرصفر λ معین خواهد بود، یعنی

$$[x_۱,x_۲]=[\lambda x_۱,\lambda x_۲] \qquad \lambda\neq ۰$$

به‌ویژه، به نقطه $x\in K$ مختصات همگن

$$[x,۱]=[\lambda x,\lambda] \qquad \lambda\neq ۰$$

و به نقطه ∞ مختصات همگن

$$[۱,۰]=[\lambda,۰] \qquad \lambda\neq ۰$$

تخصیص داده می‌شود. ما با ماتریسهای عادی ۲×۲ که ضرایب آنها در K هستند، بر نقطه‌های $\mathscr{P}^{۱}(K)$ عمل خواهیم کرد، به همان روش معمولی که ماتریسها بر بردارها عمل می‌کنند:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲ \\ a_{۲۱}x_۱+a_{۲۲}x_۲ \end{bmatrix}$$

که در اینجا، کروشه‌های دور ماتریس مجدداً بدین معنی هستند که درایه‌های ماتریس فقط با تقریب مضربی از یک اسکالر صفر معین هستند. این عملگرها تبدیلات تصویری نام دارند و بر اثر ضرب ماتریسها، گروهی تشکیل می‌دهند که با $PGL(۲,K)$ نشان داده می‌شود. اما برای به‌دست آوردن تبدیل کسری خطی

$$x \to \frac{a_x+b}{c_x+d}$$

که بر K تعریف شده است می‌توان تبدیل تصویری $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ را بر مختصات همگن x، یعنی $[x, ۱]$، اعمال کرد تا $[ax+b, cx+d]$ به‌دست آید، و سپس ویژگی همگنی را از آن برداشت تا $[(ax+b)/(cx+d), ۱]$ حاصل شود. اگر از این دیدگاه بنگریم، روشن می‌شود که ترکیب دو تبدیل کسری خطی می‌تواند از راه ضرب دو ماتریس انجام گیرد و از این رو، نتیجه نیز یک تبدیل کسری خطی خواهد شد.

حال به نمایش تقارن محوری مورد بحث برمی‌گردیم. دشواری اضافی ما، وجود مزدوج مختلط $\bar{z}$ است که در فرمول گزاره ۲۵.۹ پدید آمده است؛ ولی روشن است که در حاصل‌ضرب دو تقارن، دو مزدوج از هم حذف می‌شوند بی‌آنکه ضرایب آنها تحت‌تأثیر قرارگیرند، زیرا این ضرایب اعداد حقیقی هستند. به‌علاوه، شرط $a^۲ + bc = ۱$ درگزاره ۲۵.۹ بدین معنی است که دترمینان ماتریس تبدیل

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

برابر با -۱ است. به موجب فرمول

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

برای دترمینان حاصل‌ضرب ماتریسها، می‌بینیم که دترمینان حاصل‌ضرب $+۱$ می‌شود.

برعکس، می‌گوییم هر تبدیل کسری خطی با ضرایب حقیقی و دترمینان $+۱$، حاصل‌ضرب دو تقارن محوری هذلولوی است؛ یعنی معادله ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$$

را می‌توان، در صورت معلوم بودن چهار عدد حقیقی سمت راست، رابطه به هشت مجهول سمت چپ حل کرد:

حالت ۱. $u \neq ۰$. در این‌صورت $c' = ۰$، $a' = -۱$، $c = u$، $a = -v$، $b' = (x-v)/u$، و $b = vb' - y$ یک جواب است.

حالت ۲. $u = ۰$ و $y = ۰$. می‌توانیم فرض کنیم $x > ۰$. پس $a = ۰ = a'$، $c = \sqrt{x} = b'$، و $c' = b = c^{-۱}$ یک جواب است.

حالت ۳. $u = ۰$ و $x = v = ۱$. در این‌صورت $c = ۰ = c'$، $a = -۱ = a'$، $b' = ۰$، و $b = -y$ یک جواب است.

حالت ۴. $u = \circ$ این حالت از حالتهای قبل نتیجه می‌شود، زیرا

$$\begin{bmatrix} x & y \\ \circ & x^{-۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & \circ \\ \circ & x^{-۱} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & y/x \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}.$$

و می‌دانیم که حاصل‌ضرب چهار تقارن به حاصل‌ضرب دو تقارن بدل می‌شود (قضیه ۱.۹).

این همان اثبات گزاره زیر است.

گزاره ۲۶.۹ در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره صفحه هذلولوی، حرکتهای مستقیم هذلولوی به وسیله همه تبدیلات کسری خطی

$$z \to \frac{ax+b}{cz+d} \quad , \quad ad - bc = -۱$$

(a، b، c، و d اعداد حقیقی) نشان داده می‌شوند.

این گروه با $PSL\ (۲, \mathbb{R})$ نشان داده می‌شود که گروه خطی تصویری خاص روی میدان اعداد حقیقی نام دارد. این یک گروه سه پارامتری است (یکی از ۴ پارامتر به سبب این شرط که دترمینان برابر با ۱+ است حذف شده است).[۱]

بعد می‌توانیم تمام حرکتهای غیرمستقیم هذلولوی را از ضرب حرکتهای مستقیم در یک حرکت غیرمستقیم ثابت به‌دست آوریم. برای این حرکت اخیر، فرض می‌کنیم از قرینه‌یابی رابطه به محور yها، $z \to -\bar{z}$، استفاده کنیم. نتیجه چنین می‌شود:

$$z \to \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}$$

که پس از نام‌گذاری ضرایب، گزاره زیر به‌دست می‌آید.

گزاره ۲۷.۹ در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره صفحه هذلولوی، حرکتهای غیرمستقیم هذلولوی با همه نگاشتهای

$$z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \qquad ad - bc = -۱$$

(a، b، c، و d اعداد حقیقی) نشان داده می‌شوند.

۱. گروه $SL(۲, \mathbb{R})$، گروه همه ماتریسهای حقیقی ۲ × ۲ با دترمینان ۱+ است. این گروه در نظریه تحلیلی اعداد بی‌اندازه مهم است. درکتابی که س. لانگ (۱۹۷۵) نوشته تماماً به این گروه اختصاص داده شده است.
(S. Lang, Addison Wesley, Reading, Mass., 1975.)

می‌توانیم حرکتهای مستقیم و غیرمستقیم را ترکیب کنیم و آنها را توسط همه تبدیلات تصویری حقیقی خط تصویری حقیقی $\mathscr{P}^1(\mathbb{R})$، با ماتریسهایی نشان دهیم که معرف حرکتهای مستقیم یا حرکتهای غیرمستقیم هستند برحسب اینکه دترمینان Dی آنها مثبت یا منفی باشد، زیرا

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/\sqrt{|D|} & b/\sqrt{|D|} \\ c/\sqrt{|D|} & d/\sqrt{|D|} \end{bmatrix}$$

و دترمینان ماتریس سمت راست ± 1 است.

نتیجه. گروه همه حرکتهای هذلولوی با $PGL(2, \mathbb{R})$ یکریخت است.

این یکریختی تشابهی را بین هندسه تصویری حقیقی یک‌بعدی و هندسه هذلولوی دوبعدی به ذهن القا می‌کند.[1] مثلاً گزاره ۱۶.۹(ج) مربوط به این قضیه در هندسه تصویری است که به‌ازای هر جفت سه‌نقطه‌ای بر خط تصویری، یک تبدیل تصویری یکتایی وجود دارد که سه‌تایی اول را بر سه‌تایی دوم می‌نگارد (تمرین ۶۵). همچنین، تبدیلات تصویری برحسب نقاط ثابتشان طبقه‌بندی می‌شوند. برای یک نقطه ثابت، معادله آن چنین است:

$$x = \frac{ax + b}{cx + d}$$

یا

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0$$

که نشان می‌دهد تعداد نقاط متناهی ثابت برابر با ۰، ۱، یا ۲ است. از آنجا که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

می‌بینیم که نقطه ∞ نقطه‌ای ثابت است اگر و تنها اگر c مساوی صفر باشد. در این‌صورت معادله درجه دوم فوق به معادله خطی بدل می‌شود؛ و اگر تبدیل همانی نباشد، فقط وقتی نقطه متناهی ثابت دارد که $a \neq d$.

طبقه‌بندی ارائه‌شده برای حرکتهای هذلولوی نشان داد که تعداد نقاط آرمانی ثابت برای دوران ۰، و برای تغییر مکان موازی ۱، و برای تقارن محوری، انتقال، و لغزه ۲ است.

---

۱. برنامه ارلانگر کلاین، بسیاری از مشابهتهای موجود بین هندسه‌هایی را که گروههای آنها یکریخت هستند خاطرنشان می‌سازد، که عبارت‌اند از مشابهتهای بین صفحه انعکاسی (تمرین پ-۱۷، فصل ۷) هندسه تصویری مختلط یک‌بعدی $\mathscr{P}^1(\mathbb{C})$ (که از دیدگاه حقیقی، هندسه‌ای بر کره است)، و هندسه هذلولوی سه‌بعدی.

مثال۳. حال گروه کلیه تغییر مکانهای موازی در امتداد ∞ را تعیین می‌کنیم. هم‌اکنون نشان دادیم که این تغییر مکانها توسط ماتریسهایی با درایه‌های $c = 0$ و $a = d$ بیان می‌شوند، وگروه نگاشتهای

$$z \to z + b$$

را تشکیل می‌دهند که با گروه جمعی یک‌پارامتری همه اعداد حقیقی یکریخت است (اینها، انتقالهای اقلیدسی در امتداد محور xها هستند).

مثال۴. بعد، دو نقطه ثابت 0 و ∞ وگروه انتقالهای هذلولوی در امتداد خط پوانکاره واصل بین آنها (نیمه بالایی محور yها) را درنظر می‌گیریم. این گروهها با ماتریسهایی نشان داده می‌شوند که در آنها $c = b = 0$ و $ad = 1$؛ وگروه نگاشتهای

$$z \to a^2 z$$

را تشکیل می‌دهند، و چون a^2 می‌تواند هر عدد مثبتی باشد، این گروه با گروه ضربی تمام اعداد حقیقی مثبت یکریخت است. پس از گرفتن لگاریتم، این گروه با گروه جمعی تمام اعداد حقیقی، نظیر حالت اقلیدسی انتقالها در امتداد یک خط ثابت (گزاره ۲۱.۹) نیز یکریخت است. (نگاشتها، تجانسهای اقلیدسی به مرکز O هستند.)

مثال۵. سرانجام گروه کلیه دورانهای هذلولوی حول نقطه i در نیم‌صفحه بالایی را تعیین می‌کنیم. این گروهها حرکتهای مستقیمی هستند که i را ثابت نگاه می‌دارند:

$$i = \frac{ai + b}{ci + d}$$

لذا $b = -c, a = d$ با $1 = ad - bc = a^2 + b^2$. اگر بگیریم $a = \cos\theta$ و $b = -(\sin\theta)$، دورانها حول i با

$$z \to \frac{(\cos\theta)z - \sin\theta}{(\sin\theta)z + \cos\theta}$$

نشان داده می‌شوند. ولی ماتریس

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

درست همان ماتریس دوران اقلیدسی به زاویه θ حول مبدأ در مدل دکارتی صفحه اقلیدسی است. از این‌رو، این دو گروه با یکدیگر و با گروه ضربی S^1، همه اعداد مختلط به پیمانه ۱ یکریخت‌اند.

توضیح. در نمایش دورانهای هذلولوی در مثال ۵، هنگامی که $\theta = \pi$، z بر z نگاشته می‌شود و دوران همانی به‌دست می‌آید، و حال آنکه دوران اقلیدسی به زاویه π، یک نیم‌دور است. لذا برای اینکه نگاشتی یک‌به‌یک (به‌جای دوبه‌یک) از گروه دورانهای هذلولوی حول i برروی گروه دورانهای اقلیدسی حول O داشته باشیم، باید دوران هذلولوی به زاویه θ را با نگاشت زیر نشان دهیم

$$z \to \frac{(\cos\frac{\theta}{2})z - \sin\frac{\theta}{2}}{(\sin\frac{\theta}{2})z + \cos\frac{\theta}{2}}$$

بیان قابلیت انطباق با استفاده از حرکت

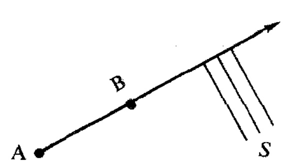
در هندسه نتاری می‌توان از حرکتها برای تعریف قابلیت انطباق شکلهای دلخواه استفاده کرد: S با S' قابل انطباق است اگر حرکتی مانند T وجود داشته باشد که S را بر S' بنگارد. به‌موجب گزاره ۵.۹، این تعریف همان رابطه قابلیت انطباق پیشین برای مثلثها (و بنابراین، همان رابطه قابلیت انطباق برای پاره‌خطها و برای زاویه‌ها) است.

شکلی که از این لحاظ اهمیت خاصی دارد شکل پرچم است، که بنابر تعریف، عبارت است از یک نقطه A، یک نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ که از A خارج شده است، و یک طرف خط $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ به نام S (شکل ۲۷.۹).

لم۳.۹ هر دو پرچم بر اثر حرکتی یکتا قابل انطباق‌اند.

برهان:

B' را چنان انتخاب می‌کنیم که $\mathrm{AB} \cong \mathrm{A'B'}$. نقطه غیرمشخص $\mathrm{C} \in S$ را انتخاب و فرض می‌کنیم C' نقطه‌ای یکتا در طرف S' از خط $\overleftrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ باشد. به‌طوری $\Delta\mathrm{ABC} \cong \Delta\mathrm{A'B'C'}$



شکل ۲۷.۹

(نتیجه ض‌زض، فصل ۳). مطابق گزاره ۵.۹، یک حرکت یکتای T وجود دارد که A، B، و C را به‌ترتیب به A'، B'، و C' می‌برد، و این حرکت پرچم $\overrightarrow{AB} \cup S$ را بر پرچم $\overrightarrow{A'B'} \cup S$ می‌نگارد. ■

می‌گوییم که گروه حرکتها فقط به‌طور ترایا بر پرچمها عمل می‌کند. این ویژگی مبین همگنی صفحه بوده، و به شهود عینی ما در انجام اندازه‌گیریها با حرکت دادن یک خطکش صلب متناظر است. این ویژگی در قضیه بعدی ما، که به عکس این پرسش پاسخ می‌دهد بسیار مهم است: یک مدل $\mathscr{M}$ برای بنداشتهای وقوع و میان‌بود، و یک گروه $\mathscr{G}$ از هم‌خطی‌های $\mathscr{M}$ که میان‌بود را حفظ می‌کند، داده شده است. قابلیت انطباق را با عمل $\mathscr{G}$ تعریف می‌کنیم، یعنی تعریف $AB \cong A'B'$ بدین معنی است که یک تبدیل T در $\mathscr{G}$ پاره‌خط AB را بر پاره‌خط $A'B'$ می‌نگارد (همچنین است برای زوایا). چه فرضهای اضافی در $\mathscr{G}$ تضمین می‌کنند که با این تعریف، بنداشتهای قابلیت انطباق ق-۱ تا ق-۶ در $\mathscr{M}$ صدق می‌کنند؟

قضیه ۲.۹ فرض می‌کنیم که $\mathscr{G}$ گروه هم‌خطی‌های حافظ میان‌بود در شرایط زیر صادق باشد:

(۱) $\mathscr{G}$ فقط به‌طور ترایا بر پرچمها اثر می‌کند.

(۲) به‌ازای هر دو نقطه A و B، دست‌کم یک تبدیل $T \in \mathscr{G}$ وجود دارد که جای A و B را با هم عوض می‌کند.

(۳) به‌ازای هر دو نیم‌خط r و s که از یک رأس خارج شده‌اند، دست‌کم یک تبدیل $T \in \mathscr{G}$ وجود دارد که r و s را با هم عوض می‌کند.

دراین‌صورت، با تعریف قابلیت انطباق برحسب عمل $\mathscr{G}$، بنداشتهای ق-۱ تا ق-۶ صادق‌اند و $\mathscr{G}$ گروه حرکتهاست.

می‌دانیم که این شرایط برای گروه حرکتها لازم است ــ شرط (۱) بنابر لم قبل، شرط (۲) برای استفاده از تقارن نسبت به عمودمنصف AB، و شرط (۳) برای استفاده از تقارن نسبت به نیمساز زاویه $r \cup s$.

برهان:

اثبات کفایت شرایط در ده مرحله صورت می‌گیرد.

مرحلهٔ۱. قابلیت انطباق دارای ویژگیهای بازتابی، تقارنی، و ترایایی است (به‌ویژه ق-۲ تا ق-۵ صادق‌اند). $\mathscr{G}$ گروه خودریختی‌هاست.

زیرا، اگر T، S' را بر S بنگارد، T^{-1}، S' را بر S می‌نگارد، و هرگاه T'، S را بر S'' بنگارد، آنگاه $T'T$، S را بر S'' می‌نگارد. بدیهی است که I، S را بر S می‌نگارد. (در اینجا از شرط گروهی

$\mathscr{G}$ استفاده کنیم.) اگر $S' \cong S$ یعنی $S = TS$ و $U \in \mathscr{G}$، آنگاه $US' = (UTU^{-1})US$، لذا $US \cong US'$؛ این نشان می‌دهد که U یک خودریختی است.

مرحلهٔ۲. وجود تقارنهای محوری.

فرض می‌کنیم که نقطه P بر l واقع و S_1 و S_2 دو طرف l باشند، و فرض می‌کنیم r_1 و r_2 دو نیم‌خط از l مرسوم از P باشند. به‌موجب شرط (۱) تبدیل یکتایی مانند $T \in \mathscr{G}$ وجود دارد که S_1 و S_2 را با هم عوض می‌کند و r_1 را ناوردا نگاه می‌دارد. چون T^2، r_1 و S_1 را ناوردا نگاه می‌دارد، بنابر (۱)، $T^2 = I$. حال می‌گوییم که T همه نقاط l را ثابت نگاه می‌دارد: به‌موجب تعریف T، P ثابت است؛ چون T حافظ میان‌بود است، r_2 هم بر اثر T ناوردا می‌ماند. فرض می‌کنیم که نقطه A بر l حرکت کند و به A' برود، و مثلاً $P * A * A'$. پس $(A')' = A$ چون $T^2 = I$، بنابراین $P' * (A')' * A'$، که متناقض با این فرض است که T میان‌بود را حفظ می‌کند. چون قرینه‌یابی R_l یک خودریختی برگشتی است که همه نقاط l را ثابت نگاه می‌دارد، می‌توانیم بنویسیم $T = R_l$.

مرحلهٔ۳. فرض می‌کنیم r نیم‌خطی از l باشد و r' نیم‌خطی غیرمشخص. در این‌صورت درست دو تبدیل در $\mathscr{G}$ وجود دارند که r را بر r' می‌نگارند و هر دو اثر واحدی بر نقاط l دارند.

زیرا بنابر شرط (۱)، اگر یک طرف l، یعنی S، داده شده باشد، این دو تبدیل با آن طرف l' $(r' \subset l')$ که S بر آن نگاشته می‌شود، به‌طور یکتا معین می‌شوند. اگر T یکی از این دو تبدیل باشد، دیگری TR_l خواهد بود و هر دو در l توافق دارند.

مرحلهٔ۴. اگر $AB \cong CD$، درست دو تبدیل در $\mathscr{G}$ وجود دارند که A را بر C و B را به D می‌فرستند، و در $\overleftrightarrow{AB}$ توافق دارند.

بنابر تعریف $\cong$، تبدیلی مانند $T \in \mathscr{G}$ وجود دارد که پاره‌خط AB را بر پاره‌خط CD می‌نگارد. اگر T، A را به D و B را به C بفرستد، T را با تبدیلی در $\mathscr{G}$ که C و D را با هم عوض می‌کند ترکیب می‌کنیم (شرط (۲)). لذا، می‌توانیم فرض کنیم که A به C و B به D می‌رود. چون میان‌بود محفوظ می‌ماند، نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ بر نیم‌خط $\overrightarrow{CD}$ نگاشته می‌شود. حال می‌توان مرحله ۳ را به کار برد.

مرحلهٔ۵. بنداشت قابلیت انطباق ق-۱ صادق است. (این امر از مراحل ۳ و ۴ نتیجه می‌شود.)

مرحلهٔ۶. بنداشت قابلیت انطباق ق-۳ صادق است.

فرض می‌کنیم T، A را به A' بفرستد و B را به B'. اگر $A * B * C$، T نیم‌خط $\overrightarrow{BC}$ را بر نیم‌خط $\overrightarrow{B'C'}$ می‌نگارد، که در آن $A' * B' * C'$. اگر $BC \cong B'C'$، یک حرکت T' وجود دارد

که B را به B' بفرستد و C را به C'. بنابر مرحله ۳، T و T' هر دو، در هر نقطه از خط گذرنده از A، B، و C توافق دارند. بنابراین هر دو A را به A' و C را به C' می‌فرستند، و لذا $\mathrm{AC} \cong \mathrm{A'C'}$.

مرحلهٔ۷. بنداشت قابلیت انطباق ق-۴ صادق است.

فرض می‌کنیم $\sphericalangle \mathrm{BAC}$ و نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ و طرف S' از $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ داده شده باشند. فرض می‌کنیم که S آن طرفی از $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$ باشد که B در آن واقع است. فرض می‌کنیم $T \in \mathscr{G}$ تبدیل یکتایی باشد، که بنابر شرط (۱)، ($\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ و S) را بر $(\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}, S')$ بنگارد. اگر $\mathrm{B'}$ تصویر B بر اثر T باشد، آنگاه $\sphericalangle \mathrm{BAC} \cong \sphericalangle \mathrm{B'A'C'}$. برعکس، اگر تبدیل T' بر این قابلیت انطباق اثر کند، که در آن $\mathrm{B'}$ در S' واقع است، آنگاه T'، ($\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ و S) را بر ($\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ و S') می‌نگارد و لذا بنابر جزء یکتایی شرط (۱)، $T = T'$، و نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ در S' به‌طور یکتا مشخص می‌شود.

مرحلهٔ۸. اگر $\sphericalangle \mathrm{BAC} \cong \sphericalangle \mathrm{B'A'C'}$، تبدیل یکتایی در $\mathscr{G}$ موجود است که $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ را به $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ و $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ را به $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ می‌فرستد.

به‌موجب تعریف قابلیت انطباق، تبدیلی مانند $T \in \mathscr{G}$ موجود است که $\sphericalangle \mathrm{BAC}$ را بر $\sphericalangle \mathrm{B'A'C'}$ می‌نگارد. اگر T، $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ را بر $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ و $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ را بر $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ بنگارد، آنگاه شرط (۳) به ما اجازه می‌دهد که T را با تبدیلی در $\mathscr{G}$ که دوطرف $\sphericalangle \mathrm{B'A'C'}$ را با هم عوض می‌کند ترکیب کنیم؛ لذا می‌توانیم فرض کنیم که T، $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ را به $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ و $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ را به $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ می‌فرستد. در این‌صورت یکتایی، چنان‌که در برهان مرحله ۷ آمد، ثابت می‌شود.

مرحلهٔ۹. بنداشت قابلیت انطباق ق-۶ (ض‌زض) صادق است.

فرض می‌کنیم $\mathrm{AB} \cong \mathrm{A'B'}$، $\sphericalangle \mathrm{BAC} \cong \sphericalangle \mathrm{B'A'C'}$، و $\mathrm{AC} \cong \mathrm{A'C'}$. فرض می‌کنیم که این قابلیت انطباقها تحت تأثیر تبدیلات $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{G}$ قرارگرفته باشند. که در آنها، بنابر مراحل ۴ و ۸، می‌توانیم فرض کنیم که T_1، A را به A' می‌فرستد و B را به $\mathrm{B'}$؛ T_2، $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ را به $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ می‌فرستد و $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ را به $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$؛ T_3، A را به A' می‌فرستد و C را به C'. بنابر مرحله ۳، T_2 با T_1 در $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ توافق دارد و T_2 با T_3 در $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$ توافق دارد. پس T_2، B را به $\mathrm{B'}$ و C را به C' می‌فرستد. لذا با استفاده از T_2 داریم $\mathrm{BC} \cong \mathrm{B'C'}$، $\sphericalangle \mathrm{ABC} \cong \sphericalangle \mathrm{A'B'C'}$، $\sphericalangle \mathrm{ACB} \cong \sphericalangle \mathrm{A'C'B'}$.

مرحلهٔ ۱۰. $\mathscr{G}$ گروه همه حرکات است.

پرچم F را انتخاب می‌کنیم. حرکت T، F را به F' بدل می‌کند، و بنابر شرط (۱)، یک‌خودریختی $T' \in \mathscr{G}$ نیز همین عمل را انجام می‌دهد. به‌موجب لم ۲.۹، $T = T'$، لذا همه حرکات به $\mathscr{G}$ متعلق‌اند. بنابر لم ۳.۹ و برهانی مشابه، هر عضو $\mathscr{G}$ یک حرکت است. ■

قضیه ۲.۹ یک مرحله در برنامه کلاین برای بیان هندسه برحسب عمل یک گروه است. ف. باخمان (۱۹۷۳) این برنامه را با بیان نقطه، خط، و وقوع برحسب برگشت در گروه ادامه و بسط داده است (تمرین ۵۰، و اوالد (۱۹۷۱)).

توضیح درباره تشابه. پرچم جهت‌دار شکلی است متشکل از زوج مرتبی از نقاط A و B همراه با یک طرف خاص خط $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ که با S نشان می‌دهیم. هر پرچم به رأس A، متناظر با گزینشهای مختلف نقطه B بر نیم‌خط پرچم، حامل بی‌نهایت پرچم جهت‌دار است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر دو پرچم جهت‌دار در صفحه اقلیدسی، یک نگاشت مشابهت یکتا از یکی بر دیگری وجود دارد (یعنی، از حرکتی پیروی می‌کند که توسط لم ۳.۹ با یک تجانس به مرکز رأس داده شده است). این مطلب به حکم زیر منجر می‌شود: تشابه یک هم‌خطی است که دایره را بر دایره می‌نگارد.

برهان:

فرض می‌کنیم T یک چنین هم‌خطی باشد. در تمرین اصلی ۷، فصل ۵، نشان دادید که اگر یک خط l داده شده باشد، دو نقطه جدا از l، در یک طرف S آن وجود دارند اگر و فقط اگر بر دایره‌ای در S واقع باشند. بنابراین T، S را بر یک طرف l'، یعنی S'، می‌نگارد. همچنین اگر T دایره γ را بر دایره γ' بنگارد، درون γ را هم بر درون γ' می‌نگارد ــ زیرا یک نقطه P ناواقع بر γ در درون γ قرار دارد اگر و تنها اگر هر خط گذرنده از P، γ را ببرد. حال می‌گوییم که T خطوط عمود بر هم را بر خطوط عمود بر هم می‌نگارد. دلیل این مطلب این است که یک هم‌خطی، متوازی‌الاضلاع را بر متوازی‌الاضلاع می‌نگارد. یک متوازی‌الاضلاع در صفحه اقلیدسی یک دایره محیطی دارد اگر و تنها اگر مستطیل باشد (تمرین اصلی ۱، فصل ۵)، و چون T دایره‌ها را حفظ می‌کند بایستی مستطیل را بر مستطیل بنگارد. به‌علاوه چون یک مربع با مستطیلی که قطرهایش برهم عمودند مشخص می‌شود، T مربع را بر مربع می‌نگارد. T مرکز مربع را نیز به مرکز تصویر مربع (زیرا این نقطه محل تلاقی قطرهاست) و وسط اضلاع را بر وسط اضلاع می‌نگارد (زیرا این ضلعها مربعهایی با همین مرکز تشکیل می‌دهند).

حال، فرض می‌کنیم با مختصات دکارتی کار می‌کنیم. پرچم اصلی جهت‌دار F متشکل از مبدأ (۰ و ۰) و نقطه واحد (۰ و ۱) بر محور xها و یک طرف S از محور xها شامل نقطه واحد (۱ و ۰) از محور yها را درنظر می‌گیریم. تبدیل Tی ما F را بر یک پرچم F' می‌نگارد؛ فرض می‌کنیم U مشابهت یکتایی باشد که F' را بر F برمی‌گرداند. نشان خواهیم داد که UT همانی است. لذا عکس مشابهت UTU است؛ (۰ و ۰) و (۰ و ۱) را ثابت نگاه می‌دارد و هر

طرف محور xها را برخودش می‌نگارد. بنابر توضیح فوق درباره مربعها، نقاط $(۱,۰)$، $(۱,۱)$، $(۰,-۱)$، و $(-۱,۱)$ توضیح و همین‌طور وسطها و مراکز این مربعها باید ثابت بمانند. از اینجا می‌توانیم به توالی نتیجه بگیریم که همه نقاطی که مختصات آنها اعداد صحیح، نصف اعداد صحیح، یا دوتایی‌های گویا هستند بر اثر UT ثابت می‌مانند، زیرا هر نقطه در صفحه در داخل یک دایره دلخواه کوچک گذرنده از سه نقطه ثابت، باید ثابت بماند. (این برهان تر و تمیز و مرتب از ورنر فنچل (۱۹۸۹) است.) ■

تقارن

این فصل را با بحث کوتاهی درباره تقارن که یکی از کاربردهای عمده روش تبدیل در هندسه است، به پایان می‌بریم.

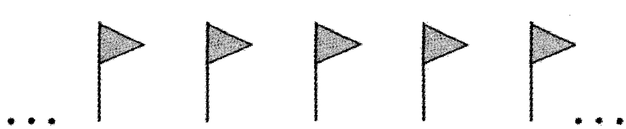
شکل مسطح S داده شده است. حرکتهایی که S را ناوردا نگاه می‌دارند (یعنی S را برخودش می‌نگارند) تقارن S نامیده می‌شوند. روشن است که تقارنهای S یک گروه تشکیل می‌دهند. چنین احساس می‌شود که هر چه این گروه بزرگتر باشد، S متقارنتر است.

مثلاً یک دایره γ بسیار متقارن است. گروه تقارن آن مرکب است از همه دورانها حول O، مرکز γ و همه تقارنهای محوری نسبت به خطهای گذرنده از O؛ قوت این گروه با قوت پیوستار یکی است.

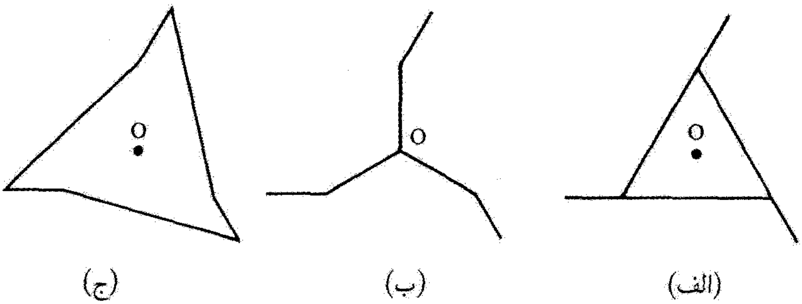
چنین به‌نظر می‌رسد که مربع شکلی است کاملاً متقارن، ولی نشان خواهیم داد که فقط هشت تقارن دارد (مثال ۶).

نقش اَفریز شکل ۲۸.۹ گروهی از تقارنهای شمارا و نامتناهی تشکیل می‌دهد که شامل کلیه توانهای T^n (n عدد صحیح) از انتقال ثابت T است که این نقش را یک واحد به راست حرکت می‌دهد.

نخستین مسئله، پیداکردن مجموعه مینیمال مولدهای گروه تقارن، یعنی کوچکترین مجموعه ممکن از تقارنهاست با این ویژگی که همه تقارنهای دیگر را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب تقارنهای این مجموعه و عکس آنها بیان کرد. برای نقش اَفریز شکل ۲۸.۹، یک مولد تنهای T (یا $T^{-۱}$) وجود دارد.



شکل ۲۸.۹



شکل ۲۹.۹

دومین مسئله، بیان روابط اساسی بین مولدهاست. برای مولد T فوق، رابطه‌ای وجود ندارد، زیرا همه توانهای T از هم متمایزند. اما شکل ۲۹.۹ را درنظر می‌گیریم.

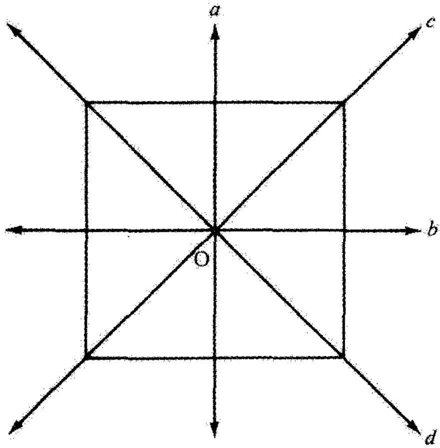
تنها تقارن در این شکلها عبارت‌اند از همانی I، دوران R حول مرکز O به زاویه 120° ساعتگرد، و دوران R^2 حول O به زاویه 240° ساعتگرد. R مولد این گروه است و در رابطه $R^3 = I$ صدق می‌کند. این گروه را گروه دوری از مرتبه ۳ می‌نامیم.

کلی‌تر بگوییم، گروهی را دوری از مرتبه n نامند که یک مولد تنها و n عضو داشته باشد. هرگاه گروهی یک مولد تنها و تعداد نامتناهی عضو داشته باشد، گروه دوری نامتناهی نامیده می‌شود (گروه تقارنهای نقش اَفریز شکل ۲۸.۹ دوری نامتناهی است). یک گروه دوری از مرتبه n را که بر اثر دورانی به زاویه $(360/n)^\circ$ حول نقطه‌ای تولیدشده باشد، با C_n نشان می‌دهیم. ترسیمهای شکل ۲۹.۹ را می‌توان از ۳ به n تعمیم داد تا شکلی با گروه تقارن C_n به‌دست آید. نمودار شکل ۲۹.۹ (ب) سه گوشه‌ای نامیده می‌شود و تعمیم آن به $n = 4$ صلیب شکسته را خواهد داد. چندضلعی‌های محدب $2n$ ضلعی که از تعمیم شکل ۲۹.۹ (ج) به‌دست می‌آیند، چندضلعی‌های چرخ دنده‌ای نامیده می‌شوند.

سومین مسئله اساسی که باید بیان کنیم، توصیف ساختار گروه تقارن و در صورت امکان اثبات یکریختی آن با گروهی معلوم است.

مثال ۶. ما این مسائل را برای گروه تقارنهای یک مربع حل خواهیم کرد.

هر تقارن باید مرکز O را ثابت نگاه دارد (زیرا، مثلاً O محل تلاقی قطرهاست و هر قطر باید برخودش یا بر قطر دیگر نگاشته شود). بنابراین تقارنها یا باید دوران حول O باشند یا قرینه‌یابی نسبت به خطوط گذرنده از O. تنها دورانهای حول O که تقارن هستند عبارت‌اند از I، R، R^2، و



شکل ۳۰.۹

R^3 که R می‌تواند دوران به زاویه °۹۰ پادساعتگرد باشد؛ این تقارنها یک زیرگروه دوری از مرتبه ۴ تشکیل می‌دهند. همچنین چهار قرینه‌یابی وجود دارند که تقارن محوری هستند: دو تقارن محوری نسبت به قطرهای c و d و دو تقارن محوری نسبت به خطوط a و b که عمودمنصفهای اضلاع هستند (شکل ۳۰.۹). فرض می‌کنیم T یکی از این تقارنهای محوری باشد؛ مثلاً $T = R_c$. پس $\{R, T\}$ مجموعه مینیمال مولدهای گروه است زیرا R را می‌توان به چهار طریق به‌صورت حاصل‌ضرب تقارنهای محوری نوشت،

$$R = R_b R_d = R_c R_b = R_a R_c = R_d R_a$$

بنابراین

$$TR = R_c(R_c R_b) = (R_c)^2 R_b = R_b$$
$$TR^2 = (TR)R = R_b(R_b R_d) = R_d$$
$$TR^3 = (TR^2)R = R_d(R_d R_a) = R_a$$

روابط اساسی موجود بین این مولدها از این قرارند:

$$R^4 = \mathrm{I}$$
$$T^2 = \mathrm{I}$$
$$RT = TR^3$$

(که رابطه اخیر چنین به‌دست می‌آید $RT = (R_aR_c)R_c = R_a = TR^{۳}$). رابطه اخیر نشان می‌دهد که این گروه جابه‌جایی نیست. این گروه با $D_{۴}$ نشان داده می‌شود و گروه دووجهی از مرتبه ۸ نامیده می‌شود.

کلی‌تر بگوییم، هرگاه $n \geq ۳$، D_n معرف گروه تقارنهای n ضلعی منتظم است. این گروه دارای $۲n$ تقارن است و توسط دو عضو $\{R, T\}$ تولید می‌شود، که در آن R دورانی است حول مرکز n ضلعی به زاویه $(۳۶۰/n)^\circ$، و T تقارن محوری نسبت به خطی است که یک رأس را به مرکز وصل می‌کند. به‌ازای $n = ۲$، $D_{۲}$ معرف گروهی است که توسط یک نیم‌دور H_{P} و یک تقارن نسبت به خط گذرنده از P تولید شده است، در حالی که به‌ازای $n = ۱$، $D_{۱}$ معرف یک گروه دوری از مرتبه ۲ است که بر اثر یک قرینه‌یابی تولید شده است.

قضیه جالب زیر منسوب به لئوناردو داوینچی است.

قضیه ۳.۹ تنها گروههای متناهی حرکتها، هم در صفحه اقلیدسی و هم در صفحه هذلولوی، گروههای C_n و D_n $(n \geq ۱)$ هستند.

برهان این قضیه براساس رشته لم‌های زیر، از لم ۴.۹ تا لم ۹.۹، نهاده شده است.

لم۴.۹ هرگروه متناهی از حرکتها نمی‌تواند شامل انتقالهای غیرهمانی، تغییرمکان موازی غیرهمانی، و یا لغزه‌های غیرهمانی باشد.

برهان:

نکته‌ای را که باید نشان دهیم این است که اگر T یکی از این سه نوع حرکت باشد، هیچ توان T^n از T، $n \neq ۰$، مساوی همانی I نیست. این مطلب را در حالت $T = R_lR_m$، $l||m$، نشان می‌دهیم و حالت لغزه را در تمرین ۱۸ به‌عهده خواننده می‌گذاریم. به‌موجب تمرین ۷، همچنین می‌توانیم بنویسیم $T = R_kR_l$، که k قرینه محوری m نسبت به l است. لذا

$$T^{۲} = (R_kR_l)(R_lR_m) = R_kR_m$$

از تکرار این برهان از راه استقرا می‌توانیم نشان دهیم که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، می‌توانیم بنویسیم

$$T^n = R_hR_m$$

که h در نیم‌صفحه‌ای که m مرز آن است قرار دارد و شامل l است و به‌ویژه $h||m$، لذا $T^n \neq I$. اگر این نتیجه را برای $T^{-۱}$ به کار بریم، برای مقادیر منفی n نیز $T^n \neq I$ را به‌دست می‌آوریم.

ولی اگر T به یک گروه متناهی متعلق بود، به‌ازای مقادیر متمایز m و n داشتیم $T^m = T^n$، و از آنجا $T^{n-m} = I$، که یک تناقض است. ■

لم ۵.۹ اگر گروهی متناهی از حرکتها شامل چند دوران باشد، همه دورانها مرکز واحدی دارند.

برهان:

فرض می‌کنیم T دورانی حول A باشد، U دورانی حول B ،A ≠ B، و $l = \overleftrightarrow{AB}$. بنابرگزاره ۸.۹، خط یکتایی مانند m گذرنده از A (به‌ترتیب، n گذرنده از B) وجود دارد به‌قسمی‌که $T = R_l R_m$ (به‌ترتیب، $U = R_l R_n$). پس $U^{-1}T^{-1}UT$ که به گروه متناهی متعلق است با $(R_n R_l R_m)^2$ که یک انتقال است مساوی است (تمرین ۱۵). این امر متناقض با لم ۴.۹ است مگر اینکه این انتقال یک همانی باشد، ولی در این حالت $UT = TU$، که فقط وقتی می‌تواند پیش آید که دست‌کم یکی از حرکتهای U یا T همانی باشد («توضیح» پس از گزاره ۹.۹). ■

لم ۶.۹ اگر یک گروه متناهی از حرکتها شامل چند تقارن محوری باشد، محورهای این تقارنها متقارب‌اند.

برهان:

در غیر این‌صورت، چون گروه باید شامل حاصل‌ضرب $R_l R_m$ باشد، در لم قبل به تناقض می‌رسیم. ■

لم ۷.۹ اگر یک گروه متناهی از حرکتها متضمن یک دوران و یک تقارن محوری باشد، مرکز دوران بر محور تقارن قرار دارد.

برهان:

در غیر این‌صورت حاصل‌ضرب یک دوران و یک تقارن محوری یک لغزه خواهد شد (گزاره ۱۹.۹) که متناقض با لم ۴.۹ است. ■

نتیجه. یک گروه متناهی از حرکتها با مرتبه بزرگتر از ۲، یک نقطه ثابت یکتا دارد.

برهان:

چون مرتبه از ۲ بزرگتر است، به‌موجب لم‌های ۴.۹ و ۶.۹، گروه باید شامل یک دوران غیرهمانی باشد و هر تقارن در گروه، مرکز آن دوران را ثابت نگاه می‌دارد، که به‌موجب لم‌های ۴.۹، ۵.۹، و ۷.۹، به‌طور یکتا معین می‌شود. ■

لم۸.۹ اگر یک گروه متناهی از حرکتها از مرتبه n، تنها شامل چند دوران باشد، این گروه دوری یا از مرتبه n است.

برهان:

در حالتهای $n = ۱$ یا $n = ۲$ مسئله معلوم و کاملاً پیش پا افتاده است. فرض می‌کنیم $n > ۲$ و O مرکز همه دورانها باشد (لم ۵.۹). نقطه‌ای مانند $\mathrm{P}_۱ \neq \mathrm{O}$ انتخاب می‌کنیم. نقطه‌های $\mathrm{P}_۱$، $\mathrm{P}_۲$، ...، P_n تصاویر نقطه $\mathrm{P}_۱$ بر اثر دورانها، در این گروه همه از هم متمایزند، زیرا دورانها از هم متمایزند (تمرین ۱۹). فرض می‌کنیم که این تصاویر طوری شماره‌گذاری شده باشند که زاویه $(\measuredangle \mathrm{P}_۱\mathrm{OP}_۲)^\circ$ بین زاویه‌های $(\measuredangle \mathrm{P}_i\mathrm{OP}_j)^\circ$ از لحاظ درجه از همه کمتر باشد. فرض می‌کنیم R دورانی باشد که $\mathrm{P}_۱$ را به $\mathrm{P}_۲$ می‌برد. می‌گوییم که R گروه را تولید می‌کند.

