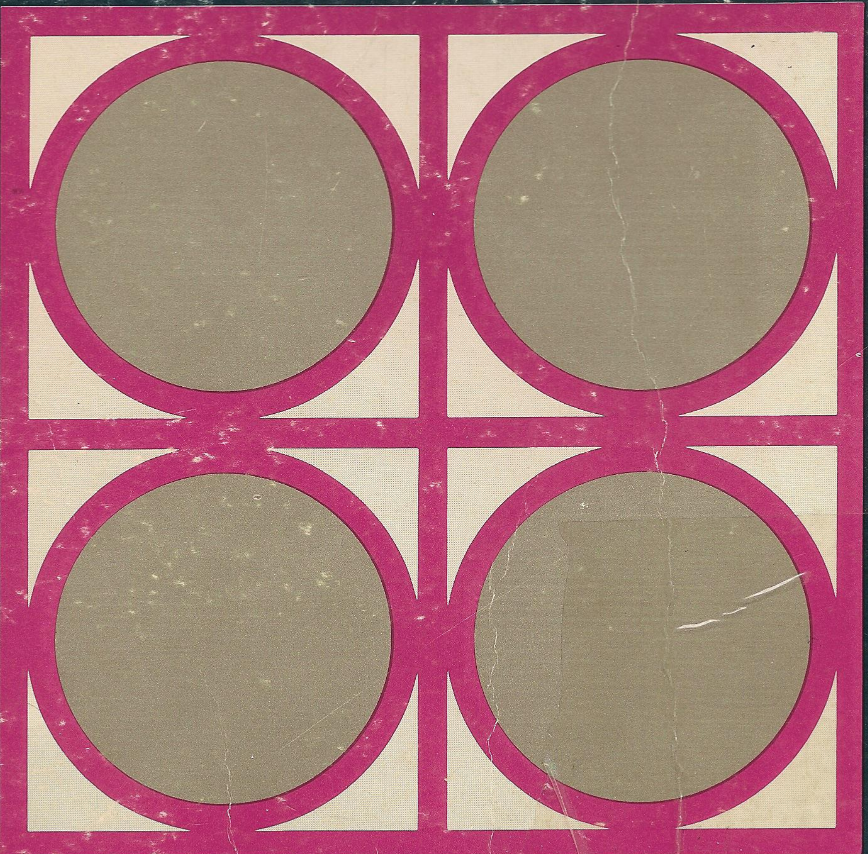
هندسه‌های جدید

جیمز. ار. اسمارت



مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

هندسه های جدید

جیمز. ار . اسمارت
دانشگاه ایالتی سان خوزه

مترجم : غلامرضا یاسی پور

هندسه چیست؟

دانستن اندازه‌ها و چندیِ یک از دیگر و خاصیت صورتها و شکلها که اندر جسم موجود است. و علمِ عدد، بدوکلّی گردد از پسِ آنکه جزوی بود و علمِ صورتِ عالم، حقیقت گردد از پس آنکه به تخمین و گمانی بود.

ابوریحان بیرونی ـ اَلتّفهیم

پیشگفتار

پس از زمانی که به روایت تقویم پنج ماه و به حکایت خاطره بسی بیش‌از این بوده ترجمهٔ کتابی راکه پیش رو دارید به هر جان کندنی[1] بود به پایان رساندم، افتان و خیزان رفتم و از رفیقان ره استمداد همت کردم، و اکنون که در آخر کار مقدمهٔ[2] آن را می‌نویسم باذکر چند مطلب خود را آزاد می‌گذارم و خواننده را در بند آن می‌سپارم.

و اما مطلب اول در مورد متن اصلی کتاب است که در پرداختهٔ سومش طبق فرمودهٔ مؤلف ارجمند وگواهی فصول و بخشهایش از آخرین موضوعات پیدا شده تا سال انتشار ـ ۱۹۸۸ ـ برخوردار است و تنها نقصش ـ به گمان بنده ـ اختصار در مطالب است که آن هم با مراجعه به کتبی که مؤلّف معرّفشان شده رفع می‌گردد، گرچه ممکن است که خوانندهٔ فارسی زبان را به آن کتب دسترسی نباشد.

مطلب دوم راجع به بیان ترجمه است که درآن هرجا لازم بوده از تتابع اضافات روی نگردانده‌ایم چه براین اعتقادیم که آنچه که در علمی (علم بدیع) بدیع نباشد چه بسا در علم دیگر چنین نباشد. نیز درپاره‌ای موارد پس‌از معادلات و نامعادلات از رابطهٔ «است» یا «نیست» و «باشد» و نظایر آن استفاده کرده‌ایم، زیرا با حذف آن شنونده را دانستن این که نویسنده جمله را به کدام صورت فعل ختم کرده میسر نمی‌شود و نیز با این التفات که اصلاً در بعضی موارد حذف این رابطه ممکن نیست.*

نکتهٔ قابل عرض دیگر این است که زبان ما هنوز معادلهای دقیق اصطلاحات جدید ریاضی را به دست نیاورده است و صبر بسیار بباید پدر پیر فلك را تا این طلب حاصل شود و تا آن زمان و ناچار باید با همین‌ها ساخت و چه بساکه همین‌ها خود جای خود را باز کنند و

---

۱. بیا شب گو ببین کان کندنم را ـ نه کان کندن ببین جان کندنم را «نظامی»

۲. در نقش باغ پیش است در اصل میوه بیش است ـ تو اولین گهر را آخر همی رسانی «شمس»

* برخلاف نظر استاد دانشمند فقید دکتر مصاحب رحمةالله علیه.

اصیل شوند. این سخن در مورد اصطلاحاتی که مترجم ناگزیر از وضع آنها شده نیز صداقت دارد.

نکتهٔ دیگری که در این مقام تذکرش را بجا می‌بینم تلفظ اسامی خاص است. اسمی که از یک کشور اروپایی به کشور دیگر رفته و لفظ و کتابت آنجا را گرفته به لفظ و کتابت یک کشور آسیایی چگونه در می‌آید و برای تلفظ مسموع آن رجوع به کدام مرکز یگانه ساز می‌شاید[۳] خدا اعلم است. بعضی را که ـ بجا یا نابجا ـ جا افتاده‌اند می‌دانیم اما آنها را که جانیفتاده‌اند یا نمی‌دانیم چه؟ در این جا یاد ماجرایی که برای دوستم در دوران تحصیلش در انگلستان اتفاق افتاده افتادم. دوستم می‌گفت: «وقتی به آن دیار رفتم از ابتدا می‌دانستم که تلفظ قسمت اول اسم کوچکم ـ غلام رضا ـ برای آن خلایق مشکل است لاجرم غلام را آزاد کردم و به رضا بودن رضا دادم. اما بشنوید که به سر «رضا» ی بیچاره چه آمد. شد ریزا، ریت‌زا، ریزه، و سرانجام یک روز پیرزالی، از پناهندگان روسی، که مدتی صاحبخانه‌مان بود به من گفت: تو خطرناکی و من از تو می‌ترسم. پرسیدم چرا؟ گفت: برای این که رِیْزِر هستی. بنده در ابتدا ندانستم که چه می‌گوید و خلاصه به کمک رمل و اسطرلاب و باز کردن سر کتاب متوجه شدم که مقصودش «razer[۴]» است، و به همین جهت است که از من مستأجر یک لاقبا ـ که با هیچ تیغی حتی تیغ آفتاب سروکار نداشتم ـ در هراس است.» به هر حال در این عرض بودم که یکی دیگر از مشکلات کار ترجمه تلفظ اسامی خاص است که اگر مرکزی برای این کار باشد وصلحا در آن گرد آیند و جویندگان به آن گذار کنند یک اسم چند تلفظ که غالباً هم از لفظ اصلی آن دورند به خود نمی‌گیرد و چند لون نمی‌پذیرد.

نکتهٔ دیگر در مورد کار کتاب و کتاب نویس اعم از مؤلف و محقق و مترجم است. آنها که با کتاب سروکار دارند نیک می‌دانند که قوم نویسنده زجرشان چه گران است و اجرشان چه کم[۵] و از آن زمانها که قلم مدعی عنوان شاه جهانی بوده زمانها گذشته و دیگر قلم را سر آن نیست که قلم زن را به دولت برساند[۶] و پای آن نه که بدان دیار بدواند. مرد قلم زن را چون قلم سرشکسته و به نوشتهٔ یک قلم حتی یک قلم جنس کوپنی ـ در بازار آزاد ـ نمی‌فروشند. ناشران[۷] چنان بلایی به سر نویسندگان آورده‌اند که بعضی ترجیح داده‌اند که قلم را بشکنند و کاغذ را بدرند و به کنج عافیت بنشینند و بعضی کار تحقیق را رها کرده‌اند و خود

---

۳. البته برای یگانه سازی تلفظ اسامی دستورالعملهایی هست که کامل به‌نظر نمی‌رسند.

۴. تیغ

۵. تعبیر از حمیدی شیرازی است.

۶. ظریفی می‌گفت خداوند تعالی نیز آنجا که به قلم سوگند خورده «نون» را قبل از قلم آورده.

۷. شاید هم نخواسته، به هرحال بنده بعضی از ناشران خصوصی را می‌گویم و روی سخنم با ناشر این کتاب ـ که دولتی است ـ نیست.

ناشر و کاسب کتاب فروش[8] شده‌اند و سراغ کاغذ و مقوا رفته‌اند و مظنّهٔ آن و این را از این و آن می‌پرسند. به اولیای امور توصیه می‌شود که به امور این گروه از مسلمین[9] ـ و بسا نامسلمین اما وطن دوست و مردمی وار ـ اهتمام بیشتری ورزند و به دل سردی‌شان گرمی بیشتر ندهند.

سرانجام تقاضامان از خردوران این است که آهنگی ساز کنند که چین زلف خطاهای کلان‌مان را باز کنند، خردان را نیز از قلم نیندازند، باشد که به یمن نظر درویشان و صدق نفس ایشان[10] ترجمه جامهٔ بهبود بر تن کند و عزم برزن کند. نقد کتاب در این دیار به گونه‌ای غریب درآمده و جز در موارد نادر یا سر تا پا مدح است یا پاتاسر قدح و گاه‌گاه کار به تمسخر و فحش و قاه قاه نیز می‌کشد. درمکتبی که امیرمؤمنانش را سخن از مَنْ عَلَّمَنی حَرْفاً فَقَدْ صَیَّرَنی عَبداً است و افصحِ متکلّمانش براین که متکلّم را تاکسی عیب نگیرد سخنش اصلاح نپذیرد[11]، بهانهٔ گریز از به شدن نیست، اما نقد و تحقیر یا تحبیب نیز از دو مجموعهٔ جدا از همند. خطابمان کنید و عتابمان کنید اما دلمان را نشکنید.

در پایان از آقایان حمیدرضاامیری و احمد برادری و سیدحسین سیدموسوی که کتاب را دراختیار این حقیر قرار دادند و توصیهٔ ترجمهٔ آن را کردند کمال تشکر را دارم و توفیقاتشان را از خداوند متعال خواستارم.

تابستان ۷۰ ـ غلامرضا یاسی‌پور

۸. تا نیوشم درون خانه خموش ـ شده‌ام کاسبی کتاب فروش «بهار»

۹. اشاره به حدیث نبوی

۱۰. عبارت از سعدی است.

۱۱. گلستان باب هشتم

مقدمهٔ مؤلف

در سالهای پس از نشر پرداختهٔ*[1] دوم کتاب، طرح قرار دادن یک یا بیش از یک دورهٔ هندسهٔ در سطوح پایین یا بالای دانشگاهها، ادامه یافته، و استفاده از گروههای تبدیلات و مجموعه‌های آکسیومها در طبقه‌بندی هندسه‌ها اهمیت خود را حفظ کرده است. هندسه‌دانها باید از این‌که حوزهٔ جدید گرافیکهای کامپیوتری به صورت کاربرد مهمی از مفاهیم هندسی ظاهر شده خوشنود باشند. به همین ترتیب، ادامهٔ تأکید برحل مسأله در سراسر دورهٔ تحصیل ریاضی هندسه را به صورت منبع جاذبی از مسائل مطرح و رابطهٔ بین مهارت در هندسه و مهارت در روشهای حل مسأله را خاطرنشان کرده‌است.

پرداختهٔ سوم، مرکب از شمار بزرگی از اصلاحاتی است که توسط مرورکنندگان و معلمان و دانشجویانی که پرداخته‌های پیشین را به کار برده‌اند مطرح شده‌اند. مجموعه‌های تمرینات تا در برگرفتن دهها تمرین جدید در درجات گوناگون سختی وسعت یافته‌اند. بسیاری از این مسائل از نوع تحقیقیند که به معلم این امکان را می‌دهند که به تعیین پروژه‌های فوق‌العادهٔ خواهان بررسی مراجع، انجام تحقیق، انجام کشف و تعمیم، و دست یازی به سایر فعالیتهایی که به‌گونهٔ وسیعی توان توسعهٔ پوشش بخشهای گوناگون را دارا هستند، بپردازد. تغییرات دیگر شامل اصلاح بسیاری از اشکال و افزودن اشکال دیگر، واضح کردن ابهامات جمله بندی، بازنویسی بعضی اثباتها، درج کاربردهای جدید بسیار، آوردن توضیحات تاریخی بیشتر، و تقویت کردن مراجعند. جمیع جنبه‌های مطلوب پرداختهٔ قبلی را ابقا کرده‌ایم، و با این همه تغییرات مذکور به‌کتابی که حتی ریاضی‌تر به نظر می‌رسد و آموزنده‌تر است انجامیده.

موضوع اصلی کتاب، هم چنان که عنوان آن دلالت می‌کند، بررسی هندسه‌های

* کمال یافته «فرهنگ معین»

1. Edition

متفاوت به جای هندسه‌ای واحد است. دو فصل اول کتاب دو طریق دسته‌بندی بعضی‌از هندسه‌ها را، به کمک مجموعهٔ آکسیومها یا به کمک نوع تبدیل تعریف شده، به دست می‌دهند. هر دو طریق را به گونهٔ وسیعی در کتاب به کاربرده‌ایم، وگاهی دربررسی یک هندسه از هر دو سود جسته‌ایم. هندسه‌های متناهی فصل ۱ ؛ تحدب، هندسهٔ اقلیدسی، و ترسیمات فصول ۳ و ۴ ، هندسهٔ تصویری فصل ۷ ، و هندسهٔ نااقلیدسی فصل ۹ را برمجموعه‌های گوناگون آکسیومها بنا کرده‌ایم، و علاوه بر مثالهایی از هندسه‌هایی که در فصل ۲ از نظرگاه تبدیلی مطرح شده‌اند، فصول جداگانه‌ای (۶، ۷، ۸) راجع به انعکاس، هندسهٔ تصویری، و تبدیلات توپولوژیک با جوهرهٔ هندسهٔ وابستهٔ به تبدیل مجاز مربوطه آورده‌ایم.

کتاب، در سرتاسر خود، برکاربردهای عملی و تازهٔ هندسهٔ جدید تأکید دارد، و دانشجو باید آگاه باشد که بسیاری از موضوعات آن در مجلات حرفه‌ای جاری در بحث نشسته‌اند و ریاضیدانهای محقق معاصر به طور جدی در بسط مفاهیم هندسی آنها وارد شده‌اند. زمینهٔ به کار رفتهٔ جدید و مهم گرافیکهای کامپیوتری، با تأکید افزون برماتریسهای تبدیلات، را باتفصیلات قابل ملاحظه‌ای در پرداختهٔ سوم تأمین کرده‌ایم.

کتاب برای دانشجویانی که به طور وسیعی در قابلیتهای ریاضی‌شان متغیرند نوشته‌شده، و بسیاری از مطالب آن مناسب آنهایی است که زمینه‌های متوسط یا ضعیفی در هندسه دارند. از طرف دیگر، دانشجویان با زمینه‌های قویتر نیز، در آن توسیعات جدید بسیاری از مفاهیمی راکه مهارتهای حل مسأله‌شان را تقویت می‌کنند، خواهند یافت.

کتاب هم برای زیردستان و هم برای زبردستان ریاضی طرح شده، و هم مناسب دانشجویانی که از نظرگاه هنرهای آزاد به ریاضیات شوق می‌آرند و هم مناسب آنانی که سودای معلم ریاضیات شدن را در سرمی‌دارند است.

بسیاری از تمرینات اولیهٔ موجود در هر مجموعه را می‌توان به عنوان مبنای بحث کلاس درس به خدمت گرفت؛ و با این روش استاد می‌تواند مطمئن شود که مفاهیم اساسی درک شده‌اند. تمرینات بعدی تجربهٔ جامعی در تحصیل اثباتهای مستقل به‌دست می‌دهند. تمرینات باز پایانی*[2]، که در این پرداخته جدیدند، فرصتهای بسیاری در مطالعهٔ بیشتر به بار می‌آورند.

فصول گوناگون کتاب به نحو وسیعی مستقلند، و این، نیز ترتیب موضوعات داخل هر فصل، مطابق با احتیاجات کلاس و مطلوبات استاد، قابلیت انعطاف بسیاری را در رابطه با کاربردشان مجاز می‌کند.

---

* تمریناتی که حد ثابتی ندارند.

2. „Open - Ended Exercises„

جدول مطرح کنندهٔ بعضی از ترتیبات ترمی ممکن

I. استفاده از کل کتاب برای سه ترم*[3] یا سه چهارم یک دوره

طرح A. (سیستم سمیستری یا ربعی**[4]) ترتیب کتاب را رعایت کنید.

طرح B. (سیستم سمیستری) یک سمیستر برای هندسهٔ تبدیلات (فصول ۲،۶،۷،۸) و سمیستر دیگر برای دستگاههای آکسیوماتیک (فصول ۱،۳،۴،۵،۹)

طرح C. (سیستم ربعی) یک ربع برای هندسهٔ تبدیلات (فصول ۲،۷،۸)، ربع دیگر برای دستگاههای آکسیوماتیک (فصول ۱،۶،۹)، ربع دیگر برای توسیعات هندسهٔ اقلیدسی (فصول ۳،۴،۵)

II. استفاده از قسمتهایی از کتاب که کمتر از یک سال آکادمیک را پوشش می‌دهند.

طرح D. (دو ربعی) هر دو ربعی از طرح C

طرح E. (دو ربعی) تمام کتاب غیراز فصول ۵،۶،۹

طرح F. (دو ربعی) تمام کتاب غیراز فصول ۳،۵،۸

طرح G. (یک سمیستری) یکی از سمیسترهای طرح B

طرح H. (یک سمیستری) فصول ۱-۴

طرح I. (یک ربعی) هریک ربع طرح C

طرح J. هرچند فصلی که زمان اجازه می‌دهد را با انتخاب بخش اولیه و حذف بخشهای بعدی هر فصل بررسی کنید.

مایلم که در اینجا قدردانی و سپاسگزاری خود را از جمیع اساتید و دانشجویان و سایر اعضای دانشکده‌ها که پیشنهادی ارزنده‌ای برای بهبود کتاب مطرح کرده‌اند، نیز از دست‌اندرکاران نشر این کتاب ابراز دارم.

جیمز . ار . اسمارت

---

3. Semester

4. Quarter System

*. دورهٔ شش ماهه

**. دورهٔ سه ماهه

فهرست

۱

مجموعه‌های آکسیومها و هندسه‌های متناهی

۱.۱ مقدمه

کلمهٔ هندسه مُعَرّب اندازه و معنی تحت‌اللفظی آن اندازه گیری زمین است[۱]، و این معنی، گرچه بس حقیرتر از آن است که شامل هندسه‌های متنوع جدید موردبررسی این کتاب شود، در ظهور و پیشرفت هندسهٔ باستانی ماقبل یونانی دارای اهمیت بوده‌است. موارداستعمال عملی مصری‌ها و بابلی‌ها از هندسه، به‌مقیاس وسیعی بااندازه گیری سروکار داشت و با اثبات‌های صوری منطقیون پیچیده نشده‌بود. فی‌المثل، خواص مثلث‌قائم‌الزاویه، احتمالاً تااین‌حد که طنابی گره‌دار (شکل ۱.۱)، که‌توسط سه‌مرد و به‌محکمی چنان‌کشیده‌شود که مثلثی قائم‌الزاویه تشکیل دهد، می‌تواند در مسّاحی به کار رود، شناخته شده‌بود.

صدها لوح ازخشت‌های پختهٔ‌مانده ازبابل‌باستانی محتوی مفاهیم‌هندسی است. تحلیل لوح مشخص بانشان پلیمتون۳۲۲[۲] (کاتالوگ شمارهٔ ۳۲۲ درمجموعهٔ پلیمتون در دانشگاه کلمبیا) نشان‌می‌دهد که بابلی‌ها درحدود سال‌های ۱۶۰۰-۱۹۰۰ ق.م. دانسته‌هاشان از مثلث‌های قائم‌الزاویه را تا تنظیم سه‌تاییهای‌فیثاغورسی ابتدایی گسترش داده‌بوده‌اند. فی‌المثل، اعداد ۳، ۴، ۵ یك‌سه‌تایی ابتداییند چراکه می‌توانند به‌عنوان طولهای اضلاع مثلثی قائم‌الزاویه به‌کار روند، و عامل‌مشترك درست دیگری جز ۱ ندارند. بابلی‌ها افتخار تقسیم دایره به ۳۶۰ قسمت (مساوی) رانیز داشته‌اند. دوپاپیروس از مصرباستانی، مورِّخ همین دوره، و موسوم‌به پاپیروس‌مسکو[۳] و پاپیروس‌ریند[۴] حاوی مجموعاً ۲۶مسألهٔ هندسیند، که اغلب آن‌ها بافرمولهای اندازه گیری به کاررفته درمحاسبهٔ سطح‌زمین و حجم‌انبارها سروکار

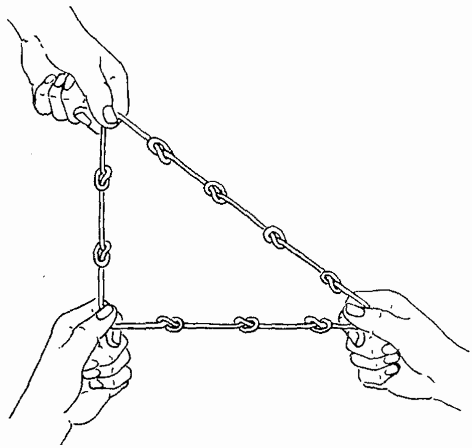
---

۱) درزبان‌انگلیسی کلمهٔ «Geometry» از دوجزءِ «*Geo*» به‌معنی «Earth» و «*Metry*» به‌معنی «Measure» تشکیل‌شده و روی‌هم به‌مفهوم اندازه‌گیری زمین یا **زمین‌سنجی** است. م.

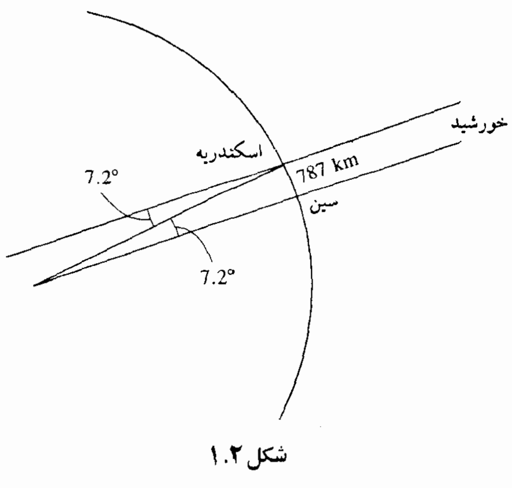
2) Plimpton 322

3) Moscow Papyrus

4) Rhind Papyrus



شکل ۱.۱



شکل ۱.۲

دارند. بعضی ازاین مسائل درارتباط با به‌دست آوردن شیب‌وجه‌هرمند.

علم اندازه گیری زمین درطی دوران یونانی پالوده‌ترشد. اِراتُستِن[5]، حدود ۲۳۰ قبل‌از میلاد، اندازه گیری نسبتاً دقیقی از اندازهٔ‌زمین انجام‌داد. طبق‌حدیث مشهوری، اراتستن می‌دانست که خورشید، در انقلاب صیفی[6] و به‌هنگام نیمروز، درچاهی در سین[7] به‌طور مستقیم می‌تابد. نیز دریافت که اشعهٔ خورشید، درهمین زمان در اسکندریّه، تقریباً واقع در ۷۸۷

5) Eratosthenes 6) Summer Solstice 7) Syene

کیلومتری شمال سین، درحدود °۷.۲ ازخط‌قائم تمایل دارند (شکل ۲.۱)، و اراتستن، با این اندازه‌ها توانست قطر زمین را بیابد.

جالب است که دردوران‌اخیر، این جنبه ازهندسه، یعنی اندازه‌گیری‌زمین، به‌علت این‌که اقمارمصنوعی، ابزارهای قرارداده‌شده برکرهٔ‌ماه، و نقشه‌برداری ساحلی و زمین‌سنجی آمریکایی[8] (درتهیهٔ نقشه‌های[9] دریانوردی[10] و هوانوردی[11]) قادر به‌تهیهٔ اندازه‌های بسیار دقیقی از زمین شده‌اند، موردتوجه قرارگرفته‌است.

اما، شاید این‌روزها کلمهٔ‌هندسه برای بسیاری ازمردم اندازه‌گیری‌زمین را تداعی نکند، و ممکن‌است ریاضیدان‌ها هندسه‌های مندرج دراین‌کتاب رابه‌عنوان بررسی خواص و نسب مجموعه‌های نقاط توصیف‌کنند. گرچه این کلمه برای یك فارغ‌التحصیل متعارف، احتمالاً دورهٔ‌هندسهٔ‌مسطحه‌ای راکه دردبیرستان فراگرفته یا امکاناً مورد استعمال مختصات‌نقاط راکه باآن درخواندن‌جبر یا حساب جامع و فاضل مواجه شده مطرح می‌کند. بسیاری از افتخارات توسعهٔ هندسهٔ برهانی، از همان‌نوع که درسطح دبیرستان موردبررسی قرارمی‌گیرد، به‌یونانیان‌باستان دوران ۵۰۰ ق.م. تا ۱۰۰ بعدازمیلاد می‌رسد. اینان زیبایی هندسه را به‌عنوان انتظام‌ساخت، یعنی نظمی که درساختمان آن است شناختند و دانستند که اثبات یك‌قضیه می‌تواند حتی ازکشف‌کاربرد عملی آن مهیج‌تر باشد.

هندسهٔ یونانی، که به‌علت کارتاریخی و اعجاب‌آور اقلیدس (۳۰۰ ق.م.) به **هندسهٔ اقلیدسی**[12] موسوم‌است، شامل **عبارات‌تعریف‌نشده**[13]، **عبارات‌تعریف‌شده**[14]، **آکسیوم‌ها**[15] یا **اصول موضوع**[16]، و **قضایا**[17] می‌باشد. سایرهندسه‌های موردبحث این‌کتاب به‌همین ساخت‌اند، لذا مجموعه‌های آکسیوم‌ها یکی‌از طرق مناسب تنظیم یك‌هندسه به‌شمارمی‌آیند. به‌این‌مناسبت است‌که به‌جمیع‌هندسه‌های‌فصول ۱، ۳، ۴، ۵، و ۹ ازنظرگاه‌آکسیوماتیك، یعنی باشروع از آکسیوم‌ها، تقرب کرده‌ایم. درهندسهٔ‌اقلیدسی، معمولاً **عبارات‌تعریف‌نشده**، که‌اختیاریند و می‌توان به‌سادگی به‌جای آنان عبارات‌دیگری را قرارداد، عباراتی چون **نقاط**[18]، **خطوط**[19]، و **صفحات**[20] اند؛ این امکان‌نیز وجوددارد که هندسهٔ‌اقلیدسی را بابه کاربردن مفاهیمی چون‌فاصله و زاویه مطرح‌کنیم، و این‌ها را تعریف‌نشده درنظر بگیریم. تعاریف کلمات‌جدید متضمن

---

8) U.S. Coast and Geodetic Survey
9) Chart
10) Nautical
11) Aeronautical
12) Euclidean Geometry
13) Undefined Terms
14) Defined Terms
15) Axioms
16) Postulates
17) Theorems
18) Points
19) Lines
20) Planes

استفاده از عبارات تعریف‌نشده‌اند.

امروزه، کلمات آکسیوم و اصل‌موضوع به‌جای‌یکدیگر به کار می‌روند. اما، درطرح توسعهٔ هندسه، کلمهٔ اصل‌موضوع درمورد فرض منحصربه موضوع خاصی (مثلاً هندسه) به کار می‌رفت، درحالی‌که آکسیوم یا اصل‌متعارف نمایشگر «حقیقتی‌کلی»، یعنی فرض‌عمومی‌ای که در تمام ریاضیات کاربرد داشت، بود. اصول‌متعارف و موضوعهٔ‌اقلیدس دربخش ۱۰۷ بیان شده‌اند. این اصول را ازلحاظ صدق موردبحث قرارنمی‌دهیم، چه‌این گزاره‌ها مفروضات آغازگری هستند که‌نتایج‌منطقی از آن‌ها استنتاج می‌شوند. آن‌ها مشابه قوانین‌بازیند، و از آن‌جا که دستگاه‌ریاضی موردتوسعه، وابسته‌به این‌اصول است، تغییراصول‌متعارف آن می‌تواند، درست همان‌گونه که تغییر قوانین یك‌بازی، بازی را تغییرمی‌دهد، تغییرات‌عظیمی در آن دستگاه به‌وجودآورد.

قضایاگزاره‌هایی هستند که باید بااستفاده‌از آکسیوم‌ها، تعاریف، و قضایای‌قبلی، که به‌عنوان دلایل مراحل منطقی‌اثبات به کارمی‌روند، اثبات‌شوند. قضایای‌هندسه نتایج‌درستی برمبنای آکسیومهایند. یك‌قضیهٔ‌ساده به‌طورمعمول به‌صورت‌گزارهٔ اگر ـ آن‌گاهی چون، «اگر مجموع اندازه‌های‌زوایای‌مقابل یك‌چهارضلعی (به‌درجه) ۱۸۰ باشد، آن‌گاه این چهارضلعی می‌تواند دریك‌دایره محاط‌شود»، بیان‌می‌شود، ازلحاظ منطق، این گزاره، گزاره‌ای شرطی است. فهرست مفاهیم‌منتخبی ازمنطق را در ضمیمهٔ ۴ و فهرست قضایای منتخبی از هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی را درضمیمهٔ ۵ آورده‌ایم.

هندسهٔ‌یونانی، ترکیبی[21] و بدین‌معنی بود که چون هندسهٔ‌تحلیلی برای اعداد از مختصات استفاده‌نمی‌کرد. درواقع پیشرفتهای‌مهم درهندسهٔ‌ترکیبی‌یونانیان تنها با اختراع هندسهٔ تحلیلی (حدود۱۶۳۷) و استفادهٔ‌بعدی آن به‌عنوان وسیله‌ای در آنالیز مدرن انجام گرفت، و گرچه در این‌کتاب هندسهٔ‌تحلیلی موضع‌مسلط ندارد، هرجا که مقتضی بوده از مختصات نقاط به‌عنوان روش‌دیگری درمقابل روش‌ترکیبی استفاده شده‌است.

عنوان هندسه‌های جدید[22]، باتأکید برکلمهٔ جمع، باید خواننده را آمادهٔ‌دریافت بیشتری درمورد موجودیت نه فقط یک، بلکه بی‌شمار، هندسه کند، و همان‌گونه که کلمهٔ جدید وارد دراین‌عنوان دلالت‌می‌کند، تأکید بیشتر برهندسه‌های جدیدتر ـ آنها که‌از ۱۸۰۰ به‌بعد مطرح شده‌اند ـ است. ظهورجبرمدرن، بانظریهٔ‌گروه‌هایش و ورود آکسیوماتیکها درجبر، راه را برای طبقه‌بندی هندسه‌های‌فلیکس‌کلاین در ۱۸۷۲ هموارکرد. مفهوم‌اساسی تبدیلات لازم در درك این طبقه‌بندی درفصل ۲ موردبحث قرارگرفته‌است. بسیاری‌از هندسه‌ها را می‌توان با

21) Synthetic

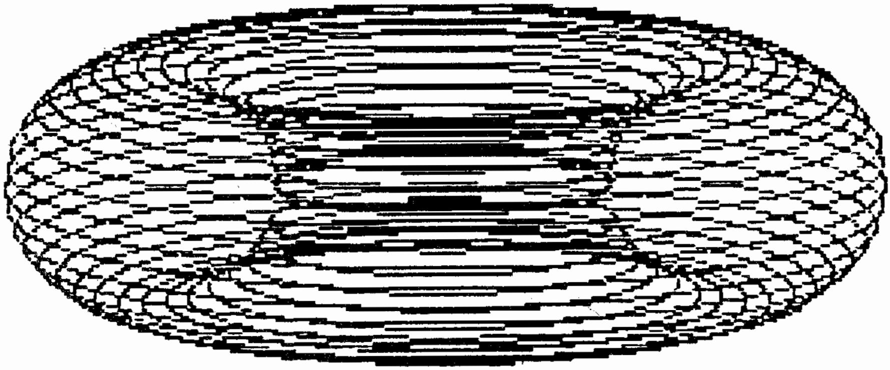
22) Modern Geometries

استفاده ازهمین مفهوم‌اساسیِ تبدیلات تبیین‌کرد. ریاضیدانها درهرمورد، به‌خواصی‌که، چون مجموعه‌های‌نقاط به‌طریقی تغییرکنند، یکسان باقی‌می‌مانند، علاقه‌مندند. هندسه‌های فصول ۲، ٦، ۷، و ۸ همه توسط تبدیلات طبقه‌بندی شده‌اند.

قسمت اخیر قرن‌نوزدهم گواه‌تجدیدتوجه به‌هندسهٔ کلاسیك مثلث و دوایر، بااین نتیجه‌که هندسهٔ یونانی توسط اضافات‌مهم بسیاری توسعه‌یافت، بود (فصول ۴ و ۵). هندسهٔ تصویری[23] (فصل ۷) درحدود ۱۸۲۲ اختراع شد؛ مطالب مربوط به هندسهٔ نااقلیدسی[24] (فصل ۹) در حدود ۱۸۳۰ به‌چاپ سپرده و هندسهٔ‌انعکاس[25] (فصل ٦) درحدود همین‌ایام مطرح‌شد.

طی قرن بیستم، تحقیقات در مبانی اصل موضوعی هندسه و هندسه‌های‌متناهی[26] (فصل ۱)، هندسهٔ‌تحدب[27] (فصل ۳)، و توپولوژی‌هندسی[28] (فصل ۸) همه به پیکرهٔ عظیم هندسه، که به‌طورنسبی مستقل‌از آنالیز است، افزوده شدند. یکی از پیشرفت‌های بسیارتازه، به‌خصوص از ۱۹۷۵ به‌بعد، کاربرد بسیاری‌از مفاهیم‌هندسی درحوزهٔ جدیداً به کارگرفته‌شدهٔ گرافیکهای کامپیوتری[29] است. شکل ۱.۳ ترسیم‌گرافیکی به‌دست‌آمده بریك میکروکامپیوتر را نشان می‌دهد.

حتی همین‌طرح مختصر درمورد برخی‌از مراحل‌عظیم تاریخ‌هندسه، باید خواننده را متقاعدکرده باشدکه بحث‌هندسه‌های‌جدید، ناگزیر بابسیاری ازانواع متفاوت‌هندسه سروکار دارد، و خواننده باید هربارکه باهندسهٔ‌جدیدی مواجه‌می‌شود این جنبهٔ‌مسلط را به‌خاطر داشته



شکل ۱.۳

23) Projective Geometry
24) Non - Euclidean Geometry
25) Inversive Geometry
26) Finite Geometry
27) Geometry of Convexity
28) Geometric Topology
29) Computer Graphics

باشد. به‌این ترتیب شناخت دستگاه‌های ریاضی مختلفِ درخور عنوان هندسه است که بین کتابی درمورد هندسه‌های جدید و متن هندسهٔ سنتی دانشگاهی یك‌ربع قرن پیشی، که تنها برمطالعهٔ دوباره و بسط مستقیم هندسهٔ اقلیدسی دبیرستان متمرکز بوده، تمیزمی‌نهد. وبا این همه می‌توان هندسه‌های دیگری رانیز دراین شناخت دخالت‌داد، و فی‌المثل، در اوایل قرن نوزدهم، گوس، ریمان و دیگران حساب‌جامع و فاضل و آنالیز را درهندسه به کار گرفتند و هندسهٔ خاصی موسوم به هندسهٔ دیفرانسیل[30] به‌وجودآوردند. این تقرب بسیار بارآوربود و به‌نتایجی، که درتوسعهٔ فیزیك‌مدرن وکیهان‌شناسی ازاهمیت اساسی برخوردار بودند، منجر شد.

تمرینات ۱.۱

(جوابهای تمرینات منتخب درپایان کتاب داده‌شده‌است.)

۱. تحقیق کنید که قضیهٔ فیثاغورس، $a^2+b^2=c^2$، درمورد اضلاع‌مثلث شکل ۱.۱ برقرار است.

۲. برای تهیهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع کوچك‌ترِ به‌اندازه‌های ۵ و ۱۲ واحد، چندگره در طناب لازم است؟

۳. برای تهیهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع کوچك‌ترِ به‌اندازه‌های ۹ و ۱۲ واحد، به‌چندگره در طناب نیاز است؟

۴. چرا مصریها برای‌تهیهٔ مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای بااضلاع‌کوچك‌ترِبه اندازه‌های ۵ و ۱۰ واحد، نمی‌توانستند ازطناب استفاده کنند؟

۵. از اندازه‌های اراتستن برای به‌دست‌آوردن قطرتقریبی زمین استفاده کنید.

٦. از اندازه‌های اراتستن برای به‌دست‌آوردن تفاوت تقریبی زاویهٔ‌تمایل خورشید در دو محل به‌فاصلهٔ ۱۰۰۰km واقع‌درجهت شمال ـ جنوب، هردو در شمال استوا، استفاده کنید.

درمسائل ۷ و ۸، فرض براین‌است که روش اراتستن را می‌توان درمورد سیاره‌های‌دیگر به‌کاربرد.

۷. درصورتی که فاصله ۳۰۰مایل و تفاوت‌زاویه °٦ باشد، محیط‌سیاره چقدراست؟

---

30) Differential Geometry

۸. درصورتی که فاصله ۴۰۰مایل و تفاوت‌زاویه 8° باشد، محیط سیاره چقدراست؟

درمسائل ۹ - ۱۴ صدق یاکذب را مشخص‌کنید؛ بعدخطای هرگزارهٔدروغ را توضیح‌دهید.

۹. هندسهٔدبیرستانی به‌مصریان‌باستان بیش‌از یونانیان باستان مدیون‌است.
۱۰. اقلیدس کلمهٔ اصل‌موضوع را برای فرض منحصربه یک موضوع‌خاص به‌کاربرده است.
۱۱. تعاریف‌باید‌تنها کلماتی را که قبلاً تعریف شده‌اند، ونه‌عبارات تعریف‌نشده، رابه‌کار برند.
۱۲. هندسهٔ‌تحلیلی پیش‌از مطرح‌شدن هندسه‌های‌متناهی اختراع شده‌است.
۱۳. قسمت‌اخیر قرن‌نوزدهم گواه‌تجدیدتوجه به‌هندسهٔ کلاسیک مثلث و دوایر بوده‌است.
۱۴. هندسهٔ دانشگاهی سنتی یک‌ربع قرن پیش، بیش‌از امروز شامل هندسه‌های متفاوت بوده‌است.

درسرتاسرکتاب، تمریناتی که بعداز شماره‌شانI آمده مسائل تحقیقی‌ای هستند که ممکن است به بررسی مراجع، انجام‌تحقیق، تعمیم‌دادن، و سایرفعالیت‌های‌اضافی‌برای‌گسترش آن‌چه تحت‌پوشش بخش مربوطه آمده نیازمند باشند.

۱۵I. چگونه می‌توان از ابزارآلات واقع‌برکرهٔماه برای اندازه‌گیریهای دقیق زمین استفاده‌کرد؟کوشش‌کنید پاسخ را قبل‌از مراجعه به مراجع پیدا کنید.
۱۶I. کتاب‌تاریخ ریاضیاتی دربارهٔ هندسهٔ بابل و مصرباستان مطالعه‌کنید، سپس روی چند مسألهٔ هندسی یافت‌شده در پاپیروس‌ها کارکنید.

۱.۲ مدخل هندسه‌های‌متناهی

سطح‌اقلیدسی دارای بی‌نهایت نقطه و خط، و مجموعه‌ای غنی از قضایایی که به روزگاران به اضافه شدن مداومت‌می‌کنند، است، و به‌عکس آن، هندسه‌های «تُنُک‌مایه[31]» تنها تعدادادندکی آکسیوم و قضیه و شمارمحدودی عضو یا عنصر دارند. اینان هندسه‌هایی‌متناهی[32] اندکه مقصوداز آورد نشان دراین مرحله، این است که مجال‌وسیعی برای بررسی هندسه‌های باساخت[33] ساده پدید می‌آورند.

31) Miniature 32) Finite Geometries 33) Structure

جمیع هندسه‌های موردبحث این‌کتاب تعدادمعدودی آکسیوم و شمارمحدودی عبارت تعریف‌ناشده دارند. اما چنین‌خصوصیاتی، هندسه را متناهی‌نمی‌کنند، و درعوض، هندسهٔ متناهی دارای تعدادمحدودی عضو ـ یعنی، نقطه یا خط یا «آلت‌فعّاله[۳۴]» است. اعضای مذکور، درمورد هندسه‌های موردبررسی این‌فصل، می‌توانند نقاط و خطوط درنظر گرفته شوند.

ازلحاظ تاریخی، اولین هندسهٔ‌متناهی هندسهٔ سه‌بعدی‌ای[۳۵] بود که هر صفحهٔ آن هفت نقطه و هفت‌خط داشت. بدعت هندسه‌های‌متناهی بااین واقعیت که جینو فانو[۳۶] این‌اولین هندسهٔ متناهی را در ۱۸۹۲ کشف‌کرد موردتأکید قرارمی‌گیرد، گرچه بعضی‌از افکار مربوط به‌این مطلب را می‌توان تا فن‌اشتادت[۳۷] (۱۸۵۶) پی‌گرفت. درسال ۱۹۰۶ بود که هندسه‌های تصویری متناهی توسط وبلن[۳۸] و بوسی[۳۹] موردبررسی قرارگرفتند. از آن‌زمان به‌بعد تعداد بسیاری هندسهٔ‌متناهی بررسی‌شد و یا درحال بررسی‌شدن‌اند، و بسیاری ازمجموعه‌های‌نقاط و خطوطی که قبلاً درهندسهٔ‌اقلیدسی شناخته‌شده‌بودند ازاین‌نظر موردتحقیق قرارگرفته‌اند. برخی از هندسه‌های‌متناهی جزءلازم هندسهٔ تصویریند، و شناخت هندسه‌های متناهی فصل ۱ دربررسی بعضی از مجموعه‌های‌اساسی نقاط و خطوط به کاررفته دربخش ۷ به کارمی‌آید. با این همه، درحال‌حاضر امکان این هست که دانشجوی‌ریاضیات بدون‌برخورد با هندسه‌های متناهی درجهٔ‌دانشگاهی بگیرد، گرچه این سخن هم که هندسه‌های‌متناهی به‌طور افزاینده‌ای به‌عنوان موضوعات‌اضافی و واحدهای‌تعمیمی درسطح‌دبیرستان به‌کارگرفته می‌شوند، حقیقت دارد. هندسه‌های‌متناهی کاربردی‌عملی درآمار نیز یافته‌اند.

جمیع هندسه‌های‌متناهی این‌فصل نقطه و خط را به‌عنوان عبارات تعریف‌نشده دارند. اما، دلالت تضمن خط درهندسهٔ‌متناهی بادلالت آن درهندسهٔ‌اقلیدسی معمولی یکسان نیست زیرا درمورد اول فرض براین است که خط بیش‌از یك اما به‌تعداد متناهی نقطه دارد.

اولین هندسهٔ‌متناهی‌سادهٔ موردتحقیقمان، که برای معرفیش آن را هندسهٔ سه‌نقطه‌ای[۴۰] می‌نامیم، تنها چهارآکسیوم دارد:

آکسیوم‌های هندسهٔ سه‌نقطه‌ای

۱. دراین هندسه دقیقاً سه‌نقطهٔ‌متمایز موجود است.

۲. دونقطهٔ متمایز[۴۱] دقیقاً بریك خط‌واقع‌اند.*

---

34) Things To Work With 35) Three - Dimensional Geometry 36) Gino Fano
37) Von Staudt 38) Veblen 39) Bussey
40) Three - Point Geometry 41) Distinct

* گاهی به‌جای «واقع‌اند»، «قراردارند» می‌گوییم.

۳. جمیع نقاط این هندسه بریك خط واقع نیستند.
۴. دو خط متمایز حداقل بریك نقطه واقع‌اند.

دراین‌جا فرض براین است که الفاظ نقطه، خط، و واقع بر[42] عباراتی تعریف‌ناشده‌اند. در آکسیوم ۴، دوخط بایك نقطهٔ مشترك به خطوط متقاطع[43] موسومند.

دراین‌جا پیش‌از خواندن بقیهٔ مطالب کتاب جهددریافتن پاسخ سؤالات زیرکنید:

- درنمایش این هندسه چه‌نوع شکل یا مدلی می‌توان رسم‌کرد؟
- دراین هندسه چندخط موجود است؟
- آیا می‌توان دراین هندسه قضیه‌ای اثبات‌کرد؟
- چه نمایش‌هایی غیراز نمایش‌های بانقاط و خطوط درمورد این‌هندسه امکان دارد؟
- کدام‌یك ازخواص هندسهٔ‌اقلیدسی به‌برقراربودن‌شان درهندسهٔ سه‌نقطه‌ای ادامه می‌دهند؟

درمورد هرهندسهٔ‌متناهی بررسی‌شده‌ای نمی‌توان به‌طورکامل به‌جمیع این سؤالات پاسخ داد، اما سؤالات موردبحث ماهیت‌تحقیق دربارهٔ هندسه‌های مبتنی بردستگاه آکسیوماتیك را تشریح‌می‌کنند. پاسخی‌ناتمام به‌سؤال‌اول بی‌درنگ به‌درك این‌منظور مددمی رساند.

هندسهٔ‌متناهی سه‌نقطه‌ای رامی‌توان‌باترسیمات‌بسیاری،ازجمله‌چهاررسم‌نشان‌داده‌شده درشکل ۱.۴ نمایش داد. محقق‌کنید که جمیع چهارآکسیوم موردبحث درمورد هریك ازاین اشکال برقرارند.

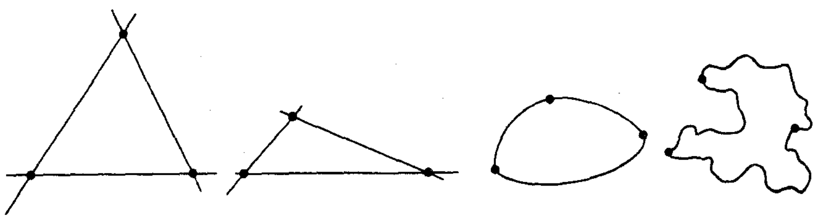
درحالی‌که مجموعه‌های‌نقاط و خطوط شکل ۱.۴ چنان‌اند که جمیع آکسیوم‌های هندسهٔ سه نقطه‌ای‌مان درموردشان برقراراست، هنوز این‌امکان وجوددارد که هندسهٔ‌مذکور بتواند خطوط‌اضافی نشان‌داده‌نشده‌ای داشته‌باشد. بااثبات دوقضیه به‌تقریر این‌موضوع می‌پردازیم. درابتدا، مقایسهٔ کلمه‌به کلمهٔ آکسیوم‌های ۲ و ۴ به‌لزوم تشخیص این‌که آیا دوخط متمایز می‌توانند بربیش‌از یك‌نقطه واقع‌باشند یانه منجرمی‌شود.

دراین صورت‌نیاز به‌اثبات این‌که دوخط متمایز بر دقیقاً یك‌نقطه واقع‌اند داریم. این گزاره را می‌توان به‌صورت ترکیب‌شرطی بازنویسی کرد: اگر دوخط متمایزباشند، دراین

42) on 43) Intersecting Lines

صورت بر دقیقاً یك نقطه واقع اند. نیل به اثبات این قضیه با کمك برهان خلف*[44] انجام می گیرد. کار را بادرنظرگرفتن دوخط متمایز آغاز می‌کنیم. بعد فرض می‌کنیم که این دوخط بربیش از یك نقطه واقع‌اند. دراین‌صورت اگر بتوان تناقضی برقرارکرد، فرض‌مان دروغ‌است، و نتیجهٔ مطلوب به‌دست می آید.

اثبات‌ها درسراسر این‌کتاب به‌صورت پاراگراف نوشته شده‌اند، و درصورت‌لزوم، هر مرحله ازاثبات را می توان بابیان آکسیوم، قضیه، یا تعریفی پیشینی تأییدکرد. هنگام اثباتِ قضایای به‌صورت تمرین درآمده، باید بتوان اثبات‌ها را به گونه‌ای مشابه باآن‌چه که در این کتاب یافت‌می‌شود نوشت.



شکل ۱.۴

قضیهٔ ۱.۱. دوخط متمایز دقیقاً بریك نقطه واقع اند.

اثبات: **دوخط متمایز، بنابه آکسیوم۴، حداقل بریك نقطه واقع اند. فرض می‌کنیم دوخط** بربیش از یك نقطه قرار داشته باشند. اگر خطوط l و m برنقاط P و Q واقع شوند، دراین صورت آکسیوم۲، ازآن‌جا که P و Q بردوخط l و m قرارمی‌گیرند، نقض می‌شود.

اکنون می‌توان تعداددقیق خطوط را در هندسهٔ سه‌نقطه‌ای تعیین‌کرد.

قضیهٔ ۱.۲. هندسهٔ سه نقطه‌ای موردبحث‌مان دقیقاً سه خط دارد.

اثبات: از آکسیوم۲، هرزوج‌نقطه دقیقاً بریك‌خط واقع‌است. دراین‌صورت هرزوج نقطهٔ ممکن برخطی‌متمایز قراردارد، بنابراین هندسه‌مان حداقل دارای سه‌خط است. فرض می‌کنیم خط‌چهارمی موجودباشد. از آکسیوم۱، درهندسه‌مان تنها سه‌نقطه

---

44) Indirect Argument

* برهان غیرمستقیم

وجود دارد، دراین‌صورت خط‌چهارم‌مفروض، بنابه‌قضیهٔ ۱.۱، باید نقطهٔ‌مشترکی با هر یك ازسه خط دیگر داشته‌باشد، لذا باید بردونقطه از سه‌نقطه‌مان نیز واقع‌شود، که مناقض آکسیوم ۲ است. درنتیجه، بیش‌از سه‌خط نمی‌تواند در هندسه‌مان موجودباشد.

درحالی‌که نقطه و خط دراین اولین هندسهٔ‌متناهی به‌عنوان عبارات تعریف‌نشده به‌کار رفته‌اند، می‌توان به‌جای آن‌ها کلمات‌دیگری برای به‌دست‌دادن تعبیری به‌طورمساوی معنی‌دار از ساخت‌مزبور قرارداد. فی‌المثل، می‌توان درخت را به‌جای نقطه، و ردیف را به‌جای خط قراردهیم، و دراین‌صورت اصول موضوعه‌مان به‌ترتیب زیر دانسته‌می‌شوند:

- دقیقاً سه‌درخت متمایز وجوددارد.
- دودرخت‌متمایز دقیقاً بریك ردیف واقع‌اند.
- جمیع درخت‌ها بریك ردیف واقع‌نیستند.
- دوردیف‌متمایز حداقل دریک درخت مشترك‌اند.

بابه‌کاربردن ازواج‌الفاظی چون مهره و نخ، دانشجو و کمیته، یا کتاب و کتاب‌خانه می‌توان به تعابیری دیگر دست‌یافت.

ازبررسی آکسیومها و شکل ۱.۴ باید آشکارباشد که دیگر مفاهیم‌اقلیدسی‌یی چون طول پاره‌خط، مقدارزاویه، و مساحت - درواقع تمام‌مفاهیم مربوط به‌اندازه گیری - در هندسهٔ متناهی مورد بحث به‌کار نمی‌رود. در این هندسه، درصورتی‌که مثلثی به صورت سه خط متمایز دوبه‌دوملاقی درسه‌نقطهٔ‌متمایز، نه‌هرسه بریك‌استقامت، تعریف‌شود، یك و تنها یك مثلث موجودیت می‌یابد. کیفیت‌دیگر که مفهوم خطوط‌متوازی، تعریف‌شده بادوخط بی‌هیچ نقطهٔ‌مشترك است، نیز از آن‌جاکه هردوخط دریك‌نقطه تلاقی‌می‌کنند، کاری‌نیست. مفاهیم آشنای هم‌نهشتی نیز در این هندسه معنایی ندارند. و گرچه باهندسهٔ‌اقلیدسی خیلی بیشتر از هندسهٔ‌متناهی آشنایید، باوجوداین، این موضوع که آیا خواص‌هندسهٔ‌اقلیدسی در هندسهٔ جدیدی برقرار است یانه، مفهوم‌بیشتری به‌این مفاهیم آشنا می‌دهد. در بخش‌های بعدی، معرفی هندسه‌های‌متناهی مهمتر مجال‌بیشتری برای این‌نوع بررسی ایجادمی‌کند. دراین مورد باید دریافته‌باشید که هندسه‌های‌متناهی، علی‌رغم تفاوت‌هاشان با هندسهٔ اقلیدسی، به‌تحقیق صلاحیت عنوان هندسه به‌معنی معرفی‌شده دربخش ۱.۱ را، از آن‌جا که شامل بررسی خواص و نسب مجموعه‌های نقاط‌اند، داراهستند.

برای این‌که ترکیب‌نقاط وخطوطی، هندسه‌ای متناهی درنظر گرفته‌شود، باید چند خاصیت برقرارباشد.

این خواص شامل تناهی [45] (۱ و ۲ در فهرست زیر) ،یك‌نواختی [46] (۳و۴)، یکتایی [47] (۵ و ٦) و وجود [48] (۷ و ۸) اند. خواص موردنظر عبارت‌اند از:

۱. تعداد نقاط آن متناهی باشد.
۲. تعداد خطوط آن متناهی باشد.
۳. هرخط آن بر تعداد یکسان s نقطه، که درآن ۲ ≤ s است، واقع‌باشد.
۴. هرنقطهٔ آن بر تعداد یکسان t خط، که درآن ۲ ≤ t است، واقع‌باشد.
۵. هرزوج‌نقطهٔ متمایز آن حداکثر بریك‌خط واقع‌باشد.
٦. هرزوج خط متمایز آن حداکثر بریك‌نقطه واقع‌باشد.
۷. جمیع‌نقاط آن بریك خط واقع‌نباشند.
۸. حداقل یك‌خط درآن موجودباشد.

هندسهٔ سادهٔ این بخش هریك از این خواص را برقرارمی‌کند (تمرین ۱۹I را ملاحظه کنید). بخش‌های بعدی شامل هندسه‌های متناهی جالب بسیاری که آن‌ها نیز،برای ملاحظهٔ این‌که هریك از این هشت خاصیت مطلوب را برقرارمی‌کنند، باید موردبررسی قرار گیرند، می‌باشند.

تمرینات ۱.۲

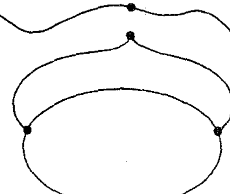
درمورد هندسهٔ سه‌نقطه‌ای‌مان:

۱. نمایش‌تصویری‌ای متفاوت با نمایش‌های‌شکل ۱.۴ رسم‌کنید.

برای تمرین‌های ۲ و۳، بیان‌کنید که چرا هیچ یك‌از نمایش‌های شکل ۱.۵ نمی‌تواند درمورد هندسهٔ سه‌نقطه‌ای موردبحث به کاررود؟

۲.

۳.



شکل ۱.۵

45) Finiteness
46) Uniformity
47) Uniqueness
48) Existence

۴. آکسیوم‌های هندسهٔ فوق را، بابه کاربردن کلمات کتاب به‌جای نقطه و کتاب‌خانه به‌جای خط بازنویسی کنید*.
۵. آکسیوم‌های مذکور را، بابه کاربردن کلمات دانشجو به‌جای نقطه و کمیته به‌جای خط‌بازنویسی کنید.
۶. آیا هردوخط این‌هندسه درنقطه‌ای ازاین هندسه تقاطع می‌کنند؟
۷. آیااز نقطه‌ای غیرواقع برخط‌مفروضی، حداقل یك‌خط نامتقاطع باآن خط می‌گذرد؟
۸. درمورد هردونقطهٔ‌متمایز، آیا دقیقاً یك خط واقع برهردو آن‌ها موجوداست؟
۹. چند خط‌موازی باخط مفروض وگذرنده از نقطه‌ای غیرواقع برآن موجوداست؟
۱۰. دقیقاً چندنقطه برهرخط موجوداست؟
۱۱. آیا باید خط‌ها به‌مفهوم اقلیدسی مستقیم‌باشند؟
۱۲. آیا جمیع سه‌خط می‌تواند شامل یك‌نقطهٔ ثابت‌باشد؟
۱۳. آیا مربعی موجوداست؟
۱۴. ثابت‌کنید که یك‌خط نمی‌تواند شامل سه‌نقطهٔ‌متمایزباشد.
۱۵. ثابت‌کنید که مجموعه‌ای از دو خط شامل جمیع نقاط این هندسه موجود است.
۱۶. ثابت‌کنید که مجموعه‌ای از دونقطه چنان‌که هرخط این هندسه حداقل بریکی از این‌نقاط واقع‌باشد موجوداست.
۱۷I. درمورد هریك ازمفاهیم هندسهٔ اقلیدسی زیر، مشخص‌کنید که آیا به‌عنوان مفهومی درهندسهٔ سه‌نقطه‌ای‌مان ظاهرمی‌شود یاخیر: زاویه، هم‌نهشتی[۴۹]، دایره، مساحت، تقاطع، تشابه، شش‌ضلعی.
۱۸I. نمایش‌های نشان‌داده‌نشده درشکل ۱.۵ دیگری ایجادکنید، و توضیح دهید که چرا هیچ‌یك ازنمایش‌هاتان نمی‌تواند درهندسهٔ سه‌نقطه‌ای مان به کار رود.
۱۹I. هندسهٔ سه‌نقطه‌ای‌مان را، برای‌ملاحظهٔ این‌که هریك ازهشت‌خاصیت مطلوب در مورد آن برقرار است، بررسی‌کنید.

۱.۳ هندسه‌های چهارخطی و چهارنقطه‌ای

هندسهٔ‌متناهی موردبررسی بعدی نیز، مانند هندسهٔ بخش ۱.۲، نقطه، خط، و بر رابه عنوان

* دراین‌مورد باید به‌جای **بر** از **در** استفاده‌کنیم. همین‌گونه است موردمسألهٔ‌بعد.

49) Congruence

عبارات تعریف‌نشده دارد. سه‌آکسیوم‌بعدی این‌هندسه را، که هندسهٔ‌چهارخطی[50] نامیده می‌شود، به‌طورکل مشخص می‌کنند.

آکسیوم‌های هندسهٔ‌چهارخطی

۱. در این‌هندسه دقیقاً چهارخط موجوداست.
۲. برهر دوخط متمایز آن دقیقاً یك‌نقطه قراردارد.
۳. هرنقطهٔ آن دقیقاً بردوخط قراردارد.

آکسیوم ۱ ، آکسیوم وجود[51] است، زیرا تضمین می‌کند که هندسهٔ موردبحث مجموعه‌ای تهی ازنقاط نیست. آکسیوم‌های‌دیگر آکسیوم‌های‌وقوع *[52]اند وبا نقاط واقع برخطوط و خطوط واقع‌برنقاط سروکار دارند. دراین‌جا، قبل‌از خواندن ادامهٔ‌مطلب، سعی در رسم نمودارهایی‌از نقاط و خطوطی که جمیع سه‌آکسیوم را برقرارمی‌کنند داشته‌باشید. نیز در تعیین تعدادکل نقاط این‌هندسه کوشش‌کنید.

قضیهٔ ۱.۳. هندسهٔ چهار خطی‌مان دقیقاً شش‌نقطه دارد.

اثبات. باتوجه به‌آکسیوم ۱ ، شش زوج خط داریم. عددشش رااز ترکیب چهارشیء دوبه‌دو درنظر گرفته‌شده حاصل‌کرده‌ایم. نشانه‌ای که برای ترکیبات به کار می‌رود عبارت‌است از $\binom{۴}{۲}$

فرمول عمومی ترکیب nشیء r به r درنظر گرفته‌شده عبارت‌است‌از

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

و

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!۲!} = ٦$$

بنابه آکسیوم ۲، برهرزوج‌خط دقیقاً یك‌نقطه قراردارد. فرض می‌کنیم دونقطه‌از این‌شش‌نقطه متمایز نباشند. این‌فرض نقیض آکسیوم ۳ می‌شود، زیرا دراین‌صورت هرنقطه‌بر بیش‌از دوخط قرارمی‌گیرد. نیز، بنابه آکسیوم ۳، در این‌هندسه هیچ‌نقطه‌ای جزاین شش‌نقطهٔ واقع‌بر ازواج خطوط نمی‌تواند موجودباشد.

---

50) Four - Line Geometry
51) Existence
52) Incidence

*تلاقی

قضیهٔ ۱.۴. هرخط هندسهٔ چهار خطی‌مان دقیقاً سه‌نقطهٔ واقع برخوددارد.

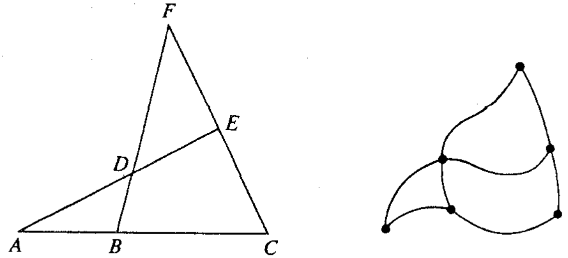
اثبات. بنابه آکسیوم ۲، هرخط این‌هندسه نقطهٔ‌مشترکی باهریك ازسه‌خط دیگردارد، و هرسه نقطهٔ این‌نقاط‌متمایز برخط‌مفروض واقع‌اند. فرض‌می‌کنیم نقطهٔ‌چهارمی بر یکی‌از این‌خط‌ها موجودباشد. دراین‌صورت بنابه آکسیوم۳، این‌نقطه باید بریکی‌از خطوط دیگر نیز واقع‌شود. ولی این غیرممکن است زیرا سه‌خط دیگر قبلاً و دقیقاً یك نقطه باخط مفروض تعیین‌کرده‌اند، و بنابه آکسیوم۲، می‌توانند تنها یکی تعیین‌کنند. بنابراین، هرخط هندسهٔ موردبحث دقیقاً دارای سه‌نقطهٔ واقع‌بر خوداند.