فرض می‌کنیم Q_i تصویر $\mathrm{P}_۱$ بر اثر $R^{i-۱}$، $i = ۱, ۲, \ldots$، باشد (لذا $\mathrm{P}_۱ = \mathrm{Q}_۱$ و $\mathrm{P}_۲ = \mathrm{Q}_۲$). پس، به‌ازای جمیع مقادیر i داریم

$$(\measuredangle \mathrm{Q}_i\mathrm{OQ}_{i+۱})^\circ = (\measuredangle \mathrm{P}_۱\mathrm{OP}_۲)^\circ$$

اگر یکی از P_jها بین Q_iها نباشد، نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{OP}}_j$ بین یک نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}_i$ و نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}_{i+۱}$ قرار می‌گیرد، بنابراین $(\measuredangle \mathrm{P}_j\mathrm{OQ}_i)^\circ$ کمتر از $(\measuredangle \mathrm{P}_۱\mathrm{OP}_۲)^\circ$ خواهد شد، که با انتخاب $\mathrm{P}_۲$ متناقض است. بنابراین، هر دوران در این گروه با توانی از R برابر است. ■

لم۹.۹ اگر یک گروه متناهی از حرکتها شامل یک تقارن محوری باشد، این گروه یک گروه دووجهی D_n است.

برهان:

گروه $\mathscr{G}$ را به دو مجموعه حرکتهای مستقیم $\mathscr{D}$، و مجموعه حرکتهای غیرمستقیم، $\mathscr{E}$، افراز و فرض می‌کنیم که n تعداد عناصر $\mathscr{D}$ باشد. به‌موجب لم ۸.۹، $\mathscr{D}$ زیرگروهی دوری از مرتبه n است که بر اثر دوران R تولید شده است. فرض می‌کنیم T یک قرینه‌یابی محوری باشد، پس حرکتهای غیرمستقیم در $\mathscr{E}$ نیز قرینه‌یابی محوری هستند، و چون حاصل‌ضرب دو حرکت غیرمستقیم حرکتی است مستقیم، پس می‌توان آنها را به‌طور یکتا به‌صورت

$$TR^i \qquad\qquad i = ۰, ۱, \cdots, n$$

نوشت. این گروه D_n است. ■

پس قضیه ۳.۹ ثابت شده است.

درباره انواع خاص گروههای نامتناهی حرکات اطلاعات زیادی در دست است. مثلاً گروه اَفریز گروهی از حرکات است که یک خط ناوردای t دارد و انتقالهای آن یک گروه دوری نامتناهی $\langle T\rangle$ تشکیل می‌دهند که بر اثر انتقال خاص T در امتداد t تولید شده است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که در صفحات اقلیدسی و هذلولوی درست هفت گروه اَفریز وجود دارند:

۱. $\langle T\rangle$

۲. گروه $\langle T, R_t\rangle$ که بر اثر T و قرینه‌یابی محوری نسبت به t حاصل شده است.

۳. گروه $\langle T, R_u\rangle$ که بر اثر T و یک قرینه‌یابی نسبت به یک خط u، عمود بر t، تولید شده است.

۴. گروه دوری نامتناهی $\langle G\rangle$ که بر اثر لغزه یکتای G، $G^2 = T$، تولید شده است.

۵. گروه $\langle T, H_{\mathrm{A}}\rangle$ که بر اثر T و یک نیم‌دور حول نقطه A واقع بر t تولید شده است.

۶. گروه $\langle T, H_{\mathrm{A}}, R_t\rangle$.

۷. گروه $\langle G, H_{\mathrm{A}}\rangle$.

(برای اثبات، ←مارتین، ۱۹۸۲، و تمرین ۶۰.)

نوع دیگر گروه نامتناهی، گروه کاغذدیواری نام دارد، که زیرگروه انتقالهای آن بر اثر دو انتقال در امتداد دو خط متمایز متقاطع تولید شده‌اند. در صفحه اقلیدسی دقیقاً هفده گروه کاغذ دیواری وجود دارد. نقشهای تزیینی که بر دیوارهای قصر الحمرا، در اسپانیا، به دست مغربی‌ها کشیده شده‌اند، نمایانگر این هفده گروه‌اند.

یک کتاب کلاسیک درباره تقارن، کتاب تقارن هرمان وایل[1] است. در این کتاب مبحثی درباره هفده گروه کاغذدیواری، به‌علاوه تحلیلی از تقارن سه‌بعدی، شامل تعمیم قضیه ۳.۹ برای فضای سه‌بعدی، دیده می‌شود. مهمترین مطلبی که پیدا می‌کنید مقاله جالب و مصوری است درباره چگونگی ارتباط این تجریدهای ریاضی محض با جهان عینی به شکل بلورها، نمونه‌های زیست‌شناختی، و کارهای هنری در سراسر اعصار گذشته.[2]

1. Hermann Weyl, *Symmetry* (Princeton University Press, 1952).

۲. مرجعهای جالب دیگر در این زمینه عبارت‌اند از:

J. N. Kapur, *Transformation Geometry* (Affiliated East-West Press, 1976); Joe Rosen, *Symmetry Discovered* (Cambridge University Press, 1975); E. H. Lockwood and R. H. Macmillan. *Geomertic Symmetry* (Cambridge University Press, 1978) and I. Stewart and M. Golubitsky, *Fearful Symmetry: Is God a Geometer*? (Blackwell, 1992).

خودآزمایی

کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) معادلات تقارن نسبت به محور yها، در مدل دکارتی چنین‌اند: $y' = y$ و $x' = -x$.

(۲) معادلات دوران به زاویه ۹۰° ساعتگرد حول مبدأ، در مدل دکارتی چنین‌اند: $y' = x$ و $x' = -y$.

(۳) در صفحه اقلیدسی، تشابهی که حرکت نباشد، باید تجانس باشد.

(۴) در مدل دکارتی، معادلات انتقالی که مبدأ را به نقطه (۱, ۱) می‌برند چنین‌اند: $y' = y + ۱$ و $x' = x + ۱$.

(۵) برگشت تبدیلی است که با عکس خودش مساوی باشد ولی مساوی همانی نباشد.

(۶) اگر حرکتی دایره‌ای را ثابت نگاه دارد، باید دورانی حول مرکز آن باشد.

(۷) در مدل دکارتی، اگر k محور xها، l خط $y = x$، m محور yها، و n خط $y = -x$ باشند، آنگاه $R_k R_l R_m = R_n$.

(۸) در مدل دکارتی، معادلات نیم‌دور حول نقطه (۱, ۲) چنین‌اند: $x' = -x + ۲$ و $y' = -y$.

(۹) در مدل دکارتی، لغزه‌ای در طول محور xها که نقطه (۱, ۰) را بر نقطه (۱−, ۱) می‌نگارد، با معادلات $x' = x + ۱$ و $y' = -y$ داده می‌شود.

(۱۰) اگر A و A' نقاطی متمایز در صفحه اقلیدسی باشند، انتقال یکتایی چون T وجود دارد که $T(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$، یعنی، گروه انتقالها به‌طور ترایا بر نقاط اثر می‌کنند.

(۱۱) اگر A و A' نقاطی متمایز در صفحه هذلولوی باشند، انتقالهای نامتناهی زیادی چون T وجود دارند که $T(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$.

(۱۲) در هندسه نتاری، اگر A و A' نقاطی متمایز و O نقطه‌ای بر عمودمنصف AA' باشد، آنگاه دورانی یکتا مانند T به مرکز O وجود دارد به‌طوری که $T(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$.

(۱۳) در هندسه نتاری مجموعه همه انتقالها یک گروه تشکیل می‌دهند.

(۱۴) در هندسه نتاری، اگر حاصل‌ضرب دو دوران یک انتقال غیرهمانی باشد، این دورانها نیم‌دورهایی حول نقاط متمایزند.

(۱۵) در هندسه هذلولوی، به‌ازای هر دو نقطه متمایز A و A' درست دو تغییر مکان موازی T وجود دارند به‌طوری که $T(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$.

(۱۶) در هندسه اقلیدسی، حاصل‌ضرب یک دوران غیرهمانی در یک انتقال، یک دوران است.

(۱۷) قرینه‌یابی‌های محوری نسبت به محورهای متمایز هرگز نمی‌توانند جابه‌جایی باشند.

(۱۸) در هندسه هذلولوی، حاصل‌ضرب دو دوران حول یک نقطه می‌تواند هر یک از سه نوع حرکت مستقیم باشد.

(۱۹) در هندسه اقلیدسی، مجموعه همه نیم‌دورها و همه انتقالها یک گروه است.

(۲۰) اگر $R_l R_m R_n$ یک لغزه باشد، خطوط l، m، و n در یک دسته‌خط قرار دارند.

(۲۱) در مدل دکارتی، معادلات یک تشابه مستقیم چنین‌اند: $x' = ax - by + e$ و $y' = bx + ay + f$ که در آن $a^۲ + b^۲ \neq ۰$، و همه طولها بر اثر این انتقال در $k = \sqrt{a^۲ + b^۲}$ ضرب می‌شوند.

(۲۲) هر دوران به زاویه θ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب دو قرینه‌یابی نسبت به دوخط متقاطع، که با هم زاویه می‌سازند، نوشت.

(۲۳) گروه حرکتها، بر مجموعه همه مثلثهای متساوی‌الاضلاع به اضلاع ۱، فقط به‌طور ترایا عمل می‌کند.

(۲۴) در هندسه هذلولوی، گروه همه حرکتها بر مجموعه همه سه‌تایی‌های مرتب نقطه‌های آرمانی متمایز، فقط به‌طور ترایا عمل می‌کند.

(۲۵) هر گروه متناهی از حرکات نمی‌تواند شامل بیش از یک نیم‌دور باشد.

(۲۶) در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، تبدیل کسری خطی

$$z \to \frac{۳z + ۴}{z + ۱}$$

معرف یک حرکت مستقیم هذلولوی است.

(۲۷) در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، تبدیل $z \to z - ۱$ معرف یک تغییر مکان موازی در امتداد ∞ است.

(۲۸) در مدل دکارتی، حاصل‌ضرب یک انتقال در طول محور xها و یک قرینه‌یابی نسبت به محور yها، یک قرینه‌یابی است.

(۲۹) گروه تقارنهای یک پنج ضلعی منتظم گروهی دوری از مرتبه ۵ است.

(۳۰) هیچ حرکت غیرمستقیمی نمی‌تواند با یک حرکت مستقیم ناهمانی جابه‌جایی باشد.

(۳۱) در هندسه اقلیدسی، دو شکل قابل انطباق‌اند اگر و تنها اگر یک نگاشت خودریختی از یکی بر روی دیگری موجود باشد.

(۳۲) مثلثی داده شده است. اگر یک قرینه‌یابی وجود داشته باشد که این مثلث را ناوردا نگاه دارد، این مثلث متساوی‌الساقین است.

(۳۳) اگر A و A' دو نقطه در دو طرف خط t باشند، آنگاه یک لغزه T در طول t وجود دارد به‌طوری که $T(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$.

(۳۴) در مدل دکارتی، معادلات دوران به زاویه θ حول مبدأ چنین‌اند: $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = x\sin\theta - y\cos\theta$.

(۳۵) در هندسه نتاری، اگر حرکتی یک خط ناوردای تنها داشته باشد، یک لغزه است.

(۳۶) حرکتی که حاصل‌ضرب تعدادی فرد قرینه‌یابی محوری باشد، حرکتی است غیرمستقیم.

(۳۷) در مدل دکارتی، معادلات قرینه‌یابی نسبت به خط $y = x$ چنین‌اند: $x' = y$ و $y' = x$.

(۳۸) در هندسه اقلیدسی، مرتبه گروه تقارنهای یک چهارضلعی بزرگتر یا مساوی ۴ است، اگر و تنها اگر چهارضلعی مستطیل باشد.

(۳۹) در هندسه هذلولوی، مرتبه گروه تقارنهای یک چهارضلعی باید کوچکتر از ۴ باشد.

(۴۰) در هندسه اقلیدسی، اگر مرتبه گروه تقارنهای یک چهارضلعی محدب ۲ باشد، آن چهارضلعی ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است.

(۴۱) در هندسه اقلیدسی، مرتبه گروه تقارنهای هر مثلث بزرگتر یا مساوی ۳ است.

(۴۲) در هندسه نتاری، اگر یک خودریختی وجود داشته باشد که حرکت نباشد، آنگاه هندسه اقلیدسی است.

(۴۳) در هندسه نتاری، حاصل‌ضرب قرینه‌یابی‌های محوری نسبت به دو خط موازی یک انتقال است.

(۴۴) در هندسه نتاری، هر خودریختی دقیقاً با یک نقطه ثابت، یک دوران است.

(۴۵) فرض می‌کنیم D یک تجانس به مرکز O و R یک قرینه‌یابی نسبت به خط گذرنده از O باشد. در مدل دکارتی، یک تشابه غیرمستقیم که مبدأ O را ثابت نگاه دارد، با حاصل‌ضرب DR مساوی است، و R و D با هم جابه‌جا می‌شوند ($RD = DR$).

(۴۶) در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، تبدیل

$$z \to \frac{۶\bar{z} - ۴}{۸\bar{z} - ۶}$$

معرف یک تقارن محوری است.

(۴۷) در مدل دکارتی، به‌ازای هر عدد مختلط $z_۰$، تبدیل $z \to \bar{z} + z_۰$ معرف یک تقارن محوری است.

(۴۸) در هندسه اقلیدسی، تبدیل حافظ میان‌بودی که طول هر خط را دو برابر کند، یک تشابه است.

(۴۹) در هندسه هذلولوی، هیچ هم‌خطی وجود ندارد که طول پاره‌خطی را دو برابر کند.

(۵۰) در هندسه نتاری، هر حرکت یک خط ناوردا دارد، یا یک نقطه ثابت، یا هر دو را.

تمرین

پیرامون طرح مسائل. تمرینهای ۲_۲۲ احکامی تکمیلی در رده‌بندی حرکات‌اند که اثبات آنها به خواننده واگذار شده است؛ تمرین ۲۳ مسئله‌ای است تحقیقی در باب «جهت‌دهی»؛ تمرینهای ۲۴_۳۳ برای اطلاعات بیشتر درباره تشابه آورده شده‌اند؛ ۳۴_۳۵ تمرینهایی هستند درباره تبدیلات خطی و آفین؛ در تمرینهای ۳۶_۳۸ تبدیلهای موبیوس مورد بحث قرار می‌گیرند؛ در تمرینهای ۳۹_۴۹ به مدارهای گروههای تبدیلات (به‌ویژه دایره‌های حدی و خمهای هم فاصله در مدل پوانکاره) پرداخته می‌شود؛ تمرین ۵۰ معرف معادلات جبری در گروه حرکات و تعبیر هندسی آنهاست؛ تمرین ۵۱ به مجموعه‌های ناوردای تبدیلات مربوط می‌شود؛ تمرین ۵۲ تلاش دیگری را برای اثبات اصل توازی با استفاده از دوران نشان می‌دهد؛ تمرین ۵۳ یکی از نتایج استفاده از انتقالها را به ما نشان می‌دهد؛ تمرینهای ۵۴_۵۷ محور یک لغزه در صفحه اقلیدسی را تعیین می‌کنند؛ تمرین ۵۸ معرف یک تبدیل طبیعی هذلولوی است که هم‌خطی نیست؛ تمرینهای ۵۹_۶۱ تمرینهایی درباره تقارن است؛ و در ۶۲_۶۳ چند مدل غیرعادی به ما معرفی می‌شوند؛ تمرین ۶۴ مسئله دوبعدی در صفحات وقوع را پیش می‌کشد؛ تمرینهای ۶۵_۶۸ درباره هندسه تصویری یک‌بعدی است. تمرینهای ۶۹_۷۷ درباره کاربردهای دایره ۹ نقطه‌ای و سایر مباحث هندسه اقلیدسی است.

۱. نشان دهید که ۱۶۸ هم‌خطی از صفحه تصویری هفت‌نقطه‌ای وجود دارد (شکل ۱.۹). (راهنمایی: هر هم‌خطی به‌گونه‌ای یکتا با اثرش بر چهارنقطه‌ای که هیچ سه‌تایی از آنها هم‌خط نیستند، معین می‌شود.)

۲. ثابت کنید که همه خودریختی‌های یک مدل هندسه نتاری یک گروه تشکیل می‌دهند، و مجموعه حرکتها یک زیرگروه است.

۳. برهان گزاره ۲.۹ را تمام کنید.

۴. ثابت کنید که تبدیلی از صفحه که همه طولهای آن را در ثابت $k > 0$ ضرب کند، میان‌بود و قابلیت انطباق پاره‌خطها را حفظ می‌کند.

۵. ثابت کنید که قرینه‌یابی یک حرکت است.

۶. در صفحه اقلیدسی، ثابت کنید $\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{A'B'C'}$ اگر و تنها اگر تشابهی وجود داشته باشد که $\mathrm{A'}$، $\mathrm{B'}$، و $\mathrm{C'}$ را به‌ترتیب بر A، B، و C بفرستد، و این تشابه یکتاست. (راهنمایی: از لم ۲.۹، گزاره ۵.۹، و تمرین ۲۰، فصل ۵، استفاده کنید.)

۷. ثابت کنید خطوط ناوردای قرینه‌یابی R_m عبارت‌اند از m و همه خطوط عمود بر آن. همچنین ثابت کنید $R_m R_k R_m = R_{k^*}$، که k^* قرینه k نسبت به m است.

۸. نتیجه گزاره ۶.۹ را ثابت کنید.

۹. ثابت کنید اگر یک خودریختی یک برگشت باشد، یا یک قرینه‌یابی است یا یک نیم‌دور. (راهنمایی: اگر A و $\mathrm{A'}$ با هم عوض شوند نشان دهید که وسط $\mathrm{AA'}$ ثابت است و از گزاره‌های ۴.۹ و ۶.۹ استفاده کنید.)

۱۰. نشان دهید که حاصل‌ضرب دورانهای $T'T$ حول نقاط متمایز می‌تواند یکی از سه نوع حرکت مستقیم باشد. (راهنمایی: از گزاره ۸.۹ برای خط واصل بین مراکز دوران استفاده کنید.)

۱۱. ثابت کنید که یک دوران غیرهمانی که نیم‌دور نباشد خطوط ناوردا ندارد. (راهنمایی: از گزاره ۸.۹ استفاده کنید.)

۱۲. گیریم که T انتقالی است در امتداد t و l خطی که بر اثر T ناوردا نیست. اگر t، l را ببرد (که وقتی، صفحه اقلیدسی است، به‌موجب گزاره ۱۳.۹، حتماً می‌برد)، ثابت کنید $l \| l'$. حال فرض می‌کنیم صفحه هذلولوی باشد. اگر l با t در امتداد Ω موازی مجانبی باشد، ثابت کنید که l' هم در همین امتداد با t موازی مجانبی است (به‌ویژه $l \| l'$). اگر l با t واگراموازی باشد، با استفاده از مدل پوانکاره نشان دهید که l' می‌تواند l را ببرد، یا با آن واگراموازی باشد، یا با آن موازی مجانبی باشد.

۱۳. نتیجه گزاره ۱۵.۹ را ثابت کنید.

۱۴. نشان دهید که در صفحه هذلولوی، حاصل‌ضرب انتقالها در امتداد خطوط متمایز ممکن است هر یک از سه نوع حرکت مستقیم باشد، و دو انتقال از این نوع نمی‌توانند جابه‌جایی باشند مگر اینکه لااقل یکی از آنها انتقال همانی باشد. (راهنمایی: از توجه پس از گزاره ۹.۹ برای خطوط ناوردا استفاده کنید.)

۱۵. اگر R_1، R_2، و R_3 قرینه‌یابی باشند، ثابت کنید $(R_1 R_2 R_3)^2$ یک انتقال است. (راهنمایی: از گزاره‌های ۱۸.۹ و ۱۹.۹ استفاده کنید.)

۱۶. فرض می‌کنیم T و T' لغزه‌هایی در امتداد خطهای متعامد باشند. ثابت کنید TT' نیم‌دور است اگر و تنها اگر صفحه اقلیدسی باشد. (راهنمایی: از گزاره‌های ۱۵.۹ و ۱۸.۹ استفاده کنید.)

۱۷. ثابت کنید که در صفحه هذلولوی، هر حرکت مستقیم را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب سه نیم‌دور بیان کرد. (راهنمایی: به شکل ۹.۹ مراجعه کنید. نشان دهید که به‌ازای هر دو خط l و u یک خط عمود بر u وجود دارد که با l واگراموازی است.)

۱۸. اگر T یک لغزه باشد و $n \neq 0$، ثابت کنید که $T^n \neq I$. (راهنمایی: این حکم قبلاً برای انتقال ثابت شده بود.)

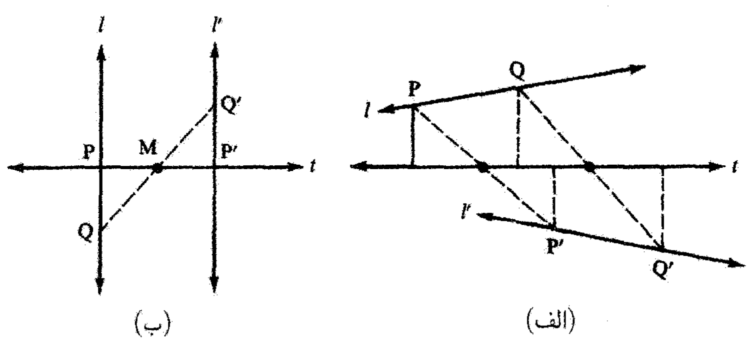
۱۹. اگر دورانهای T و T' حول O اثر واحدی بر یک نقطه $\mathrm{P} \neq 0$ داشته باشند، آنگاه $T = T'$.

۲۰. اگر T یک حرکت، A نقطه‌ای دلخواه، و l خطی دلخواه باشد، ثابت کنید $TH_{\mathrm{A}}T^{-1}$ یک نیم‌دور و TR_lT^{-1} یک قرینه‌یابی است.

۲۱. لم یلمسلو (ص ۳۵۴) را ثابت کنید. (راهنمایی: شکل ۳۱.۹)

۲۲. (قضیه یلمسلو) گیریم l و l' خطوط متمایز باشند و T حرکتی باشد که l را بر l' می‌نگارد. هنگامی که نقطه P بر l و نگاشت آن P'، بر اثر T، بر l' تغییر مکان می‌دهند، وسط پاره‌خطهای PP' یا متمایز و هم‌خط‌اند، یا منطبق. (راهنمایی: نشان دهید که می‌توانید T را حرکتی غیرمستقیم فرض کنید و اگر T یک لغزه است از تمرین ۲۱ استفاده کنید.)

۲۳. چگونه می‌خواهید مفهوم «جهت‌دهی» در صفحه نتاری را دقیقاً تعریف کنید؟ شرایط تعریف این است که باید بتوانید نشان دهید درست دو «جهت» وجود دارند که بر اثر حرکتهای غیرمستقیم عوض می‌شوند ولی بر اثر حرکتهای مستقیم عوض نمی‌شوند. (اگر در تعریف از عبارتهایی از قبیل «ساعتگرد» یا «پادساعتگرد» استفاده می‌کنید، باید آنها را به‌طور دقیق تعریف کنید.) دقت‌بخشی به این مفهوم سخت دشوار و ظریف است. این کار به چند طریق ممکن است



شکل ۳۱.۹

صورت گیرد که همه آنها تصنعی به‌نظر می‌آیند ـــبرای مطالعه یکی از آنها ←اوالد (۱۹۷۱) صفحه ۶۵. شاید علت تصنعی بودن آن، چنان‌که هرمان وایل می‌گوید «این است که برای یک ذهن علمی تفاوت و تضادی بین چپ و راست وجود ندارد. به یک عمل اختیاری انتخاب نیاز است تا مشخص کنیم که چپ چیست و راست کدام است. در تمام فیزیک هیچ چیزی وجود تفاوت ذاتی بین چپ و راست را نشان نداده است.»[۱]

۲۴. گزاره ۲۴.۹ را ثابت کنید. (راهنمایی: تشابه مفروض را با یک انتقال، یک دوران حول ۰، و در صورت لزوم، یک تجانس به مرکز ۰ ترکیب کنید تا تشابهی به‌دست آورید که ۰ و ۱ را ثابت نگاه دارد. سپس از لم ۱.۹ استفاده کنید.)

۲۵. ثابت کنید که هر تشابهی که حرکت نباشد، نقطه ثابت یکتایی دارد. (راهنمایی: از گزاره ۲۴.۹ استفاده کنید. برای اثبات ترکیبی این حکم، ←کاکستر، ۱۹۶۹، ص ۷۲.)

۲۶. ثابت کنید که از میان همه حرکتهای غیرمستقیم $z \to e^{i\theta}\bar{z} + z_۰$، تقارنهای محوری در مدل دکارتی با معادله

$$e^{i\theta}\bar{z}_۰ + z_۰ = ۰$$

مشخص می‌شوند و محور این تقارن خط

$$۲(yy_۰ + xx_۰) = x_۰^۲ + y_۰^۲$$

است هرگاه $z_۰ = x_۰ + iy_۰ \neq ۰$، در حالی که اگر $z_۰ = ۰$، محور تقارن خط

$$y\cos(\theta/۲) - x\sin(\theta/۲) = ۰$$

خواهد شد. (راهنمایی: اگر $z_۰ \neq ۰$ ، محور باید از نقطه $z_۰/۲$ بگذرد و بر خط اتصال ۰ به $z_۰$ عمود باشد. اگر $z_۰ = ۰$، محور از نقطه $e^{i(\theta/۲)}$ می‌گذرد.) برعکس، خط $ax + by = c$ داده شده است، $z_۰$ و θ را برای قرینه‌یابی نسبت به این خط پیدا کنید.

۲۷. نمایش یک تجانس با نسبت k و مرکز مختصات مختلط $z_۱$ در مختصات مختلط چیست؟

۲۸. تعریف تشابه مستقیم و غیرمستقیم در گزاره ۲۴.۹ به نمایش آن در مختصات مختلط بستگی داشت. ثابت کنید که یک تعریف مستقل از مختصات برای آن به‌ترتیب زیر داده می‌شود.

---

۱. برای بحثی دلکش در این باب که با مثالهایی از فیزیک، زیست‌شناسی، و هنر همراه است، ←تقارن اثر وایل، صفحات ۱۶ـ۳۸. کار چ. ن. یانگ و ت. د. لی، که پس از درگذشت وایل صورت گرفته و برنده جایزه نوبل شده است، وجود تفاوت فیزیکی بین چپ و راست را در تراز زیراتمی نشان می‌دهد.

تشابهی مستقیم (غیرمستقیم) است اگر و تنها اگر، حاصل‌ضرب یک تجانس در یک حرکت مستقیم (غیرمستقیم) باشد. همچنین ثابت کنید که اگر AB و A′B′ دوپاره‌خط باشند، تشابه مستقیم یکتایی وجود دارد که A را به A′ و B را به B′ می‌برد.

۲۹. گیریم γ_1 و γ_2 دو دایره در صفحه اقلیدسی با مراکز متمایز O_1 و O_2 و شعاعهای متمایز r_1 و r_2 باشند. ثابت کنید که دو تجانس D_1 و D_2 وجود دارند که γ_1 را به γ_2 بدل می‌کنند. (راهنمایی: نقطه دلخواه A را بر γ_1 بگیرید و فرض کنید A_1 و A_2 دو سر قطری از γ_2 باشند که با $\overleftrightarrow{O_1A}$ موازی است؛ پس O_2A_1 (به‌ترتیب O_2A_2) تصویر O_1A بر اثر D_1 (به‌ترتیب D_2) است.) مراکز D_1 و D_2 مرکز تشابه دو دایره نامیده می‌شوند. (برای کاربرد این گزاره در دایره معروف ۹ نقطه‌ای، آشنایی با هندسه، کاکستر، ۱۹۶۹، ص ۷۱.)

۳۰. مثلث ΔABC در صفحه اقلیدسی داده شده است. گیریم A′، B′، و C′ وسط اضلاع آن طوری نام‌گذاری شده‌اند که AA′، BB′، و CC′ میانه‌های آن هستند. نشان دهید که تجانس یکتایی با نسبت $-\frac{1}{2}$ وجود دارد که ΔABC را برروی $\Delta A'B'C'$ می‌برد. (راهنمایی: مسئله ۸، ص ۳۳۳ و آشنایی با هندسه، کاکستر، ۱۹۶۹، ص ۱۰.)

۳۱. نشان دهید که مجموعه همه تجانسها (با هر مرکز و نسبت ممکن) یک گروه نیست، در حالی که مجموعه همه انتقالها و تجانسها (در صفحه اقلیدسی) گروهی است غیرجابه‌جایی.

۳۲. ثابت کنید که از میان همه تشابه‌ها، تجانس از لحاظ هندسی با دو ویژگی مشخص می‌شود، (الف) نگاشتن هر خط l برروی خطی مساوی یا موازی با l، (ب) دارا بودن یک نقطه ثابت.

۳۳. یک نقطه در بی‌نهایت، برای صفحه دکارتی، یک رده هم‌ارزی از همه خطوط مساوی یا موازی با خط مفروض است، و خط در بی‌نهایت مجموعه همه نقاط واقع در بی‌نهایت است (فصل ۲). چون خودریختی‌ها (در واقع، هم‌خطی‌ها)ی صفحه دکارتی توازی را حفظ می‌کنند، تبدیلاتی پدید می‌آورند که خط در بی‌نهایت را برروی خودش می‌نگارند و می‌توانیم نقطه‌های ثابت واقع در بی‌نهایت این تبدیلات را بررسی کنیم. نشان دهید که یک خودریختی که (i) هر نقطه در بی‌نهایت را ثابت نگاه دارد، یک تجانس یا یک انتقال است؛ (ii) دو نقطه در بی‌نهایت را ثابت نگاه دارد یک تشابه غیرمستقیم است (اگر l و m دو نقطه ثابت را معین کنند، آنگاه $l \perp m$)؛ (iii) نقاط ثابتی در بی‌نهایت نداشته باشد، دورانی است که نه همانی است و نه نیم‌دور، یا حاصل‌ضرب این دوران در یک تجانس است.

(راهنمایی: در شرحی که گزاره ۲۴.۹ از تشابه می‌دهد، فرض می‌کنیم $w_0 = \alpha + \beta i$؛ اگر تشابه مستقیم باشد، خطهای به شیب m را بر خطهای به شیب $(\beta + \alpha m)/(\alpha - \beta m)$

منتقل می‌سازد، در حالی که اگر غیرمستقیم باشد خطهای به شیب m را بر خطهای به شیب $(\beta - \alpha m)/(\alpha + \beta m)$ منتقل می‌کند.)

۳۴. یک تبدیل خطی از صفحه دکارتی، تبدیلی است مانند T، که برحسب مختصات با فرمولهای

$$x' = a_{۱۱}x + a_{۱۲}y$$

$$y' = a_{۲۱}x + a_{۲۲}y$$

داده می‌شود که در آن ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

دارای دترمینانی مخالف صفر است. با قرارداد برداری، این تبدیل به‌صورت $z' = Az$ نوشته می‌شود. تبدیل آفین تبدیلی است خطی همراه با یک انتقال: $z \to Az + z_{۰}$. ثابت کنید تبدیل آفین یک هم‌خطی است و مجموعه همه تبدیلات آفین یک گروه (به نام گروه آفین) تشکیل می‌دهند. برعکس می‌توان نشان داد که، هر هم‌خطی از صفحه دکارتی یک تبدیل آفین است (آرتسی، ۱۹۶۵، ص ۱۵۵).

۳۵. مثالی از یک تبدیل خطی دکارتی بیاورید که دقیقاً یک نقطه در بی‌نهایت را ثابت نگه دارد.

۳۶. تبدیلات کسری خطی

$$T : z \to \frac{az + b}{cz + d}$$

با ضرایب مختلط و دترمینان غیرصفر

$$\delta = ad - bc$$

تبدیلات موبیوس یا هم‌نگاری نامیده می‌شوند. نشان دهید که چنین تبدیلی با $c \neq ۰$ را می‌توان به حاصل‌ضرب

$$T = T_{۴}T_{۳}T_{۲}T_{۱}$$

تجزیه کرد که در آن $T_{۱}$ انتقال $z \to z + (a/c)$، $T_{۲}$ تشابه $z \to (-\delta/c^{۲})z$، $T_{۳}$ نگاشت $z \to z^{-۱}$ و $T_{۴}$ انتقال $z \to z + (d/c)$ است.

۳۷. نشان دهید که تبدیل موبیوس، مجموعه همه دوایر و خطوط مدل اقلیدسی را برخود آنها می‌نگارد و تعامد را حفظ می‌کند. (راهنمایی: در حالت $c \neq 0$، از تجزیه به عوامل ضرب تمرین قبل استفاده کنید و درنظر بگیرید که T_3 ترکیب یک انعکاس نسبت به دایره واحد و یک قرینه‌یابی نسبت به محور xهاست، و از تمرین پ‌ـ۱۷، فصل ۷، استفاده کنید. در حالت $c = 0$، از این واقعیت که T یک خودریختی از مدل دکارتی است، استفاده کنید.)

۳۸. نشان دهید که نگاشت

$$E : z \to i\frac{i+z}{i-z}$$

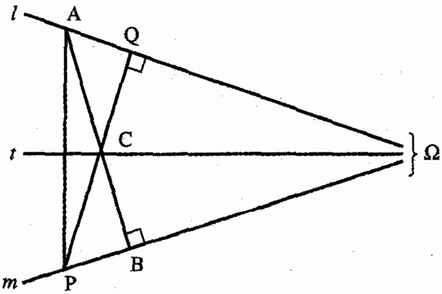
کلیه ویژگیهای مذکور در صفحه ۳۶۴ را داراست. (راهنمایی: اجزای حقیقی و موهومی $E(z)$ را محاسبه کرده، و از تمرین قبل استفاده کنید.)

۳۹. گیریم $\mathscr{G}$ زیرگروهی از گروه حرکتها باشد. به‌ازای هر نقطه P، مدار $\mathscr{G}$P از P بر اثر $\mathscr{G}$، به‌موجب تعریف، عبارت است از مجموعه همه تصاویر P بر اثر حرکتهای $\mathscr{G}$. مثلاً، هرگاه $\mathscr{G}$ تمامی گروه حرکتها باشد، آنگاه $\mathscr{G}$P تمامی صفحه می‌شود. گیریم که $\mathscr{G}$ گروه کلیه دورانها حول نقطه O باشد؛ اگر P $\neq$ O، ثابت کنید مدار $\mathscr{G}$P دایره‌ای است گذرنده از P به مرکز O.

۴۰. فرض می‌کنیم $\mathscr{G}$ گروه همه انتقالها در امتداد خط t باشد. اگر P بر t واقع باشد ثابت کنید $\mathscr{G}\mathrm{P} = t$. فرض کنید که P بر t نباشد. نشان دهید که $\mathscr{G}$P خط یکتای موازی با t گذرنده از P است اگر صفحه اقلیدسی باشد؛ و اگر صفحه هذلولوی باشد، $\mathscr{G}$P خم هم‌فاصله با t گذرنده از P است.

۴۱. گیریم Ω یک نقطه آرمانی و A یک نقطه عادی در صفحه هذلولوی باشد. دایره حدی گذرنده از A حول Ω، بنابر تعریف، متشکل از A و همه نقاطی چون A' است چنان‌که عمودمنصف AA' از Ω بگذرد. ثابت کنید که این دایره حدی، مدار A بر اثر گروه $\mathscr{G}$ی تغییر مکانهای موازی حول Ω است. (راهنمایی: از گزاره ۱۷.۹ استفاده کنید.)

۴۲. فرض می‌کنیم l و m در نقطه آرمانی Ω «یکدیگر را ببرند»، و فرض می‌کنیم A بر l و B پای عمود مرسوم از A بر m باشد. به‌موجب روش تمرین ۱۱ اصلی، فصل ۶، نقطه یکتایی مانند P بر m وجود دارد به‌قسمی‌که $\mathrm{PQ} \cong \mathrm{AB}$، که Q پای عمود مرسوم از P بر l است. گیریم t عمودمنصف AP باشد. ثابت کنید که t محور تقارن l و m است، یعنی $R_t(l) = m$؛ و بنابراین اگر A و Ω ثابت بمانند و m همه خطهای گذرنده از Ω را اختیار کند، مکان هندسی نقاط متناظر P (به‌گفته گاوس) دایره حدی گذرنده از A به مرکز Ω را اشغال می‌کند. (راهنمایی: نشان دهید AB، PQ را در نقطه C می‌برد، و با استفاده از تمرین اصلی ۵، فصل ۶، و (ززز) نشان



شکل ۳۲.۹

دهید $\Delta CAQ \cong \Delta CPB$ و بنابراین C بر t قرار دارد و $\measuredangle APB \cong \measuredangle PAQ$. از اینجا نتیجه بگیرید که t بین l و m قرار دارد و بنابراین از Ω می‌گذرد. شکل ۳۲.۹)

۴۳. ثابت کنید که خطوط t، u، و v، یعنی محورهای تقارن زوجهای اضلاع مثلث سه مجانبی در یک نقطه G که ویژگیهای مذکور در تمرین ک‌ـ۱۳، فصل ۷، را دارد، متقارب‌اند (شکل ۴۸.۷). (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که t، u را در نقطه G می‌برد، سپس ثابت کنید $R_t(u) = v$، لذا $R_t(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$ بر v نیز قرار دارد.) نشان دهید که $R_v R_u R_t = R_u$. (راهنمایی: از قضیه سه تقارن محوری استفاده کنید.) بدین‌ترتیب ما موفق شدیم حکم تمرین ک‌ـ۱۳ را بدون کمک گرفتن از هندسه اقلیدسی ثابت کنیم.

۴۴. ثابت کنید همه دوایر حدی با هم قابل انطباق‌اند. (راهنمایی: از این واقعیت که همه نیم‌خطها با یکدیگر قابل انطباق‌اند، استفاده کنید ــ لم ۳.۹.)

۴۵. در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، نشان دهید که دوایر حدی حول نقطه ∞، خطهای افقی نیم‌صفحه بالایی هستند. (راهنمایی: مثال ۳، ص ۳۷۱.) نشان دهید که دوایر حدی حول $x_\circ$ دوایری هستند در نیم‌صفحه بالایی، مماس بر محور xها در نقطه $x_\circ$. (راهنمایی: با استفاده از انعکاس $z \to \bar{z}^{-1}$ نسبت به دایره واحد، ∞ را به صفر و دوایر حدی حول ∞ را به دوایر حدی حول صفر بنگارید، سپس از تغییر مکان موازی $z \to z + x_\circ$ کمک بگیرید.)

۴۶. در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، فرض می‌کنیم t نیمه بالایی محور yها باشد. نشان دهید که خطهای هم‌فاصله t نیم‌خطهای غیرقائم در نیم‌صفحه بالایی هستند که از صفر خارج می‌شوند. (راهنمایی: مثال ۴، ص ۳۷۱.)

۴۷. در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، ثابت کنید خمهای هم‌فاصله (۱) نیم‌خطهای غیرقائمی هستند که از یک نقطه از محور yها اخراج شده‌اند؛ یا (۲) فصل مشترک نیم‌صفحه بالایی با دوایری

هستند که محور xها را در دو نقطه می‌برند و مراکز آنها بر محور xها قرار ندارند. (راهنمایی: با استفاده از یک تبدیل کسری خطی، نیمه بالایی محور yها را بر یک خط دلخواه دیگر پوانکاره بنگارید و از تمرینهای ۴۵ و ۳۷ استفاده کنید.)

۴۸. در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، نشان دهید هر دایره هذلولوی با یک دایره اقلیدسی نشان داده می‌شود. (راهنمایی: از یکریختی E با مدل قرص پوانکاره و تمرین پ‍ـ۵، فصل ۷، استفاده کنید.) شعاع اقلیدسی و مرکز اقلیدسی دایره هذلولوی به مرکز i، گذرنده از نقطه $2i$ را پیدا کنید. (راهنمایی: مثال ۵، ص ۳۷۱.)

۴۹. با استفاده از مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، ثابت کنید که در صفحه هذلولوی، سه نقطه بر یک خط، بر یک دایره، بر یک خم هم‌فاصله، یا بر یک دایره حدی واقع‌اند.

۵۰. در این تمرین، صحت برگردان احکام هندسی زیر به معادلات جبری در گروه حرکتها را (که به براهین جدید قضایای هندسی منجر می‌شود؛ ف. باخمان ۱۹۷۳) تحقیق کنید:

(۱) P بر l قراردارد $\Longleftrightarrow (H_{\mathrm{P}}R_l)^2 = I$.

(۲) $l \perp m \Longleftrightarrow (R_l R_m)^2 = I$.

(۳) l، m، و n به یک دسته خط متعلق‌اند $\Longleftrightarrow (R_1 R_m R_n)^2 = I$.

(۴) l عمودمنصف AB است $\Longleftrightarrow R_l H_{\mathrm{B}} R_l H_{\mathrm{A}} = I$.

(۵) فرض می‌کنیم m و n دو خط متقاطع باشند:

l نیمساز یکی از زوایایی است که m و n با هم می‌سازند $\Longleftrightarrow R_l R_m R_l R_n = I$.

(در حالتی که این معادله برقرار باشد و $m \| n$، l را از لحاظ هندسی توصیف کنید.)

(۶) M وسط AB است $\Longleftrightarrow H_{\mathrm{M}} H_{\mathrm{B}} H_{\mathrm{M}} H_{\mathrm{A}} = I$.

(۷) $l \perp \overleftrightarrow{\mathrm{AB}} \Longleftrightarrow (R_l H_{\mathrm{A}} H_{\mathrm{B}})^2 = I$

(۸) A بر عمود مشترک l و m واقع است $\Longleftrightarrow (H_{\mathrm{A}} R_l R_m)^2 = I$

(۹) $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ داده شده است. در هندسه اقلیدسی

$$H_{\mathrm{A}} R_l H_{\mathrm{A}} = H_{\mathrm{B}} R_l H_{\mathrm{B}} \Longleftrightarrow l = \overleftrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ یا } l \| \overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$$

در هندسه هذلولوی، این معادله برقرار است $\Longleftrightarrow l = \overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$.

(۱۰) در هندسه هذلولوی، A، B، و C هم‌خط‌اند $\Longleftrightarrow (H_{\mathrm{A}} H_{\mathrm{B}} H_{\mathrm{C}})^2 = I$.

(۱۱) فرض می‌کنیم A، B، و C هم‌خط نباشند و G مرکزوار (محل تلاقی سه میانه) $\Delta\mathrm{ABC}$ باشد. در این‌صورت در هندسه اقلیدسی، $\mathrm{P} = \mathrm{G} \Longleftrightarrow H_{\mathrm{P}} H_{\mathrm{C}} H_{\mathrm{P}} H_{\mathrm{B}} H_{\mathrm{P}} H_{\mathrm{A}} = I$

(راهنمایی: یادآور می‌شویم که $H_{\mathrm{P}}H_{\mathrm{Q}}$ انتقالی است با برداری به‌طول $2\overline{\mathrm{PQ}}$ در امتداد نیم‌خط $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$.)

(۱۲) $\square\mathrm{ABCD}$ در صفحه اقلیدسی داده شده است.

$$\square\mathrm{ABCD} \text{ متوازی‌الاضلاع است } \Longleftrightarrow H_{\mathrm{A}}H_{\mathrm{B}}H_{\mathrm{C}}H_{\mathrm{D}} = I$$

۵۱. یک مجموعه $\mathscr{S}$ از تبدیلات را بر اثر یک گروه $\mathscr{G}$ از تبدیلات، ناوردا خوانند هرگاه به‌ازای هر $S \in \mathscr{S}$ و هر $T \in \mathscr{G}$، TST^{-1} به $\mathscr{S}$ متعلق باشد. (در حالتی که $\mathscr{S}$ زیرگروه $\mathscr{G}$ و بر اثر $\mathscr{G}$ ناوردا باشد، $\mathscr{S}$ زیرگره نرمال نامیده می‌شود.) مثلاً، در تمرین ۲۰ نشان دادید که مجموعه‌های نیم‌دورها و تقارنها هر یک بر اثر گروه حرکتها ناوردا هستند. تعیین کنید که هر یک از مجموعه‌های زیر بر اثر گروههای داده شده، ناوردا هست یا نیست:

(الف) $\mathscr{S}$ = همه دورانها حول یک نقطه مفروض، و $\mathscr{G}$ = همه حرکتها.

(ب) $\mathscr{S}$ = همه دورانها حول همه نقطه‌ها، و $\mathscr{G}$ = همه حرکتها.

(ج) $\mathscr{S}$ = همه انتقالها در امتداد یک خط مفروض، و $\mathscr{G}$ = همه حرکتها.

(د) $\mathscr{S}$ = همه انتقالها در امتداد همه خطها، و $\mathscr{G}$ = همه حرکتها.

(ه) (هندسه اقلیدسی) $\mathscr{S}$ = همه حرکتها، و $\mathscr{G}$ = همه تشابهات.

(و) (هندسه اقلیدسی) $\mathscr{S}$ = همه تجانسها، و $\mathscr{G}$ = همه تشابهات.

(ز) (هندسه هذلولوی) $\mathscr{S}$ = همه تغییر مکانهای موازی، و $\mathscr{G}$ = همه حرکتها.

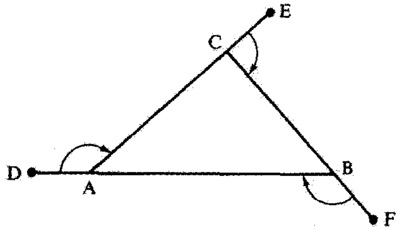
(ح) $\mathscr{S}$ = همه لغزه‌ها و $\mathscr{G}$ = همه حرکتها.

(ط) (هندسه اقلیدسی) $\mathscr{S}$ = همه حرکتهای مستقیم و $\mathscr{G}$ = همه تشابهات.

(ی) (هندسه اقلیدسی) $\mathscr{S}$ = همه دورانها حول O، و $\mathscr{G}$ = همه تشابهاتی که O را ثابت نگاه می‌دارند.

(ک) (هندسه اقلیدسی) $\mathscr{S}$ = همه انتقالها در امتداد t، و $\mathscr{G}$ = همه تشابهاتی که t را ناوردا نگاه می‌دارند.

۵۲. در ۱۸۰۹، ب. ف. تیبو سعی کرد اصل توازی اقلیدسی را با استدلال زیر با یک دوران ثابت کند. نقص آن را پیدا کنید: مثلث غیرمشخص $\Delta\mathrm{ABC}$ مفروض است. فرض می‌کنیم $\mathrm{D}*\mathrm{A}*\mathrm{B}$، $\mathrm{A}*\mathrm{C}*\mathrm{E}$، و $\mathrm{C}*\mathrm{B}*\mathrm{F}$ (شکل ۳۳.۹). $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ را حول A به زاویه $\sphericalangle\mathrm{DAC}$ دوران می‌دهیم تا بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$ منطبق شود؛ سپس $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$ را حول C به زاویه $\sphericalangle\mathrm{ECB}$ دوران می‌دهیم تا بر $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$ قرار گیرد؛ بعد $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$ را در حول B به زاویه $\sphericalangle\mathrm{FBA}$ دوران می‌دهیم تا بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ منطبق شود. پس از این سه دوران، $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ بر روی خودش برگشته است و بدین‌ترتیب به‌اندازه 360° دوران کرده



شکل ۳۳.۹

است. اگر این سه زاویه دوران را با هم جمع کنیم داریم

$$[۱۸۰^\circ - (\measuredangle A)^\circ] + [۱۸۰^\circ - (\measuredangle C)^\circ] + [۱۸۰^\circ - (\measuredangle B)^\circ] = ۳۶۰^\circ$$

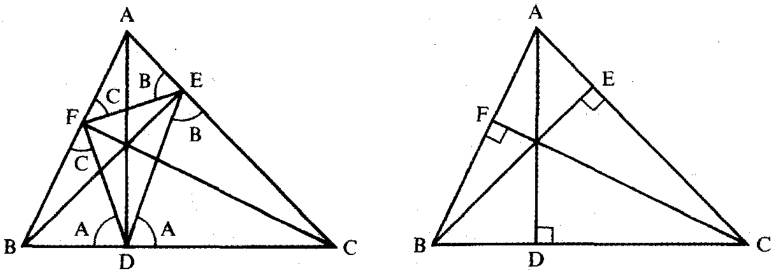
لذا مجموع زاویه‌های ΔABC برابر با ۱۸۰° است و اصل اقلیدس نتیجه می‌شود.

۵۳. ΔABC در صفحه هذلولوی داده شده است. فرض می‌کنیم $T_۱$ انتقالی در امتداد $\overleftrightarrow{AB}$ باشد که A را به B می‌برد، $T_۲$ انتقالی در امتداد $\overleftrightarrow{BC}$ باشد که B را به C می‌برد، و $T_۳$ انتقالی در امتداد $\overleftrightarrow{AC}$ که C را به A می‌برد. نشان دهید که $T_۳T_۲T_۱$ دورانی است حول A به زاویه d°، که d° کاستی مثلث ΔABC است.

۵۴. مثلث غیرقائم‌الزاویه ΔABC مفروض است گیریم $a = \overleftrightarrow{BC}$، $b = \overleftrightarrow{AC}$ و $c = \overleftrightarrow{AB}$، و D، E، و F پاهای عمود وارد از A، B، و C به‌ترتیب بر a، b، و c باشند. به‌موجب گزاره ۱۹.۹ می‌دانیم که $G = R_aR_bR_c$، حاصل‌ضرب قرینه‌یابی‌ها نسبت به اضلاع ΔABC، یک لغزه است. فرض می‌کنیم هندسه اقلیدسی باشد. ثابت کنید خط $t = \overleftrightarrow{DF}$ محور G است. (راهنمایی: نشان دهید که مثلثهای قائم‌الزاویه ΔABE و ΔACF متشابه‌اند، سپس $\Delta AEF \sim \Delta ABC$؛ بنابراین $\measuredangle B \cong \measuredangle AEF$، $\measuredangle AFE \cong \measuredangle C$. اگر همین استدلال را برای ΔBFD و ΔCED به‌کار بریم نتیجه می‌گیریم $\measuredangle AFE \cong \measuredangle BFD$، $\measuredangle AEF \cong \measuredangle CED$، و $\measuredangle BDF \cong \measuredangle CDE$. از این قابلیتهای انطباق، نتیجه بگیرید که خط t بر اثر G ناورداست (شکل ۳۴.۹).

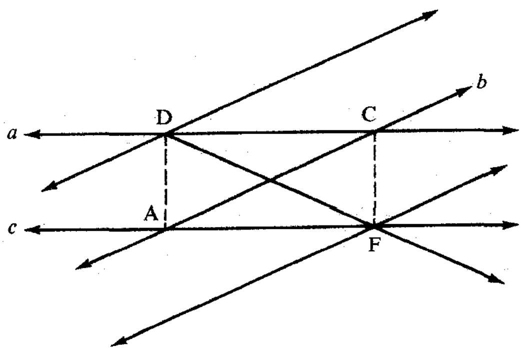
۵۵. با همان قرارداد تمرین قبل، فرض می‌کنیم ΔABC حادالزوایا باشد و $G = TR_t$، که T انتقالی در امتداد t است. نشان دهید که این انتقال در امتداد $\overrightarrow{FD}$ به‌اندازه فاصله‌ای برابر با محیط ΔDEF است. (راهنمایی: تصویر F را بر اثر G پیدا کنید.)

۵۶. با همان قراداد بالا، محور G را در حالتی که ΔABC قائم‌الزاویه باشد پیدا کنید. (راهنمایی: بستگی به این دارد که $\measuredangle B$ قائمه باشد یا نباشد؛ از لم یلمسلو، ص ۳۵۶، برای $\overleftrightarrow{AB}$ استفاده کنید.)



(ب) (الف)

شکل ۳۴.۹



شکل ۳۵.۹

۵۷. سه‌خط a، b، و c در صفحه اقلیدسی داده شده‌اند به‌قسمی‌که $a||c$، b و c در A، و b و a در c متلاقی‌اند. (شکل ۳۵.۹).

(الف) اگر b بر a و c عمود باشد، ثابت کنید b محور لغزه $R_aR_bR_c$ است و داریم: $R_aR_bR_c = R_aR_cR_b = R_bR_aR_c$.

(ب) اگر b بر a و c عمود نباشد، فرض می‌کنیم D و F پاهای عمودهای مرسوم از A و C، به‌ترتیب بر a و c باشند. ثابت کنید $\overleftrightarrow{\mathrm{DF}}$ محور لغزه $R_aR_bR_c$ است. (راهنمایی: با استفاده از لم یلمسلو نشان دهید که F و D بر محور قرار دارند.) ثابت کنید محور لغزه $R_aR_cR_b$ (یا $R_cR_aR_b$) خط گذرنده از D (یا F) موازی با b است (راهنمایی: اگر C' و A' به‌ترتیب تصاویر C و A باشند، وسط CC' و AA' را پیدا کنید.)

۵۸. اگر در هندسه هذلولوی نقطه آرمانی Ω و فاصله d داده شده باشند، تبدیلی مانند T را تعریف می‌کنیم که نقطه P را بر نقطه یکتای P' واقع برنیم‌خط $\mathrm{P}\Omega$ بفرستد به‌قسمی‌که $\overline{\mathrm{PP}'} = d$. (تبدیل مشابه با آن در صفحه اقلیدسی یک انتقال است به فاصله d.) در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، T را به‌روشنی بیان کنید وقتی که $\Omega = \infty$. (راهنمایی: فاصله پوانکاره‌ای نقطه $x + iy$ از نقطه $x + iy'$ مساوی است با $|\log y/y'|$.) با نشان دادن این مطلب که تصویر خطی که از ∞ نگذرد بر اثر T یک خط نیست، ثابت کنید که T یک هم‌خطی نیست.

۵۹. نشان دهید که به‌جای تولید گروه دووجهی D_n با استفاده از یک قرینه‌یابی و یک دوران، می‌توان آن را با دو قرینه‌یابی تولید کرد، و سه رابطه اساسی برای این مولدها را به‌دست آورید. ($n > ۱$).

۶۰. گروه تقارن هر یک از الگوهای نامتناهی زیر را تعیین کنید. (گروهی را که به‌وسیله مولدها و روابط به‌دست می‌آید توضیح دهید):

(الف) $\ldots\mathrm{LLLLL}\ldots$

(ب) $\ldots\mathrm{L\Gamma L\Gamma L}\ldots$

(ج) $\ldots\mathrm{VVVVV}\ldots$

(د) $\ldots\mathrm{NNNNN}\ldots$

(ه) $\ldots\mathrm{V\Lambda V\Lambda V}\ldots$

(و) $\ldots\mathrm{DDDDD}\ldots$

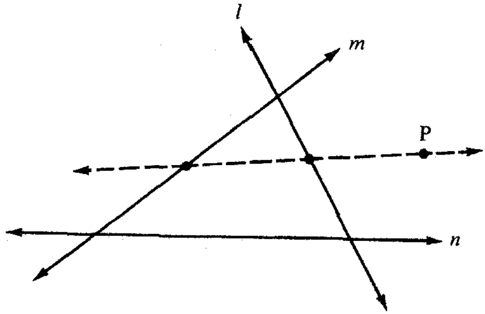
(ز) $\ldots\mathrm{HHHHH}\ldots$

۶۱. کدام جفت از گروههای تمرین قبل یکریخت‌اند؟ (راهنمایی: آشنایی با هندسه، کاکستر، ۱۹۶۹، ص ۴۸.)

۶۲. عطف به مدل تمرین ۳۵، فصل ۳، که در آن تغییر درازا در طول محور xها موجب صادق نبودن ملاک ض‌زض شده بود. نشان دهید که تنها تشابهاتی که خودریختی‌های این مدل هستند، آنهایی هستند که محور xها را ناوردا نگاه می‌دارند.

۶۳. فرض می‌کنیم مدل تمرین قبل چنان تغییر کند که درازا در امتداد سه‌خط نامتقارب به سه واحد مختلف اندازه‌گیری، غیر از واحد همه خطهای دیگر بدل شود. نشان دهید که همانی تنها خودریختی این مدل است (بنابراین در این مدل «هیچ چیز را نمی‌توان حرکت داد»، همه چیز ناورداست و برنامه کلاین بینشی از درون «هندسه» به ما نمی‌دهد).

۶۴. صفحه وقوع، بنابر تعریف، مدلی از هندسه وقوع است که به تعبیر زیر دوبعدی است: اگر سه خط l، m، و n یک مثلث تشکیل دهند و P نقطه دلخواهی باشد، آنگاه یک خط t گذرنده از



شکل ۳۶.۹

P وجود دارد چنان‌که t، $l \cup m \cup n$ را دست‌کم در دو نقطه می‌برد (شکل ۳۶.۹). نشان دهید که یک مدل از بنداشتهای وقوع و میان‌بود خودبه‌خود دوبعدی است. گیریم T نگاشتی یک‌به‌یک از مجموعه نقاط یک صفحه وقوع برروی خودش باشد، چنان‌که هرگاه O، P، و Q هم‌خط باشند، آنگاه تصاویر آنها O'، P'، و Q' نیز هم‌خط باشند. ثابت کنید که برعکس اگر O'، P'، و Q' هم‌خط باشند، O، P، و Q نیز هم‌خط‌اند. آیا مدلی از هندسه وقوع وجود دارد که دوبعدی نباشد و این عکس در آن صدق نکند؟ (من جوابش را نمی‌دانم.)

۶۵. گزاره زیر را که مشابه با گزاره ۱۶.۹ (ج) در هندسه تصویری یک‌بعدی روی یک میدان دلخواه K است ثابت کنید: سه‌تایی‌هایی از نقاط را بر خط تصویری $\mathscr{P}^1(K)$ درنظر می‌گیریم. به‌ازای هر جفت از این سه‌تایی‌ها، تبدیل تصویری یکتایی وجود دارد که یکی از این سه‌تایی‌ها را بر دیگری می‌نگارد. (راهنمایی: این تمرین، تمرینی است در جبر خطی دوبعدی، بر اساس این واقعیت که ماتریس عادی ۲ × ۲ی یکتایی وجود دارد که یک جفت از بردارهای به‌طور خطی مستقل را بر دیگری می‌نگارد؛ اوالد، ۱۹۷۱، ص ۲۱۵.)

۶۶. چهار نقطه P_1، P_2، P_3، و P_4 بر خط تصویری $\mathscr{P}^1(K)$ داده شده‌اند؛ فرض می‌کنیم $[s_i, t_i]$ مختصات همگن P_i، $i = 1, 2, 3, 4$، باشند. نسبت ناهمساز $(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3\mathrm{P}_4)$ را با رابطه

$$\frac{\begin{vmatrix} s_1 & t_1 \\ s_3 & t_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_2 & t_2 \\ s_4 & t_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_2 & t_2 \\ s_3 & t_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_1 & t_1 \\ s_4 & t_4 \end{vmatrix}} = (\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3\mathrm{P}_4)$$

تعریف می‌کنیم که در آن هریک از چهار دترمینان ۲ × ۲ موجود در این رابطه مخالف صفر است (زیرا

نقاط متمایزند). اگر یک تبدیل تصویری نقطه P_i را بر نقطه P'_i، $i = ۱, ۲, ۳, ۴$، بنگارد ثابت کنید که این نسبت ناهمساز محفوظ می‌ماند: $(\mathrm{P}_۱\mathrm{P}_۲, \mathrm{P}_۳\mathrm{P}_۴) = (\mathrm{P'}_۱\mathrm{P'}_۲, \mathrm{P'}_۳\mathrm{P'}_۴)$. (راهنمایی: اگر M یک ماتریس تبدیل تصویری باشد، هر دترمینانی که در فرمول مربوط به $(\mathrm{P}'_۱\mathrm{P}'_۲, \mathrm{P}'_۳\mathrm{P}'_۴)$ پیدا می‌شود، حاصل‌ضرب دترمینان M در دترمینان متناظرش، در فرمول مربوط به $(\mathrm{P}_۱\mathrm{P}_۲, \mathrm{P}_۳\mathrm{P}_۴)$ است.)

۶۷. از آنجا که دترمینانهایی که در فرمول نسبت ناهمساز تمرین قبل وجود دارند ممکن است منفی باشند (وقتی که K زیرمیدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد)، این نسبت ناهمساز همانند نسبت ناهمساز مثبتی که در صفحه ۲۶۲ تعریف شده بود نیست. نشان دهید که این نسبت ناهمساز، برای نقاط غیرواقع در بی‌نهایت، همان نسبت ناهمساز علامت‌داری است که در تمرینهای ت-۴ و ت-۷، فصل ۷، تعریف شده است. (راهنمایی: از مختصات ناهمگن $[s_i, ۱]$ استفاده کنید.)

۶۸. از تمرینهای ۶۵ و ۶۶ نتیجه بگیرید که اگر $(\mathrm{P}_۱, \mathrm{P}_۲, \mathrm{P}_۳)$ و $(\mathrm{P}'_۱, \mathrm{P}'_۲, \mathrm{P}'_۳)$ دو سه‌تایی از نقاط $\mathscr{P}^۱(K)$ باشند، و T تبدیل تصویری یکتایی باشد که سه‌تایی اول را بر سه‌تایی دوم منتقل کند، و اگر $\mathrm{P}_۴$ چهارمین نقطه غیرمشخص باشد، $\mathrm{P'}_۴$، تصویر $\mathrm{P}_۴$ بر اثر T. به‌طور یکتا با معادله

$$(\mathrm{P}_۱\mathrm{P}_۲, \mathrm{P}_۳\mathrm{P}_۴) = (\mathrm{P}'_۱\mathrm{P}'_۲, \mathrm{P}'_۳\mathrm{P}'_۴)$$

معین می‌شود. این مطلب نشان می‌دهد که نسبت ناهمساز، ناوردای اساسی گروه تصویری یک‌بعدی است.

توجه . بقیه تمرینها در هندسه اقلیدسی هستند.

۶۹. ثابت کنید که میانه‌های مثلث در نقطه G، که در $\frac{۲}{۳}$ فاصله از هر رأس واقع است، یکدیگر را می‌برند. (راهنمایی: از هندسه تحلیلی استفاده کنید.) در چه مثلثهایی خط اویلر (مسئله ۸، صفحه ۳۳۳) از یک رأس می‌گذرد؟

۷۰. نشان دهید که U، مرکز دایره ۹ نقطه‌ای، مزدوج توافقی نقطه O، مرکز دایره محیطی مثلث، نسبت به نقطه تلاقی سه ارتفاع، H، و مرکزوار G است (مسائل ۹ و ۸، صفحات ۳۳۴ و ۳۳۳).

۷۱. نشان دهید که تجانس T' به مرکزوار G و نسبت -۲، دایره ۹نقطه‌ای را بر دایره محیطی مثلث نیز می‌نگارد (لذا در اصطلاحات تمرین ۲۹، G و H دو مرکز تشابه این دوایرند).

۷۲. نشان دهید که فاصله O، مرکز دایره محیطی مثلث، از یک ضلع، برابر با نصف فاصله نقطه H، محل تلاقی سه ارتفاع مثلث، تا رأس مقابل به این ضلع است. (راهنمایی: مسئله ۸، صفحه ۳۳۳).

۷۳. درستی همه احکامی را که در حل مسائل ۱ تا ۹، صفحات ۳۳۰-۳۳۴ آورده شده ولی توجیه نشده بودند، توجیه کنید.

۷۴. حل مسئله ۴، صفحه ۳۳۱ را تمام کنید بدین‌ترتیب که نشان دهید هرگاه X، Y، و Z پای ارتفاعها باشند، Y و Z بر X_1X_2 قرار دارند. (راهنمایی: از قابلیتهای انطباق، که در راهنمایی تمرین ۵۴ آورده شده بود استفاده کنید.)

۷۵. خط l و دو نقطه A و B در یک طرف آن و یک عدد مثبت d داده شده‌اند. پاره‌خط XY به‌طول d را بر l چنان بیابید که طول خط شکسته AXYB کمترین مقدار ممکن باشد. (راهنمایی: همان روش حل مسئله ۱ صفحه ۳۳۰ را به‌کار برید، منتها به‌جای تقارن محوری نسبت به l، از یک تقارن لغزه در امتداد l به‌فاصله d استفاده کنید.)

۷۶. گزارشی درباره قضیه فویرباخ که می‌گوید: «در هر مثلث، دایره ۹ نقطه‌ای بر دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی آن مماس است»، تهیه کنید (هـ. ایوز، ۱۹۷۲؛ یا د. چ. کی، ۱۹۶۹).

۷۷. گیریم ΔABC مثلثی است که بزرگترین زاویه‌اش از ۱۲۰° کمتر است. به‌ازای هر نقطه P فرض می‌کنیم $d(P) = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$. ثابت کنید نقطه یکتایی مانند $P_\circ$ وجود دارد که در آن تابع $d(P)$ مینیمم مقدار را دارد، و $P_\circ$ در درون مثلث ΔABC قرار دارد و می‌توان آن را با خط‌کش و پرگار ترسیم کرد؛ ثابت کنید

$$۱۲۰^\circ = (\measuredangle AP_\circ B)^\circ = (\measuredangle BP_\circ C)^\circ = (\measuredangle CP_\circ A)^\circ$$

و

$$d(P_\circ)^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab \ \cos(C + \frac{\pi}{۳})$$

که در آن $a = \overline{BC}$ و $b = \overline{AC}$. (راهنمایی: ΔABC را حول هر یک از رأسهایش به زاویه ۶۰° دوران دهید. ←کی، ۱۹۶۹، ص ۲۷۱ که در آنجا $P_\circ$ نقطه فرما نامیده شده است؛ یا «گیرایی ریاضیات» اثر رادماخر و توپلیتس[1]).

1. H. Rademacher and O. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, Princeton University Press, 1957, P. 33.

۱۰

قضایای دیگر در هندسه هذلولوی

> قضایای این هندسه شبیه پارادوکس هستند و شاید در نظر یک فرد مبتدی بی‌معنی جلوه کنند؛ ولی تفکر پی‌گیر و آرام آشکار می‌سازد که هیچ‌چیز ناممکن در آنها نیست.
>
> ک. ف. گاوس

در این فصل تعمق بیشتری در «دنیای شگفت‌انگیز جدید» هندسه هذلولوی خواهیم کرد. برای تسهیل این مسئله مخاطره‌انگیز، گاهی نگاه سریعی به بعضی از صورتهای غیرعادی خواهیم انداخت بی‌آنکه منتظر برهان دقیق وجودی آنها باشیم؛ و زمانی دقیقتر می‌شویم ولی به خود اجازه می‌دهیم به‌جای اینکه مستقیماً به استدلالهای شاق و پرزحمت از روی هندسه‌های هذلولوی بپردازیم، در داخل مدلهای کلاین و پوانکاره که ابزارهای اقلیدسی آشنایی برای آنها در دسترس داریم عمل کنیم. امیدوارم در انتهای این سیروسفر با این سرزمین به‌قدر کافی آشنا شوید و اطمینان حاصل کنید که جستجوهای بیشتری را با راهنمایان دیگر می‌توانید انجام دهید.

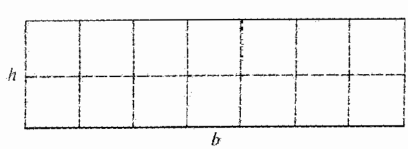
مساحت و کاستی

در ۱۷۹۹، گاوس در پاسخ به نامه‌ای از فارکاش بویویی که در آن بویویی مدعی اثبات اصل پنجم اقلیدس شده بود، چنین نوشت:

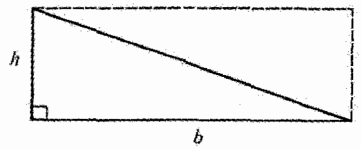
> . . .راهی که من در آن گام نهاده‌ام به هدف مطلوب، یعنی هدفی که شما می گویید به آن رسیده‌اید منجر نمی‌شود، بلکه به‌جای آن به شک درباره اعتبار هندسه [اقلیدسی] منتهی می‌شود. من به‌طور قطع به نتایجی دست یافته‌ام که بیشتر مردم به آنها به‌صورت حجت می‌نگرند، ولی در نظر خودم هیچ چیز را ثابت نمی‌کنند. اگر، مثلاً، کسی بتواند ثابت کند که مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که مساحتش از هر عدد مفروضی بزرگتر است، آنگاه من می‌توانم اعتبار تمام دستگاه هندسه [اقلیدسی] را با دقت تمام ثابت کنم. قطعاً بسیاری از مردم این قضیه را به‌عنوان یک بنداشت می‌پذیرند؛ ولی خودِ من نه. می‌توانید رأسهای یک مثلث را هر اندازه بخواهید دور از یکدیگر بگیرید، ولی باز مساحت مثلث در حدی متناهی باقی می‌ماند. من چندین قضیه از این نوع در اختیار دارم ولی هیچ‌یک از آنها مرا ارضا نمی‌کند.

یکی از شگفت‌انگیزترین واقعیتها در هندسه هذلولوی این است که برای مساحتی که یک مثلث می‌تواند اختیار کند یک حد بالا وجود دارد، و حال آنکه برای درازای اضلاع آن چنین حدی موجود نیست.

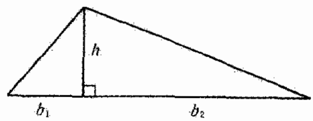
برای اینکه ببینیم چگونه چنین چیزی ممکن است، می‌بایست روش حساب کردن مساحت را در هندسه اقلیدسی مرور کنیم. ساده‌ترین شکل، مستطیلی است که مساحت آن از ضرب اندازه درازای قاعده در اندازه درازای ضلع دیگر به‌دست می‌آید (شکل ۱.۱۰). این فرمول از اینجا به‌دست می‌آید که می‌گوییم درون مستطیل را درست bh مربع یکه پر کرده است، که مربع یکه مربعی است که درازای هر ضلعش ۱ باشد. فراموش نکنید که یکه درازا اختیاری است. هرگاه



شکل ۱.۱۰ bh =مساحت.



شکل ۲.۱۰ $\frac{1}{2}bh$ =مساحت.



شکل ۳.۱۰ $\frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h = \frac{1}{2}bh$ =مساحت.

مساحت را برحسب سانتیمتر مربع اندازه بگیریم عددی به‌دست می‌آید که تفاوت دارد با وقتی که مساحت را برحسب دسیمتر مربع حساب کنیم (ولی عدد دومی همیشه با عدد اولی متناسب است و ضریب این تناسب $۱۲^۲ = ۱۴۴$ است).

از روی مساحت مستطیل است که می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه را حساب کنیم. هر قطر مستطیل آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه قابل انطباق تقسیم می‌کند. ولی چون قرار ما بر این است که مثلثهای قابل انطباق یک مساحت داشته باشند، مساحت مثلث قائم‌الزاویه باید نصف مساحت مستطیل باشد (شکل ۲.۱۰).

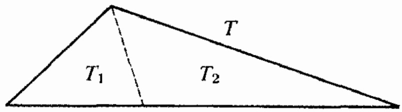
می‌توانیم درون یک مثلث نامشخص را با رسم یکی از ارتفاعها به دو مثلث قائم‌الزاویه بدل کنیم. چون قرار ما بر این است که مساحت تمام مثلث مساوی مجموع مساحتهای این دو مثلث قائم‌الزاویه باشد، مساحت مثلث برابر با $\frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$ می‌شود که $b_1 + b_2 = b$. یعنی باز برای مساحت یک مثلث معمولی، نصف حاصل‌ضرب درازای قاعده در درازای ارتفاع را پیدا می‌کنیم (شکل ۳.۱۰).

می‌بینید که وقتی b و h را به اندازه کافی بزرگ بگیریم، مساحت مثلث یعنی $\frac{1}{2}bh$ هر اندازه که بخواهید بزرگ می‌شود.[۱]

چرا در هندسه هذلولوی چنین امری صادق نیست؟ زیرا تمام دستگاه اندازه‌گیری مساحت، بر اساس یکه‌های مربع نهاده شده است، و چنان‌که دیده‌ایم (لم ۱.۶) در هندسه هذلولوی، مستطیل (به‌ویژه مربع) اساساً وجود ندارد.

پس منظور از «مساحت» در هندسه هذلولوی چیست؟ مسلماً از راه شهودی می‌توانیم بگوییم

۱. مثلاً اگر b را دو میلیون و h را یک میلیون بگیریم، مساحت برابر یک تریلیون یکه مربع می‌شود.ـم.



شکل ۴.۱۰ مساحت $T_۱$+ مساحت $T_۲$ =مساحت T.

اختصاص دادن عدد مثبتی به نام مساحت است به هر مثلث و می‌خواهیم که این تابع مساحت ویژگیهای زیر را داشته باشد:

۱. ناوردایی براثر قابلیت انطباق. مساحت مثلثهای قابل انطباق مساوی است.

۲. ویژگی جمعی. اگر مثلث T را با رسم خطی از یک رأس به یکی از نقاط ضلع روبه‌رو به دو مثلث $T_۱$ و $T_۲$ تقسیم کنیم، مساحت T مساوی با مجموع مساحتهای $T_۱$ و $T_۲$ است (شکل ۴.۱۰).

اکنون که مساحت را تعریف کردیم، می‌پرسیم چگونه باید آن را حساب کنیم؟ در نهایت دقت می‌توان ثابت کرد که در هندسه هذلولوی نمی‌توان مساحت یک مثلث را به‌صورت نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع آن بیان کرد (موییز، ۱۹۹۰، ص ۴۱۱). خوب، پس چگونه باید آن را حساب کرد؟ در اینجا به یکی از زیباترین جلوه‌های ریاضیات برمی‌خوریم، یعنی به یک رابطه مستقیم بین دو مفهوم که ابتدا تصور نمی‌شد به‌هم ارتباط داشته باشند. ممکن است شما این بستگی را با مطالعه ویژگیهای ۱ و ۲ی مساحت شناخته باشید، زیرا در قضیه ۷.۴ و تمرین ۱، فصل ۴، ثابت کردیم که کاستی مثلث هم این ویژگیها را دارد. یادآور می‌شویم که در هندسه هذلولوی، مجموع ۳ زاویه همواره از ۱۸۰° کمتر است (قضیه ۱.۶). لذا اگر کاستی را ۱۸۰° منهای مجموع سه زاویه تعریف کنیم، عدد مثبتی به‌دست می‌آوریم. زمانی که ریاضیدانی دو تابع با ویژگیهای یکسان را می‌بیند، این گمان در او پیدا می‌شود که باید آنها با هم رابطه‌ای داشته باشند. گاوس این رابطه را در اوایل سال ۱۷۹۴ (وقتی که هنوز ۱۷ سال بیشتر نداشت) کشف کرد و آن را اولین قضیه در این موضوع نامید.[۱]

۱. چنین به‌نظر می‌رسد که این قضیه به‌طور ضمنی می‌گوید که نظریه‌های مساحت اقلیدسی و هذلولوی اشتراک بسیار ناچیزی با هم دارند. ولی ی. بویویی قضیه شگفت‌آوری را درباره مساحت کشف کرد که در هر دو هندسه صدق می‌کند. بنابر تعریف، مساحت یک چندضلعی مجموع مساحتهای مثلثهایی است که در مثلث‌بندی این چندضلعی پیدا می‌شوند. (به‌آسانی می‌توان نشان داد که این تعریف به انتخاب نوع مثلث‌بندی بستگی ندارد.) قضیه بویویی بیان می‌کند که دو چندضلعی S و S' دو مساحت یکسان دارند اگر و فقط اگر به‌ازای مقداری از n، چندضلعی S (به‌ترتیب S') یک مثلث‌بندی $\{T_۱, T_۲, \ldots, T_n\}$ (به‌ترتیب $\{T'_۱, T'_۲, \ldots, T'_n\}$)داشته باشد به‌طوری که $T_j \cong T'_j$ به‌ازای جمیع مقادیر $j = ۱, ۲, \ldots, n$. (برای اثبات این قضیه ←موییز، ۱۹۹۰، صص ۳۹۴ـ۴۱۰). برای اینکه به عمق این قضیه پی ببرید، سعی کنید آن را برای دو مستطیل در صفحه اقلیدسی ثابت کنید.

قضیه ۱.۱۰ در هندسه هذلولوی، عدد ثابت مثبتی مانند k وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر ΔABC

$$\text{مساحت } \Delta ABC = \frac{\pi}{۱۸۰} k^{۲} \times (\text{کاستی } \Delta ABC)$$

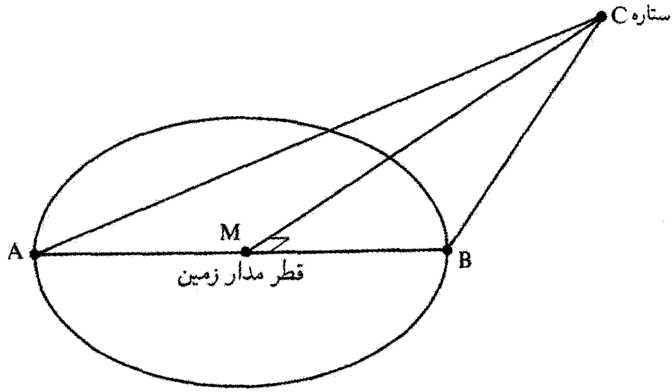
برای اثبات این قضیه که دشوار نیست ولی طولانی است ←موییز، (۱۹۹۰، ص ۴۱۳). این قضیه می‌گوید مساحت هر مثلث با کاستی آن متناسب است، و نسبت این تناسب برابر با مقدار ثابت $k^{۲}(\pi/۱۸۰)$ است. این مقدار ثابت به واحد اندازه‌گیری بستگی دارد، یعنی به مثلثی بستگی دارد که مساحت آن برابر با ۱ باشد.

اکنون می‌توانیم بفهمیم چرا برای مساحت همه مثلثها یک حد بالا وجود دارد. یعنی کاستی تعیین می‌کند که مجموع سه‌زاویه چه اندازه از ۱۸۰° کمتر است. چون مجموع سه زاویه هرگز نمی‌تواند کمتر از صفر باشد، پس کاستی هرگز از ۱۸۰° بیشتر نمی‌شود. لذا نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه. در هندسه هذلولوی، مساحت هر مثلث حداکثر مساوی $\pi k^{۲}$ است.

البته مثلثی متناهی وجود ندارد که مساحتش حداکثر مساوی مقدار $\pi k^{۲}$ باشد، ولی می‌توانیم تا هر اندازه که بخواهیم به این مساحت نزدیک شویم (و به کمک یک مثلث نامتناهی سه‌مجانبی بدان دست یابیم). اما ی. بویویی نشان داد که چگونه می‌توان دایره‌ای به مساحت $\pi k^{۲}$ رسم کرد و نیز چهارضلعی منتظمی ــ یک چهارضلعی که چهارضلعش با هم و چهار زاویه‌اش با هم قابل انطباق باشند ــ با زاویه ۴۵° رسم کرد که آن هم مساحتش $\pi k^{۲}$ باشد (بونولا، ۱۹۵۵، صص ۱۰۶ـ۱۱۰).

اگر هندسه هذلولوی را در جهان فیزیکی خودمان تعبیر کنیم، بدیهی است که چون کاستیهای مثلثهای زمینی بی‌اندازه کوچک، ولی مساحتهای آنها قابل اندازه‌گیری هستند، لذا مقدار ثابت $k^{۲}$ باید بی‌اندازه بزرگ باشد. بنابر گفته کولچیسکی (۱۹۶۱، صص ۱۵۳ـ۱۵۵)، اندازه‌گیریهای اختلاف منظرهای ستارگان «چنین نشان می‌دهد که k از ششصد تریلیون مایل کمتر نیست»، و بنابراین $k^{۲} > ۳۶ \times ۱۰^{۲۸}$. این اندازه‌گیریها براساس این واقعیت صورت گرفته‌اند که کاستی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک ضلع آن نصف محور طول مدار زمین به‌دور خورشید و رأس مقابلش ستاره ثابتی باشد از اختلاف منظر این ستاره، کمتر است (شکل ۵.۱۰). البته، از زمان اینشتین به بعد، ما دیگر از هندسه هذلولوی برای مدل‌سازی هندسه عالم استفاده نمی‌کنیم.



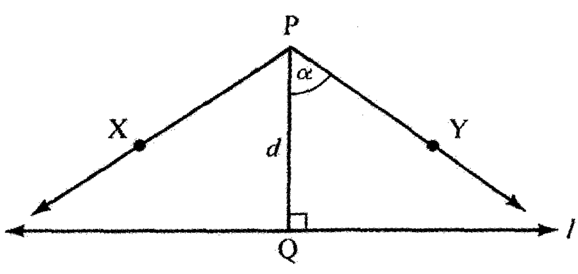
شکل ۵.۱۰ کاستی اختلاف منظر $= (\Delta ACM)^\circ = ۹۰^\circ - (\sphericalangle CAM)^\circ - (\sphericalangle ACM)^\circ < ۹۰^\circ - (\sphericalangle CAM)^\circ$.

زاویه توازی

یادآور می‌شویم که هرگاه خط l و نقطه P ناواقع بر آن داده شده باشند، دو نیم‌خط موازی حدی $\overrightarrow{PX}$ و $\overrightarrow{PY}$ با l وجود دارند که نسبت به عمود PQ، که از P بر l فرود می‌آید، قرینه‌اند (شکل ۶.۱۰، فصل ۶). ثابت کردیم که $\sphericalangle YPQ \cong \sphericalangle XPQ$ (قضیه ۶.۶). لذا هر یک از این دو زاویه را می‌توان زاویه توازی به رأس P نسبت به l نامید.

به‌آسانی می‌توان نشان داد که عدد α رادیان در زاویه توازی، تنها به d یعنی فاصله P از Q بستگی دارد، نه به خط خاصی مانند l یا نقطه خاصی نظیر P (تمرین اصلی ۵، فصل ۶). در نمادگذاری پس از برهان قضیه ۶.۶، دیدیم که $\alpha = (\pi/۱۸۰)\Pi(PQ)^\circ$.

فرمول زیر را که α و d را به هم مربوط می‌کند، بویویی و لباچفسکی کشف کرده‌اند.



شکل ۶.۱۰

قضیه ۲.۱۰ فرمول بویویی-لباچفسکی:

$$\tan \frac{\alpha}{۲} = e^{-d/k}$$

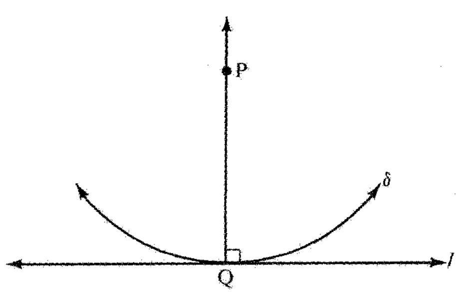
که k همان مقدار ثابتی است که مربعش در نسبت مساحت به کاستی در قضیه ۱.۱۰ آمده بود.

مسلماً این فرمول یکی از جالبترین فرمولها در تمامی ریاضیات است، و شگفت‌انگیز است که تعداد کمی از ریاضیدانان بر آن وقوف دارند. در این فرمول، e مبنای لگاریتم طبیعی (تقریباً مساوی ۲٫۷۱۸۰۰۰) است و $\tan \alpha/۲$ تانژانت مثلثاتی نصف α است. راه اثبات این فرمول در کولچیسکی (۱۹۶۱، بند ۲۰) و در بورسوک و اسمیلیو (۱۹۶۰، بند ۲۶، فصل ۶) آمده است. ما صحت این فرمول را برای مدل قرص پوانکاره (به‌ازای $k = ۱$) آزموده‌ایم (قضیه ۲.۷، ص ۲۶۹).

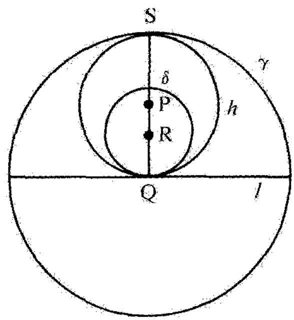
دایره

در براهین مختلف برای اثبات فرمول بویویی-لباچفسکی (قضیه ۲.۱۰)، همواره از یک خم استفاده می‌شود که مختص هندسه هذلولوی است و خم حدی یا دایره حدی نام دارد و به ترتیب زیر پیدا می‌شود (همچنین ← تمرینهای ۴۱-۴۴، فصل ۹).

مطلب را با یک خط l و یک نقطه Q واقع بر آن آغاز، و عمود $\overleftrightarrow{PQ}$ را از Q بر l اخراج می‌کنیم. بعد دایره δ به مرکز P و شعاع PQ را که در Q بر l مماس است در نظر می‌گیریم (شکل ۷.۱۰). فرض می‌کنیم P در امتداد عمود از l بسیار دور شود. دایره δ در همان حالی که بر l مماس باقی می‌ماند، به‌تدریج بزرگ می‌شود و هنگامی که P به قدر کافی زیاد از Q دور شود، به سمت یک



شکل ۷.۱۰



شکل ۸.۱۰

وضع حدی میل خواهد کرد. در هندسه اقلیدسی این وضع حدی دایره δ درست خط l خواهد بود، ولی در هندسه هذلولوی وضع حدی δ خم تازه h به نام خم حدی یا دایره حدی است.