شکل ۱.٦ دونمودار را، که می‌توانند درنمایش هندسهٔ‌متناهی‌چهارخطی و شش نقطه‌ای مورد بحث‌مان به‌کارروند، نشان‌می‌دهد. بررسی شکل ۱.٦ به‌تحقیقات بیشتری درمورد هندسهٔ‌چهارخطی‌مان منجرمی‌شود. به‌عنوان مثال، سؤالات زیر نمونه‌ای‌از سؤالاتی است که باید به‌آن‌ها پاسخ داده‌شود:

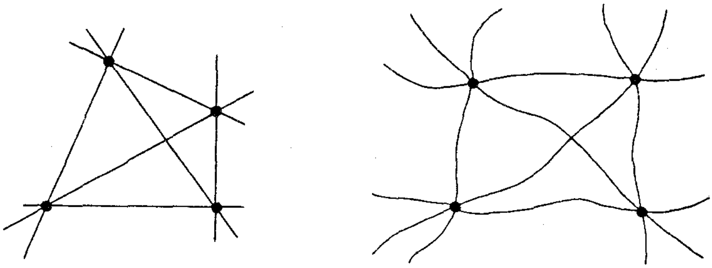
- آیا هردونقطهٔ این‌هندسه بریك‌خط قراردارند؟
- در این هندسه چند مثلث موجود است (هر سه ضلع باید خطوط هندسه مان باشند)؟
- آیا این هندسه مثال هایی از خطوط موازی (خطوطی با هیچ نقطهٔ مشترك) دارند؟

سؤالات‌فوق درتمرینات‌آخر این‌بخش موردبررسی قرارگرفته‌اند.

با استفاده‌از آکسیوم‌های‌هندسهٔ‌چهارخطی موردبحث و مفهوم تثنیهٔ‌سطحی می‌توان



شکل ۱.٦



شکل ۱.۷

مجموعهٔ آکسیوم‌های جدیدی تولیدکرد. تثنیهٔسطحی[53] یك گزاره باتعویض باهم‌کلمات نقطه و خط و انجام تغییرات لازم‌دیگر درزبان‌فارسی ساخته‌می‌شود. نوشتن تثنیهٔسطحی هریك‌از آکسیوم‌های هندسهٔچهارخطی سابق منجربه آکسیوم‌های یك هندسهٔچهارنقطه‌ای[54] می‌شود.

آکسیوم‌های هندسهٔچهارنقطه‌ای

۱. کل‌تعداد نقاط این‌هندسه چهاراست.
۲. برهر دونقطهٔ‌متمایز آن دقیقاً یك‌خط می‌گذرد.
۳. هرخط آن بردقیقاً دونقطه می‌گذرد.

دونمایش ممکن دراین‌هندسه درشکل ۱.۷ نشان داده‌شده است.
دراین شکل خطوط مرسوم‌تنها درمکان‌هایی که درآن‌ها نقاط مشخص شده‌اند، و نه درست درجایی‌که متقاطع به‌نظر می‌رسند، تلاقی می‌کنند.
مفهوم‌ثنویت‌سطحی[55] هندسهٔچهارخطی و هندسهٔچهارنقطه‌ای موردبحث‌مان رابه‌هم مربوط می‌کند. تثنیهٔسطحی هرقضیهٔ درست یکی‌از این‌هندسه‌ها قضیه‌ای دردیگری می‌شود، بنابراین ممکن‌می‌شود که تحصیل‌اطلاعات بیشتری درمورد هندسهٔ‌جدیدمان آسان‌تر انجام گیرد. به‌این‌ترتیب، تثنیه‌های سطحی قضایای ۱.۳ و ۱.۴ قضایای هندسهٔچهارنقطه‌ای می‌شوند.

قضیهٔ ۱.۵. هندسهٔچهارنقطه‌ای‌مان دقیقاً شش‌خط دارد.

53.Plane Dual   54. Four - Point Geometry   55. Planar Duality

قضیهٔ ۱.۶. هر نقطهٔ هندسهٔ چهارنقطه‌ای‌مان دقیقاً سه خط واقع برخود (یا گذرنده از خود) دارد.

خطوطی در هندسهٔ چهارنقطه‌ای‌مان موجودانـد کـه درهـیچ‌یك ازچهـارنقطهٔ آن مشترك نیستند، دراین‌صورت این‌خطوط متوازیند. سایرخواص هندسهٔ چهارنقطه‌ای مورد بحث درتمرینات مربوط به‌این‌بخش موردبررسی قرارگرفته‌اند.

تاکنون درهریك ازهندسه‌های‌متناهی، آکسیومی تعداددقیق نقطه‌های واقع برخط را بیان‌کرد و یاتعدادکل نقاط یا خطوط آن هندسه را به‌دست داده‌است. ممکن‌است مجموعهٔ آکسیوم‌های یك‌هندسه بی‌این آکسیوم‌حدی[56] به‌هندسه‌ای بابی‌نهایت‌نقطه‌و خط‌منتج‌شود. در واقع، اغلب آکسیوم‌های‌هندسه‌های‌متناهی آکسیوم‌های‌هندسهٔ‌اقلیدسی نیزهستند. فی‌المثل، آکسیوم‌های ۲ و۳ی هندسهٔ‌متناهی سه‌نقطه‌ای‌مان درهندسهٔ‌اقلیدسی معمولی برقراراست، و حتی آکسیوم۴، چون خطوط‌مان موازی نباشند، پابرجاست.

تمرینات ۱.۳

۱. تثنیهٔ‌سطحی آکسیوم‌های‌هندسهٔ سه‌نقطه‌ای بخش ۱.۲ را بنویسید.

تمرینات ۲-۹ رادرمورد هندسهٔ‌چهارخطی انجام‌دهید:

۲. درمورد این‌هندسه نمایشی متفاوت‌با نمایش‌های نشان‌داده‌شده درشکل۱.۶ رسم‌کنید.
۳. کدام یك از آکسیوم‌های این هندسه در هندسهٔ اقلیدسی نیزگزاره‌هایی راست‌اند؟
۴. بابه‌کاربردن دانشجو به‌جای نقطه و گروه به‌جای خط مجموعهٔ‌آکسیوم‌های این هندسه را بازنویسی کنید.
۵. آیا هردونقطهٔ این‌هندسه برخطی مشترك واقع‌اند؟
۶. در این هندسه چند مثلث که هرسه ضلع آن‌ها خطوطی از این هندسه‌اند موجود است؟
۷. چندخط متفاوت موازی باهرخط است؟
۸. ثابت‌کنید یك‌مجموعهٔ دوخطی نمی‌تواند شامل‌جمیع نقاط این‌هندسه باشد.
۹. ثابت‌کنید دراین هندسه زوج نقطه‌ای وجود دارند که توسط خطی به‌هم وصل نشده‌اند.

---

56. Limiting Axiom

تمرینات ۱۰-۱۹ را درمورد هندسهٔ چهارنقطه‌ای انجام دهید:

۱۰. درمورد این هندسه نمونهٔ دیگری متفاوت از آن‌ها که در شکل ۱.۷ نشان داده شده‌اند رسم کنید.

۱۱. کدام یك از آکسیوم‌ها در هندسهٔ اقلیدسی نیز گزاره‌هایی راست‌اند؟

۱۲. بابه کاربردن درخت به‌جای نقطه و ردیف[57] به‌جای خط مجموعهٔ آکسیوم‌های این هندسه را بازنویسی کنید.

۱۳. آیا هردوخط این هندسه نقطه‌ای را معین می‌کنند؟

۱۴. درصورتی که نقاط‌مان A، B، C و D باشند، جمیع مجموعه‌های خطوط موازی را نام ببرید.

۱۵. چندخط متفاوت این هندسه موازی هرخط‌اند؟

۱٦. بی‌استفاده‌از مفهوم تثنیه، ثابت کنید که این هندسه دقیقاً شامل شش خط است.

۱۷. بی‌استفاده‌از مفهوم تثنیه، ثابت کنید که هرنقطهٔ این هندسه دقیقاً برسه خط واقع است.

۱۸. ثابت کنید مجموعه‌ای از دوخط موجوداست که شامل جمیع نقاط این هندسه است.

۱۹. بی‌استفاده از مفهوم تثنیه، ثابت کنید که در این هندسه زوج خط بدون نقطهٔ مشترکی موجوداست.

۲۰I. درمورد هرمفهوم هندسهٔ اقلیدسی واقع درفهرست زیر، توضیح دهید که چرا این مفهوم در (a) هندسهٔ چهارخطی‌مان و (b) هندسهٔ چهارنقطه‌ای مان ظاهر می‌شود یا نمی‌شود: زاویه، هم‌نهشتی، دایره، سطح، تقاطع، تشابه، شش ضلعی، چهارضلعی.

۲۱I. نمایش‌هایی که **نمی‌توانند** درهندسه‌های این بخش به کار گرفته شوند رسم کرده توضیح دهید که چرا نامناسب‌اند.

۲۲I. بررسی و ملاحظه کنید که هریك از هشت خاصیت مطلوب هندسهٔ متناهی در مورد هندسه‌های این بخش برقراراست.

۱.۴ هندسه‌های متناهی فانو و یانگ

فانو دراصل به‌بررسی هندسه‌ای سه‌بعدی پرداخته‌است، اما سطح‌مقطع[58] حاصل‌از صفحهٔ گذرنده ازشکل فضائیش هندسهٔ متناهی مسطحه‌ای به‌دست می‌دهد که دراین مرحله به‌معرفی آن پرداخته‌ایم.

57. Row 58. Cross Section

آکسیوم‌های هندسهٔ فانو

۱. دراین هندسه حداقل یك خط موجوداست.
۲. برهرخط این هندسه دقیقاً سه‌نقطه واقع است.
۳. جمیع نقاط این هندسه بریك خط واقع نیستند.
۴. به‌ازای هردونقطهٔ متمایز این هندسه، دقیقاً خطی واقع بر هردوآن‌ها موجود است.
۵. هردوخط آن حداقل یك‌نقطهٔ واقع برخود دارند.

دراین هندسهٔ فانو، نقطه و خط اعضـای تـعریف‌نشده و بـر نسـبت تـعریف‌نشده است. در هندسه‌های متناهی مانند هندسهٔ اقـلیدسی معمولی، مـی‌توان بـرای یك مـفهوم از عبـارات گوناگون استفاده کرد. فی‌المثل، جمیع این گزاره‌ها یك نسبت را بیان می‌کنند:

نقطه‌ای برخطی واقع است (یا قراردارد).
خط **شامل** نقطه **است**.
خط **از** نقطه **می‌گذرد**.

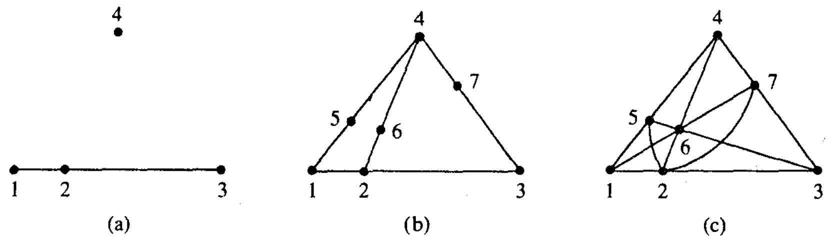
نتیجهٔ زیر یکی از نتایج تقریباً بی‌درنگ آکسیوم‌های این هندسه است:

قضیهٔ ۱.۷. هردوخط دقیقاً یك‌نقطهٔ مشترك دارند.

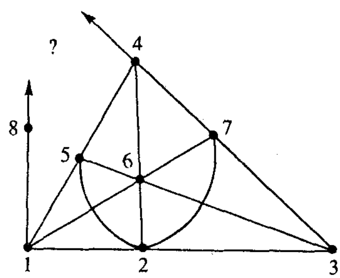
اثبات: بنابه آکسیوم ۵، دوخط حداقل یك‌نقطهٔ واقع برخود دارند. باروشی شبیه اثبات قضیهٔ ۱.۳، فرض می‌کنیم یك زوج ازخط‌ها دارای دونقطهٔ مشترك باشند. این فرض که آنها دونقطهٔ متمایز مشترك داشته‌باشند آکسیوم ۴ رابرهم می‌زند، چراکه دراین صورت دونقطهٔ متمایز دوخط شامل هردوآن خواهندداشت.

حدس تعدادنقاط و خطوط هندسهٔ فانوی موردبحث به‌اشکال‌تراز هندسه‌های سابق موردبررسی‌مان است. دراین‌مورد پیش‌از خواندن جریان‌زیرین منجربه قـضیهٔ دیـرین*، به‌حدیث‌حدس بپردازید.

* بعدی



شکل ۱.۸



شکل ۱.۹

ازآکسیوم‌های ۱ و۲، حداقل سه‌نقطه دراین‌هندسه موجوداست، درحالی‌که از آکسیوم ۳، چنان‌که درشکل ۱.۸a نشان‌داده‌شده، حداقل نقطهٔ‌چهارمی وجوددارد. بنابه آکسیوم ۴، باید خطوط واصل این چهارمین‌نقطه به‌هریك ازنقاط موجوددیگر درمیان باشد (شکل ۱.۸b)، و بنابه آکسیوم‌های ۴ و۵، باید خطوط‌واصل نقاط ۱، ۶، ۷، نقاط ۳، ۶، ۵، و نقاط ۵، ۲، ۷ موجودباشد (شکل ۱.۸c). به‌این ترتیب، هندسهٔ فانو مان شامل حداقل هفت‌نقطه و هفت‌خط است.

این‌واقعیت، که درهندسهٔ‌فانو دقیقاً هفت‌نقطه وجوددارد، را می‌توان بااستفاده از استدلال غیرمستقیم، ازآن‌جا که فرض نقطهٔ‌هشتم، چنان‌که هم‌اکنون نشان خواهیم‌داد، به تناقض می‌انجامد، ثابت‌کرد. فرض می‌کنیم نقطهٔ‌هشتمی موجودباشد، و، فی‌المثل، چنان‌که درشکل ۱.۹، تقاطع خط گذرنده ازنقاط ۱، ۸ و خط ۳، ۷، ۴ (علامت «خط ۳، ۷، ۴» به‌معنی خط شامل‌نقاط ۳، ۷، و ۴ است) را درنظر می‌گیریم. آکسیوم ۵ خواهان این‌است که خطوط ۱، ۸ و۳، ۷، ۴ نقطهٔ تقاطعی داشته‌باشند. نقطه تقاطع مطلوب آکسیوم ۵ نمی‌تواند نقطهٔ ۳،۷ یا ۴ باشد، زیرا این‌اتفاق آکسیوم ۴ رابرهم می‌زند. بنابراین، باید نقطهٔ‌نهمی باشد، که خود آکسیوم ۲ را نقض می‌کند. به‌این ترتیب، فرض نقطهٔ‌هشتم به‌تناقض می‌انجامد و باید مردودشود. نتیجهٔ بحث فوق قضیهٔ‌زیر است:

قضیهٔ ۱.۸. هندسهٔفانو شامل دقیقاً هفت‌نقطه و هفت‌خط است.

درشکل‌های ۱.۸c و ۱.۹ اشکال‌نمونهٔ هندسهٔفانو خطوطی را نشان‌می‌دهند که بدون آن‌که واقعاً نقطهٔ‌مشترکی داشته‌باشند متقاطع به‌نظر می‌رسند. این‌خطوط‌اقلیدسی نیستند، و نقاط متمایز واقع‌بر آن‌ها، برای‌جلوگیری‌از اشتباه، نیازبه این‌دارند که به‌طور وضـوح در ترسیمات نشان داده‌شوند.

نوشت تازه‌ای ازمجموعهٔ‌آکسیوم‌های هندسهٔفانو را با کلمهٔ **دانشجو** به‌جای **نقطه** و کلمهٔ **گروه** به‌جای خط درنظر می‌گیریم. برای نمایش این دستگاه‌متناهی می‌توان ازجدول استفاده کرد. به‌عنوان‌مثال، جدول ۱.۱ گروه‌ها را درستون‌های‌قائم نشان‌می‌دهد. قرارگرفتن اعداد به‌جای اسامی دانشجویان نشان‌می‌دهد که هندسهٔفانو خود می‌تواند توسط جدولی به‌همین نوع نمایش داده‌شود. خواننده باید بتواند تناظری بین‌هرستون این‌جدول و هرخط شکـل ۱.۸c، باتوجه به‌این‌که دانشجویان را می‌توان درترتیب الفبایی بانقاط درتـرتیب عـددی همدستان کرد، برقرارکند.

جدول ۱.۱

گروه۱	گروه۲	گروه۳	گروه۴
A	A	A	B
B	D	F	D
C	E	G	F
گروه۵	**گروه۶**	**گروه۷**	
C	B	C	
E	E	D	
F	G	G	

کشف روابط بین‌نظریهٔ ترکیبات و تعدادنقاط و خطوط هندسه‌های‌متناهی، سودمند است. به‌عنوان مثال، می‌توان دراولین‌نظر آشکارکرد که یکـی‌از طـرق‌سریع تـعیین‌تعداد خطوط هندسهٔ فانو، باتوجه به‌این‌که هرخط آن سه‌نقطه دارد، شمارش جمیع ترکیبات ممکن هفت‌شیء که سه‌به‌سه درنظر گرفته‌شوند، است. اما درمورد هفت شیء سه‌به‌سه درنظر گرفته شده ۳۵ترکیب وجوددارد، و تنها هفت‌خط دراین هندسه موجوداست. بررسی شکل ۱.۹ (یا

۱.۸c) امکان می‌دهد که این اختلاف را اصلاح کنیم. به‌عنوان مثال، نقاط ۱ و ۵ و خطی که معین می‌کنند را درنظر می‌گیریم. دراین مورد پنج نقطهٔ ممکن دیگر ـ ۲، ۳، ۴، ۶، ۷ ـ که می توانند در تشکیل خط‌ها بادونقطهٔ مفروض‌مان همدستان شوند، موجوداند، و جمیع این امکانات در ۳۵ ترکیب مذکور به‌حساب آمده‌اند. اما تنها یکی از این نقاط، نقطهٔ ۴، عملاً برخط گذرنده از نقاط ۱ و ۵ قراردارد؛ درنتیجه، تنها $\frac{۱}{۵}$ تعدادواقعی امکانات به‌خط منتج می‌شود، و از آن‌جا که $۷ = \frac{۳۵}{۵}$ است، مجموعاً هفت خط موجودمی‌شود. می توان باطرح این سؤال، که چرا چهار نقطهٔ دیگر ـ ۲، ۳، ۶، ۷ـ درتعیین خطوط این هندسه بانقاط ۱و ۵ همدستان نمی‌شوند، اطلاعات بیشتری به‌دست آورد. ازهرنقطه چون ۱، سه‌خط از خطوط این هندسه می‌گذرد. این خطوط شامل شش‌نقطهٔ دیگر این هندسه (دونقطه برهرخط) می‌باشند، و هیچ‌یک ازاین زوج نقطه‌های واقع‌بریکی‌از این خطوط نمی‌توانند، بدون نقض‌کردن آکسیوم ۴، بانقطه‌ای واقع برخط دیگری همدستان شود.

می‌توان هندسهٔ متناهی دیگری ازهندسهٔ فانو باتعدیل آخرین آکسیوم آن به‌دست آورد. این هندسهٔ جدید، که **هندسهٔ یانگ**[59] نامیده‌می‌شود، دارای چهارآکسیوم اول‌هندسهٔ فانو همراه با آکسیوم جانشین آکسیوم ۵ آن شدهٔ زیراست:

۵. اگرنقطه‌ای برخط مفروضی واقع‌نباشد، دراین‌صورت ازاین‌نقطه دقیقاً یك‌خط که خط مفروض را قطع‌نمی‌کند می‌گذرد.

آکسیوم ۵ نشان‌می‌دهد که مفهوم‌اقلیدسی معمولی خطوط موازی درمورد این‌هندسه نیز به‌کار می‌رود. هندسهٔ یانگ هندسه‌ای‌متناهی با نه‌نقطه و دوازده‌خط است.

تمرینات ۱.۴

در تمرینات ۱ـ۵، بیان‌کنید که کدام‌گزاره درهندسهٔ فانو راست و کدام دروغ است.

۱. این‌هندسه دقیقاً به‌تعداد خطوطش نقطه‌دارد.

۲. هرزوج‌خط این‌هندسه درنقطه‌ای دراین هندسه تقاطع می‌کند.

۳. هردونقطهٔ‌متمایز این‌هندسه خط‌منحصربه‌فردی ازاین‌هندسه را معین‌می‌کند.

۴. تغییر یك آکسیوم آن منتج‌به هندسهٔ یانگ می‌شود.

59. Young's Geometry

۵. این هندسه شامل حداقل هشت خط است.
۶. بااستفاده‌از کتاب به‌جای نقطه و کتابخانه به‌جای خط مجموعهٔ آکسیوم‌های هندسهٔ فانو را بازنویسی کنید.
۷. کدام یک ازآکسیوم‌های هندسهٔ فانو درهندسهٔ اقلیدسی نیزگزاره‌ای راست است؟
۸. بااستفاده‌از شکل ۱.۸c، جمیع مثلث‌های هندسهٔ فانوی دارای نقطهٔ ۴ به‌عنوان یك رأس را نام ببرید.
۹. درهندسهٔ فانو، ثابت‌کنید که هرنقطه دقیقاً برسه‌خط قراردارد.
۱۰. درهندسهٔ فانو، ثابت‌کنید که خطوط گذرنده‌از هرنقطهٔ این‌هندسه، شامل جمیع‌نقاط این هندسه‌اند.
۱۱. در هندسهٔ فانو، ثابت کنید که، به‌ازای هرزوج نقطهٔ این هندسه، دقیقاً دوخط غیرگذرنده ازاین نقاط موجوداست.
۱۲. درهندسهٔ فانو، ثابت‌کنیدکه، درهرمجموعهٔ‌سه‌خطی‌یی که جمیع‌شان شامل یك نقطهٔ ثابت نباشند، دقیقاً یك‌نقطهٔ‌غیرواقع برهر یك ازاین سه خط دراین هندسه موجود است.
۱۳. نمونه‌ای برای هندسه‌ای که آکسیوم‌های ۱ و ۲ اما نه آکسیوم ۳ هندسهٔ‌فانو را برقرار می‌کند طرح کنید.
۱۴. نمونه‌ای برای هندسه‌ای که آکسیوم‌های ۱ و ۳ اما نه آکسیوم ۲ هندسهٔ‌فانو را برقرار می‌کند طرح کنید.
۱۵. مدلی برای هندسهٔ یانگ رسم کنید.
۱۶. ثابت‌کنید که هندسهٔ یانگ شامل حداقل نه‌نقطه است.
۱۷. درهندسهٔ یانگ، ثابت‌کنید دوخط‌موازی باخط‌سوم باهم موازی‌اند.

راهنمایی: آکسیوم ۵ را به کاربرده با تناقض اثبات‌کنید.

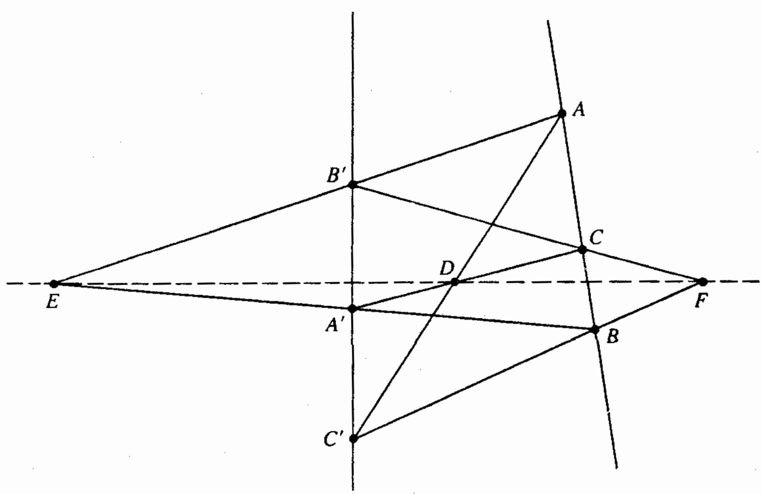
۱۸I. تثنیهٔ‌سطحی هریك ازآکسیوم‌های‌هندسهٔ‌فانو رابنویسید؛ بعدنمونه‌ای درمورد این مجموعهٔ آکسیوم‌های‌جدید رسم‌کنید. آن رابانمونهٔ مربوط به‌مجموعهٔ اصلی آکسیوم‌ها مقایسه کنید. سپس اولین‌بند بخش ۱.۶ رابخوانید.
۱۹I. بررسی و ملاحظه کنید که تمام هشت خاصیت مطلوب یك‌هندسهٔ‌متناهی توسط هندسه‌های این بخش برقراراست.

۱.۵ هندسه‌های متناهی پاپوس و دزارگ

هندسهٔ متناهی پاپوس از قضیهٔ هندسهٔ اقلیدسی یی موسوم به قضیهٔ پاپوس[60] ناشی می‌شود. شکل ۱.۱۰ این قضیه را، که توسط پاپوس اسکندرانی حدود ۳۴۰ بعد از میلاد کشف و اثبات شد، توضیح می‌دهد. در این جا خود قضیه را بی اثبات بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۹. قضیهٔ پاپوس. اگر A، B، و C سه نقطهٔ متمایز بر یک خط و اگر A'، B'، و C' سه نقطهٔ متمایز دیگر واقع بر خط دومی باشند، در این صورت تقاطعات $\overleftrightarrow{AC'}$ و $\overleftrightarrow{CA'}$، $\overleftrightarrow{AB'}$ و $\overleftrightarrow{BA'}$، و $\overleftrightarrow{BC'}$ و $\overleftrightarrow{CB'}$ واقع بر یک استقامت‌اند.

علامت $\overleftrightarrow{AC}$ به‌معنی «خط شامل نقاط A و C» به‌کار می‌رود. نقاط در صورتی که بر یک خط قرار گیرند واقع بر یک استقامت[61] نامیده می‌شوند. در صورتی که بعضی از خطوط فوق موازی (به مفهوم هندسهٔ اقلیدسی معمولی) باشند استثنائاتی در قضیه به‌وجود می‌آید، اما در این جا توجه‌مان را به وضعیاتی که در آن‌ها خطوط مذکور عملاً متقاطع‌اند، محدود می‌کنیم. قضیهٔ پاپوس با نه نقطهٔ سه به سه واقع بر سه خط سروکار دارد. در شکل ۱.۱۰ نه نقطه و نه خط



شکل ۱.۱۰

60. Pappus

61. Collinear

موجود است، و نقاط و خطوط مذکور را می‌توان به‌عنوان هندسه‌ای متناهی باعدم بداهت خواص آشنای هندسهٔ اقلیدسی و تنها با آکسیوم‌های زیر بررسی کرد.

آکسیوم‌های هندسهٔ متناهی پاپوس

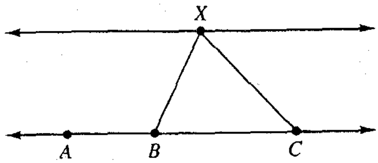
۱. در این هندسه حداقل یك خط موجود است.
۲. هر خط آن دقیقاً سه نقطه دارد.
۳. جمیع نقاط آن بر یك خط قرار ندارند.
۴. اگر نقطه‌ای بر خط مفروضی قرار نداشته باشد، در این صورت دقیقاً یك خط گذرنده از آن نقطه وجود دارد که موازی آن خط مفروض است.
۵. اگر نقطهٔ P بر خطی قرار نداشته باشد، دقیقاً نقطهٔ P' ی بر آن خط چنان موجود است که هیچ خطی P و P' را به هم وصل نکند.
٦. به استثنای مورد آکسیوم ۵، اگر P و Q نقاط متمایزی باشند، در این صورت دقیقاً یك خط شامل هردو آن‌ها موجود است.

شکل ۱.۱۰ را، برای ملاحظهٔ این که به‌نظر می‌رسد که هر خط این هندسهٔ متناهی به‌طور دقیق دو خط موازی با خود دارد، بررسی کنید. البته، این مشاهده تشکیل اثبات نمی‌دهد. قضیهٔ بعد خاصیت اضافی‌ای را که می‌تواند از آکسیومها اثبات شود به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱.۱۰. هر نقطهٔ هندسهٔ پاپوس دقیقاً بر سه خط واقع است.

اثبات: فرض می‌کنیم X نقطهٔ دلخواهی باشد (شکل ۱.۱۱). بنابه آکسیوم ۳، خطی ناشامل X موجود است. این خط، بنابه آکسیوم ۲، شامل نقاط A، B، و C است. بنابه آکسیوم ۵، X بر خطوط تلاقی کننده با دو نقطه از نقاط خط مفروض، مثلاً B و C واقع است. بنابه آکسیوم ۴، دقیقاً یك خط گذرنده از X موازی $\overleftrightarrow{BC}$ وجود دارد، بنابراین، حداقل سه خط گذرنده از X موجود است. اما خط چهارم گذرنده از Xی نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابه آکسیوم ۵، خط واصل X و Aیی موجود نیست، و بنابه آکسیوم ۴، خط گذرنده از X نامتلاقی $\overleftrightarrow{BC}$ ی دیگری وجود ندارد.

گرچه بحث هندسهٔ پاپوس با شکل کامل آغاز شد، می‌توان تنها با آکسیوم‌های آن



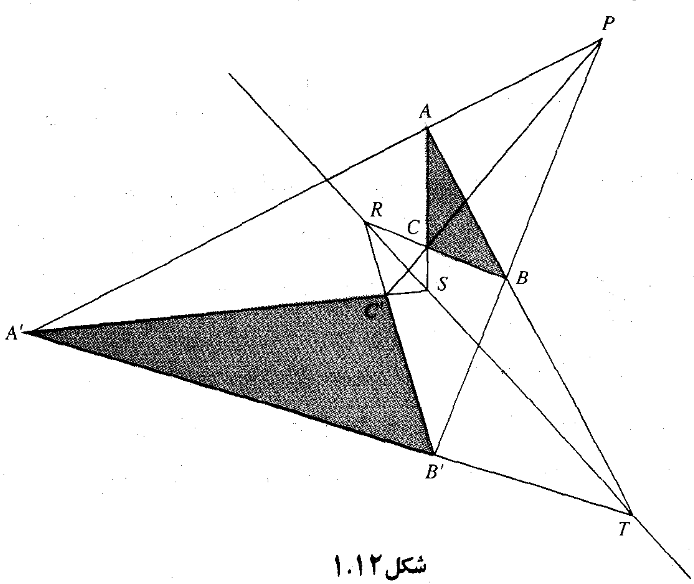
شکل ۱.۱۱

ثابت‌کرد (تمرینات ۱.۵ را ملاحظه کنید) که هندسهٔ پاپوس درواقع شامل دقیقاً نه‌نقطه و نه‌خط است. صورت‌های دیگری ازاین آکسیوم‌ها را می‌توان بااستفاده‌از کلمات‌جانشین نقاط و خطوط یافت، اما ترتیب‌دادن اطلاعات به‌صورت جدول نیز آموزنده‌است. درجدول ۱.۲، علامات شکل ۱.۱۰، درحالی‌که هرستون‌قائم آن خطی ازاین‌هندسه را نمایش‌می‌دهد، به کار رفته‌است.

مهم‌است که توجه داشته‌باشیم که به کاربردن جدولی چون جدول ۱.۲ می‌تواند، بهتر از مجموعه‌ای از آکسیوم‌ها، در به‌دست‌دادن نمایش اولیهٔ یك‌هندسه به کاررود. چه دراین حالت

جدول ۱.۲

A	B'	D	A	A	F	F	B	C
B	A'	E	D	B'	C	B	A'	D
C	C'	F	C'	E	B'	C'	E	A'



شکل ۱.۱۲

اغلب اثبات‌ها، ازآن‌جاکه تنها به‌وابینی جمیع حالات ممکن درجدول وابسته‌اند، بسیارساده می‌شوند. فی‌المثل، برای ملاحظهٔ این‌که هرنقطه دقیقاً برسه‌خط قراردارد، می‌توان به‌بررسی مستقیم جدول موردبحث پرداخت. یکی‌از دلایل مهم بررسی هندسه‌های‌متناهی این است که می‌توان هرحالت ممکن آن را فهرست‌کرد و شمرد.

مثال‌دیگری ازهندسهٔ‌متناهی‌جدیدی که درواقع بررسی مجموعهٔ‌مشهوری ازنقاط هندسهٔ اقلیدسی است هندسهٔ‌متناهی‌دزارگ[62] است. دراین مورد باید به معرفی مفاهیمی چندکه می‌توانند دربررسی این‌هندسهٔ‌جدید به کاررووند بپردازیم. مثلثهای ABC و $A'B'C'$ شکل ۱.۱۲ پرسپکتیواز نقطهٔ P[63]اند، و این بدان‌معنی است‌که P نقطهٔ‌مشترک (نقطهٔ‌تقارب[64]) سه‌خط واصل رؤس متناظر مثلثهای مزبورند. به‌این‌ترتیب، P بر $\overleftrightarrow{AA'}$، $\overleftrightarrow{BB'}$ و $\overleftrightarrow{CC'}$ قراردارد. طبق قضیهٔ دزارگ، که باتفصیل بیشتر درفصل ۷ موردبررسی قرارگرفته، دومثلث پرسپکتیو ازیك نقطه، **پرسپکتیو ازیك‌خط**[65]، نیز هستند. و اگر مثلثهایی پرسپکتیو از یك‌خط باشند اضلاع‌متناظر آنها برنقاطی واقع‌بر این‌خط تلاقی می‌کنند. خط پرسپکتیو بان[66] شکل ۱.۱۲ شامل نقاط R، S، T است. و فی‌المثل، اضلاع‌متناظر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{A'B'}$ در T ، نقطه‌ای واقع‌بر این‌خط، تلاقی می‌کنند.

بررسی‌بیشتر شکل ۱.۱۲ کلاً ده‌نقطهٔ نشان‌دار برده‌خط، باسه‌نقطه برهرخط و سه خط گذرنده ازهرنقطه، را نشان‌می‌دهد. ده‌نقطه و ده‌خط مذکور اعضای هندسهٔ‌متناهی دزارگ‌اند. برای دانستن آکسیومهای این‌هندسه به‌مفهوم‌دیگری، یعنی روش قراردادن تناظری بین‌نقاط و خطوط، نیازداریم. دراین‌صورت، اگرنقطه‌ای نقطهٔ‌پرسپکتیوبان دومثلث، و خطی خط‌پرسپکتیوبان همین دومثلث باشد، نقطه را قطب[67] خط و خط را قطبی[68]نقطه می‌نامیم. درهندسهٔ‌متناهی‌دزارگ، هیچ‌خطی قطب را به‌نقطه‌ای واقع‌بر قطبی وصل‌نمی‌کند. فی‌المثل، درشکل ۱.۱۲ نقطهٔ P قطب خط شامل‌نقاط R ، S ، T است. این حقیقت به‌تعاریف صوری زیر، که مفاهیم نقطه یا خط پرسپکتیوبان را به کار نمی‌برند، منجرمی‌شود:

تعریف. درهندسهٔ‌متناهی‌دزارگ خط‌معلوم l قطبی نقطهٔ‌معلوم P است اگر خط واصل P و نقطهٔ واقع بر l ای درمیان نباشد.

تعریف. درهندسهٔ‌متناهی‌دزارگ نقطهٔ‌معلوم P قطب خط‌معلوم l است اگر بین l

---

62. Finite Geometry of Desargues
63. Perspective from Point P
64. Point of Concurrency
65. Perspective fromaline
66. Line of Perspectivity
67. Pole
68. Polar

و هرخط واقع بر P ای نقطهٔ مشترکی درمیان نباشد.

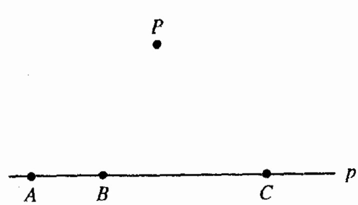
گرچه گسترش شهودی فوق به آکسیوم‌های هندسهٔ متناهی دزارگ منجر شده‌اند، اما این آکسیوم‌ها هستند که مفاهیم آغازگرند؛ ازشکل ۱.۱۲ هیچ چیز نمی توان اثبات کرد، و اثبات باید ازخود آکسیوم‌ها حاصل شود.

اکنون ببینید می توانید قطبها و قطبیهای گوناگون را درشکل ۱.۱۲ تشخیص دهید. فی‌المثل، اگرنقطهٔ T به‌عنوان قطب درنظر گرفته شود، قطبیهای آن کدام‌اند؟ به‌این سؤال، با درنظر گرفتن خطوط گذرنده‌از T و توجه به‌این‌که دراین شکل دقیقاً یك خط موجوداست که نقطهٔ مشترکی بااین خطوط ندارد، می توان جواب داد. این خط $\{P, C, C'\}$ = $\overleftrightarrow{PC'}$ است، و درنتیجه $\overleftrightarrow{PC'}$ قطبی موردنظر است.

آکسیوم‌های هندسهٔ متناهی دزارگ

۱. دراین هندسه حداقل یك نقطه موجوداست.
۲. هرنقطه حداقل یك قطبی دارد.
۳. هرخط حداکثر یك قطب دارد.
۴. دونقطهٔ متمایز حداکثر بریك خط واقع‌اند.
۵. هرخط دقیقاً دارای سه نقطهٔ متمایز واقع بر آن است.
۶. اگرخطی شامل نقطهٔ معینی نباشد، دراین صورت نقطه‌ای وجوددارد که هم بر آن خط هم بر هرقطبی آن نقطه واقع است.

درآکسیوم‌های فوق تعداد دقیق قطب‌های یك قطبی و تعداد دقیق قطبی‌های یك قطب به‌طور صریح بیان نشده‌اند. شکل ۱.۱۳ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم خط p قطبی‌ای از آنِ P باشد، چراکه دراین‌مورد آکسیوم ۲ وجود حداقل یك قطبی را تضمین می‌کند. بنا



شکل ۱.۱۳

به تعریف، هیچ خط گذرنده‌از Pای شامل هیچ یك ازنقاط (حداقل سه‌نقطهٔ) واقع‌بر p نیست. اما این‌مطلب درضمن این را نیز می‌گوید که هیچ‌نقطهٔ‌مشترکی بین p و هرخط گذرنده از P موجود نیست، بنابراین P تعریف مربوط‌به قطب p را برقرارمی‌کند. این اطلاعات، همراه‌با آکسیوم‌های ۲ و ۳ و تمرین ۱۶ ی تمرینات ۱.۵، به‌قضایای‌زیر منجرمی‌شود.

قضیهٔ ۱.۱۱. درهندسهٔ‌دزارگ هرخط دقیقاً یك‌قطب دارد.

قضیهٔ ۱.۱۲. درهندسهٔ‌دزارگ هرنقطه دقیقاً یك‌قطبی دارد.

درهندسهٔ‌دزارگ خطوط‌موازی موجودند، اما خاصیت آن‌ها باخواص موازی‌های اقلیدسی معمولی متفاوت است. فی‌المثل، درشکل ۱.۱۲ توجه کنید که ازنقطهٔ A' می‌توان سه‌خط مختلف به‌موازات خط R ، C ، B رسم‌کرد درحالی‌که از A' یك‌خط می‌تواند موازی خط A، B، T رسم‌شود.

ارزش‌دارد که اکسیومهاو ترسیمات‌این‌هندسه‌رابه‌خاطرحدس‌های‌دیگرمورد بررسی قراردهیم. اثبات‌های قضایای اضافی هندسهٔ متناهی‌دزارگ به‌صورت تمرینات در آمده‌اند.

تمرینات ۱.۵

۱. بابه کاربردن کلمات درخت به‌جای نقطه و ردیف به‌جای خط مجموعهٔ آکسیوم‌های هندسهٔ پاپوس را بازنویسی کنید.

۲. کدام یك‌از آکسیوم‌های هندسهٔ‌پاپوس درهندسهٔ‌اقلیدسی نیز گزاره‌هایی راست است؟

۳. به‌ازای هرنقطهٔ هندسهٔ‌پاپوس، چندنقطهٔ دیگر این هندسه برخط گذرنده ازاین نقطه قرار ندارد؟

۴. درشکل ۱.۱۰، فرض‌می‌کنیم هریك ازنقاط A ، B ، و C نقطهٔ P درآکسیوم ۵ هندسهٔ‌پاپوس رانمایش دهد. درمورد هریك، جمیع‌نقاط متناظربا P' این آکسیوم را نام‌ببرید.

۵. ثابت‌کنید که در هندسهٔ‌پاپوس حداقل دوخط موازی یك‌خط مفروض موجوداست.

٦. ثابت‌کنید که هندسهٔ‌پاپوس شامل دقیقاً نه‌نقطه است.

۷. ثابت‌کنید که هندسهٔ‌پاپوس شامل دقیقاً نه‌خط است.

۸. به‌ازای هرنقطهٔ هندسهٔ‌پاپوس، دقیقاً چندنقطه دراین هندسه وجوددارد که برخطی که ازاین

نقطه می‌گذرد قرارندارند؟ صحت پاسخ‌تان را اثبات‌کنید.

۹. ثابت‌کنید که درهندسهٔ پاپوس دقیقاً دوخط موازی خط مفروضی موجود است.

تمرینات ۱۰ـ۱۸ باهندسهٔ متناهی‌دزارگ سروکار دارند.

۱۰. برای نمایش هندسهٔ‌دزارگ جدولی، بااستفاده ازنقاط نام‌برده درشکل ۱.۱۲ و چنان‌که هرستون آن خطی ازاین هندسه را نمایش‌دهد، تهیه کنید.

۱۱. درشکل ۱.۱۲، قطب

a. $\overleftrightarrow{RB}$ b. $\overleftrightarrow{AS}$

را نام‌ببرید.

۱۲. درشکل ۱.۱۲، قطبی

a. نقطهٔ R b. نقطهٔ S

را نام‌ببرید.

۱۳. بااستفاده ازشکل ۱.۱۲، زوج مثلث شکل‌اقلیدسی پرسپکتیو ازنقطهٔ T و از $\overleftrightarrow{PC'}$ را نام‌ببرید.

۱۴. کدام یك از آکسیوم‌های هندسهٔ‌دزارگ در هندسهٔ‌اقلیدسی نیز گزاره‌هایی راست‌اند؟

۱۵. درشکل ۱.۱۲، جمیع خطوط موازی با $\overleftrightarrow{AS}$ را نام‌ببرید.

۱۶. ثابت‌کنید اگر نقطهٔ P برقطبی نقطهٔ Q واقع‌باشد، دراین صورت نقطهٔ Q برقطبی نقطهٔ P واقع است.

۱۷. ثابت‌کنید که دوخطِ موازی بایك خط باهم موازی نیستند.

۱۸. ثابت‌کنید خطی‌گذرنده از دونقطهٔ متمایز اگر و تنها اگر قطبی‌هایشان متقاطع باشند موجود است.

درمورد تمرینات I۱۹ ـ I۲۲ برای هندسهٔ مربوطه، جدولی مشابه جدول ۱.۲ به‌دست دهید.

I۱۹. هندسهٔ سه‌نقطه‌ای

I۲۰. هندسهٔ چهارخطی

I۲۱. هندسهٔ چهارنقطه‌ای

I۲۲. هندسهٔ‌فانو

I۲۳. بررسی و ملاحظه کنید که هریك از هشت خاصیت مطلوب هندسه‌های‌متناهی در هندسه‌های این‌بخش برقرار است.

۱.۶ هندسه‌های متناهی دیگر

هندسهٔ‌متناهی‌فانو خاصیت‌مخصوص خودتثنیه‌ای[۶۹]، که بدین‌معنی است که تثنیهٔ‌سطحی هر گزارهٔ راست آن گزاره‌ای‌راست در آن است، را داراست. درواقع، فانو مجموعهٔ خاصی از هندسه‌های متناهی را، که هریك از آن‌ها خود تثنیه بود، موردبررسی قرارداد. نشان‌عمومی هندسه‌های ازاین نوع به‌خصوص PG (n، q) است. حروف PG به‌جای هندسهٔ‌تصویری «Projective Geometry» قرارگرفته، و عـددn بـعد آن است (در این‌جـا و در مـورد هندسه‌های مسطحه ۲ = nاست) و qباید توان درست مثبتی ازیك عدداول باشد. نظریهٔ هندسهٔ تصویری می‌تواند برای اثبات قضیهٔ‌زیر، که دراین‌جا فرضش می‌کنیم، به کار رود.

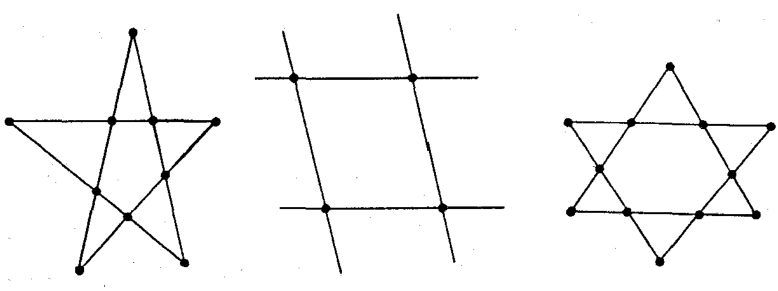
قضیهٔ ۱.۱۳. فورمول عمومی‌کل تعدادنقاط PG (n ، q) عبارت‌است از

$$\frac{q^{n+۱}-۱}{q-۱}$$

به‌عنوان مثال، PG(۲،۲۵) هندسه‌ای تـصویری است، درحـالی کـه PG(۲،۱۵) نیست. هندسهٔ PG(۲،q) دارای q+۱ نقطه درهرخط است، و بنابه ثنویت[۷۰]، در هرنقطه نیز q+۱ خط دارد. هندسهٔ PG(۲،۲) هندسهٔ‌فانو است.

درمورد هندسهٔ‌فانو،

$$\frac{q^{n+۱}-۱}{q-۱} = \frac{۲^{۳}-۱}{۱} = ۷$$



(a) (b) (c)

شکل ۱.۱۴

69. Self - Dual

70. Duality

است. اگر q=۳ باشد، دراین‌صورت PG(۲،۳) هندسهٔ‌متناهی جدیدی که خود تثنیه است می‌شود، که ازقضیهٔ ۱.۱۳، تعدادکل نقاط آن ۱۳ است. PG(۲،۳) هندسهٔ‌متناهی‌ای با ۱۳ نقطه و ۱۳ خط است. این‌هندسه دارای همان آکسیوم‌های هندسهٔ‌فانو، به‌استثنای این‌که درآن به‌جای سه‌نقطه برهرخط چهارنقطه وجوددارد، است. هندسهٔ‌دزارگ نیز مثالی ازیك هندسهٔ خود تثنیه است، اما ساخت آن، چنان است که عضوخانوادهٔ هندسه‌های پیوسته باهندسهٔ‌فانو نیست.

توسعهٔ‌بیشتری ازمفهوم ثنویت درفصل ۷ یافت‌می‌شود، و خواننده درآن‌جا، اشکال دیگری بامجموعه‌های‌نقاط و خطوطی که می‌توانند به‌عنوان اعضای هندسه‌های‌متناهی به‌کار روند، کشف خواهدکرد. دربخش ۹.۱ به‌معرفی نوع‌متفاوتی ازهندسه‌های‌متناهی پرداخته‌ایم، نوعی که اصل‌موضوعه‌ای خاص هندسه‌های نااقلیدسی[71] دارد.

دانشجوی علاقه‌مند خود می‌تواند هندسه‌هایی نامتناهی طرح‌کند. درشکل ۱.۱۴، مثال‌های متنوعی ازترسیمات ساده‌ای که می‌توانند درهندسه‌های متناهی به‌کار روند، نشان داده شده‌است. درتمرینات بعد بعضی‌از جنبه‌های‌جالب هریك از این‌اشکال مذکور افتاده‌است.

تمرینات ۱.٦

۱. برای هندسهٔ‌متناهی PG(۲،۳)، با به‌کاربردن اعداد ۱ تا ۱۳ درمورد نقاط و قراردادن نقاط واقع‌بر یك‌خط در یك‌ستون، جدولی تشکیل‌دهید.

درتمرینات ۲-۵ ازجدول تمرین ۱ استفاده کنید. درمورد تمرینات ۳-۵ پاسخ راست یا دروغ بدهید.

۲. چند خط گذرنده از هرنقطه موجوداست.

۳. به‌ازای مجموعه‌ای‌از چهارنقطهٔ‌متمایز این‌هندسه، دقیقاً یك‌خط ازاین هندسه که شامل هیچ‌یك ازاین نقاط نیست موجوداست.

۴. جمیع خطوط گذرنده ازیک نقطهٔ این‌هندسه شامل هرنقطهٔ این هندسه است.

۵. مجموعه‌ای از سه‌نقطهٔ‌متمایز این‌هندسه که خطی مشترك ندارند موجوداست.

---

71. Non - Euclidean Geometry

۶. کدام یك از نشان‌های زیر هندسه‌ای خود تثنیه نمایش می‌دهد؟

PG (۲،۴).a PG (۲،۵).b

PG (۲،۶).c PG (۲،۷).d

۷. درهندسه‌های تمرین ۶، هرجا که ممکن‌باشد، تعداد نقاط و خطوط را بیابید.

در هندسهٔ شکل ۱.۱۴ a:

۸. چندنقطه واقع‌بر هرخط است؟

۹. هندسه موردبحث شامل چندنقطه و چندخط است؟

۱۰. هرخط دارای چند خط دیگر موازی با آن است؟

۱۱. آیا هرزوج خط این هندسه درنقطه‌ای ازاین هندسه متقاطع‌اند؟

در هندسهٔ شکل ۱.۱۴ b:

۱۲. چند نقطه واقع‌بر هرخط است؟

۱۳. هندسهٔ موردبحث شامل چندنقطه و چندخط است؟

۱۴. هرخط دارای چندخط دیگر موازی با آن است؟

۱۵. درمورد هردو نقطهٔ‌متمایز، آیا دقیقاً یك‌خط گذرنده‌از آن‌ها موجوداست؟

در هندسهٔ شکل ۱.۱۴ c:

۱۶. هندسهٔ موردبحث شامل چندنقطه و چندخط است؟

۱۷. هرخط دارای چندخط دیگر موازی با آن است؟

۱۸. درمورد هردونقطهٔ‌متمایز، آیا دقیقاً یك خط گذرنده‌از آن‌ها موجوداست؟

I۱۹. ازخود، هندسهٔ متناهی‌ای ایجادکنید، و آن را چون در شکل ۱.۱۴ نمایش دهید.

اطمینان حاصل‌کنید که این هندسه هریك از خواص عمومی موردتوجه بخش ۱.۲ را برقرارمی‌کند. درمورد هندسه‌تان به هریك از تمرینات ۸ - ۱۱ پاسخ‌دهید. بعضی گزاره‌هایی راکه ممکن‌است به‌عنوان آکسیوم درهندسه‌تان به‌کار روند بنویسید.

I۲۰. بررسی و ملاحظه کنید که هریك از هشت‌خاصیت مطلوب هندسه‌های‌متناهی در هندسه‌های این‌بخش برقرار است.

۱.۷ مجموعه‌های آکسیوم‌های هندسهٔ اقلیدسی

اکنون‌که مجموعه‌های آکسیوم‌های چند هندسهٔ‌متناهی را بررسی کرده‌ایم، نگاهی به آکسیوم‌های هندسه‌های اقلیدسی، و بعضی مفاهیم وارد درجمیع مجموعه‌های آکسیوم‌ها بیندازیم.

طی ۲۰۰۰ سال یکی از مشکلات عظیم هندسه چگونه به‌دست‌دادن مجموعه‌ای کافی از آکسیوم‌ها درمورد هندسهٔ‌اقلیدسی معمولی بود. در این‌بخش چند مجموعه‌از چنین مجموعه‌های آکسیوم‌هایی موردبحث قرارگرفتند.

اصول[72] اقلیدس (حدود ۳۰۰ ق.م.) عبارت‌از ۱۳ کتاب شامل ۴۶۵قول جازم است. کلمهٔ قول‌جازم[73] به‌معنی گزارهٔ مطرح‌شده برای تصویب است، به‌این ترتیب گزاره‌های اقلیدس در واقع قضایایی[74] همراه‌با اثبات بودند. کتاب اصول، علاوه‌بر هندسه، شامل نظریهٔ‌اعداد[75] و جبر هندسی[76] بود. در این مورد مجموعهٔ معروفی از پنج آکسیوم و پنج اصل موضوعه به‌ترتیب زیر داده شده‌بود:

آکسیوم‌ها (یا مفاهیم متعارف)

۱. اشیای مساوی با یك‌چیز بایکدیگر نیز مساوی‌اند.
۲. چون مساوی‌ها به‌مساوی‌ها افزوده‌شوند، مجموع‌ها مساوی می‌شوند.
۳. چون مساوی‌ها از مساوی‌ها تفریق شوند، باقی‌مانده‌ها مساوی می‌شوند.
۴. اشیای منطبق بریکدیگر بایکدیگر مساوی‌اند.
۵. کل بزرگتر از جزء است.

اصول موضوع

۱. از هرنقطه می‌توان خط مستقیمی به هرنقطه کشید.
۲. خط مستقیم متناهی می‌تواند اصلاً به خط‌مستقیم امتداد داده‌شود.
۳. می‌توان دایره‌ای به‌مرکز هرنقطه و به شعاع هرفاصله رسم‌کرد.

---

72. Elements
73. Proposition
74. Theorems
75. Number Theory
76. Geometric Algebra

۴. جمیع زوایای قائم با یکدیگر مساوی‌اند.
۵. اگر قاطعی بردوخط به‌چنان طریقی افتد که زوایای‌داخلی واقع‌بر یك طرف آن قاطع کمتراز دو زاویه‌قائمه شوند، در این‌صورت خطوط‌مان درطرفی از قاطع که زوایا کمتر از دوزاویهٔ قائمه‌اند تلاقی می‌کنند.

اصل موضوع ۲ دراصل به این‌معنی است که یك‌پاره‌خط می‌تواند برای تشکیل یك خط به‌طور نامتناهی ادامه‌یابد. پنجمین‌اصل‌موضوع* [77] اقلیدس (اصل موضوع موازی‌ها) را، بعداً در این‌بخش و درفصل ۹ دربحث هندسهٔ‌نااقلیدسی، باتفصیل بیشتری موردبررسی قرار می‌دهیم.

طی صدهاسال گذشته، به‌خصوص، ریاضیدان‌های وارس‌پای‌بندان** ریاضیات [78] به نقایص گوناگونی درمفروضات اقلیدس اشاره کرده‌اند. درواقع اقلیدس مفروضات ضمنی (مفروضات صریحاً به‌بیان نیامدهٔ) دیگری را به‌کار گرفته‌است. معضلات منطقی خاطرنشان‌شده عبارتنداز:

- لزوم گزارهٔ مشخصی درمورد پیوستگی یا تداوم [79] خطوط و دوایر.
- لزوم گزاره‌ای درمورد امتداد نامتناهی خط مستقیم.
- لزوم بیان این واقعیت که هرگاه خط‌مستقیمی ازرأس یك‌مثلث داخل آن شود، باید ضلع مقابل آن رأس را قطع‌کند.
- لزوم گزاره‌هایی درمورد ترتیب نقاط واقع‌بر خط.
- لزوم گزاره‌ای درمورد مفهوم درمیان بودن [80] (بین‌بودن).
- لزوم گزارهٔ تضمین‌کننده یکتایی خط واصل دونقطهٔ متمایز.
- لزوم تقرب منطقی بیشتری، چون تقرب تبدیلات (فصل ۲)، که وابسته به مفهوم انطباق [81] نیست. اقلیدس براین فرض بود که می‌توان مثلثی را برداشت و، در حالی که جمیع خواصش بی‌تغییر باقی مانده‌اند، درمحلی دیگر قرارداد، و با این‌همه گزاره‌ای درمورد این تغییر نداده‌بود.
- لزوم فهرستی ازعبارات تعریف‌نشده.

---

* اصل موضوع پنجم
** بررسی‌کننده اصول

77. Fifth Postulate
78. Mathematicians Studying The Foundations of Mathematics
79. Continuity
80. Betweenness
81. Superposition

بسیاری‌از مجموعه‌های جدید آکسیوم‌های هندسهٔاقلیدسی به‌جبران این‌نقایص کار اقلیدس معرفی‌شده‌اند و در یك دورهٔمربوط به پای‌بندان هندسه، یا پای‌بندان ریاضیات، به تفصیل موردبررسی قرارگرفته‌اند. درحالت کلی، این مجموعه‌های جدیدتر آکسیومها جامعتر از آن اقلیدس‌اند و به همین دلیل پیچیده‌تر به‌نظر می‌آیند. درج این مجموعه‌ها در آغاز یك‌دوره هندسهٔدبیرستان، بدون معرفی آکسیوم‌های بازهم بیشتری به‌خاطر اجتناب از اثبات قضایای بسیار صعب در ابتدای این‌دوره، مشکل بوده‌است.

یکی از اولین مجموعه‌های جدید آکسیوم‌های هندسهٔاقلیدسی توسط موریتس پاش[82] در ۱۸۸۲ تعبیه‌شد. این شخص به‌خاطر آن‌چه که آکسیوم پاش نامیده‌شده و عبارت است‌از: خطی که از رأس مثلثی داخل آن می‌شود ضلع‌مقابل آن را قطع‌می‌کند، اعتباریافته است. در سال ۱۸۸۹، جیسیپی پئانو[83] تقرب تازهٔدیگری به‌دست‌داد. اما، احتمالاً مشهورترین مجموعهٔ آکسیوم‌های هندسهٔاقلیدسی‌توسط دیوید هیلبرت[84] داده‌شده‌ودرسال ۱۹۰۲ به‌زبان انگلیسی نشر یافته‌است. این آکسیوم‌ها درضمیمهٔ۱ آمده‌اند. در این‌مورد، هیلبرت از شش عبارت تعریف‌نشدهٔ: نقطه، خط، صفحه[85]، بین، هم‌نهشت[86]، و برفایده برده، و آکسیوم‌هایش را در پنج گروه به‌دست‌داده، و این گروه‌بندی به نشان‌دادن چگونگی غلبه برمشکلات اقلیدس مدد می‌رساند. به‌عنوان مثال، سه‌آکسیوم اول هیلبرت به ایضاح اصل‌موضوع اقلیدس درمورد رسم خطی مستقیم از نقطه‌ای به نقطه‌ای می‌پردازد، و آکسیوم‌های هم‌نهشتیش نقص منطقی انطباق را برطرف می‌کند.

از زمان هیلبرت به‌بعد مجموعه‌های جدید اصول موضوع دیگری درمورد هندسهٔ اقلیدسی به‌میان آمده‌اند. بعضی از آن‌ها توسط اسوالد وبلن[87] (در ۱۹۰۴ و ۱۹۱۱)، ای. وی. هانتینگتن[88] (۱۹۱۳)، هنری‌فوردر[89] (۱۹۲۷)، جی.دی.برکهوف[90] (۱۹۳۲)، وغیرهم‌ایجاد شده‌اند. آکسیوم‌های برکهوف (ضمیمهٔ۲) ازاهمیت خاصی برخوردارند زیرا (۱) برروابط بین هندسه و اعداد حقیقی تأکید دارند، (۲) شامل فاصله و زاویه به‌عنوان عبارات‌تعریف نشده‌اند، و (۳) برای درج دردوره‌های هندسه تعدیل شده‌اند.

یکی از دلایل این‌که چرا دستگاه برکهوف بس‌مختصر است قدرت اولین‌اصل موضوع آن است. چه ازآن‌جاکه این مفروضه دارای تأثیر فرض جمیع خواص اعداد حقیقی است نسب ترتیب نقاط به‌جای اصول موضوع اضافی تنها به قضایا و تعاریف وابسته است.

---

82. Moritz Pasch
83. Guiseppi Peano
84. David Hilbert
85. Plane
86. Congruent
87. Oswald Veblen
88. E. V. Huntington
89. Henry Forder
90. G. D. Birkhoff

به‌علت این‌که برنامه‌های هندسهٔ‌جدید به وحدت‌آهنگی[91] هندسهٔ‌تحلیلی و هندسهٔ ترکیبی حتی بیش‌از مورد زمان هیلبرت وابسته است، در هندسه به‌آکسیوم‌های مربوط به اعداد حقیقی و مفروضات منطقی جبر مجموعه‌ها نیازمندیم. مجموعه‌های آکسیوم‌های کتب درسی هندسهٔ‌جدید به‌طور معمول شامل آکسیوم‌های خاص موردنیاز هریك از مقاصدزیر، که به‌عنوان نتیجهٔ آکسیوم‌های هیلبرت به‌سهولت به‌چشم نمی‌خورند، هستند:

- اثبات وجود تناظری که به هرزوج نقطهٔ متمایز عدد منحصر به فردی را مرتبط می‌کند.
- تثبیت اندازهٔ فاصلهٔ بین هر دونقطهٔ خط به‌عنوان قدرمطلق تفاضل اعداد متناظر آن‌ها.
- تقریر وجود دستگاه مختص منحصربه‌فردی درمورد خطی که به دونقطهٔ‌متمایز دوعدد حقیقی متمایز مفروض تخصیص می‌دهد.
- تنظیم فرض‌منطقی موردنیاز طرح نظریهٔ‌تحدب (فصل ۳) باتقریر این‌که یك‌خط دریك صفحه نقاط غیرواقع برآن خط آن صفحه را به‌دو مجموعهٔ‌محدب چنان تقسیم می‌کند که هرقطعه خطی که نقطه‌ای از یک مجموعه را به نقطه‌ای از مجموعهٔ‌دیگر وصل‌کند، آن خط را قطع‌کند.
- تضمین مفروضات اضافی درمورد همنهشتی مثلث‌ها ـ مفروضاتی که نیازبه اثبات‌های طولانی مراحل اولیهٔ کتاب را برطرف می‌کنند ـ دوآکسیوم از متداول‌ترین آکسیوم‌های این مفروضات‌اند که (۱) همنهشتی مثلث‌ها از همنهشتی دوزاویه و ضلع بین آن‌ها حاصل می‌شود و (۲) همنهشتی مثلث‌ها از همنهشتی سه‌ضلع آن‌ها نتیجه‌می‌شود.
- تسلیم مفروضات اضافی درمورد مفاهیم‌اساسی سطح. این مفروضات شامل تناظری که عدد ۱ را با ناحیهٔ چندضلعی شکل‌خاصی مربوط‌می‌کند و تناظری که به هرناحیهٔ چندضلعی شکل‌محدبی عددحقیقی مثبت منحصربه‌فردی را ارتباط می‌دهد؛ گزاره‌ای که اگر دومثلث همنهشت باشند، نواحی مثلث شکل مربوط به آن‌ها سطح یکسان دارند؛ و این فرض که اندازهٔ سطح یك‌ناحیهٔ مستطیل شکل حاصل‌ضرب اندازه‌های طول‌های قاعده و ارتفاع آن است، می‌باشند.

---

91. Coordination

مجموعه‌های آکسیوم‌های یك‌هندسه باید حداقل دوخاصیت مهم داشته‌باشند:

۱. مجموعهٔ موردنظر باید سازگار[92] باشد. درمجموعهٔ سازگار آکسیوم‌ها، امکان ندارد که از آن‌ها برای اثبات قضیه‌ای که مناقض یکی‌از آکسیوم‌ها یاقضایای دیگری که قبلاً اثبات شده‌اندباشد، استفاده کنیم. جمیع مجموعه‌های آکسیوم‌های این‌کتاب مثال‌هایی از دستگاه‌های سازگاراند. روش اثبات سازگاری یك‌مجموعه آکسیوم درفصل ۹ راجع‌به هندسهٔنااقلیدسی موردبحث قرارگرفته است. مثالی‌از یك دستگاه ناسازگار می‌تواند دستگاهی که شامل هردو آکسیوم زیر است باشد: (a) دونقطهٔ‌متمایز دقیقاً یك خط را مشخص‌می‌کنند، (b) دونقطهٔ متمایز دقیقاً دو خط را مشخص‌می‌کنند.

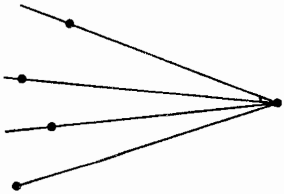
۲. مجموعهٔ مورد نظر باید تمام[93] باشد. گرچه تمامیت را می‌توان به چند طریق توضیح داد، در این جا به این معنی به کار رفته که در مورد هر دو گزارهٔ متناقض متضمن مفاهیم مجموعهٔ آکسیومهای مورد بحث، هر حداقل یکی از آن گزاره‌ها بتواند بااستفاده از آکسیومهای آن مجموعه اثبات شود.

یکی از مثال‌های معروف اهمیت تمامیت به پنجمین‌اصل موضوع اقلیدس مربوط می‌شود. مجموعهٔ آکسیوم‌های هندسهٔ‌اقلیدسی بی‌اصل موضوع موازی‌ها (یا معادل‌آن) نمی‌تواند تمام‌باشد و در این‌صورت هندسهٔ‌مجموعهٔ باقی‌ماندهٔ آکسیوم‌ها، هندسهٔ‌مطلق نامیده می‌شود و اثبات این قضیه که مجموع‌اندازه‌های زوایای یک مثلث یا ۱۸۰ درجه است یا نیست درهندسهٔ مطلق ممکن‌نیست.

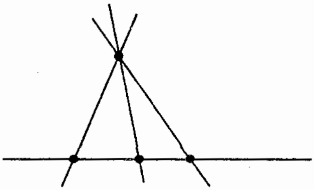
دربررسی پای‌بندان ریاضیات، اغلب مهم است که مجموعهٔ آکسیوم‌ها دارای حداقل یک خاصیت اضافی، یعنی این خاصیت که: هیچ‌یك از آکسیوم‌ها نتواند از مجموعهٔ باقی‌ماندهٔ آکسیوم‌ها ثابت‌شود، باشد. مجموعه‌های آکسیوم‌های دارای این‌خاصیت به مجموعه‌های مستقل[94] آکسیوم‌ها موسوم‌اند. دورهٔ مربوط به پای‌بندان هندسه شامل اثبات‌های استقلال است.

دراثبات این‌که آکسیومی از یك مجموعه مستقل از مابقی است، شخص می‌تواند مدل یا نمونه[95]ای نشان‌دهد که درآن جمیع آکسیوم‌های دیگر مجموعه برقرارند، اما آکسیوم

92. Consistent
93. Complete
94. Independent sets
95. Model



شکل ۱.۱۵



شکل ۱.۱۶

باقی‌مانده نقض شده‌است. در این مورد دومثال ساده از دوهندسهٔمتناهی متفاوت حاصل می‌شود. شکل ۱.۱۵ نمونه‌ای برای دوآکسیوم اول هندسهٔ چهارخطی‌مان است. آکسیوم۳ برقرارنیست، و درنتیجه مستقل است. شکل۱.۱۶ نمونه‌ای را برای دوآکسیوم‌اول هندسهٔ چهارنقطه‌ای‌مان نشان می‌دهد. در این‌مورد نیز آکسیوم۳ برقرار نیست، و درنتیجه مستقل است.

یکی‌از مثال‌های معروف اهمیت استقلال متضمن اصل‌موضوع پنجم‌اقلیدس است. اصل موضوع پنجم مذکور مستقل‌از مابقی‌است. هندسه‌های نااقلیدسی، موردبررسی فصل ۹، نتیجهٔ جانشینی اصول‌موضوع موازی‌های دیگری که مناقض اصل موضوع وارد در مجموعهٔ اقلیدس‌اند، می‌باشند. نمونه‌های به‌کاررفته درآن فصل نشان‌می‌دهند که هندسه‌های مبتنی‌بر شقوق دیگر اصل موضوع‌پنجم به همان اندازهٔ هندسهٔ اقلیدسی معمولی سازگارند.

اقلیدس خوددر به‌کاربردن اصل موضوع‌پنجم خودکاره* به‌نظر می‌رسد. ۲۸قضیهٔ‌اول اصول‌اش بدون رجوع‌به اصل موضوع پنجم مزبور یا شق دیگر آن اثبات شده‌اند. به‌همین علت، این ۲۸قضیه قسمت مهمی از آن‌چه را که هندسهٔ‌مطلق، هندسه‌ای مبتنی‌بر جمیع آکسیوم‌ها و اصول موضوع‌اقلیدس جز اصل موضوع پنجم آن، نامیده‌می‌شود، تشکیل می‌دهند.

طلب استقلال در سطوح ابتدایی‌تر همواره مطلوب نیست. به‌همین جهت، کتب هندسهٔ دبیرستانی معمولاً دارای آکسیوم‌های اضافی‌ای، که می‌توانند از آکسیوم‌های دیگر اثبات شوند، می‌باشند. این آکسیوم‌ها، به‌این دلیل که برای بیان و استفادهٔ زودرس در دورهٔ‌مذکور مناسب‌اند، یا به این‌علت که اثبات‌شان در این‌سطح بسیارمشکل است، در مجموعهٔ آکسیوم داخل شده‌اند. آکسیوم‌های مذکور می‌توانند در دوره‌های پیشرفته‌تر قضیه شوند. مفروضات هندسهٔ اقلیدسی، همراه‌با بعضی‌از قضایای در دوره‌های مدخل اثبات‌شده، مفروضات اساسی به‌کاررفته درفصول ۲ تا ۵ این‌کتاب‌اند.

---

* کسی که از انجام‌دادن کاری کراهت دارد.

تمرینات ۱.۷

۱. شکلی رسم‌کنید که بیان‌دقیق اصل موضوع پنجم اقلیدس را شرح دهد.

در مورد تمرینات ۲-۷، شکلی رسم‌کنید که آکسیوم‌های هیلبرت زیر را شرح دهد.

۲. ترتیب آکسیوم ۲
۳. ترتیب آکسیوم ۴
۴. ترتیب آکسیوم ۵
۵. همنهشتی آکسیوم ۳
۶. همنهشتی آکسیوم ۴
۷. آکسیوم تداوم

درمورد تمرینات ۸-۱۰، آکسیوم‌های هیلبرتی را نام‌ببرید که:

۸. آکسیوم پاش را بیان می‌کنند.
۹. یکتایی خط واصل دونقطهٔ‌متمایز را تضمین‌می‌کنند.
۱۰. با بینیّت*[۹۶] نقاط واقع‌بر یك‌خط سروکار دارند.

درمورد تمرینات ۱۱-۱۴، بیان‌کنید که یك‌مجموعهٔ آکسیوم‌ها می‌تواند:

۱۱. تمام‌باشد اما مستقل نباشد
۱۲. مستقل باشد اما تمام نباشد.
۱۳. مستقل باشد اما سازگار نباشد
۱۴. سازگار باشد اما مستقل نباشد، یا خیر.

درمورد تمرینات ۱۵-۲۲، آکسیومی بیان‌کنید که بتواند به مجموعهٔ آکسیوم‌های مفروض هر هندسه اضافه شود و آن مجموعه بیش‌از آن سازگار نباشد.

---

96. Betweenness

*درمیان بودن، در بین‌بودن

۱۵. آکسیوم‌ها و اصول موضوع اقلیدس
۱۶. اصول موضوع برکهوف
۱۷. آکسیوم‌های هندسهٔ سه‌نقطه‌ای
۱۸. آکسیوم‌های هندسهٔ چهارخطی
۱۹. آکسیوم‌های هندسهٔ چهارنقطه‌ای
۲۰. آکسیوم‌های هندسهٔ فانو
۲۱. آکسیوم‌های هندسهٔ پاپوس
۲۲. آکسیوم‌های هندسهٔ دزارگ

I۲۳. در یکی از کتب هندسهٔ دبیرستانی اخیر، مجموعهٔ آکسیوم‌هایی بیابید که مجموعه‌ای مستقل نیست. حداقل به یک «آکسیوم» که بتواند، بااستفاده ازآکسیوم‌های باقی‌مانده، به‌عنوان قضیه اثبات شود، اشاره کنید.

I۲۴. نمونه‌های دیگری را، غیراز آن‌ها که درشکل‌های ۱.۱۵ و ۱.۱۶ نشان داده‌شده‌اند، کشف کنید که استقلال آکسیوم‌های دیگر هندسه‌های معرفی‌شده دراین فصل را نشان دهند.

I۲۵. اثباتهای ۲۸ قضیهٔ اول اصول اقلیدس را، برای تحقیق این‌که هریک قضیه‌ای درهندسهٔ مطلق است، بررسی کنید.

تمرینات مروری فصل

فصل ۱

۱. یک هندسهٔ‌متناهی به‌علت دارابودن تعدادی متناهی از چه‌چیز هندسهٔ‌متناهی نامیده‌می‌شود؟

۲. از روش اراتستن دراندازه‌گیری‌های فاصلهٔ ۷۰۰km و اختلاف در زاویهٔ‌فراز °۸.۳، برای پیدا کردن محیط یک‌سیاره استفاده کنید.

درمورد تمرینات ۳-۵۸،بیان‌کنید که گزارهٔ آمده درمورد هندسهٔ‌متناهی خاص درنظر گرفته شده همواره راست است یاخیر. ستون‌های جدول هندسه‌های زیر راارائه‌می‌دهند: (a) سه نقطه‌ای؛ (b) چهارخطی؛ (c) چهارنقطه‌ای؛ (d) فانو؛ (e) پاپوس؛ (f) دزارگ؛ (g) شکل ۱.۱۴c.

	g	f	e	d	c	b	a
به‌ازای هر دونقطهٔ متمایز، دقیقاً یک خط گذرنده از آن دو موجود است.	.۹	.۸	.۷	.۶	.۵	.۴	.۳
هر خط دو یا کمتر از دو خط دیگر از هندسه مورد بحث موازی با خود دارد.	.۱۶	.۱۵	.۱۴	.۱۳	.۱۲	.۱۱	.۱۰
هر نقطهٔ هندسهٔ مورد بحث دقیقاً برسه خط این هندسه قرار دارد.	.۲۳	.۲۲	.۲۱	.۲۰	.۱۹	.۱۸	.۱۷
جمیع آکسیوم‌های این هندسه در هندسهٔ اقلیدسی معمولی نیزگزاره‌هایی راست‌اند.	.۳۰	.۲۹	.۲۸	.۲۷	.۲۶	.۲۵	.۲۴
تغییر آخرین آکسیوم هندسهٔ مورد بحث می‌تواند به هندسهٔ یانگ منتج شود.	.۳۷	.۳۶	.۳۵	.۳۴	.۳۳	.۳۲	.۳۱
به‌ازای هر مجموعهٔ سه نقطه‌ای، دقیقاً یک خط شامل آن‌ها موجود است.	.۴۴	.۴۳	.۴۲	.۴۱	.۴۰	.۳۹	.۳۸
اگر نقطه‌ای برخط مفروضی قرار نداشته‌باشد، در این صورت براین خط نقطه‌ای موجود است که برهیچ خط گذرنده از نقطهٔ مفروض واقع نیست.	.۵۱	.۵۰	.۴۹	.۴۸	.۴۷	.۴۶	.۴۵
خطوط گذرنده از هرنقطهٔ هندسهٔ موردبحث شامل هر نقطهٔ این هندسه‌اند.	.۵۸	.۵۷	.۵۶	.۵۵	.۵۴	.۵۳	.۵۲

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان ازهر مجموعهٔ تمریناتی که قبلاً از مجموعه‌های تمرینات پیشین این‌فصل معین نشده‌اند انتخاب‌کرد.

۲
تبدیلات هندسی

۲.۱ مدخل تبدیلات

درفصل اول، مجموعه‌های آکسیوم‌ها مبنایی برای بررسی هندسه‌ها به دست‌دادند. دراین فصل، مفهوم تبدیل طریق‌دیگری در بررسی بعضی هندسه‌ها ارائه می‌دهد. ممکن‌است دانشجویان درتجربیات اولیه‌شان ازهندسه، در بررسی‌های غیررسمی نسب هندسی از تلنگرها، چرخش‌ها و سرش‌ها سود برده باشند. درهندسهٔ دبیرستان، دانشجویان بادوران و انتقال مواجه می‌شوند. بعضی از مثلث‌ها همنهشت، و بعضی متشابه‌اند. به‌خاطر بیاورید که نسبت طول‌های دوضلع یک‌مثلث برای اضلاع متناظر با آن‌ها از مثلث‌دیگری که باآن متشابه است، بی تغییر می‌ماند. در هندسه‌های موردبررسی بعدی این متن، شخص از مفاهیم انعکاس و تصویر سخن به‌میان می‌آورد. جمیع این مفاهیم بامفهوم بسیار اساسی درهندسه، یعنی، مفهوم تبدیل هندسی[1]، وابسته‌اند.

مواردزیر دومثال از تبدیلات‌اند:

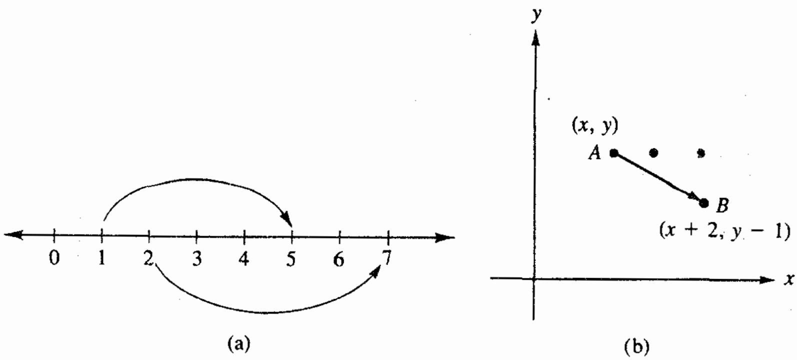
۱. جفت‌سازی*[2] مشخص با $x \to 2x+3$ی نقاط صحیح[3] بریک محورعددی[4]. علامت پیکان به‌طورساده معرف این‌است که عضودوم جفت‌سازی تصویر[5] عضواول آن تحت عمل تبدیل‌است. به‌عنوان مثال، نقطهٔ ۱ با ۵ و ۲ با ۷ جفت‌می‌شود. شکل ۲.۱ a را ملاحظه کنید.

۲. $(x, y) \to (x+2, y-1)$ مثالی‌از یک‌انتقال است. همان‌گونه که درشکل ۲.۱ b

---

1. Geometric Transformation
2. Pairing
3. Integral Points
4. Line Number
5. Image

* زوج‌بندی



شکل ۲.۱

نشان‌داده‌شده، هرنقطه بامختصات حقیقی درصفحهٔ اقلیدسی بانقطه‌ای ۲ واحدبه‌سمت راست و ۱واحد زیر نقطهٔاول جفت شده‌است.

دراین‌بخش، تبدیلات هندسی تعریف، و چندین مفاهیم مشترک درجمیع تبدیلات معرفی شده‌است. بخش ۲.۲ به‌بحث درمجموعه‌های خاصی از تبدیلات موسوم‌به گروه‌ها[6]، که نقش مهمی درهندسه‌هایی که برحسب تبدیلات تعریف شده‌اند ایفامی‌کنند، می‌پردازد. این‌بخش شامل مثالی‌از گروه متناهی تبدیلات است. بخشهای ۲.۳- ۲.۷ مفاهیم بسیاری‌از هندسهٔاقلیدسی دوبعدی و سه‌بعدی را، بااستفاده ازمفهوم تبدیلات برای نشان‌دادن مفاهیم آشنا ازنظرگاهی‌جدید، ارائه می‌دهد. بخش ۲.۵ از ضرب‌ماتریسی درکاربرد تبدیلات درگرافیک‌های‌کامپیوتری[7]استفاده می‌کند. آخرین‌بخش، یعنی بخش ۲.۸، مفهوم تبدیلات را بامعرفی گروه تشابهات[8]، گروه به‌گونه‌ای عمومی‌تری که تبدیلات اقلیدسی را به‌عنوان زیرگروه دربردارد، وسعت می‌بخشد. این بخش مرحله‌ای قاطع به‌سمت هندسهٔ بسیار عمومی‌تر فصل ۷ است.

قبل‌از به‌دست‌دادن تعریف دقیق تبدیل، لازم‌است که به‌توضیح مفهوم گسترش بپردازیم.

تعریف. گسترش[9] مجموعهٔ A درمجموعهٔ B جفت‌سازی اعضای A و زیرمجموعه‌ای از

---

6. Groups
7. Computer Graphics
8. Group of Similarities
9. Mapping

B به‌طریقی است که هرعضو A با دقیقاً یک عضو آن زیرمجموعهٔ B جفت شود، و هرعضو آن زیرمجموعهٔ B با حداقل یك عضو A جفت‌شود.

حالت‌خاصی از گسترش مجموعهٔ A درمجموعهٔ B که درآن هرعضو B باحداقل یك‌عضو A جفت‌شده به گسترش مجموعهٔ A بر[10] مجموعهٔ B موسوم‌است.

تعریف. F گسترشی‌از مجموعهٔ A درمجموعهٔ B است اگربه ازای هرعضو a ی A عضو منحصربه فرد b ی B که با a جفت‌شده موجودباشد؛ این جفت‌سازی رابا $f(a) = b$ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ A دامنه[11]، و مجموعهٔ B هم‌دامنهٔ[12] f نامیده‌می‌شود.

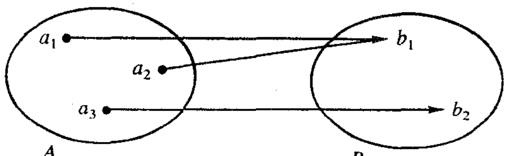
تعریف. بامعلوم‌بودن گسترش f از A به B، حوزهٔ[13] f مجموعهٔ نقاط b چنان‌که $b = f(a)$ به‌ازاء a ای در A باشد، است.

تعریف. گسترش f از A به B برگسترش است اگرحوزهٔ f مساوی B باشد.

تعریف. گسترش f از A به B یك‌به‌یك است اگرهر عضو واقع‌در حوزهٔ f تصویر دقیقاً یك‌عضو A باشد. یعنی، اگر $f(a) = f(c)$، در این‌صورت $a = c$.

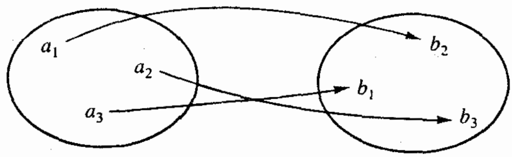
شکل ۲.۲ مثالی‌از گسترشی را نشان‌می‌دهد که زوجهای مرتب[14] آن (a_1, b_1)، (a_2, b_1)، و (a_3, b_2) اند. گسترشی از مجموعهٔ A در مجموعهٔ B را می‌توان با علامت $f(a) = b$ نیز مشخص‌کرد. دراین‌مورد، عضو b ی B تصویر عضو a ی A تحت‌گسترش f است.

نوع خاصی‌از گسترشها از اهمیت خاصی در ریاضیات برخوردار است؛ این‌گسترش گسترشی است که هم یك‌به‌یك هم برگسترش، یا تبدیل[15] است.



شکل ۲.۲

10. Onto
11. Domain
12. Codomain
13. Range
14. Ordered Pairs
15. Transformation



شکل ۲.۳

تعریف. تبدیل گسترش f ای از A بر B چنان‌است که هرعضو B تصویر دقیقاً یك‌عضو A باشد.

به‌عبارت دیگر، یك‌تناظر یك‌به‌یک بین‌مجموعه‌های اعضای A و B موجوداست. درشکل ۲.۳ مثال ساده‌ای ازیك تبدیل نشان داده‌شده است.

تابع[16] را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای از ازواج مرتب بی‌هیچ دوزوج متفاوت دارای عضواول یکسان تعریف کرد. می‌توان ملاحظه کرد که تعریف گسترش‌مان معادل تعریف خاصی‌از تابع‌است، زیرا دریك گسترش، داشتن دوزوج متفاوت باعضواول یکسان به این‌معنی است که عضوی‌از A بابیش‌از یك‌عضو B جفت شده‌است. اما، مرسوم است که درهندسه به‌جای تابع عبارت گسترش به کاررود. یکی‌از تفاوت‌های اساسی بین یك گسترش و یك تبدیل این است که پس‌وپیش‌کردن اعضای ازواج یك گسترش لزوماً به‌گسترش منتج نمی‌شود، درحالی‌که پس‌وپیش‌کردن اعضای ازواج یك تبدیل هم‌چنان به‌تبدیل منجر می‌گردد.

دوتن از قدیمی‌ترین ریاضی‌دان‌های نویسنده درمورد نظریهٔ تبدیل عبارت‌انداز: ریاضی‌دان کثیرالتألیف انگلیسی، آرتورکیلی[17] (۱۸۹۵ - ۱۸۲۱)، و ریاضی‌دان بازهم انگلیسی جیمزسیلوستر[18] (۱۸۹۷-۱۸۱۴)،که دردانشگاه جونزهاپکینز[19] تدریس می‌کرد و دبیرمؤسس مجلهٔ‌ریاضیات آمریکایی[20] بود.

مفهوم تبدیل به‌علت این‌واقعیت مهم‌است که مجموعه‌های تبدیلات را می‌توان درطبقه‌بندی هندسه‌ها به‌کاربرد. به‌عنوان مثال، درهندسهٔ‌دبیرستانی تبدیلات مجازدوران، انتقال، و گاهی تشابه‌اند. مجازشمردن انواع عمومی‌تر تبدیلات دیگر به‌هندسه‌های دیگر منتج‌می‌شود. دانشجو، دریك هندسهٔ‌خاص به‌بررسی خواص[21] اشکال و تصاویرآن‌ها تحت

---

16. Function
17. Arthur Cayley
18. James Sylvester
19. Johns Hopkins University
20. American Journal Of Mathematics
21. Properties

مجموعه‌ای از تبدیلات می‌پردازد. خواص‌لایتغیر[22] آن خواص اند که تغییرنمی‌کنند. دربررسی هندسه ازطریق تبدیلات ازدانشجو خواسته می‌شود که به‌بستگی‌های شدید بین جبرمجرد[23] و هندسهٔ‌جدید توجه داشته‌باشد. خوانندگانی که هنوز به‌مطالعهٔ جبرمجرد نپرداخته‌اند توضیح مفاهیم لازم این موضوع را دراین کتاب خواهندیافت.

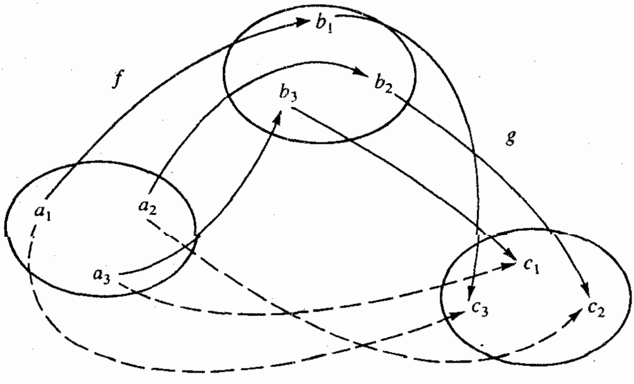
اگر f تبدیلی‌از A بر B و g تبدیلی‌از B بر C باشد، حاصل‌ضرب $h = gf$ به‌صورت تبدیل‌از A بر C چنان‌که به‌ازای هرنقطهٔ A، $h(p) = g[f(p)]$ باشد، تعریف شده‌است. توجه داشته‌باشید که حاصل‌ضرب gf به‌چنان طریقی تعریف‌شده که ابتدا تبدیل سمت‌راست آن انجام‌گیرد.

درشکل ۲.۴، ازواج h عبارت‌انداز $(a_۱،c_۳)$، $(a_۲،c_۲)$، $(a_۳،c_۱)$.

به‌عنوان مثالی‌از حاصل‌ضرب دوتبدیل، دومورد تعریف‌شده به‌صورت زیر به ازای جمیع نقاط $(x،y)$ را درنظر می‌گیریم.

$$f\ (x،y) \to (x+۱\ ،y+۱)$$
$$g\ (x،y) \to (x+۲\ ،y-۲)$$

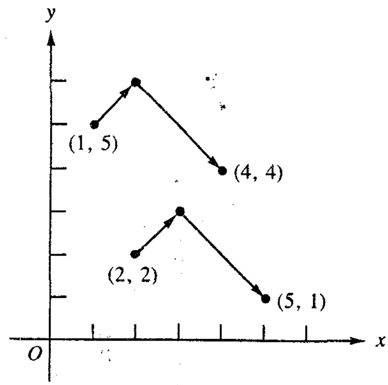
نتایج f بعدازآن g، gf، به‌ازای نقاط نمونهٔ (۲،۲) و (۱،۵) درشکل ۲.۵ نشان داده‌شده است. تأثیر مرکب gf موجب می‌شود که $(x،y)$ تصویر $(x+۳،y-۱)$ داشته‌باشد.



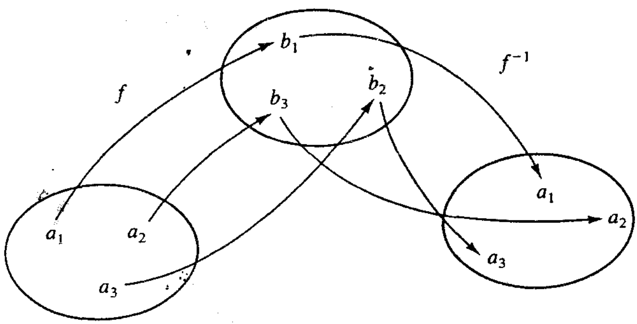
شکل ۲.۴

22. Invariant Properties

23. Abstract Algebra



شکل ۲.۵



شکل ۲.٦

درحالات خاصی حاصل‌ضرب دو تبدیل با I نمایش داده‌می‌شود. در تبدیل عینیت*[24]، هرعضو تصویر خودش است. تبدیل عینیت هرنقطه را ثابت باقی‌می‌گذارد. دراین‌حال، اگر I = gf، چنان‌که در شکل ۲.٦ تصویر شده، باشد، دراین صورت g تبدیل معکوس[25] f، مشخص‌با f^{-1} = g، است. معکوس یك تبدیل دارای تأثیر «تبطیل»** تبدیل اصلی، به‌طوری‌که حاصل‌ضرب یك تبدیل و معکوس آن تبدیل عینیت است، می‌باشد. فی‌المثل، اگر f تبدیلی چنان باشد که در آن (x ، y) دارای تصویر (x+۴ ، y-۲) باشد، در این صورت f^{-1} چنان تبدیلی است که درآن (x،y) دارای تصویر (x-۴،y+۲) است. هرتبدیل معکوسی دارد. اگرزوج (a،b) درگسترش f رخ‌دهد، دراین‌صورت (b،a) درگسترش f^{-1} واقع‌می‌شود.

---

24. Identity Transformation
25. Inverse Transformation

* تبدیل‌همانی
** باطل‌کردن

این واقعیت که f یك‌به‌یک و برگسترش است مستلزم این‌است که f^{-1}، به‌این‌طریق تعریف‌شده، برگسترش است. اگر g تبدیل دیگر برقرارکنندهٔ gf = عینیت باشد، دراین‌صورت g باید مساوی f^{-1} باشد. به‌این‌ترتیب، معکوسات تبدیلات منحصربه‌فرداند.

تمرینات ۲.۱

۱. نموداری نمایشگر دومجموعه، یکی باشش و یکی با هشت‌عضو رسم‌کنید؛ بعد گسترشی را مشخص‌کنید که تبدیل نباشد.

۲. کدام‌یک ازگسترشهای نشان‌داده شده درشکل ۲.۷ تبدیل است؟

درتمرینات ۳-۵، درمورد تبدیل مشخص‌با $x \to 2x - 1$، تصویر موردزیر رابه دست‌دهید:

۳. ۷   ۴. ۲-   ۵. $-\frac{3}{4}$

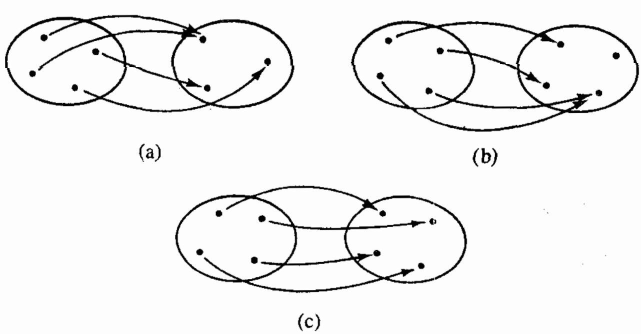
درتمرینات ٦-۸، درمورد تبدیل مشخص‌با $(x,y) \to (x+5, y-3)$، تصویر هرنقطه را به‌دست دهید:

٦. (۲،۱)   ۷. (۰،۰)   ۸. (۲-،۳-)

درتمرینات ۹-۱۲، فرض می‌کنیم $f = \{(a,b), (c,d), (e,h)\}$ و $g = \{(b,i), (d,j), (h,k)\}$ تبدیلات نقاط بریك‌خط باشند.

۹. حاصل‌ضرب gf رابیابید.   ۱۰. حاصل‌ضرب fg را بیابید.

۱۱. f^{-1} را بیابید.   ۱۲. g^{-1} را بیابید.



شکل ۲.۷

در تمرینات ۱۳-۱۶، فرض می‌کنیم f تبدیلی چنان باشد که (x,y) تصویر $(x-5, y+2)$ داشته باشد و g چنان‌که (x,y) تصویر $(x+2, y-3)$.

۱۳. حاصل‌ضرب fg را بیابید.

۱۴. حاصل‌ضرب gf را بیابید.

۱۵. f^{-1} را بیابید.

۱۶. g^{-1} را بیابید.

۱۷. اگر حاصل‌ضرب T_1T_2 موجود باشد، دراین صورت تبدیل T_2 را سازش‌پذیر[26] با T_1 می‌گویند. دراین‌صورت آیا اگر T_2 سازگار با T_1 باشد، T_1 لزوماً سازگار با T_2 است؟

۱۸. قضیهٔ مربوط به سازش‌پذیری[27] را، درصورتی‌که T_1 و T_2 تبدیلات یك مجموعه برخودش باشند، بیان و اثبات کنید.

۱۹. تبدیل f چنان‌که $ff = I$ تبدیل عینیت باشد، به تبدیل پیچندگی[28] موسوم است. در این‌صورت اگر f یك تبدیل پیچندگی باشد، ثابت‌کنید که $f = f^{-1}$.

۲۰. اگر f تبدیلی چنان‌باشد که (x,y) تصویر $(x+a, y+b)$ داشته‌باشد، مقادیر a و b را، چنان‌که $ff = I$ باشد، بیابید.

درمورد تبدیلات مشخص درتمرینات ۲۱I و ۲۲I، درصورتی که فاصلهٔ بین دونقطه درتبدیل مربوطه خاصیتی لایتغیر باشد آن را کشف‌کنید.

۲۱I. تبدیل در تمرینات ۳-۵.

۲۲I. تبدیل در تمرینات ۶-۸.

۲.۲ گروه‌های تبدیلات

هندسه‌های جدید معمولاً به‌جای یك تبدیل بامجموعه‌ای از تبدیلات سروکار دارند. یکی‌از انواع بسیارمتداول مجموعه‌های تبدیلاتی که با آن مواجه می‌شویم گروه است.

تعریف. گروه‌تبدیلات[29] یك مجموعه برخودش مجموعهٔ‌ناتهی تبدیلات S همراه‌باعملی چنان است که:

---

26. Compatible
27. Compatibility
28. Involutory
29. Group of Transformations

۱. اگر f و g درS باشند، دراین صورت fg و gf درS اند. (بستگی[۳۰])
۲. اگر f ،g، و h درS باشند، دراین‌صورت f(gh) = (fg)h باشد. (شرکت‌پذیری[۳۱])
۳. عضو منحصربه‌فردی درS موجود باشدکه If = fI = f را به‌ازای جمیع f های درS برقرارکند. (عینیت)
۴. بامعلوم‌بودن f درS ، عضو منحصربه‌فرد f^{-1} برقرارکنندهٔ $f^{-1}f = ff^{-1} = I$ وجود داشته‌باشد. (معکوسات)

اولین خاصیت ازخواص فوق خاصیت بستگی، و بدین‌معنی است که حاصل‌ضرب هردو تبدیل‌مجموعه، خودتبدیلی دراین مجموعه است. به‌بیان‌دیگر، عمل‌ضرب موردبحث را می‌توان همواره داخل یك‌گروه ازتبدیلات بدون خارج‌شدن از آن‌گروه انجام‌داد. دومین خواص خاصیت شرکت‌پذیری است. دراین‌جا فرض براین است که تعریف ضرب تبدیلات، بی‌توجه به پرانتزبندی به تبدیلی بعداز آن دیگری منتج‌می‌شود، و علامت f(gh) و (fg)h حاصل‌ضرب سه‌تبدیل به همین‌ترتیب یکسان را مشخص‌می‌کند. به‌عنوان مثال، سه‌تبدیلی را که به‌صورت زیرتعریف شده‌اند درنظر می‌گیریم:

$$f: x \to x+3$$
$$g: x \to x-2$$
$$h: x \to 2x$$
$$f(gh): x \to ([2x]-2)+3 = 2x+1$$
$$(fg)h: x \to 2x+(-2+3) = 2x+1$$

خاصیت‌سوم وجود یك عینیت منحصربه‌فرد را مقررمی‌کند. از آن‌جاکه حاصل‌ضرب یك‌تبدیل و عینیت همان تبدیل است، تأثیر عینیت لایتغیرگذاشتن هرنقطه است.

خاصیت‌چهارم وجود یك تبدیل معکوس منحصربه‌فرد را درمورد هرتبدیل مجموعه‌مان برقرارمی‌کند. از آن‌جاکه حاصل‌ضرب یك‌تبدیل و معکوسش عینیت است، تأثیر معکوس مزبور تبطیل تبدیل موردبحث، بابازگرداندن هرنقطه به‌موقع اصلی‌اش، است.

خاصیت‌تعویض‌پذیری*[۳۲] fg = gf در مورد تبدیلات برقرارنیست. درصورتی‌که

---

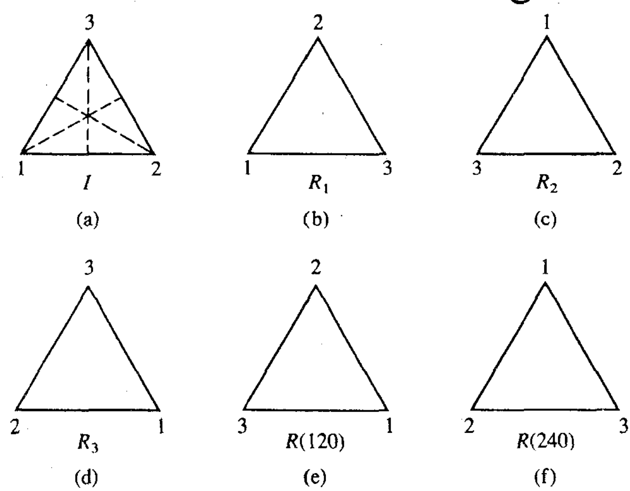
30. Closure
31. Associativity
32. Commutative Property

* جابه‌جایی

خاصیت تعویض‌پذیری درمورد جمیع ازواج اعضای یك گروه برقرارباشد، آن گروه گروه‌تعویض‌پذیر یا آبلی[33] (به‌نام ریاضی‌دان نروژی ان.اچ. آبل[34]، ۱۸۲۹-۱۸۰۲) نامیده‌می‌شود.

بسیاری‌از گروه‌های تبدیلات درهندسه گروههای نامتناهی[35] ـ یعنی، گروه‌هایی با بی‌نهایت عضو ـ اند. باوجوداین، بررسی مثال‌های گروه‌های متناهی به بیشتر دانستن‌مان درمورد مفهوم یك گروه تبدیلات مددمی‌رساند. و اهمیت دارد که به‌خاطر بسپاریم که‌اعضای یك گروه تبدیلات تبدیلات و نه‌نقاط‌اند.

مجموعهٔ‌جمیع تقارنات مثلث‌متساوی‌الاضلاع[36] را، چنان‌که درشکل ۲.۸ نشان‌داده شده، درنظر می‌گیریم. «تقارنات این‌مثلث» انعکاسات نسبت‌به محورهای تقارن یا دوران حول مرکزثقل را چنان معین می‌کند که شکل‌جدید برشکل قدیم منطبق شود. دراین صورت نتیجهٔ هرتقارن را می‌توان با وانامیدن سه‌رأس مثلث نمایش‌داد. هریك‌از اشکال شکل ۲.۸ را برای ملاحظهٔ این‌که شکل موردنظر متناظر باتعاریف بعدی از اعضای مجموعهٔ‌تقارنات یك‌مثلث‌متساوی‌الاضلاع است، بررسی کنید:



شکل ۲.۸

I عینیت. دوران به اندازهٔ زاویهٔ $(360^\circ)(n) + 0^\circ$، ($n = 0, 1, 2, \ldots$) درجهت مثلثاتی

R_1 انعکاس نسبت‌به محورگذرنده ازرأس ۱

R_2 انعکاس نسبت‌به محورگذرنده ازرأس ۲

R_3 انعکاس نسبت‌به محورگذرنده ازرأس ۳

33. Abelian Group
34. N. H. Abel
35. Infinite Groups
36. Symmetries of an Equilateral Triangle

R(۱۲۰) دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ °۱۲۰ درجهت مثلثاتی

R(۲۴۰) دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ °۲۴۰ درجهت مثلثاتی

برای تحقیق در این‌که مجموعهٔ تقارنات مثلث‌متساوی‌الاضلاع موردبحث تشکیل گروه‌می‌دهد، نیازبه تحقیق این‌داریم‌که $f \in S$ مستلزم این‌است‌که $f^{-1} \in S$ و این‌که $f \in S$ و $g \in S$ مستلزم $fg \in S$ و $gf \in S$ اند. عضو معکوس هریک‌از تبدیلات‌فوق به‌صورت‌زیر است:

f	f^{-1}
I	I
R_1	R_1
R_2	R_2
R_3	R_3
R(۱۲۰)	R(۲۴۰)
R(۲۴۰)	R(۱۲۰)

باتکمیل جدول‌عملیاتی اعضای‌مذکور می‌توان به‌تحقیق دوواقعیت موردبحث دست‌یافت. درایه‌های این‌جدول باانجام‌دادن تبدیلات درترتیب مشخص‌شده حاصل می‌شوند. به‌عنوان مثال، جدول ۲.۱ نشان‌می‌دهد که $R_2\,[R(۱۲۰)] = R_3$ است. به‌خاطر

جدول ۲.۱

انجام تبدیل‌دوم

انجام تبدیل‌اول	I	R_1	R_2	R_3	R(۱۲۰)	R(۲۴۰)
I	I	R_1	R_2	R_3	R(۱۲۰)	R(۲۴۰)
R_1	R_1	I	R(۲۴۰)	R(۱۲۰)	R_3	R_2
R_2	R_2	R(۱۲۰)	I	R(۲۴۰)	R_1	R_3
R_3	R_3	R(۲۴۰)	R(۱۲۰)	I	R_2	R_1
R(۱۲۰)	R(۱۲۰)	R_2	R_3	R_1	R(۲۴۰)	I
R(۲۴۰)	R(۲۴۰)	R_3	R_1	R_2	I	R(۱۲۰)

بیاورید که دراین ضرب ابتدا $R(۱۲۰)$ می‌آید.

معرفی علایم‌گروه‌تبدیل[۳۷] توافق معمولی را که عملیات مربوط‌به گروه‌های تبدیل را بادرجهٔ بیشتری به‌عملیات دست‌یاب درکتب جبر جدید پیوند می‌دهد روشن می‌سازد. دراین‌مورد و در تعریف یك تبدیل دوردیف*[۳۸] عددبه کارمی‌رود. ردیف‌اول رئوس اصلی و ردیف‌دوم موقع جدید این رئوس را نشان‌می‌دهد.

$R_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$

توضیح $R_۱$. رأس ۱ ثابت‌می‌ماند، رأس ۲ به‌جایی‌که درابتدا رأس ۳ درآن‌جا بوده می‌رود و رأس۳ به‌جایی‌که درابتدا رأس ۲ درآن‌جا بوده‌می‌رود.

$R_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$

$R_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$

$R(۱۲۰) = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$

توضیح $R(۱۲۰)$. رأس ۱ به‌جایی که در ابتدا رأس ۲ درآن‌جا بوده‌می‌رود، رأس ۲ به‌جایی که در ابتدا رأس ۳ درآن‌جا بوده می‌رود، و رأس ۳ به‌جایی که در ابتدا رأس ۱ درآن‌جا بوده می‌رود.

$R(۲۴۰) = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$

درمورد هریك ازعلایم گروه تبدیل پنج‌صورت معادل دیگر موجوداست، و این بدان علت برقرار است که اعضای ردیف اول هرجدول را می‌توان به هر یك از شش طریق مرتب‌کرد. به‌عنوان مثال، دوصورت معادل $R_۱$ دیگر عبارت‌انداز:

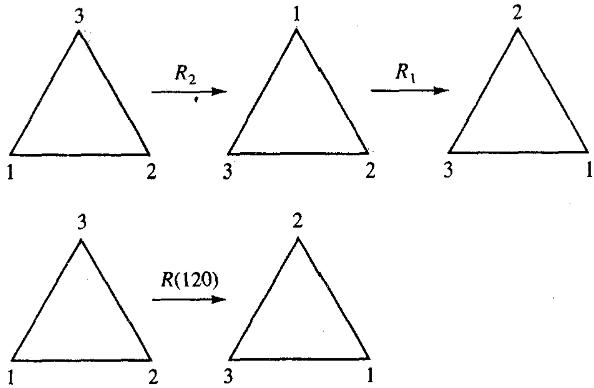
$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

دربررسی آرایه‌های جدول‌ضرب‌فوق مـی‌توان از عـلایم تـبدیل مـوردبحث یـا یك‌سری تصویر استفاده کرد. سه‌مثال‌زیر هردوروش را توضیح‌می‌دهند.

---

37. Per mutation Group Symbols
38. Row

* سطر



شکل ۲.۹

مثال

$$R_۱\, R_۲ = \begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix} = R(۱۲۰)$$

علامت فوق بدین معنی است که $R_۲$ تبدیل اول است. $R_۲$ با

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

معین شده است.

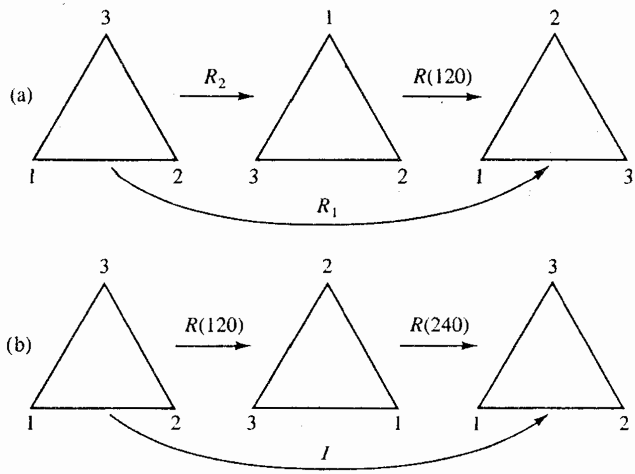
سپس حاصل سطر پایین آن سطر بالای یکی از صورت‌های معادل $R_۱$ می‌شود.

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

حاصل‌ضرب موردنظر ردیف بالای خود را از $R_۲$ و ردیف پایین خود را ازهمان صورت معادل $R_۱$ می‌گیرد، و می‌تواند به‌عنوان تعریف $R(۱۲۰)$ واشناخته شود.

به‌دست‌آوردن حاصل‌ضرب دوتبدیل را می‌توان، چنان‌که درشکل ۲.۹ نمایش داده‌شده، به‌تصویر نیز کشید.

به‌قرار رعایت‌شده درردیف‌اول شکل ۲.۹ توجه کنید. دراین‌مورد تبدیل‌دوم بااستفاده‌از مواقع‌اولیهٔ رئوس انجام‌گرفته است. به‌این ترتیب، رأسی که درجایی که در ابتدا رأس ۳ درآن‌جا بوده قرارداشته، یعنی (۱)، به‌جایی که درابتدا رأس ۲ درآن‌جا بوده، رفته، در رأسی که در جایی که در ابتدا رأس ۲ درآن‌جا بوده قرارداشته، یعنی(۲)، به‌جایی که درابتدا رأس ۳ درآن‌جا بوده، رفته، و رأسی که درجایی که درابتدا رأس ۱ درآن‌جا بوده قرارداشته، یعنی (۳)، بی‌تغییر باقی می‌ماند.



شکل ۲.۱۰

مثال

$$R(۱۲۰)\,R_۲=\begin{pmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۲ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۳ & ۲\end{pmatrix}=R_۱$$

مثال

$$R(۲۴۰)\,R(۱۲۰)=\begin{pmatrix}۲ & ۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۳ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۲ & ۳\end{pmatrix}=I$$

دومثال اخیر در شکل ۲.۱۰ به تصویر کشیده شده‌اند.
نتیجهٔ حاصل از بحث تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع به‌صورت قضیهٔ زیر بیان شده‌است.

قضیهٔ ۲.۱. مجموعهٔ تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع یك گروه تبدیلات است.

گروه تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع گروهی تعویض‌پذیر نیست. به‌عنوان مثالی خاص $R_۳=R_۱\,R(۲۴۰)$، درحالی‌که $R(۲۴۰)\,R_۱=R_۲$. یکی از نتایج این عدم تعویض‌پذیری این‌است که، چون اعضای به‌ترتیب افقی و قائم یکسان فهرست شوند، جدول عملیات نسبت به‌قطر از چپ فوق به‌راست تحت متقارن نیست.
امکان‌دارد دریك گروه تبدیلات زیرگروه‌های تبدیلاتی موجود باشند. زیرگروه[۳۹]

39. Subgroup

زیرمجموعه‌ای ازگروه تبدیلات است که خود یك گروه است. فی‌المثل، یکی از زیر گروه‌های تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع دارای اعضای I، $R(۱۲۰)$، و $R(۲۴۰)$ است. بااستفاده از جدول عملیاتی تحقیق کنید که حاصل‌ضرب‌های تبدیلات اعضای یک زیرگروه‌اند. از این‌گذشته، ملاحظه کنید که زیرگروه مزبور گروهی تعویض‌پذیر است.

امثلهٔ دیگرگروه‌های متناهی تبدیلات تقارنات مربع، تقارنات مثلث متساوی‌الساقین، و تقارنات مستطیل نامربع است. این گروه‌ها را در تمرینات ۲.۲ پی‌گرفته‌ایم.

تمرینات ۲.۲

۱. تنها بااستفاده‌از سه‌خاصیت‌دیگر، ثابت‌کنید که گروه تبدیلات شامل عضو عینیت است.

۲. درمورد علایم گروه تبدیل $R_۲$، $R_۳$، و $R(۲۴۰)$ توضیحی بنویسید.

درتمرینات ۳-۶، حاصل‌ضرب‌های داده‌شده را از جدول‌ضرب تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع بیابید؛ سپس درتحقیق هرپاسخ از علامت تبدیل استفاده کنید.

۳. $R(۲۴۰)R_۳$

۴. $R_۳R(۲۴۰)$

۵. $R_۱R_۳$

۶. $R_۳R_۱$

۷. آیا مجموعهٔ تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع $\{R_۳، R_۲، R_۱، I\}$، یك زیرمجموعه است؟

۸. درمورد تقارنات مثلث متساوی‌الساقین جدولی عملیاتی تهیه کنید.

۹. تحقیق کنید که تقارنات مثلث متساوی‌الساقین تشکیل گروه می‌دهند.

۱۰. آیا گروه تقارنات مثلث متساوی‌الساقین گروهی تعویض‌پذیر است؟

۱۱. جمیع زیرگروه‌های تقارنات مثلث متساوی‌الساقین را فهرست کنید.

۱۲. درمورد تقارنات مستطیل نامربع جدولی عملیاتی تهیه کنید.

۱۳. تحقیق‌کنید که تقارنات مستطیل نامربع تشکیل گروه می‌دهند.

۱۴. جمیع زیرگروه‌های تقارنات مستطیل‌نامربع را فهرست کنید.

۱۵. کدام‌یک از زیرگروه‌های تقارنات مستطیل‌نامربع گروه‌هایی تعویض پذیراند؟

۱۶. درمورد تقارنات مربع جدولی عملیاتی تهیه کنید.

۱۷. این واقعیت راکه تقارنات‌مربع تشکیل‌گروه می‌دهند تحقیق‌کنید.

۱۸. جمیع زیرگروه‌های تقارنات مربع را فهرست‌کنید.

I۱۹. جمیع زیرگروه‌های تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع را فهرست‌کنید و ببینید می‌توانید

رابطهٔ بین تعداد اعضای هر زیرگروه و تعداد اعضای خودگروه را کشف کنید. حدس‌تان را درمورد سایر گروه‌های تقارنات امتحان‌کنید.

I۲۰. گروه تقارنات شش‌ضلعی منتظم و زیرگروه‌های آن را بررسی‌کنید.

I۲۱. توضیح دهید که چگونه دستگاهی به‌نام کالی‌دسکوپ[40] کارمی‌کند، و چرا یکی‌از مواردِاستعال گروه‌های تقارنات چندضلعی‌های منتظم است.

۲.۳ حرکات اقلیدسی سطح

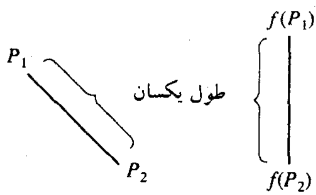
مجموعه‌های تبدیلات این‌بخش، برخلاف گروه‌های متناهی تبدیلات بخش پیشین، بی‌نهایت عضو دارند. در این‌بخش و بخش‌بعد ازنظرگاهی متفاوت باتقرب معمول دبیرستان به هندسهٔ اقلیدسی می‌نگریم. تبدیلات مورد بررسی این مرحله‌مان تبدیلات سطح یا صفحهٔ اقلیدسی برخودش‌اند.

ویژگی اصلی تبدیلات هندسی اقلیدسی این‌است که در آن‌ها فاصله[41] حفظ می‌شود؛ و به‌عبارت دیگر، باید درآن‌ها فاصله خاصیتی لایتغیر باشد.

تعریف. تبدیل f تبدیل‌هم‌فاصله[42]‌ای A بر B است اگر حافظ* فواصل باشد. به‌عبارت دیگر، درمورد هردونقطهٔ P_1، P_2 از A، فاصلهٔ P_1 از P_2 مساوی فاصلهٔ $f(p_1)$ از $f(p_2)$ است. کلمهٔ انگلیسی هم‌فاصله یعنی «isometry» از «iso» به‌معنی هم و «metry» به‌مفهوم فاصله مشتق شده‌است.

این‌مفهوم درشکل ۲.۱۱ به‌تصویر کشیده شده‌است. درهندسهٔ اقلیدسی، d، فاصلهٔ بین‌نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) با

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



شکل ۲.۱۱

40. Kaleidoscope

41. Distance

42. Isometry

* نگه‌دار

تعریف شده‌است. اگر بین دوقطعه خط تبدیل هم‌فاصله‌ای موجودباشد، قطعه خط‌ها را همنهشت یا دارای طول یکسان نیز می‌گوییم.

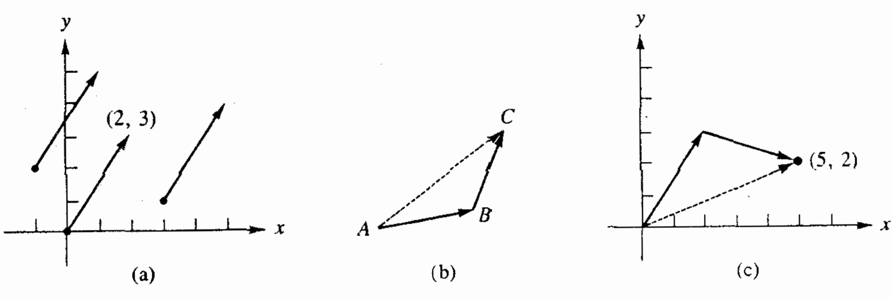
هم‌فاصله‌های موردبررسی هندسهٔ‌اقلیدسی معمولی هم‌فاصله‌های یك‌مجموعه نقاط برخودش می‌باشند. هم‌فاصله‌های ازاین نوع را حرکات[43] می‌نامیم. هندسهٔ اقلیدسی بابررسی حرکات صفحهٔ حقیقی سروکار دارد، و در این‌مورد مفهوم‌اصلی نه حرکت فیزیکی که تناظر بین دوشکل است.

در سال ۱۸۷۲، فلیکس کلاین[44] هندسه‌ها را بابه‌کاربردن تعریف زیر طبقه‌بندی کرد: یك هندسه بررسی خواص لایتغیر مجموعه‌ای ازنقاط تحت گروهی از تبدیلات است. به‌این ترتیب، هندسهٔ اقلیدسی بررسی خواص لایتغیری چون اندازهٔ زاویه، سطح، و توازی مجموعه‌های نقاط تحت‌گروه حرکات است.

اما چه نوع تبدیلی را می‌توان درمورد مجموعهٔ نقاط واقع درصفحه‌ای، چنان که فاصلهٔ بین هردو نقطه همواره حفظ شود، به‌کاربرد؟ اولین نوع حرکت صفحه‌ای موردبررسی انتقال[45] است. به‌طور شهودی، انتقال تناظری بین نقاط و نقاط تصویرشان چنان است که هرتصویر درجهت و فاصلهٔ ثابت از نقطهٔ صاحب‌تصویر باشد.

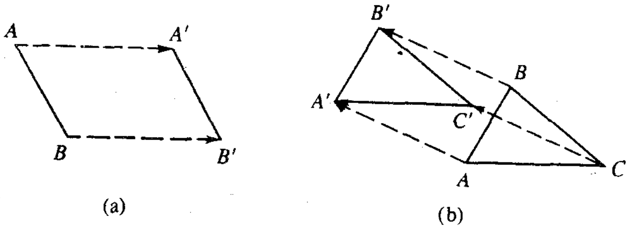
مفهوم ریاضی بردار درتوصیف انتقال مفید است. یك‌بردار یك‌قطعه خط جهت‌دار است. علامت **AB** (بااستفاده‌از حروف‌سیاه) بردار از A تا B را معین‌می‌کند. طول (یامقدار) این بردار را می‌توان با قدرمطلق آن، که به‌صورت $|\mathbf{AB}|$ نوشته می‌شود، معین‌کرد.

فیزیك‌دان آمریکایی، جوزیا ویلاردگیبس[46] (۱۹۰۳ - ۱۸۳۹) درسال ۱۸۸۱ آنالیزبرداری[47] راگسترش داد. بردارها به این علت که هم مقدار هم جهت وابسته با خود دارند



شکل ۲.۱۲

43. Motions
44. Felix Klein
45. Translation
46. Josiah Willard Gibbs
47. Vector Analysis



شکل ۲.۱۳

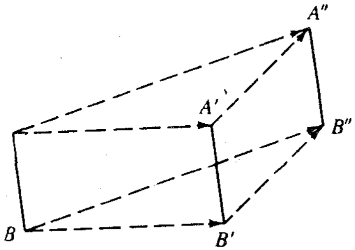
در فیزیك و جاهای دیگر به کار می‌روند. دوبردار را، درصورتی که مقادیر و جهات یکسان داشته‌باشند، به‌عنوان دوبردار مساوی تعریف می‌کنند. فی‌المثل، بردارهای شکل ۲.۱۲a مساوی‌اند. به‌همین علت، می‌توانیم این‌مجموعهٔ بردارهای مساوی‌را، بادادن مختصات نقطهٔ انتهایی یکی از بردارهای آن، درحالی که نقطهٔ ابتدایی‌اش را درمبدأ فرض کرده‌ایم، مشخص کنیم. به این ترتیب، بردارهای شکل ۲.۱۲a را می‌توان [۲،۳] معرفی کرد.

مفهوم فوق نشان‌می‌دهد که چرا می‌توان از بردارها در توصیف انتقالات استفاده کرد. به‌عنوان مثال، انتقال $x' = x + ۲$، $y' = y + ۳$ را می‌توان بابردار [۲،۳]، که به‌این معنی که طول هرنقطه ۲واحد و عرض آن ۳واحد افزایش یافته‌است، تعبیر می‌شود، توصیف کنیم.

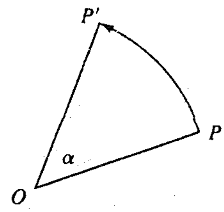
جمع‌برداری $AB + BC = AC$ را درشکل ۲.۱۲b نشان داده‌ایم. جمع‌برداری را می‌توان با جمع مقادیر x ها و y ها نیز نشان داد: [۲،۳] + [۱-،۳] = [۵،۲]. شکل ۲.۱۲c را ملاحظه کنید. ازجمع برداری می‌توان برای یافتن حاصل‌ضرب دوانتقال استفاده کرد. به‌عنوان مثال، حاصل‌ضرب انتقال به‌نمایش [۲،۳] و انتقال به‌نمایش [۱-، ۳]، انتقال به‌نمایش [۵،۲] است.

شکل ۲.۱۳a انتقالی‌از قطعه‌خط $\overline{AB}$ را،درجهت بابردار AA' نمایش داده‌شده، نشان می‌دهد. شکل ۲.۱۳b انتقالی‌از مثلث ABC را، درجهت بابردار BB' نمایش داده‌شده، نشان‌می‌دهد. هریك ازملاحظات زیررا، درمورد یك‌انتقال بررسی، و هرکشف اضافی‌ای را که طی‌این فعالیت خواهیدکرد، فهرست کنید.

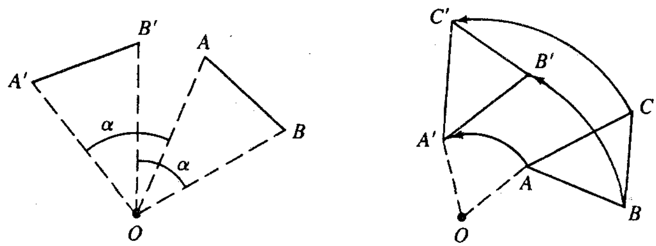
- یك قطعه خط به قطعه خطی موازی باآن انتقال می‌یابد.
- جمیع بردارهای واصل نقاط متناظر یك انتقال مساوی‌اند. (بردارهای مساوی طول و جهت یکسان دارند.)
- معکوس یك‌انتقال، انتقال دیگری باهمان فاصله و درجهت مقابل آن است.



شکل ۲.۱۴



شکل ۲.۱۵



(a) (b)

شکل ۲.۱۶

- حاصل‌ضرب دوانتقال، همان‌گونه که درشکل ۲.۱۴ به تصویرآمده، یك انتقال است. بردار حاصل‌ضرب دوانتقال، مجموع بردارهای آن دوانتقال است.
- مجموعهٔ جمیع انتقالات تشکیل گروه‌می‌دهد. عینیت این گروه انتقالی با بردار صفر است، که به‌ازای آن هرنقطه تصویر خودش می‌باشد.

اطلاعات بیشتر درموردانتقالات‌رامی‌توان‌دربخش‌های‌بعد، که در آنجا بحث شامل استفاده‌از مختصات است،یافت.

دومین نوع اساسی حرکت صفحه دوران[48] است. علامت $R(O,\alpha)$، چون درشکل ۲.۱۵ دورانی را، حول نقطهٔ O و به‌اندازهٔ زاویهٔ α، مشخص می‌کند. بنابه قرارداد، دوران درجهت مثلثاتی درارتباط بازاویهٔ مثبت است.

شکل ۲.۱۶ دوران قطعه خط و مثلثی را حول نقطه‌ای نشان‌می‌دهد. زاویهٔ دوران، درهر دو حالت، $\angle AOA'$ است. ملاحظات زیر را درمورد حرکت‌دوران بررسی‌کنید:

---

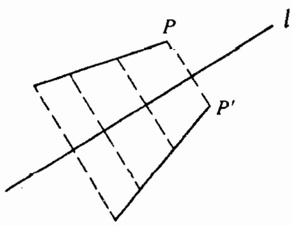
48. Rotation

- یك‌قطعه خط معمولاً باتصویرش موازی نیست اما می‌تواند باشد.
- معکوس یك‌دوران دورانی حول همان نقطهٔ دوران‌اول و به زاویه‌ای مساوی بازاویهٔ آن، اما درجهت مقابل آن، است.
- حاصل‌ضرب دودوران حول یك‌نقطه دورانی دیگر حول همان نقطه است.
- مجموعهٔدورانات حول نقطه‌ای ثابت گروه تبدیلات است.
- دورانات به مرکز O و زوایـای α و $n360°+\alpha$ (بـه‌ازای $n = ۱،۲،۳،...$) یك دوران‌اند.

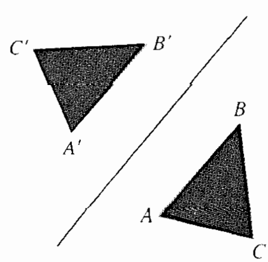
مجموعهٔ جمیع انتقالات و دورانات به مجموعهٔ حرکات یا تغییرمکان‌های صلب[۴۹] موسوم است. حرکات صلب را می‌توان بااستفاده ازیک مقوای مثلث شکل و لغزاندن یاگرداندن از یك‌موقع به‌موقع دیگر آن به‌طریقی استوار و بی‌تغییردادن شکل یا اندازه‌اش، توضیح‌داد.

سومین مثال اساسی حرکت یك‌سطح تقارن یا انعکاس[۵۰] است. تقارن R_l خط ثابت l ی را، چون درشکل۲.۱۷، مورد استفاده قرارمی‌دهد. نقطهٔ واقع‌بر l خود تصویر خودش است. هرنقطهٔ دیگر p درنقطهٔ p' چنان‌که l عمودمنصف $\overline{pp'}$ باشد، گسترش می‌یابد. (علامت $\overline{pp'}$ به‌معنی قطعه خطی بانقاط انتهایی p و p' است.) چنان‌که از نام انعکاس برمی‌آید، یك‌مجموعه نقاط و تصاویرشان انعکاسات یکدیگر، چونان که l آینه‌ای است، می‌باشند. مجموعهٔ نقاط دارندهٔ l، به‌عنوان محورتقارن، باتقارنی نسبت به l برخودش گسترش می‌یابد. دراین صورت یك نیمهٔ شکل حاصل تصویرنیم‌دیگر است، و دومجموعهٔ نقاط موردبحث نسبت به آن محور متقارن‌اند. ملاحظات اضافی زیر را درمورد تقارنات بررسی‌کنید:

- یك‌قطعه خط، جز درموارد خاص، موازی تصویرش نیست.