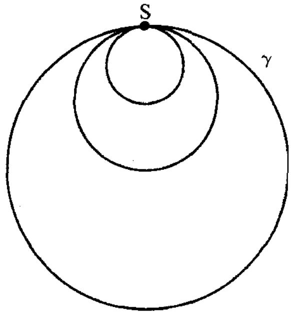
در مدل پوانکاره می‌توانیم این خم را به‌ترتیب زیر مجسم کنیم: فرض می‌کنیم که l قطری از دایره اقلیدسی γ باشد که درون آن معرف صفحه هذلولوی فرض شده است. اگر Q مرکز γ باشد، می‌توان ثابت کرد که دایره هذلولوی به مرکز هذلولوی P با یک دایره اقلیدسی نشان داده می‌شود که مرکز اقلیدسی آن R، بین P و Q واقع می‌شود (تمرین پ‌ـ۵، فصل ۷؛ شکل ۸.۱۰).

هنگامی که P از Q دور و به سمت نقطه آرمانی که با S نشان داده شده است، نزدیک می‌شود، R به‌سمت وسط اقلیدسی SQ کشیده می‌شود و لذا دایره حدی h به دایره اقلیدسی مماس بر γ در S و مماس بر l در Q بدل می‌شود. به‌طور کلی می‌توان نشان داد که همه دوایر حدی در مدل پوانکاره با دوایر اقلیدسی درون γ و مماس بر γ نشان داده می‌شوند. به‌علاوه، همه خطوط پوانکاره که از نقطه آرمانی S می‌گذرند بر h عمودند. یک نیم‌خط هذلولوی که از یک نقطه h به نقطه آرمانی S کشیده می‌شود قطر h نامیده می‌شود (تمرینهای ۴۱، ۴۴، و ۴۶، فصل ۹).

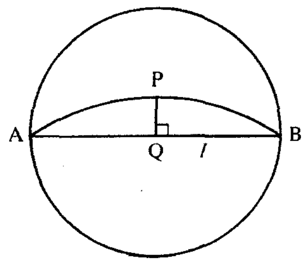
در مدل پوانکاره دو دایره حدی مماس بر γ در S را هم‌مرکز گویند (شکل ۹.۱۰). فرمول بویویی‌ـلباچفسکی را می‌توان از مطالعه نسبت کمانهای متناظر دایره حدی هم‌مرکز به‌دست آورد (کولچیسکی، ۱۹۶۱، بخش ۱۸).

در فضای هذلولوی ساختمان مشابهی وجود دارد که کره حدی نامیده می‌شود. به‌جای اینکه حد دوایر را برای به‌دست آوردن دایره حدی بگیرند، حد کره‌ها را می‌گیرند تا کره حدی یا سطح حدی را به‌دست آورند.

خم عجیب دیگری در هندسه هذلولوی که مشابه اقلیدسی ندارد خم هم‌فاصله است (شکل ۱۰.۱۰). با یک خط l و یک نقطه P ناواقع بر l آغاز می‌کنیم. مکان هندسی همه نقاطی



شکل ۹.۱۰ دوایر حدی هم‌مرکز.



شکل ۱۰.۱۰ خم هم‌فاصله.

را که با P در یک طرف l قرار دارند و فاصله آنها از l با فاصله P از l یکی است در نظر می‌گیریم. در هندسه اقلیدسی این مکان فقط خطی است گذرنده از P و موازی با l. ولی در هندسه هذلولوی این مکان خط نیست، بلکه ابردایره یا خم هم‌فاصله گذرنده از P است.

در مدل پوانکاره اگر A و B دو سر آرمانی l باشند، خم هم‌فاصله با l، گذرنده از P، به‌صورت کمانی از دایره اقلیدسی، گذرنده از A، B، و P نشان داده می‌شود (فصل ۹، تمرینهای ۴۰، ۴۵، و ۴۷). این خم بر همه خطوط پوانکاره عمود بر l، عمود است.

در صفحه اقلیدسی، هر سه نقطه بر یک خط یکتای معین یا بر یک دایره یکتای مشخص قرار دارند. در هندسه هذلولوی چنین نیست ــ به مدل پوانکاره بنگرید. یک دایره اقلیدسی معرف:

۱. یک دایره هذلولوی است هرگاه کاملاً در درون دایره γ واقع باشد.

۲. یک دایره حدی است هرگاه همه نقاط آن، جز یک نقطه‌اش که نقطه تماس با γ است، در درون γ باشد.

۳. یک خم هم‌فاصله است اگر γ را در دو نقطه ببرد و بر آن عمود نباشد.

۴. یک خط هذلولوی است اگر γ را ببرد و بر آن عمود باشد.

از این‌رو می‌توانیم نتیجه بگیریم که در صفحه هذلولوی سه نقطه ناهم‌خط بر یک دایره، یا بر یک دایره حدی، یا بر یک ابردایره قرار دارند بسته به اینکه عمودمنصفهای مثلث حاصل از این سه نقطه، در یک نقطه عادی، یک نقطه آرمانی، یا در یک نقطه فراآرمانی متقارب باشند (آخرین بخش این فصل را ببینید).

شبه‌کره

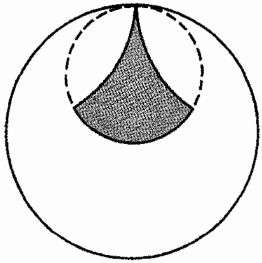
یکی از معایب مدل پوانکاره این است، اگرچه زاویه‌های صفحه هذلولوی را به‌درستی نشان می‌دهد، (یعنی مدلی است همدیس) ولی فاصله‌ها را دگرگون می‌کند. پس طبیعی است که بپرسیم: آیا مدل دیگری وجود دارد که طولهای هذلولوی را دقیقاً برحسب طولهای اقلیدسی نشان دهد؟ هرگاه چنین مدلی وجود داشته باشد آن را مدل طولپای می‌نامند. همچنین فکر یافتن سطحی به عنوان مدل در فضای سه‌بعدی اقلیدسی نیز طبیعتاً از مغز انسان می‌گذرد. در این حال خطوط صفحه هذلولوی با ژئودزیکهای واقع بر سطح نشان داده خواهند شد، و باید انتظار داشته باشیم که سطح منحنی باشد تا توقع ما را، که خطوط هذلولوی «واقعاً منحنی» هستند، منعکس سازد. برای تعریف «ژئودزیک»، پیوست الف را ببینید. کوتاهترین مسیر بین دو نقطه بر یک سطح، کمانی از یک ژئودزیک است؛ ولی برعکس، لزومی ندارد کمانی از یک ژئودزیک، کوتاهترین مسیر باشد، زیرا بر یک کره، دو کمان از یک دایره عظیمه وجود دارند که دو نقطه را به هم متصل می‌کنند، و اگر این نقاط متقاطر نباشند، یک کمان کوتاهتر است.

یکی از قضایای دشوار هیلبرت (دوکارمو، ۱۹۷۶، ص ۴۴۶) بیان می‌کند که نمی‌توان تمام صفحه هذلولوی را به‌صورت یک سطح چنان در فضای اقلیدسی نشانید که طولها تغییر نکنند. برعکس می‌توان صفحه اقلیدسی را در فضای هذلولوی به مثابه سطح کره حدی، به‌طور طولپایی نشانید ــ که طولها تغییر نکنند (کولچیسکی، ۱۹۶۱، بخش ۱۷). این قضیه را که هم ی. بویویی ثابت کرده است، هم لباچفسکی، قبلاً توسط واختر[1] در ۱۸۱۶ شناخته شده است.

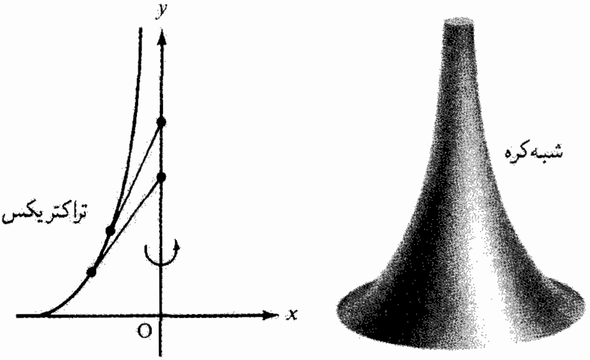
ولی همه تلاشها بی‌نتیجه نبوده‌اند. ثابت شده است که می‌توان جزئی از صفحه هذلولوی را در فضای اقلیدسی به‌طور طولپایی نشانید. این جزء که قطاع دایره حدی نامیده می‌شود، به کمانی

---

۱. برای آنانی که با این زبان ریاضیات آشنایی دارند با کمال شگفتی باید بگوییم که یک نشانیدن دیفرانسیل‌پذیر پیوسته از صفحه هذلولوی بر فضای اقلیدسی سه‌بعدی وجود دارد. این مطلب در ۱۹۵۵ توسط ن. کوییپر با استفاده از روشهای تحلیلی ثابت شد (*Indagationes Mathematicae*، ۱۷، ۶۸۳). معلوم شده است که هیچ نشانیدن زیبایی وجود ندارد ــ مثلاً نشانیدن C^2 را در نظر بگیرید.



شکل ۱۱.۱۰



شکل ۱۲.۱۰

از یک دایره حدی و دو قطر که این کمان را می‌برند محدود شده است. یکی از این قطاعها در مدل پوانکاره در شکل ۱۱.۱۰ نشان داده شده است.

سطحی که این ناحیه را به‌طور طولپای نشان می‌دهد شبه‌کره نامیده می‌شود. این سطح که از دوران خم تراکتریکس حول مجانبش به‌دست می‌آید، شبیه بوقی است بی‌نهایت دراز. (در این نحوه نمایش، دو قطر کمان دایره حدی یکی گرفته‌شده (به‌هم چسبانده‌شده)، چنان‌که نگاشت قطاع در فضای اقلیدسی، عملاً همان نشانیدن ناحیه واقع میان دو قطر است.) خم تراکتریکس خمی است که طول قطعاتی از مماسهای مرسوم بر آن، که بین نقطه تماس و مجانب واقع‌اند، برابر با مقدار ثابت a[1] است (شکل ۱۲.۱۰).

ف. میندینگ نخستین فردی بوده که مقاله‌ای درباره شبه‌کره در ۱۸۳۹ منتشر کرده است، ولی، گاوس در یک یادداشت منتشرنشده‌اش در باب آن در ۱۸۲۷، آن را ضدکره نامیده است.

۱. هویگنس، فیزیکدان هلندی، تراکتریکس را «خم سگی» نامیده است، زیرا شبیه به خم بینی سگ است هنگامی که سگ برخلاف میلش با طناب کشیده شود.

جای شگفتی است که هیچ‌یک از دو تن متوجه نشده‌اند که این سطح می‌توانسته است برای اثبات سازگاری هندسه هذلولوی به‌کار رود، کاری را که بلترامی در ۱۸۶۸ انجام داده است. رابطه بین شبه‌کره با صفحه هذلولوی مثل رابطه استوانه است با صفحه اقلیدسی.

نمایش بر روی شبه‌کره به ما امکان می‌دهد که در قضیه‌های ۱.۱۰ و ۲.۱۰ برای مقدار ثابت بنیادی k معنای هندسی قائل شویم. مسئله این است که برای اندازه‌گیری خمیدگی هر سطح راهی وجود دارد (که گاوس کاشف آن بوده است). ما در اینجا نمی‌توانیم تعریف دقیقی از آن بیاوریم، زیرا مستلزم آشنایی با هندسه دیفرانسیل است (آشنایی با هندسه، کاکستر، ۱۹۶۹؛ هیلبرت و کون‌ـوسن؛ و یا پیوست الف همین کتاب). در حالت کلی، خمیدگی K از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند. در نقطه‌ای که سطح نسبتاً مسطح است به سمت صفر میل می‌کند و در نقطه‌ای که سطح به‌شدت خم می‌شود خیلی بزرگ می‌شود. برای برخی از سطوح، خمیدگی در تمام نقاط یکسان است، و طبعاً این سطوح، سطوح با خمیدگی ثابت K نامیده می‌شوند. یکی از ویژگیهای مهم این‌گونه سطوح این است که شکلها را می‌توان بر روی آنها حرکت داد بی‌آنکه شکل یا اندازه آنها تغییر کند.

در ۱۸۲۷، گاوس وجود یک رابطه اساسی بین خمیدگی، مساحت، و اندازه زاویه‌ای را برای سطحی با خمیدگی ثابت K ثابت کرد. بدین ترتیب که یک مثلث ژئودزیک $\Delta\mathrm{ABC}$ به رأسهای A، B، و C اختیار کرد که اضلاع آن پاره‌خطهای ژئودزیک بودند. او از راه انتگرال‌گیری، مساحت مثلث را حساب کرده و سپس حکم کرد که هرگاه $(\sphericalangle \mathrm{A})^r$ اندازه زاویه A برحسب رادیان باشد، آن‌گاه

$$K \times (\text{مساحت}\,\Delta\mathrm{ABC}) = (\sphericalangle\mathrm{A})^r + (\sphericalangle\mathrm{B})^r + (\sphericalangle\mathrm{C})^r - \pi$$

سپس او چگونگی این رابطه را برحسب سه حالت ممکن است برای K، نشان داد:

حالت ۱. $K > ۰$. در نتیجه دو طرف معادله بالا مثبت‌اند؛ در این حالت فرمول گاوس نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های یک مثلث ژئودزیک برحسب رادیان از π (یا برحسب درجه از ۱۸۰°) بزرگتر است و مساحت مثلث با فزونی آن (عدد سمت راست معادله بالا) متناسب و ضریب تناسب $۱/K$ است. مثالی برای این‌گونه سطوح سطح کره‌ای است به شعاع r که خمیدگی آن $K = ۱/r^۲$ است. هرچه شعاع کره بزرگتر باشد، خمیدگی کوچکتر است و سطح به یک صفحه شبیه‌تر می‌شود. (فرمول گاوس، در حالت خاصی که سطح، کره باشد قبلاً در سده هفدهم توسط ژیرار کشف شده بود.) بنابر قضیه‌ای منسوب به لیبمان، هوپف، و رینو، کره تنها سطح کامل با خمیدگی ثابت مثبت در فضای اقلیدسی سه‌بعدی است، بدین‌ترتیب صفحه بیضوی را هم نمی‌توان در فضای اقلیدسی سه‌بعدی نشانید.

حالت ۲. $K = 0$. در این حالت فرمول گاوس نشان می‌دهد که مجموع زوایا مساوی π رادیان است. یک مثال برای چنین سطحی صفحه اقلیدسی است. مثالی دیگر از این سطوح، استوانه بی‌نهایت دراز است.

حالت ۳. $K < 0$. در این حالت فرمول گاوس چنین برمی‌آید که مجموع زاویه‌ها کمتر از π رادیان است و مساحت با کاستی متناسب است. مثالی از این گونه سطوح، شبه‌کره است. چون شبه‌کره جزئی از صفحه هذلولوی را به‌طور طولپایی نشان می‌دهد، می‌توانیم فرمول گاوس را با فرمول قضیه ۱.۱۰ که رابطه بین مساحت و کاستی را به‌دست می‌دهد، مقایسه کنیم. از این مقایسه نتیجه می‌گیریم $K = -1/k^2$. بنابراین $-1/k^2$ خمیدگی صفحه هذلولوی است.

در اینجا می‌توانیم با قرار دادن $r = ik$، $i = \sqrt{-1}$، بار دیگر به تشابه با حالت ۱ دست یابیم. در این صورت خواهیم داشت $K = -1/r^2$، لذا همان‌گونه که لامبرت اشاره کرده بود (فصل ۵). صفحه هذلولوی را می‌توان «کره‌ای موهومی به شعاع $r = ik$» در نظر گرفت.

بالاخره توجه داریم که وقتی k بسیار بزرگ می‌شود خمیدگی K به سمت صفر میل می‌کند و هندسه سطح بیش از بیش مشابه هندسه صفحه اقلیدسی می‌شود، و آن بدین معنی است که هندسه اقلیدسی «حالت حدی» هندسه هذلولوی است.

همچنین در بخشهای بعد خواهیم دید که هندسه یک «ناحیه بی‌نهایت کوچک» در صفحه هذلولوی، اقلیدسی است.

مثلثات هذلولوی

مثلثات عبارت است از مطالعه روابط بین اضلاع و زوایای یک مثلث. در تمرینهای ۲۲ و ۲۳، فصل ۵، به چند فرمول در مثلثات اقلیدسی اشاره کردیم. در آنجا نظریه مثلثهای متشابه که فقط در هندسه اقلیدسی معتبر است، برای پابرجا کردن تعاریف به کاربرده شده است. مثلاً سینوس یک زاویه حاده را نسبت ضلع مقابل زاویه به وتر، در هر مثلث قائم‌الزاویه تعریف کردیم (همچنین برای کسینوس، تانژانت و سایر توابع مثلثاتی). ما به این توابع در هندسه هذلولوی نیاز داریم. معنی این توابع که در هندسه اقلیدسی تعریف شده‌اند چیست؟

یک جواب طفره‌آمیز این است که بگوییم مثلثات هذلولوی فقط در مدل همدیس اقلیدسی، از قبیل مدل پوانکاره، به‌کار برده می‌شود. چون در آنجا زاویه‌ها به روش اقلیدسی اندازه گرفته می‌شود، سینوس، کسینوس، و تانژانت یک زاویه معنی معمولی اقلیدسی خود را دارند. این جواب، البته، برای آن دسته از خوانندگانی که هنوز سریهای نامتناهی را مطالعه نکرده‌اند می‌تواند قانع‌کننده باشد.

پاسخ دقیق پرسش این است که این توابع مثلثاتی را صرفاً به‌طور تحلیلی، بدون ارجاع به مثلثات، دوباره تعریف و از آنها در هندسه‌های مختلف استفاده کنیم. این تعریف برحسب بسط سریهای تیلور به عمل آمده است:

$$\sin x = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \qquad \cos x = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!}$$

($\tan x = \sin x / \cos x$ و غیره). درکتابهای درسی خوب حسابان، اثبات همگرایی این دنباله‌ها را، به‌ازای جمیع مقادیر x (از راه آزمون نسبت[۱]) می‌توان پیدا کرد. در این‌گونه کتابهای درسی خوب، چگونگی بسط همه فرمولهای متداول توابع دایره‌ای (یا مستدیر) نیز دیده می‌شود (به این دلیل دایره‌ای نامیده می‌شوند که $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ معادلات پارامتری دکارتی دایره‌ای به شعاع واحد $x^۲ + y^۲ = ۱$ هستند، به‌ویژه این معادله و قضیه فیثاغورس ایجاب می‌کنند که، در صفحه اقلیدسی، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ وتری به طول ۱ داشته باشد، به‌طوری که $\sin\theta$، در واقع، نسبت ضلع مقابل زاویه حاده θ به وتر در این مثلث است).

مثلثات هذلولوی علاوه بر توابع دایره‌ای، متضمن توابع هذلولوی است که به‌روش تحلیلی چنین تعریف می‌شوند:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \tag{۱}$$

(و $\tanh\theta = \sinh x / \cosh x$ و غیره). این توابع توسط لامبرت معرفی و نمودارهای آنها در شکل ۱۳.۱۰ نشان داده شده‌اند. بسطهای سینوس و کسینوس هذلولوی با سری تیلور چنین‌اند:

$$\sinh x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \qquad \cosh x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} \tag{۲}$$

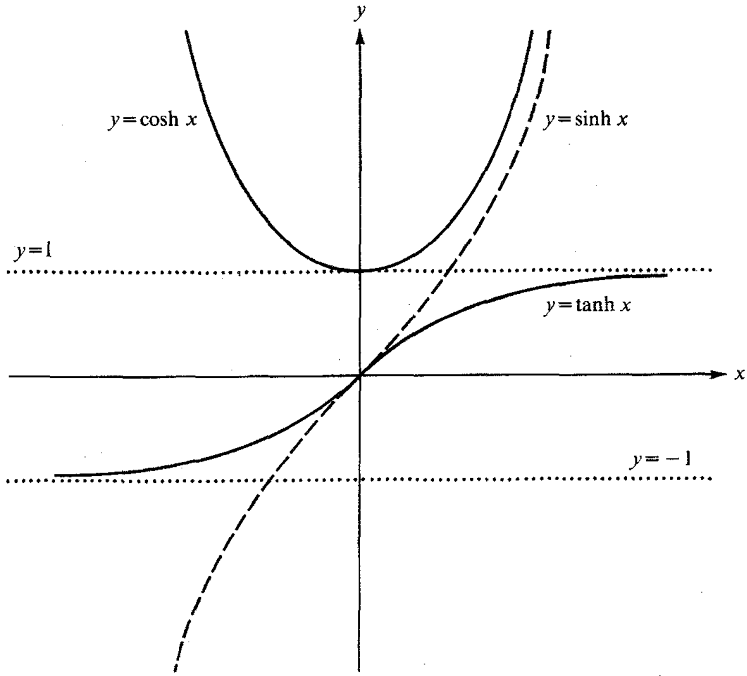
که از بسط سینوس و کسینوس دایره‌ای با حذف ضریب $(-۱)^n$ به‌دست آمده‌اند. این مطلب را می‌توان با توجه به بسط تابع نمایی به‌وسیله سری تیلور مشاهده کرد

$$e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

در واقع با وارد کردن عدد موهومی $i = \sqrt{-۱}$ داریم

$$\sinh x = i \sin\frac{x}{i} \qquad \cosh x = \cos\frac{x}{i}$$

۱. معروف به قاعده دالامبر.



شکل ۱۳.۱۰

نام «توابع هذلولوی» ریشه در اتحاد زیر دارد:

$$\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = \frac{e^{۲x} + ۲ + e^{-۲x}}{۴} - \frac{e^{۲x} - ۲ + e^{-۲x}}{۴} = ۱ \qquad (۳)$$

که از آن معادلات پارامتری $x = \cosh\theta$ و $y = \sinh\theta$ یک شاخه از هذلولی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ را در صفحه دکارتی به ما می‌دهد. (در اینجا عدد θ، از لحاظ هندسی، مساوی دو برابر مساحت محصور بین هذلولی، محور xها، و خط واصل بین مبدأ و نقطه $(\cosh\theta, \sinh\theta)$ است. تعبیر مشابهی برای θ برای توابع دایره‌ای، از قرار دادن دایره به‌جای هذلولی به‌دست می‌آید.)

(شاید هم تعجب کنید که این هذلولی در مدل دکارتی هندسه اقلیدسی، چه ارتباطی با هندسه هذلولوی می‌تواند داشته باشد! تا آنجا که من اطلاع دارم، هیچ. فلیکس کلاین نامهای هندسه‌های «هذلولوی» و «بیضوی» را بدین سبب درست کرد که در این هندسه‌ها، خطها به‌ترتیب دو نقطه و صفر نقطه آرمانی در بی‌نهایت دارند. این مشابه سهمی‌ها و بیضی‌های آفین است، که به‌ترتیب یک نقطه و هیچ نقطه در بی‌نهایت دارند.)

اینک فهرستی از اتحادهای توابع هذلولوی و دایره‌ای، که بعداً مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌آوریم (بنابر تعریف: $\tanh x = \sinh x / \cosh x$).

هذلولوی	دایره‌ای
$\cosh^۲ x - \sinh^۲ x = ۱$	$\cos^۲ x + \sin^۲ x = ۱$
$۱ - \tanh^۲ x = \operatorname{sech}^۲ x$	$۱ + \tan^۲ x = \sec^۲ x$
$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$	$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
$\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{۱ + \tanh x \tanh y}$	$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{۱ - \tan x \tan y}$
$\sinh^۲ \dfrac{x}{۲} = \dfrac{\cosh x - ۱}{۲}$	$\sin^۲ \dfrac{x}{۲} = \dfrac{۱ - \cos x}{۲}$
$\cosh^۲ \dfrac{x}{۲} = \dfrac{\cosh x + ۱}{۲}$	$\cos^۲ \dfrac{x}{۲} = \dfrac{۱ + \cos x}{۲}$
$\tanh^۲ \dfrac{x}{۲} = \dfrac{\cosh x - ۱}{\cosh x + ۱}$	$\tan^۲ \dfrac{x}{۲} = \dfrac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x}$
$\tanh \dfrac{x}{۲} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x + ۱} = \dfrac{\cosh x - ۱}{\sinh x}$	$\tan \dfrac{x}{۲} = \dfrac{\sin x}{۱ + \cos x} = \dfrac{۱ - \cos x}{\sin x}$
$\sinh x = ۲ \sinh \dfrac{x}{۲} \cosh \dfrac{x}{۲}$	$\sin x = ۲ \sin \dfrac{x}{۲} \cos \dfrac{x}{۲}$
$\sinh x \pm \sinh y = ۲ \sinh \frac{۱}{۲}(x \pm y) \cosh \frac{۱}{۲}(x \mp y)$	$\sin x \pm \sin y = ۲ \sin \frac{۱}{۲}(x \pm y) \cos \frac{۱}{۲}(x \mp y)$
$\cosh x + \cosh y = ۲ \cosh \frac{۱}{۲}(x+y) \cosh \frac{۱}{۲}(x-y)$	$\cos x + \cos y = ۲ \sin \frac{۱}{۲}(x+y) \cos \frac{۱}{۲}(x-y)$
$\cosh x - \cosh y = ۲ \sinh \frac{۱}{۲}(x+y) \sinh \frac{۱}{۲}(x-y)$	$\cos x - \cos y = -۲ \sin \frac{۱}{۲}(x+y) \sin \frac{۱}{۲}(x-y)$

حال می‌خواهیم فرمولهای مثلثات هذلولوی را با فرض ساده‌کننده $k = ۱$ (که k همان مقدار ثابتی است که در قضیه‌های ۱.۱۰ و ۲.۱۰، و حالت ۳، ص ۴۱۵، آمده بود) بیان کنیم. می‌توانیم نشان دهیم که معنی این فرض این است که واحد طول را چنان انتخاب کنیم که نسبت طول کمانهای متناظر در دایره‌های حدی هم‌مرکز، هنگامی که فاصله‌های این دوایر برابر با ۱ است، مساوی e باشد ــ این انتخاب کاملاً مشابه با انتخاب واحد اندازه زاویه است به‌گونه‌ای که اندازه زاویه قائمه (برحسب رادیان) $\pi/۲$ باشد. این امر موجب می‌شود که فرمولها خوب و رضایت‌بخش از آب درآیند. مثلاً، با این قرارداد، مساحت مثلث با کاستی آن مساوی است (قضیه ۱.۱۰)، به

شرطی که از این به بعد کاستی را برحسب رادیان اندازه بگیریم نه برحسب درجه. وانگهی فرمول اصلی بویویی-لباچفسکی برای اندازه زاویه توازی برحسب رادیان (قضیه ۲.۱۰) چنین می‌شود:

$$\Pi(x) = ۲ \arctan\ e^{-x} \tag{۴}$$

با محاسبه مستقیم با استفاده از فرمولهای کمانهای مضاعف برای توابع دایره‌ای، فرمولهای زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin\Pi(x) = \operatorname{sech} x = ۱/\cosh\ x \tag{۵}$$

$$\cos\Pi(x) = \tanh\ x \tag{۶}$$

$$\tan\Pi(x) = \operatorname{csch} x = ۱/\sinh\ x \tag{۷}$$

بدین ترتیب، تابع Π بین توابع هذلولوی و توابع دایره‌ای ارتباطی به‌وجود می‌آورد.

هرگاه $\Delta\mathrm{ABC}$ داده شده باشد، برای معرفی طول اضلاع از قرارداد متداول $a = \overline{\mathrm{BC}}$، $b = \overline{\mathrm{AC}}$، و $c = \overline{\mathrm{AB}}$ استفاده می‌کنیم. عبارتهایی نظیر $\cos \mathrm{A}$ را برای علامت اختصاری «کسینوس $\measuredangle\mathrm{A}$ برحسب رادیان» به‌کار می‌بریم و تکرار می‌کنیم که این نماد، در یک مثلث هذلولوی، به‌معنی نسبت ضلع مجاور زاویه به وتر نیست. نخستین فرمولهای مثلثات هذلولوی (۱۰) را از روی مدل پوانکاره، یعنی، با استفاده از هندسه اقلیدسی به‌دست می‌آوریم؛ سپس می‌توانیم بقیه فرمولها را بدون ارجاع به مدل پوانکاره نتیجه بگیریم. برای پاره‌خطهایی که جزئی از قطرهای دایره مطلق κ هستند، در علامت قراردادی برای طول ابهامی وجود دارد؛ همان‌گونه که در فصل ۷ عمل کردیم، $\overline{\mathrm{AB}}$ را به‌جای طول اقلیدسی AB و $d(\mathrm{AB})$ را به‌جای طول پوانکاره‌ای آن اختیار می‌کنیم. شعاع دایره κ را واحد می‌گیریم. برای پاره‌خط OB که یک سر آن در نقطه O مرکز κ است، در برهان لم ۴.۷، ص ۲۶۹، نشان داده شد که

$$e^{d(\mathrm{OB})} = \frac{۱ + \overline{\mathrm{OB}}}{۱ - \overline{\mathrm{OB}}}$$

اگر در این فرمول، برای اختصار، قرار دهیم $x = d(\mathrm{OB})$ و $t = \overline{\mathrm{OB}}$، با مختصر محاسبه جبری، روابط اساسی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\sinh\ x = \frac{۲t}{۱ - t^۲} \qquad \cosh\ x = \frac{۱ + t^۲}{۱ - t^۲} \tag{۸}$$

$$\tanh\ x = \frac{۲t}{۱ + t^۲} = F(t) \tag{۹}$$

که F یکریختی از مدل پوانکاره بر روی مدل کلاین است که در فصل ۷، ص ۲۷۱، تعریف کردیم.

قضیه ۳.۱۰ در هر مثلث قائم‌الزاویه $\Delta\mathrm{ABC}$، قائمه در رأس C، در صفحه هذلولوی (با $k = ۱$) داریم:

$$\sin\ \mathrm{A} = \frac{\sinh\ a}{\sinh\ c} \qquad \cos\ \mathrm{A} = \frac{\tanh\ b}{\tanh\ c} \tag{۱۰}$$

$$\cosh\ c = \cosh\ a \cosh\ b = \cot\ \mathrm{A} \cot\ \mathrm{B} \tag{۱۱}$$

$$\cosh\ a = \frac{\cos\ \mathrm{A}}{\sin\ \mathrm{B}} \tag{۱۲}$$

برهان:

پیش از آنکه برهانی برای این قضیه بیاوریم، ابتدا این فرمولها را با فرمولهای مثلث قائم‌الزاویه اقلیدسی مقایسه می‌کنیم. تساوی اول در فرمول (۱۱)، مشابه هذلولوی قضیه فیثاغورس است، زیرا اگر طرفین آن را با استفاده از (۲) برحسب سری تیلور بسط دهیم به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۱ + \frac{۱}{۲}c^۲ + \cdots = ۱ + \frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲) + \cdots$$

و اگر از جملات درجه بالاتر صرف‌نظر کنیم (یعنی وقتی که $\Delta\mathrm{ABC}$ بی‌اندازه کوچک است)، این فرمول به صورت

$$c^۲ \approx a^۲ + b^۲$$

درمی‌آید. همچنین (وقتی $\Delta\mathrm{ABC}$ به‌قدر کافی کوچک باشد)، فرمول (۱۰) تقریباً چنین نوشته می‌شود:

$$\sin\ \mathrm{A} \approx \frac{a}{c} \qquad \cos\ \mathrm{A} \approx \frac{b}{c}.$$

بیایید دقیقتر بررسی کنیم مثلثهای قائم‌الزاویه با زاویه ثابت $\measuredangle \mathrm{A}$ و $c \to ۰$ را در نظر می‌گیریم. به‌موجب گزاره ۵.۴، $a \to ۰$ (زیرا $a < c$). مطابق فرمول (۲) و فرمول سریهای هندسی داریم

$$\frac{۱}{\sinh\ c} = \frac{۱}{c(۱+u)} = \frac{۱}{c}(۱ - u + u^۲ - u^۳ + \cdots)$$

که در آن $\lim\limits_{c\to ۰} u = ۰$. بنابراین

$$\frac{\sinh\ a}{\sinh\ c} = \frac{a}{c}\left(۱ + \frac{a^۲}{۳!} + \frac{a^۴}{۵!} + \cdots\right)(۱ - u + u^۲ - u^۳ + \cdots)$$

و خواهیم داشت

$$\lim_{c\to ۰} \frac{a}{c} = \lim_{c\to ۰} \frac{\sinh\ a}{\sinh\ c} = \sin\ \mathrm{A}$$

و برهانی مشابه، $\cos\ A$ را به ما می‌دهد. لذا بجاست که بگوییم مثلثات هذلولوی مثلثهای «بی‌نهایت کوچک»، اقلیدسی است.

فرمول (۱۲) و معادله دوم در فرمول (۱۱)، مشابهی در هندسه اقلیدسی ندارند، زیرا در هندسه اقلیدسی زاویه‌ها طول اضلاع را مشخص نمی‌کنند.

تمامی هندسه یک مثلث قائم‌الزاویه در فرمول (۱۰) گنجانده شده است، و بقیه فرمول از فرمول (۱۰)، صرفاً از راه عملیات جبری محض و اتحادها به‌دست می‌آیند. یعنی، از اتحاد $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$ و (۱۰) خواهیم داشت

$$۱ = \frac{\tanh^۲ b}{\tanh^۲ c} + \frac{\sinh^۲ a}{\sinh^۲ c}$$

$$\sinh^۲ c = \cosh^۲ c \tanh^۲ b + \sinh^۲ a$$

$$۱ + \sinh^۲ c = \cosh^۲ c \left(\frac{\sinh^۲ b}{\cosh^۲ b}\right) + ۱ + \sinh^۲ a$$

$$\cosh^۲ c \cosh^۲ b = \cosh^۲ c \sinh^۲ b + \cosh^۲ a \cosh^۲ b$$

$$\cosh^۲ c(\cosh^۲ b - \sinh^۲ b) = \cosh^۲ a \cosh^۲ b$$

$$\cosh^۲ c = \cosh^۲ a \cosh^۲ b$$

که نخستین تساوی در (۱۱) را به‌دست می‌دهد. اگر به‌جای اینکه (۱۰) را برای A به‌کار بریم، برای B به‌کار ببریم خواهیم داشت

$$\sin\ B = \frac{\sinh\ b}{\sinh\ c}$$

از آنجا (۱۲) را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\cos\ A}{\sin\ B} = \frac{\tanh\ b}{\tanh\ c}\frac{\sinh\ c}{\sinh\ b} = \frac{\cosh\ c}{\cosh\ b} = \cosh\ a$$

از ضرب این تساوی در فرمول مشابهش برای $\cosh\ b$، دومین تساوی در (۱۱) حاصل می‌شود.

سرانجام برای اثبات فرمول (۱۰)، شکل را با این فرض رسم می‌کنیم که رأس A از مثلث قائم‌الزاویه بر O، مرکز مطلق، منطبق باشد (این کار را همواره می‌توان با یک انعکاس مناسب انجام داد، همان‌گونه که هنگام اثبات ض‌زض، ص ۲۶۸، انجام دادیم). نقاط B' و C' در شکل ۱۴.۱۰، تصاویر B و C بر اثر یکریختی F هستند (همچنین ←شکل ۳۳.۷). از مثلث قائم‌الزاویه اقلیدسی

$\Delta B'C'O$، و فرمول (۹) تساوی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\cos\ A = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}} = \frac{\tanh\ b}{\tanh\ c}$$

فرض می‌کنیم B'' نقطه تلاقی دیگر $\overrightarrow{OB}$ دایره قائم κ_1 شامل خط پوانکاره $\overleftrightarrow{BC}$باشد.
به‌موجب گزاره ۵.۷، ص ۲۶۰، B'' منعکس B نسبت به κ است، لذا داریم:

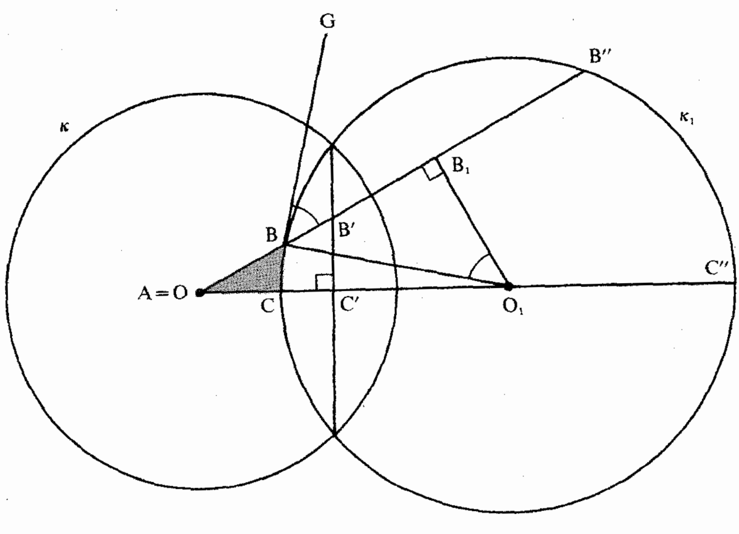
$$\overline{BB''} = \overline{OB''} - \overline{OB} = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t} = \frac{2}{\sinh x}$$

در نام‌گذاری استاندارد داریم

$$\overline{BB''} = \frac{2}{\sinh\ c} \quad , \quad \overline{CC''} = \frac{2}{\sinh\ b}$$

هرگاه B_1 پای عمود مرسوم از O_1، مرکز κ_1، بر BB'' باشد، B_1 وسط BB'' (قاعده مثلث متساوی‌الساقین) خواهد بود. بنابراین $\measuredangle B \cong \measuredangle BO_1B_1$ (که مساوی $\measuredangle GBB_1$ در شکل ۱۴.۱۰ است، که در آن $\overleftrightarrow{GB}$ در B بر κ_1 مماس است)، زیرا هر دو، متمم $\measuredangle B_1BO_1$ هستند. بنابراین

$$\sin\ B = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{O_1B}} = \frac{\overline{BB''}}{2\overline{O_1C}} = \frac{\overline{BB''}}{\overline{CC''}} = \frac{\sinh\ b}{\sinh\ c}$$



شکل ۱۴.۱۰

چون $\measuredangle B$ زاویه حاده دلخواه در یک مثلث قائم‌الزاویه است، می‌توانیم با تعویض جای A و B باهم، فرمول دوم (۱۰) را به‌دست آوریم. ■

قضیه ۴.۱۰ برای هر مثلث ΔABC در صفحه هذلولوی (با $k = 1$ و نام‌گذاری استاندارد اضلاع) داریم:

$$\cosh\ c = \cosh\ a \cosh\ b - \sinh\ a \sinh\ b \cos\ C \tag{۱۳}$$

$$\frac{\sin\ A}{\sinh\ a} + \frac{\sin\ B}{\sinh\ b} = \frac{\sin\ C}{\sinh\ c} \tag{۱۴}$$

$$\cosh\ c = \frac{\cos\ A \cos\ B + \cos\ C}{\sin\ A \sin\ B} \tag{۱۵}$$

فرمول (۱۳) قانون کسینوسهای هذلولوی، و فرمول (۱۵) قانون سینوسهای هذلولوی است، که با قوانین اقلیدسی مشابه‌اند و در مثلثهای «بی‌نهایت کوچک»، مانند قبل، به قوانین اقلیدسی مبدل می‌شوند. فرمول (۱۵) مشابه اقلیدسی ندارد.

این قضیه را می‌توان با رسم یک ارتفاع و تقسیم مثلث به دو مثلث قائم‌الزاویه، و استفاده از قضیه قبل، اندکی عملیات جبری و اتحادهایی از قبیل

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

اثبات کرد. جزئیات مسئله، به‌عنوان تمرین، به‌عهده خواننده گذاشته می‌شود.

توضیحی در باب هندسه بیضوی. به‌همین قیاس، هندسه بیضوی با $k = 1$ را می‌توان از مدل آن روی کره‌ای به شعاع ۱ که نقاط متقاطرش به‌هم چسبیده و یکی شده‌اند بسط داد (کی، ۱۹۶۹، فصل ۱۰). قانون بیضوی کسینوسها چنین است:

$$\cos\ c = \cos\ a \cos\ b + \sin\ a \sin\ b \cos\ C$$

و قانون بیضوی سینوسها چنین است:

$$\frac{\sin\ A}{\sin\ a} = \frac{\sin\ B}{\sin\ b} = \frac{\sin\ C}{\sin\ c}.$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه قائمه در C، مشابه بیضوی فرمول (۱۰) چنین است

$$\sin\ A = \frac{\sin\ a}{\sin\ c} \qquad \cos\ A = \frac{\tan\ b}{\tan\ c}.$$

در هر یک از این فرمولها، اگر به‌جای توابع مثلثاتی معمولی، توابع مثلثاتی هذلولوی متناظرشان را بگذاریم، وقتی صحبت از طول ضلع باشد، فرمولهای فوق را برای هندسه هذلولوی با $k = ۱$ به‌دست می‌آوریم.

محیط و مساحت دایره

قضیه ۵.۱۰ C، محیط دایره به شعاع r، با رابطه $C = ۲\pi \sinh r$ داده می‌شود.

برهان:

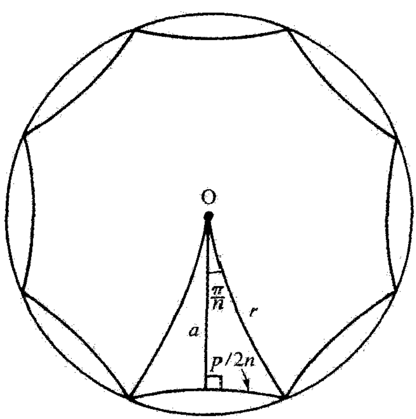
البته C به‌صورت $\lim_{n\to\infty} p_n$ ، حد محیط یک n ضلعی منتظم محاطی، p_n، تعریف می‌شود (شکل ۱۵.۱۰). ابتدا چگونگی استخراج فرمول $C = ۲\pi r$ را در هندسه اقلیدسی یادآور می‌شویم. با توجه به شکل ۱۵.۱۰ و مثلثات اقلیدسی داریم

$$p_n = r۲n \sin\frac{\pi}{n} = r۲n\left[\frac{\pi}{n} - \frac{۱}{۳!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^۳ + \frac{۱}{۵!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^۵ - \cdots\right]$$

$$= ۲\pi r - \frac{۲r\pi^۲}{n^۲}\left[\frac{\pi}{۳!} - \frac{۱}{۵!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^۳ + \cdots\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = ۲\pi r$$

در حالت هذلولوی، در عوض از فرمول (۱۰)، قضیه ۳.۱۰ استفاده می‌کنیم و به‌دست



شکل ۱۵.۱۰

می‌آوریم

$$\sinh (p/۲n) = \sinh\ r \sin(\pi/n)$$

که چون برحسب سری بسط دهیم خواهیم داشت

$$\frac{p}{۲n}\left[۱+\frac{۱}{۳!}\left(\frac{p}{۲n}\right)^۲+\frac{۱}{۵!}\left(\frac{p}{۲n}\right)^۴+\cdots\right]$$
$$=\frac{\pi}{n}\sin\ r\left[۱-\frac{۱}{۳!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^۲+\frac{۱}{۵!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^۴-\cdots\right]$$

(که در آن برای سهولت در نوشتن به‌جای p_n، p نوشته شده است). از ضرب طرفین در $۲n$ و گرفتن $\lim\limits_{n\to\infty}$، فرمول مطلوب به‌دست می‌آید. (بار دیگر اشاره می‌کنیم که برای دایره‌ای «به شعاع بی‌نهایت کوچک» فرمول هذلولوی به فرمول اقلیدسی بدل می‌شود.) ■

این قضیه به ما امکان می‌دهد تا قانون سینوسها، یعنی (۱۴) را به‌صورتی که در هندسه نتاری معتبر است بنویسم.