شکل۲.۱۷



شکل۲.۱۸

49. Rigid Motions or Displacements

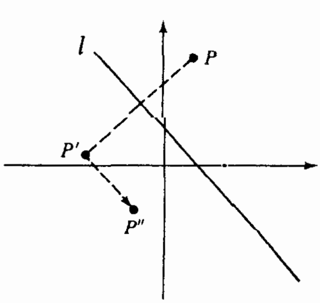
50. Reflection

● معکوس یك تقارن همان تقارن است.
● حاصل‌ضرب دوتقارن نسبت‌به یك‌محور تقارن نیست.
● تقارن را نمی‌توان لغزشی درصفحه درنظر گرفت، و لازم‌است که مقوای مثلث شکل‌مان را برای متناظرداشتن آن باتصویرش بگردانیم. جهت عقربه رو[51] و یامقابل مثلثاتی ΔABC درتصویر $\Delta A'B'C'$ اش معکوس می‌شود. جهت عقربه روبه معنی مسیری از A به B به C حول شکل در جهتی متناظر با جهتی که عقربه های ساعت درآن جهت حول دایره‌ای حرکت می‌کنند،است. شکل ۲.۱۸ را ملاحظه کنید.

سه‌تبدیل تاکنون داده‌شده ـ انتقال، دوران، و تقارن ـ را می‌توان سه‌حرکت اساسی سطح درنظرگرفت. اما برای بستگی به یک نوع تبدیل دیگر نیاز داریم، و این بدان‌معنی است که بعضی حاصل ضرب‌های دوتبدیل از تبدیلات‌فوق انتقال، دوران، یا تقارن نیستند، و نوع دیگری از تبدیلات‌اند. به‌طوردقیق‌تر، ممکن‌است حاصل‌ضرب تقارن و یکی‌از دوتبدیل دیگر عضو مجموعهٔ‌تبدیلات‌مان نباشد.

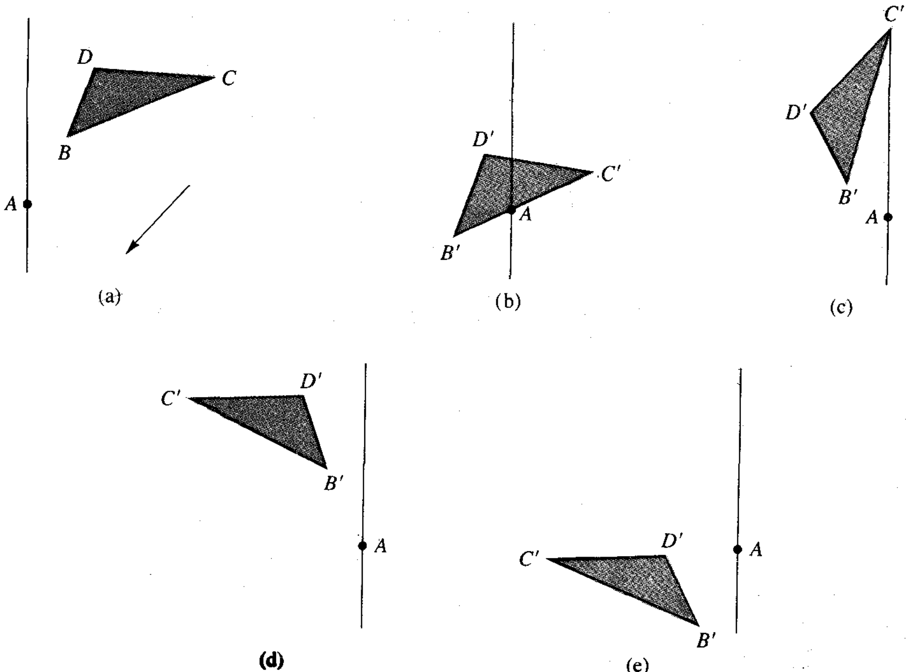
چهارمین نوع‌حرکت یك‌سطح انعکاس یا تقارن‌سُرشی[52] است. تقارن‌سرشی حاصل‌ضرب یك‌تقارن و انتقال به‌موازات محور ثابت‌تقارن، چنان‌که درشکل ۲.۱۹، که درآن P در P″ گسترش یافته‌است، می‌باشد. همین تقارن‌سرشی درصورتی که ابتدا انتقال انجام‌گیرد روی می‌دهد. (تمرین ۱۰ را ملاحظه کنید.)

تمرینات بخش شامل سؤالاتی است که برای به‌دست‌دادن اطلاعات بیشتری درمورد تقارنات سرشی، به‌کاربا ترسیمات یا نمونه‌های مقوایی نیاز دارد.



شکل ۲.۱۹

51. Clockwise
52. Glide Reflection



شکل ۲.۲۰

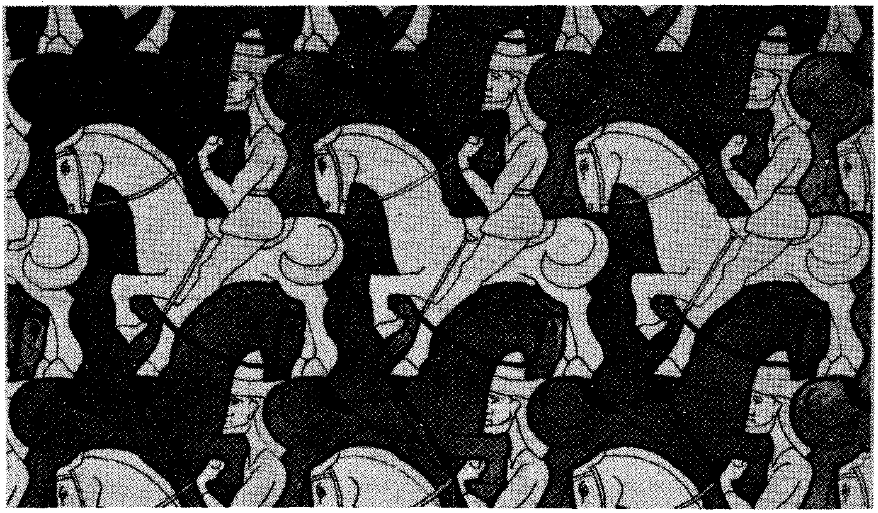
مثال. تصویر مثلث BCD، شکل ۲.۲۰a، را تحت موارد زیر رسم کنید: (۱) انتقالی که بابردار نشان داده‌شده به‌نمایش آمده؛ (۲) یك دوران $R(A,60^\circ)$؛ (۳) تقارنی نسبت‌به محور نشان داده‌شده؛ (۴) تقارن‌سرشی‌ای نسبت‌به خط نشان‌داده شده بااستفاده ازبردار انتقالی به‌طول بردار داده‌شده، به‌موازات محور و به‌جهت پایین. پاسخ‌هایی دراشکال ۲.۲۰b - e داده شده‌اند.

یکی‌از مواردِاستعمال هندسی حرکات گوناگون‌سطح در طرح‌های هندسی ساده‌ای است‌که نمونه‌های مکرر صفحه‌پرکن[۵۳] تشکیل می‌دهند. ام.سی.اشر، نقاش هلندی، این معنی را به‌نمونه‌های‌صفحه‌پرکن بسیار پیچیده‌ای که شامل اشکالی چون ماهیان، پرندگان، اسب‌سواران، و خزندگان‌اند بسط داده‌است. یکی‌از ترسیمات اشر را درشکل ۲.۲۱ و درابتدا و انتهای کتاب نشان داده‌ایم*. خوانندهٔ علاقه‌مند ازمطالعهٔ این‌گونه آثار هنری در آثار گرافیکی ام.سی.اشر[۵۴] بهره‌ور خواهدشد.

---

53. Plane - Filling

54. The Graphic Work of M.C. Escher



شکل ۲.۲۱

معرفی به‌گونه‌ای شهودی حرکات سطحی این‌بخش را با سه‌بخش بعدی که درآن‌ها باتفصیل بیشتری به‌تکمیل این‌معانی می‌پردازیم، پی می‌گیریم. بخش ۲.۴ مطالب درکار هندسهٔ تحلیلی را مطرح می‌کند، بخش ۲.۵ ماتریس‌ها را درتعریف تبدیلات به کار می‌برد، و بخش ۲.۶ به بحث مجموعهٔ جمیع حرکات سطح ازنظرگاهی عمومی‌تر می‌نشیند.

تمرینات ۲.۳

۱. درانتقال، آیا اندازهٔ زاویهٔ بین دوشعاع لایتغیر است؟
۲. آیا یك‌انتقال می‌تواند غیراز موردی که بابردار صفر نمایش داده‌می‌شود معکوس خود باشد؟
۳. آیا مجموعهٔ جمیع تقارنات نسبت‌به خطوط واقع دریك صفحه شامل عینیتی است؟
۴. مقصود از دوران عینیت چیست؟
۵. توضیح دهید که چگونه یك قطعه خط و تصویرش، دردورانی غیراز دوران عینیت، ممکن است موازی باشند.
۶. حاصل‌ضرب $R(A,\alpha)\,.\,R(A,\beta)$ را بیابید.
۷. ثابت کنید که تقارن تبدیلی پیچشی است.
۸. معکوس یك‌دوران را به‌جای زاویهٔ‌منفی بااستفاده از زاویهٔ مثبت توصیف‌کنید.

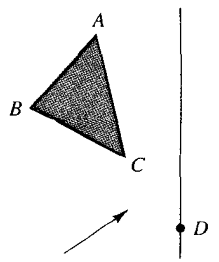
۹. مثالی به‌دست دهید که در آن یك‌قطعه خط و تصویرش تحت تقارن موازی‌اند.
۱۰. در تقارن‌سرشی، ثابت‌کنید که تصویر یك‌نقطه، درصورتی که تقارن آن بعداز انتقال بیاید، تغییرنمی‌کند.
۱۱. معکوس تقارن‌سرشی را توصیف کنید.
۱۲. تحت تقارن سرشی، چه وقت یك قطعه خط و تصویرش موازی‌اند؟
۱۳. آیا می‌توان نمونهٔ مثلث شکلی ازمقوا ساخت که تحت تقارن سرشی بالغزش بر تصویرش منطبق شود؟

در تمرینات ۱۴-۱۷، ازشکل ۲.۲۲ استفاده کرده تصویر ΔABC را تحت هریك از تبدیل‌ها رسم کنید.

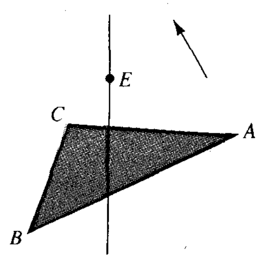
۱۴. انتقالی که توسط بردار معلوم به نمایش درآمده
۱۵. دوران $R(D، ۱۲۵^\circ)$
۱۶. تقارن نسبت به محورمعلوم
۱۷. تقارنی سرشی نسبت‌به محور معلوم، بابردار انتقالی به‌طرف بالا به همان طول، اما نه درهمان جهت بردار معلوم

در تمرینات ۱۸-۲۱، ازشکل ۲.۲۳ استفاده کرده تصویر ΔABC را تحت هریك از تبدیل‌ها رسم کنید.

۱۸. انتقالی که توسط بردار معلوم به نمایش درآمده
۱۹. دوران $R(E، ۹۰^\circ)$



شکل ۲.۲۲



شکل ۲.۲۳

۲۰. تقارن نسبت به محور معلوم

۲۱I. تقارنی سرشی نسبت‌به محور معلوم، بابردار انتقالی به همان طول بردار معلوم به‌طرف بالا

۲۲I. ترسیمات گوناگون به کاربرندهٔ حرکات اشر را مورد تحقیق قراردهید، و انواع حرکات به کاررفته درهریک را تحلیل کنید.

۲۳I. ابتدا مقالهٔ زیر را مطالعه کنید:

"How to Draw Tessellations of the Escher Type"
by Joseph L. Teeters, *Mathematics Teacher* 67 (1974)

سپس نمونهٔ صفحه‌پرکن ساده‌ای از نوع اشری رسم‌کنید.

۲۴I. یکی‌از مقالات مرجع‌زیر را خوانده گزارشی درمورد آن تهیه کنید:

M.C. Escher: Art and Science, Proceedings of the Interdisciplinary Congress on M. C. Escher, Rome, Italy, 26 - 28 March 1986

۲.۴ مجموعه‌های معادلات حرکات سطح

حرکات سطح، پیش‌از این دربخش ۲.۳ به‌توضیح رسیده،را می‌توان به‌صورت مجموعه‌های معادلات خطی نیز بیان‌کرد. فی‌المثل، درشکل ۲.۲۴، اگر $P(۱،۲)$ دارای تصویر $P'(۳،۳)$ باشد، انتقال مربوطه را می‌توان توسط معادلات

$$x' = x + ۲$$
$$y' = y + ۱$$

نمایش داد.

انتقال را می‌توان به‌عنوان تبدیلی بامعادلات به‌صورت

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

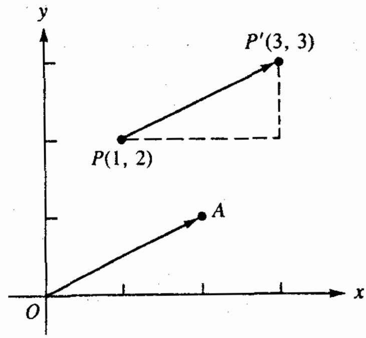
که در آن‌ها a و b اعدادی حقیقی‌اند، تعریف کرد. معکوس این تبدیل معادلات

$$x = x' - a$$
$$y = y' - b$$

را داراست.

مثال. تصویر (۲ ، ۵) را تحت‌انتقال به‌معادلات $x' = x+۷$ ، $y' = y+۳$ بیابید. پاسخ (۱۲،۵) است.

مثال. تصویر خط $۳x - ۲y + ۷ = ۰$ را تحت انتقال به معادلات $x' = x+۷$ ،$y = y+۳$ بیابید.



شکل ۲.۲۴

از آن‌جاکه برای جانشینی x و y معادله به مقدار x و y نیازمندیم، ابتدا معادلات انتقال را برای x و y حل می‌کنیم:

$$x = x' - ۷$$

$$y = y' - ۳$$

دراین‌صورت $۳x - ۲y + ۷ = ۰$ تصویر $۳(x' - ۷) - ۲(y - ۳) + ۷ = ۰$ را، که می‌تواند به صورت $۳x' - ۲y - ۸ = ۰$ نوشته شود، دارد.

در کتب هندسهٔ تحلیلی، ثابت می‌کنند که معادلات دوران حول مبدأ

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

می‌باشند.

مثال. تصویر $P(۲،۳)$ را تحت‌دوران ۶۰° حول مبدأ بیابید.

معادلات دوران عبارت‌اند از

$$x' = x\cos ۶۰^\circ - y\sin ۶۰^\circ$$
$$y' = x\sin ۶۰^\circ + y\cos ۶۰^\circ$$

در این صورت

$$x' = (۲)\left(\frac{۱}{۲}\right) - (۳)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$
$$y' = (۲)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + (۳)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

و مختصات P' عبارت‌اند از

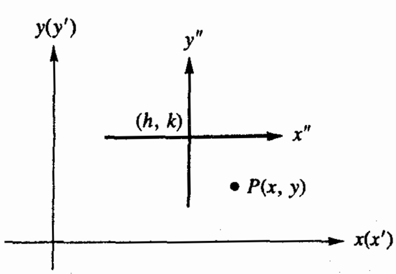
$$\left(۱ - \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}، \sqrt{۳} + \frac{۳}{۲}\right)$$

معادلات دوران حول نقطهٔ $(h،k)$ عبارت‌اند از

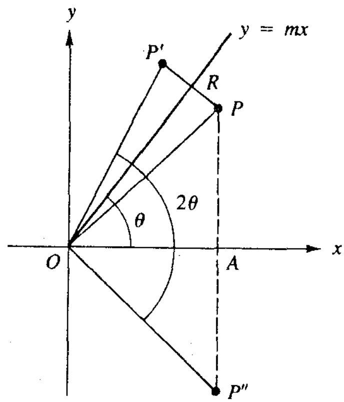
$$x' - h = (x - h)\cos\alpha - (y - k)\sin\alpha$$
$$y' - k = (x - h)\sin\alpha + (y - k)\cos\alpha$$

برای استخراج این معادلات، کار را باانتقالی که مختصات نقطهٔ $P(x،y)$، شکل **۲.۲۵**، را به‌محورهای xy و $x''y''$ ربط می‌دهد، آغاز می‌کنیم:

$$x'' = x - h$$
$$y'' = y - k$$



شکل ۲.۲۵



شکل ۲.۲۶

در این‌صورت دوران نسبت به‌مبدأ محورهای x"y" عبارت است از

$$x'' = (x - h)\cos\alpha - (y - k)\sin\alpha$$
$$y'' = (x - h)\sin\alpha + (y - k)\cos\alpha$$

اکنون به‌عقب، به‌محورهای اصلی، با برچسب x′y′، منتقل می‌شویم، بنابراین

$$x'' = x' - h$$
$$y'' = y' - k$$

مجموعه‌های معادلات تقارنات به‌اندازهٔ مجموعه‌های معادلات تبدیلات انتقال و دوران آشنا نیستند. این معادلات، درمورد حالت خاص تقارن نسبت به محور xها، عبارت‌انداز

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

صورت‌های معادلات، هنگامی که تقارن نسبت‌به محور yهاست، نیز ساده‌اند.

تحصیل معادلات سایر تقارنات را نیز، با آغاز از حالات ساده‌تر، مطرح می‌کنیم. در این‌مورد، درشکل ۲.۲۶، تقارنی نسبت به خط $y = mx$، که درآن $m = tg\theta$ است، نشان

داده‌شده است. استخراج معادلات موردبحث بانگریستن به‌مثلث‌های همنهشت OPR و OP′R ممکن‌است، اما روش دیگری مجازمان می‌کند که در این‌مورد مفاهیم قبلی این‌بخش را به‌کار بریم. تقارن نسبت‌به y = mx تقارن نسبت‌به محور x ها که با دوران زاویهٔ ۲θ حول مبدأ ترکیب شده است می‌باشد. این موضوع را می‌توان ازشکل ۲.۲۶، به‌علت همنهشتی‌های $\angle POB \cong \angle P'OB$ و $\angle POA \cong \angle P''OA$، ملاحظه کرد. معادلات این تقارن

$$x' = x\cos ۲\theta + y\sin ۲\theta$$
$$y' = x\sin ۲\theta - y\cos ۲\theta$$

است که از نوشتن معادلات دوران ۲θ حول مبدأ، و بعد در آن قراردادن y - به‌جای y، از تقارن نسبت‌به محور x ها، حاصل شده‌است.

مثال. تصویر (۲،۳) را تحت‌تقارن نسبت‌به خط y = x بیابید. از آن‌جاکه $\cos ۲\theta = ۰$ و $\sin ۲\theta = ۱$،

$$x' = y$$
$$y' = x$$

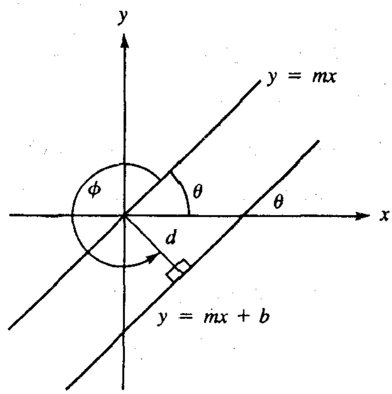
در نتیجه،

$$x' = ۳$$
$$y' = ۲$$

و نقطهٔ مطلوب، چنان‌که انتظار می‌رفت، (۳ ، ۲) است.

معادلات تقارن نسبت‌به خط y = mx + b را می‌توان ازحالت خاص تقارن نسبت‌به خط گذرنده از مبدأ با **انتقالی** به‌اندازهٔ دوبرابر d، **فاصلهٔ‌قائم** از y = mx تا y = mx + b، به‌دست آورد. برای توضیح این که چرا فاصلهٔ انتقال‌مان دوبرابر فاصلهٔ بین‌دوخط متوازی مزبور است، شکل ۲.۳۱ دربخش ۲.۶ را ملاحظه کنید.

از آن جاکه انتقال مذکور در جهت معرفی شده با ϕ در شکل ۲.۲۷، با $\phi + (۹۰° - \theta) = ۳۶۰°$، است، معادلات آن عبارت‌اند از



شکل ۲.۲۷

$$x' = x + ۲d\cos\phi$$
$$y' = y + ۲d\sin\phi$$

و معادلات مطلوب تقارن عمومی عبارت‌از

$$x' = x\cos ۲\theta + y\sin ۲\theta + ۲d\cos\phi$$
$$y' = x\sin ۲\theta - y\cos ۲\theta + ۲d\sin\phi$$

مثال. تصویر نقطهٔ (۲،۶) را تحت تقارن نسبت به خطی که در آن $\theta = ۳۰^\circ$، $\phi = ۳۰۰^\circ$، و $d = ۲$ است، بیابید.

$$x' = x\cos ۶۰^\circ + y\sin ۶۰^\circ + ۴\cos ۳۰۰^\circ$$
$$y' = x\sin ۶۰^\circ - y\cos ۶۰^\circ + ۴\sin ۳۰۰^\circ$$

$$x' = \left(\frac{۱}{۲}\right)x + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)y + ۲$$

$$y' = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)x - \left(\frac{۱}{۲}\right)y - ۲\sqrt{۳}$$

به‌ازاء $x = ۲$، $y = ۶$،

$$x' = ۱ + ۳\sqrt{۳} + ۲ = ۳ + ۳\sqrt{۳}$$
$$y' = \sqrt{۳} - ۳ - ۲\sqrt{۳} = -۳ - \sqrt{۳}$$

معادلات تقارن‌سرشی از معادلات تقارن و معادلات انتقال در جهت موازی محور تقارن استخراج می‌شود. تصاویر را می‌توان بااستفاده از دو مجموعهٔ معادلاتی که قبلاً در مورد این تبدیلات داده‌ایم یافت.

بررسی صورت مجموعه‌های معادلات چهارنوع حرکت سطح مذکور نشان می‌دهد که جمیع این مجموعه‌ها حالات خاصی‌از مجموعه‌های معادلات قضیهٔ بعدی‌اند.

قضیهٔ ۲.۲. اگر تبدیلی حرکتی سطحی باشد، در این‌صورت معادلاتی به‌صورت

$$x' = ax + by + c \qquad\qquad x' = ax + by + c$$

یا

$$y' = -(-bx + ay) + d \qquad\qquad y' = +(-bx + ay) + d$$

با اعداد حقیقی a، b، c، d ی برقرارکنندهٔ $a^۲ + b^۲ = ۱$ دارد.

عکس قضیهٔ ۲.۲ نیز صادق است، گرچه اثبات آن را دراین جا به‌دست نداده‌ایم. عکس قضیهٔ به‌صورت شرطی بیان‌شده باتعویض باهم اجزای اگر و در این‌صورت گزارهٔ آن حاصل می‌شود*. عکس قضیهٔ‌فوق عبارت است‌از:

قضیهٔ ۲.۳. اگر تبدیلی دارای معادلاتی به‌صورت

$$x' = ax + by + c \qquad\qquad x' = ax + by + c$$

یا

$$y' = -(-bx + ay) + d \qquad\qquad y' = +(-bx + ay) + d$$

با اعداد‌حقیقی a، b، c، d صادق در $a^۲ + b^۲ = ۱$ باشد، در این‌صورت حرکتی سطحی است.

---

* باتغییرات دستوری لازم

مثال. معادلات

$$x' = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)x + \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)y + ۳$$

$$y' = \left(\frac{-۱}{\sqrt{۲}}\right)x + \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)y + ۷$$

دارندۀ $a^۲ + b^۲ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$، حرکتی سطحی را نمایش می‌دهند.

معادلات معکوس یك تبدیل را می‌توان با حل‌کردن مجموعۀ معادلات آن تبدیل برای x و y پیدا کرد. این عمل را قبلاً درمورد انتقال توضیح دادیم. مثال زیر درمورد تقارن است.

مثال. معکوس تبدیل به معادلات

$$x' = x\cos ۳۰^\circ + y\sin ۳۰^\circ$$

$$y' = x\sin ۳۰^\circ - y\cos ۳۰^\circ$$

را بیابید.

اعضای معادلۀاول را در $\sin ۳۰^\circ$ و اعضای معادلۀ دوم را در $\cos ۳۰^\circ$ ضرب می‌کنیم:

$$x'\sin ۳۰^\circ = x\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ + y\sin^۲ ۳۰^\circ$$

$$\underline{y'\cos ۳۰^\circ} = \underline{x\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ - y\cos^۲ ۳۰^\circ}$$

$$y = x'\sin ۳۰^\circ - y'\cos ۳۰^\circ$$

بعد دوعضو معادلۀ اول اصلی را در $\cos ۳۰^\circ$ و اعضای معادلۀدوم آن را در $\sin ۳۰^\circ$ ضرب می‌کنیم:

$$x'\cos ۳۰^\circ = x\cos^۲ ۳۰^\circ + y\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ$$

$$\underline{y'\sin ۳۰^\circ} = \underline{x\sin^۲ ۳۰^\circ - y\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ}$$

$$x = x'\cos ۳۰^\circ + y'\sin ۳۰^\circ$$

همان‌طور که باید انتظار داشت، تغییر متغیرات x و x′، y و y′ آشکار می‌کند که معکوس یک تقارن خود تبدیل اصلی است.

حاصل‌ضرب حرکات را می‌توان با مجموعه‌های معادلات مستخرج از کاربرد تبدیل دوم در معادلات تبدیل اول نمایش داد.

مثال. مجموعهٔ معادلاتی را بیابید که حاصل ضرب دو انتقال را، که اولی دارای بردار [۷،۳] و دومی دارای بردار [۲،۴] است، نمایش می‌دهد.

مجموعهٔ معادلات حرکت اول $x' = x + ۷$ ، $y' = y + ۳$ است. مجموعهٔ معادلات حرکت دوم $x'' = x' + ۲$ ، $y'' = y' + ۴$ است. چون این مقادیر را در مجموعهٔ اول قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$x'' - ۲ = x + ۷ \qquad\qquad x'' = x + ۹$$

یا

$$y'' - ۴ = y + ۳ \qquad\qquad y'' = y + ۷$$

در بخش بعد، معرفی ضرب ماتریسی درنمایش حاصل‌ضرب تبدیلات کارمان را آسان‌تر از استخراج مجموعه‌های گوناگون معادلات می‌کند. ممکن است، پیش از مطالعهٔ بخش ۲.۵، خود به کشف این موضوع که چگونه ماتریس‌ها می‌توانند در تبدیلات مجموعه‌های نقاط به کار روند، علاقه‌مند باشید.

تمرینات ۲.۴

در تمرینات ۱-۴، فرض کنید بردار انتقال [۵،-۳] باشد و تصویر هریک از نقاط را تحت این انتقال به‌دست دهید.

۱. (۰،۰) ۲. (۵،۷)

۳. (-۱،-۸) ۴. $(-۲، -\frac{۳}{۲})$

در تمرینات ۵ و ٦ فرض کنید بردار انتقال [۹ ، ۵] باشد. در این‌صورت هریک از نقاط تصویر کدام نقطهٔ اولیه است؟

۵. (۰،۰) ٦. (۵،۹)

۷. تصویر خط $y = ۲x$ راتحت انتقالی با بردار[-۳،-۲] بیابید.
۸. تصویر خط $y = ۷x$ راتحت انتقالی با بردار[$\frac{۴}{۵}$،۳] بیابید.

در تمرینات ۹ و ۱۰، تصویر خط مربوطه را تحت انتقالی بابردار [-۳،۴]بیابید.

۹. $۲x - ۵y + ۷ = ۰$

۱۰. $۳x + ۴y + ۲ = ۰$

۱۱. فرمول عمومی تصویر خط $ax + by + c = ۰$ را تحت انتقالی بابردار[e، d] بیابید.
۱۲. تصویر نقطهٔ (۳،۴) تحت دوران ۴۵° حول مبدأ چیست؟
۱۳. تصویر (۲،۰) را تحت دوران ۳۰° حول مبدأ بیابید؟
۱۴. کدام نقطه تصویر (-۱،۲) را تحت دوران ۴۵° حول مبدأ دارد؟
۱۵. معادلات معکوس تبدیل دوران حول نقطهٔ (h،k)، بازاویهٔ دوران θ را استخراج کنید.
۱٦. تصویر نقطهٔ (۳،۷) را تحت تقارن نسبت‌به خط $y = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) x$ بیابید.
۱۷. تصویر نقطهٔ (۳،۷) را تحت تقارن نسبت به خط با $\theta = ٦۰^\circ$ ، $\phi = ۳۳۰^\circ$، و $d = ۵$ بیابید.
۱۸. تصویر (۵،۷) تحت تقارن سرشی شامل تقارن نسبت به‌محور yو پس از آن انتقالی به‌اندازهٔ سه واحد درجهت مثبت موازی محور y ها چیست؟

در تمرینات ۱۹-۲۴، تبدیل معکوس تبدیلی که معادلاتش داده‌شده، را بیابید:

۱۹. $x' = x - ۵$
$y' = y + ۲$

۲۰. $x' = x + ۴$
$y' = y - ۳$

۲۱. $x' = -x$
$y' = -y$

۲۲. $x' = x$
$y' = -y$

۲۳. $x' = x\cos ۳۰^\circ - y\sin ۳۰^\circ$
$y' = x\sin ۳۰^\circ + y\cos ۳۰^\circ$

۲۴. $x' = x\cos ٦۰^\circ + y\sin ٦۰^\circ$
$y' = x\sin ٦۰^\circ - y\cos ٦۰^\circ$

در تمرینات ۲۵ و ۲٦، مجموعه‌های معادلات حاصل‌ضرب دوانتقال را، درصورتی‌که بردارهای آن‌ها بردارهای داده شده باشند، استخراج کنید.

۲۵. [٦،۴]، [-۲،۳]

۲٦. [-۴،۱]، [۳،-٦]

۲۷. فرمول عمومی تصویر یک نقطه را تحت حاصل‌ضرب دوانتقال بابردارهای [a،b] و [c،d] استخراج کنید.

۲۸I. مجموعهٔ معادلات تقارن سرشی را بنویسید و آن را برای یافتن تصویر نقاط به کار برید.

۲۹I. قضیهٔ ۲.۳ را اثبات کنید.

۳۰I. تعریف تبدیل خطی را دریکی از کتب جبرخطی بیابید. کدام یک از حرکات سطح مثالی از تبدیلات خطی است؟ ثابت‌کنید که پاسخ‌تان درست است. مثال‌های دیگری از تبدیلات خطی را جستجو کنید.

۲.۵ مواردِاستعمال تبدیلات درگرافیک‌های کامپیوتری

یکی‌از تازه‌ترین و مهم‌ترین مواردِاستعمال تبدیلات درحوزهٔ جدید گرافیک‌های کامپیوتری*[55] بوده است. نمودارهای کامپیوتری را می‌توان به‌عنوان موضوعی درنظر گرفت که درآن از کامپیوتر برای ذخیره کردن، انجام‌عملیات، و نشان‌دادن اطلاعات تصویری استفاده‌می‌شود. در مورد یک‌برنامهٔ کامپیوتری متعارف، خروجی می‌تواند مجموعه‌ای اعداد باشد. اما درمورد یک‌برنامهٔ نمودار کامپیوتری متعارف، خروجی تصویری مرکب از مجموعه‌ای نقاط است.

در این بخش و بخشهای بعدی به کاربرندهٔ ماتریس، برای ردیف‌ها و ستون‌ها و ترتیب عملیات از قراردادهای نمودارهای کامپیوتری پیروی شده‌است. بنابراین درصورتی که خواننده قبلاً قراردادهای دیگر دوره‌های دیگر را به کار برده‌باشد لازم‌است که خود را بانمونهٔ متفاوت زیر تطبیق دهد.

درنمودارهای کامپیوتری، نقطهٔ در دوبعد را می‌توان به‌صورت ماتریس ردیفی (x,y) نمایش داد. به‌خاطر بیاورید که ماتریس جدول** مستطیل شکلی ازاعداد است. به‌عنوان مثال، نقطهٔ (۲،۳) به‌صورت ماتریس(۲ ۳) نمایش داده‌می‌شود. بسیاری‌از تبدیلات نقاط واقع در دوبعد را می‌توان به‌صورت ماتریس‌های ۲×۲، با دوردیف و دوستون، نمایش‌داد. در این‌صورت می‌توان ازضرب ماتریسی در نشان‌دادن تأثیر تبدیل مورد عمل برنقطهٔ موردبحث استفاده کرد. به‌خاطر بیاورید که ضرب ماتریسی جریانی ردیف ـ در ـ ستون است. درحالت‌کلی،

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax + cy \quad bx + dy)$$

---

55. Computer Graphics

* نمودارهای کامپیوتری، ترسیمات کامپیوتری

** آرایه

این موضوع را به این‌معنی تعبیر می‌کنیم که نقطهٔ (x،y) به نقطهٔ (ax + cy ، bx + dy) تبدیل شده‌است. در بررسی مواردِ استعمال نمودارهای کامپیوتری، می‌توان اهمیت تبدیلات را، بااستفاده ازضرب ماتریسی، به‌عنوان به‌دست دهندهٔ ابزار انجام عملیات هندسی‌ای که شکل یک‌مجموعه نقطه را به‌مجموعهٔ اصلاح‌شده‌ای تغییر می‌دهد، ملاحظه کرد.

مثال. تصویر نقطهٔ (۳،۴) را تحت تبدیل با ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{pmatrix}$ بیابید:

$$(۳\ ۴)\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{pmatrix} = (-۱\ ۱۸)$$

تصویر مطلوب (۱۸ ۱-) است.

موارد زیر بعضی‌از ماتریس‌های ۲×۲ خاص نمایش‌دهندهٔ عملیات‌هندسی مخصوصی که درنمودارهای کامپیوتری به‌کار می‌آیند می‌باشند.

عینیت $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

تغییرمقیاس در جهتx $\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

تقارن نسبت‌به محور yها $\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

تقارن نسبت به محور xها $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$

برش[۵۶] در جهتy $\begin{pmatrix} ۱ & b \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

دوران °۹۰ $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$

دوران °۱۸۰ $\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$

56. Shear

دوران 270° $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

تقارن نسبت‌به خط $y= x$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

تغییر مقیاس در هردوجهت x و y $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

تغییر مقیاس نامساوی $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

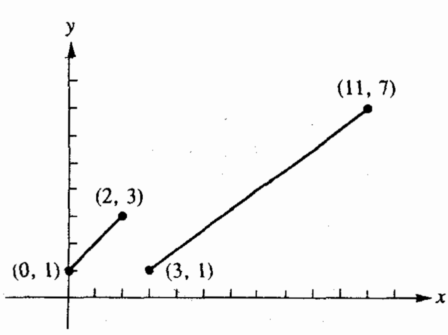
دوران عمومی حول مبدأ $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

بسیاری از تبدیلات فوق آشنایند، اما بعضی از آن‌ها تازه‌اند. ۴ واحد تغییر مقیاس در جهت x در معادلهٔ زیر نشان داده شده‌است:

$$(2\ 3)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (8\ 3)$$

نتیجهٔ کارضرب مختص x در ۴ است. برشی، چون $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تأثیرهندسی تغییر $(x،y)$ به $(x ، 2x+y)$ را، به‌طوری که مختص y با افزودن مضرب x ی به آن تغییرکند، داراست. در این‌صورت تصویر (۲،۳) در این برش (۲،۷) است. این برش برشی در جهت y است. مشابهاً، برشی چون $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ برشی در جهت x است.

در نمودارهای کامپیوتری تغییر یك‌نقطه درهربار طریقی بسیار پرزحمت درتغییر



شکل ۲.۲۸

ظاهر یک تصویر است. خوشبختانه، درهربار می‌توان بیش‌از یک نقطه را تغییرداد، و دقیقاً با تغییر دوسر یک قطعه‌خط، کل قطعه خط می‌تواند تغییرکند. به‌عنوان مثال، تبدیل $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ را می‌توان درمورد (۰،۱) و (۲،۳) دوسر یک‌قطعه خط، به کمک تنها یک‌ضرب ماتریسی، که در آن هرردیف ماتریس سمت‌چپ یک نقطه را نمایش می‌دهد، انجام‌داد:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱۱ & ۷ \end{pmatrix}$$

در این‌صورت (۳،۱) تصویر (۱،۰) و (۱۱،۷) تصویر (۳،۲) است. در این‌حالت هم طول هم‌شیب قطعه خط تغییرمی‌کند. شکل ۲.۲۸ را ملاحظه کنید.

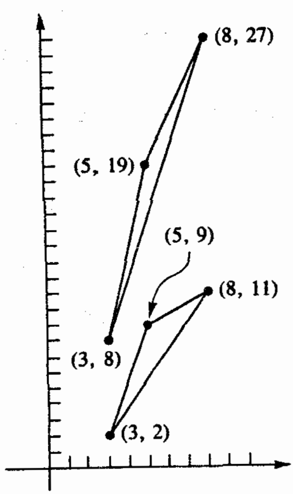
با تعمیم این‌روش، کل چند ضلعی‌ها را باتبدیل رئوس آن‌ها می‌توان تبدیل کرد.

مثال. تغییر مقیاس در جهت x در مورد یک مثلث:

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۹ \\ ۸ & ۱۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۵ & ۹ \\ ۲۴ & ۱۱ \end{pmatrix}$$

مثال. برشی درجهت y در مورد یک مثلث. شکل ۲.۲۹ را ملاحظه کنید:

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۹ \\ ۸ & ۱۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & ۸ \\ ۵ & ۱۹ \\ ۸ & ۲۷ \end{pmatrix}$$



شکل ۲.۲۹

مثال. قرینهٔ یك چهارضلعی نسبت به محور yها:

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۶ \\ ۴ & ۳ \\ ۶ & ۲ \\ ۷ & ۵ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -۳ & ۶ \\ -۴ & ۳ \\ -۶ & ۲ \\ -۷ & ۵ \end{pmatrix}$$

حاصل‌ضرب‌های تبدیلات را می‌توان توسط ماتریسی که حاصل‌ضرب ماتریس‌های آن تبدیلات است نمایش‌داد.

مثال. ماتریسی را بیابید که دورانی ۹۰° و بعداز آن تقارنی نسبت‌به خط y=x را نمایش دهد:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

مثال. ماتریسی را بیابید که تقارنی نسبت به محور yها و بعداز آن تغییر مقیاسی در دو جهت x و y را نمایش دهد:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & ۰ \\ ۰ & a \end{pmatrix}$$

برای یافتن تصاویر رئوس یك چندضلعی تحت حاصل‌ضرب تبدیلات می‌توان از تنها یك تساوی ماتریسی استفاده کرد.

مثال. تصویر مثلثی بارئوس (۵،۲)، (۳،۷)، (۴،۶) را تحت دوران ۱۸۰° و بعداز آن تقارنی نسبت‌به محور yها بیابید.

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۵ \\ ۷ & ۳ \\ ۶ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۲ & -۵ \\ ۷ & -۳ \\ ۶ & -۴ \end{pmatrix}$$

مثال. تصویر مثلثی با رئوس (۵،۲)، (۳،۷)، (۴،۶) راتحت تغییر مقیاس ۳ واحد درجهت x و بعد ازآن برش y به اندازهٔ ۲ واحد بیابید.

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۵ \\ ۷ & ۳ \\ ۶ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۶ & ۱۷ \\ ۲۱ & ۴۵ \\ ۱۸ & ۴۰ \end{pmatrix}$$

گرچه بسیاری از تبدیلات را می‌توان بااستفاده از ماتریس ۲×۲ در نمودارهای کامپیوتری نشان‌داد، یکی ازمتداول‌ترین آن‌ها، یعنی انتقال، را نمی‌توان. انتقال در دوبعد را می‌توان بااستفاده ازماتریس ۳×۳ همراه با نوع جدیدی از دستگاه مختصاتی‌ای که درفصل ۷ معرفی خواهدشد نشان‌داد. ممکن است خواننده خود قبل از مطالعهٔ فصل ۷ مایل به کشف چنین ماتریس ۳ × ۳ ای باشد. به‌این دلیل، و دلایل دیگری که درفصل ۷ به‌توضیح‌شان می‌پردازیم، معمولاً در نمودارهای کامپیوتری ازهندسهٔ تصویری استفاده می‌شود.

تمرینات ۲.۵

در تمرینات ۱-۴، تصویر نقطهٔ مفروض را تحت تبدیل با ماتریس مفروض بیابید.

۱. $\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ٦ \end{pmatrix}$ (۲ ، ۳)

۲. $\begin{pmatrix} ۴ & ۰ \\ ۲ & -۵ \end{pmatrix}$ (۰ ، ۵)

۳. $\begin{pmatrix} -۲ & ۱ \\ ٦ & ۲ \end{pmatrix}$ (۳ ، -۲)

۴. $\begin{pmatrix} ۵ & ۲ \\ -۱ & -۳ \end{pmatrix}$ (-۴ ، ۱)

در تمرینات ۵-۱۴، تصاویر نقاط مفروض را تحت تبدیلات موصوف بیابید.

۵. (۳،۴) ، (۲،۷) تغییر مقیاس ۳واحدی در جهت x

٦. (۴،۵) ، (-۱،۳) دوران °۱۸۰ای

۷. (۴،۱) ، (-۲،۳) تقارن نسبت‌به خط y=x

۸. (۰،۲) ، (-۵،۴) تغییر مقیاس ۴واحدی در دوجهت x و y

۹. (۰،۳) ، (۷،۰) ، (۵،۵) تقارن نسبت‌به محور xها

۱۰. (-۱،۲) ، (۰،۴) ، (۳،۳) دوران °۹۰ای

۱۱. (۲،۲) ، (۳،۳) ، (۴،۴) ، (۵،۵) دوران °۱۸۰ای

۱۲. (۳،۴) ، (۱،٦) ، (۲،۳) ، (۹،۵) تغییر مقیاس ۵ واحدی در جهت x

۱۳. (۴،۵-) ، (۳،-۲-) ، (۲-،۵-) ، (۳،۱-) ، (۵،۶-) تغییر مقیاس ۵ واحدی در دوجهت x و y

۱۴. همان پنج‌نقطهٔ تمرین ۱۳، باتقارن نسبت‌به خط y=x

در تمرینات ۱۵ - ۲۰، شکل اصلی را رسم‌کرده تبدیل را به کاربرید، سپس شکل تصویر را درهمان مجموعهٔ‌محورها رسم‌کنید.

۱۵. مثلثی بارئوس (۵،۶) ، (۳،۷) ، (۲،۸) تحت برشی با ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

۱۶. مثلثی باهمان رئوس تمرین ۱۵ تحت تغییرمقیاس نامساوی‌ای با ماتریس $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

۱۷. چهارضلعی‌ای بارئوس (۳،۳) ، (۳،۹) ، (۵،۹) ، (۵،۳) تحت دوران 90° ای

۱۸. همان چهارضلعی تمرین ۱۷ تحت تقارن نسبت‌به خط y=x

۱۹. شش ضلعی‌ای بارئوس (۲،۳) ، (۳،۷) ، (۷،۸) ، (۱۰،۶) ، (۶،۲) ، (۴،۲-) تحت دوران 270°ای

۲۰. همان شش‌ضلعی تمرین ۱۹ تحت دوران 180°ای

در تمرینات ۲۱ و ۲۲،ماتریس نمایش‌دهندهٔ حاصل‌ضرب دوتبدیل مفروض را بیابید.

۲۱. دوران 270° ای و بعد از آن تقارن نسبت‌به محور x ها

۲۲. تقارن نسبت به‌محور y ها و بعداز آن تغییر مقیاس ۵ ـ واحدی در جهت x

در تمرینات ۲۳ و ۲۴، تصویر مثلثی، که رئوسش داده‌شده‌اند، را نسبت‌به حاصل‌ضرب تبدیلات مفروض بیابید.

۲۳. (۹،۳) ، (۲،۵) ، (۴،۷) تقارن نسبت‌به محور x ها و بعداز آن دوران 270°ای

۲۴. (۶،۳-) ، (۵،۱) ، (۲،۴) برش y سه واحدی و بعداز آن تغییر مقیاس ۴ واحد در x و ۵ واحد در y

۲۵. نشان دهید که انتقال را نمی‌توان باضرب در یك ماتریس ۲×۲ انجام‌داد.
(راهنمایی: نقطهٔ (۰،۰) را درنظر بگیرید.)

۲۶I. نه تبدیل خاص راکه بتوانند با ماتریس‌ها نمایش داده شوند فهرست کنید؛ سپس ماتریسی را بیابید که حاصل‌ضرب درتبدیل خاص این تبدیلات را نمایش‌دهد.

۲.٦ خواص گروه حرکات اقلیدسی

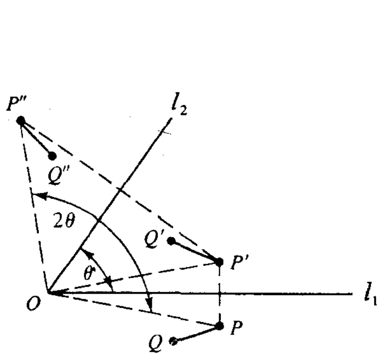
حرکات‌اقلیدسی را درهریک از سه‌بخش اخیر ازنظرگاه‌های گوناگونی موردبحث قرارداده‌ایم. این بخش اطلاعات بیشتری درمورد ساخت این مجموعهٔ حرکات به‌دست می‌دهد و بعضی از خاصیت‌های لایتغیر مجموعه‌های نقاط را تحت این تبدیلات بررسی می‌کند.

قضیهٔ ۲.۴. چهارنوع حرکت اقلیدسی صفحهٔ موردبحث تشکیل گروه تبدیل می‌دهند.

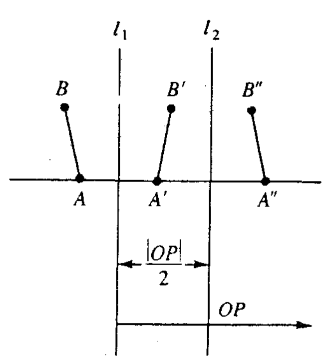
اثبات قضیهٔ ۲.۴ عبارت‌از نشان‌دادن این است که درمورد هرعضو این‌مجموعه معکوسی موجود است و این‌که حاصل‌ضرب هردو عضو این‌مجموعه عضو دیگری از این مجموعه است.

تحقیق در این که هرعضو این چهارنوع حرکت عضوی معکوس دارد به‌قدرکافی آسان است. فی‌المثل، معکوس یك انتقال انتقال دیگری درجهت مقابل آن است. امتحان بستگی نسبت به ضرب به‌گونه‌ای پیچیده‌تر است. معمولاً یك اثبات ترکیبی، با نشان‌دادن این که حرکات سطح را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب‌های تقارنات موردبحث قرارداد، آسان انجام‌می‌گیرد.

قضیهٔ ۲.۵. اگر تبدیلی حرکتی سطحی باشد، در این‌صورت حاصل‌ضرب سه یا کمتر از سه‌تقارن است، و برعکس.



شکل ۲.۳۰



شکل ۲.۳۱

این قضیه را در دوقسمت اثبات می‌کنیم. قسمت‌اول درمورد انتقالات و دورانات است، درحالی که قسمت‌دوم درمورد تقارنات و تقارنات سرشی است.

۱. هر انتقال یا دوران حاصل‌ضرب دوتقارن است، و برعکس.

در این‌مورد دوحالت، بسته به این‌که دوخط تقارن متقاطع باشند یا متوازی، موجوداست.

a. اگر l_1 و l_2 دو خط دلخواه صفحه متقاطع در O باشند، و اگر زاویهٔ از l_1 تا l_2، θ باشد، در این صورت $R(O,2\theta) = R_{l_2} R_{l_1}$ است.

درشکل ۲.۳۰، می‌توان دورانی را که PQ رابه $\overline{P''Q''}$ تبدیل می‌کند حاصل‌ضرب دو تقارن نسبت به l_1 و l_2 درنظر گرفت.

b. اگر l_1 و l_2 خطوطی متوازی باشند، و اگر بربردار انتقال OP عمود و به فاصلهٔ $|Op|/2$ از یکدیگر باشند، در این‌صورت $T_p = R_{l_2} R_{l_1}$ است.

درشکل ۲.۳۱، می‌توان حرکتی را که نقاط A و B را بر "A و "B تبدیل می‌کند حاصل‌ضرب دوتقارن نسبت‌به l_1 و l_2 درنظر گرفت.

۲. هر تقارن یا تقارن سرش حاصل‌ضرب سه یا کمتراز سه تقارن است. این گزاره درمورد خود تقارن گزاره‌ای ساده است. اما درمورد تقارن سرشی از آن‌جاکه این تبدیل حاصل‌ضرب یك تقارن و یك انتقال است، و از آن‌جا که خود انتقال حاصل‌ضرب دوتقارن است، تقارن‌سرشی، حاصل‌ضرب سه‌تقارن می‌باشد.

اثبات عکس‌قضیهٔ ۲.۵ را هنوز انجام نداده‌ایم. عکس قضیه مقررمی‌کند که اگر تبدیلی حاصل‌ضرب سه یا کمتراز سه‌تقارن باشد، در این‌صورت حرکتی سطحی است. نوع این حرکت به موقع نسبی محورهای تقارن وابسته‌است. حالات ممکن را در جدول ۲.۲ خلاصه کرده‌ایم.

دربخش ۲.۳، تجربه به این نتیجه منجرشد که بعضی حرکات را می‌توان بالغزاندن

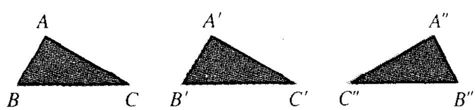
جدول ۲.۲

حاصل ضرب دو تقارن	A. اگر دو محور تقارن موازی باشند، دراین صورت حرکت‌مان انتقال است. B. اگر دو محور تقارن ناموازی باشند، دراین صورت حرکت‌مان دوران است.
حاصل ضرب سه تقارن	A. اگر دومحور ازمحورهای تقارن منطبق برهم باشند، دراین صورت حرکت‌مان تقارن است. B. اگر سه‌محور تقارن موازی باشند، دراین صورت حرکت‌مان تقارن است. C. اگر دومحور تقارن در نقطه‌ای واقع‌بر سومی تقاطع کنند، دراین صورت حرکت‌مان تقارن است. D. اگر دو محور تقارن در نقطه‌ای غیر واقع‌بر سومی تقاطع کنند، دراین صورت حرکت‌مان تقارن سرشی است.

یک نمونهٔ‌مقوایی در صفحه نمایش‌داد، و بعضی را نمی‌توان. اکنون به بررسی مجدد این موضوع در سایهٔ قضیهٔ **۲.۵** می‌پردازیم.

تعریف. حرکت سطحی را حرکت مستقیم[57] گویند اگرحاصل‌ضرب تقارناتی به تعداد زوج باشد، و حرکتی معکوس[58] یا **مقابل** است اگر حاصل‌ضرب تقارناتی به‌تعداد فردباشد.

طبق این تعریف، دورانات و انتقالات حرکات مستقیم‌اند، در حالی که تقارنات و تقارنات سرشی حرکات معکوس‌اند. به‌طور شهودی، می‌توان تفاوت بین حرکات مستقیم و معکوس را با درنظرگرفتن مقوایی مثلث شکل، چون ΔABC در شکل **۲.۳۲**، ملاحظه کرد. این تکه مقوا را می‌توان در صفحه برای نمایش هر حرکت مستقیم به حرکت درآورد. به عنوان‌مثال، می‌توان‌آن رابه‌موقع $\Delta A'B'C'$ انتقال‌داد. ازطرف‌دیگر، درصورتی که حرکت مقوا بخواهد حرکت معکوسی را نمایش دهد باید گردانده شود. فی‌المثل، لازم است که



شکل ۲.۳۲

57. Direct Motion

58. Opposite

مقوای مثلث شکل را برای انطباق با $\Delta A''B''C''$ بگردانیم.

درک شهودی دیگر در ارتباط تفاوت بین حرکات مستقیم و معکوس این است که حرکات مستقیم جهت را حفظ می‌کنند، در حالی که حرکات معکوس آن را تغییر می‌دهند. فی‌المثل، در شکل ۲.۳۲، در شکل اصلی می‌توانیم در مورد حرکت به دور محیط مثلث از A به B به C، در حالی‌که داخل مثلث همواره در سمت چپ‌مان باشد، بیندیشیم. این جهت در مورد $\Delta A'B'C'$ نیز برقرار است. اما در $\Delta A''B''C''$ اگر در مورد حرکت به‌دورمحیط مثلث از "A به "B به "C بیندیشیم، داخل مثلث سمت راست‌مان خواهد بود، لذا جهت آن عوض شده‌است.

در قضیهٔ ۲.۲ دومجموعهٔ معادلات مربوط به حرکت در علامت معادلهٔ دوم اختلاف دارند. علامت بعلاوه حرکت مستقیم را مشخص می‌کند، و علامت منفی به حرکت معکوس اشاره دارد. این مطلب را می‌توان با بررسی هر یک از انواع خاص معادلات حرکات تحقیق کرد.

در جدول ۲.۳ حاصل ضرب‌های حرکات مستقیم و معکوس خلاصه شده‌اند.

همان گونه که شخصی با سابقهٔ جبری کافی ممکن است گمان برده باشد، دستگاه حرکات مستقیم و معکوس تحت ضرب ایزومورفیک*[59] دستگاه اعداد زوج و فرد تحت عمل جمع (یا اعداد صحیح مدول ۲) است. این مطلب را می‌توان با مقایسهٔ جدول ۲.۳ با جداول جمع مستخرج در مورد دو دستگاه مذکور ملاحظه کرد.

سرانجام استفاده از قضیهٔ ۲.۵ و مفاهیم حرکات مستقیم و معکوس تکمیل جدول نشان دهندهٔ بستگی قضیهٔ ۲.۴ را ممکن می‌سازد. هر عضو** جدول ۲.۴ دو امکان را نشان می‌دهد زیرا این تمام اطلاعاتی است که از جدول ۲.۳ به دست آمده است. اما، در اکثر حالات، برای طبقه بندی حاصل ضرب مان به صورت یکی از چهارگونهٔ حرکت به اطلاعات بیشتری نیاز است.

جدول ۲.۳

	مستقیم	**معکوس**
مستقیم	مستقیم	معکوس
معکوس	معکوس	مستقیم

59. Isomorphic

* هم شکل

** درایه

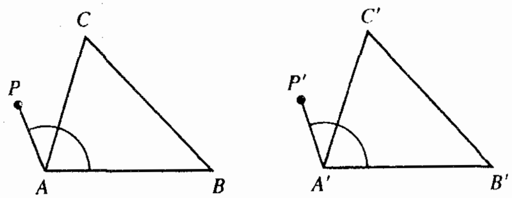
جدول ۲.۴

	دوران	انتقال	تقارن	تقارن سرشی
دوران	دوران یا انتقال	دوران یا انتقال	تقارن سرشی یا تقارن	تقارن سرشی یا تقارن
انتقال	دوران یا تقارن	دوران یا تقارن	تقارن سرشی یا تقارن	تقارن سرشی یا تقارن
تقارن	تقارن سرشی یا تقارن	تقارن سرشی یا تقارن	دوران یا انتقال	دوران یا انتقال
تقارن سرشی	تقارن سرشی یا تقارن	تقارن سرشی یا تقارن	دوران یا انتقال	دوران یا انتقال

به خاطر بیاورید که یک هندسه عبارت از بررسی خواص لایتغیر تحت گروهی از تبدیلات است، و فی المثل، گروه حرکات سطحی تبدیلات هندسهٔ اقلیدسی معمولی اند. می‌توانیم علاوه بر بررسی خواص لایتغیر دیگر نقاط لایتغیر را نیز بررسی کنیم. یک نقطهٔ لایتغیر تصویر خود تحت یک تبدیل است. ممکن است خواننده، پیش از خواندن ادامهٔ مطلب، مایل به ملاحظهٔ این موضوع که آیا توان کشف مجموعهٔ نقاط لایتغیر را در مورد هر نوع حرکت دارد یا خیر، باشد.

جدول ۲.۵

حرکت	امکانات نقاط لایتغیر
انتقال	هیچ
دوران	یک نقطه
تقارن	یک خط
تقارن سرشی	هیچ



شکل ۲.۳۳

در جدول ۲.۵، تعداد نقاط لایتغیر ممکن هر نوع حرکت، بی‌آن که تبدیل عینیت باشد، به اختصار آمده است.

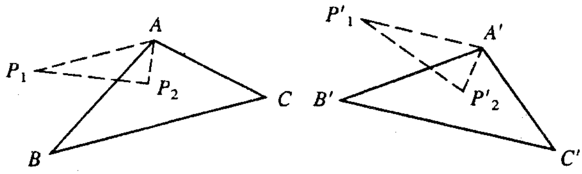
حداکثر، یک خط صفحه می‌تواند در حرکتی که عینیت نیست لایتغیر باقی بماند. در سایهٔ این کشف، پرسش مربوط به حداقل تعداد لازم نقاط و تصاویرشان که حرکتی سطحی غیر از عینیت را به طور منحصر به فردی تعیین می‌کنند اهمیت پیدا می‌کند. اثبات قضیهٔ زیر مشخص می‌کند که پاسخ مطلوب، سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت است.

قضیهٔ ۲.۶ . حرکت سطحی به طور منحصر به فرد با تبدیل هم شکل یک مثلث بر دیگری مشخص می‌شود.

اثبات: فرض می‌کنیم در شکل ۲.۳۳، $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ باشد. علامت مذکور به این معنی است که دو مثلث هم‌نهشت اند و تحت حرکتی یکی تصویر دیگری است. از این گذشته، علامت موجود مشخص می‌کند که A، A' ؛ B، B'؛ و C، C' ازواج نقاط متناظراند. در این صورت، لازم است که نشان دهیم که دقیقاً یک حرکت سطحی موافق با این هم شکلی وجود دارد.

فرض می‌کنیم P نقطهٔ دلخواه دیگری از صفحه جز A، B، یا C باشد. اگر تبدیل هم شکل‌مان مستقیم باشد، در این صورت P' با رسم $\angle B'A'P' \cong \angle BAP$ و $A'P' = AP$ به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود. (علامت $A'P'$ به جای این که به معنی خود قطعه خط باشد، به معنی فاصلهٔ A' تا P' است.) و اگر معکوس باشد، زاویهٔ مذکور را در جهت معکوس رسم می‌کنیم.

در شکل ۲.۳۴ فرض می‌کنیم P_1 و P_2 دو نقطه از صفحه باشند. از آن‌جا که $AP_1 = A'P'_1$، $AP_2 = A'P'_2$، و $\angle P_1AP_2 \cong \angle P'_1A'P'_2$ داریم $\Delta AP_1P_2 \cong \Delta A'P'_1P'_2$. به این ترتیب، $P_1P_2 = P'_1P'_2$، و بنابراین، از آن‌جا که



شکل ۲.۳۴

فاصلهٔ بین دو نقطه محفوظ است، یک حرکت مشخص شده است.

از آن جاکه، به ازای هر نقطهٔ مفروض P، تنها یک نقطه از صفحه، یعنی P'، چنان موجود است که $PA = P'A'$، $PB = P'B'$، و $PC = P'C'$، P' تصویر P است، و حرکت مورد بحث تنها حرکتی است که در مورد آن ΔABC به عنوان تصویرش $\Delta A'B'C'$ را داراست.

یکی از استلزامات قضیهٔ ۲.۶ این است که ضرایب معادلات قضیهٔ ۲.۳ را می‌توان در صورتی که سه نقطهٔ غیر واقع بر یک استقامت و تصویرشان معلوم باشد به طور منحصر به فردی معین کرد. این حرکت، گرچه منحصر به فرد است، می‌تواند عملاً به صورت حاصل‌ضرب حرکات دیگر به بی نهایت طریق انجام گیرد.

خاصیت‌های مورد بررسی هندسهٔ مقدماتی، چون هم‌نهشتی قطعه خط ها، مثلث‌ها، و زوایا، سطح نواحی، و تقاطع خطوط، همه خواص مجموعه های نقاطی هستند که تحت گروه حرکات لایتغیرند.

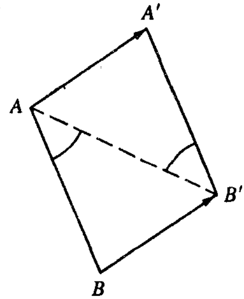
اثبات تغییر ناپذیری یک خاصیت تحت یک گروه تبدیلات می‌تواند ترکیبی یا تحلیلی باشد. اثبات ترکیبی اثباتی است که از مختصات استفاده نمی‌کند، و اثبات تحلیلی آن که می‌کند. هر دو این اثبات ها را در مثال ها توضیح داده‌ایم.

مثال. ثابت کنید که یک قطعه خط و تصویرش تحت انتقال موازی‌اند.

در شکل **۲.۳۵**، فرض می‌کنیم $\overline{AB}$ قطعه خط و $\overline{A'B'}$ تصویرش باشد. $\Delta AA'B \cong \Delta B'BA$، زیرا ازواج اضلاع متناظر هم‌نهشت‌اند. بنابراین، $\angle AB'A' \cong \angle B'AB$، و $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ موازی اند.

مثال. به طور تحلیلی ثابت کنید که یک خط و تصویرش تحت انتقال موازی‌اند.

فرض می‌کنیم معادلهٔ خط $ax + by + c = 0$ و معادلات انتقال $x' = x + d$،



شکل ۲.۳۵

$y' = y + e$ باشد. معادلات معکوس این انتقال $x = x' - d$، $y = y' - e$ است، بنابراین تصویر خط مان $a(x' - d) + b(y' - e) + c = 0$، یا $ax' + by' + (-ad - be + c) = 0$ است. این معادله و معادلهٔ اصلی هم‌شیب‌اند، و بنابراین خطوط مورد بحث موازی اند.

شاید قدرت اثبات‌های تحلیلی توسط مثال بعدی، که خاصیت ساختگی موسوم به «صبغه*» را به کار می‌برد، و در آن بی تغییری یا عدم آن ممکن است خیلی واضح نباشد، بهتر آشکار شده باشد.

مثال. آیا خاصیت صبغهٔ، تعریف شده به صورت $c - (a + b)$ی مجموعهٔ نقاط $ax + by^2 + cy + d = 0$، تحت انتقال لایتغیر است؟

فرض می‌کنیم معادلات انتقالات $x' = x + e$، $y' = y + f$ باشد. دراین صورت، تصویر مجموعهٔ نقاط مان $a(x' - e) + b(y' - f)^2 + c(y' - f) + d = 0$، که می‌تواند به صورت $ax' + by'^2 + (c - 2bf)y' + k = 0$، که در آن k ثابتی است، ساده شود، است. صبغه در صورتی که $(c - 2bf) - (a + b) = c - (a + b)$ باشد، لایتغیر است. اگر عبارات اخیر مساوی باشند، در این صورت $c - 2bf$ باید مساوی c باشد، و بنابراین $2bf$ باید برابر 0 شود، که در حالت کلی صادق نیست. به این ترتیب، خاصیت مزبور لایتغیر نیست.

---

* رنگ

درک این مطلب که گروه حرکات مان تغییرات بسیار کمی را در خواص مهم مجاز می‌کند به لزوم تحقیق انواع عمومی‌تر تبدیلاتی که فاصله را به عنوان خاصیتی لایتغیر ندارند، منجر می‌شود. یکی از چنین گروه‌هایی، گروه تشابهات، را در آخرین بخش این فصل معرفی کرده‌ایم.