نتیجه (ی. بویویی). نسبت سینوس زوایای یک مثلث به یکدیگر مثل نسبت محیط دوایری است که شعاع آنها مساوی اضلاع مقابل به این زاویه‌ها باشد.

بویویی، محیط دایره‌ای به شعاع r را به $\bigcirc r$ نشان می‌دهد و این نتیجه را به‌صورت زیر می‌نویسد

$$\bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \sin\ \mathrm{A} : \sin\ \mathrm{B} : \sin\ \mathrm{C}$$

حال فرمولهای مساحت را در نظر می‌گیریم. به موجب قضیه ۱.۱۰ و قرارداد $k = ۱$، مساحت یک مثلث، K، با کاستی آن برحسب رادیان برابر است، یعنی

$$K = \pi - \mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C}$$

این کاستی برای مثلث قائم‌الزاویه، قائمه در C، چنین خواهد شد: $K = \pi/۲ - (\mathrm{A}+\mathrm{B})$.

قضیه ۶.۱۰

$$\tan\ K/۲ = \tanh\ a/۲ \tanh\ b/۲$$

(فرمول مساحت K در هندسه اقلیدسی چنین می‌شود: $K/۲ = a/۲ \cdot b/۲$).

برهان:

مراحل عمده برهان به قرار زیرند:

$$\tanh^{۲} \frac{a}{۲} \tanh^{۲} \frac{b}{۲} = \frac{(\cosh\ a) - ۱}{(\cosh\ a) + ۱} \frac{(\cosh\ b) - ۱}{(\cosh\ b) + ۱}$$

$$= \frac{۱ - \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{۱ + \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})} \frac{\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$$

$$= \frac{۱ - \cos\ K}{۱ + \cos\ K}$$

$$= \tan^{۲} \frac{K}{۲}$$

مراحل ۱ و ۴ به‌ترتیب همان اتحادهای مربوط به $\tanh^{۲}(x/۲)$ و $\tan^{۲}(x/۲)$ هستند. مرحله ۲ از قرار دادن فرمول (۱۲) به‌جای $\cosh\ a$ و $\cosh\ b$ و انجام مقداری محاسبات جبری با استفاده از اتحادهای مثلثاتی نتیجه می‌شود.[۱] در مرحله ۳ فقط اتحاد $\sin x = \cos(\pi/۲ - x)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. ■

قضیه ۷.۱۰ مساحت دایره‌ای به شعاع r مساوی است با $۴\pi \sinh^{۲}(r/۲)$.

برهان:

در اینجا بار دیگر A، مساحت یک دایره، را به‌صورت $\lim_{n\to\infty} K_n$ تعریف می‌کنیم، که K_n مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره است. با مراجعه به شکل ۱۵.۱۰ و استفاده از قضیه پیش، و نوشتن a، K، و p به‌ترتیب به‌جای a_n، K_n، و p_n داریم:

$$\tan \frac{K}{۴n} = \tanh \frac{p}{۴n} \tanh \frac{a}{۲}$$

اگر طرفین این تساوی را در $۴n$ ضرب کرده و حد دو طرف را وقتی $n \to \infty$ پیدا کنیم، با توجه

۱. ←تمرین ۵ از این به بعد به شما این فرصت داده می‌شود که توانایی جبری خود را برای پر کردن شکافهایی از این گونه، بیازمایید.

به $\lim_{n\to\infty} p_n = C$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = r$ و پیوستگی $\tan$ و $\tanh$ و سریهای

$$۴n \tan \frac{K}{۴n} = K + \frac{K}{۳}\left(\frac{K}{۴n}\right)^۲ + \cdots$$

$$۴n \tanh \frac{p}{۴n} = p - \frac{p}{۳}\left(\frac{p}{۴n}\right)^۲ + \cdots$$

خواهیم داشت

$$A = C \tanh \frac{r}{۲} \qquad (۱۶)$$

حال اگر در (۱۶) به‌جای C مقدارش را از قضیه ۵.۱۰ بگذاریم و از اتحادهای

$$\tanh \frac{r}{۲} = \frac{\sinh\ r}{\cosh\ r + ۱}$$

$$\sinh^۲\ r = \cosh^۲ r - ۱$$

$$۲ \sinh^۲ \frac{r}{۲} = \cosh\ r - ۱$$

استفاده کنیم، قضیه ۷.۱۰ را به‌دست می‌آوریم. ■

اگر این فرمول را به‌صورت یک سری تیلور بسط دهیم، می‌بینیم که مساحت یک دایره هذلولوی چقدر از مساحت یک دایره اقلیدسی با همان شعاع بزرگتر است:

$$A = \pi \left(r^۲ + \frac{r^۴}{۱۲} + \cdots\right)$$

توضیحی درباره هندسه بیضوی. فرمولهای محیط و مساحت یک دایره به شعاع r چنین‌اند:

$$C = ۲\pi \sin\ r$$

$$A = ۴\pi \sin^۲(r/۲)$$

فرمول بویویی در هندسه بیضوی معتبر است (زیرا در واقع این قضیه‌ای در هندسه مطلق است).

چهارضلعی‌های ساکری و لامبرت

یک چهارضلعی ساکری با قاعده b و ساقهای a و ضلع بالایی c را در نظر می‌گیریم. در تمرین ۱، فصل ۶، نشان دادید که $c > b$. اکنون این را به‌صورت دقیقتر بیان می‌کنیم.

قضیه ۸.۱۰ در یک چهارضلعی ساکری،

$$\sinh \frac{c}{۲} = \cosh\ a \sinh \frac{b}{۲}$$

(چون $\cosh^۲ a = ۱ + \sinh^۲ a > ۱$، حکم قضیه می‌گوید که $\sinh(c/۲) > \sinh(b/۲)$، بنابراین $c > b$.)

برهان:

اثبات این قضیه بدین‌ترتیب صورت می‌گیرد که در شکل ۱۶.۱۰ قرار می‌دهیم $d = \overline{\mathrm{AB'}}$ و $\theta = (\measuredangle \mathrm{A'AB'})^r$، و با فرمول (۱۳)، از قضیه ۴.۱۰، استفاده می‌کنیم تا به تساوی

$$\cosh\ c = \cosh\ a \cosh\ d - \sinh\ a \sinh\ d \cos\theta$$

برسیم. با استفاده از فرمولهای (۱۰) و (۱۱)، از قضیه ۳.۱۰ نتیجه می‌گیریم

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = \frac{\sinh\ a}{\sinh\ d}$$
$$\cosh\ d = \cosh\ a \cosh\ d$$

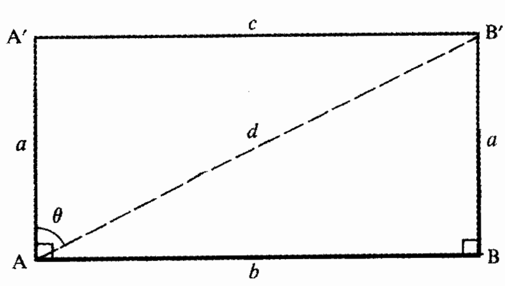
و با حذف d خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\cosh\ c &= \cosh^۲ a \cosh\ b - \sinh^۲\ a \\ &= \cosh^۲ a(\cosh\ b - ۱) + ۱\end{aligned}$$

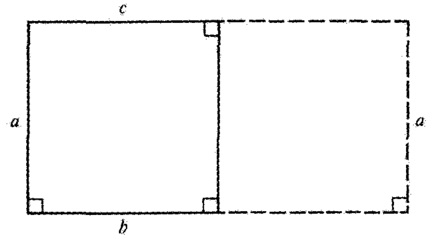
سرانجام اتحاد

$$۲ \sinh^۲ \frac{x}{۲} = \cosh x - ۱$$

ما را به نتیجه مطلوب می‌رساند. ■



شکل ۱۶.۱۰



شکل ۱۷.۱۰

نتیجه. در چهارضلعی لامبرت، اگر c طول یک ضلع مجاور به زاویه حاده و b طول ضلع مقابل به آن ضلع باشد، آنگاه

$$\sinh\ c = \cosh\ a \sinh\ b$$

که در آن a طول ضلع دیگر مجاور به زاویه حاده است (به‌ویژه $c > b$).

این نتیجه از نمایش چهارضلعی لامبرت به‌صورت نصف چهارضلعی ساکری (شکل ۱۷.۱۰) حاصل می‌شود. ■

فرمولهای جالب دیگری برای چهارضلعی‌های لامبرت وجود دارند که اینک استخراج خواهیم کرد. این فرمولها بر اساس مفهوم پاره‌خطهای متمم نهاده شده‌اند: دو پاره‌خط را متمم یکدیگر گویند هرگاه طول x و x^* آنها با رابطه

$$\Pi(x) + \Pi(x^*) = \frac{\pi}{2} \qquad (۱۷)$$

به‌هم مربوط شوند.

معنی هندسی این معادله در شکل ۱۸.۱۰، که در آن چهارمین رأس چهارضلعی لامبرت نقطه آرمانی Ω گرفته شده، نشان داده شده است.

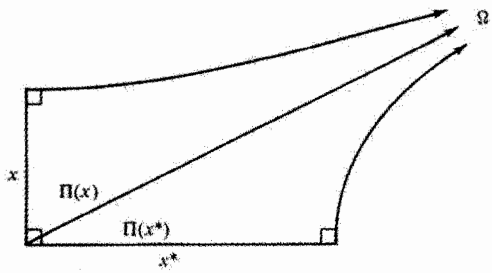
اگر فرمولهای پیشین (۴) تا (۷) برای زاویه توازی را به‌کار بریم خواهیم داشت

$$\sinh\ x^* = \operatorname{csch}\ x \qquad (۱۸)$$

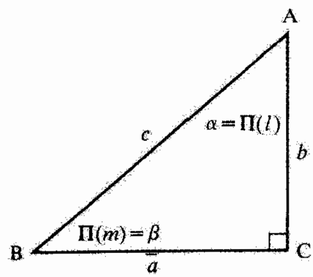
$$\cosh\ x^* = \coth\ x \qquad (۱۹)$$

$$\tanh\ x^* = \operatorname{sech}\ x \qquad (۲۰)$$

$$\tanh \frac{x^*}{۲} = e^{-x} \qquad (۲۱)$$



شکل ۱۸.۱۰



شکل ۱۹.۱۰

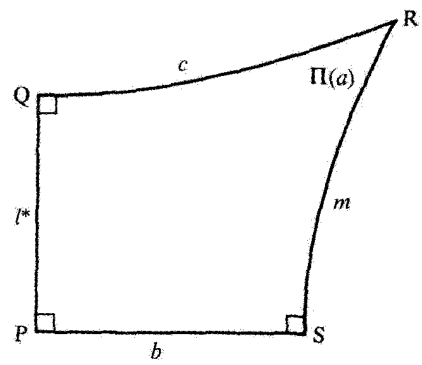
مثلاً به موجب (۷) داریم: $\sinh\ x^* = \cot\Pi(x^*) = \tan\Pi(x) = \text{csch}\ x$؛ فرمول (۲۱) از فرمولهای (۱۸) و (۱۹) و اتحاد

$$\tanh(t/۲) = (\sinh\ t)/(۱ + \cosh\ t)$$

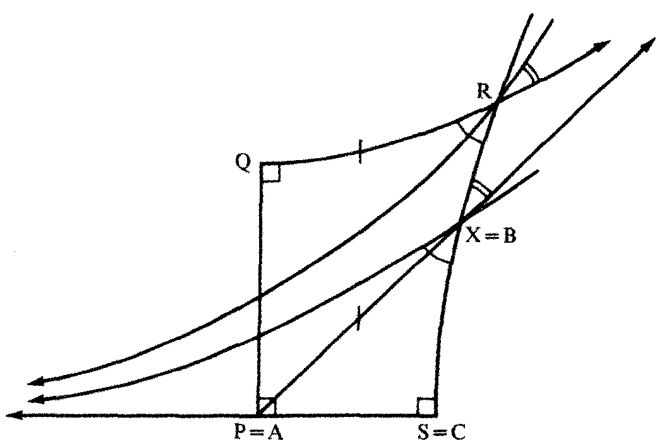
نتیجه می‌شود.

قضیه ۹.۱۰ (قضیه انگل). یک مثلث قائم‌الزاویه با پارامترهای شکل ۱۹.۱۰، وجود دارد اگر و تنها اگر یک چهارضلعی لامبرت با پارامترهای شکل ۲۰.۱۰ وجود داشته باشد. توجه کنید که PQ پاره‌خطی متمم با پاره‌خطی (نشان داده نشده است) است که $\measuredangle$A زاویه توازی آن است.

معنی هندسی قضیه انگل در شکل ۲۱.۱۰ نشان داده شده است. در این شکل نحوه رسم توازی بویویی (شکل ۱۶.۶) آورده شده است، زیرا اگر $X = B$ نقطه‌ای بین R و S باشد چنان‌که $QR \cong PX$، قضیه انگل می‌گوید که $(\measuredangle BAC)^r = \Pi(\overline{PQ}^*)$، و چون $(\measuredangle QPX)^r = \pi/۲ - (\measuredangle BAC)^r$، آنگاه $(\measuredangle QPX)^r = \Pi(\overline{PQ})$، یعنی $\overrightarrow{PX}$ با $\overrightarrow{QR}$ موازی حدی است.



شکل ۲۰.۱۰

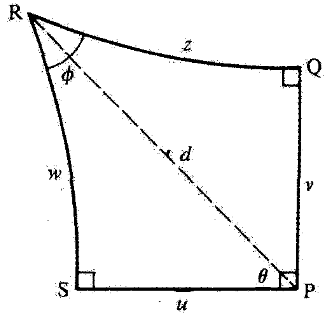


شکل ۲۱.۱۰

قضیه انگل همچنین حاکی است که نیم‌خط موازی حدی با $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$، مرسوم از R، زاویه‌ای با $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ می‌سازد که با $\measuredangle \mathrm{ABC}$ قابل انطباق است؛ و نیم‌خط موازی حدی با $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$ مرسوم از X، با $\overrightarrow{\mathrm{XS}}$ زاویه‌ای می‌سازد که با زاویه حاده $\measuredangle \mathrm{R}$ از چهارضلعی لامبرت قابل انطباق است.

برهان:

اثبات قضیه را با یک چهارضلعی لامبرت که مانند شکل ۲۲.۱۰ نام‌گذاری شده آغاز می‌کنیم. قبلاً نشان داده‌ایم که



شکل ۲۲.۱۰

$$\sinh\ w = \cosh\ z\ \sinh\ v \qquad \text{(الف)}$$

$$\sinh\ z = \cosh\ w\ \sinh\ u. \qquad \text{(الف-۱)}$$

گیریم $\theta = (\measuredangle\,\mathrm{SPR})^r$ و $d = \overline{\mathrm{PR}}$. به موجب قضیه ۳.۱۰ داریم

$$\begin{aligned}\sinh w &= \sin\theta \sinh\ d = \cos\,(\pi/۲ - \theta)\sinh\ d = \tanh\ v \cosh\ d\\ &= \tanh\ v(\cosh\ u \cosh\ w)\end{aligned}$$

به‌قسمی‌که

$$\tanh\ w = \tanh\ v \cosh\ u \qquad \text{(ب)}$$

و به دلیل تقارن

$$\tanh\ z = \tanh\ u \cosh\ v \qquad \text{(ب-۱)}$$

گیریم $\phi = (\measuredangle\,\mathrm{R})^r$. بنابر قانون سینوسها و قضیه ۳.۱۰ داریم

$$\frac{\sin\phi}{\sin\overline{\mathrm{QS}}} = \frac{\sin(\measuredangle\mathrm{QSR})^r}{\sinh\ z} = \frac{\cos(\measuredangle\mathrm{PSQ})^r}{\sinh\ z} = \frac{\tanh\ u}{\tanh\overline{\mathrm{QS}}\sinh\ z}$$

لذا بنابر (الف-۱) و قضیه ۳.۱۰ خواهیم داشت

$$\sin\phi = \frac{\tanh\ u \cosh\overline{\mathrm{QS}}}{\sinh\ z} = \frac{\tanh\ u(\cosh\ u \cosh\ v)}{\sinh\ u \cosh\ w} = \frac{\cosh\ v}{\cosh\ w} \qquad \text{(ج)}$$

و به‌دلیل تقارن

$$\sin\phi = \frac{\cosh\ u}{\cosh\ z} \tag{ج-۱}$$

حال فرض می‌کنیم X نقطه‌ای بین R و S باشد چنان‌که $\overline{\mathrm{PX}} = z$، و مثلث قائم‌الزاویه $\Delta\mathrm{PSX}$، (شکل ۲۱.۱۰) را در نظر می‌گیریم. به‌موجب (الف-۱) و (ب-۱) و (ج-۱) به‌ترتیب (با استفاده از قضیه ۳.۱۰) به‌دست می‌آوریم

$$\sin(\measuredangle\mathrm{PXS})^r = \frac{\sinh\ u}{\sinh\ z} = \operatorname{sech}\ w$$

$$\cos(\measuredangle\mathrm{XPS})^r = \frac{\tanh\ u}{\tanh\ z} = \operatorname{sech}\ v = \tanh\ v^*$$

$$\cosh\overline{\mathrm{XS}} = \frac{\cosh\ z}{\cosh\ u} = \csc\ \phi$$

به‌گونه‌ای که طبق فرمولهای (۵)، (۶)، و (۵) به‌ترتیب خواهیم داشت

$$(\measuredangle\mathrm{PXS})^r = \Pi(w)$$

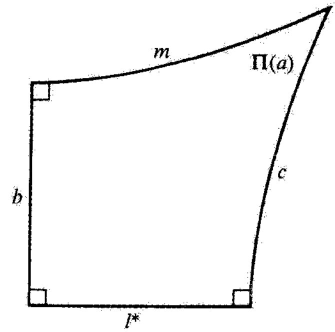
$$(\measuredangle\mathrm{XPS})^r = \Pi(v^*)$$

$$\Pi(\overline{\mathrm{XS}}) = \phi.$$

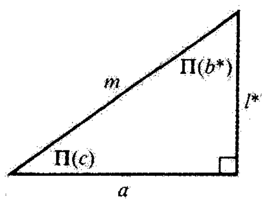
بنابراین اگر نام‌گذاری را عوض کنیم و P را با A، X را با B، و S را با C جایگزین کنیم، مثلث قائم‌الزاویه $\Delta\mathrm{ABC}$ را به‌دست می‌آوریم که چنان‌که ادعا شده بود، با چهارضلعی لامبرت متناظر است.

برعکس، اگر مثلث قائم‌الزاویه $\Delta\mathrm{PSX}$ داده شده باشد، می‌توانیم $\square\mathrm{PQRS}\square$ را از آن به‌دست آوریم، بدین‌ترتیب که R را مساوی تنها نقطه بر $\overrightarrow{\mathrm{SX}}$ بگیریم چنان‌که $\Pi(\overline{\mathrm{RS}}) = (\measuredangle\mathrm{PXS})^r$، و Q را پای عمود مرسوم از R بر خطی بگیریم که از P بر $\overleftrightarrow{\mathrm{PS}}$ عمود شده است. ■

تناظر موجود در قضیه ۹.۱۰ را می‌توان برای یک رشته از قضایای وجود پیش‌بینی کرد. مثلاً، از وجود یک مثلث قائم‌الزاویه با پارامترهای $(a, \Pi(m), c, \Pi(l), b)$، شکل ۱۹.۱۰، می‌توان با مرتب کردن پارامترها به‌صورت یک تصاعد در جهت ساعتگرد، وجود یک چهارضلعی لامبرت با پارامترهای $(l^*, c, \Pi(a), m, b)$ نظیر شکل ۲۰.۱۰ را نتیجه گرفت. حال پارامترها را در جهت عکس بخوانید! بر اثر این عمل شکل ۲۳.۱۰ حاصل می‌شود که از آن وجود یک مثلث قائم‌الزاویه دیگری، شکل ۲۴.۱۰، با پارامترهای $(a, \Pi(c), m, \Pi(b^*), l^*)$ نتیجه می‌شود.



شکل ۲۳.۱۰



شکل ۲۴.۱۰

می‌توانیم روال خواندن این پارامترها را در جهت عکس ادامه دهیم و چهارضلعی لامبرت دیگری به‌دست آوریم؛ و همین‌طور عمل را دنبال کنیم تا سرانجام به‌وجود پنج چهارضلعی لامبرت و چهار مثلث قائم‌الزاویه دیگر، که بر اثر وجود نخستین مثلث قائم‌الزاویه نتیجه شده‌اند، ختم کنیم. نتایج در جدول زیر خلاصه شده است.

مثلث ΔABC، قائمه در $\measuredangle C$					$\square SPQR$ لامبرت، حاده در $\measuredangle R$				
BC	$\measuredangle B$	AB	$\measuredangle A$	AC	PQ	QR	$\measuredangle R$	RS	SP
a	$\Pi(m)$	c	$\Pi(l)$	b	l^*	c	$\Pi(a)$	m	b
a	$\Pi(c)$	m	$\Pi(b^*)$	l^*	c^*	m	$\Pi(l^*)$	b^*	a
l^*	$\Pi(m)$	b^*	$\Pi(a^*)$	c^*	m^*	b^*	$\Pi(c^*)$	a^*	l^*
c^*	$\Pi(b^*)$	a^*	$\Pi(l)$	m^*	b	a^*	$\Pi(m^*)$	l	c^*
m^*	$\Pi(a^*)$	l	$\Pi(c)$	b	a	l	$\Pi(b)$	c	m^*

همچنین توجه داریم که قضیه ۳.۱۰ فرمولهایی را در اختیار ما قرار داد که نشان می‌دادند

چگونه هر مثلث قائم‌الزاویه با هر دو پارامتر دلخواه از پنج پارامترش به گونه‌ای یکتا معین می‌شود. قضیه ۹.۱۰ مشابه همین نتیجه را برای یک چهارضلعی لامبرت به ما می‌دهد (مثلاً، اگر با u و v شروع کنیم، w با (ب)، z با (ب-۱)، و ϕ با (ج) در برهان قضیه ۹.۱۰ به‌دست می‌آیند).

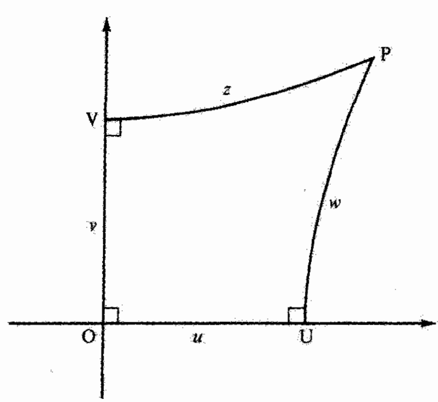
مختصات در صفحه هذلولوی

از مبدأ O دو خط متعامد رسم می‌کنیم و آنها را محورهای u و v می‌نامیم. به‌ازای هر نقطه P فرض می‌کنیم U و V تصاویر قائم P بر این محورها باشند و u و v به‌ترتیب مختصات U و V باشند. در این صورت یک چهارضلعی لامبرت □UOVP خواهیم داشت. دو ضلع دیگر این چهارضلعی را با مختصات z و w نشان می‌دهیم به‌قسمی‌که

$$\tanh w = \tanh v \cosh u \qquad (۲۲)$$
$$\tanh z = \tanh u \cosh v$$

(شکل ۲۵.۱۰). در فرمولهای (ب) و (ب-۱) در برهان قضیه ۹.۱۰ نشان دادید که اگر P در ربع اول مختصات (یعنی $u > 0$ و $v > 0$) واقع باشد، آنگاه $w = \overline{\mathrm{PU}}$ و $z = \overline{\mathrm{PV}}$. همچنین قرار می‌دهیم

$$x = \tanh u, \qquad y = \tanh v \qquad (۲۳)$$
$$T = \cosh u \cosh w, \qquad X = xT, \qquad Y = yT \qquad (۲۴)$$



شکل ۲۵.۱۰

در این حال (u,v) را مختصات محوری، (u,w) را مختصات لباچفسکی، (x,y) را مختصات بلترامی و (T,X,Y) را مختصات وایرشتراس نقطه P می‌نامیم. همان‌گونه که با قضیه طولانی زیر نشان داده شده است، دو دستگاه آخری مهمترین دستگاههای مختصات هستند.

قضیه ۱۰.۱۰ (با فرض $k = ۱$). تخصیص مختصات بلترامی، یعنی زوج (x,y)، به هر نقطه P، برقراری یک یکریختی از صفحه هذلولوی برروی مدل بلترامی-کلاین است. به‌ویژه $Ax+By+C = ۰$ معادله یک خط در مختصات بلترامی است اگر و تنها اگر $A^۲+B^۲ > C^۲$، و هر خطی چنین معادله‌ای دارد. $\overline{\mathrm{P}_۱\mathrm{P}_۲}$، فاصله بین دو نقطه $\mathrm{P}_۱$ و $\mathrm{P}_۲$ برحسب مختصات بلترامی با رابطه

$$\cosh\, \overline{\mathrm{P}_۱\mathrm{P}_۲} = \frac{p_۱ \cdot p_۲}{\|p_۱\|\;\|p_۲\|} \tag{۲۵}$$

داده می‌شود که در آن $p_i = (۱, x_i, y_i)$، و حاصل‌ضرب داخلی $p_۱ \cdot p_۲$ چنین تعریف می‌شود

$$p_۱ \cdot p_۲ = ۱ - x_۱x_۲ - y_۱y_۲$$

و $\|p_i\| = \sqrt{p_i \cdot p_i}$. به‌گونه‌ای مشابه اگر $A_ix + B_iy + C_i = ۰$ معادله‌های دو خط l_i، $i = ۱,۲$، باشند که یکدیگر را به زاویه غیرمنفرجه‌ای مساوی θ رادیان بریده‌اند، آنگاه داریم:

$$\cos\theta = \frac{l_۱ \cdot l_۲}{\|l_۱\|\;\|l_۲\|} \tag{۲۶}$$

که در آن حاصل‌ضرب داخلی توسط

$$l_۱ \cdot l_۲ = A_۱A_۲ + B_۱B_۲ - C_۱C_۲$$

تعریف شده است، و $\|l_i\| = \sqrt{l_i \cdot l_i}$ (به‌ویژه $l_۱ \cdot l_۲ = ۰$ شرط لازم و کافی برای تعامد دو خط است).

تخصیص سه‌تایی (T,X,Y)، یعنی مختصات وایرشتراس، به هر نقطه P، صفحه هذلولوی را بر مکان هندسی

$$T_۲ - X^۲ - Y^۲ = ۱, \qquad T \geqq ۱$$

می‌نگارد، که یکی از دو دامنه یک هذلولی‌وار در فضای دکارتی سه‌بعدی است. معادله هر خط در مختصات وایرشتراس، همگن خطی، یعنی به‌صورت $AX + BY + CT = ۰$ است.

پیش از آنکه به اثبات قضیه بپردازیم، اشاره می‌کنیم که نمایش وایرشتراس تعبیری از صفحه هذلولوی به‌عنوان «کره موهومی به شعاع i» است. یعنی هرگاه به‌جای صورت درجه دوم معین

معمولی $X^۲ + Y^۲ + T^۲$ (که معرف مربع فاصله از مبدأ است)، صورت درجه دوم نامعین $X^۲ + Y^۲ - T^۲$ را بگذاریم، آنگاه کره به شعاع i برحسب این «فاصله» با معادله

$$X^۲ + Y^۲ - T^۲ = i^۲ = -۱$$

به‌دست می‌آید، که معادله یک هذلولی‌وار است. این متریک نامعین، مشابه سه‌بعدی متریکی است که به شکل $X^۲ + Y^۲ + Z^۲ - T^۲$ در فضا_زمان چهاربعدی و در نسبیت خاص به‌کار رفته است (تیلور و ویلر، ۱۹۹۲). باید توجه داشت که در مدل وایرشتراس، «خطها» فصل مشترک صفحات اقلیدسی گذرنده از مبدأ با یک دامنه هذلولی‌وار هستند. برای نشان دادن این مدل، فقط باید یک شاخه از هذلولی $T^۲ - X^۲ = ۱$ را در صفحه (T, X) تجسم کرد، که حول محور T دوران کرده است (شکل ۱۹.۷).

برهان:

اثبات قضیه ۱۰.۱۰ براساس مثلثات چهارضلعی لامبرت، که در قضیه قبل آورده شده بود، صورت می‌گیرد.

همان‌گونه که نمودار شکل ۱۳.۱۰ نشان می‌دهد، $u \to \tanh\ u$ نگاشتی است یک‌به‌یک از کل خط حقیقی بر بازه $(-۱, ۱)$. این امر که زوجهای (x, y) از مختصات بلترامی در نامعادله $x^۲ + y^۲ < ۱$ صدق می‌کنند، از این واقعیت نتیجه می‌شود که عمودهای مرسوم بر محورها در نقاط U و V متقاطع‌اند اگر و تنها اگر $|u| < |v|^*$ (شکل ۱۸.۱۰)، یعنی (با استفاده از فرمول (۲۰))

$$\tanh^۲\ u < \tanh^۲ |v|^* = \text{sech}^۲\ v = ۱ - \tanh^۲\ v$$

برای استخراج فرمول فاصله، مختصات قطبی (r, θ) نقطه P را در شکل ۲۵.۱۰ وارد می‌کنیم که چنین تعریف می‌شود

$$r = \overline{\mathrm{OP}}$$

$$\theta = \begin{cases} \measuredangle(\mathrm{XOP})^r & \text{اگر } v \geqq ۰ \\ -\measuredangle(\mathrm{XOP})^r & \text{اگر } v \leqq ۰ \end{cases}$$

در این حال، بین این مختصات و مختصات محوری، مطابق فرمول (۱۰) برای کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه و اتحاد $\sin\theta = \cos(\pi/۲ - \theta)$، روابط زیر برقرارند

$$\begin{aligned} \tanh\ r\cos\theta &= \tanh\ u = x \\ \tanh\ r\sin\theta &= \tanh\ v = y \end{aligned} \tag{۲۷}$$

بنابراین

$$\tanh^۲ r = \tanh^۲ u + \tanh^۲ v = x^۲ + y^۲$$

از اتحاد $\mathrm{sech}^۲\, r = ۱ - \tanh^۲ r$ به‌دست می‌آوریم

$$\cosh\ r = (۱ - x^۲ - y^۲)^{-۱/۲} = \|p\|^{-۱}$$

در صورتی‌که $p = (۱, x, y)$، که معرف فرمول فاصله است هرگاه $\mathrm{P}_۱ = \mathrm{P}$ و $\mathrm{O} = \mathrm{P}_۲$. وقتی $\mathrm{P}_۱$ و $\mathrm{P}_۲$ نقاط غیرمشخصی باشند، از فرمول (۲۷) نتیجه می‌شود

$$\cos(\theta_۲ - \theta_۱) = \cos\theta_۱ \cos\theta_۲ + \sin\theta_۱ \sin\theta_۲$$
$$= \frac{x_۱ x_۲ + y_۱ y_۲}{\tanh\ r_۱ \tanh\ r_۲}$$

ابتدا فرض می‌کنیم O، $\mathrm{P}_۱$، و $\mathrm{P}_۲$ هم‌خط باشند، لذا $\cosh\ \overline{\mathrm{P}_۱\mathrm{P}_۲} = \cosh(r_۱ \pm r_۲)$. چون $\cos(\theta_۲ - \theta_۱) = \pm ۱$، پس

$$\cosh\ \overline{\mathrm{P}_۱\mathrm{P}_۲} = \cosh\ r_۱ \cosh\ r_۲ - \sinh\ r_۱ \sinh\ r_۲ \cos(\theta_۲ - \theta_۱)$$
$$= \cosh\ r_۱ \cosh\ r_۲[۱ - \tanh\ r_۱ \tanh\ r_۲ \cos(\theta_۲ - \theta_۱)]$$

ولی این فرمول وقتی O، $\mathrm{P}_۱$، و $\mathrm{P}_۲$ هم‌خط هم نباشند، طبق قاعده کسینوسها (۱۳)، صادق است. اگر در این فرمول مقادیر دو فرمول قبل را بگذاریم، فرمول مطلوب (۲۵) به‌دست می‌آید.

وقتی نشان می‌دهیم که نگاشت $\mathrm{P} \to (x, y)$ طولهای هذلولوی را بر روی طولهای کلاینی می‌فرستد، یعنی نشان داده‌ایم که فرمول (۲۵) با فرمول تمرین ک‌ـ۱۴، فصل هفتم، تطبیق دارد. این امر از محاسبه‌ای براساس فرمول

$$\tanh\ \overline{\mathrm{P}_۱\mathrm{P}_۲} = \frac{[(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲ - (x_۱ y_۲ - x_۲ y_۱)^۲]^{۱/۲}}{p_۱ \cdot p_۲} \qquad (۲۸)$$

و اتحاد

$$\mathrm{arctanh}\ t = \frac{۱}{۲} \ln \frac{۱ + t}{۱ - t} \qquad (۲۹)$$

نتیجه می‌شود. فرمول (۲۸) از فرمول (۲۵) به‌موجب اتحاد $\tanh^۲ t = ۱ - \cosh^{-۲} t$ به‌دست آمده است. (جملات داخل کروشه در طرف راست تساوی (۲۸) را می‌توان به‌صورت $(p_۱ \cdot p_۲)^۲ - \|p_۱\|^۲ \|p_۲\|^۲$ نوشت. ضمناً عدد $\frac{۱}{۲}$ که در فرمول (۲۹) آمده است علت ظاهر شدن عامل $\frac{۱}{۲}$ را در فرمول درازای کلاینی در قضیه ۴.۷، صفحه ۲۸۱، نشان می‌دهد.)

از آنجا که $P \to (x, y)$ یک طولپایی است، پس یک هم‌خطی است، لذا خطهای صفحه هذلولوی بر روی وترهای مطلق در مدل کلاین نگاشته می‌شوند، و همان‌گونه که در قضیه ذکر شده است، دارای معادلاتی خطی هستند.

فرمول (۲۶) برای $\cos\theta$ حکمی است درباره اندازه زاویه بین دو خط در مدل کلاین، وقتی با یکریختی $P \to (x, y)$ به آن مدل می‌رویم. فرض می‌کنیم که این دو خط یکدیگر را در نقطه $P_\circ$ به مختصات $(x_\circ, y_\circ)$ ببرند و iامین خط را به‌صورت $\overleftrightarrow{P_\circ P_i}$، که P_i به مختصات (x_i, y_i)، $i = ۱, ۲$ است، نوشته باشیم. بنابراین ضرایب معادله iامین خط با $A_i = y_۱ - y_\circ$، و $B_i = x_\circ - x_i$ و $C_i = x_i y_\circ - y_i x_\circ$ داده می‌شوند. فرض می‌کنیم $P_\circ = O$ مرکز مطلق باشد. پس فرمول (۲۶) به

$$\cos\theta = \frac{x_۱ x_۲ + y_۱ y_۲}{(x_۱^۲ + y_۱^۲)^{۱/۲}(x_۲^۲ + y_۲^۲)^{۱/۲}}$$

بدل می‌شود که فرمول اقلیدسی برای کسینوس زاویه $\measuredangle P_۱OP_۲$ است. ولی، مدل کلاین در نقطه خاص O همدیس است، لذا صحت (۲۶) در این حالت محقق شده است.

هرگاه $P_\circ \neq O$، یک حرکت هذلولوی T پیدا می‌کنیم به‌طوری که $T(O) = P_\circ$، و فرض می‌کنیم $Q_i = T^{-۱}(P_i)$. چون T اندازه زاویه را حفظ می‌کند، پس کافی است نشان دهیم که فرمول (۲۶) با کسینوس $\measuredangle Q_۱OQ_۲$ مساوی است. طبیعی‌ترین تبدیل برای T، همان قرینه‌یابی محوری نسبت به عمودمنصف $OP_\circ$ است. برای وصول به مقصود، به دو لم آتی (که تعمیم تمرین ۹ هستند) احتیاج داریم.

لم ۱.۱۰ مختصات کلاینی نقطه M، وسط OP، چنین است

$$\left(\frac{x}{۱ + \|p\|}, \frac{y}{۱ + \|p\|}\right)$$

که در آن $\|p\| = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$، و (x, y) مختصات نقطه P است.

برهان:

فرض می‌کنیم $r = \overline{OP}$؛ دیده‌ایم که $\cosh\ r = \|p\|^{-۱}$، $x = \tanh\ r\cos\theta$، و $y = \tanh\ r\sin\theta$. پس مختصات نقطه $M(x', y')$، چنین است: $x' = \tanh(r/۲)\cos\theta$ و $y' = \tanh(r/۲)\sin\theta$؛ یعنی $x' = x\tanh(r/۲)/\tanh\ r$ و $y' = y\tanh(r/۲)/\tanh\ r$.

اما

$$\frac{\tanh(r/۲)}{\tanh\ r} = \frac{\sinh\ r}{\cosh\ r + ۱} \cdot \frac{\cosh\ r}{\sinh\ r}$$
$$= \left(۱ + \frac{۱}{\cosh\ r}\right)^{-۱} = (۱ + \|p\|)^{-۱} \blacksquare$$

لم ۲.۱۰ معادله عمودمنصف $OP_\circ$ به‌صورت $x_\circ x + y_\circ y + \|p_\circ\| - ۱ = \circ$ است، که $\|p_\circ\| = \sqrt{۱ - (x_\circ^۲ + y_\circ^۲)}$ و $(x_\circ, y_\circ)$ مختصات $P_\circ$ است.

برهان:

عمودمنصف $OP_\circ$ از نقطه M می‌گذرد و شیب آن $-x_\circ/y_\circ$ است (زیرا تعامد کلاینی، وقتی یک وتر، قطر مطلق باشد، عیناً نظیر تعامد اقلیدسی است). ■

حال، اگر فرمول کلی برای قرینه‌یابی محوری در مدل کلاین را که در تمرین ک‑۱۶، فصل ۷، بررسی کردید به‌کار بریم، آنگاه لم ۲.۱۰ ایجاب می‌کند که قرینه‌یابی نسبت به عمودمنصف $OP_\circ$ با فرمولهای زیر داده شده باشد:

$$x' = \frac{x[\|p_\circ\|^۲ - \|p_\circ\|] - x_\circ(x_\circ x + y_\circ y + \|p_\circ\| - ۱)}{\|p_\circ\|^۲ - \|p_\circ\| + [\|p_\circ\| - ۱](x_\circ x + y_\circ y + \|p_\circ\| - ۱)}$$

$$y' = \frac{y[\|p_\circ\|^۲ - \|p_\circ\|] - y_\circ(x_\circ x + y_\circ y + \|p_\circ\| - ۱)}{\|p_\circ\|^۲ - \|p_\circ\| + [\|p_\circ\| - ۱](x_\circ x + y_\circ y + \|p_\circ\| - ۱)}$$

با استفاده از این فرمول، یک محاسبه طولانی نشان می‌دهد که فرمول (۲۶) با کسینوس $\measuredangle Q_۱OQ_۲$ مساوی است.

برای تحقیق درستی این فرمول، توجه می‌کنیم که $\cos\theta = \circ$ اگر و تنها اگر $A_۱A_۲ + B_۱B_۲ + C_۱(-C_۲) = \circ$، که این معادله بیانگر این است که $l_۱$ از قطب خط $l_۲$ یعنی از نقطه $(A_۲, B_۲, -C_۲)$ می‌گذرد.

احکام مربوط به مختصات وایرشتراس را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

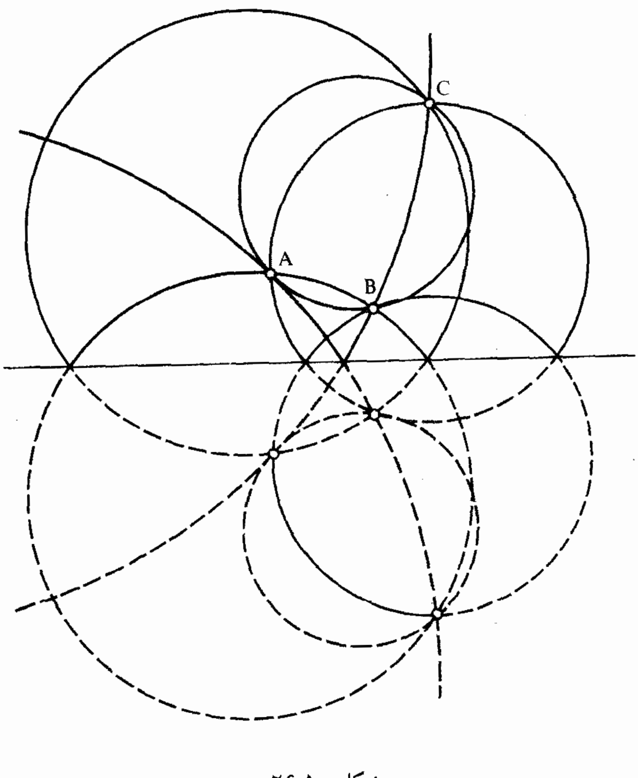
دایره محیطی مثلث

در تمرین ۹، فصل ۵، دریافتید که وجود دایره محیطی برای هر مثلث با اصل توازی اقلیدسی هم‌ارز است. دایره محیطی وجود دارد اگر و تنها اگر عمودمنصفهای اضلاع در یک نقطه عادی متقارب

باشند (تمرین ۱۲، فصل ۶). در تمرین ۱۳، فصل ۶، و تمرین اصلی ۷، فصل ۶، نشان دادید که اگر دایره محیطی وجود نداشته باشد، عمودمنصفها همواره در یک نقطه آرمانی یا فراآرمانی «متقارب‌اند».

در مورد نقطه فراآرمانی، نشان دادید (شکل ۲۶.۶) که A، B و C، رأسهای مثلث مفروض، از خط t، عمود مشترک عمودمنصفها، به یک فاصله‌اند. این امر ایجاب می‌کند که این سه نقطه بر یک خم هم‌فاصله، که t محور آن است، قرار داشته باشند. بنابر تعریفی که از «خم هم‌فاصله» کردیم، لازم است که A، B، و C، در یک طرف t قرار داشته باشند.

برخی مؤلفان (مثلاً، کاکستر، و سامرویل) «خم هم‌فاصله» را طور دیگری تعریف می‌کنند، یعنی آن را مکان کلیه نقاطی می‌گیرند که از یک محور t به یک فاصله باشند بدون توجه به اینکه درکدام طرف t واقع باشند. این مؤلفان «خم هم‌فاصله» ما را یکی از دو شاخه خم هم‌فاصله خود می‌شمارند. ما خم هم‌فاصله کاکستر و سامرویل را، که معرف اجتماع دو خم هم‌فاصله هستند که



شکل ۲۶.۱۰

یک محور دارند و هر یک از این دو خم قرینه دیگری نسبت به این محور است، خم هم‌فاصله مضاعف می‌نامیم. در تمرین ۱۱ (الف)، فصل ۶، نشان دادید که بر هر مثلث سه خم هم‌فاصله مضاعف که محورهایشان خطوط واصل بین وسط اضلاع هستند، محیط است (شکل ۲۴.۶).

حال به مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره می‌رویم: دایره اقلیدسی گذرنده از نقاط A، B، و C، یک دایره هذلولوی است اگر کاملاً در نیم‌صفحه بالایی باشد (تمرین پ-۵، فصل ۷، و تمرین ۴۸، فصل ۹)؛ همچنین دایره حدی به مرکز آرمانی Ω است. اگر بر محور xها در نقطه Ω مماس باشد. (تمرین ۴۶، فصل ۹)، و در غیر این دو صورت، قوسی از آن که در نیم‌صفحه بالایی واقع است، خم هم‌فاصله است (تمرین ۴۷، فصل ۹).

شکل ۲۶.۱۰، سه خم هم‌فاصله مضاعف و یک دایره هذلولوی را نشان می‌دهد که بر مثلث ΔABC در این مدل محیط‌اند.

قضیه بعد یک ملاک مثلثاتی برای تشخیص نوع دایره محیطی ΔABC به ما می‌دهد.

قضیه ۱۱.۱۰ با نام‌گذاری استاندارد برای ΔABC، فرض می‌کنیم a طول بلندترین ضلع و در نتیجه $\measuredangle$A بزرگترین زاویه باشد. در این صورت

$$\sinh\frac{c}{۲}+\sinh\frac{b}{۲}\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}\sinh\frac{a}{۲}\iff\left.\begin{matrix}\text{دایره محیطی } \Delta\text{ABC یک دایره است}\\\text{دایره محیطی } \Delta\text{ABC یک دایره حدی است}\\\text{دایره محیطی } \Delta\text{ABC یک خم هم‌فاصله است}\end{matrix}\right\}$$

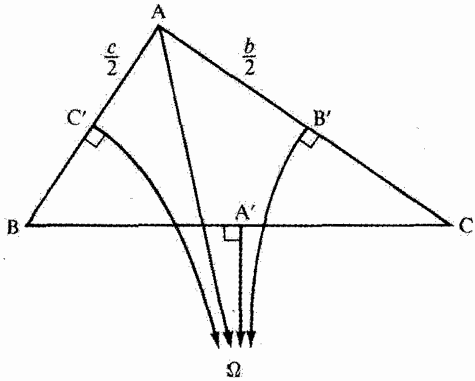
$$\iff(\measuredangle\mathrm{A})^r\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}\Pi\left(\frac{b}{۲}\right)+\Pi\left(\frac{c}{۲}\right)$$

برهان:

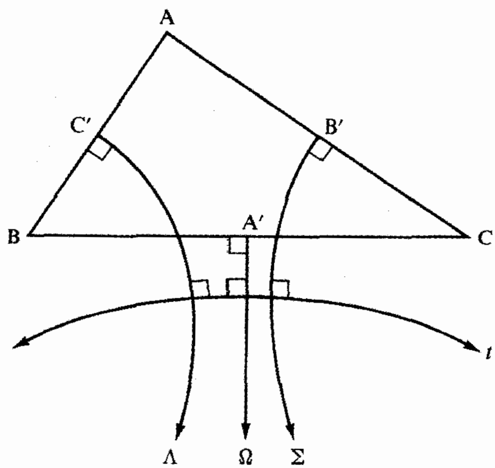
ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که عمودمنصفها در امتداد یک نقطه آرمانی موازی مجانبی هستند. به موجب لم ۳.۶، صفحه ۲۲۹، شکل ۲۷.۱۰، که در آن A′، B′، و C′ وسط اضلاع هستند، صادق است. این شکل نشان می‌دهد که

$$(\measuredangle\mathrm{A})^r=(\measuredangle\mathrm{C'A\Omega})^r+(\measuredangle\mathrm{B'A\Omega})^r=\Pi(c/۲)+\Pi(b/۲)$$

در حالتی که عمودمنصفها عمود مشترکی مانند t داشته باشند، شکل ۲۸.۱۰ صادق است.



شکل ۲۷.۱۰



شکل ۲۸.۱۰

چون $\measuredangle C'A\Omega > \measuredangle C'A\Lambda$ و $\measuredangle B'A\Omega > \measuredangle B'A\Sigma$، می‌بینیم که

$$(\measuredangle A)^r > (\measuredangle C'A\Lambda)^r + (\measuredangle B'A\Sigma)^r = \Pi(c/۲) + \Pi(b/۲)$$

در حالتی که عمودمنصفها متلاقی باشند، باید داشته باشیم

$$(\measuredangle A)^r < \Pi(c/۲) + \Pi(b/۲)$$

زیرا این حالت تنها امکانی است که باقی می‌ماند. پس ملاک دوم برقرار است.

استخراج ملاک اول برحسب سینوسهای هذلولوی از روی ملاک دوم، مستلزم استفاده از اتحادها و فرمولهای قبلی توأم با یک محاسبه است. اولاً، بنابر قانون کسینوس هذلولوی (۱۳) داریم

$$\cos\ A = \frac{\cosh\ b\ \cosh\ c - \cosh\ a}{\sinh\ b\ \sinh\ c}$$

$$= \frac{\left(۲\sinh^۲\frac{b}{۲}+۱\right)\left(۲\sinh^۲\frac{c}{۲}+۱\right)-\left(۲\sinh^۲\frac{a}{۲}+۱\right)}{۴\sinh\frac{b}{۲}\cosh\frac{b}{۲}\sinh\frac{c}{۲}\cosh\frac{c}{۲}}$$

$$= \frac{۲\sinh^۲\frac{b}{۲}\sinh^۲\frac{c}{۲}+\sinh^۲\frac{b}{۲}+\sinh^۲\frac{c}{۲}-\sinh^۲\frac{a}{۲}}{۲\sinh\frac{b}{۲}\sinh\frac{c}{۲}\cosh\frac{b}{۲}\cosh\frac{c}{۲}}$$

ثانیاً، به‌موجب اتحاد مربوط به $\cos(x+y)$ و فرمولهای (۵) و (۶) داریم

$$\cos\left[\Pi\left(\frac{b}{۲}\right)+\Pi\left(\frac{c}{۲}\right)\right]$$

$$= \cos\Pi\left(\frac{b}{۲}\right)\cos\Pi\left(\frac{c}{۲}\right)-\sin\Pi\left(\frac{b}{۲}\right)\sin\Pi\left(\frac{c}{۲}\right)$$

$$= \tanh\frac{b}{۲}\tanh\frac{c}{۲}-\frac{۱}{\cosh\frac{b}{۲}\cosh\frac{c}{۲}}$$

$$= \frac{\sinh\frac{b}{۲}\sinh\frac{c}{۲}-۱}{\cosh\frac{b}{۲}\cosh\frac{c}{۲}}$$

در این صورت، پس از مختصری عملیات جبری، نخستین ملاک از این معادلات نتیجه می‌شود. ■

نتیجه. مثلث متساوی‌الساقینی که قاعده‌اش از ساقهایش بزرگتر نباشد (به‌ویژه مثلث متساوی‌الاضلاع)، یک دایره محیطی دارد. اگر قاعده از ساقها بزرگتر باشد، آنگاه

$$\text{دایره محیطی یک دایره است} \quad \text{دایره محیطی یک دایره حدی است} \quad \text{دایره محیطی یک خم هم‌فاصله است} \iff \cosh\ a \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} ۴\cosh\ b - ۳$$

که در آن a طول قاعده و b طول هر ساق است.

اثبات این نتیجه به‌عنوان تمرین ۱۰ به خواننده واگذار شده است.

آخرین قضیه ما ارائه فرمول جالبی است که شعاع دایره محیطی را به مساحت مثلث (که مساوی با کاستی آن است) مربوط می‌کند.

قضیه ۱۲.۱۰ اگر $\Delta\mathrm{ABC}$ یک دایره محیطی به شعاع R داشته باشد، با همان نام‌گذاری استاندارد، K، مساحت $\Delta\mathrm{ABC}$ با فرمول

$$\sin\frac{K}{۲} = \frac{\tanh\frac{a}{۲}\tanh\frac{b}{۲}\tanh\frac{c}{۲}}{\tanh\ R} \qquad (۳۰)$$

داده می‌شود.

توضیح. اگر در بسط سریهای توانی $\sin$ و $\tanh$ فقط به جملات درجه پایین اکتفا کنیم (یعنی فقط به یک مثلث هذلولوی «بی‌نهایت کوچک» بنگریم)، این فرمول به فرمول اقلیدسی

$$K = \frac{abc}{۴R}$$

بدل می‌شود. در هندسه اقلیدسی می‌توانیم $(bc\sin\mathrm{A})/۲$ را به‌جای K بگذاریم و آن را نسبت به R حل کنیم. در هندسه هذلولوی در فرمول تمرین ۲۸، فرمولی برای R برحسب اضلاع مثلث داده می‌شود.

اینک برهان اقلیدسی این فرمول: B را یک رأس می‌گیریم به‌طوری که BD قطر دایره محیطی κ، ضلع AC را ببرد. در این صورت $\measuredangle\mathrm{D}$ از مثلث $\Delta\mathrm{BDC}$ و $\measuredangle\mathrm{A}$ یک کمان BC از κ را دربردارند، و با هم برابرند. لذا $\sin\mathrm{A} = \sin\mathrm{D} = a/۲R$ (زیرا $\measuredangle\mathrm{BCD}$ به‌دلیل محاط بودن در نیم‌دایره، قائمه است). حال اگر در تساوی $K = (bc\sin\mathrm{A})/۲$ به‌جای $\sin\mathrm{A}$ مقدارش را بگذاریم، فرمول مطلوب حاصل می‌شود.

برهان قضیه ۱۲.۱۰ در تمرینهای ۲۰ـ۲۸ آورده خواهد شد.

خودآزمایی

کلیه احکامی که در این تمرینها آورده شده‌اند به هندسه هذلولوی مربوط می‌شوند (مگر آنکه خلاف آن صریحاً ذکر شده باشد). کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

(۱) مساحت هر مثلث با کاستی آن متناسب است.

(۲) زاویه توازی $\Pi(x)$ برحسب رادیان توابع هذلولوی و دایره‌ای را با معادله‌ای نظیر $\tanh\ x = \cos \Pi(x)$ به‌هم مربوط می‌سازد.

(۳) در همه مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که تعداد رادیانهای $\measuredangle$ A در آنها ثابت باشد (با نام‌گذاری استاندارد و قائمه در رأس C)، نسبت a/c یکسان است، و سینوس $\measuredangle$ A نامیده می‌شود.

(۴) ی. بویویی صورتی از قانون سینوسها را که در هندسه نتاری معتبر است، کشف کرد.

(۵) طول پاره‌خط x^*، متمم x، به‌گونه‌ای یکتا با فرمول $\Pi(x^*) = \pi/۲ - \Pi(x)$ معین می‌شود.

(۶) معادلاتی که مختصات بلترامی را به مختصات لباچفسکی مربوط می‌سازند چنین‌اند: $x = \tanh\ u$ و $y = \tanh\ v$.

(۷) با نام‌گذاری استاندارد، اگر a بزرگترین ضلع ΔABC باشد، دایره محیطی آن یک دایره است اگر و تنها اگر $\sinh(a/۲) > \sinh(b/۲) + \sinh(c/۲)$.

(۸) نمایش با مختصات وایرشتراس کمک می‌کند تا بیانی را که لامبرت از صفحه هذلولوی به‌عنوان «کره‌ای به شعاع موهومی i» کرده است، معنی داشته باشد.

(۹) خمیدگی صفحه هذلولوی برابر با $۱/k^۲$ است، که در آن $k^۲$ برابرکاستی برحسب رادیان، با مساحت مثلث مساوی است.

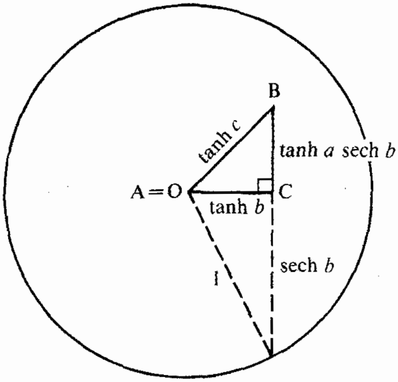
(۱۰) فرمول $\cosh\ c = \cosh\ a \cosh\ b$، مشابه قضیه فیثاغورسی (برای یک مثلث قائم‌الزویه، قائمه در C، با نام‌گذاری استاندارد، و $k = ۱$) است.

تمرین

۱. صحت همه اتحادهای مربوط به توابع هذلولوی را که در صفحه ۴۱۸ آمده است تحقیق کنید.

۲. درستی فرمولهای (۵) و (۶) و (۷) را، که در آنها Π توابع هذلولوی و دایره‌ای را به‌هم مربوط می‌کند، تحقیق کنید. نمودار تابع $\Pi(x)$ را رسم کنید.

۳. اثبات قضیه ۳.۱۰ مستلزم برهان پیچیده‌ای با استفاده از مدلهای پوانکاره است. با استفاده از مدل کلاین برهان دیگری برای آن بیاورید. (راهنمایی: به‌موجب توضیح پایانی فصل ۷، می‌توانید فرض کنید $\mathrm{A} = \mathrm{O}$ مرکز مطلق است. نشان دهید $\cos \mathrm{A} = \overline{\mathrm{AC}}/\overline{\mathrm{AB}}$ و $\sin \mathrm{A} = \overline{\mathrm{BC}}/\overline{\mathrm{AB}}$ (طولهای اقلیدسی) $\overline{\mathrm{AB}} = \tanh\ c$ (که $c = d'(\mathrm{AB})$ طول کلاینی)، $\overline{\mathrm{AC}} = \tanh\ b$ و



شکل ۲۹.۱۰

$\overline{\mathrm{BC}} = (1 - \overline{\mathrm{AC}^2})^{1/2} \tanh\ a = \tanh\ a/\cosh\ b$ (از قضیه ۴.۷ استفاده کنید). مسئله را با نتیجه‌گیری فرمول $\cosh\ c = \cosh\ a \cosh\ b$ از قضیه فیثاغورس به پایان برسانید (شکل ۲۹.۱۰).

۴. قضیه ۴.۱۰ را ثابت کنید.

۵. مرحله ۲ در اثبات قضیه ۶.۱۰ را تحقیق کنید.

۶. فرمولهای (۱۸) تا (۲۱) را برای طولهای متمم تحقیق، و تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^* = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

۷. احکام مربوط به مختصات وایرشتراس در قضیه ۱۰.۱۰ را اثبات کنید. (راهنمایی: معادله یک خط در مختصات وایرشتراس را از معادله یک خط در مختصات بلترامی نتیجه بگیرید.)

۸. فرمولهای (۲۸) و (۲۹) در برهان قضیه ۱۰.۱۰ را تحقیق کرده، و از آنها برای وفق دادن فرمول فاصله در تمرین ک‌ـ۱۴، فصل ۷، استفاده کنید.

۹. لم‌های ۱.۱۰ و ۲.۱۰ را تعمیم دهید، بدین ترتیب که نشان دهید اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) نقطه‌هایی متمایز در مدل کلاین باشند، مختصات وسط پاره‌خط واصل بین آنها و معادله عمودمنصف این پاره‌خط به‌ترتیب چنین می‌شوند:

$$\left(\frac{x_1 s_2 + x_2 s_1}{s_1 + s_2}, \frac{y_1 s_2 + y_2 s_1}{s_1 + s_2}\right)$$

$$(x_1 s_2 - x_2 s_1)x + (y_1 s_2 - y_2 s_1)y + (s_1 - s_2) = 0$$

که درآن $s_i = \sqrt{۱ - x_i^۲ - y_i^۲}$، $i = ۱, ۲$. (راهنمایی: از لم ۲.۱۰ برای پیدا کردن نقطه Q محل تلاقی عمودمنصفهای $OP_۱$ و $OP_۲$ در صفحه دکارتی استفاده کنید. سپس با وصل کردن Q به قطب خط $\overleftrightarrow{P_۱P_۲}$، عمودمنصف $P_۱P_۲$ به‌دست می‌آید، که محل تلاقیش با $P_۱P_۲$، نقطه وسط خواهد بود.)

۱۰. نتیجه قضیه ۱۱.۱۰ را ثابت کنید.

۱۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه، قائمه در C، ثابت کنید:

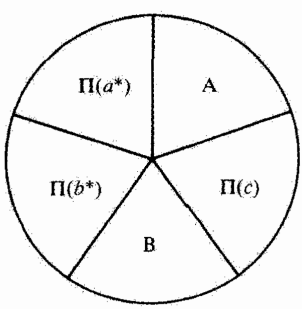
$$\left(\frac{b}{۲}\right)^* \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} \frac{a}{۲} \iff \left.\begin{matrix} \text{دایره محیطی یک دایره است} \\ \text{دایره محیطی یک دایره حدی است} \\ \text{دایره محیطی یک خم هم‌فاصله است} \end{matrix}\right\}$$

(راهنمایی: در ملاک دوم قضیه ۱۱.۱۰، $\sphericalangle C$ را بزرگترین زاویه بگیرید، و از این واقعیت که Π تابعی است نزولی استفاده کنید، یا مستقیماً از تعریف طولهای متمم کمک بگیرید.)

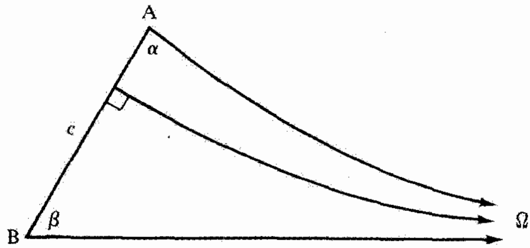
۱۲. قاعده آ. پ. کتلنیکوف را برای به‌خاطر سپردن روابط بین اجزای یک مثلث قائم‌الزاویه، قائمه در C با نامگذاری استاندارد، تحقیق کنید (x^* معرف طول متمم x است): در شکل ۳۰.۱۰، سینوس هر زاویه مساوی است با حاصل‌ضرب تانژانتهای دو زاویه مجاور به این زاویه، و مساوی است با حاصل‌ضرب کسینوسهای دو زاویه مقابل به این زاویه. مثلاً

$$\sin\ A = \tan\Pi(a^*)\tan\Pi(c) = \cos\Pi(b^*)\cos\ B$$

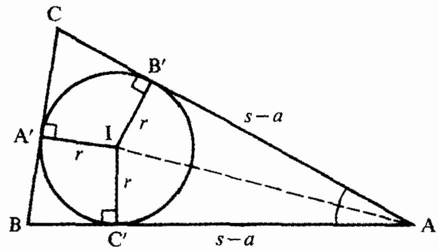
(این قاعده مشابه هذلولوی قاعده جان نپیر است که در ۱۶۱۴ برای مثلثات مثلث قائم‌الزاویه در روی کره‌ای به شعاع واحد، در فضای اقلیدسی عرضه کرده است. برای قاعده نپیر، از a، b، A'،



شکل ۳۰.۱۰



شکل ۳۱.۱۰



شکل ۳۲.۱۰

c'، و B' به‌صورت چرخشی استفاده کنید. در اینجا A' معرف زاویه متمم $\measuredangle A$ و $c' = \pi/۲ - c$ است. ی. بویویی و لباچفسکی کشف کردند که مثلثات کروی در فضای هذلولوی، کاملاً مثل مثلثات فضای اقلیدسی است.)

۱۳. در هندسه اقلیدسی، هر دایره می‌تواند در مثلثی محاط شود (مماسهای مرسوم بر سه نقطه غیرمشخص از دایره یکدیگر را می‌برند و تشکیل یک مثلث می‌دهند). نشان دهید که در هندسه هذلولوی (با $k = ۱$)، قطر دایره محاطی یک مثلث باید کمتر از $\ln ۳$ باشد. (راهنمایی: در شکل ۳۲.۱۰، نشان دهید که $(\measuredangle AIB')^r + (\measuredangle BIC')^r + (\measuredangle CIA')^r = \pi$، و نشان دهید هر یک از این سه زاویه از $\Pi(r)$ کمتر است؛ سپس از فرمول بویویی-لباچفسکی برای پیدا کردن xی استفاده کنید که $\Pi(x) = \pi/۳$.)

۱۴. نشان دهید که (با $k = ۱$) هر مثلث سه‌مجانبی یک دایره محاطی دارد که قطر آن برابر با $\ln ۳$ است (تمرین ک-۱۳، فصل ۷). نشان دهید که مساحت این دایره برابر با

$$۲\pi\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}} - ۱\right)$$

و محیط آن برابر با $۲\pi/\sqrt{۳}$ است (از قضایای ۵.۱۰ و ۷.۱۰ استفاده کنید).

۱۵. نشان دهید که به‌ازای هر سه عدد مثبت α، β، و γ به قسمی که $\alpha+\beta+\gamma>\pi$، مثلثی وجود دارد که این سه عدد زوایای آن برحسب رادیان هستند. (راهنمایی: از قضیه ۴.۱۰ استفاده کنید.)

۱۶. در هر مثلث تک‌مجانبی $\mathrm{AB}\Omega$، اگر $c=\overline{\mathrm{AB}}$، آنگاه

$$\cosh\ c=\frac{\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B}+۱}{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}}$$

(راهنمایی: فرض کنید C در فرمول (۱۵)، قضیه ۴.۱۰، به Ω نزدیک شود. برای برهان بدون استفاده از پیوستگی، توجه کنید که وقتی $\measuredangle \mathrm{A}$ و $\measuredangle \mathrm{B}$ حاده هستند داریم:

$$c=\Pi^{-۱}(\alpha)+\Pi^{-۱}(\beta)$$

که در اینجا $\alpha=(\measuredangle \mathrm{A})^r$ و $\beta=(\measuredangle \mathrm{B})^r$ (شکل ۳۱.۱۰)). نشان دهید که تعمیم فرمول بویویی-لباچفسکی، هنگامی که $\beta<\pi/۲$ چنین است

$$\tan\frac{\alpha}{۲}=e^{-c}\cot\frac{\beta}{۲}$$

۱۷. معادله‌ای بنویسید که نشان دهد چگونه در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، ضلع و زاویه یکدیگر را معین می‌کنند.

۱۸. (الف) در هر مثلث قائم‌الزاویه، با نام‌گذاری استاندارد و قائمه در C، نشان دهید $\tan\ \mathrm{A}=\tanh\ a/\sinh\ b$.

(ب) نتیجه بگیرید که در یک مثلث متساوی‌الساقین $\Delta\mathrm{ABC}$ به قاعده b (مقابل به رأس B) و ساق a و زاویه A مجاور به ساق، داریم

$$\tanh\ a\cos\frac{\mathrm{B}}{۲}=\tan\ \mathrm{A}\sinh\frac{b}{۲}$$

$$\sin\ \mathrm{A}\cosh\frac{b}{۲}=\cos\frac{\mathrm{B}}{۲}$$

(راهنمایی: ارتفاع وارد بر قاعده را رسم کنید.)

۱۹. در مثلث قائم‌الزاویه $\Delta\mathrm{ABC}$، قائمه در C (و نام‌گذاری استاندارد)، نشان دهید

$$\sin\ K=\frac{\sinh\ a\ \sinh\ b}{۱+\cosh\ a\ \cosh\ b}$$

در آن، «کاستی $\Delta\mathrm{ABC}$ = مساحت مثلث = K». (راهنمایی: از قضیه ۳.۱۰ و اتحادهای مثلثاتی استفاده کنید.)

۲۰. مثلث $\Delta\mathrm{ABC}$ داده شده است، اگر h طول ارتفاع مرسوم از رأس B باشد، نشان دهید (با نامگذاری استاندارد) حاصلضرب $\sinh\ b \sinh\ h$ به اینکه کدامین رأس را B بگیریم بستگی ندارد؛ این حکم مشابه هذلولوی قضیه اقلیدسی مربوط به ثابت بودن bh است. (راهنمایی: نشان دهید که $\sinh\ b\sinh\ h = S\sinh\ a\sinh\ b\sinh\ c$، که در آن S نسبت ثابتی است که در قانون سینوسها ظاهر می‌شود.) تمرینهای بعد مبین ارزش هندسی مقدار ثابت $\frac{1}{2}\sinh\ b\sinh h$ است که با H (به احترام هرون، ریاضیدان یونان باستان) نشان داده می‌شود. بنابر راهنمایی فوق

$$2H = \sin\ \mathrm{C}\sinh\ a\ \sinh\ b = \sin\ \mathrm{B}\sinh\ c\sinh\ a = \sin\ \mathrm{A}\sinh\ b\sinh\ c$$

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۸، s معرف نصف محیط $\Delta\mathrm{ABC}$ یعنی برابر $(a+b+c)/2$ است.

۲۱. نشان دهید (با نامگذاری استاندارد) که:

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sinh(s-b)\sinh(s-c)}{\sinh\ b\sinh\ c}}$$

$$\cos\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sinh\ s\sinh\ (s-a)}{\sinh\ b\ \sinh\ c}}$$

(راهنمایی: دو طرف تساویها را به‌توان ۲ برسانید، و از اتحادها و قضیه ۴.۱۰ استفاده کنید.)

۲۲. نشان دهید: $H = \sqrt{\sinh\ s\sinh(s-a)\sinh(s-b)\sinh(s-c)}$ (راهنمایی: از اتحاد $\sin\mathrm{A} = 2\sin(\mathrm{A}/2)\cos(\mathrm{A}/2)$ استفاده کنید.)

۲۳. مقدار H، که آن را هرون نیز می‌نامند، «از لحاظ بی‌نهایت کوچکی» مساوی است با $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. نشان دهید که در هندسه اقلیدسی، این مقدار مساوی با مساحت $\Delta\mathrm{ABC}$ است. (راهنمایی: ←آشنایی با هندسه، کاکستر، ۱۹۶۹، ص ۱۲.)

۲۴. فرض می‌کنیم r شعاع دایره محاطی $\Delta\mathrm{ABC}$، و نقاط A'، B'، و C' به‌ترتیب نقاط تماس آن با اضلاع BC، CA، و AB باشند. نشان دهید که در هندسه نتاری، $\overline{\mathrm{AB}'} = s-a = \overline{\mathrm{AC}'}$،$\overline{\mathrm{BC}'} = s-b = \overline{\mathrm{BA}'}$،$\overline{\mathrm{CA}'} = s-c = \overline{\mathrm{CB}'}$. (شکل ۳۲.۱۰).

(راهنمایی: ← به‌رسم دایره محاطی داخلی، تمرین ۱۶، فصل ۶.)

۲۵. از تمرین ۲۴ نتیجه بگیرید که در هندسه هذلولوی

$$\tanh\ r\sinh\ s = H$$

در صورتی که در هندسه اقلیدسی rs مساوی مساحت $\Delta \mathrm{ABC}$ است. (راهنمایی: در هندسه هذلولوی، برای محاسبه $\tan(\mathrm{A}/۲)\sinh(s-a)$، از تمرینهای ۱۸، ۲۱، ۲۲، و ۲۴ استفاده کنید؛ در هندسه اقلیدسی، مساحت مثلثهای IAB، IBC، و ICA را در شکل ۳۲.۱۰ با هم جمع کنید.)

۲۶. معادله‌های گاوس (زیر) را ثابت کنید:

$$\cosh \frac{۱}{۲}c \sin \frac{۱}{۲}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \cosh \frac{۱}{۲}(a-b) \cos \frac{۱}{۲}\mathrm{C}$$

$$\cosh \frac{۱}{۲}c \cos \frac{۱}{۲}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \cosh \frac{۱}{۲}(a+b) \sin \frac{۱}{۲}\mathrm{C}$$

$$\sinh \frac{۱}{۲}c \sin \frac{۱}{۲}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \sinh \frac{۱}{۲}(a-b) \cos \frac{۱}{۲}\mathrm{C}$$

$$\sinh \frac{۱}{۲}c \cos \frac{۱}{۲}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \sinh \frac{۱}{۲}(a+b) \sin \frac{۱}{۲}\mathrm{C}$$

(راهنمایی: از اتحادهایی نظیر

$$\sinh\ x + \sinh\ y = ۲\ \sinh \frac{۱}{۲}(x+y) \cosh \frac{۱}{۲}(x-y)$$

و اتحادهای مشابه برای توابع دایره‌ای استفاده کنید، سپس فرمولهای مربوط به نصف زاویه در تمرین ۲۱ را به‌کار ببرید.)

۲۷. نشان دهید که فرمول

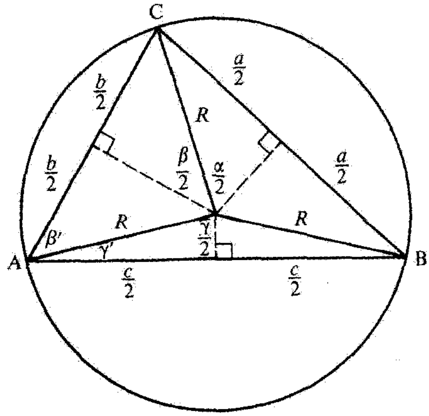
$$\sin \frac{K}{۲} = \frac{H}{۲ \cosh \frac{a}{۲} \cosh \frac{b}{۲} \cosh \frac{c}{۲}}$$

که در آن: کاستی $\Delta \mathrm{ABC}$ = مساحت مثلث = K دستور هذلولوی مشابه با مساحت اقلیدسی H در تمرین ۲۳ است. (راهنمایی: از معادله‌های گاوس، اتحاد $\sin K/۲ = \cos \frac{۱}{۲}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})$ و اتحادهای مثلثاتی دیگر و فرمول $H = \frac{۱}{۲} \sin\ \mathrm{C} \sinh\ a \sinh\ b$ استفاده کنید.)

۲۸. هرگاه مثلث $\Delta \mathrm{ABC}$ دایره‌ای محیطی به شعاع R داشته باشد، نشان دهید:

$$\tanh\ R = \frac{۲ \sinh \frac{a}{۲} \sinh \frac{b}{۲} \sinh \frac{c}{۲}}{H}$$

که به موجب تمرین ۲۷، با فرمول (۳۰) در قضیه ۱۲.۱۰ هم‌ارز است. (راهنمایی: در شکل ۳۳.۱۰، $\sin \mathrm{A} = \sin(\beta'+\gamma')$ و $H = (\sin \mathrm{A} \sinh b \sinh c)/۲$. برای تعیین $\cos \gamma'$ و $\cos \beta'$ از



شکل ۳۳.۱۰

قضیه ۳.۱۰ استفاده کنید و برای تعیین $\sin\beta'$ و $\sin\gamma'$ از تمرین ۱۸، تا به کمک اتحادها به‌فرمول

$$H \ \tanh\ R = \left[\cos\frac{\gamma}{۲}\sinh\frac{b}{۲} + \cos\frac{\beta}{۲}\sinh\frac{c}{۲}\right] ۲\sinh\frac{b}{۲}\sinh\frac{c}{۲}$$

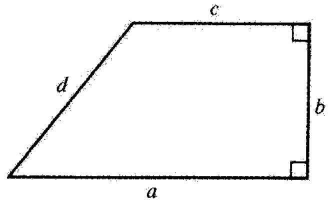
برسید. بالاخره با استفاده از قضیه ۳.۱۰ عبارتهایی را برای $\sinh\ a/۲$، $\sinh\ b/۲$، و $\sinh\ c/۲$ نتیجه بگیرید و در فرمول $\sin(\gamma+\beta)/۲ = \sin\alpha/۲$ بگذارید تا نشان دهید که عبارت داخل کروشه با $\sinh\alpha/۲$ مساوی است.)

۲۹. فرض می‌کنیم $\Omega\Sigma\Lambda$ یک مثلث سه‌مجانبی و $\Delta\mathrm{ABC}$ مثلث پادکی آن است که از اتصال پای عمودهای مرسوم از هر یک از رأسهای آرمانی بر اضلاع مقابل تشکیل شده است. چون بنابر گزاره ۱۶.۹ (ج)، مثلثهای سه‌مجانبی با یکدیگر قابل انطباق‌اند، مثلث $\Delta\mathrm{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید که در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، θ، یعنی اندازه هر زاویه از مثلث $\Delta\mathrm{ABC}$ برحسب رادیان، از تساویهای $\tan\frac{۱}{۲}\theta = ۱/۲$، $\tan\theta = ۴/۳$، $\sin\theta = ۴/۵$ و $\cos\theta = ۳/۵$ و c، یعنی طول یک ضلع با $\cosh\ c = \frac{۳}{۲}$ تعیین می‌شود. از اینجا نتیجه بگیرید که دایره‌ای که شعاعش یک ضلع $\Delta\mathrm{ABC}$ باشد مساحتی مساوی π دارد. سپس نشان دهید که هرون H، شعاع دایره محیطی R، و شعاع دایره محاطی r از $\Delta\mathrm{ABC}$ با روابط

$$H = \frac{۱}{۲}$$

$$\tanh\ R = \frac{۱}{۲}$$

$$\tanh\ r = \frac{۱}{۴}$$



شکل ۳۴.۱۰

داده می‌شوند. (راهنمایی: راههای زیادی برای دستیابی به این نتایج، با استفاده از تمرینات و مدلهای قبلی، وجود دارد. در مدل نیم‌صفحه بالایی پوانکاره، اگر بگیریم $\Omega = -۱$ و $\Sigma = \infty$ و $\Lambda = ۱$، آنگاه خواهیم داشت $A = i$، $B = ۱ + ۲i$، و $C = -۱ + ۲i$. نشان دهید $\overleftrightarrow{BC}$ نیم‌دایره بالایی $x^۲ + y^۲ = ۵$ و $\overleftrightarrow{AB}$ نیم‌دایره بالایی $(x - ۲)^۲ + y^۲ = ۵$، و مماسهای بر این دوایر در B به‌ترتیب دارای شیب $-۱/۲$ و $۱/۲$ هستند.

این نکات و فرمولهای زوایای مضاعف، احکامی درباره θ در اختیار ما قرار می‌دهند. در این صورت از تمرینهای ۱۸ (الف)، ۲۰، ۲۵، و ۲۸ یا از مدل کلاین می‌توان استفاده کرد. $\Omega\Sigma\Lambda$ را چنان بگیرید که مرکز دایره محاطی ΔABC به‌صورت مبدأ درآید.)

تمرینهای ۳۰ تا ۳۳ فرمولهای مثلثاتی بیشتری را نشان می‌دهند، که ویلیام ترستون هنگام کاربرد هندسه هذلولوی در توپولوژی از آنها استفاده کرده است (کاسون و بلایلر، ۱۹۸۸).

۳۰. یک چهارضلعی با دو زاویه قائمه مجاورکه نظیر شکل ۳۴.۱۰ نامگذاری‌شده داده شده است. ثابت کنید

$$\cosh\ d = \cosh\ a \cosh\ b \cosh\ c - \sinh\ a \sinh\ c$$

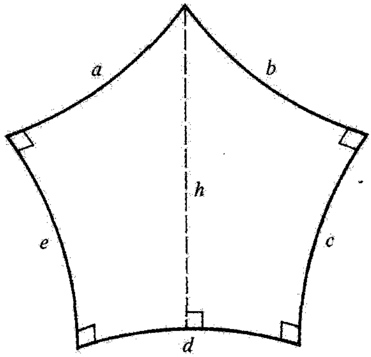
(راهنمایی: برهان قضیه ۸.۱۰ را دنبال کنید.)

۳۱. یک پنج ضلعی که دست‌کم چهار زاویه قائمه دارد و مانند شکل ۳۵.۱۰ نامگذاری‌شده داده شده است. ثابت کنید

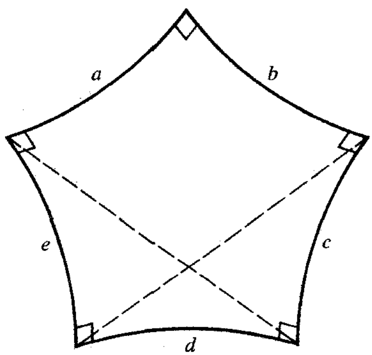
$$\sinh\ e \cosh\ a = \sinh\ c \cosh\ b$$

(راهنمایی: ارتفاع h را از رأس پنجم بر ضلع روبه‌رو فرود آورید و نتیجه قضیه ۸.۱۰ را برای دو چهارضلعی لامبرت حاصل به‌کار برید.)

۳۲. یک پنج‌ضلعی با پنج زاویه قائمه که مانند شکل ۳۶.۱۰ نامگذاری‌شده داده شده است



شکل ۳۵.۱۰



شکل ۳۶.۱۰

(در تمرین ک‌ـ۵، فصل ۷، نشان دادید که یک چنین پنج‌ضلعی وجود دارد). ثابت کنید:

$$\cosh\ d = \sinh\ a \sinh\ b = \coth\ c \coth\ e$$

(راهنمایی: اینک یک روش؛ شاید شما بتوانید روش ساده‌تری بیابید: ابتدا تمرین ۳۱ را پنج بار برای همه ترکیبات چهارضلع متوالی به کار برید؛ سپس با در نظر گرفتن خطهای شکسته در شکل ۳۶.۱۰، تمرین ۳۰، و قضیه ۳.۱۰ معادله‌های

$$\cosh\ a \cosh\ b \left(\frac{\cosh\ c}{\cosh\ e}\right) - \sinh\ a \left(\frac{\sinh\ c}{\cosh\ e}\right)$$
$$= \cosh\ d = \cosh\ a \cosh\ b \left(\frac{\cosh\ e}{\cosh\ c}\right) - \sinh\ b \left(\frac{\sinh\ e}{\cosh\ c}\right)$$

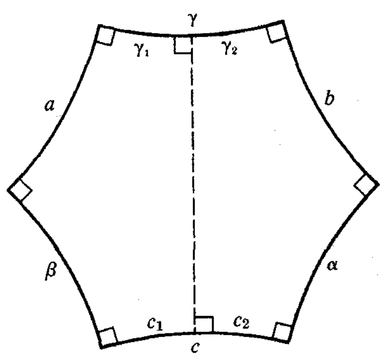
را نتیجه بگیرید. به‌جای جملات داخل پرانتز، مقادیر آنها را از چهار معادله قبلی بگذارید و پس از اندکی محاسبات جبری، با استفاده از اتحاد $\cosh^۲ x = ۱ + \sinh^۲ x$ به نتیجه مطلوب دست خواهید یافت.)

۳۳. در یک شش ضلعی با شش زاویه قائمه (دوباره تمرین ک-۵، فصل ۷، را مرور کنید)، که مانند شکل ۳۷.۱۰ نامگذاری شده است، قوانین جالب زیر را که مشابه قوانین سینوس و کسینوس در قضیه ۴.۱۰ برای مثلث هستند ثابت کنید:

$$\frac{\sinh\ a}{\sinh\ \alpha} = \frac{\sinh\ b}{\sinh\ \beta} = \frac{\sinh\ c}{\sinh\ \gamma}$$

$$\cosh\ a = \frac{\cosh\ \beta \cosh\ \gamma + \cosh\ \alpha}{\sinh\ \beta \sinh\ \gamma}$$

(راهنمایی: ابتدا نشان دهید که پاره‌خط عمود مشترک به طول h، چنان که نشان داده‌شده، در داخل شش‌ضلعی قرار می‌گیرد؛ سپس تمرین ۳۲ را برای دو پنج‌ضلعی که هر یک پنج زاویه قائمه دارد به‌کار برید تا دو عبارت برای $\cosh\ h$ و «قانون سینوسها» به‌دست آورید؛ برای «قانون کسینوسها» تمرین ۳۲ را به‌کار برید تا عبارتهایی برای $\cosh a$، $\cosh \beta$، $\cosh \alpha$، و $\cosh h$ به‌دست آورید. از تمرین ۳۱ برای حذف $\sinh\ c_۱$، و از این اتحاد برای $\sinh\ \gamma_۲ = \sinh(\gamma - \gamma_۱)$ استفاده کنید.)



شکل ۳۷.۱۰

پیوست الف

هندسه بیضوی و ریمانی

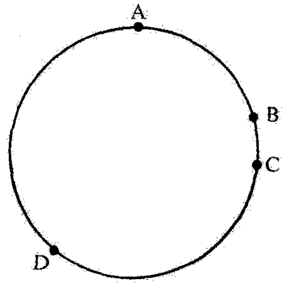
رساله‌ای که آقای ریمان عرضه کرده سندی است قاطع ... بر وجود ذهنی فعال، خلاق، و واقعاً ریاضی، حاکی از قدرت تفکری سازنده و تحسین برانگیز.

ک. ف. گاوس

هندسه بیضوی

در هندسه اقلیدسی از یک نقطه P ناواقع بر l می‌توان دقیقاً یک خط به موازات l رسم کرد. در هندسه هذلولوی بیش از یک خط می‌توان رسم کرد. هندسه سومی را می‌توان مورد مطالعه قرار داد که در آن از نقطه P اصلاً نمی‌توان خطی به موازات خط l رسم کرد، یعنی هندسه‌ای که در آن خطهای موازی وجود ندارد.

با وجود این، اگر موضوع اخیر را به‌عنوان بنداشت جدید توازی به‌جای بنداشتهای توازی دیگر اضافه کنیم، دستگاهی که به‌دست می‌آوریم ناسازگار است. در نتیجه ۲، قضیه ۱.۴، ثابت کرده بودیم که در هندسه نتاری خطوط موازی وجود دارند و هرگاه این بنداشت توازی را اضافه کنیم به تناقض برمی‌خوریم.



شکل الف. ۱

برای دوری جستن از این تناقص، باید برخی از بنداشتها را تغییر دهیم. وقتی به سطح کره بیندیشیم و «خط» را «دایره عظیمه» تلقی کنیم، می‌توانیم چگونگی تغییرات مورد نیاز را دریابیم. در آن صورت، واقعاً خطهای موازی وجود ندارند. ولی چیزهای دیگری هم تغییر می‌کنند. دیگر نمی‌توان از یک نقطه B «بین» دو نقطه A و C واقع بر یک دایره صحبت کرد. پس همه بنداشتهای میان‌بود باید حذف شوند و به‌جای آنها هفت بنداشت «جداسازی» قرار گیرد. در شکل الف.۱، نقاط A و C، نقاط B و D دایره را از هم جدا می‌کنند زیرا شما نمی‌توانید از B به D برسید بی‌آنکه از A یا C بگذرید.