تمرینات ۲.۶

۱. در مورد هر حالت جدول ۲.۲ شکلی رسم کنید.

۲. چنان که مطرح شده، تحقیق کنید که معادلات حرکات مستقیم دارای علامت + و معادلات حرکات معکوس دارای علامت − هستند.

در مسائل ۳ ـ ۶، از مثلث‌های هم‌نهشت استفاده کنید.

۳. مثالی خاص رسم کنید که نشان بدهد که حاصل ضرب یک تقارن و یک دوران می‌تواند یک تقارن سرشی باشد.

۴. مثال خاصی رسم کنید که نشان بدهد که حاصل ضرب یک تقارن و یک دوران می‌تواند یک تقارن باشد.

۵. مثال خاصی رسم کنید که نشان بدهد که حاصل ضرب دو تقارن سرشی می‌تواند یک انتقال باشد.

۶. مثال خاصی رسم کنید که نشان بدهد که حاصل ضرب دو دوران حول نقاط متفاوت می‌تواند دورانی حول نقطهٔ سومی باشد.

۷. آیا مجموعهٔ جمیع تقارنات سرشی تشکیل زیرمجموعه ای از جمیع حرکات یک صفحه می‌دهند؟

۸. آیا مجموعهٔ جمیع تقارنات سرشی و جمیع انتقالات زیرگروهی از گروه جمیع حرکات صفحه می‌سازند؟

۹. آیا مجموعهٔ جمیع انتقالات و جمیع تقارنات زیرگروهی از گروه جمیع حرکات صفحه تشکیل می‌دهند؟

۱۰. برای مشخص کردن یک حرکت منحصر به فرد در سطح، غیر از حالات خاص، باید چند زوج نقطهٔ متناظر بشناسیم؟

۱۱. به طور تحلیلی ثابت کنید که انتقال نقاط لایتغیر ندارد.

۱۲. به طور تحلیلی نتایج قراردادن $x = x'$ و $y = y'$ را در معادلات دوران بررسی کنید.
۱۳. با استفاده از قضیهٔ ۲.۶ ثابت کنید که، اگر سه نقطهٔ غیر واقع بر یک استقامت صفحه‌ای تحت حرکتی لایتغیر باقی بماند، آن حرکت عینیت است.
۱۴. به طور تحلیلی ثابت کنید که، در انتقال، تصویر دو خط متقاطع دو خط متقاطع است و تصویر نقطهٔ تقاطع اصلی نقطهٔ تقاطع جدید است.
۱۵. به طور تحلیلی ثابت کنید که زاویهٔ بین دو خط متقاطع تحت مجموعهٔ جمیع انتقالات لایتغیر است.
۱۶. به طور تحلیلی ثابت کنید که، در تقارن نسبت به محور y ها، تصویر دو خط متقاطع دو خط متقاطع است و تصویر نقطهٔ تقاطع اصلی نقطهٔ تقاطع جدید است.
۱۷. به طور تحلیلی ثابت کنید که زاویهٔ بین دو خط متقاطع در تقارن نسبت به محور y ها لایتغیر است.
۱۸I. یک مثلث و چند مثلث دیگر هم‌نهشت با آن رسم کنید. در هر حالت، توصیف کنید که چگونه مثلث اول می‌تواند در دومی (a) توسط یک حرکت، و (b) توسط حاصل ضرب حرکات در طرق گوناگون، تبدیل شود.
۱۹I. از اثباتی تحلیلی برای نشان دادن این که «صبغه» تحت تقارن نسبت به محور x ها یا محور y ها لایتغیر است یا خیر استفاده کنید.
۲۰I. خاصیتی (مشابه با «صبغه») برای مجموعه‌ای نقاط وضع کنید، و از اثباتی تحلیلی برای نشان دادن این که آن خاصیت تحت انتقال لایتغیر است یا نه استفاده کنید.
۲۱I. بااستفاده از اثبات‌های تحلیلی، تغییر ناپذیری خواص گوناگون را نسبت به دوران حول مبدأ بررسی کنید.
۲۲I. بااستفاده از اثبات‌های تحلیلی، تغییر ناپذیری خواص گوناگون را نسبت به تقارن نسبت به خط $y = x$ بررسی کنید.
۲۳I. قبل از مطالعهٔ بخش بعدی، توان کشف بعضی از واقعیت های مربوط به حرکات فضای سه بعدی را در خود سراغ بگیرید. فی المثل، چند نوع حرکت موجود است؟ آیا بعضی مستقیم و بعضی معکوس اند؟

۲.۷ حرکات فضای سه بعدی

حرکات فضای سه بعدی[60] را می‌توان در مورد مجموعهٔ نقاط واقع در فضای سه بعدی اقلیدسی

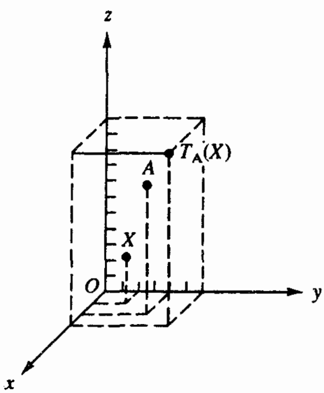
60. Three - Space

بدون تغییر دادن فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آن‌ها به کاربرد. تعداد حرکات فضای سه بعدی شش است. سه حرکت ساده‌تر عبارت از انتقال، دوران، و تقارن اند، اما باید به این مفاهیم در فضای سه بعدی روشنی دهیم.

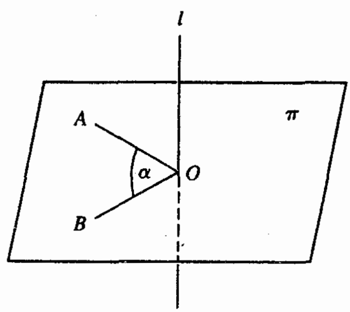
تعریف انتقال در فضا مشابه تعریف انتقال در صفحه است.

تعریف. تبدیل T_A چنان که $T_A(X) = X + A$ انتقال فضا در جهت OA است.

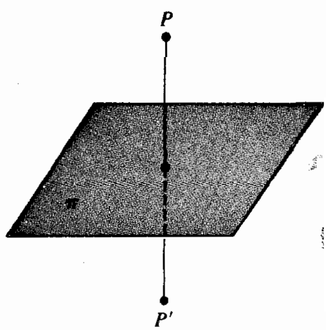
به عنوان مثال، در شکل ۲.۳۶، اگر A نقطهٔ (۲،۴،۸) و X نقطهٔ (۱،۲،۳) باشد، در این صورت (۳،٦،۱۱) $= T_A(X)$. نقطهٔ تصویر را می‌توان به آسانی با جمع مختصات یافت. در این مورد این واقعیت را که انتقال در فضای سه بعدی جمیع نقاط یک صفحه را به نقاط صفحه‌ای موازی با آن می‌فرستد تحقیق کنید.



شکل ۲.۳٦



شکل ۲.۳۷



شکل ۲.۳۸

تعریف. دوران $R(l,\alpha)$ در فضای سه بعدی به اندازهٔ زاویهٔ α حول یک خط ثابت* دوران در جهت مثلثاتی در صفحهٔ عمود بر l است. شکل ۲.۳۷ را ملاحظه کنید. در این مورد فرض بر این است که دستگاه مختصات راست‌گرد[61] تشکیل داده‌ایم.

تصویر نقطهٔ A ی غیرواقع بر l نقطهٔ B ای چنان است که AO و $\overleftrightarrow{OB}$ صفحهٔ π ی عمود بر l ای را مشخص می‌کنند.

تعریف. تقارن R_π در فضای سه بعدی تقارنی نسبت به یک صفحه چنان است که، به ازای P و تصویر P' اش، π عمودمنصف $\overline{PP'}$ باشد. شکل ۲.۳۸ را ملاحظه کنید. یک مجموعه نقاط و تصویرش تحت تقارن نسبت به صفحهٔ تقارن متقارن‌اند.

در این‌جا نمایش تحلیلی کامل حرکات فضای سه بعدی را به دست نداده‌ایم، اما حالات خاص را بررسی کرده‌ایم. معادلات بعدی در مورد انتقال در فضای سه بعدی مشابه معادلات انتقال در صفحه‌اند:

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$
$$z' = z + c$$

در مورد دوران در صفحه، اگر خط ثابت دوران محور z ها و صفحهٔ عمود بر آن صفحهٔ xy باشد، در این صورت تصویر نقطهٔ واقع در این صفحه را می‌توان با استفاده از معادلات دورانی که قبلاً در مورد دوران در صفحه حول مبدأ مختصات داده شده‌اند یافت. مختص z در مورد نقطه‌ای در صفحهٔ موازی صفحهٔ xy ثابت می‌ماند.

تصویر (a,b,c) در تقارن نسبت به صفحهٔ xy، $(a , b , -c)$ است، درنتیجه

$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$z' = -z$$

* خط ثابت l

61. Right - Handed Coordinate System

است. در مورد تقارنات نسبت به صفحات xz و yz می‌توان مجموعه های معادلات متناظری نوشت.

ماتریس‌های به‌کاررونده در انتقال درفضای سه بعدی، مانند مشابه شان در فضای دو بعدی، شامل استفاده از مختصات متجانس اند و در فصل ۷ مورد بحث قرار خواهندگرفت. ماتریس تقارن نسبت به صفحهٔ xy ($z = 0$) عبارت است از

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

برای بسته شدن مجموعهٔ حرکات سه بعدی لازم است که علاوه بر سه حرکت سادهٔ فوق، به تعریف سه نوع حرکت دیگر، که حاصل ضرب های حرکات اساسی فوق اند، بپردازیم. جدول ۲.٦ تعاریف حرکات اضافی مورد بحث را به صورت حاصل ضرب های دو حرکت ساده‌تر نشان می‌دهد.

تحلیل کامل حرکات فضای سه بعدی را در این جا نمی‌دهیم، اما قضایای آن مشابه قضایای فضای دو بعدی است.

قضیهٔ ۲.۷ . حرکات فضای سه بعدی تشکیل گروه تبدیلات می‌دهند.

با این که اثبات کامل این قضیه در این جا داده نشده، این اثبات مشابه اثبات قضیهٔ ۲.۴ است که در آن تحلیل مطلب بسته به طبقه بندی حرکات فضای سه بعدی به صورت مستقیم یا معکوس و نشان دادن این که هر حرکت فضایی را می‌توان به صورت حاصل ضرب تقارنات نسبت به صفحه بیان کرد، است. جدول ۲.۷ نشان می‌دهد که کدام حرکت مستقیم و

جدول ۲.٦

حرکت	توضیح
a. تغییر مکان پیچی [62]	دوران و انتقال در امتداد محور دوران
b. تقارن سرشی	تقارن و انتقال موازی با خطی در صفحهٔ تقارن
c. تقارن دورانی [63]	تقارن و دوران با محوری عمود بر صفحهٔ تقارن

---

62. Screw Displacement

63. Rotatory Reflection

جدول ۲.۷

حرکت در فضای سه بعدی	مستقیم یا معکوس	نقاط لایتغیر
دوران	مستقیم	یک خط
انتقال	مستقیم	هیچ
تقارن	معکوس	صفحهٔ تقارن
تقارن دورانی	معکوس	یک نقطه
تغییر مکان پیچی	مستقیم	هیچ
تقارن سرشی	معکوس	هیچ

کدام معکوس است. در سه بعد، حرکات معکوس آن هایی هستند که شامل تقارن‌اند. جدول فوق توصیف نقاط لایتغیر را در مورد هر یک می‌دهد.

جدول مزبور امکان می‌دهد که حاصل ضرب هر دو حرکت را مشخص کنیم، اما نتایج را نمی‌توان بدون اطلاعات بیشتر به طور منحصر به فرد معین کرد. به عنوان مثال، حاصل ضرب یک تغییر مکان پیچی و یک تقارن سرشی تبدیلی معکوس، و در نتیجه، تقارن، تقارن دورانی، یا تقارن سرشی است.

بررسی جدول ۲.۷ نشان می‌دهد که تقارن دارای صفحه‌ای لایتغیر است و هیچ حرکت دیگری مجموعهٔ نقاط لایتغیری با این وسعت ندارد. قضیهٔ بعد مشابه قضیهٔ ۲.٦ است.

قضیهٔ ۲.۸ . یک حرکت در فضا با یک چهاروجهی و تصویرش به طور منحصر به فردی معین می‌شود.

اثبات قضیه را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم.

تمرینات ۲.۷

۱. فرض می‌کنیم بردار انتقالی [۷،۱،۲-] باشد، تصویر هر یک از نقاط زیر را تحت این انتقال به دست دهید.

a. (۰،۰،۰)
b. (۲،۵،۳)
c. (-۲،-۳،-۵)
d. (۰،-۴،۱)

۲. در انتقالی با بردار [۴،۳-،۱-]، کدام نقاط دارای این تصاویراند؟
a. (۰،۰،۰)	b. (۲،۱-،۳)

۳. معکوس هر نوع حرکت فضایی را توصیف کنید.

۴. تصویر نقطهٔ (۲،۴،۵) تحت دوران ۴۵° در صفحهٔ $y = ۴$ حول محور y ها چیست؟ جهت مثبت را در این مورد از محور x ها به محور z ها فرض کنید.

در تمرینات ۵ ـ ۸، تصویر نقطه مربوطه را تحت تقارن حول صفحهٔ مفروض به دست دهید.

۵. (۱،۸،۳)، صفحهٔ xy	۶. (۲-،۴،۳-)، صفحهٔ xz
۷. (۹،۳،۲)، صفحهٔ yz	۸. (۱-،۴،۲-)، $x = ۳$

۹. ماتریس های ۳×۳ ی تقارن نسبت به صفحات مختصات را بنویسید و از ضرب ماتریسی در تحقیق پاسخ های تمرینات ۵ ـ ۷ استفاده کنید.

۱۰. در مورد هر یک از سه نوع حرکت فضایی اخیر مثالی طرح کنید.

۱۱. ثابت کنید، اگر چهار نقطهٔ غیر واقع بر یک صفحهٔ فضا تحت حرکتی لایتغیر باقی بمانند، این حرکت عینیت است.

۱۲. امکانات نوع حرکتی را که حاصل ضرب تبدیلات زیر است، نام ببرید:
a. تقارن دورانی و انتقال
b. دوران و تقارن سرشی

۱۳. معادلات تقارن نسبت به صفحهٔ $z = ۲$ را استخراج کنید.

۱۴. قضیهٔ ۲.۸ را اثبات کنید.

در مورد تبدیلات زیر طرحی بکشید که یک چهار وجهی و تصویرش را نشان دهد:

۱۵. انتقال
۱۶. دوران
۱۷. تقارن

۱۸. فرمول کلی یافتن تصویر صفحهٔ $ax + by + cz + d = ۰$ را در مورد انتقالی در فضای سه بعدی با معادلات $x' = x + e$ ، $y' = y + f$ ، $z' = z + g$ استخراج کنید.

۱۹. فرمول کلی یافتن تصویر کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = d^۲$ را نسبت به انتقالی در فضای سه

بعدی با معادلات $x' = x + a$، $y' = y + b$، $z' = z + c$ استخراج کنید.

۲۰. قضیه‌ای فضایی، مشابه با این قضیهٔ سطحی که مقرر می‌کند که هر حرکت سطحی حاصل‌ضرب سه یا کمتر از سه تقارن است، بیان و اثبات کنید.

۲۱I. مجموعه های معادلاتی در مورد حرکات اضافی فضای سه بعدی غیر از مجموعه های معادلات داده شده در مورد انتقال و حالتی خاص از تقارن طرح کنید.

۲۲I. کتاب مندل بورت[۶۴] "The Fractal Geometry of Nature"، یا مرجع دیگری راجع به فرکتال ها را بررسی کنید، سپس توضیح دهید که چگونه این حوزهٔ جدید هندسی، که از سال ۱۹۷۵ به بعد مطرح شده، اعداد حقیقی را در مورد شمار ابعاد به کار می‌برد.

۲.۸ تبدیلات تشابه

مقصود از این بخش معرفی تشابهات به عنوان امثله‌ای از نوع تبدیلاتی به‌گونه‌ای عام‌تر از حرکات‌ودربرگیرندهٔ آن‌ها به عنوان حالات خاص، است. این تبدیلات در مورد نقاط صفحهٔ اقلیدسی یا فضای سه بعدی به کار می‌روند. خواننده احتمالاً از هندسهٔ دبیرستان با مطالعه مثلث‌های متشابه آشناست، و احتمالاً آن مفاهیم از هندسهٔ تشابهات را، که در کاربردهایی چون بزرگ نمایی تصویری، نقشه سازی، و تهیهٔ نمونه‌های مقیاسی به‌کار رفته‌اند، می‌شناسد. در این تبدیلات فاصلهٔ بین نقاط همواره حفظ نمی‌شود اما در سراسر صفحه یا فضا به‌گونه‌ای سازگار تغییر می‌کند.

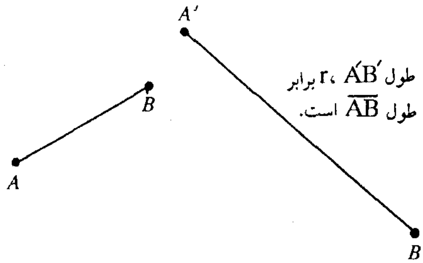
تعریف. تشابه سطحی تبدیلی از صفحه برخود و چنان است که اگر A، A' و B، B' نقاط متناظر باشند، طول $\overline{A'B'}$، r برابر طول $\overline{AB}$، که در آن r عدد حقیقی ناصفری است، باشد. شکل ۲.۳۹ را ملاحظه کنید.

در مورد این مثال، $r = ۲$ است، بنابراین $\overline{AB}$ توسط تبدیل تشابه فوق به قطعه خطی مساوی دو برابر طول خود امتداد یافته است. این قطعه خط، به ازاء $r = \frac{۱}{۳}$ به قطعه خطی مساوی یک سوم طولش جمع می‌شود. به ازای $r = ۱$، تبدیل تشابه مان یک حرکت است. عدد r نسبت تشابه[۶۵] نامیده می‌شود.

---

64. Mandelbort

65. Ratio of Similarity



شکل ۲.۳۹

قضیهٔ ۲.۹. مجموعهٔ جمیع تشابهات یک صفحه گروه تبدیل است.

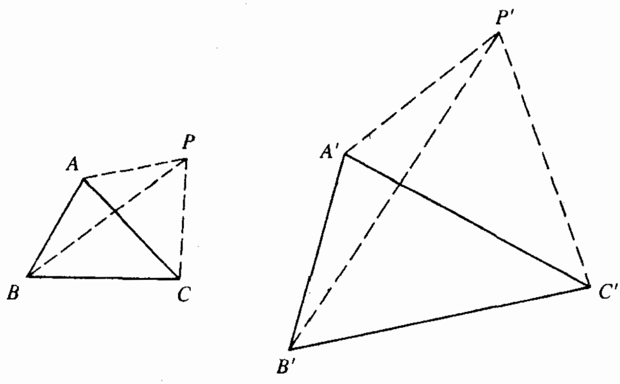
معکوس تشابه با نسبت r دارای نسبت $\frac{1}{r}$ است. نسبت حاصل ضرب دو تشابه حاصل‌ضرب نسبت‌های آن دو تشابه است. به عنوان مثال، اگر نسبت تشابه اول ۲ و نسبت تشابه دوم ۳ باشد، نسبت تشابه تبدیل حاصل ضرب آن ها ٦ است. قضیهٔ ۲.۹ ممکن می سازد که به حرکات یک صفحه به عنوان زیرگروهی، با $r = 1$، ازگروه تشابهات صفحه بیندیشیم.

در بخش ۲.۷، ثابت شد که در صورتی که سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت و تصاویرشان معلوم باشند یک حرکت منحصر به فرد معین می‌شود. همان اثبات را می توان برای به کار بردن در مورد گروه عمومی تر تشابهات تعدیل کرد. در این مورد پس از به دست دادن صورت این قضیه طرح مختصری از اثبات آن می آوریم.

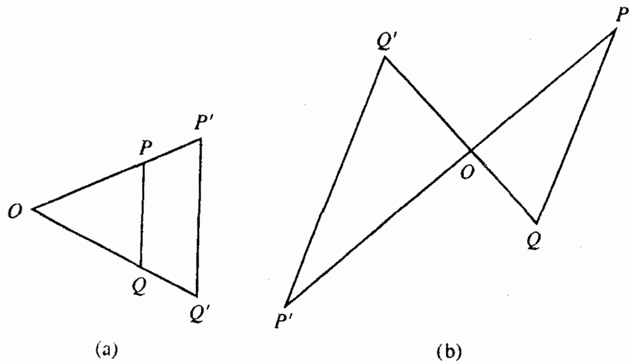
قضیهٔ ۲.۱۰. هنگامی که یک مثلث و تصویرش معلوم باشد یک تشابه سطحی به‌طور منحصر به فرد معین می‌شود.

در شکل ۲.۴۰، $\Delta A'B'C'$ تصویر ΔABC است. فواصل $P'A'$، $P'B'$، و $P'C'$ و نقطهٔ P' همه را می توان یافت.

بررسی شهودی چگونگی توضیح تشابهات به عنوان یک رشته مراحل سادهٔ منجر شونده از یک شکل به تصویرش مقرر می‌کند که تغییر در این مورد می تواند هم در موقع و هم البته به طور یکنواخت در اندازه (اما نه در شکل) باشد. در مورد این برهان راجع به کاربرد نمونه های فیزیکی بیندیشید. فی المثل، در شکل ۲.۴۰، تغییرات موقع می تواند در مثلث ABC منجر به این شود که این مثلث چنان قرار گیرد که A و A' بر هم منطبق شوند، $\overline{AB}$ در امتداد $\overline{A'B'}$ قرار گیرد، و $\overline{AC}$ در امتداد $\overline{A'C'}$ واقع شود. در این صورت اگر



شکل ۲.۴۰



شکل ۲.۴۱

بخواهیم B و B′ نیز منطبق شوند تغییری در اندازه لازم است. از آن‌جا که حرکات صفحه می‌تواند تغییر در موقع را حاصل کند، تبدیل جدید مورد نیاز تبدیلی است که تغییر یکنواخت در اندازه را به دست دهد. این نوع تبدیل جدید باید تشابه خاصی که در آن تصویر یک مجموعه نقاط شکلی مشابه با اضلاع متناظر متوازی است، باشد.

تعریف. بسط[66] H(O,r) تشابه سطحی ای است که نقطهٔ P را بر نقطهٔ P′، که در آن $OP' = rOP$، نقاط P، O، P′ واقع بر یک استقامت، و $r \neq 0$ است، می‌گسترد. اگر $r < 0$ باشد، در این صورت O بین P و P′ است، در حالی که اگر $r > 0$ باشد، نقاط P و P′ بر یک طرف O واقع می‌شوند. نقطهٔ O به مرکز، و عدد r به نسبت بسط موسوم است. بسط را گاهی گسترش[67] یا تجانس[68] نیز می‌نامیم.

66. Dilation 67. Dilatation 68. Homothety

طبق تعریف فوق، مرکز بسط نقطه‌ای لا یتغیر است. نسبت فواصل مرکز بسط تا تصویر نقطه و تا خود نقطه، یعنی نسبت بسط، مقداری ثابت است. فی المثل، شکل ۲.۴۱ a بسطی با $\frac{۳}{۲} = \frac{OP'}{OP}$، و شکل ۲.۴۱b بسطی با $-\frac{۳}{۲} = \frac{OP'}{OP}$ را نشان می‌دهد. به خاطر داشته باشید که نسبت تشابه همواره تصویر نقطه را با نقطه مطابقه می‌کند.

بررسی نیاز به بسط فوق نشان داد که حرکات می‌توانند به تصویری در موقع نسبی مطلوب منجر شود؛ به این ترتیب قطعه خط های متناظر تحت تبدیل بسط باید موازی باشند. این موضوع که خاصیت توازی تحت بسط لا یتغیر است به صورت قضیهٔ بعد اثبات شده است.

قضیهٔ ۲.۱۱ . تصویر یک قطعه خط تحت بسط قطعه خطی موازی آن است.

اثبات: در شکل ۲.۴۱، $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$ و $\Delta OPQ \sim \Delta OP'Q'$ است، در نتیجه $\overline{P'Q'} \parallel \overline{PQ}$. این اثبات باید در حالت خاصی که در آن O، P، Q واقع بر یک استقامت اند، تعدیل شود. تمرین ۱۵ را ملاحظه کنید.

گاهی یک شکل و تصویرش تحت بسط را اشکال متجانس[۶۹] می‌نامیم، و گاه گفته می‌شود که اشکال متجانس، از آن جا که اضلاع متناظرشان موازی اند، هم مشابه هم مشابهاً مُمَکَّن* اند. فی المثل، در شکل ۲.۴۲، ΔABC و $\Delta A'B'C'$ مشابه‌اند اما مجانس نیستند، در حالی که ΔABC و $\Delta A''B''C''$ مجانس می‌باشند. نیز، $\Delta A'B'C'$ و $\Delta A''B''C''$ مشابه‌اند اما مجانس نیستند. خاصیت توازی تحت بسط محفوظ است.

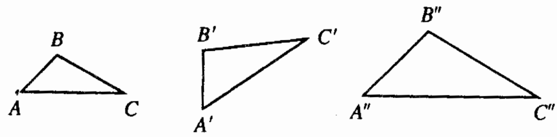
خاصیت لا یتغیر دیگر خاصیت دایره بودن است. برای اثبات دایره بودن یک مجموعه نقاط چندین راه موجود است. طریق به‌کاررفته در اثبات زیر نشان دادن این است که جمیع نقاط مورد بحث از نقطهٔ ثابتی به فاصله‌ای ثابت اند.

قضیهٔ ۲.۱۲ . تصویر دایره تحت تبدیل بسط دایره است. شکل ۲.۴۳ را ملاحظه کنید.

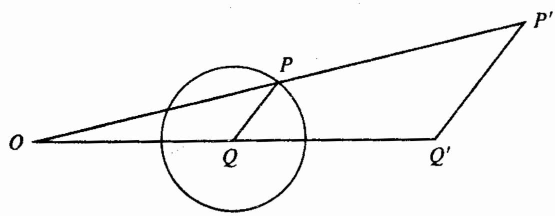
اثبات: فرض می‌کنیم O مرکز بسط و P' و Q'، به ترتیب، تصاویر نقطهٔ P ی واقع بر دایره‌ای مفروض و مرکز آن باشند. فرض می‌کنیم P با O و Q بر یک استقامت نباشد.

69. Homothetic Figures

* مکان گرفته



شکل ۲.۴۲



شکل ۲.۴۳

از آن جا که بنا به قضیهٔ ۲.۱۱، $\overline{P'Q'} \parallel \overline{PQ}$است، $\dfrac{OQ'}{OQ} = \dfrac{P'Q'}{PQ}$، یا

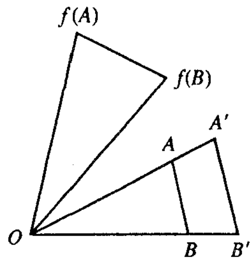
$$P'Q' = \frac{PQ \,.\, OQ'}{OQ}$$

اما هر یک از پاره خط های سمت راست این تساوی دارای طول ثابت است؛ در نتیجه $P'Q'$ ثابت است. در این صورت P'، به ازای هر موقع P، بر دایره‌ای به مرکز Q' قرار می‌گیرد.

تا این جا مشخص کردیم که تشابه را می‌توان حاصل ضرب یک بسط و یک حرکت درنظر گرفت. اما به علت این که یک بسط می‌تواند عمل انتقال را نیز انجام دهد، قضیهٔ قدرتمندتر زیر را می‌توان برقرار کرد.

قضیهٔ ۲.۱۳. تشابه سطحی با عدد مثبت نامساوی با یک r حاصل ضرب یک بسط و یک دوران یا تقارن است.

اثبات: در این جا فرض می‌کنیم، و می‌توانیم با استفاده از قضایای توپولوژی ثابت کنیم، که هر تشابه سطحی غیر حرکتی دقیقاً یک نقطه ثابت دارد. در قضیهٔ ۲.۱۳، دوران مان حول این نقطهٔ ثابت و تقارن مان نسبت به محوری گذرنده از این نقطهٔ ثابت است.



شکل ۲.۴۴

در شکل ۲.۴۴، فرض می‌کنیم O نقطهٔ ثابت مذکور و $\overline{AB}$ قطعه خط دلخواهی باشد. A' و B' تصاویر A و B تحت بسطی با O به عنوان مرکزاند. فرض می‌کنیم f(A) و f(B) تصاویر A و B تحت هر تشابهی که حرکت نیست باشد. $\Delta OA'B' \sim \Delta Of(A)f(B)$. $\Delta OA'B'$ را می‌توان در Of(A) f(B) یا توسط دورانی به زاویهٔ AOf(A) یا با تقارنی نسبت به نیمساز این زاویه گسترش داد. در حالت اول، تشابه مستقیم، و در حالت دوم معکوس است.

پیدایش تحلیلی معادلات تبدیلات تشابه با ملاحظهٔ این که معادلات بسط با مرکز در مبدأ

$$x' = rx$$
$$y' = ry$$

اند آغاز می‌شود.

از آن جا که تشابه حاصل ضرب یک حرکت و یک بسط است، معادلات تشابه به صورت

$$x' = r\,(ax + by + c)$$
$$y' = \pm r\,[(-bx + ay) + d]$$

به ازای $a,b,c,d \in R$ و $a^2 + b^2 = 1$ اند.

تشابهات در فضای سه بعدی نیز گروهی، دارای حرکات سه بعدی به عنوان زیرگروه، تشکیل می‌دهند. نظریه و تعاریف آن مشابه نظایرشان در دو بعدی است.

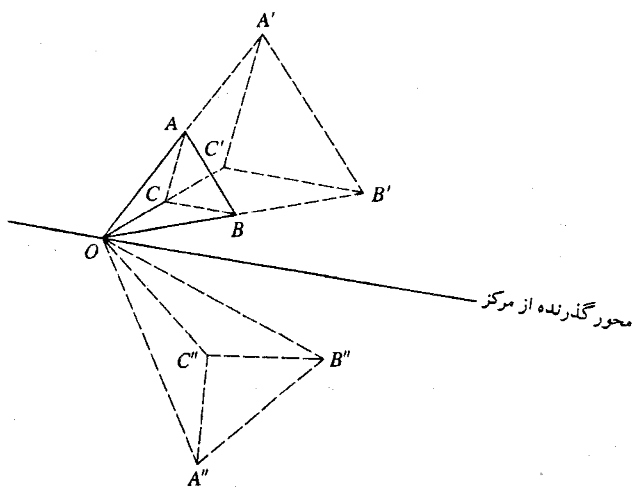
قضیهٔ ۲.۱۴ . هنگامی که یک چهاروجهی و تصویرش معلوم باشند تشابهی فضایی به‌طور منحصر به فرد تعیین می‌شود.

قضیهٔ ۲.۱۵ . مجموعهٔ جمیع تشابهات فضا گروه تبدیل است.

قضیهٔ ۲.۱۶ . تشابهی فضایی که حرکتی فضایی نیست حاصل ضرب بسطی نسبت به نقطهٔ ثابتش و دورانی حول خطی گذرنده از نقطهٔ ثابت مزبور است.

اثبات: بنا به قضیهٔ ۲.۱۴، چهار وجهی دلخواه OABC با نقطهٔ ثابت O ی به عنوان یکی از رئوسش را درنظر می‌گیریم. در این جا نیز، مانند مورد دو بعدی، چنین می‌نگاریم که به ازای هر تشابهی نقطهٔ ثابتی موجود است. فرض می‌کنیم r نسبت تشابه باشد. در این صورت تصویر OABC تحت بسط H(O,r)، یعنی OA"B"C"، با تصویر OA′B′C′ تحت تشابه مان هم‌نهشت است. اگر حرکت واصل OA"B"C" و OA′B′C′ مستقیم باشد، در این صورت تشابه مورد بحث حاصل ضرب H(O,r)، به ازای r مثبت، و دورانی حول خطی گذرنده از O است. اگر تشابه‌مان معکوس باشد، در این صورت r منفی است. شکل **۲.۴۵** یک چهار وجهی و تصویرش را تحت بسطی مستقیم نشان می‌دهد.

در این فصل مفهوم هندسهٔ اقلیدسی را، با نشان دادن این که چگونه می‌توان آن را بررسی خواصی که تحت گروه حرکات (یا تحت گروه تشابهات) لایتغیرند درنظر گرفت، وسعت بخشیدیم، و از طریق این تقرب نوآیین معنی بیشتری به بررسی مثلث های هم نهشت و



شکل ۲.۴۵

مشابه دادیم. اما، از این مهم‌تر حتی، پیش بینی وجود تبدیلات عمومی تری است (فی المثل، چون آن ها که در فصل ۷ آمده)، که تشابهات و هندسهٔ اقلیدسی را به عنوان حالات خاص دارند.

در حال حاضر، یکی از انواع هندسهٔ دبیرستان صورت تجدید نظر شدهٔ هندسهٔ اقلیدسی با مفاهیم حرکات مشمول اصول موضوع است، و گرچه این تقرب به تسهیل بعضی قضایا می‌انجامد، به مجموعهٔ پیچیده‌تری از اصول موضوع نیاز دارد. بزرگترین ارزش تبدیلات در این است که تنها مطالعهٔ چند هفته‌ای حرکات راه را برای معرفی تبدیلات عمومی تر به‌کار رفته در هندسهٔ تصویری، توپولوژی، و هندسهٔ انعکاسات باز می‌کند. در این مورد اگر خواننده تمایل فوری به مطالعهٔ تبدیلات عمومی تر مذکور داشته باشد، باید کار را با فصل ۷ آغاز کند.

در قرن حاضر بررسی هندسهٔ اقلیدسی در بسیاری از جهات، علاوه بر تقرب از طریق تبدیلات، حیاتی تازه یافته است. فصول ۳، ۴، و ۵ شامل مطالبی که قسمتی از هندسهٔ اقلیدسی جدید را تشکیل می‌دهند، است. طبقه بندی و بررسی به تفصیل مجموعه های نقاط هندسهٔ اقلیدسی بارآورندهٔ مفهوم جدید تحدب موضوع فصل ۳ است. فصل ۴ هندسهٔ اقلیدسی پیش رفتهٔ چند ضلعی و دایره را بررسی می‌کند، در حالی که فصل ۵ شامل نظریهٔ جدید ترسیمات است.

تمرینات ۲.۸

۱. طول تصویر یک قطعه خط ۳ سانتی متری را تحت تشابهی با نسبت $\frac{۴}{۳}$ بیابید.

۲. نسبت تشابه را، در صورتی که یک قطعه خط ۵ سانتی متری تصویری ۶ سانتی متری داشته باشد، بیابید.

۳. بعضی از خواص محفوظ تحت جمیع حرکاتی را که تحت جمیع تشابهات محفوظ نمی‌مانند نام ببرید.

۴. دو قطعه خط چنان رسم کنید که نسبت تشابه بین آن ها ۲ به ۳ باشد.

۵. دو مثلث مشابه چنان رسم کنید که نسبت مساحات شان ۲ به ۳ باشد.

۶. دو چهار وجهی مشابه چنان رسم کنید که نسبت احجام شان ۲ به ۳ باشد.

۷. تأثیر تشابه بر مساحت ناحیه ای مثلث شکل چیست؟

۸. نسبت تشابه را، در صورتی که ناحیه‌ای مربع شکل با مساحت ۱۲ واحد مربع تصویری با مساحت ۱۷ واحد مربع داشته باشد، بیابید.

۹. در شکل ۲.۴۳، نسبت اشعهٔ دو دایرهٔ موجود را با نسبت تشابه مقایسه کنید.

۱۰. تصویر (۳،۵) را تحت بسطی به مرکز (۰،۰) و نسبت $\frac{۳}{۴}$ بیابید.

۱۱. تصویر (۴،۳) را تحت تشابهی به معادلات

$$x' = ۲[(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})x - (\frac{۱}{\sqrt{۱۰}})y + ۵]$$
$$y' = ۲[(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}})x + (\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})y + ۲]$$

بیابید.

۱۲. به طور تحلیلی ثابت کنید اگر دو خط متقاطع باشند، تصاویر تحت تشابه شان نیز متقاطع اند.

۱۳. آیا مجموعهٔ بسط هایی با یک نقطهٔ لایتغیر، مفروض گروه تبدیلات است؟

۱۴. به طور تحلیلی ثابت کنید که تصویر سهمی $y = ax^۲$ تحت بسطی با نقطهٔ لایتغیر (۰،۰) یک سهمی است.

۱۵. اثبات قضیهٔ ۲.۱۱ را در مورد حالت خاصی که در آن O ، P ، Q واقع بر یک استقامت‌اند تعدیل کنید.

۱۶. مشروح اثبات قضیهٔ ۲.۱۲ را، با بررسی امکان این که P با O و Q بر یک استقامت واقع باشد، تکمیل کنید.

۱۷. چند تشابه متفاوت قطعه خط خاص $\overline{AB}$ را به تصویر خاص $\overline{A'B'}$ اش می‌برد؟ برای اثبات صحت پاسخ تان از قضیهٔ ۲.۱۰ استفاده کنید.

I۱۸. طبق قضیهٔ ۲.۱۰، یک تشابه سطحی، در صورتی که رئوس یک مثلث و رئوس تصویر مثلث اش را بشناسیم، به طور منحصر به فردی تعیین می‌شود. برای ملاحظهٔ این که می‌توانید معادلات این تشابه را به دست آورید یا نه، مثالی خاص به دست دهید، و در مورد رئوس دو مثلث متشابه مزبور از مختصات استفاده کنید.

تمرینات مروری فصل

فصل ۲

۱. فرض می‌کنیم $f = \{(۲،۳)، (۱،۷)، (۵،۶)\}$ و $g = \{(۳،۱)، (۷،۵)، (۶،۲)\}$ باشد. fg و gf را بیابید.

۲. نقطه‌ای را بیابید که تحت انتقالی با بردار [۳،۲-،۴] دارای تصویر (۳،۱،۶) است.

در تمرینات ۳ ـ ۵، با استفاده از ضرب ماتریسی، تصویر نقاط مفروض را تحت تبدیل موصوف بیابید. شکل اصلی و شکل تصویر را بر محورهای یکسان رسم کنید.

۳. قطعه خطی با دوسر (۳،۷)، (۵،۱۳) تحت تقارنی نسبت به خط $y = x$

۴. مثلثی به رئوس (۲،۱)، (۵،٦)، (۳،۹) تحت دوران ۱۸۰°

۵. چهار ضلعی ای با رئوس (۱،۱)، (۳،۲)، (۴،۷)، (۲،۵) تحت برشی با ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

٦. اعضای گروه تبدیل چیست؟

۷. مثالی از هندسهٔ متناهی تقارنات مثلث متساوی الاضلاع از زیر گروهی با دقیقاً دو عضو به دست دهید.

۸. در مجموعهٔ تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع، چند عضو از شش عضو آن معکوس خوداند.

۹. از علامت تبدیل در یافتن حاصل ضرب (۲۴۰) R_1R در مورد تقارنات مثلث متساوی‌الاضلاع استفاده کنید. رئوس آغاز کننده در این کار ۱،۲،۳ در جهت مثلثاتی اند.

۱۰. فرض می‌کنیم F تبدیلی چنان که x دارای تصویر x^2، و G تبدیلی چنان که x دارای تصویر $x+۲$ باشد. حاصل ضرب FG را بیابید.

۱۱. تصویر خط $x + y = ٦$ را تحت انتقالی با بردار [۲،۴] را بیابید.

۱۲. تصویر خط $۲x - y = ۵$ را تحت تقارنی نسبت به محور x ها بیابید.

۱۳. کدام دو نوع از چهار نوع حرکت صفحه نقاط لایتغیر ندارند؟

۱۴. کمترین تعداد نقاط، هر سه نقطه شان غیر واقع بر یک استقامت، یک صفحه که باید تحت حرکتی به طوری که آن حرکت عینیت باشد لایتغیر بماند، چیست؟

۱۵. تصویر (۲،۰) را تحت تقارن نسبت به خط $y = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)x$ بیابید.

۱٦. تصویر نقطهٔ (۳،۴،۵) را در تقارنی نسبت به صفحه $y = -۴$ به دست آورید.

۱۷. در تشابه سطحی ای با نسبت $\frac{۳}{۲}$ مساحت تصویر مثلثی را، که مساحت اصلی‌اش یک واحد است، بیابید.

در تمرینات ۱۸ ـ ۲۵، آیا مجموعهٔ تبدیلات گروه تبدیلات است؟

۱۸. حرکات صلب صفحه
۱۹. حرکات سطحی معکوس
۲۰. جمیع انتقالات سطحی به نمایش آمده با برداری به طول یک سانتی متر یا بلندتر
۲۱. جمیع انتقالات سطحی به نمایش آمده با برداری به طول یک سانتی متر یا کوتاه‌تر
۲۲. جمیع تشابهات واقع در یک صفحه
۲۳. جمیع تشابهاتی که حرکت نیستند
۲۴. جمیع تشابهات سطحی با نسبتی برابر یا کمتر از ۱
۲۵. جمیع بسط های حول نقطه‌ای مفروض

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان از هر مجموعهٔ تمریناتی که قبلاً از مجموعه‌های تمرینات پیشین این فصل معین نشده‌اند انتخاب کرد.

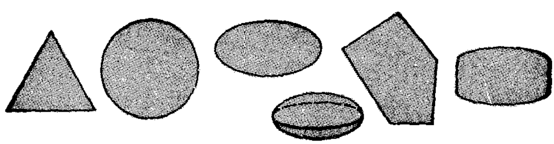
۳

تحدب

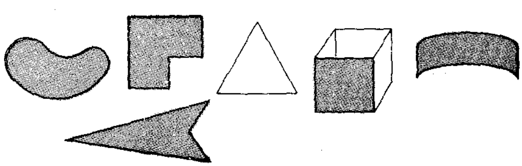
۳.۱ مفاهیم اساسی

بررسی تحدب قسمت مهمی از تحقیقات جاری در مورد هندسهٔ اقلیدسی جدید است. در این فصل، خواص متعارفی که بعضی از مجموعه های آشنای نقاط با جمیع مجموعه های محدب در آن ها مشترک اند به غنای بعضی از مفاهیم اساسی هندسهٔ اقلیدسی می‌پردازند و به کاربردهایی که مهم شان خواهید یافت می‌انجامند.

کلمات محدب[1] و تحدب[2] در خارج از ریاضیات نیز متداول اند. محدب به مفهوم انحنا به طرف خارج است، و فی‌المثل، یک عدسی محدب برآمده به بیرون است. خوشبختانه، استفاده از کلمهٔ محدب در توصیف مجموعه های خاص نقاط در ریاضیات تنها بازگویی محتاطانه‌ای از این معنی متداول است. در این مورد، برای کشف تفاوت اساسی بین



(a) مثال‌هایی از مجموعه های محدب



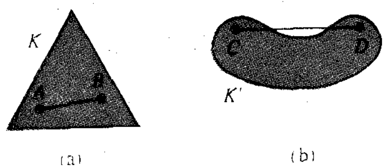
(b) مثال هایی از مجموعه های نامحدب

شکل ۳.۱

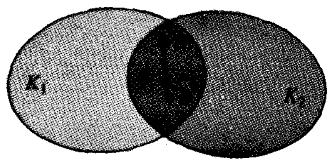
---

1. Convex

2. Convexity



شکل ۳.۲



شکل ۳.۳

مجموعه‌های محدب نقاط و مجموعه های نامحدب، به بررسی قسمت های a و b ی شکل ۳.۱ می‌پردازیم. مثال واقع در راست ترین قسمت شکل a ۳.۱ به شکل عدسی محدب‌الطرفین در نورشناسی است، در حالی که آخرین مثال واقع در راست ترین قسمت شکل b ۳.۱ ترکیب عدسی محدب مقعر را داراست.

در یک مجموعهٔ محدب نقاط، چون K در شکل a ۳.۲، هر قطعه خط با دو سر A و Bی واقع در آن مجموعه به تمامی در آن مجموعه قرار می‌گیرد. این موضوع در مورد جمیع نقاط واقع در مجموعهٔ نامحدب شکل b ۳.۲ صادق نیست. فی‌المثل، $\overline{CD}$ شامل نقاط خارج مجموعهٔ K' است.

علامت $\subseteq$ به معنی «زیرمجموعهٔ ... است». علامت $\subset$ به معنی «زیرمجموعهٔ حقیقی... است» می‌باشد.

تعریف. مجموعهٔ محدب[3] مجموعه نقاط Kای چنان است که اگر A و B دو نقطه دلخواه واقع در K باشند، در این صورت $\overline{AB} \subseteq K$ است.

تعریف فوق از مجموعهٔ محدب شامل بسیاری از مجموعه های نقاط متداول مورد بررسی هندسهٔ اقلیدسی است. مثال های آن عبارت‌اند از نواحی دایروی، بعضی از نواحی چندضلعی شکل، پاره خط ها، زاویه‌ای (با اندازهٔ کمتر از π) و داخل آن، و ناحیهٔ کروی.

---

3. Convex Set

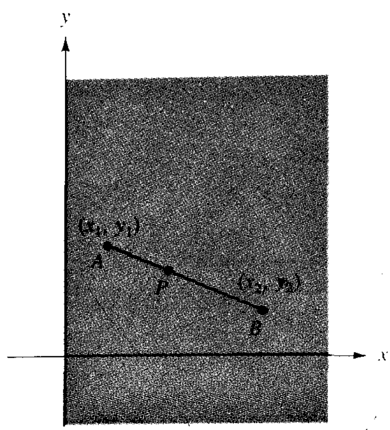
مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ شامل نقطه‌ای فرد نیز بنا به توافق محدب است.

نشان دادن تحدب یک مجموعهٔ خاص با استفاده از تعریف فوق همواره آسان نیست، و در این مورد علاوه بر قضیهٔ ۳.۱، که می‌آید، اغلب از هندسهٔ تحلیلی فایده می‌گیریم. در این مرحله و سایر مراحل این فصل فرض مان، جز در مواردی که نقیض آن را بگوییم، بر این است که متغیرات مختصات نقاط اعضای مجموعهٔ اعداد حقیقی اند.

قضیهٔ ۳.۱. اشتراک* دو مجموعهٔ محدب مجموعه‌ای محدب است.

اثبات: در شکل ۳.۳، فرض می‌کنیم K_1 و K_2 دو مجموعهٔ محدب دلخواه و S اشتراک‌شان باشد. به ازای $A, B \in S$، جمیع نقاط $\overline{AB}$، به علت این که K_1 محدب است، اعضای K_1 اند. جمیع نقاط $\overline{AB}$ اعضای K_2 نیز می‌باشند، زیرا این مجموعه نیز محدب است. در نتیجه، $\overline{AB} \subseteq (K_1 \cap K_2)$؛ بنابراین $K_1 \cap K_2$ محدب است.

قضیهٔ ۳.۱، چون در تمرین ۳ از تمرینات ۳.۱، می‌توان به بیش از دو مجموعه تعمیم داد. از این قضیه می‌توان در نشان دادن تحدب بعضی از مجموعه های متعارف نقاط استفاده برد. فی المثل، زاویه‌ای (به اندازهٔ کمتر از π) و داخلش را می‌توان به صورت تقاطع دو نیم صفحه، که محدب بودن شان به آسانی نشان داده می‌شود، تعریف کرد، و بنابر آن قضیهٔ ۳.۱ را به کار برد.



شکل ۳.۴

* تقاطع

تقرب دیگر اثبات محدب بودن مجموعه های نقاط استفاده از هندسهٔ تحلیلی است.
این تقرب را می‌توان حتی در مورد نیم صفحه به کار برد.

مثال. فرض می‌کنیم S مجموعهٔ نقاطی با مختصات (x,y) چنان باشد که $x>0$. نشان دهید که S یک مجموعهٔ محدب سطحی است.

فرض می‌کنیم $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دونقطهٔ دلخواه از S، چنانکه درشکل ۳.۴ نشان داده شده، چنان باشند که $x_1>0$ و $x_2\geq x_1$. دراین‌صورت به ازای هر نقطهٔ $P(x,y)$ از $\overline{AB}$، $x_2 \geq x \geq x_1$، و در نتیجه $x>0$ و $\overline{AB}\subset S$ است، بنابراین S بنابه‌تعریف محدب‌است.

افتخار آغاز منظم بررسی مجموعه های محدب در اوایل قرن بیستم به اچ. برون[4] و اچ. مین کوسکی[5] داده شده است. کار ۱۹۳۴ تی. بن سن[6] و دبلیو. فن شل[7] به نام
Theorie der konvexen Körper
پیشرفت بیشتری در این کار را نشان داد. طی سال های دهٔ ۱۹۴۰ و دهٔ ۱۹۵۰ موارد استعمال بسیاری، مخصوصاً در زمینهٔ بهینه سازی[8] مورد بررسی قرار گرفت، و جلد هفتم خلاصهٔ مذاکرات کنفرانس های ریاضیات محض[9] نشریهٔ حاصل از کنفرانس راجع به تحدب ۱۹۶۳ با نظارت انجمن ریاضی آمریکا[10] بود. تحدب هم اکنون نیز به زمینه ای برای تحقیقات جاری هندسه بودن ادامه می‌دهد.

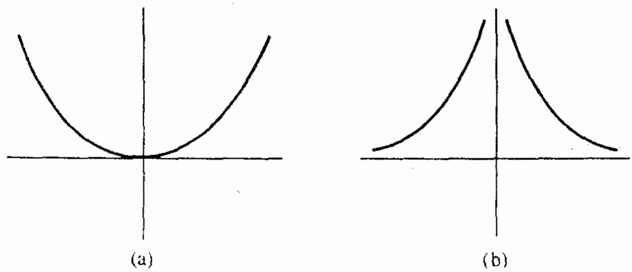
پیش از جستجوی خواص پیچیده‌تر مجموعه های محدب، لازم است که به معرفی چند مفهوم اساسی هندسهٔ جدید که هم در این جا و هم در فصول بعدی مفیداند بپردازیم.
به خاطر بیاورید که تابع $y = f(x)$ در $x = a$ متصل است اگر و تنها اگر، با مفروض بودن $\varepsilon>0$، δ ئی چنان موجود باشد که

$$\text{اگر } |x-a|<\delta \text{ ، } |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

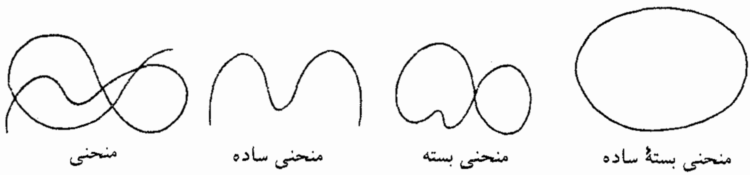
یک تابع در صورتی که درهر نقطه از دامنه‌اش متصل باشد، متصل است.

---

4. H. Brunn
5. H. Minkowski
6. T. Bonnesen
7. W. Fenchel
8. Optimization
9. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume VII
10. American Mathematical Society



شکل ۳.۵



شکل ۳.۶

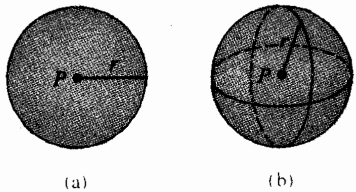
فی المثل، تابع واقع در شکل a ۳.۵ متصل است، در حالی که تابع شکل b ۳.۵ چنین نیست.

یک منحنی مسطح[11] نمودار مجموعهٔ معادلات به صورت $x = f(t)$، $y = g(t)$ ی توابع متصل بر فاصلهٔ I ای، از مجموعهٔ اعداد حقیقی R، f و g است. این منحنی تصویر گسترشی از I به صفحه مان است. در صورتی که این گسترش یک به یک باشد، منحنی مان یک منحنی ساده[12] است. در صورتی که نقاط $(f(a),g(a))$ و $(f(b),g(b))$ ی، متناظر با دو نقطهٔ انتهایی معرف فاصلهٔ $[a,b]$ یکی باشند، منحنی مان منحنی‌ای بسته[13] است. در صورتی که منحنی مان هم ساده هم بسته باشد، به منحنی بستهٔ ساده[14] موسوم است. به طور شهودی، راجع به منحنی بستهٔ ساده به عنوان منحنی ای که آغاز و انجامش نقطه‌ای یکسان است اما خودش را قطع نمی‌کند می‌اندیشیم؛ به این ترتیب، در مورد آن تنها یک داخل موجود است (شکل ۳.۶ را ملاحظه کنید). مجموعهٔ نقاط واقع بر و داخل در یک منحنی بستهٔ ساده یا زاویه‌ای واقع در یک صفحه را ناحیهٔ مسطح[15] می‌نامیم.

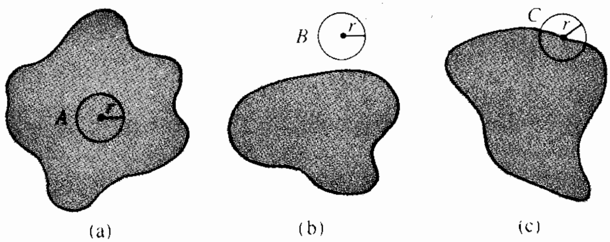
تعاریف دقیق نقاط داخلی، خارجی، و مرزی مجموعهٔ نقاطی چون یک ناحیهٔ مسطح به مفهوم همسایگی یک نقطه بستگی دارد.

---

11. Plane Curve
12. Simple Curve
13. Closed Curve
14. Simple Closed Curve
15. Plane Region



شکل ۳.۷



شکل ۳.۸

تعریف

درفضای دوبعدی: همسایگی دایروی باز[16] به شعاع r نقطهٔ P مجموعهٔ نقاط داخل دایرهٔ به مرکز P و شعاع r است. (شکل ۳.۷ a را ملاحظه کنید.) این تعریف را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$N(P,r) = \{A: PA < r\}$$

در فضای سه بعدی: همسایگی کروی باز[17] به شعاع r نقطهٔ P مجموعهٔ نقاط در فضای داخل کرهٔ به مرکز P و شعاع r است. (شکل ۳.۷ b را ملاحظه کنید.) این تعریف را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$N(P,r) = \{A: PA < r\}$$

در فضای دو یا سه بعدی: همسایگی بسته[18] شامل نقاط واقع بر دایره یا کرهٔ مزبور علاوه بر نقاط داخل آن. تعریف همسایگی بسته، با استفاده از علامات محموعه‌ای، عبارت است از:

$$N[P,r] = \{A: PA \le r\}$$

---

16. Open Circular Neighborhood
17. Open Spherical Neighborhood
18. Closed Neighborhood

همسایگی های باز و بسته هر دو مجموعه های محدب نقاط اند.

تعریف. P نقطهٔ داخلی*[19] مجموعهٔ S است اگر و تنها اگر عدد حقیقی مثبت r ی چنان موجود باشد که $N(P,r) \subseteq S$.

تعریف فوق از لحاظ شهودی به این معنی است که یک نقطه نقطهٔ داخلی یک مجموعه است اگر هر نقطهٔ به قدر کافی نزدیک به آنی عضوی از آن مجموعه باشد. فی المثل، نقطهٔ A در شکل ۳.۸ a نقطه‌ای داخلی است. مجموعهٔ نقاط داخلی یک مجموعه را مجموعهٔ داخل[20] آن مجموعه می‌نامیم.

علامت $\sim S$ به معنی «نه S»، یا متمم[21] S است.

تعریف. P نقطهٔ خارجی** مجموعهٔ S است اگر و تنها اگر عدد حقیقی مثبت r ی چنان موجود باشد که $N(P,r) \subseteq \sim S$.

نقطه‌ای نقطهٔ خارجی یک مجموعه است اگر هر نقطهٔ به قدر کافی نزدیک به آنی عضوی از متمم آن مجموعه باشد. در مورد مجموعهٔ نقاط $x^2 + y^2 < 1$ خارج $x^2 + y^2 > 1$ است. نقطهٔ B نقطه‌ای خارجی در شکل ۳.۸ b است. مجموعهٔ نقاط خارجی یک مجموعه را مجموعهٔ خارج[22] آن مجموعه می‌نامیم.

نقطه‌ای که نه داخل و نه خارج یک مجموعه است به نقطهٔ مرزی[23] موسوم است. مجموعهٔ نقاط مرزی یک مجموعه را مجموعهٔ مرز[24] آن مجموعه می‌نامیم. توجه داشته باشید که اگر P نقطهٔ مرزی S باشد، نقطهٔ مرزی متمم S نیز هست.

در مورد مجموعهٔ $x^2 + y^2 < 1$، مرز $x^2 + y^2 = 1$ است. در شکل ۳.۸ c نقطهٔ C نقطه‌ای مرزی است. مرز یک نیم صفحه خط تعیین کنندهٔ آن نیم صفحه است. یک منحنی بستهٔ ساده مرز مجموعهٔ نقاط داخل آن است.

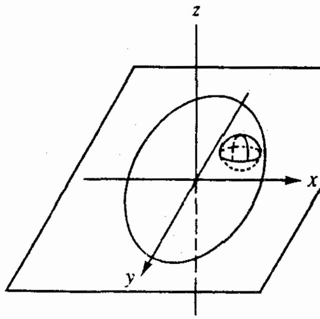
باید دریافت که نقاط مرزی یک مجموعه ممکن است اعضای آن مجموعه باشند یا

---

* درونی

** برونی

19. Interior Point
20. Interior
21. Complement
22. Exterior
23. Boundary Point
24. Boundary



شکل ۳.۹

نباشند. نکتهٔ مهم در این مورد این است که، برای تشخیص این که نقطه‌ای داخلی، خارجی، یا مرزی است، لازم است که تعداد ابعاد را در نظر داشته باشیم. فی المثل، در شکل ۳.۹، $\{(x,y,0): x^2 + y^2 \leq 1\}$ در فضای سه بعدی نقطهٔ داخلی ندارد، و هر نقطهٔ این مجموعه، از آن جا که هر همسایگی کروی هر نقطهٔ این مجموعه هم شامل نقاط خود مجموعه و هم شامل نقاط متمم آن است، نقطه‌ای مرزی است.

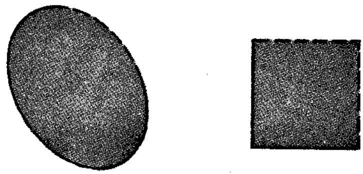
طبقه بندی نقاط یک مجموعه به عنوان داخلی، خارجی، یا مرزی منجر به طبقه‌بندی‌های مفید خود مجموعه ها می‌شود.

تعریف. مجموعهٔ باز تنها نقاط داخلی دارد.

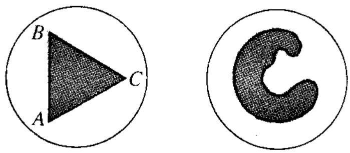
هر همسایگی باز، از آن جا که مجموعهٔ داخل هرمنحنی بستهٔ ساده‌ای است، مجموعه‌ای باز است.

تعریف. مجموعهٔ بسته شامل جمیع نقاط مرزی خویش است.

مثال های مجموعه های بسته عبارت‌اند از: $x^2 + y^2 \leq 1$، نواحی چند ضلعی شکل (چند ضلعی ها و داخل های آن‌ها)، و قطعه خط مثلا $\overline{AB}$. ملاحظهٔ این مطلب مهم است که تعاریف مجموعه‌های باز و بستهٔ فوق نه متقابلاً مانع‌اند، نه جامع جمیع مجموعه های ممکن نقاط‌اند. یک مجموعه ممکن است هم باز هم بسته یا نه باز نه بسته باشد. مثالی از مجموعه‌ای که هم باز هم بسته است کل صفحه است. این مجموعه از آن جا که بی‌مرز است، جامع جمیع نقاط مرزی خویش است، و در همان حال، جمیع نقاطش نقاط داخلی‌اند. مثال‌هایی از مجموعه‌هایی که نه باز نه بسته‌اند در شکل ۳.۱۰ آورده‌شده‌اند. در این شکل قسمت خط‌چین مرزها را جزء مجموعهٔ مربوطه درنظر نگرفته‌ایم.



شکل ۳.۱۰



شکل ۳.۱۱

تعریف. مجموعهٔ کران دار[25] در فضای دو بعدی مجموعه‌ای است که زیرمجموعهٔ ناحیه‌ای دایروی است. در فضای سه بعدی، مجموعهٔ کران‌دار زیر مجموعه‌ای از ناحیه‌ای کروی است.

در شکل ۳.۱۱ بعضی از مجموعه های کران دار را نشان داده‌ایم. مجموعه های کران‌دار نمی‌توانند به طور نامعین گسترش یابند. به عنوان مثال، سهمی $y = x^2$ مجموعهٔ کران دار نیست زیرا هیچ دایره‌ای نمی‌تواند مجموعهٔ نقاط آن را احاطه کند. مفهوم مجموعهٔ کران دار را نباید با مرز مجموعه اشتباه کرد.

تمرینات ۳.۱

۱. کدام یک از مجموعه های زیر محدب‌اند؟

a. یک زاویه
b. یک ناحیهٔ مستطیل شکل
c. داخلی از بیضوی
d. خطی مستقیم
e. نقطه‌ای منفرد
f. یک شعاع
g. ناحیه ای مثلث شکل
h. یک مثلث

25. Bounded Set

۲. کدام یک از مجموعه های زیر محدب‌اند؟

a. ناحیه‌ای دایروی با حذف نقطه‌ای از مرز آن

b. ناحیه‌ای مستطیل شکل با رأسی محذوف

c. ناحیه‌ای مستطیل شکل با حذف نقطه‌ای غیر رأس از مرز آن

d. ناحیه‌ای دایروی با حذف نقطه‌ای داخلی

۳. ثابت کنید که اشتراک هر دسته مجموعهٔ محدب مجموعه‌ای محدب است.

۴. آیا هیچ گاه اجتماع دو مجموعهٔ محدب مجموعه‌ای محدب می‌شود؟ آیا همواره مجموعه‌ای محدب است؟

۵. ثابت کنید که یک ناحیهٔ مثلث شکل مجموعه‌ای محدب است.

٦. به طور تحلیلی نشان دهید که $S = \{(x,y): x > ۳\}$ مجموعه‌ای محدب است.

۷. به طور تحلیلی نشان دهید که $T = \{(x,y): x > ۳$ و $y > ۴\}$ مجموعه‌ای محدب است.

۸. تعریفی در مورد همسایگی یک بعدی به دست دهید.

۹. در مورد هر یک از مجموعه های مسطح زیر مجموعهٔ داخل، مرز و خارج را توصیف کنید.

a. $\{(x,y): x^۲ + y^۲ \leqq ۱\}$

b. $\{(x,y): y > x^۲\}$

c. $\{(x,y): y < |x|\}$

d. $\{(x,y): x^۲ + \frac{y^۲}{۴} \leqq ۱\}$

e. $\{(x,y):$ اعداد صحیح‌اند y و x$\}$

f. $\{(x,y):$ اعداد مُنطق‌اند* y و x$\}$

۱۰. در مورد هر یک از مجموعه های نقاط در فضای زیر مجموعه های داخل، مرز، و خارج را توصیف کنید.

a. $\{(x,y,z): x^۲ + y^۲ + z^۲ \leqq ۱\}$

b. $\{(x,y,۰): x^۲ + y^۲ \leqq ۹\}$

c. $\{(x,y,۰): x > y\}$

d. $\{(x,y,۰): x = ۲\}$

۱۱. مجموعه های زیر را به صورت باز، بسته، هیچ یک، یا هر دو طبقه بندی کنید.

a. مجموعهٔ جمیع نقاط با مختصات منطق واقع بر یک محور عددی

b. مجموعهٔ جمیع نقاط واقع بر یک محور عددی در فاصلهٔ $[۰،۱]$

c. مجموعه های تمرین ۹

d. مجموعه های تمرین ۱۰

e. ناحیه‌ای مستطیل شکل با حذف یک رأس آن

---

* گویا

۱۲. کدام یک از مجموعه های هر یک از موارد زیر کران دار است؟

a. مجموعه های تمرین ۹ — b. مجموعه های تمرین ۱۰

۱۳. ثابت کنید که مرز یک مجموعهٔ نقاط مرز متمم آن مجموعه نیز هست.

۱۴. ثابت کنید که متمم یک مجموعهٔ بسته باز است.

۱۵. در مورد متمم مجموعه‌ای که نه بسته و نه باز است چه می‌توان گفت؟

۱٦. مثالهایی از (a) مجموعهٔ کران داری که شامل مرز خویش نیست و (b) مجموعه ای که شامل مرز خویش هست اما کران دار نیست، به دست دهید.

۱۷. آیا اشتراک دو مجموعهٔ بسته همیشه مجموعه‌ای بسته است؟ ثابت کنید که پاسخ تان صحیح است.

۱۸. ثابت کنید که هر مجموعهٔ محدب یک بعدی یک پاره خط، یک شعاع، یا یک خط است.

۱۹. ثابت کنید اگر P و Q نقاط مرزی مجموعه‌ای محدب باشند، در این صورت هیچ نقطهٔ $\overline{PQ}$ نمی‌تواند نقطهٔ خارجی این مجموعه باشد.

۲۰I. معادلاتی خاص و مقادیری عددی را به عنوان مثال هایی در توضیح مفاهیم همسایگی دایروی باز، همسایگی کروی باز، همسایگی بسته، نقطهٔ داخلی، و نقطهٔ خارجی در نظر بگیرید.

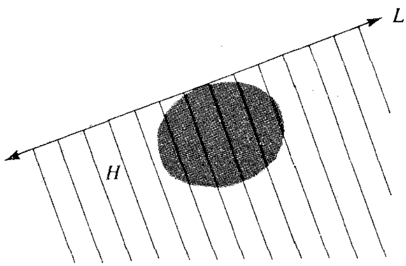
۳.۲ مجموعه های محدب و خطوط پشتیبان

اکنون، با استفاده از مفاهیم اساسی مجموعه های محدب معرفی شده در بخش ۳.۱، امکان دارد که به جستجوی بعضی از دیگر مفاهیم وابسته با مجموعه های محدب بپردازیم. در این بخش، فرض بر این است که هندسه مورد بررسی هندسهٔ فضای دو بعدی[26] است. در این مورد یکی از مفاهیم مخصوصاً مهم در بحث مجموعه های محدبی که در سایر مجموعه‌های نقاط نیز کاربرد دارد، مفهوم خط پشتیبان است.

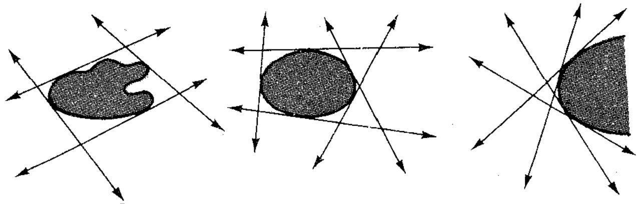
تعریف. خط پشتیبان[27] یک مجموعهٔ دو بعدی با نقاط داخلی، خط گذرنده از حداقل یکی از نقاط مرزی آن مجموعه و چنان است که جمیع نقاط آن مجموعه در یک نیم صفحهٔ بسته‌ای که توسط آن خط تعریف شده واقع شوند.

---

26. Geometry of Two-Space — 27. Supporting Line



(a)



(b)

شکل ۳.۱۲

شکل a ۳.۱۲ خط پشتیبان L و نیم صفحهٔ بستهٔ H شامل مجموعهٔ مربوطه را نشان می‌دهد. شکل b ۳.۱۲ سه مثال از مجموعه، همراه با چندین خط پشتیبان در مورد هر یک را نشان می‌دهد.

اثبات قضیهٔ بعدی به توصیف دیگری از خطوط پشتیبان مجموعه های دو بعدی محدب با نقاط داخلی می‌انجامد.

قضیهٔ ۳.۲. خطی خط پشتیبان یک مجموعهٔ محدب نقاط است که حداقل از یکی از نقاط مرزی آن مجموعه، اما نه از نقاط داخلی آن، بگذرد، و برعکس.

در اثبات یک قضیه و عکس آن، باید دو گزارهٔ جداگانه را اثبات کنیم. قضیهٔ ۳.۲ شامل دو گزارهٔ شرطی است:

a. اگر خطی از حداقل یک نقطهٔ مرزی مجموعهٔ مورد بحث بگذرد اما شامل هیچ نقطهٔ داخلی ای نباشد، در این صورت آن خط خط پشتیبان آن مجموعهٔ محدب نقاط است.

b. اگر خطی خط پشتیبان مجموعهٔ محدب نقاطی باشد، در این صورت شامل حداقل یک نقطهٔ مرزی آن مجموعه، اما هیچ نقطهٔ داخلی آن، است.

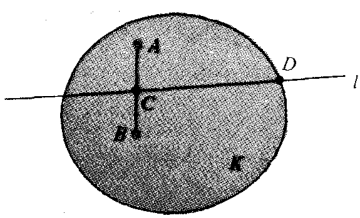
هر گزارهٔ شرطی با سه شرطی دیگر در ارتباط است: عکس مستوی[28]، قلب[29]، و عکس نقیض[30]. گزاره‌های فوق را از لحاظ علامتی به صورت زیر نشان می‌دهیم:

گزارهٔ شرطی اصلی	$p \to q$
عکس مستوی*	$q \to p$
قلب	$\sim p \to \sim q$
عکس نقیض	$\sim q \to \sim p$

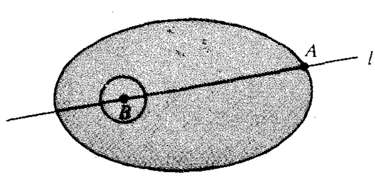
گاهی، به خصوص در هندسه، اثبات قلب و/ یا عکس نقیض آسان‌تر از صورت دیگر گزارهٔ شرطی است. گزارهٔ شرطی و عکس نقیض آن منطقاً معادل‌اند. نیز عکس مستوی و قلب یک شرطی چنین‌اند. اثبات قضیهٔ «اگر و تنها اگر» مانند اثبات یک قضیه و عکس آن است. اثبات $p \to q$ و $q \to p$ به اثبات تعادل $p \leftrightarrow q$ می‌شود. در اثبات یک گزارهٔ شرطی و عکس آن می‌توان هر یک از ازواج گزاره های زیر را اثبات کرد:

(شرطی، عکس) (شرطی، قلب) (عکس نقیض، قلب) (عکس نقیض، عکس)

اثبات: برای اثبات قضیهٔ ۳.۲، ساده‌ترین کار اثبات عکس نقیض و قلب شرطی a، که معادل شرطی b است، می‌باشد.



شکل ۳.۱۳



شکل ۳.۱۴

---

28. Converse
29. Inverse
30. Contrapositive

* معمولاً به جای عکس مستوی از عکس استفاده می‌کنند.

عکس نقیض

اگر خطی خط پشتیبان یک مجموعهٔ محدب در فضای دو بعدی نباشد اما شامل نقطه‌ای مرزی باشد، در این صورت شامل نقطه‌ای داخلی هست.

اثبات: اگر l خط پشتیبان نباشد، همچنان که در شکل ۳.۱۳ نیست، در این صورت نقاط داخلی A و B از مجموعهٔ K را می‌توان در نیم‌صفحه‌های متفاوت تشکیل شده توسط l یافت. اشتراک $\overline{AB}$ و l تهی نیست. اما C ، از آن جا که K محدب است و A و B نقاطی داخلی‌اند، نقطه‌ای داخلی از مجموعهٔ K است. تمرین ۱۸، تمرینات ۳.۲، را ملاحظه کنید.

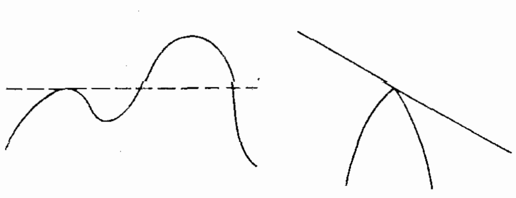
قلب

اگر خطی شامل حداقل یک نقطهٔ مرزی، نیز نقاطی داخلی باشد، در این صورت خط پشتیبان مجموعهٔ محدب در فضای دو بعدی مربوطه نیست.

اثبات: فرض می‌کنیم l، همان‌گونه که در شکل ۳.۱۴، شامل نقطهٔ مرزی A و نقطهٔ داخلی B باشد. همسایگی B ای، N(B،e) ، شامل نقاط داخلی موجود است. اما همسایگی مزبور شامل نقاطی واقع در هر دو نیم صفحهٔ تشکیل شده از l است؛ در نتیجه، l خطی پشتیبان نیست.

مفهوم خط پشتیبان به طور تنگاتنگی با مفهوم آشناتر مماس[31] در ارتباط است. از لحاظ حساب جامع و فاضل*، مفهوم مماس بر یک منحنی خط قاطع آن منحنی در یک نقطه و دارای همان ضریب زاویه‌ای منحنی مزبور در آن نقطه است. اما همان طور که شکل ۳.۱۵ نشان می‌دهد، خطوط پشتیبان و مماس ها لزوماً یک چیز نیستند.

مفهوم مماس، چنان که در مجموعه های محدب به کار می‌رود، به گونه‌ای متفاوت از مفهوم به کار رفتهٔ آن در حساب جامع و فاضل است.

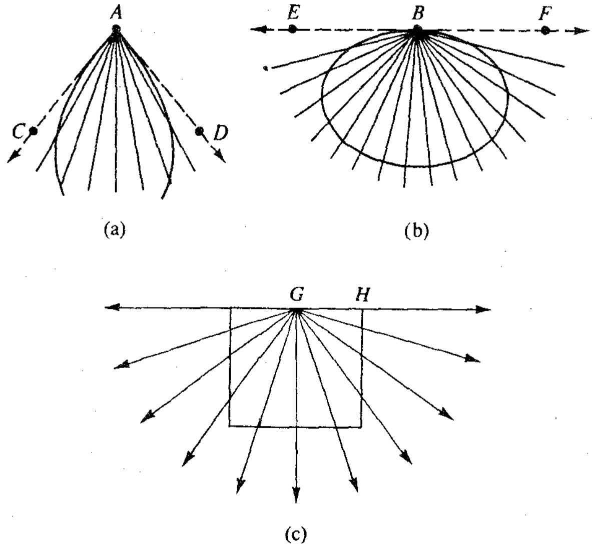


(b) خط پشتیبانی که مماس نیست (a) مماسی که خط پشتیبان نیست

شکل ۳.۱۵

31. Tangent

* انتگرال و دیفرانسیل



شکل ۳.۱٦

تعریف. مخروط مماس[۳۲] یک نقطهٔ مرزی از یک مجموعهٔ محدب، مجموعهٔ جمیع شعاع‌هایی است که: (۱) نقطهٔ مرزی مزبور را به عنوان نقطهٔ آغاز دارند و (۲) دارای نقاط دیگری از آن مجموعهٔ محدب یا مرز آن نیز هستند.

شکل ۳.۱٦ سه مخروط مماس را نشان می‌دهد. $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ در شکل ۳.۱٦ a مرزهای مخروط مماس مربوطه‌اند. (علامت $\overrightarrow{AC}$ به معنی شعاع AC است.) خود این مرزها شعاع‌های مخروط مماس نیستند. مرزهای مخروط مماس نیم‌مماس[۳۳] نامیده می‌شوند. $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$، در شکل ۳.۱٦ a، نیم مماس‌اند. $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BF}$، در شکل ۳.۱٦ b، نیم مماس و واقع بر یک استقامت‌اند.

تعریف. خطی مماس به یک مجموعهٔ محدب در یک نقطه است که اجتماع دو نیم مماس واقع بر یک استقامت باشد.

از شکل ۳.۱٦، یا از بررسی تعریف مماس، باید واضح شده باشد که مماس در بعضی

---

32. Tangent Cone

33. Semitangent

از نقاط مرزی یک مجموعهٔ محدب موجود است و در بعضی نیست. در این صورت امکان دارد که نقاط مرزی یک مجموعهٔ محدب را، بر این مبنا که بر منحنی آن مماس مشخص شده‌ای در آن نقطهٔ مرزی موجود است یا نه، به صورت نقاط منظم یا گوشه‌ای[34] طبقه‌بندی کنیم. بنابراین در هر نقطهٔ منظمی مماسی موجود است. در شکل ۳.۱۶، A و H نقاط گوشه‌ای اند، در حالی که B و G نقاط منظم می‌باشند. مثال های دیگری از نقاط گوشه‌ای رئوس یک ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب است. از طرف دیگر، جمیع نقاط واقع بر یک دایرهٔ واقع بر مرز آن ناحیهٔ دایروی نقاطی منظم‌اند.

یکی از دلایل اصلی معرفی مفهوم خط پشتیبان این است که این خط می‌تواند در تمیز یک مجموعهٔ محدب از مجموعه‌ای نامحدب به‌کار رود.

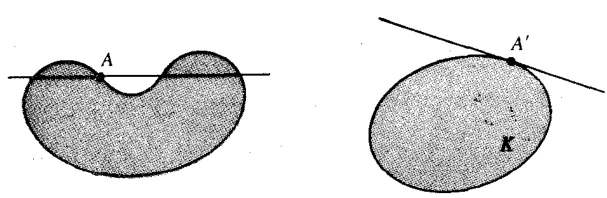
قضیهٔ ۳.۳. مجموعهٔ داخل یک منحنی بستهٔ ساده مجموعه‌ای محدب است اگر و تنها اگر از هر نقطهٔ آن منحنی حداقل یک خط پشتیبان مجموعهٔ داخل مزبور بگذرد.

شکل ۳.۱۷ به توضیح شهودی مفهوم قضیهٔ ۳.۳ کمک می‌کند. اگر مجموعه‌ای محدب نباشد، در این صورت نقاطی (چون A) بر مرز این مجموعه چنان موجوداند که هر خط گذرنده از A شامل نقاط داخلی آن باشد. از هرنقطهٔ A' واقع بر مرز یک مجموعهٔ محدب، حداقل یک خط، که شامل هیچ نقطهٔ داخلی‌ای نباشد، می‌توان رسم کرد.

اثبات:

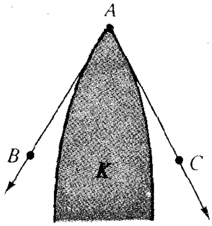
a. اگر K محدب باشد، در این صورت حداقل یک خط پشتیبان گذرنده از هر نقطهٔ مرزی A ی آن موجود است.

درشکل ۳.۱۸، فرض می‌کنیم $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نیم‌مماس‌های درنقطهٔ A باشند. اگر

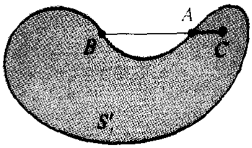


شکل ۳.۱۷

34. Regular Points or Corner Points



شکل ۳.۱۸



شکل ۳.۱۹

اندازهٔ $\angle BAC$، πباشد، دراین‌صورت $\overleftrightarrow{BC}$ مماس و در نتیجه خط پشتیبان است. اگر اندازهٔ $\angle BAC$ کمتر از πباشد، در این صورت $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ هر دو خط پشتیبان‌اند، و مماسی در A موجود نیست. اگر اندازهٔ $\angle BAC$ بزرگتراز π باشد، در این صورت مجموعهٔ اصلی، برخلاف فرض شروع کارمان، محدب نیست. در این مورد تمرین ۱۶، تمرینات ۳.۲، را ملاحظه کنید.

b. اگر S' مجموعهٔ محدبی نباشد، در این صورت خط پشتیبانی در هر نقطهٔ مرزی ندارد.

این گزاره قلب گزارهٔ شرطی (a) است، و بنابراین اثبات آن اثبات قضیهٔ ۳.۳ را تکمیل می‌کند. (شکل ۳.۱۹ را ملاحظه کنید.) از آن جاکه S' محدب نیست، نقطهٔ داخلی C و نقطهٔ مرزی B را چنان می‌توان یافت که نقطهٔ مرزی A واقع بر $\overline{BC}$ باشد. $\overleftrightarrow{BC}$، از آن جاکه شامل نقاط داخلی است، خط پشتیبان نیست. هر خط دیگر گذرنده از A نقاط B و C را در نیم صفحه های مقابل دارد؛ در نتیجه، نمی‌تواند خط پشتیبان باشد. در این صورت خط پشتیبان گذرنده از A ی S' ی موجود نیست.

اگر خطی خط پشتیبان مجموعه‌ای در فضای دو بعدی باشد، نیم صفحهٔ بستهٔ تشکیل شده‌ازاین‌خط وشامل آن‌مجموعه نیم‌صفحهٔپشتیبان[35] نامیده‌می‌شود. این‌مفهوم رامی‌توان در به دست دادن خاصیت دیگری از مجموعه های محدب نیز به کار برد.

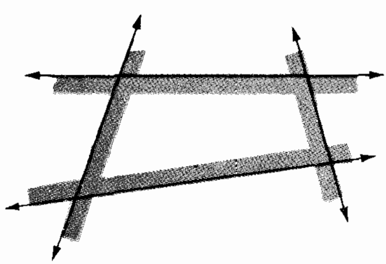
قضیهٔ ۳.۴. مجموعهٔ محدب بستهٔ مسطحی که زیرمجموعهٔ حقیقی یک صفحه است اشتراک جمیع نیم صفحه های پشتیبان خویش است.

35. Supporting Half - Plane

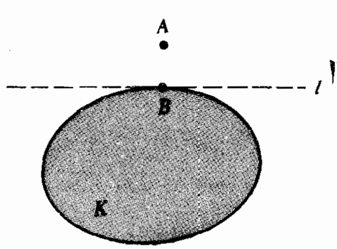
مثالی از این قضیه در مورد یک چهار ضلعی و داخلش، که چهار (نیم) صفحهٔ پشتیبان حاصل از اضلاعش را نشان می‌دهد، در شکل ۳.۲۰ نشان داده شده است.

اثبات: قضیهٔ ۳.۴ مقرر می‌کند که مجموعهٔ نقاط واقع در مجموعهٔ محدب مذکور همان مجموعهٔ نقاط واقع در اشتراک نیم صفحه های پشتیبان آن است. مناسب ترین راه اثبات یکسان بودن دو مجموعه اثبات این است که هر یک زیر مجموعهٔ دیگری است، زیرا در این صورت مجموعه ها باید دقیقاً اعضای یکسان داشته باشند. فرض می‌کنیم مجموعهٔ محدب‌مان K و اشتراک نیم صفحه های پشتیبان آن K' باشد. K، بنا به تعریف نیم صفحه های پشتیبان، زیر مجموعهٔ K' است.

اکنون فرض می‌کنیم A، چنان که در شکل ۳.۲۱، نقطه‌ای در متمم K باشد. می‌توان ثابت کرد که نقطه‌ای از K، مثلاً B، نزدیک ترین نقطهٔ K به A است. فرض می‌کنیم l خط پشتیبان K در B یی که عمود بر $\overleftrightarrow{AB}$ است باشد. در این صورت A در نیم صفحهٔ پشتیبان K ی مشخص شده با l نیست؛ بنابراین، $A \notin K'$ از آن جا که هر نقطهٔ واقع در متمم K در متمم K' نیز هست، $K' \subseteq K$، در نتیجه $K = K'$ است. در این اثبات، وجود خط پشتیبان l اثبات نشده است. در این مورد تمرین ۲۰ از تمرینات ۳.۲ را ملاحظه کنید.



شکل ۳.۲۰



شکل ۳.۲۱

تمرینات ۳.۲

در تمرینات ۱-۸، بگویید که خط مفروض خط پشتیبان مجموعهٔ داده شده هست یا نیست.

مجموعه	خط
۱. ناحیهٔ دایروی	خط گذرنده از مرکز
۲. ناحیهٔ دایروی	مماس
۳. ناحیهٔ مربع شکل	خط شامل ضلع مربع
۴. ناحیهٔ مربع شکل	خط شامل قطر مربع
۵. ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب	خط شامل یک ضلع
۶. ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب	مماس در رأس
۷. ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب	خط شامل قطر
۸. ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب	خط واصل اوساط دو ضلع

در تمرینات ۹-۱۲، نقاط منظم و نقاط گوشه‌ای هر یک از مجموعه های داده شده را توصیف کنید.

۹. ناحیهٔ دایروی
۱۰. ناحیهٔ مربع شکل
۱۱. زاویه و داخلش ـ به اندازهٔ کمتر از π
۱۲. ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب
۱۳. از قضیهٔ ۳.۴ در به وسعت دادن تعریف موارد زیر استفاده کنید:
a. ناحیه‌ای مثلث شکل　　b. ناحیه‌ای چند ضلعی شکل محدب
۱۴. سه مجموعهٔ غیرمحدب رسم کنید و نقطه‌ای بر مرز هر یک از آن ها نشان دهید که از آن هیچ خط پشتیبانی نمی‌گذرد.
۱۵. عکس مستوی، قلب، و عکس نقیض گزارهٔ شرطی دوم قضیهٔ ۳.۲ را بیان کنید.
۱۶. ثابت کنید که هر زاویهٔ داخلی یک چند ضلعی محدب اندازه‌ای کمتر از π دارد.
۱۷. ثابت کنید که مخروط مماس یک مجموعهٔ محدب در نقطهٔ مرزی خود مجموعه‌ای محدب است.
۱۸. ثابت کنید اگر A نقطهٔ داخلی مجموعهٔ محدب K و B نقطهٔ دلخواه دیگری از K باشد،

در این صورت هر نقطهٔ $\mathring{A}\mathring{B}$ ($\overline{AB}$ به استثنای نقطهٔ B) نقطهٔ داخلی K است. (راهنمایی: از قضیهٔ ۳.۳ استفاده کنید.)

۱۹. ثابت کنید اگر A و B نقاط مرزی مجموعهٔ محدب K نیز نقاط K باشند، در این صورت یا $\mathring{A}\mathring{B}$ ($\overline{AB}$ بدون دوسر آن) به طور کامل در داخل K است یا $\mathring{A}\mathring{B}$ به طور کامل در مرز K است.

۲۰. فرض می‌کنیم A نقطه‌ای در متمم K، مجموعهٔ محدب بستهٔ مسطحی که زیرمجموعهٔ حقیقی صفحه‌ای است، باشد، و فرض می‌کنیم B نزدیک ترین نقطهٔ K به A باشد. وجود خط پشتیبان K در B ای راکه عمود بر $\overline{AB}$ است اثبات کنید.

۲۱I. مثال های خاصی در نظر بگیرید و تفاوت بین مفهوم مماس و خط پشتیبان را توضیح دهید.

۳.۳ اجسام محدب در فضای دو بعدی

بسیاری از مجموعه های متعارف نقاط هندسهٔ اقلیدسی مجموعه های محدب اند. بسیاری اینان نوع خاصی از مجموعه های محدب موسوم به جسم محدب اند.

تعریف. جسم محدب[36] مجموعهٔ محدبی نقاطی است که بسته، کران دار، ناتهی[37]، و نقاط داخلی داشته باشد.

مثال های اجسام محدب شامل نواحی چند ضلعی شکل محدب و نواحی دایروی‌اند. از طرف دیگر، مجموعهٔ داخل یک سهمی، یک خط، و کل صفحه مجموعه های محدبی هستند که اجسام محدب نیستند.

قضیهٔ زیر ویژگی مهمی از جسم محدب دو بعدی به دست می‌دهد.

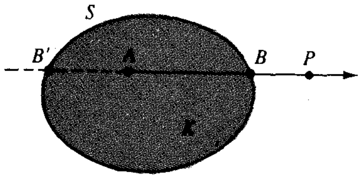
قضیهٔ ۳.۵. منحنی بستهٔ سادهٔ S و داخلش جسم محدب K ای را تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر هر خط گذرنده از نقطهٔ داخلی K ای S را دقیقاً در دو نقطه قطع کند.

a. اگر منحنی بستهٔ سادهٔ S مرز جسم محدب K باشد، در این صورت هر خط گذرنده

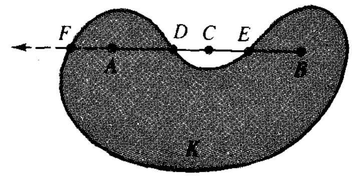
---

36. Convex Body

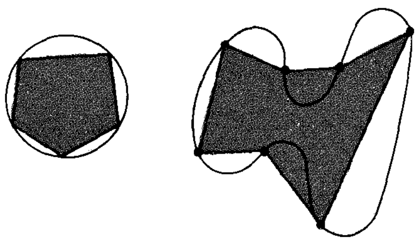
37. Nonempty



شکل ۳.۲۲



شکل ۳.۲۳



(a) (b)

شکل ۳.۲۴

از یک نقطهٔ داخلی K، S را دقیقاً در دو نقطه قطع می‌کند.

شکل ۳.۲۲ را ملاحظه می‌کنیم. فرض می‌کنیم A نقطهٔ داخلی K باشد. هر شعاع $\overrightarrow{AP}$ ای K را در قطعه خطی چون $\overline{AB}$ قطع می‌کند. این مطلب به علت این که اشتراک دو مجموعهٔ محدب مجموعه‌ای محدب است، راست است. $\overline{AB}$ یک جسم محدب یک بعدی است. اما $\overrightarrow{AB'}$ (B'، A، و B واقع بر یک استقامت‌اند) نیز K را در قطعه خط $\overline{AB'}$ قطع می‌کند، و B' دومین نقطه از دو نقطهٔ مرزی واقع بر خط گذرنده از A است. استدلال این بند شامل جمیع جزییات لازم برای یک اثبات کامل نیست، چه در این مورد باید این را هم که خط $\overleftrightarrow{AB}$، S را در بیش از دو نقطه قطع نمی‌کند، ثابت کنیم؛ این قسمت از اثبات را به دست نداده‌ایم.

b. اگر هر خط گذرنده از هر نقطهٔ داخلی K منحنی بستهٔ سادهٔ S را دقیقاً در دو نقطه قطع کند، در این صورت S مرز جسم محدب K است. (می‌توان نشان داد که عکس نقیض این دومین شرطی، که منطقاً معادل خود این شرطی است، برقرار است. عکس نقیض مورد بحث مقرر می‌کند که اگر K نامحدب باشد، در این صورت خطی گذرنده از یک نقطهٔ داخلی K مرز S را دقیقاً در دو نقطه قطع نمی‌کند.)

در شکل ۳.۲۳، اگر K نامحدب باشد، نقاط داخلی A و B را می‌توان چنان یافت که

Cی واقع بر $\overline{AB}$ نقطه‌ای خارجی باشد. در این صورت می‌توان فرض کرد که نقاط مرزی D و Eی K بر $\overline{AB}$ موجوداند. شعاع $\overrightarrow{DA}$ نیز دارای نقطهٔ مرزی سوم Fی است، بنابراین $\overleftrightarrow{AB}$، S را حداقل در سه نقطه قطع می‌کند.

قضیهٔ دیگر مربوط به جسم محدب و مرزش را در این جا فرض می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۶. مرز یک جسم محدب در فضای دو بعدی منحنی بستهٔ ساده‌ای است.

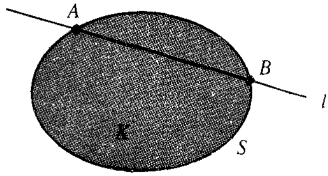
البته عکس قضیهٔ ۳.۶ صادق نیست، زیرا منحنی‌های بستهٔ ساده اشکال بسیار متنوعی علاوه بر آن‌ها که محدب‌اند، دارند. شرط دیگر در تعیین این که آیا منحنی بستهٔ سادهٔ خاصی مرز جسم محدبی هست یا خیر توسط قضیهٔ بعد به دست داده می‌شود.

قضیهٔ ۳.۷. منحنی بستهٔ سادهٔ S مرز جسم محدب دوبعدی K است اگر و تنها اگر هر چندضلعی بستهٔ $T=P_0P_1...P_nP_0$ حاصل از نقاط متوالی واقع بر Sی مرزناحیهٔ چندضلعی محدبی باشد.

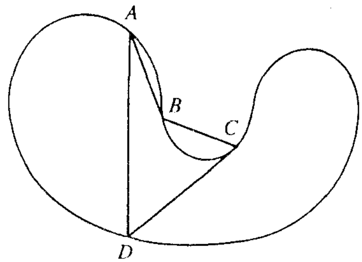
قضیه را در شکل ۳.۲۴ توضیح داده‌ایم. هر ناحیهٔ چندضلعی شکل محاط در منحنی سادهٔ بستهٔ شکل ۳.۲۴a محدب است. در حالی که در مورد منحنی بستهٔ شکل ۳.۲۴b، بعضی از نواحی چندضلعی محاط در آن، چون چندضلعی نشان داده شده، نامحدب اند.

اثبات شرطی تنها اگرِ قضیهٔ ۳.۷ با نشان دادن این که هر چندضلعی محاط در یک جسم محدب در هر نقطه‌اش دارای خطی پشتیبان است سروکار دارد.

فرض می‌کنیم l خط شامل ضلع $\overline{AB}$ از یک چندضلعی محاطی باشد. از آن‌جا که K محدب است، $\overline{AB}\subset K$ است، بنابراین $\overset{\circ\circ}{AB}$ شامل تنها نقاط S یا تنها نقاط داخلی K است (تمرین ۱۹، تمرینات ۳.۲). اگر $\overset{\circ\circ}{AB}$ شامل تنها نقاط S باشد، در این صورت می‌تواند شامل هیچ نقطهٔ داخلی T نباشد و خط پشتیبان K و T هر دو است. اگر $\overset{\circ\circ}{AB}$، چنان‌که در شکل ۳.۲۵ نشان داده‌شده، شامل نقاط داخلی K باشد، در این صورت S به دو منحنی واقع براطراف مقابل l تقسیم شده‌است. جمیع رئوس T بر یک نیم‌صفحهٔ پشتیبان H مشخص با l قرارمی‌گیرند، چه درغیراین‌صورت A و B رئوس متوالی نخواهندبود. در این‌صورت l خط پشتیبان $K \cap H$ ، وبنابراین خط پشتیبان T وداخل آن‌است. هرنقطهٔ T دارای یک خط پشتیبان گذرنده‌از آن‌دارد، بنابراین T مرزناحیه‌ای چندضلعی شکل محدب‌است.



شکل ۳.۲۵



شکل ۳.۲۶

به اثبات گزارهٔ اگر، می‌توان با نشان‌دادن این که، اگر مجموعهٔ K با مرز S محدب نباشد، در این صورت چهارضلعی محاطی‌ای وجوددارد که مرز ناحیه‌ای محدبی نیست، نایل شد. چنین چهار ضلعی‌ای را به صورت ABCD در شکل ۳.۲۶ تصویر کرده‌ایم، اما جزئیات اثبات را به صورت تمرین ۱۵ی تمرینات ۳.۳ واگذاشته‌ایم.

دو قضیهٔ دیگر به خاصیت ویژه‌ای در مورد طول مرزهای دو جسم محدب مربوط می‌شود.

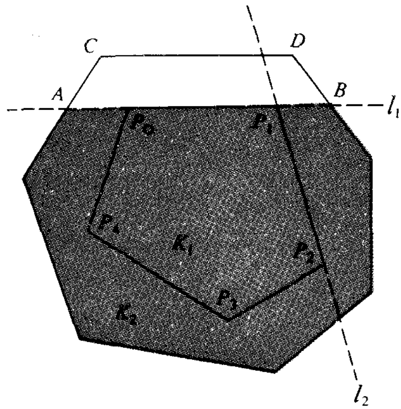
تعریف. طول[38] یک منحنی بستهٔ ساده کمترین کران زبرین[39]* طول جمیع منحنی‌های چندضلعی شکل محاط در آن است. به خاطر بیاورید که کمترین کران زبرین یک مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچك‌ترین عدد حقیقی‌ای است که بزرگتر از یا مساوی با هر عدد آن مجموعه است. طول مرز یک ناحیه به محیط[40]** آن ناحیه موسوم است.

قضیهٔ ۳.۸. اگر $K_۱$ و $K_۲$نواحی چندضلعی شکل محدبی با $K_۱ \subseteq K_۲$ باشد، در این صورت محیط $K_۱$ کوچك‌تر از یا مساوی بامحیط $K_۲$است.

اثبات: فرض می‌کنیم رئوس $K_۱$ به ترتیب ، $P_۰$، $P_۱$، ...، P_n باشد، و l_i، $i=۱,...,n$ خط گذرنده از P_i و $P_{i-۱}$ باشد. در شکل ۳.۲۷ تصویر نمونه‌ای برای کمك به این علایم و علامت زیر نشان داده شده‌است. فرض می‌کنیم S_i ناحیهٔ چندضلعی شکلی چنان‌که $S_i=H_i \cap S_{i-۱}$، $i=۱,...,n$که در آن H_i نیم‌صفحهٔ پشتیبان $K_۱$ با مرز $l_۱$ و

38. Length
39. Least Upper Bound
40. Perimeter

* کوچک‌ترین حدبالا
** پیرامون



شکل ۳.۲۷

$S_\circ$ ناحیهٔ بزرگتر با مرز $K_۲$ است، باشد. در شکل ۳.۲۷، $S_۱=H_۱\cap S_\circ$ را سایه زده‌ایم. از آن‌جا که

$$AB<(AC+CD+DB)$$

محیط $S_۱$ کوچك‌تر از محیط $S_\circ$ است. به ازای جمیع i های از ۱ تا n،

محیط $S_{i-۱}$ $\leq$ محیط $S_۱$

از آن جا که مرز S_n مرز K_1 است، در این صورت

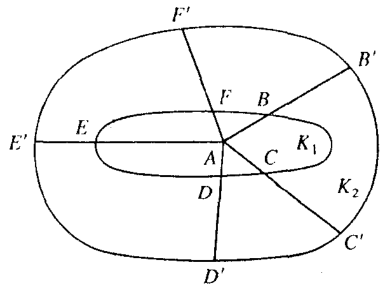
محیط $K_۲$ $\leq$ محیط $K_۱$

می‌توان قضیهٔ ۳.۸ را از نواحی چندضلعی شکل به اجسام محدب تعمیم داد.

قضیهٔ ۳.۹. اگر $K_۱$ و $K_۲$ دوجسم محدب دوبعدی با $K_۱\subseteq K_۲$ باشند، در این صورت

محیط $K_۲$ $\leq$ محیط $K_۱$

در شکل ۳.۲۸، فرض می‌کنیم A نقطهٔ داخلی $K_۱$ باشد. هر شعاع با نقطهٔ آغاز A مرزهای $K_۱$ و $K_۲$ را درازواج نقاط متناظری چون B و B' قطع می‌کند. بین چندضلعی محاط در $K_۱$ و چندضلعی محاط در $K_۲$ تناظری یک‌به‌یک وجود دارد که باانتخاب رئوس متناظر هم‌استقامت با A و در یک طرف A معین می‌شود. فی‌المثل، $BCDEF$ با $B'C'D'E'F'$ زوج‌بندی شده است. ازآن‌جا که هر چندضلعی $S_۱$ از



شکل ۳.۲۸

K_1 مشمول چندضلعی متناظر S_2اش از K_2است، طول S_1، از قضیهٔ ۳.۸، کوچك‌تر از یا مساوی با طول S_2 است. کمترین کران‌های زبرین نامساوی زیر را برقرار می‌کنند.

کمترین کران زبرین S_1 $\leq$ کمترین کران زبرین S_2

بنابراین محیط K_1 کوچك‌تر از یا مساوی با محیط K_2 است.

یکی از موارد استعمال مهم و جدید نظریهٔ اجسام محدب (در این حالت نواحی چندضلعی شکل محدب) در برنامه‌ریزی خطی[41] است. مفهوم اساسی‌ای که برنامه‌ریزی خطی وابسته به آن است این است که مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع خطی‌است که برای جمیع نقاط واقع بر یک ناحیهٔ چندضلعی شکل محدب تعریف شده در رئوس آن چندضلعی رخ می‌دهد. در این‌جا برای این‌که این مورد استعمال را مفهوم کنیم به توضیحی مختصر در مورد تئوری مزبور، و مثالی از آن نیاز داریم. برای مطالعهٔ کاملی از برنامه‌ریزی خطی، فی‌المثل،
Leon Cooper and David Steinburg, *Methods and Applications of Linear Programming, Published* by W.B. Saunders, Philadelphia, 1974
را ملاحظه کنید.

برای به کاربردن مثالی بسیار ساده، فرض می‌کنیم شرکتی بیشترین سود را برای محصولاتش درنظر داشته باشد و تنها دو نوع جنس، با قیمت‌های متفاوت بفروشد. در این مورد باید علاوه بر قیمت فروش سایر شرایط محدودکننده ـ مثلاً، تعداد ساعات لازم برای ساخت هر فقره و فراهم بودن ماشین‌آلات و کارگر ـ ملحوظ شود. در این صورت مسأله عبارت از این است که تصمیم بگیریم که برای سود ماکزیمم از هر جنس چه تعداد بسازیم.
مسألهٔ فوق، از نظرگاه ریاضی، پیدا کردن مقادیر x و y ی که تابع خطی‌ای به صورت

41. Linear Programming

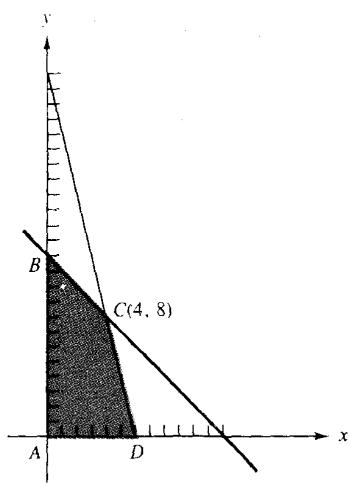
$ax+by+c$ را، که در آن x و y به علت شرایط مسأله می‌توانند تنها مقادیر معینی را بگیرند، ماکزیمم می‌کنند، است. در این مورد قضیهٔ عمومی‌ای راکه مورد استعمال مورد بحث بر آن وابسته است (قضیهٔ ۳.۱۰) بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۱۰. اگر تابع $ax+by+c$ به ازای هر نقطهٔ یک ناحیهٔ چندضلعی شکل محدب تعریف شده باشد، بیشترین مقدار آن به ازای مختصات یک رأس وکمترین مقدار آن به ازای مختصات رأس دیگر رخ می‌دهد.

مثال. برای تهیهٔ جنس اول با سود ۵۰ دلار، باید ماشین اول یک ساعت و ماشین دوم دو ساعت به کار رود. برای تهیهٔ جنس دوم با سود ۴۰ دلار، باید ماشین اول یک ساعت و ماشین دوم نیم ساعت به‌کاررود. هیچ یک از ماشین‌ها نمی‌تواند در روز بیش از ۱۲ ساعت‌کار کند. برای بیشترین سود در هرروز از هر جنس چند عدد باید ساخته شود؟

اگر x تعداد جنس نوع اول را در روز و y تعداد جنس نوع دوم را در روز برای بیشترین سود نشان دهد، در این صورت

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$



شکل ۳.۲۹

نامساوی‌های بیان‌کنندهٔ محدودیت‌های زمانی ماشین‌ها عبارت‌اند از:

ماشین اول $x+y \leq ۱۲$

ماشین دوم $۲x+\frac{۱}{۲}y \leq ۱۲$

هریک از چهار نامساوی فوق را در شکل ۳.۲۹ به صورت نیم‌صفحه‌ای بسته نمایش داده‌ایم، و اشتراک این چهارمجموعهٔ محدب ناحیهٔ چندضلعی شکل محدب ABCD است.

درمورد این مثال، تابع سود مطلوب دهنده عبارت است از:

$$f=۵۰x+۴۰y$$

و مقادیر آن در رئوس چندضلعی مذکور عبارت‌اند از:

در $(۰،۰)$ A $f=۰$

در $(۰،۱۲)$ B $f=۴۸۰$

در $(۴،۸)$ C $f=۵۲۰$

در $(۶،۰)$ D $f=۳۰۰$

به این ترتیب شرکت مورد بحث برای بیشترین سود باید از جنس اول چهار و از جنس دوم هشت عدد بسازد. سود مطلوب روزانه ۵۲۰ دلار خواهد بود.

تمرینات ۳.۳

ـر تمرینات ۱ـ۱۰، مشخص کنید کدام مجموعه جسم محدب است، و در مورد هر مجموعه که لزوماً جسم محدب نیست توضیح دهید چرا نیست.

۱. ناحیهٔ مثلث شکل

۲. خط

۳. زاویه و داخلش

۴. دایره

۵. نیم صفحه

۶. اشتراک ناتهی دو مجموعهٔ محدب

۷. شعاع

۸. ناحیهٔ چندضلعی شکل محدب
۹. ناحیهٔ دایروی با یک نقطهٔ مرزی مفقود
۱۰. اشتراک دو جسم محدب
۱۱. در یک جسم محدب، شعاعی که نقطهٔ ابتدایش نقطه‌ای داخلی است مرز آن جسم محدب را دقیقاً در چند نقطه قطع می‌کند؟
۱۲. اگر اشتراک دو ناحیهٔ دایروی چنان باشد که شامل بیش از یک نقطه باشد، آیا اشتراک مزبور همواره یک جسم محدب است؟
۱۳. آیا مرز یک جسم محدب همواره یک مجموعهٔ محدب است؟
۱۴. برای نشان دادن این که قضیهٔ ۳.۷ در صورتی که نقاط P_i آن متوالی نباشند لزوماً برقرار نیست دو مثال طرح کنید.
۱۵. اثبات قضیهٔ ۳.۷ را تکمیل کنید.
۱۶. برای نشان دادن این که قضیهٔ ۳.۸ در صورتی که نواحی مربوطه نامحدب باشند لزوماً برقرار نیست دو مثال طرح کنید.
۱۷. جمیع اجسام محدب یک بعدی را رسم کنید.
۱۸. نشان دهید که یک جسم محدب مسطح دارای مماسی در نقطهٔ مرزی A است اگر و تنها اگر در نقطهٔ A دقیقاً یک خط پشتیبان برای آن جسم موجود باشد.
۱۹. مثال مفروض برنامه‌ریزی خطی متن را با شرایط زیر حل کنید: برای جنس اول، باید ماشین اول دو ساعت و ماشین دوم سه ساعت کار کند، سود جنس اول دانه‌ای ۹۰ دلار است.
۲۰. گله‌داری برای ۳۰۰ گاو فضا دارد، و از یک نژاد بیش از ۲۰۰ گاو نمی‌خواهد. اگر روی هر گاو از نژاد H[42]، ۴۰ دلار و روی هر گاو از نژاد B[43]، ۵۰ دلار سود ببرد، باید برای بیشترین سود از هر یک چند عدد پرورش دهد؟
I۲۱. اثبات قضیهٔ ۳.۱۰ را در کتابی راجع به برنامه ریزی خطی مطالعه کنید.
I۲۲. مثال برنامه ریزی خطی‌ای مشابه با مثال داده شده در متن، اما با بیش از چهار نامساوی نوشته حل کنید.
I۲۳. روش ساده‌ای برای حل مسائل پیچیده‌تر برنامه ریزی خطی جستجو کنید.
I۲۴. بخش بعدی، راجع به اجسام محدب در فضای سه بعدی، مفاهیم بسیاری مشابه با مفاهیمی که پیش‌از این در مورد فضای دو بعدی مطرح شده دارد. در مورد اجسام محدب فضایی، پیش از مطالعهٔ این بخش، چه مطالبی می‌توانید کشف کنید.

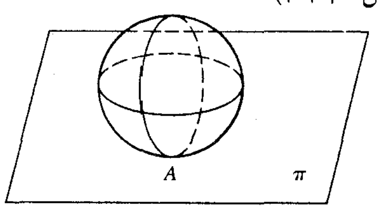
42. Hereford
43. Black Angus

۳.۴ اجسام محدب در فضای سه بعدی

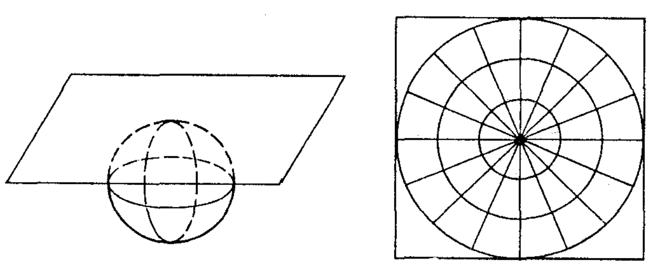
مفاهیم و قضایای اجسام محدب سه بعدی شباهت تنگاتنگی[44] با موارد قبلاً مورد بحث گرفته‌شان در فضای دو بعدی دارند.

تعریف. صفحهٔ π صفحهٔ پشتیبان[45] مجموعهٔ سه‌بعدی S نامیده می‌شود اگر و تنها اگر π شامل حداقل یک نقطهٔ مرزی S باشد و S به طور کامل در یکی از نیم فضا[46]های بستهٔ مشخص با π قرار گیرد. (شکل ۳.۳۰ را ملاحظه کنید.) نیم فضای بستهٔ مشخص با πای که شامل S است نیم فضای پشتیبان[47] S نامیده‌می‌شود.

اشیایی از دنیای فیزیکی که مجموعه‌ها و صفحات پشتیبان را مطرح می‌کنند عبارت‌اند از توپی که بر کف اتاقی واقع باشد و نقشهٔ قطبی‌ای، که با تصویر کردن نقاط بر صفحهٔ مماس بر این کره در قطب شمال آن، چنان که در شکل ۳.۳۱a نشان داده‌شده، به دست آمده است. خطوط متلاقی در قطب آن خطوط طول جغرافیایی و دوایر آن خطوط عرض جغرافیایی‌اند (شکل ۳.۳۱b).



شکل ۳.۳۰



(a) (b)

شکل ۳.۳۱

44. Closely Analogous
45. Supporting Plane
46. Half - Space
47. Supporting Half - Space

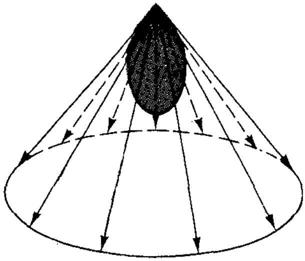
مخروط مماس در فضای سه بعدی در واقع، چنان که درشکل **۳.۳۲** نشان داده شده، مجموعهٔ داخل یک مخروط معمولی است. در مورد نیم مماس‌ها در فضای سه بعدی مشابه مستقیمی موجود نیست، زیرا مرز مخروط مماس‌مان همان مخروط معمولی است. هرگاه مرز مخروط مماس نقطهٔ Aای صفحهٔ πای باشد، π را صفحهٔ مماس[48] در A می‌نامیم.

خطوط پشتیبان را نیز می‌توان برای مجموعه‌های محدب سه بعدی تعریف کرد، اما در این مورد تعریف خطوط پشتیبان به‌کاررفته در فضای دوبعدی، از آن‌جاکه یک خط، نیم صفحه‌ها یا نیم فضاهای منحصر به‌فرد را در فضا مشخص نمی‌کند، کافی نیست. خط l خط پشتیبان مجموعهٔ محدب سه بعدی K نامیده می‌شود اگر و تنها اگر l شامل حداقل یک نقطهٔ مرزی اما هیچ نقطهٔ‌داخلی kباشد. این تعریف تضمین می‌کند که l در شکل **۳.۳۳** به‌عنوان خط پشتیبان مجموعهٔ دو بعدی درنظر گرفته شده در فضای سه بعدی بررسی نشود، زیرا تعریف مذکور تنها در مورد مجموعه‌های سه بعدی به کار می‌رود.

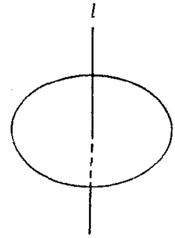
قضیهٔ ۳.۲ از بخش ۳.۲ متناظر با قضیهٔ زیر در فضای سه بعدی است. اثبات قضیهٔ مورد بحث کاملاً مشابه نظیرش است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۳.۱۱ . π صفحهٔ پشتیبان مجموعهٔ سه بعدی K است اگر و تنها اگر π شامل نقاط مرزی اما هیچ نقطهٔ داخلی K باشد.

مفاهیم نقطهٔ منظم و نقطهٔ گوشه‌ای را نیز می‌توان به فضای سه بعدی بسط داد. نقطهٔ مرزی مجموعهٔ محدب K منظم است اگر و تنها اگر K صفحهٔ مماسی در این نقطه داشته باشد. رئوس یک ناحیهٔ چهار وجهی شکل محدب مثال هایی از نقاط گوشه‌ای‌اند، در حالی که هر نقطهٔ واقع بر یک کره نقطهٔ منظم ناحیهٔ کروی آن است.



شکل ۳.۳۲



شکل ۳.۳۳

---

48. Tangent Plane

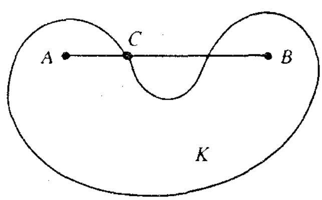
قضیهٔ بعدی قضیهٔ فضای سه بعدی مشابه قضیهٔ ۳.۳ است. اما پیش از معرفی این قضیه، باید به معرفی مفهوم سطح بپردازیم. یک سطح[۴۹] نمودار مجموعهٔ معادلاتی به صورت $x=f(s,t)$، $y=g(s,t)$، $z=h(s,t)$ ی توابع متصل f، g، و h و فاصله‌ای از اعداد حقیقی s و t است. سطح بستهٔ ساده[۵۰] داخلی منفرد دارد. این سطح هر همسایگی کروی را به دو مجموعهٔ مجزا، در صورتی که مرکز آن نقطه‌ای از این سطح باشد، افراز می‌کند.

قضیهٔ ۳.۱۲. سطح بستهٔ سادهٔ S مرز مجموعهٔ محدب K است اگر و تنها اگر از هر نقطهٔ S حداقل یک صفحهٔ پشتیبان K بگذرد.

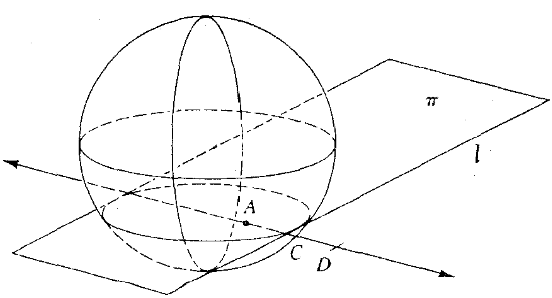
اثبات:

a. اثبات قلب گزارهٔ تنها اگر گزارهٔ فوق.

نقاط A و B را می‌توان با نقطهٔ داخلی A چنان یافت که $\overline{AB}$ شامل نقطهٔ مرزی C در صورت نامحدب بودن مجموعهٔ K، چون در شکل ۳.۳۴، باشد. هیچ



شکل ۳.۳۴



شکل ۳.۳۵

49. Surface

50. Simple Closed Surface

صفحهٔ گذرنده از A و B ای از آن‌جا که A نقطه‌ای داخلی است، نمی‌تواند صفحهٔ پشتیبان باشد. هر صفحهٔ گذرنده از C ی دیگر A را از B جدا می‌کند و نمی‌تواند صفحهٔ پشتیبان باشد. به این ترتیب، صفحهٔ پشتیبان K ی گذرنده از C ای موجود نیست.

b. اثبات گزارهٔ تنها اگر گزارهٔ فوق بستگی به مفهوم تصویر، که در فصل ۷ به توضیح آن می‌پردازیم، دارد. این گزاره عبارت از ثابت کردن این است که اگر منحنی مورد بحث مرز مجموعه‌ای محدب باشد، در این صورت در هر نقطهٔ مرزی‌ای صفحهٔ پشتیبانی‌ای موجود است. این اثبات را به دست نداده‌ایم.

قضیهٔ بعدی اجسام محدب دو بعدی و سه بعدی را به هم ربط می‌دهد.

قضیهٔ ۳.۱۳. فرض می‌کنیم l خط پشتیبان جسم محدب سه بعدی K در نقطهٔ B باشد، و π صفحهٔ مشخص با l و A نقطهٔ داخلی‌ای از K باشد. در این صورت $\pi \cap K$ جسم محدب دوبعدی‌ای، که l را به عنوان خطی پشتیبان دارد، است.

اثبات: A نقطهٔ داخلی $\pi \cap K$ نیز هست، لذا $\pi \cap K$ جسم محدب دوبعدی است. اما فرض می‌کنیم که l خط پشتیبان $K \cap \pi$ نباشد. از آن‌جا که B بر l قرار دارد و B نقطه مرزی $K \cap \pi$ است، l ، چون در شکل ۳.۳۵، شامل نقطهٔ داخلی C از $K \cap \pi$ است. نقطهٔ D ای از $K \cap \pi$ چنان موجود است که C بین A و D قرار می‌گیرد. از آن‌جا که A نقطهٔ داخلی K است و DEK ، نتیجه می شود که C نقطهٔ داخلی K است. این بدان معنی است که برخلاف فرض‌مان خط پشتیبان نیست.
آخرین قضیهٔ این بخش هم‌قَدَر سه‌بعدی قضیهٔ **۳.۴** است.

قضیهٔ ۳.۱۴. هر مجموعهٔ محدب بستهٔ سه بعدی (زیرمجموعهٔ حقیقی فضا) همان اشتراک جمیع نیم فضاهای پشتیبان خویش است.

این قضیه به طریقی مشابه با اثبات قضیهٔ ۳.۴ اثبات می‌شود، اما اثبات آن را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم.

تمرینات ۳.۴

۱. مثال های دیگری از دنیای فیزیکی که صفحات پشتیبان و مجموعه‌های سه بعدی را نمایش دهند به دست دهید.
۲. مخروط مماس رأس یک جسم مکعب شکل را رسم کنید.
۳. آیا هر خط واقع در صفحهٔ پشتیبان یک مجموعهٔ محدب خط پشتیبان آن مجموعه است؟ چرا؟

کدام یک از مجموعه‌های نقاط تمرین ۴-۱۱اجسام محدب سه بعدی‌اند؟

۴. جسم فضایی چهاروجهی
۵. کره
۶. نیم فضا
۷. جسم فضایی چندوجهی محدب
۸. جسم فضایی مکعب شکل
۹. اشتراک ناتهی سه جسم کروی
۱۰. اشتراک ناتهی دو جسم چهاروجهی
۱۱. سطح بستهٔ ساده
۱۲. قضیهٔ ۳.۱۱ را ثابت کنید.
۱۳. از قضیهٔ ۳.۱۴ در به دست‌دادن تعریفی برای یک جسم چهاروجهی شکل استفاده کنید.
۱۴. قضیهٔ ۳.۱۴ را ثابت کنید.
۱۵. ثابت کنید اگر π صفحه‌ای گذرنده از نقطهٔ داخلی مجموعهٔ محدب سه‌بعدی K باشد و اگر l خط پشتیبان $\pi\cap K$ باشد، در این صورت l خط پشتیبان K است.
۱۶. ثابت کنید هر نقطهٔ مرزی یک مجموعهٔ محدب سه بعدی بر خط پشتیبانی از آن مجموعه قرار دارد.
۱۷I. مثال های خاصی در تمیز بین مفاهیم صفحهٔ پشتیبان و صفحهٔ مماس یک مجموعهٔ سه بعدی به دست دهید.

۳.۵ قشرهای محدب

در این بخش مفهوم با اهمیت و جدید قشر محدب را معرفی می‌کنیم.

تعریف. قشر* محدب[51] (گاهی موسوم به پوشش محدب[52]) مجموعهٔ نقاط S کوچك‌ترین مجموعهٔ محدب شامل S است.

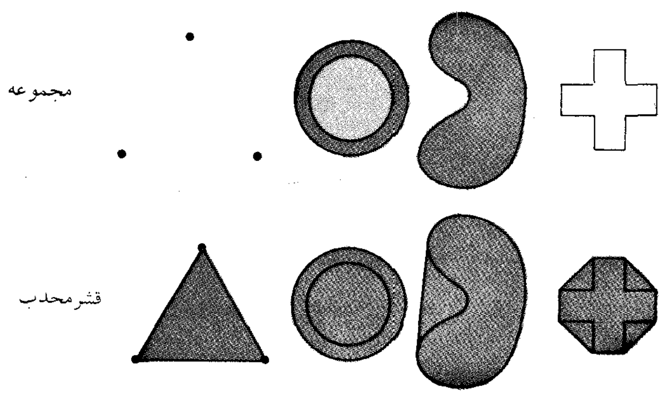
کوچك‌ترین مجموعهٔ محدب شامل S بودن قشر محدب بدین معنی است که قشر محدب زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ محدب شامل S دیگر می‌باشد.

تعریف فوق مشخص نمی‌کند که قشر محدب باید جسم محدب باشد. مثال هایی از اقشار محدب را در شکل ۳.۳۶ نشان داده‌ایم.

مفاهیم مجموعهٔ محدب و قشر محدب با قضیهٔ زیر، که اثباتش را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم، ارتباط بیشتری پیدا می‌کنند.

قضیهٔ ۳.۱۵. یک مجموعه محدب است اگر و تنها اگر خود قشر محدب خود باشد.

قشر محدب، در بسیاری از مسائلی که با قراردادن اشیا در ظروف محدب سروکار



شکل ۳.۳۶

51. Convex Hull
52. Convex Cover

* دوره

دارند، باید به اندازهٔ داخل ظرف مربوطه باشد، و بنابراین باید، به جای خود شیء، قشر محدب آن درنظر گرفته شود. فی‌المثل، جعبهٔ کفش، به جای این که به شکل یک جفت کفش باشد، مستطیل شکل است؛ و روکش ماشین تحریر معمولاً به شکل ماشین تحریر نیست.

قبلاً نقاط واقع بر مرز یک مجموعهٔ محدب را به صورت نقاط گوشه‌ای یا نقاط منظم طبقه‌بندی کرده‌ایم. در این‌جا، به‌خاطر تحقیق بیشتر در روابط بین مجموعه‌ها و قشرهای محدب‌شان، لازم است که به معرفی دومین طبقه‌بندی، بر این مبنا که یک نقطهٔ مرزی نقطه‌ای نهایی هست یا خیر، بپردازیم.

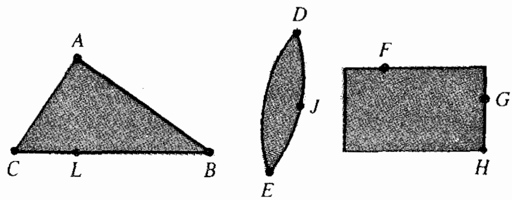
تعریف. نقطهٔ A از مجموعهٔ محدب K نقطهٔ نهایی[53] نامیده می‌شود اگر و تنها اگر دو نقطهٔ P_1 و P_2 ای از K چنان که A نقطه‌ای از $\overset{\circ\!-\!\circ}{P_1P_2}$ باشد، موجود نباشند.

در شکل ۳.۳۷، A، B، C، D، E، H، J نقاط نهایی اند، درحالی‌که F، G، L نیستند.

هر نقطهٔ واقع بر مرز یک ناحیهٔ دایروی نقطه‌ای نهایی است. ارتباط بین نقاط نهایی و قشرهای محدب بعضی مجموعه‌ها در دو قضیهٔ بعدی واضح می‌شود.

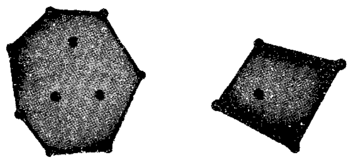
قضیهٔ ۳.۱۶. ناحیهٔ چندضلعی شکل محدب S قشر محدب K ی نقاط نهایی خویش است.

اثبات: در این جا نقاط نهایی رئوس چند ضلعی‌اند. از آن‌جا که هر زوج نقطهٔ نهایی متعلق به K است، هر لبهٔ S واصل نقاط نهایی متعلق به K است. هر خط گذرنده از یک نقطهٔ داخلی S مرز آن را در دو نقطهٔ متعلق به K قطع می‌کند. دراین صورت

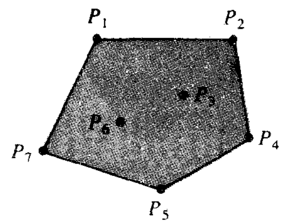


شکل ۳.۳۷

53. Extreme Point



شکل ۳.۳۸



شکل ۳.۳۹

$S\subseteq K$ است. از آن‌جا که K کوچك‌ترین مجموعهٔ محدب شامل این رئوس است. $K\subseteq S$، و بنابراین $S=K$.

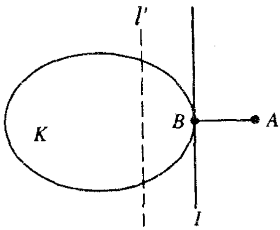
قضیهٔ ۳.۱۷ . قشر محدب تعداد متناهی‌ای نقطهٔ در یک صفحه،ناحیهٔ چندضلعی شکل محدبی است. امثلهٔ قشرهای محدب تعداد متناهی‌ای نقطه در یک صفحه را در شکل ۳.۳۸ نشان داده‌ایم.

اثبات: **فرض می‌کنیم K قشرمحدب مجموعهٔ نقاط $S=\{P_1,...,P_n\}$ واقع در یک صفحه باشد.اگر K یک بعدی باشد، در این صورت K قطعه خطی است که می‌تواند حالت خاصی از ناحیهٔ چندضلعی شکل محدب به شمار آید.**

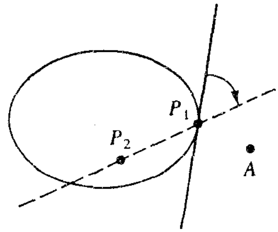
اگر K دوبعدی باشد،کران‌دار است و مرز آن منحنی بستهٔ سادهٔ T است. برای کمك به علامت‌مان شکلی نمونه (شکل ۳.۳۹) را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم U اشتراك تعداد متناهی‌ای نیم‌صفحهٔ پشتیبان Sی که مرزهاشان شامل حداقل دو نقطهٔ Sاند، باشد، فی‌المثل، $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ و $\overleftrightarrow{P_2P_4}$ نیم‌صفحه‌های پشتیبان‌رامشخص‌می‌کنند، در حالی که $\overleftrightarrow{P_1P_3}$ و $\overleftrightarrow{P_6P_7}$چنین نمی‌کنند.

از آن‌جا که U محدب است و $S\subseteq U$، در این صورت $K\subseteq U$. باقی اثبات متضمن نشان دادن این است که $U\subseteq K$.