اگر رابطه تعریف‌نشده «A و C نقاط B و D را از یکدیگر جدا می‌کنند» را با نماد $(A, C|B, D)$ نشان دهیم، بنداشتهای جداسازی چنین خواهند شد:

بنداشت جداسازی ۱. اگر $(A, B|C, D)$، آنگاه A، B، C، و D متمایز و هم‌خط‌اند.

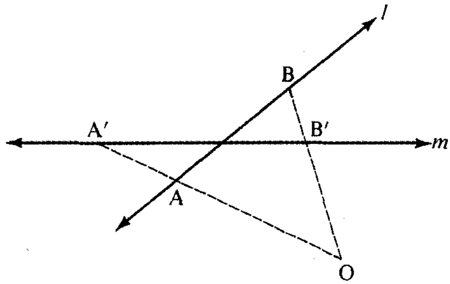
بنداشت جداسازی ۲. اگر $(A, B|C, D)$، آنگاه $(C, D|A, B)$ و $(B, A|C, D)$.

بنداشت جداسازی ۳. اگر $(A, B|C, D)$، آنگاه چنین نیست که $(A, C|B, D)$.

بنداشت جداسازی ۴. اگر نقاط A، B، C، و D هم‌خط و متمایز باشند، آنگاه $(A, B|C, D)$ یا $(A, C|B, D)$ یا $(A, D|B, C)$.

بنداشت جداسازی ۵. اگر نقاط A، B، و C هم‌خط و متمایز باشند، آنگاه نقطه‌ای چون D وجود دارد چنان‌که $(A, B|C, D)$.

بنداشت جداسازی ۶. به‌ازای هر پنج نقطه هم‌خط متمایز A، B، C، D، و E اگر $(A, B|D, E)$، آنگاه $(A, B|C, D)$ یا $(A, B|C, E)$.



شکل الف. ۲

قبل از بیان آخرین بنداشت، به مفهوم نگاشت منظری از یک خط بر خط دیگر نیاز داریم (از فصل ۷). فرض می‌کنیم l و m دوخط نامشخص باشند و O نقطه‌ای باشد که بر هیچ‌یک از آنها واقع نیست. به‌ازای هر نقطه A واقع بر l، خط $\overleftrightarrow{OA}$ خط m را در نقطه یکتای A' می‌بُرد (شکل الف.۲؛ ویژگی توازی بیضوی را به یاد آورید). تناظر یک‌به‌یکی که به‌ازای هر A بر l، نقطه A' را به A اختصاص دهد نگاشت منظری از l بر m به مرکز تصویر O نامیده می‌شود.

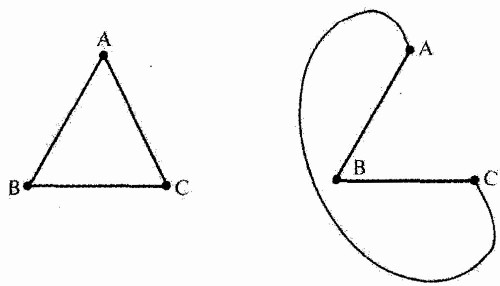
بنداشت جداسازی ۷. نگاشت منظری، ویژگی جداسازی را حفظ می‌کند، یعنی هرگاه A، B، C، و D بر l هم‌خط باشند و داشته باشیم $(A, B|C, D)$، آنگاه اگر A'، B'، C'، و D' نقاط متناظر آنها بر m بر اثر نگاشت منظری باشند، خواهیم داشت $(A', B'|C', D')$.

بدون مفهوم میان‌بود مجبوریم تمامی هندسه را با کمال دقت با استفاده از این رابطه دوباره تنظیم کنیم. مثلاً عبارت «پاره‌خط AB متشکل از نقاط A و B و همه نقاطی است که بین A و B واقع‌اند» روی یک دایره معنی ندارد. می‌توانیم تنها از پاره‌خط ABC که با سه نقطه هم‌خط مشخص شده است صحبت کنیم که متشکل از نقاط A، B، و C و همه نقاطی است که از نقطه B توسط A و C از هم جدا نشده‌اند.

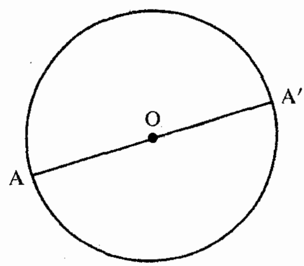
همچنین مفهوم یک مثلث را باید دوباره تعریف کنیم، زیرا اضلاع آن دیگر با رأسهایش مشخص نمی‌شوند (شکل الف.۳).

وقتی یک‌بار برای همیشه این مفاهیم تعریف شدند، بنداشتهای قابلیت انطباق و پیوستگی همه معنا پیدا می‌کنند و می‌توانند دست نخورده بمانند.

هنوز یک مشکل دیگر با بنداشت وقوع ۱، که می‌گوید دو نقطه بر بیش از یک خط واقع نیستند، وجود دارد. این حکم برای دوایر عظیمه کره غلط است، زیرا نقاط متقاطر (نظیر قطبها) بر بی‌نهایت خط واقع‌اند.



شکل الف. ۳ دو «مثلث» متفاوت با رأسهای یکسان.

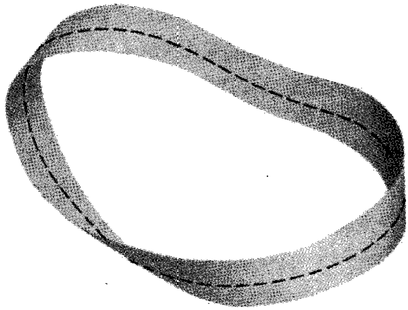


شکل الف. ۴ A و A′ یکی گرفته شده‌اند.

کلاین این مشکل را با یکی گرفتن نقاط متقاطر از بین برده است. یعنی همان‌گونه که «خط» را در این مدل «دایره عظیمه» تعبیر کردیم، «نقطه» را هم به معنی «یک جفت نقطه متقاطر» می‌گیریم (شکل الف.۴). این بدان معنی است که در عالم خیال دو نقطه متقاطر را چنان به یکدیگر چسبانده‌ایم که به یک نقطه تنها بدل شده‌اند. چنان‌که می‌توانید حدس بزنید، می‌توان ثابت کرد که این چسباندن نمی‌تواند در فضای اقلیدسی سه‌بعدی عملی باشد. ولی در اینجا می‌توانیم نقطه‌های متقاطر را در ذهن خود یکی بگیریم و هرگاه از یکی از آنها به دیگری می‌رسیم، پیش خود چنین فکر کنیم که دوباره به نقطه اول بازگشته‌ایم.

از یکی گرفتن این نقاط یک ویژگی جالب دیگر کشف خواهد شد: یک خط دیگر صفحه را به دو قسمت تقسیم نمی‌کند، زیرا می‌توانید در واقع با گذشتن از یک نقطه داده شده به نقطه متقاطرش، که اکنون با خودش یکی گرفته شده و مطابق معمول در طرف دیگر دایره بوده است، از روی یک دایره عظیمه «بجهید». اگر نواری از این صفحه ببریم، شبیه نوار موبیوس خواهد شد که تنها یک طرف دارد (شکل الف. ۵). نام فنی برای این ویژگی «یک طرفه بودن»، سوناپذیری، است.

خلاصه کنیم: بنداشتهای هندسه بیضوی در صفحه از همان بنداشتهای وقوع، قابلیت انطباق،



شکل الف. ۵

و پیوستگی هندسه نتاری (با تعاریف جدیدی از پاره‌خط، مثلث، و غیره) تشکیل شده‌اند. به‌جای بنداشتهای میان‌بود، بنداشتهای جداسازی گذاشته شده‌اند. به‌جای بنداشت توازی بنداشتی گذاشته شده است که می‌گوید هیچ دو خط موازی وجود ندارد. مدلی که نشان می‌دهد هندسه بیضوی به همان سازگاری هندسه اقلیدسی است، متشکل از دوایر عظیمه بر کره‌ای است که نقاط متقاطرشان یکی گرفته شده‌اند.[1]

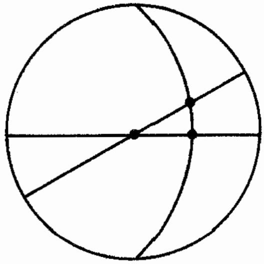
چنان‌که ممکن است از این مدل انتظار داشته باشید، این یک قضیه در هندسه بیضوی است که خطها طول متناهی دارند. به‌علاوه، همه خطوط عمود بر یک خط l متقارب‌اند، نه موازی، یعنی در یک نقطه مشترک‌اند که قطب l نامیده می‌شود. در این مدل مثلاً قطب خط استوا قطب شمال است (یا قطب جنوب، که باز همان است).

مدل دیگر برای هندسه بیضوی مسطحه (منسوب به کلاین)، مدل همدیس است که مانند مدل پوانکاره برای هندسه هذلولوی، زاویه‌ها در آن دقیقاً توسط زاویه‌های اقلیدسی نشان داده می‌شوند. «نقطه‌ها» توسط نقطه‌های اقلیدسی درون دایره یکه در صفحه اقلیدسی و همچنین توسط جفت نقاط متقاطر بر این دایره مشخص می‌شوند. «خطها»، قطرهای دایره یکه یا کمانهایی از دایره‌های اقلیدسی هستند که دایره یکه را در دو سر قطرش می‌برند (کاکستر، ۱۹۶۸، بخش ۶.۱۴). این نمایش به روشنی نشان می‌دهد که در هندسه بیضوی مجموع زوایای یک مثلث از 180° بیشتر است (شکل الف.۶).

هندسه بیضوی زمانی جالبتر می‌شود که شما از فضای دوبعدی به فضای سه‌بعدی بروید. در سه‌بعدی، سوپذیری به حال خود بر می‌گردد و نوع جدیدی از توازی پیدا می‌شود. دو خط را

---

۱. هندسه کره اغلب به‌طور گمراه‌کننده «هندسه بیضوی مضاعف» (double elliptic geometry) نامیده می‌شود. برای مطالعه یک روش بنداشتی از هندسه بیضوی، ←بورسوک و اسمیلیو ـ م.



شکل الف. ۶

موازی کلیفوردی[1] می‌نامند هرگاه از یکدیگر به یک فاصله باشند. خطها به وسیله خانواده‌ای پیوسته از عمودمشترکهای با طول یکسان این خطها به یکدیگر وصل می‌شوند. این خطها نمی‌توانند در یک صفحه واقع باشند (در یک صفحه بیضوی دو خط باید متقاطع باشند)، پس متنافرند. به‌علاوه، در حالت کلی، در فضای بیضوی به‌ازای هر نقطه P ناواقع بر l، درست دو خط وجود دارند که با l موازی کلیفوردی هستند و موازی کلیفوردی راست و چپ l گذرنده از P نامیده می‌شوند. به این دلیل گفتیم «در حالت کلی» که یک خط ویژه l^* به نام قطبی مطلق l وجود دارد: اگر P بر l^* باشد، تنها یک خط موازی کلیفوردی با l، گذرنده از P وجود دارد که همان l^* است. (طبیعی است که تجسم این امر دشوار است! ← کاکستر، ۱۹۶۸، فصل ۷.)

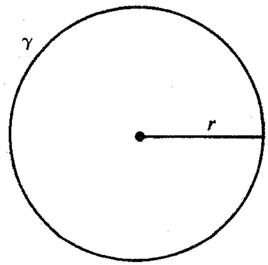
فضای بیضوی، متناهی ولی بیکران است ــ متناهی است زیرا همه خطهای آن طول متناهی دارند و مثل دایره هستند، و بیکران است زیرا که کرانی برای آن موجود نیست، درست نظیر سطح یک کره که هیچ کرانی برای آن وجود ندارد. در جهانی که هندسه‌اش چنین باشد پرتوهای نوری در امتداد خطهای بیضوی حرکت می‌کنند و می‌توانید تصور کنید که اگر با یک تلسکوپ بسیار قوی نگاه کنید پشت سر خود را در آن خواهید دید! (ولو اینکه ناگزیر باشید میلیونها سال صبر کنید تا نور دور بزند و دوباره به‌خود شما بازگردد.)

هندسه ریمانی

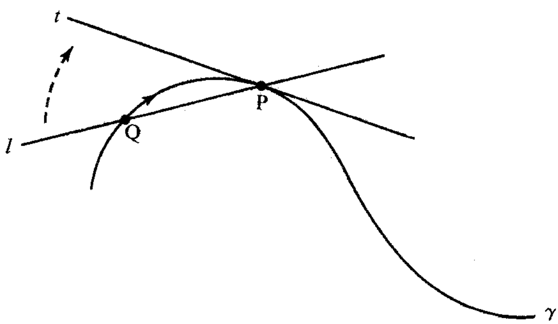
بیان دقیق موضوع هندسه ریمانی بدون کمک گرفتن از حساب دیفرانسیل و انتگرال ممکن نیست. لذا در این پیوست تنها می‌توانیم به‌گونه‌ای بسیار تقریبی، تصوری شهودی از آن به‌دست دهیم. یک مفهوم اساسی که سعی داریم در اینجا روشن کنیم خمیدگی است.

خط و دایره در میان شکلهای یک‌بعدی و هموار صفحه اقلیدسی، ساده‌ترین شکلها هستند.

1. *Clifford parallel*



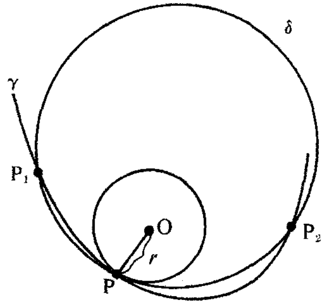
شکل الف. ۷ خمیدگی $k = ۱/r$.



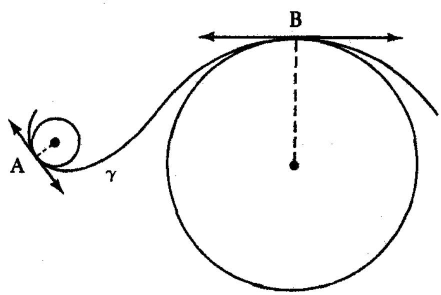
شکل الف. ۸

ما خط را «راست» فرض می‌کنیم نه خمیده. بنابراین اگر ناگزیر شدیم یک خمیدگی عددی k به خطی نسبت دهیم، مقدار $k = ۰$ را نسبت خواهیم داد. از سوی دیگر، یک دایره γ قطعاً خمیده است و مقدار خمیدگی آن به شعاع r آن بستگی دارد. هر اندازه شعاع γ بزرگتر باشد، به‌همان اندازه γ بیشتر به خط نزدیک می‌شود، یعنی کمتر «خم» می‌گردد. بنابراین طبیعی به‌نظر می‌آید که k، خمیدگی یک دایره به شعاع r، را با $k = ۱/r$ تعریف کنیم (خمیدگی با عکس شعاع دایره متناسب است؛ شکل الف.۷)

حال یک خم هموار دلخواه γ را در صفحه اقلیدسی درنظر می‌گیریم. منظور ما از «خم هموار» خمی است که مماس بر هر نقطه‌اش بتواند به‌طور پیوسته خم را دور بزند. مماس بر یک دایره در یک نقطه همواره بر شعاع دایره در آن نقطه عمود است. می‌توانیم مماس در نقطه P بر یک خم نامشخص γ را چنین تعریف کنیم. P و یک نقطه دیگر Q بر γ یک خط l را مشخص می‌کنند. نقطه P را ثابت نگاه می‌داریم و Q را تدریجاً به P نزدیک می‌کنیم. حد خط l وقتی Q بی‌نهایت به P نزدیک شود، بنابر تعریف، خط مماس t بر γ در نقطه P نامیده می‌شود (شکل الف.۸).



شکل الف. ۹



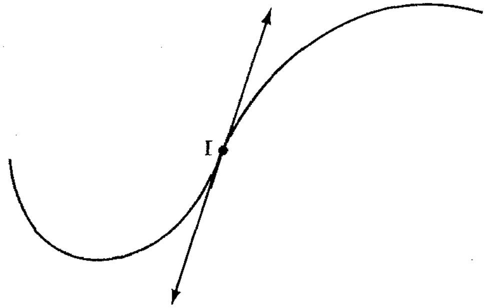
شکل الف. ۱۰

علاوه‌بر نقطه ثابت P، می‌توانیم دو نقطه دیگر P_1 و P_2 را بر خم γ بگیریم. این سه نقطه یک دایره δ را مشخص می‌کنند. P را ثابت نگاه می‌داریم و P_1 و P_2 را بر γ به P نزدیک می‌کنیم. وضع حدی دایره δ هنگامی که P_1 و P_2 بی‌نهایت به P نزدیک می‌شوند، دایره‌ای است که به خم γ در P «بهتر می‌خورد» و دایره بوسان (از واژه لاتین osculari به معنی بوسیدن) بر γ در نقطه P نام دارد (شکل الف.۹). معقول به‌نظر می‌رسد که خمیدگی γ را در نقطه P همان خمیدگی دایره بوسان آن در P با $k = 1/r$ تعریف کنیم (r شعاع خمیدگی[1] γ در P نام دارد).

از شکل الف.۱۰ روشن است که وقتی بر خم γ حرکت می‌کنیم اندازه دایره بوسان تغییر می‌کند. لذا خمیدگی k از نقطه‌ای به نقطه دیگر بر γ تغییر می‌نماید. همچنین ملاحظه می‌کنیم که مماس بر γ در نقطه P، بر دایره بوسان در نقطه P هم مماس است.

همچنین در شکل الف.۱۰ می‌توان دید که ممکن است دایره‌های بوسان در دوطرف خم γ باشند. پس بجاست که خمیدگی را دوباره تعریف کنیم به‌قسمی‌که خمیدگی در یک طرف γ

1. *radius of curvature*



شکل الف. ۱۱ نقطه عطف $k = 0$.

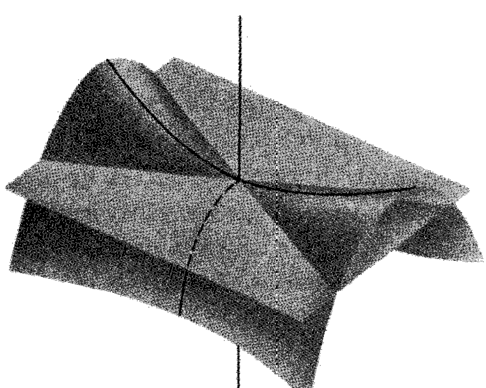
مثبت باشد و در طرف دیگر آن منفی. وقتی یک‌بار چنین تعریفی کردیم، آشکار می‌شود که در شکل الف.۱۰، بین A و B بر γ باید یک نقطه I با خمیدگی صفر وجود داشته باشد، زیرا γ را به‌قدر کافی هموار فرض کرده‌ایم به‌قسمی‌که خمیدگی آن به‌طور پیوسته تغییر کند. این نقطه I نقطه عطف نامیده می‌شود و «دایره» بوسان در چنین نقطه‌ای به‌خط مماس در I بدل می‌گردد (شکل الف.۱۱).

آنچه درباره خم در صفحه گفتیم برای خم در فضای اقلیدسی، با تغییرات زیر نیز به کار می‌رود. دایره بوسان در صفحه یکتایی گذرنده از P به نام صفحه بوسان γ در P، که با Π نشان می‌دهیم، قرار دارد (جز در حالت تباهیده در نقطه P که خمیدگی γ در آن صفر است). چون Π با P تغییر می‌کند، اگر γ خم مسطحی نباشد، دیگر راه همواری برای تخصیص مقادیر مثبت و منفی به خمیدگی نداریم. پس از نقطه P یک بردار خمیدگی $\mathbf{k}$ را در صفحه بوسان عمود بر خطِ مماس بر γ، به‌طول $1/r$ رو به مرکز دایره بوسان (به نام مرکز خمیدگی) اختیار می‌کنیم. اگر خمیدگی γ در P صفر باشد $\mathbf{k}$ را بردار صفر می‌گیریم.

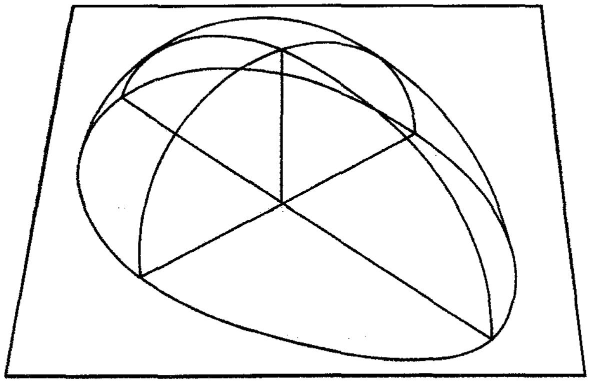
حال به سطوح همواری که در فضای اقلیدسی سه‌بعدی نشانده شده‌اند می‌پردازیم. «هموار» اینک بدین معنی است که در هر نقطه P از سطح، یک صفحه مماس وجود دارد که به‌طور پیوسته خم را دور می‌زند. این صفحه مماس T در P فضای اقلیدسی سه‌بعدی را به دو نیم‌فضا تقسیم می‌کند که یکی را به دلخواه مثبت می‌گیریم و دیگری را منفی. در این‌صورت می‌توانیم یک خمیدگی علامت‌دار k را برای هر خم γ گذرنده از P که در سطح مفروض Σ واقع است تعریف کنیم که مثبت یا منفی است برحسب اینکه مرکز خمیدگی γ در P در نیم‌فضای مثبت یا منفی واقع باشد. (برای اینکه این علامتها به‌طور هموار با P تغییر کنند باید سطح را جهت‌دار کنیم که می‌توان همواره به‌طور موضعی، یعنی در همسایگی P این کار را انجام داد.)

خط مرسوم از P را که بر صفحه مماس T عمود است و خط قائم در P نامیده می‌شود، در نظر می‌گیریم. هر صفحه که بر خط قائم بگذرد سطح را در خم مسطحی می‌برد. می‌توانیم چنین تصور کنیم که این صفحه به دور خط قائم دوران می‌کند، در این‌صورت سطح را در خمهای مختلفی می‌برد که از P می‌گذرند. قبلاً گفته‌ایم که خمیدگی در P برای هر یک از این مقاطع قائم را چگونه تعریف می‌کنیم. در حالت کلی، هنگامی که به دور خط قائم می‌گردیم این خمیدگیها تغییر می‌کنند. (در حالت خاص، هنگامی که این سطح کره باشد، این خمیدگیها ثابت و با عکس شعاع کره مساوی‌اند، زیرا خمهایی که توسط متقاطع قائم حاصل می‌شوند، همه دوایر عظیمه کره هستند.) با روشهای هندسه دیفرانسیل می‌توان ثابت کرد که این خمیدگیها، هنگامی که به دور قائم می‌گردیم، یک مقدار ماکزیمم $k_۱$ و یک مقدار مینیمم $k_۲$ اختیار می‌کنند و مقاطع قائم مربوط به آنها (که خمهای اصلی نامیده می‌شوند) بر هم عمودند. حاصل‌ضرب $K = k_۱k_۲$ خمیدگی گاوسی (منسوب به گاوس که نخستین بار آن را مورد مطالعه قرار داده است) یا به‌طور ساده «خمیدگی» سطح در نقطه P نامیده می‌شود. باز هم تکرار می‌کنیم که در حالت کلی، هنگامی که P بر سطح تغییر مکان می‌دهد، K تغییر می‌کند. اگر چنین پیش آید که K ثابت بماند، برحسب آنکه K منفی، صفر، یا مثبت باشد هندسه‌هایی به‌دست می‌آیند که در فصل ۱۰ به آنها اشاره کردیم و هندسه‌های متناظر آنها راه به‌ترتیب شبه‌کره، صفحه، و کره نامیدیم.

در شکل الف.۱۲ صفحه مماس و خط قائم و خمهای اصلی برای سطح زینی نشان داده شده‌اند. برای یک نقطه P واقع بر این سطح، طبق قرارداد خمیدگی گاوسی، عددی است منفی، زیرا دوایر بوسان برای دو خم اصلی در دو طرف مختلف صفحه مماس قرار دارند. از سوی دیگر،



شکل الف. ۱۲

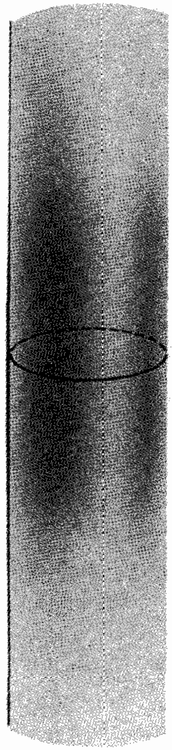


شکل الف. ۱۳

برای سطح تخم‌مرغی در شکل الف.۱۳، دوایر بوسان دو خم اصلی در یک طرف صفحه مماس قرار دارند، پس خمیدگی گاوسی مثبت است.

برگردیم به عقب، به تصویر شبه‌کره در شکل الف.۱۲، که از دوران یک تراکتریکس حول مجانبش به‌دست آمده است. می‌توان نشان داد که در هر نقطه این سطح دو خم اصلی، یکی (دایره افقی) حاصل از دوران نقطه و دیگری تراکتریکس (قائم) گذرنده از آن نقطه است. چون این خمها در دو طرف صفحه مماس قرار دارند، متوجه می‌شویم که خمیدگی اصلی منفی است. وقتی برروی سطح به بالا حرکت کنیم، دایره فشرده می‌شود و خمیدگی‌اش بی‌نهایت زیاد می‌شود، در حالی که تراکتریکس گسترده می‌شود و خمیدگی‌اش (خمیدگی مجانبش) به صفر کاهش می‌یابد. همین امر دلیل موجهی برای ثابت ماندن K، حاصل‌ضرب خمیدگیهای اصلی آن است (اما البته برهان آن نیاز به محاسبه دارد).

همچنین در مورد استوانه حاصل از، مثلاً، دوران خطی عمود حول یک خط عمود موازی با آن، خمهای اصلی در هر نقطه عبارت‌اند از دایره افقی و خط قائم، که خمیدگی خط $k_۲ = ۰$ است. بنابراین خمیدگی گاوسی $K = k_۱k_۲$ در هر نقطه استوانه صفر خواهد بود (شکل الف.۱۴). می‌توانیم این نتیجه شگفت‌انگیز را بهتر درک کنیم اگر سطح استوانه را یک صفحه لوله‌شده تصور کنیم. مطمئناً در هر تعریف معقولی از خمیدگی سطح، خمیدگی یک صفحه مسطح باید صفر شود. وقتی نوار مسطح مستطیلی را لوله کنیم، طول کمانها و زاویه بین خمها روی نوار تغییر نمی‌کند و با این تعبیر «هندسه ذاتی» سطح تغییر نکرده است. گاوس در این اندیشه بود که برای خمیدگی سطح تعریفی پیدا کند که فقط به هندسه ذاتی سطح وابسته باشد، نه به طرز خاصی که سطح



شکل الف. ۱۴ خمیدگی گاوسی استوانه صفر است.

در فضای سه‌بعدی اقلیدسی نشانده شده است. او توانست ثابت کند که اگر سطح بر اثر یک «خمش» چنان قرار گیرد که در آن طول کمانها و زاویه همه خمها روی سطح ناوردا بماند، K، خمیدگی‌ای که او تعریف کرده، تغییر نخواهد کرد. بدین‌ترتیب K، خمیدگی ذاتی سطح را مستقل از نحوه خمش سطح برای تطابق با فضای سه‌بعدی اقلیدسی بیان می‌کند. این مطلب از همه جالبتر است، زیرا خمیدگیهای اصلی k_1 و k_2 ممکن است بر اثر این گونه «خمش»ها تغییر کنند، ولی حاصل‌ضرب آنها $K = k_1 k_2$ ثابت می‌ماند. گاوس بر اثر رسیدن به این نتیجه چنان به هیجان آمده بود که آن را «قضیه فوق‌العاده» نامید. در نامه‌ای خطاب به هانسن ستاره‌شناس می‌نویسد: «این تحقیقات بر بسیاری از چیزهای دیگر تأثیر شدید دارند. من می‌خواهم تا آن حد جلو بروم که بگویم در متافیزیک هندسه فضایی نیز دخالت دارند».

همچنین گاوس توانست مسئله این خمیدگی ذاتی K را بدون دخالت فضای محیطی سه‌بعدی حل کند. موجودی دوبعدی را تصور کنید که روی سطح زندگی می‌کند و درکی از بُعد سوم ندارد،

قادر هم نیست خطوط قائمی را که ما در تعریف خمیدگی K به‌کار بردیم بفهمد. ببینیم این موجود چگونه K را حساب خواهد کرد؟ ما باید زبان حساب دیفرانسیل را به‌کار بریم تا به این پرسش جواب دهیم.

در یک صفحه اقلیدسی هر نقطه با مختصات x و y خود تعیین می‌شود. اگر این مختصات تحت تأثیر تغییرات بی‌نهایت کوچک dx و dy قرار گیرند، نقطه به‌اندازه فاصله بی‌نهایت کوچک ds حرکت می‌کند، که با دستور فیثاغورس $ds^۲ = dx^۲ + dy^۲$ مشخص می‌شود. ولی روی یک سطح هموار، هر نقطه به‌طور موضعی با مختصات x و y تعیین خواهد شد؛ اگر این مختصات دستخوش تغییرات بی‌نهایت کوچک dx و dy شوند، نقطه فاصله بی‌نهایت کوچک ds را روی سطح طی خواهد کرد که مربع آن و با عبارت پیچیده:

$$ds^۲ = E\ dx^۲ + ۲F\ dx\ dy + G\ dy^۲$$

مشخص می‌شود که در آن E، F، و G با تغییر نقطه تغییر می‌کنند. توابع E، F، و G علی‌الاصول می‌توانند توسط موجودی دوبعدی که می‌تواند اندازه‌گیری روی سطح انجام دهد، تعیین شوند. سپس گاوس نشان داد که K، خمیدگی‌ای که او تعریف کرده، برحسب E، F، و G با فرمولی نه چندان پیچیده داده است (لانچوس، ۱۹۷۰، ص ۱۸۳). بدین‌ترتیب آن موجود دوبعدی می‌تواند K را هم از روی این فرمول محاسبه کرده و خمیده بودن جهانش را کشف کند، اگرچه تجسم معنای آن برایش دشوار خواهد بود.

اگرچه این صحبت درباره یک موجود دوبعدی ممکن است عجیب نماید، اما همان‌گونه که ریمان ثابت کرده است چنین نیست. ریمان این‌گونه استدلال می‌کند که ما در یک جهان سه‌بعدی زندگی می‌کنیم، جهانی که در آن ds، تغییرات بی‌نهایت کوچک فاصله، با فرمولی شبیه به آنچه گذشت داده می‌شود که شامل سه متغیر بی‌نهایت کوچک dx، dy، و dz است:

$$ds^۲ = g_{۱۱}dx^۲ + g_{۲۲}dy^۲ + g_{۳۳}dz^۲ + ۲g_{۲۳}dy\ dz + ۲g_{۳۱}dz\ dx + ۲g_{۱۲}dx\ dy$$

و ما هم روی زمین وضع کاملاً مشابهی با این موجود داریم. ریمان موفق شد تعریف «تانسور خمیدگی» را با استفاده از این فرمول تعریف کند، که مشابه خمیدگی گاوسی برای یک سطح، ولی اندکی پیچیده‌تر از آن است. خمیدگی گاوسی تنها شامل یک عدد منفرد K بود، در حالی که خمیدگی ریمان به شش عدد مختلف بستگی دارد. ریمان این خمیدگی را تقریباً به‌گونه‌ای تصادفی، هنگام پژوهش درباره انتقال حرارت، کشف کرد، و عملاً این تانسور خمیدگی را برای

هندسه‌های مجردی با بعد n بسط داد. اینشتین توانست از این فکر ریمان برای پیوستار چهاربعدی فضاـزمان استفاده کند.

لذا ما درست وضع همان موجود بیچاره دوبعدی را داریم. ما می‌توانیم اندازه‌گیری‌هایی برای تعیین خمیدگیهای ریمانی جهان خود انجام دهیم. ستاره‌شناسان هم، چنین اندازه‌گیری‌هایی را انجام داده‌اند. اگر ببینیم که انحنای ریمانی صفر نیست، درمی‌یابیم که هندسه، اقلیدسی نیست. ولی این بدان معنی نیست که فضای ما در فضای فیزیکی با بعد بیشتر نشانیده شده و به‌نحوی در آن «خمیده» شده است. وقتی که می‌گوییم «فضا خمیده است» منظور ما تنها این است که ویژگیهای هندسی آن با ویژگیهای فضای اقلیدسی، به همان طریق مشخصی که با فرمول ریمان داده شده است، تفاوت دارد.

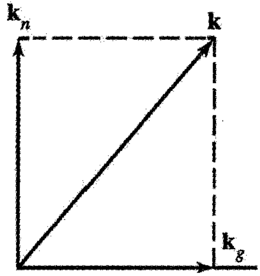
ریمان اندیشه فضای n بعدی را در ۱۸۵۴، در سخنرانی افتتاحیه خود درباره «فرضهایی که مبنای هندسه را تشکیل می‌دهند» مطرح کرد که هندسه ذاتی آن با فرمول درجه دومی برای تغییر بی‌نهایت کوچک در فاصله ds تعیین می‌شود. چنین ساختاری اکنون خمینه ریمانی نامیده می‌شود (برای تعریف دقیق، ←اسپیواک، ۱۹۷۰ و دوکارمو، ۱۹۷۶). خمینه‌های متفاوت هندسه‌های متفاوت را نتیجه می‌دهند، لذا ریمان تعداد بی‌نهایت هندسه تازه کشف کرده است.

برگردیم به حالتی که سطح $\sum$ دوبعدی است. به‌ازای هر نقطه P بر $\sum$ و هر خم γ گذرنده از P واقع بر $\sum$، بردار خمیدگی $\mathbf{k}$ به‌طور طبیعی به یک مجموع به‌صورت

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_g$$

تجزیه می‌شود که $\mathbf{k}_n$ تصویر آن بر خط نرمال است و $\mathbf{k}_g$ تصویر آن بر صفحه مماس T بر $\sum$ در نقطه P؛ این تصاویر به‌ترتیب بردار خمیدگی نرمال و بردار خمیدگی مماسی نامیده می‌شوند. درازای $\mathbf{k}_g$ خم ژئودزیک k_g از خم γ در P نسبت به $\sum$ نام دارد. γ را یک ژئودزیک می‌نامیم اگر $k_g = 0$. در این حالت خمیدگی γ نسبت به سطح $\sum$ صفر است؛ ممکن است نسبت به فضای اقلیدسی سه‌بعدی خمیدگی ناصفر داشته باشد، آن وقت جهت بردار خمیدگی در جهت خط نرمال سطح در P خواهد بود. راه دیگر توصیف یک ژئودزیک γ با $\mathbf{k} = \mathbf{k}_n$ غیر صفر این است که بگوییم صفحه بوسان آن Π در P بر صفحه مماس T عمود است (زیرا Π شامل خط نرمال در P است). از این بیان بلافاصله متوجه می‌شویم که ژئودزیکهای کره دوایر عظیمه آن هستند ($\Pi \perp T$، اگر و تنها اگر Π از مرکز کره بگذرد؛ شکل الف.۱۵).

این بیان از خمیدگی ژئودزیک به فضای اقلیدسی سه‌بعدی محیطی اشاره دارد. ولی ف. میندینگ در ۱۸۳۰ نشان داد که این، یک ویژگی ذاتی برای $\sum$ نیز هست: این فقط به توابع

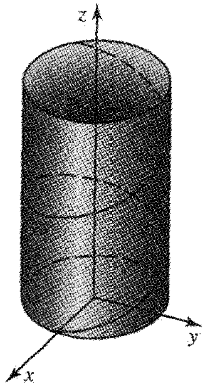


شکل الف. ۱۵

E، F، و G و خم γ بستگی دارد. بنابراین مفهوم «ژئودزیک» را می‌توان بر یک خمینه ریمانی تعریف کرد. این تعریف تعبیر صحیحی از اصطلاح اشتباه برانگیز سابق خط راست در مورد چنین خمینه‌ای به‌دست می‌دهد. ریمان تصدیق می‌کرد که ژئودزیکها طولهای متناهی خواهند داشت اگر خمیدگی سطح، از ثابت مثبتی بزرگتر باشد.

یک تعبیر پیشنهادی دیگر اصطلاح «پاره‌خط راست» کوتاهترین مسیر بین دو نقطه از سطح است. می‌توان ثابت کرد که «اگر چنین مسیر کوتاهی وجود داشته باشد باید کمانی از یک ژئودزیک باشد». اما این کوتاهترین مسیر ممکن است وجود نداشته باشد: فرض می‌کنیم $\sum$ یک صفحه سوراخ‌دار یا یک کره سوراخ‌دار باشد؛ دو نقطه در دوطرف مقابل این سوراخ را نمی‌توان با کوتاهترین مسیر در روی $\sum$ به هم وصل کرد. می‌توان ثابت کرد که بر یک خمینه کامل (یعنی خمینه‌ای که هر دنباله کوشی از نقاطش همگرا باشد) همواره کوتاهترین مسیر وجود دارد (قضیه هوپف‌ـرینو). ولی لزومی ندارد که هر کمان از یک ژئودزیک کوتاهترین مسیر باشد: بلندترین کمان دایره عظیمه واصل بین دو نقطه نامتقاطر بر یک کره، یا کمانی از پیچ واصل بین دو نقطه بر یک خط قائم از یک استوانه در شکل الف.۱۶ را درنظر بگیرید. لذا تعریف «ژئودزیک» به‌صورت «کوتاهترین مسیر» (در بعضی از کتابهایی که غیرریاضیدانان نوشته‌اند) نامناسب است، زیرا چنین کمانهایی را مستثنا می‌کند.

توجه به این نکته مهم است که اگرچه ما بر تعمیم اندیشه‌های گاوس به وسیله ریمان، از دوبعدی به ابعاد بالاتر تکیه کردیم، ولی نحوه بیان ریمان آگاهی تازه‌ای از سطوحی که نمی‌توانند در فضای سه‌بعدی اقلیدسی نشانیده شوند به ما می‌دهد. مثلاً، می‌توان صفحه هذلولوی را یک خمینه دوبعدی کامل ریمانی با خمیدگی ثابت منفی، و صفحه بیضوی را یک خمینه دوبعدی کامل ریمانی با خمیدگی ثابت مثبت تعریف کرد که در آنها هر دو نقطه بر یک ژئودزیک یکتا قرار دارند. هیچ یک از این خمینه‌ها را نمی‌توان به‌گونه‌ای تحلیلی در فضای سه‌بعدی اقلیدسی نشانید.



شکل الف. ۱۶ پیچ یک ژئودزیک بر استوانه است.

تصوری از نفوذ فکری ریمان در ریاضیات جدید را می‌توان از فهرستی از مفاهیم، روشها، و قضایایی که به نام او خوانده شده‌اند به‌دست آورد: خمیدگی ریمان خمینه‌های ریمانی، انتگرال ریمانی، لم ریمان‌ـلبگ، سطوح ریمان، قضیه ریمان‌ـروش، ماتریسهای ریمان، فرضهای ریمان درباره تابع زتای ریمان، روش ریمان در نظریه سریهای مثلثاتی، روش ریمان برای معادلات دیفرانسیل هذلولوی با مشتقات جزئی، قضیه نگاشت ریمان و معادلات کوشی‌ـریمان.[1]

۱. برای آگاه‌شدن از زندگی مشقت بار ریمان، ←«مردان ریاضی»، اثر بل (۱۹۶۱)؛ برای آگاهی از روش دقیق هندسه ریمانی به انضمام توضیح ریمان در سخنرانی افتتاحیه مشهورش در ۱۸۵۴، «هندسه دیفرانسیل» اثر اسپیواک، جلد دوم را ببینید؛ برای وقوف به کار برد آنها در نظریه نسبیت، لانچوس را ببینید؛ برای پی‌بردن به بحث شهودی در این‌باره که چگونه می‌توان ثقل را توسط خمیدگی فضا تفسیر کرد، آخرین بخش کتاب «فیزیک فضاـزمان» تیلور و ویلر را ببینید.

پیوست ب

هندسه بدون پیوستگی

هر دانشجوی کوشا و جدی باید به این کشف بزرگ پایان سده اخیر آگاه باشد که بخش اعظم هندسه با پیوستگی ارتباط ندارد.

ه. بوزمان و پ. ج. کلی

اگر اقلیدس در آغاز سده بیستم دوباره به زندگی بازمی‌گشت و انتقادهایی را که از شکافهای موجود در آثارش به عمل می‌آمد می‌شنید، بدون تردید بنداشتهای وقوع، میان‌بود، و قابلیت انطباق را که به‌جای چهار اصل نخست اوگذاشته شده بود می‌پذیرفت. یک مدل از آن بنداشتها صفحه H (H از نامهای هیلبرت، هسنبرگ، و یلمسلو گرفته شده است) نامیده می‌شود. ولی به آسانی می‌توان تجسم کرد که اقلیدس از بنداشت پیوستگی ددکیند، مو بر تنش راست می‌شد، ولو اینکه می‌توان انتظار داشت که بنداشت ارشمیدس و اصل پیوستگی مقدماتی را بپذیرد.

در سده اخیر کارهای زیادی برای بسط هندسه‌هایی بدون فرضهای پیوستگی صورت گرفته است. جامعترین کتاب در این زمینه، کتاب ف. باخمان با عنوان «بنای هندسه براساس مفهوم قرینه‌یابی» است که در آن هندسه‌های مسطحه‌ای که تنها براساس بنداشتهای وقوع، تعامد، و قرینه‌یابی نهاده شده‌اند، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. باخمان این مبحث را به حق، هندسه‌مسطحه

مطلق نامیده است، زیرا مشتمل بر هندسه‌های بیضوی، هذلولوی، و اقلیدسی به‌عنوان حالت خاص (همچنین هندسه‌های غیرمتداول دیگر) است.[1] باخمان موفق شده است بنداشتهای پیوستگی، بنداشتهای میان‌بود را کنار بگذارد. جای تأسف است که مدلهای بنداشتهای خود را صفحات «متریک» می‌نامد ــ زیرا «فضاهای متریک»، معانی کاملاً متفاوتی دارند، بدین معنی که یک «متریک» اندازه فاصله‌ها را برحسب اعداد حقیقی تعیین می‌کند. پیشنهاد من این است که آنها را صفحات مطلق بنامیم. شیوه کار برای این تحقیق چنین است:

۱. نشانیدن صفحه مطلق در یک صفحه تصویری.

۲. نشان دادن اینکه نقاط و خطوط در این صفحه تصویری دارای مختصاتی همگن از یک میدان K هستند (نظیر تمرین اصلی ۱۰، فصل ۲).