چون در شکل ۳.۴۰، فرض می‌کنیم که $A\notin K$ و B نقطه‌ای از K با کمترین



شکل ۳.۴۰



شکل ۳.۴۱

فاصله از A باشد، خط l عمود بر $\overline{AB}$ خط پشتیبان K در B است.

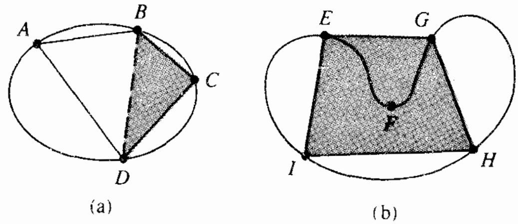
حداقل یک نقطهٔ S، مثلاً P_1، باید بر l قرار گیرد؛ در غیر این‌صورت، می‌توان l' را موازی l قرارداد، و زیر مجموعهٔ حقیقی محدب Kای واقع بر یک طرف l' که شامل S باشد موجودخواهد شد، که برخلاف تعریف K به عنوان قشر محدب است.

اکنون، چون در شکل ۳.۴۱، تصور می‌کنیم که l حول P_1، با حفظ نقطهٔ A در همان نیم‌صفحه، تا این که نقطهٔ دوم P_2 از S مشمول l شود، دوران کرده باشد. می‌توان ثابت کرد که نیم صفحهٔ مقابل نقطهٔ A یکی از نیم‌صفحه‌های پشتیبان U است، و این بدان معنی است که A ، که در K نیست، در U نیست، و نتیجه این می‌شود که U زیرمجموعه‌ای از K است و، سرانجام، این که K=U است. مرز K مرکب از اجتماع قطعه خط هاست، بنابراین K ناحیه‌ای چندضلعی شکل محدب است.

مفهوم قشر محدب را می‌توان بازهم در امتحان دیگری، در تعیین این که یک منحنی بستهٔ ساده مرز یک مجموعهٔ محدب هست یا خیر، به کار برد.

قضیهٔ ۳.۱۸. فرض می‌کنیم S مجموعهٔ متناهی‌ای از نقاط واقع بر منحنی بستهٔ سادهٔ T باشد. T مرز مجموعهٔ محدب K است اگر و تنها اگر، به ازای جمیع چنین مجموعه‌های S ی، هیچ نقطهٔ S ی نقطهٔ داخلی K'، قشر محدب S، نباشد.

شکل ۳.۴۲، کمک به واضح شدن مفهوم این قضیه می‌کند. در مورد مجموعهٔ محدب شکل ۳.۴۲a، قشر محدب هر تعداد متناهی نقطه، چون B ، C ، D، شامل نقاط دیگر مرز نیست. در حالی که در شکل ۳.۴۲b قشر محدب EGHI شامل نقطهٔ مرزی F است.



شکل ۳.۴۲

اثبات:

a. اگر T مجموعهٔ محدب K را مرزبندی کرده باشد، در این صورت، بنابه تعریف قشر محدب، $K'\subseteq K$ می‌شود. و بنابراین، جمیع نقاط داخلی K' نقاط داخلی K نیز می‌شوند.

b. اثبات عکس قضیه عبارت از نشان دادن این است که اگر K محدب نباشد، در این صورت مجموعهٔ نقاط S ی بر T چنان موجود است که بعضی ازاعضای S نقطهٔ داخلی قشر محدب S باشد (تمرین ۱۵، تمرینات ۳.۵).

مفهوم قشر محدب به آسانی به مجموعه‌های در سه بعدگسترش داده شده است. یک جسم چندوجهی محدب قشر محدب نقاط انتهایی‌اش، یعنی رئوسش، است. به همین ترتیب، قشر محدب تعداد متناهی‌ای نقطه در فضا جسم چندوجهی محدبی است.

آخرین قضیهٔ این بخش نیز تعمیم سه‌بعدی قضیهٔ ۳.۱۸ است.

قضیهٔ ۳.۱۹. فرض می‌کنیم S یک مجموعهٔ متناهی نقطهٔ واقع بر سطح بستهٔ سادهٔ T باشد. T مرز یک مجموعهٔ محدب است اگر و تنها اگر هیچ نقطهٔ S ی نقطهٔ داخلی U قشر محدب S ، به ازاء جمیع چنان مجموعه‌های S ی، نباشد.

تمرینات ۳.۵

در تمرینات ۱-۱۰، قشر محدب هر مجموعهٔ فهرست شده در زیر را در فضای دوبعدی توصیف یا رسم کنید:

۱. دایره　　　　۲. مثلث

۳. ناحیهٔ چندضلعی شکل محدب
۴. پنج نقطهٔ واقع بر یک استقامت
۵. دو خط متقاطع
۶. دو دایرهٔ نامتقاطع
۷. سهمی
۸. هذلولی
۹. زاویه
۱۰. چهار نقطهٔ متمایز،هیچ سه نقطه از آن‌ها واقع بر یک استقامت
۱۱. مثال هایی شامل موارد استعمال عملی قراردادن اشیا در ظروف محدب به دست دهید.
۱۲. قضیهٔ ۳.۱۵ را ثابت کنید.
۱۳. آیا نقطهٔ نهایی می‌تواند نقطهٔ منظم باشد؟
۱۴. آیا نقطهٔ نهایی می‌تواند نقطهٔ گوشه‌ای باشد؟
۱۵. اثبات قضیهٔ ۳.۱۸ را تکمیل کنید.
۱۶. مثالی از مجموعهٔ نقاطی به دست دهید که بسته است، اما قشر محدبش بسته نیست.
۱۷. ثابت کنید که یک جسم محدب قشر محدب نقاط نهایی خویش است.

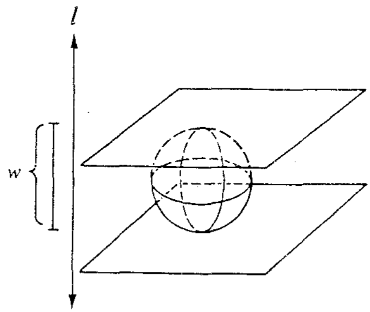
در تمرینات ۱۸ - ۲۱، قشر محدب موارد مربوطه را توصیف کنید:

۱۸. فرجه یا زاویهٔ دووجهی
۱۹. دو خط متنافر
۲۰. کره
۲۱. چهارنقطهٔ متمایزغیرواقع‌بریک صفحه
۲۲. آیا قشر محدب مجموعهٔ دوبعدی می‌تواند سه بعدی باشد؟
۲۳. قضیهٔ ۳.۱۹ را ثابت کنید.
۲۴. ثابت کنید هر صفحهٔ پشتیبان قشر محدب یک مجموعهٔ کران‌دار بسته شامل حداقل یک نقطهٔ آن مجموعه است.
I۲۵. یکی از مقاله‌های اخیر شامل تحقیق در مورد قشرهای محدب را مطالعه و راجع به آن گزارشی تهیه کنید.

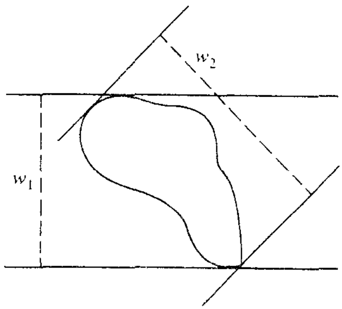
۳.۶ پهنای مجموعه

بعضی از مفیدترین موارد استعمال تحدب وابسته به خاصیتی از یک مجموعه نقاط موسوم به پهنای[۵۴] آن مجموعه است.

54. Width



شکل ۳.۴۳



شکل ۳.۴۴

تعریف. فاصلهٔ قائم در امتداد خط l بین دو خط پشتیبان موازی یک مجموعهٔ دوبعدی کران‌دار یا دو صفحهٔ پشتیبان موازی یک مجموعهٔ سه بعدی کران‌دار، پهنای آن مجموعه در جهت مشخص با خط l مذکور است.

در شکل ۳.۴۳، w پهنای مجموعهٔ موردبحث در جهت l است. یک مجموعه می‌تواند پهناهای متفاوت در جهات متفاوت داشته باشد. شکل ۳.۴۴ دو مثال پهنا در جهات خاص را در مورد یک مجموعهٔ دو بعدی نشان می‌دهد. پهنای ماکزیمم یک جسم محدب را قطر[55] آن جسم می‌نامند. این تعریف با مفهوم معمول قطر یک ناحیهٔ دایروی سازگار است.

قطر هر مجموعه را می‌توان به صورت کمترین کران زبرین فواصل بین هر دو نقطهٔ آن مجموعه تعریف کرد. در این صورت، در مورد یک مجموعهٔ کران‌دار بسته، می‌توان ثابت کرد که پهنای ماکزیممی، که قطر آن است، وجود دارد.

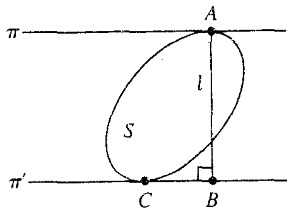
با جهت پهنای ماکزیمم چندین خاصیت مرتبط است. دو خاصیت از این خواص در ضمن قضایای بعدی آمده‌اند.

قضیهٔ ۳.۲۰ . فرض می‌کنیم π و π' صفحات پشتیبان موازی یک مجموعهٔ S درجهت پهنای ماکزیمم باشند. اگر A نقطه‌ای از $\pi \cap S$ باشد، در این صورت خط l گذرنده از A ی عمود بر π و π'، π' را در نقطهٔ Bای که نقطه‌ای از S است قطع می‌کند.

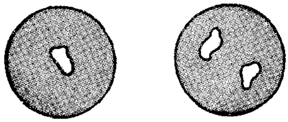
اثبات: آن چنان که در شکل ۳.۴۵، و برخلاف فرض می‌کنیم که B نقطه‌ای از S نباشد.

---

55. Diameter



شکل ۳.۴۵



شکل ۳.۴۶

در این صورت نقطهٔ C ای از $\pi'\cap S$ موجود است،اما $AC>AB$، بنابراین خط l، برخلاف فرض، در جهت پهنای ماکزیممی نیست.

اثبات قضیهٔ بعدی به عنوان تمرین (تمرین ۲۴، تمرینات ۳.۶) واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۳.۲۱ . فرض می‌کنیم π و π'صفحات پشتیبان موازی مجموعهٔ بستهٔ S در جهت پهنای ماکزیممی باشد. در این صورت $\pi\cap S$ و $\pi'\cap S$ هر یک دقیقاً شامل یک نقطه است.

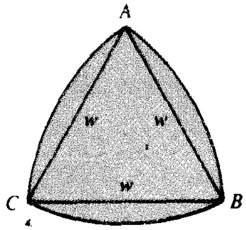
در مورد بعضی از حالات، پهنای یک مجموعه برای جمیع جهات یکسان است. مجموعه‌های از این نوع به مجموعه‌های **پهناثابت**[56] موسوم‌اند. پیش از ادامهٔ مطالعه ملاحظه کنید که چند نوع متفاوت از مجموعه‌های پهنا ثابت می‌توانید کشف کنید.

مجموعهٔ پهنا ثابت، چنان که با مثال های شکل ۳.۴۶ نموده شده، لازم نیست که محدب باشد.

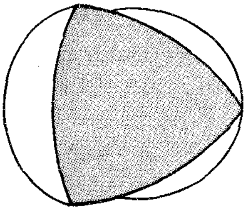
متعارف‌ترین مجموعهٔ محدب پهنا ثابت ناحیهٔ دایروی در فضای دوبعدی است. چنین به‌نظر می‌رسد که اولین کسی که مجموعه‌های محدب پهنا ثابتی، که نواحی دایروی نبودند، را مورد بررسی قرار داده اولر و پیش از سال ۱۸۰۰ بوده است. در سال **۱۹۵۳** بود که همر[57] و زوبیتسک[58] اولین شرح عمومی رضایت بخش را در مورد جمیع چنین مجموعه‌هایی به دست دادند.

---

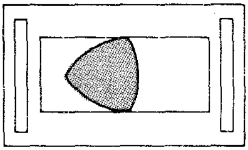
56. Constant Width
57. Hammer
58. Sobyzk



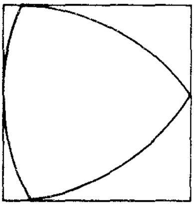
شکل ۳.۴۷



شکل ۳.۴۸



شکل ۳.۴۹



شکل ۳.۵۰

ساده‌ترین مثال مجموعهٔ محدب پهنا ثابتی که ناحیه‌ای دایروی نیست را در شکل ۳.۴۷ نشان داده‌ایم. فرض می‌کنیم ΔABC مثلث متساوی‌الاضلاعی با طول هر ضلع w باشد. به مرکز هر رأس، کمان کوتاه‌تر (به شعاع w ی) واصل دو رأس دیگر را رسم می‌کنیم. اجتماع این سه کمان مرز مجموعهٔ با پهنای ثابت w ای موسوم به مثلث رولو[۵۹]، یکی از مقاله‌نویسان اولیه در بررسی مجموعه‌های پهنا ثابت، است. مثلث رولو، در واقع به جای آن که منحنی باشد ناحیه است.

یکی از تفاوت‌های جالب بین مثلث رولو و یک ناحیه دایروی این است که مثلث رولو در نقاط A، B، و C دارای نقاط گوشه‌ای است. در سال‌های اخیر، خواص ریاضی مثلث رولو به بعضی از موارد استعمال بسیار مهم منجر شده است. یکی از چنین موارد استعمالی در سیلندر موتورهای وانکل[۶۰] است. مثلث رولو در یک محفظهٔ بیضوی مضاعف، چنان که در شکل ۳.۴۸ نشان داده‌شده، انجام گرفتن بیش از یک دورهٔ عمل موتور را در یک زمان مجاز می‌کند. این نوع موتور در بعضی از اتومبیل‌ها به کار رفته است. از همین نوع موتورهای کارآمد در اتومبیل‌های برف رو[۶۱] استفاده شده است. برای اطلاعات بیشتر، به

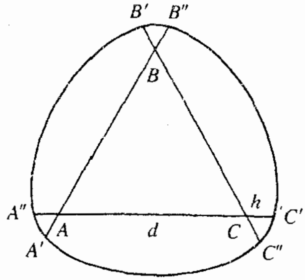
59. Reuleaux Triangle
60. Wankel
61. Snowmobiles

Scientific American, February 1969 رجوع کنید.

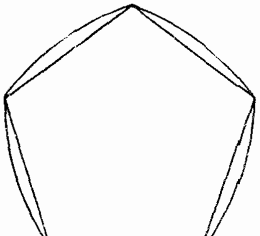
دومین مورد استعمال مثلث رولو در دندهٔ مربوط به جلو بردن فیلم سینمایی است. عمل مطلوب حرکتی کوتاه، سریع و بعد از آن توقفی لحظه‌ای است. شکل ۳.۴۹ را ملاحظه کنید. مورد استعمال سوم ساخت مته‌ای است که سوراخ مربع شکل تعبیه می‌کند. این کار به این علت امکان‌پذیر است که مثلث رولو می‌تواند داخل مربعی با اضلاع مساوی پهنای مثلث رولو به اطراف حرکت کند (اما نچرخد)؛ در نتیجه تیغهٔ مته مثلث رولو شکل است، و تیغه در مسیری مختلف‌المرکز حرکت می‌کند (شکل ۳.۵۰). مورد استعمال دیگر شکل سرشیر آتش‌نشانی «ضددیلم» ی است که نمی‌تواند با آچارهای معمولی باز شود.

بعضی از مجموعه‌های پهنا ثابت غیر دایروی دارای نقاط گوشه‌ای نیستند. فرض می‌کنیم مثلث ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع با ضلع d باشد، و چنان که در شکل ۳.۵۱، هر یک از اضلاع آن را به فاصلهٔ h از رئوس امتداد می‌دهیم. به مرکز هر رأس و شعاع h، کمان‌های A′A"، B′B"، و C′C" را رسم می‌کنیم. سپس، به مرکز هر رأس و شعاع d+h کمان‌های A"B′، B"C′، و C"A′ را رسم می‌کنیم. شش کمان حاصل مرز مجموعه‌ای با پهنای ثابت d+۲h اند.

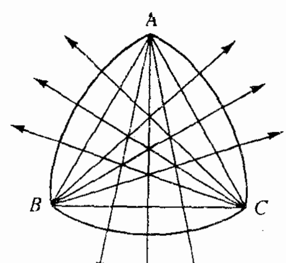
هم‌چنان می‌توان مجموعه‌های پهنا ثابت از نوع دیگری با روشی مشابه روش به کار



شکل ۳.۵۱



شکل ۳.۵۲



شکل ۳.۵۳

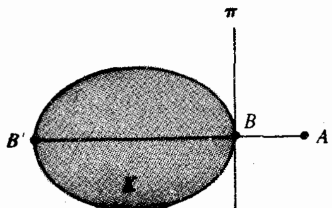
رفته در مورد مثلث رولو ساخت. مجموعه‌های از این نوع از چندضلعی‌های منتظم با تعداد اضلاع فرد استفاده می‌کنند و گاهی **چند ضلعی‌های رولو**[62] نامیده می‌شوند. در شکل ۳.۵۲ یک چندضلعی رولو با پنج ضلع را نشان داده‌ایم. هر مجموعهٔ پهنا ثابت را می‌توان به عنوان مسیر متعامد[63] مجموعه‌های خطوط متقاطع درنظر گرفت. مفهوم مسیر متعامد را تا اندازه‌ای در شکل ۳.۵۳ در مورد مثلث رولو توضیح داده‌ایم. راجع به مسیر متعامد یک مجموعه خطوط می‌توان به صورت منحنی‌ای متقاطع با هر یک از خطوط مجموعه در زاویهٔ قائمه اندیشید. هر شعاع به مبدأ A ی متقاطع $\widehat{BC}$ این کار را به زوایای قائمه انجام می‌دهد. می‌توان در مورد $\widehat{AC}$ با به کاربردن اشعهٔ از B، و $\widehat{AB}$ با به کاربردن اشعهٔ از C اظهاراتی مشابه کرد. توجه داشته باشید که این مجموعه‌های شعاع‌ها مخروط مماس ناحیهٔ مثلث شکل ABC با A، B، C به عنوان مبدأ اند.

هنوز هم مجموعه‌های پهنا ثابت به‌طور وسیعی توسط ریاضیدانان محقق مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مورد چندین خاصیت ساده‌تر را به دست دادیم، اما خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند موضوع را در مجلات حرفه‌ای جدید تعقیب کند.

قضیهٔ ۳.۲۲. اگر K جسم محدب پهنا ثابتی باشد و اگر $A \notin K$، در این صورت قطر $K \cup \{A\}$ بزرگتر از قطر K است.

مفهوم شهودی این قضیه این است که غیر از نقاط خارجی نمی‌توان به یک جسم محدب پهنا ثابت نقطه‌ای بدون افزایش پهنای آن اضافه کرد. احتمالاً، قضیه، حداقل در مورد ناحیهٔ دایروی، بدیهی به‌نظر می‌رسد.

اثبات را مختصر می‌کنیم. در شکل ۳.۵۴، فرض می‌کنیم K دارای پهنای ثابت w و $A \notin K$ باشد. فرض می‌کنیم B نزدیک‌ترین نقطهٔ K به A و π صفحهٔ گذرنده از B ی عمود



شکل ۳.۵۴

62. Reulaux Polygons

63. Orthogonal Trajectory

بر $\overleftrightarrow{AB}$ باشد. در این صورت π یک صفحهٔ پشتیبان K، و $BB'=w$ است. اما در این صورت $AB+BB'>BB'=w$.

عکس این قضیه را نیز می‌توان ثابت کرد، اما اثبات در این جا داده نشده است. قضیهٔ ۳.۲۲ و عکس آن جسم محدب پهنا ثابت را به عنوان شامل جمیع نقاط ممکن بی‌افزایش قطر توصیف می‌کند.

جمیع اجسام محدب با پهنای ثابت یکسان w را درنظر می‌گیریم. در این صورت پیدا کردن محیط (طول مرز) چندی از آنان آسان است. فی‌المثل، محیط ناحیهٔ دایروی πw است، و به‌قدر کافی جالب است که این مقدار محیط مثلث رولویی با پهنای w نیز هست. قضیهٔ زیر، که در این کتاب اثبات نمی‌شود، وضعیت عمومی این مورد را توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۳.۲۳. قضیهٔ باربیه[۶۴]. محیط جسم محدب پهنا ثابت با پهنای w ، πw است.

محققاً، جمیع مجموعه‌های محدب با پهنای ثابت یکسان مقدار مساحت یکسان ندارند. در این مورد مجموعهٔ با بیشترین مساحت ناحیهٔ دایروی است. نام مجموعهٔ باکمترین مساحت در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۳.۲۴. قضیهٔ بلاشکه ـ لبسک[۶۵]. مجموعهٔ پهنا ثابت، با پهنای مفروض مشخص شده، باکمترین مساحت مثلث رولو است.

مثلث رولو بعضی از خواص ناحیهٔ دایروی را داراست، اما مرکز (نقطه‌ای متساوی‌الفاصله از هر نقطهٔ واقع بر مرز) ندارد. در واقع، تنها اجسام محدب پهنا ثابت دارای مرکز در صفحه نواحی دایروی و در فضای سه بعدی نواحی کروی‌اند.

یکی از حوزه‌های رایج در تحقیق تحدب مفهوم پوشش عمومی است. پوشش عمومی[۶۶] به صورت ناحیهٔ مسطحی که می‌تواند در پوشاندن هر مجموعه که قطرش ۱ باشد به کاررود. هر مجموعهٔ با قطر ۱ را می‌توان در صفحه به چنان طریقی قرار دهیم که زیر مجموعه‌ای از پوشش عمومی باشد.

مجموعه‌ای که هر مجموعهٔ محدب به قطر ۱ را بپوشاند هر مجموعهٔ به قطر ۱ را خواهد پوشاند. کوچک‌ترین پوشش عمومی مربع شکل مربع واحد است. کوچک‌ترین مثلث

---

64. Barbier's Theorem
65. Blaschke ـ Lebesque Theorem
66. Universal Cover

متساوی‌الاضلاعی که پوششی عمومی است دایرهٔ محاطی داخلی‌ای به قطر ۱ دارد. مسألهٔ عمومی کوچك‌ترین پوشش عمومی هر شکل مفروض به طور کامل حل نشده است.

تمرینات ۳.٦

کمترین پهنا و قطر هر یک از مجموعه‌های تمرینات ۱-۴ را بیابید.

۱. ناحیهٔ مربع شکل به ضلع ۱ سانتی‌متر
۲. ناحیهٔ مستطیل شکل ۲ سانتی‌متر در ۳ سانتی‌متر
۳. مثلث رولوی مرسوم بر مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع یک سانتی‌متر
۴. مثلث متساوی‌الساقین به اضلاع ۷ سانتی‌متر، ۷ سانتی‌متر و ۳ سانتی‌متر

تمرینات ۵-۱۴ برای بسط بیشتر مفهوم مثلث رولو طرح شده‌اند. در مورد هرگزارهٔ مربوط به مثلث رولو، پاسخ راست یا دروغ بدهید.

۵. مرز آن منحنی بستهٔ ساده‌ای است.
٦. سه نقطهٔ گوشه‌ای دارد.
۷. پوششی عمومی است.
۸. مساحت آن مساوی مساحت ناحیه‌ای دایروی با همان پهناست.
۹. محیط آن مساوی محیط دایره‌ای با همان قطر است.
۱۰. اشتراك دو مثلث رولو مثلثی رولو است.
۱۱. یك مثلث است.
۱۲. یك چندضلعی است.
۱۳. مرز آن اجتماع سه کمان دایروی است.
۱۴. دارای مرکزی متساوی‌الفاصله از هر نقطهٔ واقع‌بر مرز آن است.
۱۵. مجموعه‌های نامحدب پهنا ثابتی، غیر از آن‌ها که در کتاب نشان داده شده‌اند، تصویر کنید.

۱۶. چند ضلعی رولویی با هفت ضلع رسم کنید.

۱۷. مجموعهٔ پهنا ثابتی، چنان که در شکل ۳.۵۱، بسازید، اما کار را به جای مثلث با پنج ضلعی آغاز کنید.

۱۸. محیط مثلث رولویی را برحسب پهنای ثابت آن بیابید و ثابت کنید که پاسخ تان صحیح است.

۱۹. مساحات ماکزیمم و می‌نیمم مجموعه‌های مسطح با پهنای ثابت ۴ را بیابید.

۲۰. ثابت کنید که کوچك‌ترین پوشش عمومی مربع شکل مربع واحد است.

۲۱. طول ضلع کوچك‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاعی را که پوششی عمومی است بیابید.

۲۲. ثابت کنید که کوچك‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاعی که پوششی عمومی است دایرهٔ محاطی داخلی‌ای به قطر ۱ دارد.

۲۳. ثابت کنید اگر P و Q دو نقطه از مجموعهٔ بستهٔ مسطح K با پهنای ثابت w باشند، و اگر $PQ=w$ باشد، در این صورت خطوط در P و Q عمود بر $\overline{PQ}$ هر دو خط پشتیبان K می‌باشند.

۲۴. قضیهٔ ۳.۲۱ را ثابت کنید.

۲۵. مثالی به دست دهید که نشان دهد که قضیهٔ ۳.۲۲ در مورد جسم نامحدب پهنا ثابت لزوماً صادق نیست.

۲۶. مثالی به دست دهید که نشان دهد که قضیهٔ ۳.۲۲ در مورد جسم محدب نه با پهنای ثابت لزوماً صادق نیست.

۲۷I. مرجعی بیابید و اثبات قضایای ۳.۲۳ و ۳.۲۴ را مطالعه کنید.

۲۸I. قسمت‌هایی از کتاب اصلی Franz Reuleaux:

The Kinematics of Machinery , translated and edited by Alex. B.W. Kennedy London: Macmillan and Company, 1876

را، که در آن مؤلف شکلی را، که اکنون به نام اوست، معرفی می‌کند، بخوانید.

۳.۷ قضیهٔ هلی و موارد استعمال آن

قضیهٔ اصلی این بخش به نام ریاضیدان اتریشی ادوارد هلی[67] (۱۹۴۳-۱۸۸۴) است. هلی در دانشگاه وین[68] و گوتینگن[69] درس خواند. قضیه‌اش را در سال ۱۹۱۳ کشف کرد و به سال

67. Eduard Helly
68. University of Vienna
69. Gottingen

۱۹۲۳ به چاپ رساند. جالب است که هلی نیز، مانند پونسله که هندسهٔ تصویری را کشف کرد، چندین سال از عمرش را به عنوان زندانی روس‌ها گذراند. در سال ۱۹۳۸، او و خانواده‌اش به ایالات متحده رفتند. قضیهٔ هلی و ارزش مطالب مربوط به آن سهمی اساسی در اکتشافات اخیر هندسهٔ تحدب داراست.

قضیهٔ ۳.۲۵. قضیهٔ هلی. فرض می‌کنیم K_1، K_2،...، K_N، N مجموعهٔ محدب نقاط، واقع در فضای n بعدی با $N \geq n+1$ و چنان‌که هر دستهٔ $n+1$ تایی از آن‌ها اشتراکی ناتهی داشته باشد، باشند. در این صورت اشتراک جمیع این مجموعه‌ها تهی نیست.

شکل ۳.۵۵ توضیح قضیهٔ هلی در مورد چهار مجموعهٔ محدب در یک صفحه است. می‌توان تحقیق کرد که هر مجموعه از سه مجموعه از چهار مجموعهٔ محدب فوق اشتراکی ناتهی دارد؛ نیز اشتراک جمیع چهار مجموعه، که با تیره‌ترین سایه مشخص شده، تهی نیست.

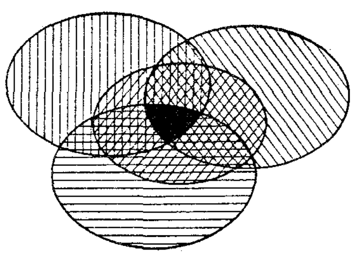
مختصری از اثبات این قضیه را به ازای $n=3$ می‌آوریم. قضیه وابسته به لمی موسوم به قضیهٔ رادن[70] که مقرر می‌کند که به ازای $P=\{P_1,...,P_N\}$ مجموعهٔ متناهی‌ای از نقاط در فضای n بعدی، اگر $N \geq n+2$ باشد، در این صورت P را می‌توان به دو مجموعهٔ مجزا که قشرهای محدب شان متقاطع‌اند، افراز کرده‌است. اثباتی از این لم در

Benson, *Euclidean Geometry and Convexity*

داده شده است.

۱. قضیهٔ هلی به ازای $N=4$ واضح است.

۲. به ازای $N=5$، جمیع مجموعه‌های ممکن نقاط $P=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$ را، چنان‌که P_i عضوی از اشتراک K_j به ازای جمیع مقادیر j از ۱ تا ۵، با شرط $j \neq i$، باشد، بنا می‌کنیم.



شکل ۳.۵۵

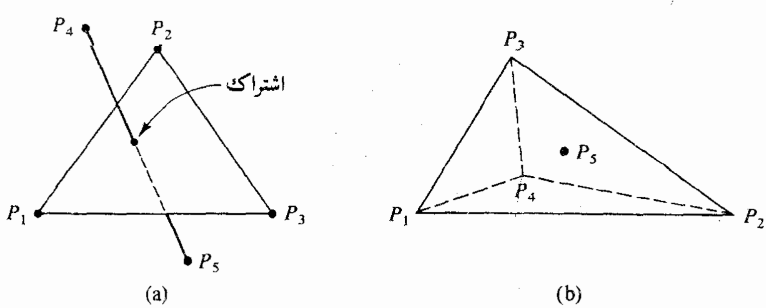
70. Radon's Theorem

فی‌المثل، P_2 عضوی از اشتراک K_1، K_3، K_4، K_5 است.

از قضیهٔ رادن هر مجموعهٔ P می‌تواند به دو مجموعهٔ S_1 و S_2 که قشرهای محدبِ‌شان متقاطع‌اند، افراز شود. اکنون نیاز به نشان دادن این است که هر نقطهٔ واقع در تقاطع این قشرهای محدب به جمیع پنج مجموعهٔ محدب اصلی متعلق است. Pرا می‌توان به دو مجموعه با سه نقطه و دو نقطه، یا به دو مجموعه با چهارنقطه و یک نقطه افراز کرد. P طوری بنا شده که پوشش محدب هر چهار نقطه به‌طور کامل در یکی از مجموعه‌های K قرار گیرد. فی‌المثل، پوشش محدب P_1، P_2، P_3، P_4 در K_5 واقع‌اند.

در مورد افراز سه ـ دویی، می‌توان قشرهای محدب مربوطه را، آن‌گونه‌که در شکل ۳.۵۶a نموده شده، به صورت مثلث و قطعه خطی با یک نقطهٔ اشتراک تصور کرد. نقطهٔ مشترک مزبور در قشر محدب هر چهار نقطهٔ P قرار دارد، و بنابراین در هر مجموعهٔ K واقع است. در مورد افراز چهار ـ یک ی، می‌توان قشرهای محدب مربوطه را، همان‌گونه‌که در شکل ۳.۵۶b نموده شده، به صورت یک چهار وجهی با نقطهٔ پنجم داخل آن درنظر گرفت. نقطهٔ P_5 در پوشش محدب هر مجموعهٔ چهارنقطه‌ای P واقع است.

۳.اثبات توسط استقرای ریاضی با به‌کاربردن N، تعداد مجموعه‌های محدب،کمال می‌یابد. فرض می‌کنیم قضیه به ازای mمجموعهٔ محدب برقرار باشد. در این صورت باید نشان‌دهیم‌که‌به‌ازای $m+1$ مجموعه‌نیزبرقراراست.فرض‌کنیم K_1،...، K_m، K_{m+1}، $m+1$ مجموعهٔ محدب چنان باشند که هر چهار مجموعه اشتراکی ناتهی داشته باشند. اکنون مجموعهٔ K_I ای که اشتراک K_m و K_{m+1} است ایجاد می‌کنیم. می‌دانیم که این مجموعه و هرسه مجموعهٔ دیگر K اشتراکی مشترک دارند. این بدان معنی‌است‌که K_1، K_2،...، K_{m-1}، K_I، m مجموعهٔ محدب، هر چهارشان دارای نقطه‌ای مشترک‌اند. در این صورت، طبق فرض‌مان، جمیع این مجموعه‌ها اشتراکی ناتهی دارند. این اشتراک مشترک به جمیع مجموعه‌های K_1،...، K_m، K_{m+1} متعلق‌اند.



شکل ۳.۵۶

بسیاری از موارد استعمال قضیهٔ هلی به صورت عمومی‌تری که در این جا بی‌اثبات بیان شده بستگی دارند.

قضیهٔ ۳.۲۶. به ازای هر دسته اجسام محدب در فضای n بعدی، اگر هر $n+1$ جسم از آن‌ها نقطهٔ مشترکی داشته باشند، در این صورت جمیع آن اجسام محدب دارای نقطهٔ مشترکی هستند.

یکی از موارد استعمال جالب قضیهٔ هلی وجود نقاطی را ثابت می‌کند که به گونه‌ای مشابه مرکز تقارن یک مجموعهٔ نقاط حتی وقتی که آن مجموعهٔ نقاط متقارن نیست عمل می‌کنند.

قضیهٔ ۳.۲۷. فرض می‌کنیم $S=\{P_1,...,P_n\}$ هر مجموعهٔ متناهی نقاطی در فضا باشد. در این صورت نقطهٔ A ای چنان موجود است که هر نیم فضای بستهٔ حاصل از صفحهٔ گذرنده از A ای شامل حداقل $\frac{n}{4}$ نقطهٔ S باشد.

به عنوان توضیح، فرض می‌کنیم S شامل شش نقطه در فضا باشد. قضیهٔ فوق چنین می‌گوید که نقطهٔ A ای چنان موجود است که هر نیم فضای بستهٔ حاصل از صفحهٔ گذرنده از A ای شامل حداقل $\frac{6}{4}$ نقاط S است. و این بدان معنی است که هر نیم‌صفحه باید در واقع شامل حداقل دو نقطهٔ S باشد، چرا که شامل بیش از یکی است. خاطرنشان کردن این مطلب نیز مهم است که لازم نیست که A عضو S باشد. قضیه توضیح نمی‌دهد که چگونه نقطهٔ A در عمل به دست می‌آید.

اثبات: از آن‌جا S که مجموعهٔ متناهی‌ای از نقاط است، ناحیهٔ کروی B ی شامل جمیع نقاط P_iای موجود است. مجموعهٔ جمیع نیم فضاهای بستهٔ شامل بیش از $\frac{3n}{4}$ نقاط S را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم H_1، H_2، H_3، H_4 هر چهار نیم فضای بسته از این نیم فضاهای بسته باشد. در یک دوره راجع به نظریهٔ مجموعه‌ها، می‌توان ثابت کرد که

$$(H_1\cap H_2\cap H_3\cap H_4)'=H'_1\cup H'_2\cup H'_3\cup H'_4$$

که در آن H'_i متمم H_i است. از آن‌جا که هر H'_iای شامل تعداد نقاطی کمتر از $\frac{n}{4}$ نقطه از S است، $H'_1\cup H'_2\cup H'_3\cup H'_4$ شامل جمیع n نقطهٔ S نیست. در این صورت $H_1\cap H_2\cap H_3\cap H_4$ باید شامل حداقل یک نقطه از S باشد.

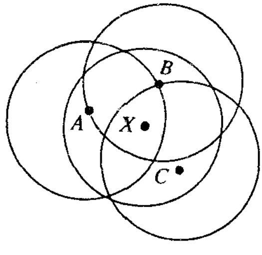
از آن‌جا که هر چهار نیم فضای بسته از نیم فضاهای بستهٔ مورد بحث دارای نقطهٔ مشترکی از S اند، می‌توان قضیهٔ هلی را (در صورت قضیهٔ ۳.۲۶) در مورد اشتراکات این نیم‌فضاها با B برای گرفتن این نتیجه که نقطهٔ Aی مشترک جمیع چنین نیم فضاهایی موجود است، به‌کار برد.

نقطه A ی مذکور نقطهٔ مطلوب قضیهٔ مورد بحث است. اگرچنین نباشد، در این صورت صفحهٔ π ی گذرنده از Aای موجود خواهد بود که مرز نیم فضای بستهٔ شامل کمتر از $\frac{n}{۴}$ نقطهٔ Sی است. نیم فضای باز مقابل H آن شامل بیش از $\frac{۳n}{۴}$ نقطهٔ S می‌شود. فرض می‌کنیم π' صفحه‌ای موازی π گذرنده از نزدیک‌ترین نقاط به π ی $S\cap H$ باشد. نیم فضای بستهٔ H' با مرز π' و واقع در H شامل بیش از $\frac{۳n}{۴}$ نقطهٔ S است، اما H' شامل A نیست، و این، از آن‌جا که فرض بر این بود که A در اشتراک جمیع نیم فضاهای شامل بیش از $\frac{۳n}{۴}$ نقاط مورد بحث باشد، تناقض است.

موارد استعمال قضیهٔ هلی شگفت‌انگیزانه متعدد است؛ و تنها تعداد کمی از آن‌ها را در این‌جا فهرست کرده‌ایم. قضیهٔ زیر، قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۳.۲۷، اما در ارتباط با حجم، است که بدون اثبات بیان شده است.

قضیهٔ ۳.۲۸ . فرض می‌کنیم S مجموعهٔ کران‌دار نقاط در فضای دارای حجم V باشد. در این صورت نقطهٔ Aای چنان موجود است که هر نیم‌فضای بستهٔ حاصل از صفحهٔ گذرنده از Aای S را در مجموعه‌ای با حجم حداقل $\frac{V}{۴}$ قطع کند.

قضیهٔ هلی چنان‌که از چهار کاربرد نهایی آن برمی‌آید رابطهٔ نسبتاً تنگاتنگی با سایر مفاهیم هندسی، از جمله مفاهیم پوشش عمومی و پهنای مجموعه، دارد. رسم اشکالی در توضیح سه مورد آخر به بهتر دانستن این موارد استعمال کمک می‌کند.



شکل ۳.۵۷

قضیهٔ ۳.۲۹. اگر هر سه نقطه از n نقطهٔ واقع در صفحه‌ای بتواند در دایره‌ای به شعاع ۱ محصور شود، در این صورت جمیع آن n نقطه را می‌توان در چنین دایره‌ای دربند کرد.

اثبات: اثبات عبارت از نشان دادن این مطلب است که نقطه‌ای (مرکز دایرهٔ مطلوب) وجود دارد که به فاصلهٔ بیش از ۱ واحد از هر یک از نقاط مزبور نیست. شکلی نمونه در مورد سه نقطه را در شکل ۳.۵۷ نشان داده‌ایم.

فرض می‌کنیم دایره‌ای به مرکز X دایرهٔ واحد دربرگیرندهٔ سه نقطهٔ A، B، C از n نقطهٔ مزبور باشد. در این صورت سه دایرهٔ واحد با مراکز A، B، C همه شامل Xاند. بنا به قضیهٔ هلی، از آن‌جا که هر سه دایرهٔ واحد به مرکز نقاط مفروض اشتراکی ناتهی دارند، جمیع چنین دایره‌هایی دارای اشتراک ناتهی‌اند. نقطه‌ای واقع در این اشتراک مشترک به عنوان مرکز دایرهٔ واحد دربرگیرندهٔ جمیع آن نقاط به‌کار می‌رود.

قضیهٔ ۳.۳۰. قضیهٔ جانگ[۷۱]. n نقطه از یک صفحه، چنان‌که هر دو نقطه از آن‌ها به فاصله‌ای کمتر از ۱ واحد از یکدیگر باشند، جمعاً، می‌توانند در دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ محصور شوند.

قضیهٔ ۳.۳۱. قضیهٔ بلاشکه. هر شکل محدب کران‌دار با پهنای ثابت ۱ شامل دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۳}$ است.

قضیهٔ ۳.۳۲. بامفروض بودن n قطعه خط موازی واقع در یک صفحه، اگر خطی موجود باشد که هر سه خط از آن‌ها را قطع کند، در این صورت خطی متقاطع با جمیع آن‌ها موجود است.

هندسهٔ تحدبات یکی از حوزه‌های به سرعت گسترش یابندهٔ هندسهٔ جدید است. نشان داده‌اند که بسیاری از اشکال آشنای هندسهٔ اقلیدسی، چون به عنوان مجموعه‌های محدب درنظر گرفته شوند، خواص تازه‌ای دارند. پایان این فصل را، به این امید که خوانندگان، مقالات تحقیقی اخیر مربوط به تحدب را جستجو خواهند کرد، دانسته باز می‌گذاریم.

---

71. Jung's Theorem

تمرینات ۳.۷

۱. در توضیح قضیهٔ هلی شکلی با شش مجموعهٔ محدب واقع در یک صفحه رسم کنید.

۲. در نشان‌دادن این که قضیهٔ هلی نمی‌تواند به ازای مجموعه‌های نامحدب برقرار باشد مثالی در یک بعدی به دست دهید.

۳. قضیهٔ هلی را در مورد فضای دو بعدی به دقت بیان کنید. جایی که مناسب باشد اعدادی معین به دست دهید.

۴. در نشان‌دادن این که قضیهٔ هلی نمی‌تواند در مورد مجموعه‌های نامحدب برقرار باشد مثالی در فضای دوبعدی به دست دهید.

۵. برای قضیهٔ هلی نمونه‌ای به ازای $n = ۱$ و $N = ۴$ رسم کنید.

٦. اثبات قضیهٔ هلی را در فضای یک بعدی به اختصار بیان کنید.

۷. اثبات قضیهٔ هلی را در فضای دو بعدی به اختصار شرح دهید.

۸. آیا قضیهٔ ۳.۲۷، به ازای هشت رأس یک مکعب، در مورد A به عنوان مرکز مکعب به کار می‌رود؟

۹. فرض می‌کنیم S مجموعه‌ای با دقیقاً ۲۴ نقطهٔ متمایز در فضا باشد. در این صورت نقطه‌ای چنان موجود است که هر نیم‌فضای بستهٔ حاصل از صفحهٔ گذرنده از این نقطه شامل حداقل چند نقطه از S است؟

۱۰. قضیه‌ای که مشابه قضیهٔ ۳.۲۷ باشد را در صفحه بیان و اثبات کنید.

۱۱. قضیهٔ ۳.۳۱ را در مورد مثلث رولویی با پهنای ثابت ۱ تحقیق کنید.

۱۲. تصویری در تحقیق قضیهٔ ۳.۳۲ رسم کنید.

۱۳. قضیهٔ ۳.۲۸ را اثبات کنید.

۱۴I. مثال‌های گوناگونی، با شروع از رئوس مثلث واحد، در گسترش شهودی قضیهٔ ۳.۳۰ درنظر بگیرید. سپس اثباتی صوری را بررسی کنید.

۱۵I. حدس‌های خودتان را درمورد کاربردهای ممکن قضیهٔ هلی بزنید، بعد با کتاب مرجع راجع به تحدب ی را ی زنید و موارد استعمال دیگری از این قضیه را، علاوه بز آن‌ها که در این بخش مذکورند، فهرست کنید.

تمرینات مروری فصل

فصل ۳

در تمرینات ۱-۴، بگویید که کدام یک از گزاره‌ها در مورد جمیع مجموعه‌های محدب شامل بیش از یک نقطه، راست است.

۱. اشتراک هر دو مجموعه از این مجموعه‌ها مجموعه‌ای محدب است.
۲. هر نقطهٔ مجموعهٔ دارای خط پشتیبانی شامل خوداست.
۳. حذف دقیقاً یک نقطهٔ مرزی به مجموعه‌ای محدب منجر می‌شود.
۴. هرنقطهٔ متعلق به این مجموعه نقطه‌ای داخلی است.

در تمرینات ۵-۱۰، بگویید که هر مجموعه همواره محدب است یا خیر.

۵. اجتماع دو زاویه و داخل‌هاشان
۶. مجموعهٔ داخل ناحیه‌ای مثلث شکل
۷. منحنی بستهٔ ساده و داخلش
۸. مجموعه‌ای که بسته، کران‌دار، و ناتهی است
۹. $\{(x,y): y>|x|\}$
۱۰. $\{(x,y): x^2+y^2\geq 1\}$
۱۱. مرز این مجموعه را توصیف کنید: $\{(x,y)$: x و y اعدادی گویا هستند$\}$

در مورد هر مجموعهٔ واقع در تمرینات ۱۲ و ۱۳، نقاط منظم و گوشه‌ای را وصف کرده بگویید که آیا خط مربوطه خط پشتیبان آن مجموعه هست یا خیر.

۱۲. مجموعه: ناحیهٔ شش ضلعی شکل
خط: خط قاطع مجموعه تنها دریک رأس

۱۳. مجموعه: زاویهٔ 50° و داخل آن
خط: یکی از اشعهٔ مُشَکِّل آن زاویه

در تمرینات ۱۴-۲۰، مشخص کنید که کدام مجموعه همواره جسمی محدب است.

۱۴. مثلث رولو

۱۵. اشتراک دوجسم محدب

۱۶. قشر محدب یک بیضی
۱۷. منحنی بستهٔ ساده و داخلش
۱۸. ناحیهٔ دایروی با حذف نقطه‌ای مرزی
۱۹. منشور قائم مستطیل قاعده وداخل آن
۲۰. داخل بیضوی

در تمرینات ۲۱ - ۲۳، قشر محدب هر مجموعه را توصیف کنید.

۲۱. سه‌نقطهٔ متمایز، نه‌واقع بریک استقامت
۲۲. زاویه‌ای حاده
۲۳. منشور قائم مثلث القاعده
۲۴. پهنای ماکزیمم یک ناحیهٔ مستطیل شکل ۲ سانتی‌متر در ۴ سانتی‌متر را بیابید.

در تمرینات ۲۵-۲۸، کدام گزاره در مورد مرز مثلث رولو همواره راست است؟

۲۵. این مثلث یک منحنی بستهٔ ساده است.
۲۶. سه نقطهٔ گوشه‌ای دارد.
۲۷. پوششی عمومی است.
۲۸. محیطش بزرگ‌تر از محیط دایره‌ای باهمان قطر است.
۲۹. فرض می‌کنیم K جسم محدب پهنا ثابت و A نقطه‌ای نه در K باشد. در مورد قطر اجتماع K و A چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟
۳۰. آیا نداشتن نقاط نهایی برای یک مجموعهٔ محدب دو بعدی ممکن است ؟
۳۱. برای ساختن دو نوع جنس، P و Q، دو ماشین، I و II، لازم است. در تهیهٔ جنس P، ماشین I یک ساعت و ماشین II، $\frac{8}{5}$ ساعت کار می‌کند. در تهیهٔ جنس Q، ماشین I، یک ساعت و ماشین II، $\frac{4}{5}$ ساعت کار می‌کند. هر ماشین می‌تواند روزی ۱۶ ساعت یا کمتر کارکند، شرکت از جنس P، ۳۰ دلار و از جنس Q، ۲۰ دلار سود می‌برد. برای سود ماکزیمم روزی چند عدد از هر جنس باید تهیه کرد؟

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان از هر مجموعهٔ تمریناتی که قبلاً از مجموعه‌های تمرینات پیشین این فصل معین نشده‌اند انتخاب کرد.

۴
هندسهٔ اقلیدسی چندضلعی و دایره

۴.۱ مفاهیم و قضایای اساسی

فصل ۲ بر هندسه به عنوان بررسی خواص گوناگون مجموعهٔ نقاط تحت تبدیلات اقلیدسی یا تشابه تأکید داشت. فصل ۳ بر تحدب، یکی از خواص توسط تبدیلات تشابه (نیز بعضی تبدیلات عمومی‌تر) محفوظ متمرکز بود. این فصل با بعضی مفاهیم و قضایای اساسی مربوط به چندضلعی‌ها (مخصوصاً مثلث‌ها) و دایره‌ها ـ مفاهیم و قضایایی که برای زمان‌های طولانی‌ای قسمتی از هندسهٔ اقلیدسی بوده‌اند ـ آغاز می‌شود. سپس به سرعت به طرف مطالبی که از ۱۸۰۰ به بعد کشف شده‌اند پیش می‌رود، و آخرین بخش آن موارد استعمال هندسهٔ اقلیدسی چند ضلعی و دایره از قبیل نسبت طلایی، شبکه‌بندی، و مسائل بسته‌بندی، قضیهٔ پیک، و مسائل اکسترمم را در برمی‌گیرد.

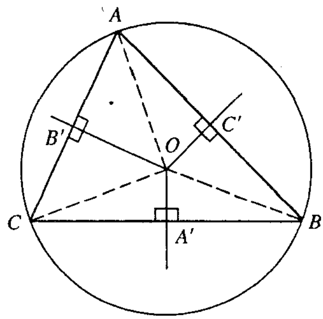
غالب مطالب این فصل، و پاره‌ای از فصل بعد، زمانی قسمت اعظم دورهٔ موسوم به «هندسهٔ دانشکده‌ای» را تشکیل می‌دادند. اگر لازم شد، می‌توانید قبل از ادامهٔ کار، به سرعت قضایای اولیهٔ این هندسه را در ضمیمهٔ ۵ مرور کنید.

در میان مفاهیم و قضایای کلیدی هندسهٔ مقدماتی قضایای تقارب که چهار نقطهٔ مهم مربوط به مثلث را شناسایی می‌کنند قرار دارند.

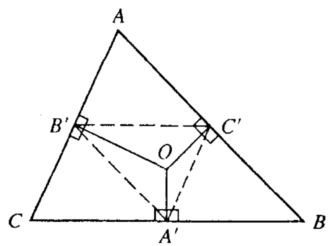
قضیهٔ ۴.۱ . عمودمنصف‌های اضلاع مثلث در نقطه‌ای به نام مرکز دایرهٔ محیطی[1] متقارب‌اند.

قضیهٔ ۴.۱ را در شکل ۴.۱ تصویر کرده‌ایم. در هندسه، هنگامی که سه خط نقطهٔ

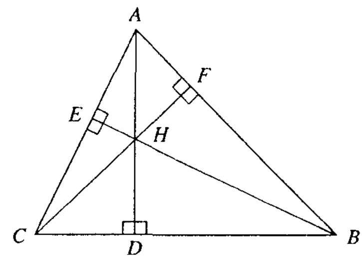
1. Circumcenter



شکل ۴.۱



شکل ۴.۲



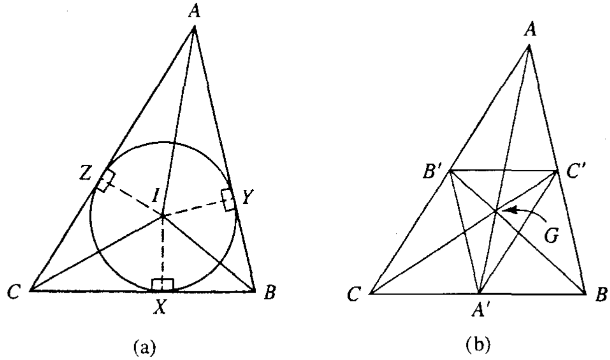
شکل ۴.۳

مشترکی داشته باشند از اهمیت برخوردار است، زیرا سه خط معمولاً، به جای تقاطع در یک نقطه، دو به دو تقاطع کرده سه نقطهٔ متمایز تعیین می‌کنند.

اثبات: اثبات قضیهٔ ۴.۱ بسته به نشان دادن این است که نقطهٔ تقاطع دو عمودمنصف مثلث، مثلاً خطوط $\overleftrightarrow{B'O}$ و $\overleftrightarrow{C'O}$ در شکل ۴.۱، بر عمودمنصف ضلع سوم آن نیز واقع است. نقطهٔ O از A و C، به علت این که بر $\overleftrightarrow{B'O}$ قراردارد، به یک فاصله است؛ نیز از A و B، به‌علت این‌که بر $\overleftrightarrow{C'O}$ می‌باشد، به یک فاصله است. بنابراین، O متساوی‌الفاصله از B و C واقع بر عمودمنصف $\overline{BC}$ است.

از آن‌جاکه O نقطه‌ای داخل مثلث و متساوی‌الفاصله از سه رأس آن است، برای نشان دادن این که مرکز دایرهٔ محیط بر مثلث (نیز موسوم به دایرهٔ محیطی مثلث)، دایرهٔ منحصربه‌فرد شامل هر سه رأس مثلث، است مرکز دایرهٔ محیطی مثلث نامیده می‌شود.

در شکل ۴.۲ مثلث $A'B'C'$ با وصل اوساط اضلاع مثلث اصلی تشکیل شده است. از آن‌جاکه قطعه خط واصل اوساط دوضلع مثلث موازی ضلع سوم آن است،



شکل ۴.۴

عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC بر اضلاع مثلث A′B′C′ نیز عمود است. این بدان معنی است که $\overleftrightarrow{A'O}$ بر $\overleftrightarrow{B'C'}$ عمود است و غیره؛ به این ترتیب عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC ارتفاعات مثلث A′B′C′ اند. معکوس کردن این گزاره به این اظهار منجر می‌شود که ارتفاعات یک مثلث عمودمنصف‌های اضلاع مثلث دیگر و درنتیجه (بنابه قضیهٔ ۴.۱) متقارب‌اند.

قضیهٔ ۴.۲ . ارتفاعات مثلث در نقطه‌ای موسوم به تقارب ارتفاعات[2] متقارب‌اند.

شکل ۴.۳ مثلث ABC و H تقارب ارتفاعات آن را نشان می‌دهد. چهار نقطهٔ A، B، C، و H، زمانی که متمایزاند، مجموعهٔ تقاربات ارتفاعات[3] تشکیل می‌دهند، که به این علت که هر یک از چهار نقطهٔ فوق تقارب ارتفاعات مثلث حاصل از سه نقطهٔ دیگر است، چنین نامیده می‌شوند.

دو قضیهٔ دیگر تقارب شامل نیمسازهای داخلی و میانه‌های یک مثلث‌اند.

قضیهٔ ۴.۳ . نیمسازهای داخلی زوایای مثلث در نقطه‌ای موسوم به مرکز داخلی[4] تلاقی می‌کنند.

اثبات قضیهٔ ۴.۳ (تفصیلات آن را به عنوان تمرین ۱۵، تمرینات ۴.۱ وامی‌گذاریم)

---

2. Orthocenter
3. Orthocentric Set
4. Incenter

بر این معنی که هر نقطهٔ واقع بر نیمساز داخلی یک زاویه به یک فاصله از اضلاع مثلث مجاور آن زاویه می‌باشد، وابسته است. فی‌المثل، در شکل ۴.۴a، اگر I واقع بر نیمساز زاویهٔ B باشد، در این صورت $IY = IX$. از آن‌جا که I متساوی‌الفاصله از هر سه ضلع مثلث موردبحث است، مرکز دایرهٔ داخلی[5]، مثلث یا دایره‌ای محاط در مثلث است. این بدان معنی است که سه ضلع مثلث به دایرهٔ داخلی مماس‌اند.

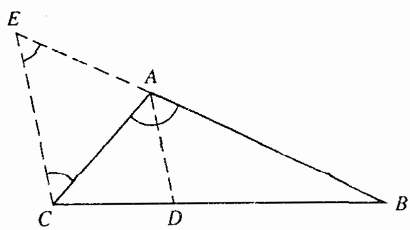
قضیهٔ ۴.۴ . میانه‌های مثلث در نقطه‌ای موسوم به برمیانه‌ها*[6] تلاقی می‌کنند.

میانه‌ها رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل آن وصل می‌کنند. در شکل ۴.۴b، مثلث‌های [illegible]BG و $GC'B'$، با نسبت تشابه ۲، متشابه‌اند. تکمیل تفصیلات این اثبات را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم. برمیانه نقطه‌ای است که مرکز ثقل مثلث نیز نامیده می‌شود.

تاکنون، چهار نقطهٔ تقارب را معرفی کرده‌ایم، و طبیعی است که کنجکاو باشید که آیا این چهار نقطهٔ جدید اصالتاً مجموعهٔ ارزش‌مندی از نقاط تشکیل می‌دهند یا خیر. این موضوع را در بخش ۴.۳ مورد بحث قرار خواهیم داد، اما در حال‌حاضر می‌توانید از حدس‌تان در مورد مکان این نقاط بهره‌ور شوید.

بسیاری از بررسی‌های مربوط به مثلث در هندسهٔ اقلیدسی شامل کار با تناسبات است. یکی از تناسب‌های مهم به عنوان وسیله‌ای در هندسهٔ دانشکده به‌کاررفته، چنان‌که در قضیهٔ ۴.۵ بیان شده، در رابطه با نیمسازهای داخلی زوایای مثلث است.

قضیهٔ ۴.۵ . نیمساز داخلی زاویهٔ مثلث ضلع مقابل آن را به دو قطعه خط متناسب با اضلاع مثلث مجاور آن زاویه تقسیم می‌کند.



شکل ۴.۵

---

5. Incircle

6. Centroid

* مرکز ثقل

اثبات: در شکل ۴.۵، فرض می‌کنیم که $\overline{AD}$ نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. $\overline{CE}$ را، که در آن E واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ است، موازی $\overline{AD}$ رسم می‌کنیم. بنا به موازیها، $\angle CEA \cong \angle CAD \cong \angle ECA$ است. این بدان معنی است که مثلث ECA متساوی‌الساقین است و $\overline{AC} \cong \overline{EA}$. اکنون به شکل مورد بحث به عنوان شکل حاصل از دو قاطع گذرنده از B ی متقاطع با یک زوج خط موازی، $\overleftrightarrow{EC}$ و $\overleftrightarrow{AD}$، می‌اندیشیم، و در این صورت موارد زیر برقرار است:

$$\frac{CD}{EA} = \frac{DB}{AB} \quad \text{یا} \quad \frac{CD}{CA} = \frac{DB}{AB}$$

در این صورت، چنان که باید برقرار شود

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$$

اثبات قضیهٔ مشابه مربوط به نیمسازهای خارجی[7] را به عنوان تمرین ۲۰، تمرینات ۴.۱ وامی‌گذاریم. نیمسازهای خارجی زوایای مثلث خواصی متناظر با خواص نیمسازهای داخلی آن‌دارند. فی‌المثل، متناظر با مفهوم مرکز دایرهٔ داخلی مفهوم مرکز دایرهٔ خارجی داده شده در صورت قضیهٔ ۴.٦ است.

قضیهٔ ۴.٦ . نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ مثلث نیمساز داخلی زاویهٔ سوم آن را در نقطه‌ای موسوم به مرکز خارجی[8] تلاقی می‌کنند.

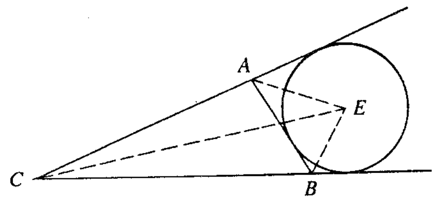
البته، هنگام صحبت از نیمسازهای خارجی مثلث، شخص باید اضلاع را به صورت «ممتد» درنظر آورد یا آن‌ها را به جای قطعه خط به عنوان خط درنظر گیرد. در شکل ۴.٦، فرض می‌کنیم که E مرکز خارجی است. از آن‌جا که E متساوی‌الفاصله از هر سه ضلع مثلث مربوطه است، مرکز دایره‌ای که به‌طور خارجی به هرسه ضلع این مثلث مماس است، می‌باشد. این دایره یکی از دوایر خارجی[9] مثلث مفروض است.

برای کمک به اثبات قضیهٔ ۴.۷ به خاصیت دیگری از نیمسازهای داخلی و خارجی - نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویهٔ مثلث متعامداند (تمرین ۲۲) - نیاز داریم.

در هندسه، می‌توان مجموعه‌ای از نقاط راگاهی به صورت برقرارکنندهٔ شرطی خاص

---

7. External Bisectors
8. Excenter
9. Excircles



شکل ۴.۶

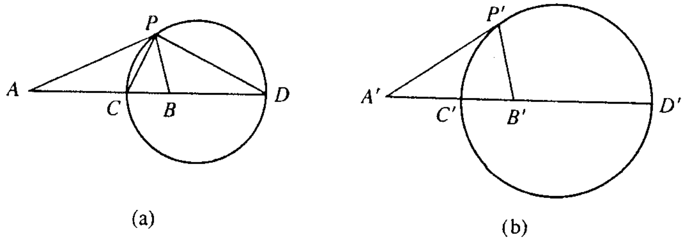
توصیف کرد. به عنوان مثال، مجموعهٔ نقاط واقع در صفحهٔ به فاصلهٔ یکسان از دو نقطهٔ ثابت عمودمنصف قطعه خط دارندهٔ آن دو نقطهٔ ثابت به عنوان ابتدا و انتهاست. مجموعهٔ جمیع نقاط واقع در صفحهٔ به یک فاصله از اضلاع یک زاویه نیمساز آن زاویه است. مجموعهٔ نقاطی که از قطعه خط مفروضی به زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند دایره‌ای به قطر آن قطعه خط است.

مفهوم مکان هندسی[10]، در اصل، در رابطه با یافتن نقاط دارای خاصیت معینی به‌کار رفته است، و کلمهٔ مکان مستلزم این بوده که منحنی مطلوب توسط مسیر یک نقطهٔ متحرک رسم شده است. امروزه، در هندسهٔ ترکیبی، رسم بر این است که به جای مکان هندسی از مفهوم مجموعهٔ نقاط[11] استفاده کنند. قضیهٔ زیر به بیان خاصیت دیگری که مجموعه‌ای از نقاط را مشخص می‌کند می‌پردازد.

قضیهٔ ۴.۷ . مجموعهٔ جمیع نقاطی، چنان که فواصل‌شان از دو نقطهٔ ثابت نسبت مفروضی دارند، به دایرهٔ آپولونیوس[12] موسوم است.

دایرهٔ آپولونیوس به نام آپولونیوس ریاضیدان یونانی که پیش از ۲۰۰ ق.م. بحث جامعی راجع به مقاطع مخروطی نوشت، موسوم است. آپولونیوس (۱۹۰-۲۶۲ ق.م) غالباً «هندسه دان‌کبیر» خوانده شده‌است. اثرش، مقاطع مخروطی[13]، عبارت از ۸ کتاب و ۴۰۰ قضیه است. به او افتخار نامیدن مقاطع مخروطی با به‌کاربردن کلمات بیضی[14]، سهمی[15]، و هذلولی[16] را داده‌اند. در اثبات قضیهٔ ۴.۷، نشان داده‌ایم که یک مجموعهٔ نقاط به این علت دایره است که

10. Locus
11. Set of Points
12. Circle of Apollonins
13. Conic Sections
14. Ellipse
15. Parabola
16. Hyperbola



شکل ۴.۷

آن نقاط رئوس زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وترش آن قطر است می‌باشند. اثبات مزبور بر این واقعیت که مثلث محاط در یک نیم‌دایره (که قطر آن نیم‌دایره یکی از اضلاعش باشد) قائم‌الزاویه است.