۳. نشان دادن اینکه دو خط بر هم عمودند اگر و تنها اگر مختصات آنها در معادله درجه دوم همگن خاصی صدق کند.

۴. استفاده از محاسبات جبری تا بتوان اطلاعات بیشتری در مورد صفحه مطلق به‌دست آورد.

این برنامه در طبقه‌بندی صفحات H کاملاً با موفقیت توأم بوده است (مسئله تعیین همه صفحات مطلق لاینحل مانده است). به‌ویژه نشان داده شده است که تنها آن صفحات H که در آنها بنداشت ارشمیدس و اصل پیوستگی مقدماتی (تا حد یکریختی) صدق می‌کنند مدل دکارتی یا کلاینی روی یک میدان ارشمیدسی اقلیدسی K (میدان مرتب ارشمیدسی که در آن هر عنصر مثبت دارای جذر است) است. این نتیجه بالاخص جالب است، زیرا وجود نیم‌خطهای موازی حدی را در مورد هندسه نااقلیدسی بدون توسل به بنداشت پیوستگی ددکیند مسجل می‌سازد (برهان قضیه ۶.۶، ص ۲۰۸).

اینک نشانیدن را به اختصار توضیح می‌دهیم. راه شهودی آن از بحثی که درباره مدل کلاین کردیم به‌دست می‌آید. در آنجا نقاط «آرمانی» و «فراآرمانی» معرفی شده‌اند تا خطوطی که قبلاً موازی بودند حالا پس از امتداد یافتن و عبور از این نقاط جدید متلاقی شوند (تمرین اصلی ۱۳، فصل ۶). به بیان انتزاعی، نقاط جدید همانا دسته خطاند. نقاط قدیمی، با دسته خطهای نوع اول تناظر یک‌به‌یک دارند، یعنی A با دسته خطهای گذرنده از A، یعنی $p(\mathrm{A})$، متناظر است.

یک نقطه فراآرمانی دسته خطی است از نوع دوم؛ این قطب $\mathrm{P}(t)$ است که به‌ازای یک خط

[1] اگر خواهان نوشته‌ای در مورد بنداشتهای باخمان به انگلیسی هستید، ←اِوالد (۱۹۷۱)؛ ای. م. یاگلم در مقدمه ترجمه روسی کتاب باخمان می‌نویسد: بی‌چون و چرا این مهمترین بسط در مبانی هندسه در دهه‌های اخیر است.» شما با روشهای باخمان در صص ۳۵۴ـ۳۵۷، و تمرین ۵۰، فصل ۹، آشنا شده‌اید.

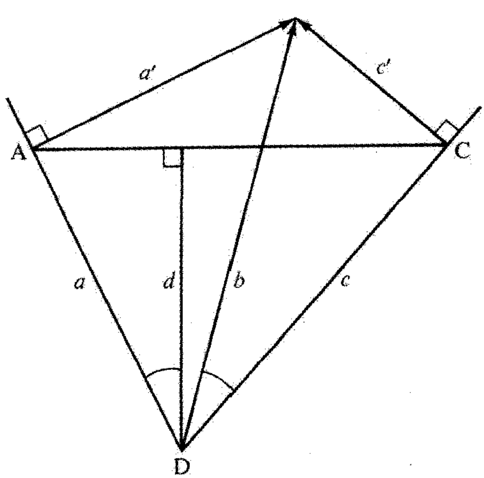
ثابت t از همه خطوط عمود بر t تشکیل شده است. ولی دسته‌خط نوع سوم را برای اجتناب از استدلال دوری باید دقیقاً شرح دهیم. این گونه دسته‌خط را در فصل ۹ (ص ۳۵۷) به‌عنوان همه خطهایی معرفی کردیم که از یک نقطه ثابت آرمانی می‌گذرند. در آنجا نقطه آرمانی به‌عنوان یک رده هم‌ارزی از نیم‌خطهای موازی حدی تعریف شده بود؛ ولی در اینجا، چون از وجود نیم‌خطهای موازی حدی اطلاعی نداریم، به جای آن از قضیه سه قرینه‌یابی (گزاره ۱۹.۹) به‌عنوان تعریف استفاده می‌کنیم: دسته‌خط $p(lm)$ که با خطهای موازی l و m که عمود مشترکی ندارند، تعیین می‌شود متشکل از همه خطهایی چون n است که به‌ازای آنها حاصل‌ضرب

$$R_l R_m R_n$$

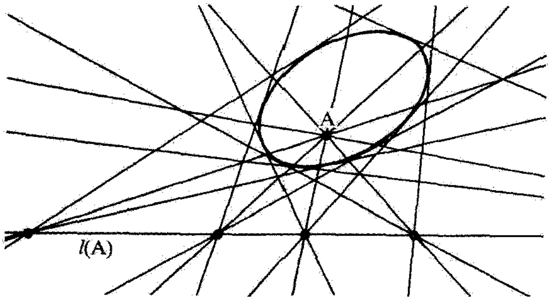
یک قرینه‌یابی است. اثبات برخی از ویژگیهایی که قبلاً بدیهی بودند اکنون به استادی زیادی نیاز دارد ــ مثلاً، اگر $h, k \in p(lm)$، آنگاه $p(hk) = p(lm)$. یلمسلو کشف کرد که چگونه باید ثابت کند که یک دسته از نوع اول، $p(\mathrm{D})$، و یک دسته از نوع سوم، $p(a'c')$، در خط یکتای b مشترک‌اند (شکل ب.۱). او عمودهای a و c را از D بر خطوط a' و c' وارد کرد (A و C پای عمود هستند). سپس عمود d را از D بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AC}}$ فرود آورد. در این‌صورت خط b به‌طور یکتا با معادله

$$R_a R_b R_c = R_d$$

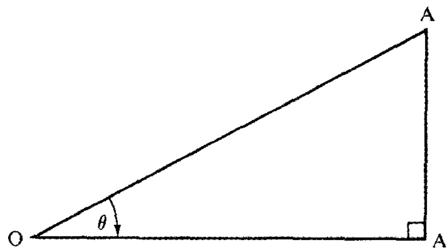
تعیین می‌شود.



شکل ب. ۱



شکل ب. ۲ قطبی یک نقطه.



شکل ب. ۳

اکنون نقاط جدید صفحه تصویری خود را می‌شناسیم. می‌توانیم خطهای قدیمیِ a را امتداد دهیم تا خطهای جدید $l(a)$ به‌دست آیند، به‌طوری که هر دسته‌خطِ شاملِ a، بنابر تعریف، بر $l(a)$ واقع باشد. اما برای پرکردن صفحه تصویری خود، به خطهای جدید دیگری نیاز داریم. مثلاً به‌ازای هر نقطه قدیمی A، قطبی $l(\mathrm{A})$ که از همه قطبهای خطوط گذرنده از A تشکیل شده است، باید یک خط جدید باشد؛ در مدل کلاین این خط کاملاً در بیرون دایره مطلق قرار دارد (در مدل دکارتی خطی است در بی‌نهایت؛ شکل ب.۲).

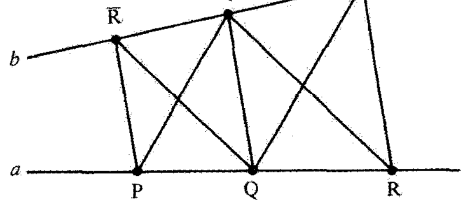
ولی حالا چگونه باید خطهای مماس بر دایره مطلق را در مدل کلاین توصیف کنیم؛ و چگونه باید بنداشتها را برای یک صفحه تصویری محقق سازیم؟ برای انجام این امر، یلمسلو تدبیر جالبی اندیشیده است: یک نقطه O را ثابت نگاه می‌دارد و یک جفت خط غیرمتعامد v و u گذرنده از O را ثابت می‌گیرد ــ با فرض اینکه این خطها یک زاویه حاده θ باهم بسازند. سپس تبدیلی را تعریف می‌کند که O را ثابت نگاه می‌دارد و هر نقطه $\mathrm{A} \neq \mathrm{O}$ را به نقطه A^*، وسط پاره‌خط واصل بین A و تصویرش بر اثر دوران R_uR_v حول O به زاویه 2θ می‌فرستد (شکل ب.۳). این تبدیل نیم‌دوران (یا نگاشت حلزونی) حول O متناظر با u و v نام دارد.

یلمسلو متوجه شد که در مدل کلاین، نیم‌دورانها به هم‌خطی‌های صفحه تصویری منجر می‌شوند و هر خط، به استثنای $l(\mathrm{O})$، را می‌توان به وسیله یک نیمدوران مناسب حول O بر امتداد خط کلاین تعمیم‌یافته بر $l(a)$ نگاشت. لذا او در نظر گرفت که یک مجموعه از دسته‌خطها را یک «خط» بنامد، هرگاه این مجموعه با نیم‌دوران بر $l(a)$ نگاشته شود یا خود $l(\mathrm{O})$ شود. بدین ترتیب او با این تعریف توانست بنداشتها را برای یک صفحه تصویری بررسی کند.

اجرای مرحله (۲) ـــساختن میدان Kی مختصاتـــ به روشهای فنی بیشتری نیاز دارد. کلید این امر قضیه پیچیده‌ای است از هسنبرگ که تعمیم این قضیه اقلیدس است که می‌گوید چه وقت یک چهارضلعی می‌تواند در دایره‌ای محاط شود. روش ساختن K روشی استاندارد برای هر صفحه آفینی است که قضیه پاپوس در آن صدق می‌کند (اِوالد، ۱۹۷۱، فصل ۳). در اینجا صفحه آفین از حذف $l(\mathrm{O})$، قطبی نقطه O، به‌دست می‌آید، و قضیه پاپوس چنین می‌گوید: فرض می‌کنیم P، Q، و R بر خط a، و $\overline{\mathrm{P}}$، $\overline{\mathrm{Q}}$، و $\overline{\mathrm{R}}$ بر خط b چنان باشند که a و b در هیچ‌یک از این شش نقطه یکدیگر را نبرند (شکل ب.۴). اگر $\mathrm{P}\overline{\mathrm{Q}}\|\overline{\mathrm{P}}\mathrm{Q}$ و $\mathrm{Q}\overline{\mathrm{R}}\|\overline{\mathrm{Q}}\mathrm{R}$، آنگاه $\mathrm{P}\overline{\mathrm{R}}\|\overline{\mathrm{P}}\mathrm{R}$. در روش باخمان تحقیق قضیه پاپوس به «زور» صورت می‌گیرد. راه دیگری وجود دارد که متعلق به لینگنبرگ است و من فکر می‌کنم بینش بیشتری به شخص می‌دهد (لنتس، ۱۹۶۷، صفحه ۲۰۶ به بعد، درباره «شبه‌صفحه» اقلیدسی). قضیه پاپوس ایجاب می‌کند که تعریفی که برای «خط» در صفحه تصویری داده می‌شود به انتخاب O بستگی نداشته باشد.

اگر با یک صفحه H شروع کنیم، آن وقت می‌توانیم ترتیبی را در K برحسب رابطه میان‌بود در صفحه H تعریف کنیم. ما فقط به مشخص کردن P، مجموعه عددهای مثبت، نیاز داریم (زیرا $x < y \Longleftrightarrow y - x > \circ$).

دو نقطه دلخواه A و B از صفحه H را انتخاب می‌کنیم. به‌ازای هر نقطه سوم X، هم‌خط با



شکل ب. ۴ قضیه پاپوس.

A و B، نسبت

$$\mathrm{AX} : \mathrm{BX}$$

مطابق تعریف، عدد یکتایی است در K که وقتی در بردار از B به X ضرب شود، بردار از A به X را بدهد. پس، بنابر تعریف، P عبارت است از ۱ و همه نسبتهای AX : BX وقتی که X بر خط آفین $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$، جمیع نقاط سومی را که بین A و B واقع نیستند اختیار کند (این امر همه نقاط آرمانی و فراآرمانی واقع بر $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ را شامل می‌شود). از روی ناوردا بودن این نسبت بر اثر تصویر موازی، می‌توان نشان داد که این تعریف P به انتخاب A و B بستگی ندارد.

قضیه منلائوس (تمرین ت‌ـ۵، فصل ۷) را نیز می‌توان برای این نسبتها ثابت کرد. به کمک قضیه منلائوس می‌توان ثابت کرد که P، به عنوان مجموعه‌ای از اعداد مثبت، کلیه ویژگیهای لازم را برای مرتب کردن میدان K، دارد (لنتس، ۱۹۶۷، ص ۲۲۳ به بعد). این مطالب به ما امکان می‌دهد که رابطه میان‌بود را به همه نقاط سه‌تایی هم‌خط در صفحه آفین بسط داده و نشان دهیم که صفحه H مانند زیرمجموعه باز محدبی از صفحه آفین که شامل مبدأ O است نشانیده می‌شود. این نشانیدن، در O به‌طور موضعی اقلیدسی است، بدین معنی که تعامد برای خطهای گذرنده از O معنی معمولی هندسه تحلیلی دکارتی را دارد.

می‌توان ثابت کرد (به استناد حرکت آزاد ـــ لم ۳.۹، ص ۳۷۲) که میدان K فیثاغورسی است (مجموع دو مربع مساوی یک مربع است)، ولی K اقلیدسی نیست مگر اینکه اصل پیوستگی مقدماتی برقرار باشد (این خود معیار جبری خوبی برای این ویژگی هندسی است).

اما در مورد مرحله (۳) فهرست مذکور، استدلال بیشتر نشان می‌دهد که مقدار ثابتی مانند $k \in K$ وجود دارد چنان‌که خطهای با مختصات همگن $[a_۱, a_۲, a_۳]$ و $[b_۱, b_۲, b_۳]$ متعامدند اگر و تنها اگر

$$a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + k a_۳ b_۳ = ۰$$

در اینجا، «تعامد» برای همه زوجهای واقع در صفحه تصویری تعمیم داده شده است، و ممکن است خطهایی (به نام تک رَوَند) وجود داشته که بر خودشان عمود باشند (مثلاً، وقتی $k = -۱$، خط $[۰, ۱, -۱]$، یعنی $y = ۱$). به هر خط $[a_۱, a_۲, a_۳]$، قطب آن $[a_۱, a_۲, k a_۳]$ وابسته است (به استثنای خط در بی‌نهایت $[۰, ۰, ۱]$ وقتی $k = ۰$). می‌بینیم که خطهای عمود بر این خط دقیقاً خطهایی هستند که از قطب آن می‌گذرند؛ خطهای تک‌رَوَند از قطب خود می‌گذرند و به‌ازای $k \neq ۰$، مکان هندسی قطب خطهای تک‌روند با معادله آفین

$$x^۲ + y^۲ = -k^{-۱}$$

داده می‌شود، و می‌تواند مطلق نامیده شود. نقاط (x,y) در صفحه H در نامساوی $|k|(x^{۲}+y^{۲})<۱$ صدق می‌کنند.

چهارمین زاویه چهارضلعی لامبرت حاده، قائمه، و یا منفرجه است برحسب اینکه $k<۰$، $k=۰$، یا $k>۰$. اگر $k=۰$، و صفحه H تمام صفحه آفین را پر کند، تعمیم‌یافته صفحه اقلیدسی روی K به‌دست می‌آید. ولی اگر $k=۰$ و K غیرارشمیدسی باشد و نقاط صفحه H را به آن نقاط (x,y) که بی‌نهایت کوچک هستند محدود کنیم، صفحه نیم‌اقلیدسی دِن را به‌دست می‌آوریم که در آن اصل توازی اقلیدسی صدق نمی‌کند ولی مستطیل وجود دارد.

اگر $k=-۱$، مطلق، دایره‌ای به شعاع واحد است، و اگر همه نقاط درون آن به صفحه H متعلق باشد، تعمیم‌یافته صفحه هذلولوی روی K را به‌دست می‌آوریم، به‌شرطی که K اقلیدسی باشد. در صورتی که K غیرارشمیدسی باشد، می‌توانیم دوباره (x,y) را به مقادیر بی‌نهایت کوچک محدود کنیم تا صفحه نیم‌هذلولوی «شور» را به‌دست می‌آوریم، که در آن با اینکه اصل پیوستگی مقدماتی صدق می‌کند، نیم‌خطهای موازی حدی وجود ندارند (نقاط آرمانی تمامی یک ناحیه در داخل و برروی مطلق را پر می کنند).

اگر، نه k مربع باشد و نه $-k$ (یعنی K اقلیدسی نباشد) باز هر مجموع $kx^{۲}+۱$ یا یک مربع است، یا k برابر یک مربع، نقاط (x,y) که در نابرابری $x^{۲}+y^{۲}<|k^{-۱}|$ صدق می‌کنند یک صفحه H نیم‌بیضوی تشکیل می‌دهند که در آن خطهای موازی عمود مشترک یکتایی دارند (مطلق، تهی است).

سرانجام اگر K غیرارشمیدسی باشد، $k=۱$، و (x,y) مجدداً به مقادیر بی‌نهایت کوچک محدود می‌شوند، و صفحه غیرلژاندری دِن به‌دست می‌آید، که در آن چهارمین زاویه چهارضلعی لامبرت منفرجه است.

ملاحظه می‌کنید که صفحات H غیرعادی وجود دارند که بیشتر آنها در میدانهای غیرارشمیدسی به سر می‌برند؛ در میدانهای ارشمیدسی، تنها صفحات اقلیدسی، هذلولوی و نیم‌بیضوی باقی می‌مانند. برای طبقه‌بندی جبری کامل صفحات H (که توسط و. پیاس، در ۱۹۶۰ کشف شده‌اند) هِنبرگ و دیلر (۱۹۶۷) را ببینید. برای آشنایی با هندسه مسطحه مطلق به زبان انگلیسی، فصل ۵، باخمان، بنکه، و فلات (۱۹۷۴) مراجعه کنید. بالاخره برای صورت بسط‌یافته این پیوست، مقاله من «هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی بدون پیوستگی» در ماهنامه ریاضی آمریکا،[1] نوامبر ۱۹۷۹ را ببینید.

1. *American Mathematical Monthly*, November 1979.

منابعی برای مطالعه بیشتر

۱. اگر می‌خواهید چند شکاف موجود در این کتاب (نظیر برهان قضیه ۳.۴) را پر کنید به بورسوک (۱۹۶۰) مراجعه کنید. در این کتاب ثابت شده است که بنداشتهای آنها برای هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی (هم‌ارز با بنداشتهای ما) جازم‌اند. برای نظریه مساحت هذلولوی به موییز (۱۹۹۰) مراجعه کنید. برای ساختها و هندسه هذلولوی، مارتین (۱۹۸۲) را ببینید. برای فضای هذلولوی فنچل (۱۹۸۹) را ببینید. بیان شورانگیزی از انقلاب هندسه نااقلیدسی و استلزامهای فلسفی آن را می‌توانید در گری (۱۹۸۹) و ترودو (۱۹۸۷) پیدا کنید. یک شوخی دلنشین درباره لوئیس کارول و آشنایی با مدل پوانکاره را در مارتا سودِ (۱۹۹۱) بجویید. هندسه اقلیدسی پیشرفته را بیشتر در کی (۱۹۶۹)، و کاکستر و گراتیسر (۱۹۶۷) و پدو (۱۹۷۰) پیدا می‌کنید.

۲. برای اطلاعات بیشتر در زمینه تاریخ هندسه نااقلیدسی و هندسه‌های دیگر روزنفلد، (۱۹۸۸) و رساله میلنور (۱۹۸۲) را ببینید. رساله کلاسیک بونولا (۱۹۵۵) شامل ترجمه‌های مقالات اصیل بویویی و لباچفسکی است. برای مطالعه گزارش زهرآگینی از واکنش دانشمندان سده نوزدهم نسبت به هندسه نااقلیدسی، فرویدنتال (۱۹۶۲) را ببینید.

۳. شاید بخواهید اطلاعات بیشتری در باب هندسه تصویری که روشنگر نسبت ناهمسازی در تعریف طول در مدلهای پوانکاره و کلاین (فصل ۷) است. هندسه تصویری به‌صورت یک دانش

مستقل از هندسه اقلیدسی، کاکستر در نیمه اول سده نوزدهم شکوفا شد، و در نیمه آخر آن کلاین وکیلی نشان دادند که هندسه تصویری (با متریکهای تصویری خود) نقش برجسته‌ای در رده‌بندی هندسه‌های دیگر ایفا می‌کند. برای توضیحات مقدماتی، کاکستر (۱۹۷۴ و ۱۹۶۰)، اِوالد (۱۹۷۱)، یا هیوز و پایپر (۱۹۷۳) را ببینید. برای برداشتهای پیشرفته، کاکستر (۱۹۶۸)، کلاین (۱۹۶۸)، یا کارتان (۱۹۵۰) را ببینید. برای مثالهای قشنگ و عالی، ویچر (۱۹۷۱) را ببینید.

۴. وقتی شما در حسابان تسلط پیدا کردید، می‌توانید هندسه دیفرانسیل را با استفاده از دوکارمو (۱۹۷۶) یا اونیل (۱۹۶۶) مطالعه کنید و جلوتر بروید از نوشته‌های هلگاسون (۱۹۶۲) و اسپیواک (۱۹۷۰) بهره بگیرید.

۵. اگر به کاربرد هندسه نااقلیدسی در نسبیت عام و کیهان‌شناسی علاقه‌مندید، لانچوس (۱۹۷۰)، تیلور و ویلر (۱۹۹۲) یا مقاله مقدماتی و ظریف راجر پنروز با عنوان «هندسه جهان» در مجلهٔ «ریاضیات امروز»[1] را ببینید. کاربردهای آن در مکانیک کلاسیک را می‌توانید در آرنولد و آوِز (۱۹۶۸)، و همچنین در باتما و روت (۱۹۷۹) پیدا کنید.

۶. اندکی به مطالعه گروهها بپردازید و سپس درباره ارتباط آن با هندسه به آرتین (۱۹۵۷)، باخمان، بنکه، و فلات (۱۹۷۴)، بنسون و گروو (۱۹۷۰)، و اشورتفگر (۱۹۶۲) مراجعه کنید.

۷. چندتن از ریاضیدانان درباره تداخل هندسه و هنر، اطلاعاتی دارند. برای اطلاع از این موضوع بولو (۱۹۶۳)، گیکا (۱۹۷۷)، همبیج (۱۹۶۷)، و رودوس (۱۹۶۷) را ببینید.

۸. برای استفاده از هندسه هذلولوی در تحقیقات پیشرفته، کاسون و بلایر (۱۹۸۸)، گالو و پورتر (۱۹۸۷)، میلنور (۱۹۸۲)، و فنچل (۱۹۸۹) را ببینید.

1. *Mathematics Today: Twelve Informal Essays*, L.A. Steen ed., Springer-Verlag, New York, 1978

کتاب‌شناسی

مقدمات و کلیات

Aleksandrov, A. 1969. "Abstract Spaces," in vol. 3 of *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning.* A. Aleksandrov *et al.*, eds., 2nd ed., Cambridge, Mass.: MIT Press.

Bouleau, C. 1963. *The Painter's Secret Geometry,* New York: Harcourt.

Courant, R., and H. Robbins. 1941. *What Is Mathematics?* Oxford University Press.

Gamow, G. 1956. "The Evolutionary Universe," *Scientific American,* **195** (September): 136–154 (Offprint no. 211).

Ghyka, M. 1977. *The Geometry of Art and Life,* New York: Dover.

Hambidge, J. 1967. *The Elements of Dynamic Symmetry,* New York: Dover.

Hilbert, D., and S. Cohn-Vossen. 1952. *Geometry and the Imagination,* New York: Chelsea.

Kline M., 1979. *Mathematics: An Introduction to Its Spirit and Use: Readings from Scientific American,* New York, W. H. Freeman and Company. (See especially the articles on geometry by Kline.)

Rhodos. 1967. *The Secrets of Ancient Geometry and Its Use,* 2 vols., Copenhagen.

تاریخچه و زندگی‌نامه

Bell, E. T. 1934. *The Search for Truth,* New York: Reynal and Hitchcock.
——. 1961. *Men of Mathematics,* New York: Simon and Schuster.
——. 1969. "Father and Son, Wolfgang and Johann Bolyai," in *Memorable Personalities in Mathematics: Nineteenth Century,* Stanford, Calif.: School Mathematics Study Group.
Bonola, R. 1955. *Non-Euclidean Geometry,* New York: Dover.
Boyer, C. B. 1968. *A History of Mathematics,* New York: Wiley.
Dodgson, C. L. (Lewis Carroll). 1890. *Curiosa Mathematica: A New Theory of Parallels,* London: Macmillan.
Dunnington, G. W. 1955. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science,* New York: Hafner.
Engel, F., and P. Stäckel. 1895. *Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss,* Leipzig: Teubner.
Freudenthal, H. 1962. "The Main Trends in the Foundations of Geometry in the Nineteenth Century," in *Logic, Methodology and Philosophy of Science,* E. Nagel, P. Suppes, and A. Tarski, eds., Stanford, Calif.: Stanford University Press, pp. 613–621.
Gray, J. 1989. *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic,* 2nd ed., New York: Oxford University Press.
Hall, T. 1970. *C. F. Gauss: A Biography,* Cambridge, Mass: MIT Press.
Heath, T. L. 1956. *Euclid's Elements,* New York: Dover.
Lanczos, C. 1970. *Space through the Ages,* New York: Academic Press.
Nagel, E. 1939. "Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry," *Osiris* (no. 7): 142–224.
Pont, J.-C. 1986. *L'Aventure des parallèles,* Bern: Lang.
Reid, C. 1970. *Hilbert,* New York: Springer-Verlag.
Rosenfeld, B. A. 1988. *A History of Non-Euclidean Geometry,* tr. A. Shenitzer, New York: Springer-Verlag.
Saccheri, G. 1970. *Euclides ab omni naevo vindicatus,* tr. G. B. Halsted, New York: Chelsea.
Schmidt, F., and P. Stäckel. 1972. *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai,* New York: Johnson Reprint Corp.
Stäckel, P. 1913. *Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen,* 2 vols., Leipzig: Teubner.
Van der Waerden, B. L. 1961. *Science Awakening,* New York: Oxford University Press.

فلسفی

DeLong, H. 1970. *A Profile of Mathematical Logic,* Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Fang, J. 1976. *The Illusory Infinite—A Theology of Mathematics,* Memphis: Paideia.

Grünbaum, A. 1968. *Geometry and Chronometry in Philosophical Perspective,* Bloomington: University of Minnesota Press.

Hadamard, J. 1945. *The Psychology of Invention in the Mathematical Field,* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Hardy, G. H. 1940. *A Mathematician's Apology,* New York: Cambridge University Press.

Hempel, C. G. 1945. "Geometry and Empirical Science," *American Mathematical Monthly,* **52**:7–17; also in vol. 3, *World of Mathematics,* J. R. Newman, ed., pp. 1619–1646.

Meschkowski, H. 1965. *Evolution of Mathematical Thought,* San Francisco: Holden-Day.

Poincaré, H. 1952. *Science and Hypothesis,* New York: Dover. Originally published in French, 1902.

Polanyi, M. 1964. *Personal Knowledge,* New York: Harper and Row.

Putnam, H. 1977. *Mathematics, Matter and Method,* New York: Cambridge University Press.

Renyi, A. 1967. *Dialogues on Mathematics,* San Francisco: Holden-Day.

Stein, H. 1970. "On the Paradoxical Time-Structures of Gödel," *Journal of the Philosophy of Science* **37**: 589 ff.

Torretti, R. 1978. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré,* Hingham, Mass.: D. Reidel.

Zeeman, E. C. 1974. "Research, Ancient and Modern," *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications,* Warwick University, England **10**:272–281.

ریاضی مقدماتی تا میانه

Adler, I. 1966. *A New Look at Geometry,* New York: John Day Co.

Artzy, R. 1965. *Linear Geometry,* Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Beck, A., M. Bleicher, and D. Crowe. 1969. *Excursions into Mathematics,* New York: Worth.

Coxeter, H. S. M. 1969. *Introduction to Geometry,* 2nd ed., New York: Wiley.

——. 1987. *Projective Geometry,* 2nd ed., New York: Cambridge University Press.

——. 1960. *The Real Projective Plane,* 2nd ed., New York: Cambridge University Press.

Coxeter, H. S. M., and S. L. Greitzer. 1967. *Geometry Revisited,* New York: Random House.

Eves, H. 1972. *A Survey of Geometry,* revised ed., Boston: Allyn and Bacon.

Golos, E. B. 1968. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry,* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Hessenberg, G., and J. Diller. 1967. *Grundlagen der Geometrie,* Berlin: de Gruyter.

Jones, A., A. Morris, and K. Pearson. 1991. *Abstract Algebra and Famous Impossibilities,* New York: Springer-Verlag.

Kay, D. C. 1969. *College Geometry,* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Klein, F. 1948. *Geometry,* part 2 of *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint,* New York: Dover.

Klein, F. 1956. *Famous Problems of Elementary Geometry,* New York: Dover.

Kleven, D. J. 1978. "Morley's Theorem and a Converse," *American Mathematical Monthly* **85**:100–105.

Kulczycki, S. 1961. *Non-Euclidean Geometry,* Elmsford, N.Y.: Pergamon.

Kutuzov, B. V. 1960. *Geometry,* Stanford, Calif.: School Mathematics Study Group.

Luneburg, R. K. 1947. *Mathematical Analysis of Binocular Vision,* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Martin, G. E. 1982. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane,* New York: Springer-Verlag.

Meschkowski, H. 1964. *Noneuclidean Geometry,* New York: Academic Press.

Millman, R. S., and G. D. Parker. 1991. *Geometry: A Metric Approach with Models,* 2nd ed., New York: Springer-Verlag.

Pedoe, D. 1970. *A Course of Geometry,* New York: Cambridge University Press.

Peressini, A. L. and D. R. Sherbert. 1971. *Topics in Modern Mathematics for Teachers,* New York: Holt.

Prenowitz, W., and M. Jordan. 1965. *Basic Concepts of Geometry,* New York: Blaisdell.

Sved, M. 1991. *Journey into Geometries,* Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Taylor, E. F., and J. A. Wheeler. 1992. *Spacetime Physics,* 2nd ed., New York: W. H. Freeman and Company.

Trudeau, R. J. 1987. *The Non-Euclidean Revolution,* Boston: Birkhäuser.

Weyl, H. 1952. *Symmetry,* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Whicher, O. 1971. *Projective Geometry: Creative Polarities in Space and Time,* London: Rudloph Steiner Press.

Yaglom, I. M. 1979. *A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis,* tr. A. Shenitzer, New York: Springer-Verlag.

ریاضی پیشرفته

Arnold, V. I., and A. Avez. 1968. *Ergodic Problems of Classical Mechanics,* Reading, Mass.: W. A. Benjamin.

Artin, E. 1957. *Geometric Algebra,* New York: Wiley.

Bachmann, F. 1973. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff,* New York: Springer-Verlag.

Bachmann, F., H. Behnke, and K. Fladt, eds. 1974. *Geometry*, vol. 2 of *Fundamentals of Mathematics*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

Benson, C. T., and L. C. Grove. 1970. *Finite Reflection Groups*, Belmont, Calif.: Bogdon and Quigley.

Blumenthal, L. M., and K. Menger. 1970. *Studies in Geometry*, New York: W. H. Freeman and Company.

Borsuk, K., and W. Szmielew. 1960. *Foundations of Geometry*, Amsterdam: North Holland.

Bottema, O., and B. Roth. 1979. *Theoretical Kinematics*, Amsterdam: North Holland.

Cartan, E. 1950. *Leçons sur la Géométrie Projective Complexe*, Paris: Gauthier-Villars.

Casson, A., and S. Bleiler. 1988. *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, New York: Cambridge University Press.

Coxeter, H. S. M. 1968. *Non-Euclidean Geometry*, 5th ed., Toronto: University of Toronto Press.

Dembowski, P. 1968. *Finite Geometries*, New York: Springer-Verlag.

Do Carmo, M. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Einstein, A. 1921. *Relativity*, New York: Holt.

Ewald, G. 1971. *Geometry: An Introduction*, Belmont, Calif.: Wadsworth.

Fenchel, W. 1989. *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*, New York: de Gruyter.

Gallo, D. M., and R. M. Porter, eds. 1987. *Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space*, New York: Cambridge University Press.

Greenberg, M. J. 1988. "Aristotle's Axiom in the Foundations of Hyperbolic Geometry," *Journal of Geometry* **33**:53–57.

——. 1979. "On J. Bolyai's Parallel Construction," *Journal of Geometry*, **12(1)**:45–64.

Helgason, S. 1962. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, New York: Academic Press.

Henkin, L., P. Suppes, and A. Tarski, eds. 1959. *The Axiomatic Method*, Amsterdam: North Holland.

Hilbert, D. 1987. *Foundations of Geometry*, 2nd English ed., La Salle, Ill.: Open Court.

Hughes, D. R., and F. C. Piper. 1973. *Projective Planes*, New York: Springer.

Klein, F. 1968. *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*, Berlin: Springer-Verlag.

Lenz, H. 1967. *Nichteuklidische Geometrie*, Mannheim: Bibliographisches Institut.

Milnor, J. 1982. "Hyperbolic Geometry—The First 150 Years," *Bulletin American Mathematical Society* **6**:9–24.

Moise, E. E. 1990. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, 3rd ed., Reading, Mass.: Addison-Wesley.

O'Neill, B. 1966. *Elementary Differential Geometry,* New York: Academic Press.

Redei, L. 1968. *Foundation of Euclidean and Non-Euclidean Geometries According to F. Klein,* Elmsford, N.Y.: Pergamon.

Schwerdtfeger, H. 1962. *Geometry of Complex Numbers,* Toronto: University of Toronto Press.

Sommerville, D. M. Y. 1958. *Elements of Non-Euclidean Geometry,* New York: Dover.

Spivak, M. 1970. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry,* 5 vols., Waltham, Mass.: Publish or Perish Press.

Stevenson, F. W. 1972. *Projective Planes,* New York, W. H. Freeman and Company.

Toth, L. F. 1964. *Regular Figures,* New York: Macmillan.

Wolfe, H. E. 1945. *Introduction to Non-Euclidean Geometry,* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Yaglom, I. M. 1962. *Geometric Transformations,* 3 vols., Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

فهرست بنداشتها

بنداشتهای وقوع

بنداشت و-۱. به‌ازای هر نقطه P و هر نقطه Q که با P مساوی نیست، تنها یک خط l وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد.

بنداشت و-۲. به‌ازای هر خط l، دست کم دو نقطه متمایز بر آن وجود دارد.

بنداشت و-۳. سه نقطه متمایز وجود دارند که هیچ خطی بر هر سه آنها واقع نمی‌شود.

بنداشتهای میان‌بود

بنداشت م-۱. اگر $A * B * C$، آنگاه A، B، و C سه نقطه متمایزند که بر یک خط قرار دارند و $C * B * A$.

بنداشت م-۲. دو نقطه متمایز B و D داده شده‌اند. نقاطی مانند A، C، و E بر $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند چنانکه $A * B * D$، $B * C * D$، و $B * D * E$.

بنداشت م-۳. اگر A، B، و C سه نقطه متمایز بر یک خط باشند، یکی و تنها یکی از آنها بین دوتای دیگر واقع است.

بنداشت م-۴. به‌ازای هر خط l و هر سه نقطه A، B، و C ناواقع بر l:
(i) هرگاه A و B در یک طرف l، و B و C هم در یک طرف l باشند، A و C در یک طرف l خواهند بود.
(ii) هرگاه A و B در دو طرف l، و B و C هم در دو طرف l باشند، A و C در یک طرف l خواهند بود.

بنداشتهای قابلیت انطباق

بنداشت ق-۱. هرگاه A و B دو نقطه متمایز باشند و A' نقطه‌ای دلخواه باشد، آنگاه به‌ازای هر نیم‌خطی مانند r که از A' رسم شود، تنها یک نقطه یکتا مانند B' بر r وجود دارد به‌طوری که $B' \neq A'$ و $AB \cong A'B'$.

بنداشت ق-۲. هرگاه $AB \cong CD$ و $AB \cong EF$، آنگاه $CD \cong EF$. به‌علاوه، هر پاره‌خط با خودش قابل انطباق است.

بنداشت ق-۳. هرگاه $A * B * C$ و $A' * B' * C'$ و $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$، آنگاه $AC \cong A'C'$.

بنداشت ق-۴. هرگاه $\measuredangle BAC$ (که بنابر تعریف «زاویه» $\overrightarrow{AB}$ با $\overrightarrow{AC}$ متقابل نیست)، و نیم‌خط نامشخص $\overrightarrow{A'B'}$ که از A' خارج شده است داده شده باشد، فقط یک نیم‌خط یکتای $\overrightarrow{A'C'}$ در یک طرف معین $\overleftrightarrow{A'B'}$ وجود دارد چنان‌که $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$.

بنداشت ق-۵. هرگاه $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ و $\measuredangle A \cong \measuredangle C$، آنگاه $\measuredangle B \cong \measuredangle C$. به‌علاوه، هر زاویه با خودش قابل انطباق است.

بنداشت ق-۶ (ض‌زض). هرگاه دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی به ترتیب با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی دیگر قابل انطباق باشند، آن دو مثلث قابل انطباق‌اند.

بنداشتهای پیوستگی

بنداشت ددکیند. فرض می‌کنیم $\{l\}$ مجموعه همه نقاط واقع بر یک خط l، اجتماع دو زیر مجموعه مجزای ناتهی Σ_1، Σ_2، $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$، باشد به‌طوری‌که هیچ نقطه از یک زیرمجموعه بین

دو نقطه از زیرمجموعه دیگر نباشد. در این صورت یک نقطه یکتای O بر l وجود دارد به قسمی که یکی از زیرمجموعه‌ها با نیم‌خطی از l با رأس O مساوی است و زیرمجموعه دیگر با مکمل آن.

بنداشت ارشمیدس. اگر CD پاره‌خطی دلخواه، A یک نقطه دلخواه باشد، و r نیم‌خطی به مبدأ A، آنگاه به‌ازای هر نقطه $A \neq B$ بر r، عددی مانند n وجود دارد به‌طوری‌که وقتی CD، n بار با شروع از A بر r نهاده شود نقطه‌ای مانند E پیدا می‌شود چنان‌که $AE \cong n.CD$، و $B = E$ یا B بین A و E قرار دارد.

بنداشت ارسطو. یک ضلع یک زاویه حاده و پاره‌خط AB داده شده‌اند؛ بر این ضلع داده شده نقطه‌ای مانند Y وجود دارد به‌قسمی‌که اگر X پای عمود از Y بر ضلع دیگر زاویه باشد، $XY > AB$.

بنداشتهای توازی

بنداشت توازی هیلبرت. به‌ازای هر خط l و هر نقطه P ناواقع بر آن، حداکثر یک خط m وجود دارد که از P می‌گذرد و با l موازی است.

اصل پنجم اقلیدس. هرگاه دو خط را خط سومی چنان ببرد که مجموع دو زاویه درونی واقع در یک طرف قاطع کمتر از $180°$ باشد، آن دو خط در همان طرف قاطع یکدیگر را می‌برند.

بنداشت توازی هذلولوی. خطی مانند l و نقطه‌ای مانند P ناواقع بر آن وجود دارد چنان‌که می‌توان حداقل دو خط متمایز از P رسم کرد که با l موازی باشند.

فهرست نمادها

$\mathrm{P}_{\mathrm{I}}l$	P بر l واقع است
$\{l\}$	مجموعه نقاط واقع بر خط l
AB	پاره‌خط با دوسر A و B
$\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$	خط گذرنده از دو نقطه P و Q
$\cong$	قابلیت انطباق با
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	نیم‌خط از A به B
$\sphericalangle \mathrm{A}$	زاویه به رأس A
$l \| m$	خط l موازی با خط m
$l \perp m$	خط l عمود بر خط m
$\Delta\mathrm{ABC}$	مثلث با رأسهای A، B، و C
$\square\mathrm{ABCD}$	چهارضلعی با رأسهای متوالی A، B، C، و D
$S \cup T$	اجتماع S و T
$S \cap T$	اشتراک S و T
$H \Rightarrow C$	حکم H حکم C را ایجاب می‌کند
RAA	روش برهان خلف
$\sim S$	نقیض حکم S
$\sim$	رابطه (نسبت) هم‌ارزی
$\mathscr{A}^*$	مکمل تصویری $\mathscr{A}$
$\mathrm{A} * \mathrm{B} * \mathrm{C}$	B بین A و C واقع است
$\mathrm{AB} < \mathrm{CD}$	پاره‌خط AB کوچکتر است از پاره‌خط CD
$\sphericalangle\mathrm{ABC} < \sphericalangle\mathrm{DEF}$	زاویه ABC کوچکتر است از زاویه DEF

$n.\mathrm{CD}$	n برابر پاره‌خط CD
$(\measuredangle \mathrm{A})^\circ$	تعداد درجات زاویه A
$\overline{\mathrm{AB}}$	طول پاره‌خط AB
$\delta\mathrm{ABC}$	کاستی مثلث ABC
$\Delta\mathrm{DEF} \sim \Delta\mathrm{ABC}$	مثلث ABC با مثلث ΔEF متشابه است
$\Pi(\mathrm{PQ})^\circ$	تعداد درجات زاویه توازی مربوط به PQ
$[\mathrm{ABCD}$	دو زاویه‌ای ABCD
$r\|s$	نیم‌خط r موازی حدی است با نیم‌خط s
$p(A)$	قطبی نقطه A
$A)(B$	وتر باز با دو سر A و B
$\mathrm{P}(l)$	قطب وتر l
$(\mathrm{AB}, \mathrm{CD})$	نسبت ناهمساز چهارتایی مرتب ABCD
$d(\mathrm{AB})$	درازای پوانکاره پاره‌خط AB
R_m	قرینه‌یابی نسبت به خط m
$d'(\mathrm{AB})$	درازای کلاینی پاره‌خط AB
I	تبدیل همانی
H_A	نیم‌دور حول A
$\mathscr{P}^{۱}(K)$	خط تصویری روی K
$PGL(۲, K)$	گروه تصویری روی K
$PSL(۲, \mathbb{R})$	گروه خطی خاص تصویری حقیقی
C_n	گروه دوری مرتبه n
D_n	گروه دووجهی از مرتبه $۲n$
$\sinh x$	سینوس هذلولوی x
$\cosh x$	کسینوس هذلولوی x
$\tanh x$	تانژانت هذلولوی x
$\Pi(x)$	زاویه توازی برحسب رادیان
$(\measuredangle \mathrm{A'AB'})^r$	اندازه $\measuredangle \mathrm{A'AB'}$ برحسب رادیان
$k = ۱$	نرمال‌سازی خمیدگی در صفحه که باید ۱− باشد
x^*	متمم طول x

نمایه نامها

نمایه موضوعی