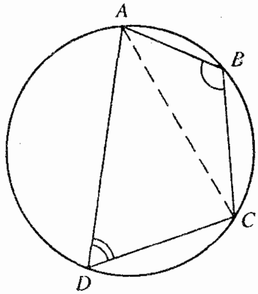
اثبات: با به کارگیری علامات شکل ۴.۷a، فرض می‌کنیم که $PA/PB = c$، ثابتی مفروض باشد. باید نشان دهیم که مجموعهٔ جمیع مواقع نقطهٔ P دایره است. دو نقطه بر $\overleftrightarrow{AB}$ واقع‌اند که فواصل‌شان از A و B دارای نسبت مطلوب است. این‌نقاط‌رادرشکل با C و D مشخص کرده‌ایم. در این صورت، در مثلث APB، $\overline{PC}$ و $\overline{PD}$ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ P اند. این مطلب را می‌توان، فی‌المثل، در مورد نقطهٔ C، با فرض صحت عکس قضیهٔ ۴.۵، از آن‌جا که

$$\frac{AC}{CB} = \frac{PA}{PB}$$

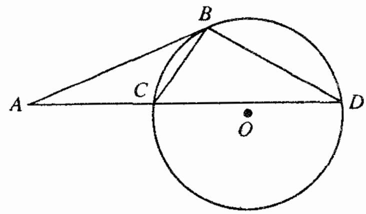
است، ثابت کرد. اما نیمسازهای داخلی و خارجی در یک رأس مثلث برهم عمودند، بنابراین $\angle CPD$ زاویه‌ای قائمه است. مثلث CPD محاط در یک نیمدایره است، لذا P بر دایره‌ای به قطر $\overline{CD}$ واقع می‌باشد. تمرینات ۲۰ و ۲۲ را ملاحظه کنید. برعکس، می‌توان نشان داد که هر نقطهٔ Pی واقع بر دایرهٔ به قطر $\overline{CD}$ دارای همین نسبت فواصل از A و B است.

شکل ۴.۷b مثال معینی از دایرهٔ آپولونیوس را، که در مورد آن $\frac{P'A'}{P'B'} = \frac{۵}{۳}$ است نشان می‌دهد. فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر دایرهٔ شکل از A'، $\frac{۵}{۳}$ فاصلهٔ آن از B' است، و نقاط واقع بر این دایره تنها نقاط واقع در صفحهٔ با این خاصیت‌اند.

در اثبات قضیهٔ ۴.۷ و موارد دیگر، گرچه توازی (تعامد) نسبتی معمولاً تعریف شده



شکل ۴.۸



شکل ۴.۹

برای خطوط است، استفاده از این مفهوم بدون اشکال به قطعه خط‌ها و اشعه بسط داده شده است. فی‌المثل، گرچه از لحاظ فنی گفتن این که $\overline{AB}$ موازی با (عمود بر) $\overline{CD}$ است غیر دقیق است، این عبارت به این معنی دانسته می‌شود که $\overleftrightarrow{AB}$، که $\overline{AB}$ زیر مجموعه‌ای از آن است، موازی با (عمود بر) $\overleftrightarrow{CD}$، که $\overline{CD}$ زیر مجموعه‌ای از آن است، می‌باشد.

گرچه از قطعه خط های جهت‌دار در اثبات قضیهٔ ۴.۷ اجتناب شده، به آن‌ها در بخش بعد و موارد دیگر نیاز است. در مورد نقاط یک خط، می‌توان جهتی را به عنوان مثبت و جهت مقابل آن را به عنوان جهت منفی مشخص کرد. هنگام بحث قطعه خط جهت‌دار، شخص باید بین نقطهٔ نهایی اول و نقطهٔ نهایی دوم آن قطعه خط تمایز قائل شود. طول یک قطعه خط خاص مثبت است اگر شخص باید از نقطهٔ نهایی اول به نقطهٔ نهایی دوم در جهت مثبت برود و منفی است اگر از نقطهٔ نهایی اول به نقطهٔ نهایی دوم آن در جهت منفی برود. در شکل ۴.۷a، اگر راست به عنوان مثبت معرفی شده باشد، در این صورت AB و BD مثال‌هایی از طول‌های مثبت‌اند، در حالی که BA و DB امثله‌ای از طول‌های منفی می‌باشند.

نسبت‌های فواصل را نیز می‌توان به عنوان مثبت یا منفی درنظر گرفت. اگر نقطهٔ سومی قطعه خط واصل دو نقطهٔ دیگر را تقسیم کند، نسبت تقسیم مذکور مثبت درنظر گرفته می‌شود اگر قطعه خط به طور داخلی تقسیم شده باشد و منفی اگر خارجی. در شکل ۴.۷a AC/CB مثبت است، در حالی که AD/DB منفی است.

دو قضیهٔ نهایی راجع به قطعه خط‌های مربوط به دایرهٔ زیر در ارتباط با قضیهٔ قبل‌اند و در اثبات قضایای پیشرفته‌تر نیز مفیدند.

قضیهٔ ۴.۸ . یک چهارضلعی در یک دایره محاط است اگر و تنها اگر زوایای مقابل آن مکمل باشند.

عبارات چهار ضلعی محاطی[17] یا چهار ضلعی دوری[18] نیز در مورد چهارضلعی محاط در دایره به کار می‌روند.شکل ۴.۸ را درنظر می‌گیریم. باید به خاطر بیاوریم که اندازهٔ زاویهٔ محاط در یک دایره نصف کمان روبه روی آن است. فی‌المثل، اندازهٔ زاویهٔ B نصف اندازهٔ کمان ADC است. اولین‌بار بابلیان باستانی محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی، که اکنون آن‌ها را درجه می‌خوانیم، تقسیم کردند. زوایای B و D از آن‌جا که با هم روبه رو به کمان‌های به مجموع 360° اند، و از آن‌جا که مجموع اندازه‌هاشان 180° (πرادیان) است مکمل‌اند.

گاهی، اضلاع مقابل چهارضلعی محاطی را نسبت به دو ضلع باقی‌مانده ضدموازی[19] می‌نامند. پیشوند «ضد» در این اصطلاح به معنی مقابل یا خلاف است. در شکل ۴.۸، اگر زوایای D و A مکمل بودند، $\overline{DC}$ و $\overline{AB}$ موازی می‌شدند. اما در عوض، زاویهٔ مقابل یا خلاف A است که مکمل D است؛ در نتیجه، قطعه خط های مزبور به جای موازی ضد موازی یا خلاف موازی می‌باشند.

قضیهٔ ۴.۹ . حاصل ضرب‌های طول‌های قطعه خط های از یک نقطهٔ خارجی تا نقاط تقاطع یک قاطع با یک دایره مساوی مربع طول مماس از آن نقطه بر آن دایره است.

اثبات: با به کاربردن علامات شکل ۴.۹، قضیه مقرر می‌کند که $AC.AD=(AB)^2$ است. به خاطر بیاورید که زاویهٔ محاطی و زاویهٔ بین مماس و وتر (زاویهٔ ظلی) نصف کمان روبه‌روی خوداند. مثلث‌های ABC و ADB به علت این‌که زوایای متناظرشان هم‌نهشت‌اند متشابه‌اند؛ بنابراین، $AC/AB=AB/AD$، که از آن قضیه حاصل می‌شود.

چهارضلعی‌های محاطی غالباً نقش مهمی در اثبات‌های هندسی ایفا می‌کنند. اثبات قضیهٔ ۴.۱۵ بخش بعدی مثال بسیار خوبی در این مورد است.

---

17. Cyclic Quadrilateral
18. Concyclic
19. Antiparallel

تمرینات ۴.۱

۱. از علامات شکل ۴.۳، برای نامیدن جمیع مثلث‌هایی که رئوس‌شان سه نقطه از نقاط داده شده و تقارب ارتفاعات شان چهارمین نقطهٔ متمایز است، استفاده کنید.
۲. آیا محل برخورد میانه‌های یک مثلث می‌تواند خارج آن مثلث باشد؟
۳. آیا مرکز داخلی مثلث می‌تواند خارج آن باشد؟
۴. آیا مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌تواند خارج مثلث باشد؟
۵. آیا دایرهٔ داخلی و دایرهٔ محیطی می‌توانند نقاط مشترک داشته باشند؟
۶. تقارب ارتفاعات مثلث قائم‌الزاویه کجاست؟
۷. تحت چه شرایطی تقارب ارتفاعات یک مثلث می‌تواند خارج آن واقع شود؟
۸. مثلث چند مرکز خارجی دارد؟
۹. آیا قطعه خط های ضد موازی می‌توانند موازی نیز باشند؟

هرون اسکندرانی[20]، در اثر موسوم به معیار[21]ش از فرمول $K=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (اکنون موسوم به فرمول هرون) برای مساحت یک ناحیهٔ مثلث شکل استفاده کرد. در این فرمول، s نیم محیط و a ، b ، c طول‌های اضلاع مثلث‌اند. در تمرینات ۱۰ و ۱۱، مساحت نواحی مثلث شکل را، درصورتی که اضلاع شان طول های داده شده را داشته باشند، بیابید.

۱۰. a=۷ ، b=۱۲ ، c=۱۵
۱۱. a=۴ ، b=۸ ، c=۵

برهماگوپتا[22] ریاضیدان هندی (۶۲۸ میلادی) فرمول صحیح $K=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ را در مورد مساحت چهار ضلعی محاطی با sنیم محیط و a ، b ، c ، dی اضلاع آن به دست داد. در تمرینات ۱۲ و ۱۳، مساحت چهار ضلعی مربوطه را، در صورتی که اضلاعش به طول‌های داده شده باشند، بیابید.

۱۲. a=۱۶ ، b=۱۵ ، c=۲۳ ، d=۲۹
۱۳. a=۴۰ ، b=۲۸ ، c=۱۵ ، d=۱۳

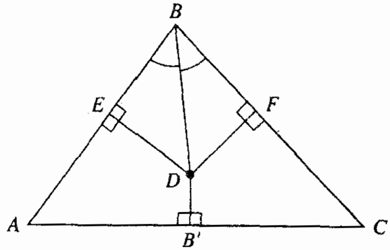
---

20. Heron of Alexandria
21. Metrica
22. Brahmagupta

۱۴. ثابت کنید که قطعه خط واصل اوساط دو ضلع مثلث موازی ضلع سوم آن است.
۱۵. اثبات قضیهٔ ۴.۳ را تکمیل کنید.
۱۶. ثابت کنید که اندازهٔ زاویهٔ بین قطعه خط های از مرکز داخلی مثلث به دو رأس آن از لحاظ رادیان مساوی $\frac{\pi}{۲}$ به علاوهٔ نصف اندازهٔ زاویهٔ رأس سوم آن مثلث است.
۱۷. اثبات قضیهٔ ۴.۴ را تکمیل کنید.

در تمرین‌های ۱۸ و ۱۹، اثبات قضیهٔ ۴.۵ را، به جای زاویهٔ A، با استفاده از زاویهٔ مشخص شده تفسیر کنید.

۱۸. زاویهٔ B، شکل ۴.۵
۱۹. زاویهٔ C، شکل ۴.۵
۲۰. ثابت کنید که نیمساز خارجی زاویهٔ مثلث ضلع مقابل آن را (به طور خارجی) به دو قطعه خط متناسب با اضلاع مجاور آن زاویه از مثلث تقسیم می‌کند.
۲۱. قضیهٔ ۴.۶ را اثبات کنید.
۲۲. ثابت کنید که نیمسازهای داخلی و خارجی در یک رأس مثلث متعامداند.
۲۳. عکس قضیهٔ ۴.۸ را اثبات کنید.
۲۴. ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر یک ضلع آن روبه رو به زوایای مساوی از دو رأس دیگر آن باشد.
۲۵. ثابت کنید که دو رأس هر مثلث و پاهای ارتفاعات وارد بر اضلاع مجاور به رأس سوم آن می‌توانند در یک دایره محاط شوند. (پاهای ارتفاعات نقاط تقاطع ارتفاعات با اضلاع مقابل مثلث‌اند.)
۲۶I. با استفاده از نمونهٔ کاغذی یک ناحیهٔ مثلث شکل و با تا کردن کاغذ اثبات شهودی (a) قضیهٔ ۴.۱، (b) قضیهٔ ۴.۲، (c) قضیهٔ ۴.۳، (d) قضیهٔ ۴.۴ را مبرهن کنید.
۲۷I. سعی در کشف اثبات فورمول هرون در مورد ناحیه‌ای مثلث شکل کنید؛ سپس در صورت لزوم، از کتاب مرجعی کمک بگیرید.
۲۸I. با شروع از مجموعهٔ اصل موضوع‌هایی که در یک کتاب دبیرستانی راجع به هندسهٔ تبدیلاتی یافت می‌شود تحقیق کنید که چند قضیه از قضایای این بخش را می‌توان با استفاده از حرکات اثبات کرد.
۲۹I. پارادکسی که از فرض ناصحیحی در شکل ۴.۱۰ نتیجه می‌شود اثبات این است که هر مثلثی متساوی‌الساقین است. فرض می‌کنیم ABC مثلث دلخواهی، با D، نقطهٔ تقاطع نیمساز زاویهٔ در B و عمودمنصف $\overline{AC}$، باشد. $\overline{DE}$ و $\overline{DF}$ بر اضلاع مربوطه عموداند.



شکل ۴.۱۰

a. از مثلث‌های همنهشت اثبات کنید که ΔABC متساوی‌الساقین، با $AB=BC$، است.
b. فرض دروغی را که اثبات فوق بر آن بنا شده بیابید.

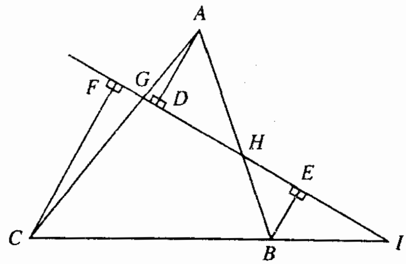
۴.۲ بعضی قضایای منجر به هندسهٔ ترکیبی جدید

دو قضیهٔ زیر که معمولاً با یکدیگر بررسی می‌شوند، گرچه در ادوار متفاوت اثبات شده‌اند، به این علت که تنها در ارتباط با بر یک استقامت بودن و تقارب اند و در نتیجه در مطالعهٔ هندسهٔ تصویری، که در آن دیگر فاصله لامتغیر نیست، ارزش دارند، از اهمیت بسیار برخوردارند. اولین این دو منسوب به ریاضیدان یونانی منلائوس است که در حدود ۱۰۰ ق.م. در اسکندریه می‌زیست.

قضیهٔ ۴.۱۰ . قضیهٔ منلائوس[۲۳]. اگر سه نقطه، هر یک بر ضلعی از یک مثلث (در صورت لزوم بر امتداد آن) واقع بر یک استقامت باشند، در این صورت حاصلضرب نسبت‌های تقسیم اضلاع توسط آن نقاط، در صورتی که نسبت‌های داخلی مثبت و نسبت‌های خارجی منفی درنظر گرفته شوند، یکِ منفی (۱-) است.

در مورد قطعه خط‌های جهت‌دار، جهت مثبتی در امتداد یک خط به دلخواه درنظر گرفته می‌شود. در شکل ۴.۱۱، اگر جهت از A به C مثبت باشد، در این صورت AC بر قطعه خطی با طول مثبت دلالت می‌کند و $AC=-CA$ است. به این ترتیب، AG و GC هر دو مثبت‌اند و نسبت داخلی AG/GC مثبت است. اگر C تا A مثبت درنظر گرفته شده باشد، در

23. Menelaus' Theorem



شکل ۴.۱۱

این صورت AG و GC هر دو منفی خواهند بود، اما نسبت‌شان هنوز مثبت است. با استفاده از این قرارداد قطعه خط‌های جهت‌دار، دو قطعه خط مربوط به نسبت خارجی در علامت مقابل‌اند، و نسبت شان منفی خواهد بود.

اثبات: با استفاده از علایم شکل ۴.۱۱، فرض می‌کنیم که نقاط G، H، I سه نقطهٔ واقع بر یک استقامتِ هر یک بر یکی از اضلاع مثلث ABC ی مفروض باشند. لازم است ثابت کنیم که

$$\frac{AG}{GC}\cdot\frac{GI}{IB}\cdot\frac{BH}{HA} = -۱$$

ازواج مثلث‌های متشابه زیر را می‌توان ملاحظه کرد:

$\Delta\ ADG \sim \Delta\ CFG$

$\Delta\ BEI \sim \Delta\ CFI$

$\Delta\ BEH \sim \Delta\ ADH$

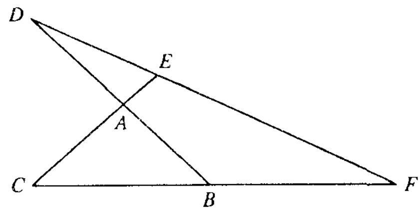
از سه زوج مثلث متشابه فوق، از آن‌جا که اضلاع متناظر مثلث‌های متشابه دارای یک نسبت‌اند، سه تناسب استخراج می‌شود. نیز به‌خاطر بیاورید که علامت AG دلالت بر اندازهٔ $\overline{AG}$، که عددی است، دارد.

$$\frac{AG}{GC} = \frac{AD}{CF} \qquad \frac{CI}{IB} = -\frac{CF}{BE} \qquad \frac{BH}{HA} = \frac{BE}{AD}$$

(به‌علت این که I، CB را به طور خارجی تقسیم کرده ، منفی در نظر گرفته می‌شود)

در این صورت

$$\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CI}{IB}\cdot\frac{BH}{HA} = -\frac{AD}{CF}\cdot\frac{CF}{BE}\cdot\frac{BE}{AD} = -۱$$



شکل ۴.۱۲

سه نسبت فوق را می‌توان با آغاز از یک رأس (مثلاً A) و پیشروی به دور مثلث در امتداد قطعه خط های جهت‌دار (مثلاً در جهت عکس مثلثاتی)، با رفتن از یک رأس به یک نقطهٔ تقسیم، سپس به رأس دیگر، بعد به نقطهٔ دیگر تقسیم، و غیره، نامگذاری کرد. می توان از همین نمونه، چنان که در شکل ۴.۱۲، هنگامی که هر سه نقطهٔ تقسیم خارجی‌اند، استفاده کرد:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BD}{DA} = -1$$

در بحث فوق، خط قطع‌کنندهٔ اضلاع مثلث (خط GHI در شکل ۴.۱۱ و DEF در شکل ۴.۱۲) قاطع[24] نامیده می‌شود.

در حالتی که قاطع مورد بحث از رأسی می‌گذرد، صورت قضیه را می‌توان برای اجتناب از صفر در مخرج تعدیل کرد (تمرین ٦، تمرینات ۴.۲ را ملاحظه کنید).

عکس قضیهٔ منلائوس وسیلهٔ مهمی در اثبات بر یک استقامت واقع بودن سه نقطه به دست می‌دهد.

قضیهٔ ۴.۱۱. عکس قضیهٔ منلائوس. اگر حاصل ضرب نسبت‌های تقسیم اضلاع یک مثلث توسط سه نقطه، هر یک واقع بر یکی از اضلاع، در صورت لزوم بر امتداد آن، یکِ منفی باشد، در این صورت آن سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت‌اند.

اثبات: با استفاده از علایم شکل ۴.۱۲ فرض می‌کنیم که D، E، و F سه نقطه هریک بر یکی از اضلاع مثلث و حاصل ضرب نسبت‌های تقسیم یکِ منفی باشد. از این گذشته، فرض می‌کنیم که $\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ را در نقطهٔ متمایز D' تلاقی کند. باید نشان دهیم که

24. Transversal

$D'=D$ است. با استفاده از قضیهٔ منلائوس در مورد E، F، و 'D،

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BD'}{D'A}=-1$$

ولی این بدان معنی است که

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BD'}{D'A}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BD}{DA}$$

یا

$$\frac{BD'}{D'A}=\frac{BD}{DA}$$

$$\frac{BD'+D'A}{D'A}=\frac{BD+DA}{DA}$$

و از آن‌جا که $BA=BD'+D'A$ یا $BD+DA$ است،

$$D'A=DA$$

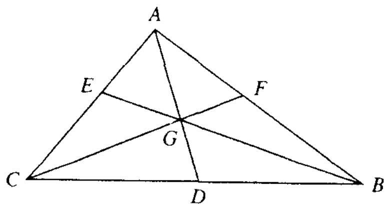
بنابراین، D و 'D یک نقطه‌اند، که بدین معنی است که D ، E ، و F واقع بر یک استقامت می‌باشند.

در مورد اثبات قضیهٔ ۴.۱۱، فرض بر این بوده که خط DEF با هیچ یک از اضلاع مثلث ABC موازی نیست، بنابراین D، E، و F نقاطی معمولی‌اند. قضیه می‌تواند برای تأمین حالت خاصی که در آن D، E، یا F نقطه‌ای انگاره‌ای (فصل ۷ را ملاحظه کنید) است تعمیم یابد. فی‌المثل، اگر D انگاره‌ای باشد، در این صورت می‌توان رابطه را در صورت تعدیل شده‌اش $BD/DA=-1$ فرض کرد.

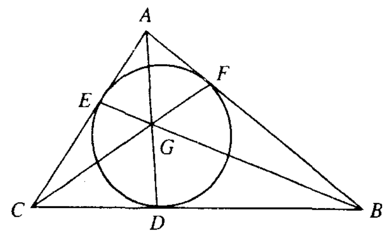
قضیهٔ ۴.۱۱ می‌تواند در اثبات چندین قضیهٔ دیگر، که یکی از آن‌ها در زیر بیان اما به عنوان تمرین اثبات شده، به کار رود. در مورد قضیهٔ ۴.۱۲ فرض کنید که خطوط در نقاط معمولی تقاطع می‌کنند.

قضیهٔ ۴.۱۲ . نیمسازهای داخلی دو زاویه از مثلث و نیمساز خارجی زاویهٔ سوم آن اضلاع مقابل آن مثلث را در سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت قطع می‌کنند.

قضیه‌ای که غالباً جفت قضیهٔ منلائوس می‌آید، قضیهٔ سوا، در حدود ۱۶۷۸ توسط



شکل ۴.۱۳



شکل ۴.۱۴

سوا[25] ریاضیدان ایتالیایی کشف شده است. قضیهٔ منلائوس با سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت سروکار دارد، در حالی که قضیهٔ سوا در مورد سه خط متقارب است.

قضیهٔ ۴.۱۳. قضیهٔ سوا و عکس آن. سه خطی که سه نقطه، هر یک واقع بر یکی از اضلاع یک مثلث، را به رئوس مقابل آن اضلاع وصل می‌کنند متقارب‌اند اگر و تنها اگر حاصل‌ضرب نسبت‌های تقسیم اضلاع مثلث برابر ۱ باشد.

اثبات: با استفاده از علایم شکل ۴.۱۳، با ΔABC به عنوان مثلث مبنا، کاربرد قضیهٔ منلائوس در مورد مثلث ABD و $\overleftrightarrow{CF}$ نشان می‌دهد که

$$\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}=-۱$$

در مورد مثلث ACD و $\overleftrightarrow{BE}$،

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DG}{GA}=-۱$$

ضرب اعضای چپ و راست این روابط به موارد زیر منتج می‌شود:

$$\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DG}{GA}=۱$$

یا

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BE}{FA}=۱$$

25. Ceva

سه نسبت فوق را می‌توان با پیروی از همان نمونهٔ موصوف در مورد قضیهٔ منلائوس به سرعت نوشت: از یک رأس آغاز می‌کنیم، به نقطهٔ تقسیم می‌رویم، بعد به رأس دیگر، و همین‌طور ادامه می‌دهیم. قضیهٔ سوا را می‌توان، بدون استفاده از قضیهٔ منلائوس، با به کاربردن مثلث‌های متشابه مستقیماً اثبات کرد (تمرین ۱۱، تمرینات ۴.۲).

عکس قضیهٔ سوا، که به‌طور غیرمستقیم به گونه‌ای مشابه با قضیهٔ ۴.۱۱ اثبات می‌شود، وسیلهٔ مفیدی در اثبات متقارب بودن سه خط است. فی‌المثل، اکنون می‌توان از آن، برای به دست دادن اثبات‌های بسیار ساده‌ای در مورد این که میانه‌ها و نیمسازهای داخلی زوایای یک مثلث متقارب‌اند، استفاده کرد (تمرینات ۱۲-۱۴، تمرینات ۴.۲ را ملاحظه کنید).

یکی از موارد استعمال جدیدتر عکس قضیهٔ سوا در هندسهٔ اقلیدسی معمولی در اثبات قضیهٔ زیر است:

قضیهٔ ۴.۱۴ . قطعه خط‌های از رئوس هر مثلث به نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی آن با اضلاع مقابل آن مثلث متقارب‌اند.

این قضیه در اوایل قرن نوزدهم توسط جی.دی.ژرگون[۲۶]، ریاضیدان فرانسوی، اثبات شده، و نقطهٔ تقارب به نقطهٔ ژرگونی[۲۷] موسوم است.

اثبات: با استفاده از علایم شکل ۴.۱۴، از آن‌جاکه دو مماس از یک نقطه بر یک دایره هم‌نهشت‌اند، $AE=AF$، $CE=CD$، $BD=BF$، و

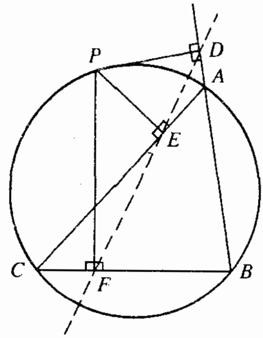
$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=۱$$

بنابراین، سه قطعه خط مذکور، بنا به عکس قضیهٔ سوا متقارب‌اند.

در سراسر تاریخ هندسه بسیاری از دیگر قضایای مربوط به تقارب و واقع بر یک استقامت بودن نظر هندسه‌دان‌ها را به خود جلب کرده است. مثال دیگری در این مورد که منسوب به ربرت سیمسون[۲۸] (۱۷۶۸-۱۶۸۷) ریاضیدان انگلیسی است، رجوع به یک مثلث و نقطه‌ای واقع بر دایرهٔ محیطی آن دارد.

---

26. J.D. Gergonne
27. Gergonne Point
28. Robert Simson



شکل ۴.۱۵

قضیهٔ ۴.۱۵ . سه عمود از یک نقطهٔ واقع بر دایرهٔ محیطی یک مثلث مفروض بر اضلاع آن، اضلاع را در سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت قطع می‌کند. خطی که سه نقطهٔ مورد بحث بر آن واقع‌اند به خط سیمسونی[۲۹] موسوم است.

اثبات: علایم شکل ۴.۱۵ را، با نقطهٔ Pی واقع بر دایرهٔ محیطی و D ، E ، F ، پاهای عمودها، به‌کار می‌بریم. نقاط P، D، A، و E بنابه عکس قضیهٔ ۴.۸ دوری‌اند (بر یک دایره قرار دارند). به همین ترتیب، P، A، C، و B بر دایرهٔ دیگری قرار دارند، و P، D، B، و F هم بر دایرهٔ سومی واقع‌اند.

در دایرهٔ P , D , A , E	$\angle PDE \cong \angle PAE$
	$\angle PAE \cong \angle PAC$
در دایرهٔ P , A , C , B	$\angle PAC \cong \angle PBC$
	$\angle PBC \cong \angle PBF$
در دایرهٔ P , D , B , F	$\angle PBF \cong \angle PDF$

از آن‌جا که روابط فوق این واقعیت را بنا می‌کنند که $\angle PDE \cong \angle PDF$، نقاط D ، E ، F واقع بر یک استقامت‌اند.

در مورد هر نقطهٔ Pی واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث، یک خط سیمسون مشخص می‌شود. حالت خاصی که در آن P بر یکی از رئوس مثلث منطبق است در مبحث تمرینات بررسی شده است.

29. Simson Line

تمرینات ۴.۲

۱. آیا یک قاطع می‌تواند ضلع مثلثی را به‌طور داخلی و دو ضلع دیگر آن را به طور خارجی قطع کند؟

در تمرینات ۲-۵، از شکل ۴.۱۶ استفاده کنید. در مورد مثلث و قاطع نامبرده در تمرین مربوطه، حاصل ضرب سه نسبت مساوی با منفی یک را با استفاده از قضیهٔ منلائوس بنویسید.

۲. مثلث ABF و قاطع E ، D ، C

۳. مثلث BCD و قاطع A، E، F

۴. مثلث EFD و قاطع A ، B، C

۵. مثلث AEC و قاطع F، D، B

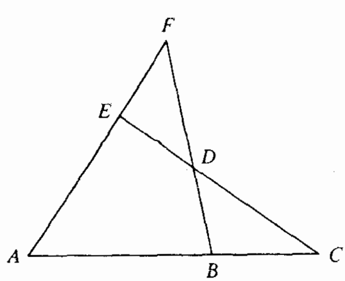
۶. صورت دیگری از قضیهٔ منلائوس را، با نشان دادن این که حاصل‌ضرب سه قطعه خط مساوی منفی حاصل‌ضرب سه قطعه دیگر است، بنویسید. مقدار این حاصل ضرب در صورتی که یکی از نقاط تقاطع بر یکی از رئوس مثلث منطبق شود چیست؟

۷. قضیهٔ ۴.۱۲ را ثابت کنید.

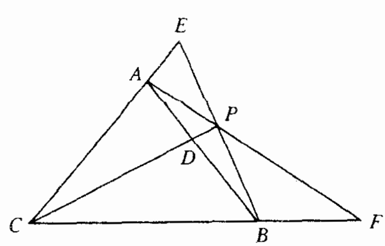
۸. از عکس قضیهٔ منلائوس در اثبات این که نیمسازهای خارجی زوایای مثلث اضلاع مقابل‌شان از آن مثلث را در سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت تلاقی می‌کنند، استفاده کنید.

۹. زوایای مثلث روی هم شش نیمساز، سه داخلی و سه خارجی، دارند. ثابت کنید که این شش نیمساز اضلاع مقابل‌شان را در شش نقطه که بر چهار خط، هر سه نقطه بر یک خط واقع‌اند، تلاقی می‌کنند (این مطلب را با یکی از هندسه‌های متناهی بررسی شده در فصل ۱ مقایسه کنید.)

۱۰. در شکل ۴.۱۷، فرض می‌کنیم A، B، C رئوس مثلثی، با نقطهٔ تقارب سه قطعه خط از رئوس، P، باشند. با استفاده از قضیهٔ سوا سه نسبتی را که حاصل ضرب شان برابر ۱ است بنویسید.



شکل ۴.۱۶



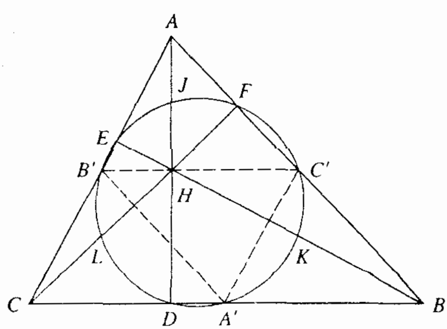
شکل ۴.۱۷

۱۱. قضیهٔ سوا را مستقیماً و بدون استفاده از قضیهٔ منلائوس، ثابت کنید.
۱۲. از قضیهٔ ۴.۱۳ در اثبات این که میانه‌های مثلث متقارب‌اند، استفاده کنید.
۱۳. از قضیهٔ ۴.۱۳ در اثبات این که نیمسازهای داخلی زوایای مثلث متقارب‌اند، استفاده کنید.
۱۴. از قضیهٔ ۴.۱۳ در اثبات این که نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ مثلث و نیمساز داخلی زاویهٔ سوم آن متقارب‌اند، استفاده کنید.
۱۵. چند خط سیمسون در ارتباط با یک مثلث‌اند؟
۱۶. موضع خط سیمسون را، در صورتی که نقطهٔ واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث رأس آن باشد، توصیف کنید.
۱۷I. نمونه‌ای کاغذی بسازید و با استفاده از تا کردن کاغذ اثبات شهودی (a) قضیهٔ ۴.۱۴ و (b) قضیهٔ ۴.۱۵ را مبرهن کنید.

۴.۳ دایرهٔ نه نقطه و هندسهٔ ترکیبی اوایل قرن نوزدهم

احتمالاً مهم‌ترین کشف منجربه تجدید علاقه به هندسهٔ کلاسیک مثلث و دایره در اوایل قرن نوزدهم، دایرهٔ نه نقطه، گاهی منسوب به فویر باخ[30] ریاضیدان آلمانی در ۱۸۲۲ می‌باشد.

قضیهٔ ۴.۱۶. اوساط اضلاع مثلث، نقاط تقاطع ارتفاعات و اضلاع، اوساط قطعه خط‌های واصل تقارب ارتفاعات به رئوس آن مثلث همگی بر دایره‌ای موسوم به دایرهٔ نه نقطه[31] قرار دارند.



شکل ۴.۱۸

30. Feuerbach
31. Nine - Point Circle

در شکل ۴.۱۸، دایرهٔ نه نقطه‌ای نشان داده شده است. این دایره جز در موارد خاص هر یک از اضلاع مثلث را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند.

اثبات: اثبات قضیهٔ فوق از نمونهٔ زیر پیروی می‌کند:

a. دایره‌ای گذرنده از A'، B'، C'، اوساط اضلاع مثلث، موجود است، زیرا هر سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت بر دایره‌ای واقع‌اند.

b. نشان می‌دهیم که نقاط D، E، F بر این دایره واقع‌اند.

c. نشان می‌دهیم که نقاط J، K، L بر این دایره واقع‌اند.

برای اثبات این که D بر همان دایرهٔ گذرنده از A'، B'، C' واقع است، ممکن است که نشان دهیم که $DB'C'A'$ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین (تمرین ۵ را ملاحظه کنید) و، در نتیجه، محاط در این دایره است، $\overline{A'C'} \cong \overline{DB'}$ به این علت است که $\overline{A'C'}$ اوساط اضلاع مثلث ABC را به هم وصل می‌کند و بنابراین اندازه‌ای برابر نصف اندازهٔ قاعدهٔ AC دارد و $\overline{DB'}$ رأس زاویهٔ قائمه و وسط وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC را به هم وصل می‌کند، که مستلزم این است که DB' نصف این وتر باشد (تمرین ۴ را ملاحظه کنید).

اکنون دایرهٔ به قطر $\overline{JA'}$ را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ B'، از آن‌جا که زاویهٔ $JB'A'$ زاویه‌ای قائمه است، بر این دایره واقع است (تمرین ٦ را ملاحظه کنید)؛ نقطهٔ C' نیز بر این دایره است. بنابراین J بر همان دایره که $A'B'C'$ واقع است قرار دارد.

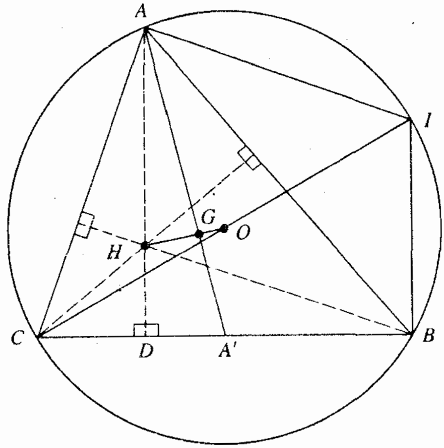
دربارهٔ دایرهٔ نه نقطه و ارتباطش با سایر مجموعه‌های نقاط هندسهٔ اقلیدسی، گنجینه‌ای از اطلاعات اضافی موجود است. یکی از اطلاعات مهم در این مورد موقع مرکز دایرهٔ نه نقطه در رجوع با چند نقطه دیگر قبلاً مذکور است. این اطلاعات وابسته به قضیه‌ای که توسط اولر ریاضیدان آلمانی در ۱۷٦۵ اثبات شده، است.

قضیهٔ ۴.۱۷ . مرکز ثقل مثلث قطعه خط واصل مرکز دایرهٔ محیطی و تقارب ارتفاعات آن مثلث را ثلث می‌کند.

خط شامل این سه نقطه به خط اولر[32] موسوم است. کلمهٔ «ثلثی[33]» که در این‌جا به

---

32. Euler Line   33. Trisect



شکل ۴.۱۹

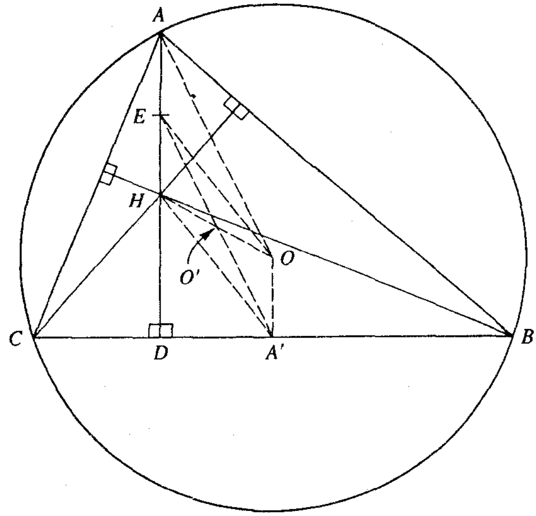
کاررفته بدین معنی است که فاصلهٔ در امتداد این خط از مرکز دایرهٔ محیطی تا مرکز ثقل یک سوم فاصلهٔ در امتداد همین خط از مرکز دایرهٔ محیطی تاتقارب ارتفاعات مثلث است.

اثبات: در شکل ۴.۱۹، فرض می‌کنیم O مرکز دایرهٔ محیطی، G مرکز ثقل، و H تقارب ارتفاعات مثلث مربوطه است. اندازهٔ $\overline{AH}$ دو برابر اندازهٔ $\overline{OA'}$ است. و این به این علت راست است که مثلث‌های CBI و COA' با نسبت تشابه ۲ به ۱ متشابه‌اند، و IB=AH زیرا AHBI متوازی‌الاضلاع است. اما مثلث‌های GOA' و GHA با نسبت ۱ به ۲ متشابه‌اند؛ بنابراین $OG=\frac{1}{2}GH$، و G، $\overline{OH}$ را ثلث می‌کند.

ممکن است این مطلب که خط اولر، چنان که در قضیهٔ بعد مشخص شده، مرکز دایرهٔ نه نقطه نیز هست، شگفت به‌نظر بیاید.

قضیهٔ ۴.۱۸. مرکز دایرهٔ نه نقطه قطعه خط واصل تقارب ارتفاعات و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را نصف می‌کند (شکل ۴.۲۰ را ملاحظه کنید).

اثبات: از قضیه ۴.۱۷، $\overline{EH} \cong \overline{OA'}$ است، و دو قطعه خط مزبور در ضمن موازی‌اند. اگر O' مرکز دایرهٔ نه نقطه باشد، وسط قطر $\overline{A'E}$ است. اما $OA'HE$ متوازی‌الاضلاع است، و اقطار متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند. و این بدان معنی است که O' وسط OH است.



شکل ۴.۲۰

دایرهٔ نه نقطه، دایرهٔ محیطی $\Delta A'B'C'$ است. در این صورت اگر بخواهیم دایرهٔ نه نقطهٔ $\Delta A'B'C'$ را رسم کنیم، N مرکز آن خواهد بود، و اگر این جریان هم‌چنان ادامه یابد، مرکز ثقل در مورد جمیع مثلث‌ها یکسان باقی می‌ماند.

جمیع قضایای تقاربی که تاکنون مورد بررسی واقع شده‌اند با تقارب سه خط در ارتباط اند. در این مورد، قضیهٔ میکوئل[34] تااندازه‌ای از این لحاظ که تقارب مجموعه‌های سه دایره‌ای مرتبط با هر مثلث را بررسی می‌کند، دارای اهمیت است. قضیهٔ مورد بحث به نام آگوست میکوئل[35] است، که آن را در ۱۸۳۸ در ضمن "Théoréms de Géométrie" منتشر در:

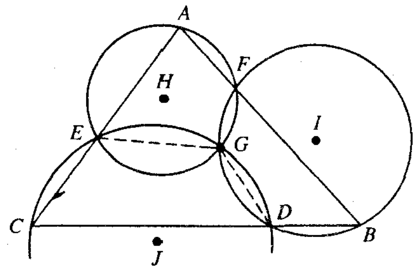
Journal de Mathematiques Pure et appliquées , Vol.iii

مطرح کرد.

قضیهٔ ۴.۱۹. اگر سه نقطه، هر یک بر یکی از اضلاع یک مثلث، انتخاب شوند، در این صورت سه دایرهٔ مشخص با یکی از رئوس و دو نقطه از آن نقاط که واقع بر اضلاع مجاور این رأس باشند، در نقطه‌ای موسوم به نقطهٔ میکوئلی[36] تلاقی می‌کنند.

---

34. Miquel's Theorem
35. Auguste Miquel
36. Miquel Point



شکل ۴.۲۱

اثبات: با استفاده از علایم شکل ۴.۲۱، فرض می‌کنیم D، E، و F نقاط دلخواهی واقع بر اضلاع مثلث ABC باشند، و فرض می‌کنیم دوایر با مراکز I و J در نقطهٔ G تقاطع کنند. $\angle EGD$ و $\angle ECD$، در دایرهٔ J، مکمل‌اند، و $\angle FGD$ و $\angle DBA$، در دایرهٔ I، مکمل‌اند. علامت m در مابقی اثبات به مفهوم اندازهٔ زاویهٔ مربوطه است. از آنجا که

$$m\angle EGD + m\angle DGF + m\angle EGF = ۲\pi$$
$$\pi - m\angle C + \pi - m\angle B + m\angle EGF = ۲\pi$$
$$m\angle EGF = m\angle C + m\angle B = \pi - m\angle A$$

که بدین معنی است که $\angle A$ و $\angle EGF$ مکمل‌اند، و بنابراین A، F، G، E بر دایره‌ای واقع، و جمیع سه دایرهٔ مورد بحث متقارب‌اند. امکان دارد که نقطهٔ میکوئل خارج مثلث باشد، که در این صورت اثبات فوق باید اندکی تعدیل شود.

تمرینات ۴.۳

۱. هر مثلث چند:

a. دایرهٔ نه نقطه، b. خط اولر، c. نقطهٔ میکوئل، دارد؟

۲. در حالت کلی، هر مثلث و دایرهٔ نه نقطه‌اش چند نقطهٔ مشترک دارند؟

۳. بیشترین و کمترین تعداد نقاطی را، که مثلث و دایرهٔ نه نقطه‌اش ممکن است مشترک داشته باشند به دست دهید.

(در تمرینات ۴-۶) در اثبات قضیهٔ ۴.۱۶،

۴. ثابت کنید که قطعه خط رابط رأس زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه به وسط وتر آن،

اندازه‌ای نصف آن وتر دارد.

۵. ثابت کنید که $DB'C'A'$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است.

۶. ثابت کنید که $JB'A'$ زاویه‌ای قائمه است.

۷. تفصیلاتی از اثبات قضیهٔ ۴.۱۷ را که در متن نیامده تکمیل کنید.

۸. ثابت کنید که شعاع دایرهٔ نه نقطهٔ هر مثلث نصف شعاع دایرهٔ محیطی آن است.

۹. ثابت کنید که دایرهٔ نه نقطهٔ هر مثلث هر قطعه خط رابط تقارب ارتفاعات آن مثلث به نقطه‌ای بر دایرهٔ محیطی آن را نصف می‌کند.

۱۰. ثابت کنید که چهار مثلث حاصل از نقاط یک مجموعهٔ تقارب ارتفاعاتی نقاط، یک دایرهٔ نه نقطه دارند.

۱۱. a. شکلی رسم کنید که مثالی را که در آن نقطهٔ میکوئل خارج مثلث مربوطه است نشان دهد.

b. در مورد فوق اثبات را به اندازه‌ای که برای تقارب سه دایره لازم است تعدیل کنید.

۱۲. شکلی رسم کنید که مثالی را، که در آن نقطهٔ میکوئل بر یکی از اضلاع مثلث مربوطه قراردارد و دو دایره از دوایر آن مماس‌اند، نشان دهد. اثبات را به‌قدرنیاز تعدیل کنید.

۱۳. بر خط اولر، نشان دهید که مرکز ثقل وتقارب ارتفاعات قطعه خطی را، که دو سر آن مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ آن است، به‌طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم می‌کنند.

۱۴. ثابت کنید نقطهٔ میکوئل مثلث نقطه‌ای بر دایرهٔ محیطی آن در صورتی است که سه نقطهٔ واقع بر اضلاع مثلث مربوطه واقع بر یک استقامت باشند.

۱۵. ثابت کنید هرگاه نقطهٔ میکوئل بر دایرهٔ محیطی مثلث واقع باشد، در این صورت سه نقطهٔ واقع بر اضلاع مثلث مربوطه واقع بر یک استقامت‌اند.

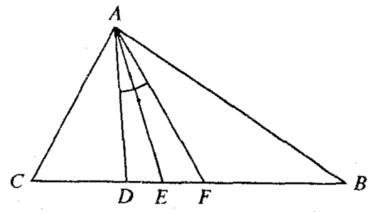
۱۶I. موارد استعمال دیگر نظریهٔ شامل نقطهٔ میکوئل را در: "Davis, College Geometry" تحقیق کنید.

۴.۴ مزدوج‌های هم زاویه

در این بخش و بخش بعد به بحث در مورد سه سهم مهم در هندسهٔ ترکیبی جدید مثلث می‌پردازیم. اولین این سه، منسوب به لموین[37] (در حدود ۱۸۷۳)، مفهوم هم میانه‌هاست.

---

37. Lemoine



شکل ۴.۲۲

شکل ۴.۲۲ را درنظر می‌گیریم. اگر $\overline{AE}$ نیمساز زاویهٔ A باشد و اگر $\angle DAE \cong \angle FAE$ باشد، در این صورت $\overline{AD}$ و $\overline{AF}$ به خطوط هم‌زاویه[۳۸] موسوم‌اند و یکی مزدوج هم‌زاویه[۳۹] دیگری نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، $\overline{AD}$ مزدوج هم‌زاویهٔ قطعهٔ $\overline{AF}$ است اگر $\angle DAC \cong \angle FAB$. نیمساز زاویهٔ مزبور نیمساز زاویهٔ بین دو مزدوج هم‌زاویه است. طبق این تعریف، اضلاع مجاور این مثلث خود مزدوج‌های هم‌زاویه‌اند.

تعریف. هم‌میانه[۴۰] مزدوج هم‌زاویهٔ میانه است.

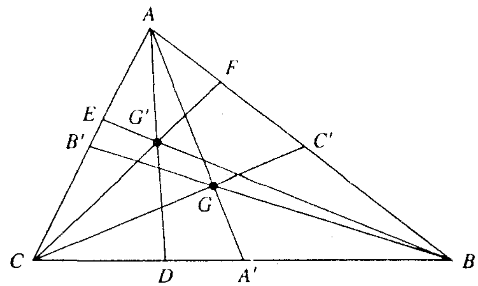
در شکل ۴.۲۲، فرض می‌کنیم که $\overline{AF}$ میانه باشد. در این صورت $\overline{AD}$ هم‌میانه است. پیش از خواندن، ملاحظه کنید که در مورد مجموعهٔ هم میانه‌ها خود می‌توانید چه مطالبی کشف کنید. سه هم میانهٔ یک مثلث با تفصیل بسیار توسط لموین و هندسه‌دان‌های جدیدتر مورد تحقیق قرار گرفته است. اینان در بسیاری از موارد، خواصی مشابه خود میانه‌ها دارند. در این مورد، در این بخش تنها چند مثال آورده‌ایم. قضیهٔ بعدی شامل هم میانه‌ها به‌صورت حالتی خاص است.

قضیهٔ ۴.۲۰ . مزدوج‌های هم‌زاویهٔ یک مجموعه قطعه خط متقارب از رئوس به اضلاع مقابل مثلث خود نیز متقارب‌اند.

اثبات: قضیهٔ سوا می‌تواند خود را به عنوان وسیله‌ای در اثبات قضیهٔ ۴.۲۰ مطرح کند، اما صورت این قضیه نیاز به چنان تغییری دارد که نسبت زوایا را دخالت دهد.

---

38. Isogonal Lines
39. Isogonal Conjugate
40. Symmedian



شکل ۴.۲۳

در شکل ۴.۲۳، ابتدا فرض می‌کنیم که G نقطهٔ تقارب سه قطعه خط و $\overline{AD}$ ، $\overline{BE}$ ، و $\overline{CF}$ مزدوج‌های هم‌زاویهٔ این قطعات باشد. در این اثبات، فرض بر این نیست که A' ، B' ، C' اوساط اند.

مثلث‌های $AA'C$ و $AA'B$ را درنظر می‌گیریم. بنابه قانون سینوس‌ها،

$$\frac{CA'}{\sin CAA'} = \frac{CA}{\sin CA'A}$$

بنابراین

$$CA' = \frac{CA \sin CAA'}{\sin CA'A}$$

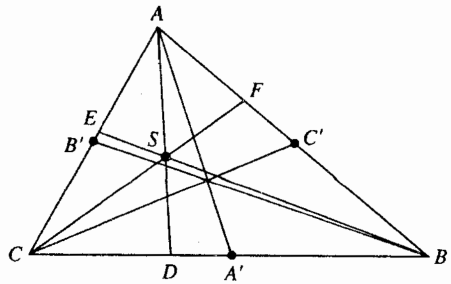
به همین ترتیب،

$$A'B = \frac{AB \sin BAA'}{\sin BA'A}$$

از آن‌جا که سینوس‌های زوایای مکمل در A' مساوی‌اند،

$$\frac{CA'}{A'B} = \frac{CA \sin CAA'}{AB \sin BAA'}$$

توجه داشته باشید که قضیهٔ **۴.۵** حالت خاصی از این تساوی در مورد $\overline{AA'}$ نیمساز است.



شکل ۴.۲۴

بیان به این صورت هر نسبت تقسیم اضلاع مثلث ABC به صورت مثلثاتی قضیهٔ سوا و عکس آن منجر می‌شود:

$$\frac{\sin CAA'}{\sin BAA'} \cdot \frac{\sin BCC'}{\sin ACC'} \cdot \frac{\sin ABB'}{\sin CBB'} = ۱$$

اما،در شکل ۴.۲۳، به علت این که $\overline{AD}$، $\overline{BE}$، و $\overline{CF}$ مزدوج‌های هم‌زاویهٔ سه قطعه خط اصلی‌اند، زوایای گوناگونی می‌توانند جانشین شوند، و فی‌المثل، $\angle CAD \cong \angle BAA'$ و غیره. چون جانشینی‌های مناسب انجام گیرند،

$$\frac{\sin BAD}{\sin CAD} \cdot \frac{\sin ACF}{\sin BCF} \cdot \frac{\sin CBE}{\sin ABE} = ۱$$

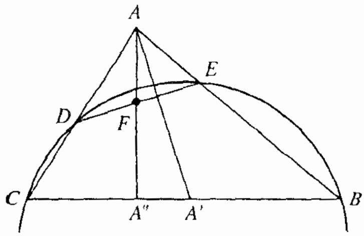
می‌شود و $\overline{AD}$، $\overline{BE}$، و $\overline{CF}$، بنابه عکس قضیهٔ سوا متقارب‌اند.

اگر $\overline{AA'}$، $\overline{BB'}$، و $\overline{CC'}$ میانه باشند، در این صورت مزدوج‌های هم‌زاویه‌شان هم‌میانه‌اند؛ و به این ترتیب نتیجه‌ای از قضیهٔ ۴.۲۰ عبارت است از:

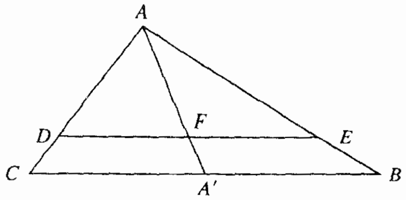
قضیهٔ ۴.۲۱. هم‌میانه‌های مثلث متقارب‌اند.

تعریف. نقطهٔ تقارب هم‌میانه‌های مثلث نقطهٔ هم‌میانه‌ای[۴۱] یا نقطهٔ لموینی[۴۲] نامیده می‌شود. در شکل ۴.۲۴، $\overline{AA'}$، $\overline{BB'}$، $\overline{CC'}$ میانه‌اند و $\overline{AD}$، $\overline{BE}$، $\overline{CF}$ هم‌میانه‌اند، و

41. Symmedian Point
42. Lemoine Point



شکل ۴.۲۶



شکل ۴.۲۵

نقطهٔ S نقطهٔ هم‌میانهٔ آن‌هاست.

میانهٔ از یک رأس منصف قطعه خطی است که دو سرش بر دو ضلع مجاور آن رأس و موازی ضلع مقابل به آن رأس از مثلث است. فی‌المثل، در شکل ۴.۲۵، اگر قطعهٔ $\overline{DE}$ موازی $\overline{CB}$ و $\overline{AA'}$ میانه باشد، در این صورت $DF=FE$ است. خاصیت مشابه این خاصیت در مورد هم‌میانه را در قضیهٔ بعدی داده‌ایم.

قضیه ۴.۲۲ . هم‌میانهٔ از یک رأس مثلث هر قطعه خط ضدموازی با ضلع مقابل آن رأس مثلث را نصف می‌کند.

به خاطر بیاورید که قطعات ضدموازی اضلاع مقابل چهارضلعی محاط در یک دایره‌اند.

اثبات: در شکل ۴.۲۶، فرض می‌کنیم $\overline{AA''}$ هم‌میانه و $\overline{DE}$ قطعه‌ای ضد موازی با $\overline{BC}$ چنان‌که چهارضلعی DEBC بتواند در دایره‌ای محاط شود، باشد. بنابه قضیهٔ ۴.۹،

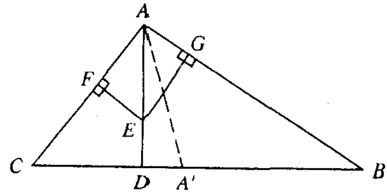
$$AD.AC = AE.AB$$

است. نیز، در اثبات قضیهٔ ۴.۲۰، مقرر کردیم که

$$\frac{CA'}{A'B} = \frac{CA \sin \angle CAA'}{AB \sin \angle BAA'}$$

اگر A' وسط $\overline{BC}$ باشد، در این صورت

$$\frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle A'AB} = \frac{BA}{CA}$$



شکل ۴.۲۷

بنابراین

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{AD}\ \sin \mathrm{DAF}}{\mathrm{EA}\ \sin \mathrm{EAF}}$$

$$= \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \cdot \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BA}}$$

$$= ۱$$

و F وسط $\overline{\mathrm{DE}}$ است.

در قسمت بعد خاصیت به نوعی متفاوتی، خاصیتی که می‌تواند در توصیف هم‌میانه به صورت مجموعه‌ای از نقاط صادق در شرطی معین به کار رود، مورد بررسی قرار گرفته است. مجموعهٔ نقاط متساوی‌الفاصله از دو ضلع یک مثلث بر نیمساز زاویهٔ آن دو ضلع قرار دارد. در این مورد نیز نسبت ثابتی از فواصل نقاط واقع بر یک هم‌میانهٔ مثلث از اضلاع آن موجود است.

قضیهٔ ۴.۲۳ . نسبت فواصل نقطه‌ای واقع‌بر هم‌میانهٔ یک مثلث به اضلاع مجاورآن هم‌میانه از آن مثلث مساوی نسبت طول‌های آن اضلاع است.

اثبات: علایم شکل ۴.۲۷ را با هم‌میانهٔ $\overline{\mathrm{AD}}$ و میانهٔ $\overline{\mathrm{AA}'}$ به کار می‌بریم. از قانون سینوس‌ها،

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EG}} = \frac{\sin \angle \mathrm{CAD}}{\sin \angle \mathrm{BAD}}$$

$$= \frac{\sin \angle \mathrm{BAA}'}{\sin \angle \mathrm{CAA}'} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$$ زیرا A' وسط $\overline{\mathrm{CB}}$ است

تمرینات ۴.۴

۱. مزدوج هم‌زاویهٔ هم‌میانه چیست؟
۲. نقطهٔ تقارب مزدوج‌های هم‌زاویهٔ هم‌میانه‌های یک مثلث را نام ببرید.
۳. در مثلث متساوی‌الساقینی که متساوی‌الاضلاع نیست، چند هم‌میانه بر مزدوج‌های هم‌زاویه‌شان منطبق‌اند؟
۴. ثابت کنید که میانهٔ نظیر یک ضلع مثلث هر قطعه خط در آن مثلث موازی آن ضلع را نصف می‌کند.
۵. نقطهٔ هم‌میانهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع کجاست؟
۶. آیا نقطهٔ هم‌میانه می‌تواند خارج مثلث باشد؟
۷. برای پاسخ‌دادن به این سؤال از قضیهٔ ۴.۲۳ استفاده کنید. فرض می‌کنیم اضلاع مجاور مثلثی هم‌نهشت نباشند. آیا یک نقطهٔ واقع بر یک هم‌میانه نزدیک‌تر به ضلع بزرگ‌تر زاویهٔ مربوطه است یا ضلع کوچک‌تر آن؟
۸. قضیهٔ ۴.۲۳ را در مورد حالت خاص مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع زاویهٔ قائمه به طول‌های ۳ و ۴ واحد به کار ببرید. در مورد هر هم‌میانه، نسبت فواصل نقطه‌ای واقع بر آن از دو ضلع مجاور آن از مثلث را بیان کنید.
۹. ثابت کنید که نسبت قطعاتی که یک هم‌میانه ضلع مقابل خود از یک مثلث را به آن‌ها تقسیم می‌کند مساوی نسبت مربعات اندازه‌های اضلاع مجاور آن هم‌میانه است.
۱۰. ثابت کنید که ارتفاعات مثلث مزدوج‌های هم‌زاویهٔ شعاع‌های دایرهٔ محیطی گذرنده از رئوس آن مثلث‌اند.
۱۱. از قضیهٔ ۴.۲۰ و تمرین ۱۰ برای به دست دادن اثبات دیگری در مورد این که ارتفاعات یک مثلث متقارب‌اند، استفاده کنید.
۱۲. ثابت کنید که قطعه خط واصل پاهای عمودهای از یک نقطهٔ واقع بر هم‌میانه‌ای از یک مثلث به اضلاع مجاور آن از آن مثلث بر میانهٔ متناظر آن هم‌میانه عمود است.
۱۳. عکس قضیهٔ ۴.۲۲ را اثبات کنید.
۱۴. فرض می‌کنیم S نقطهٔ هم‌میانهٔ یک مثلث مفروض، و D و E و F پاهای قطعه خط‌های عمود از S بر اضلاع این مثلث باشند. ثابت کنید که S مرکز ثقل ΔDEF است.

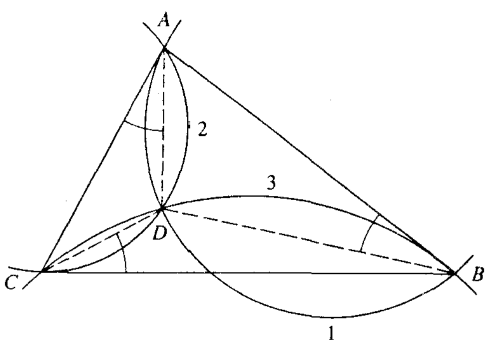
۴.۵ هندسهٔ ترکیبی جدید مثلث

دومین سهم بزرگ در هندسهٔ جدید مثلث مربوط به نقاط بروکاردی [۴۳] و دایرهٔ بروکاردی [۴۴] است، که به نام هنری بروکارد [۴۵] (۱۹۲۲ - ۱۸۴۵)، که بعضی از قضایای مربوط به این موضوعات را درحدود ۱۸۷۵ اثبات کرد، نامیده شده‌اند. نقاط بروکارد نیز مانند نقاط میکوئل به صورت نقاط تقاطع سه دایره تعریف شده‌اند.

قضیهٔ ۴.۲۴ . سه دایره، هر یک با یکی از اضلاع یک مثلث به عنوان وتر و مماس به یکی از دو ضلع مجاور آن ضلع، به ترتیبِ دورِ شکل درنظر گرفته شده، در نقطه‌ای موسوم به نقطهٔ بروکارد تلاقی می‌کنند.

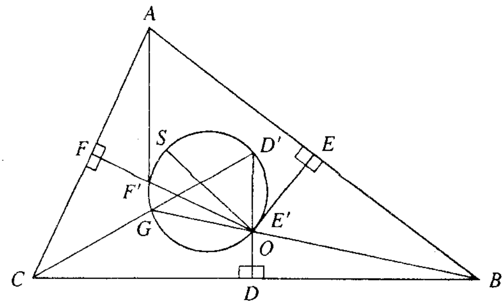
در شکل ۴.۲۸، دایرهٔ ۱ به $\overline{AC}$ مماس است، دایرهٔ ۲ به $\overline{BC}$، و دایرهٔ ۳ به $\overline{AB}$ مماس است.

فرض می‌کنیم دوایر ۱ و ۲ در D تلاقی کنند، $\angle ABD \cong \angle CAD \cong \angle BCD$، زیرا اندازهٔ زاویهٔ بین مماس و وتر یک دایره، مانند زاویهٔ محاطی، برابر نصف کمان روبروی آن است. دایرهٔ ۳ در B به $\overline{AB}$ مماس است، و $\overline{BD}$، $\angle DCB$ را مساوی $\angle ABD$ قطع می‌کند، و بنابراین دایرهٔ مزبور نیز از D می‌گذرد. ترتیب منتخب جهت مثلثاتی است، و نقطهٔ D نقطهٔ بروکاردی اول یا مثبت [۴۶] نامیده می‌شود.



شکل ۴.۲۸

43. Brocard Points
44. Brocard Circle
45. Henri Brocard
46. First or Positive Brocard Point



شکل ۴.۲۹

تعریف. دو نقطهٔ مزدوج هم‌زاویه‌اند اگر یکی از آن‌ها تقاطع خطوطی که مزدوج‌های هم‌زاویهٔ خطوط متقاطع در دیگری‌اند باشد.

در حالت عمومی، از آن‌جاکه ترتیب دور مثلث می‌تواند در عکس جهت مثلثاتی یا جهت مثلثاتی باشد، دو نقطهٔ بروکارد متمایز موجود است. گذشته از این، می‌توان ثابت کرد که دو نقطهٔ بروکارد مزبور مزدوج هم‌زاویهٔ یکدیگراند.

هنوز قضیهٔ دیگری هست که رابطهٔ بین قضایای قبلی مربوط به هم‌میانه‌ها و قضیهٔ ۴.۲۴ مربوط به نقاط بروکارد را نشان می‌دهد. دایره‌ای که دو سر قطرش مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ هم‌میانهٔ یک مثلث است به دایرهٔ بروکارد موسوم است.

قضیهٔ ۴.۲۵ . نقاط بروکارد بر دایرهٔ بروکارد واقع‌اند.

اثبات: در شکل ۴.۲۹، فرض می‌کنیم O و S مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ هم‌میانه باشند، و عمودمنصف‌های اضلاع مثلث باردیگر دایرهٔ بروکارد رادر D'، E'، و F' تلاقی کنند. می‌توان نشان داد که خطوط AF'، BE'، و CD' در نقطهٔ بروکاردی متقارب‌اند.

به علت زوایای قائمهٔ محاط در یک نیمدایره، $\overline{SD'}$ موازی $\overline{BC}$ ، $\overline{SF'}$ موازی $\overline{AC}$، و $\overline{SE'}$ موازی $\overline{AB}$ است. و این بدین معنی است که فواصل S از اضلاع مثلث اصلی مساوی فواصل واقع درامتداد عمودمنصف‌های مثلث از نقاط D' ، E' ، F' ، تانقاط D ، E ، F اند.

بنا به قضیهٔ ۴.۲۳،

$$\frac{DD'}{CD}=\frac{EE'}{EB}=\frac{FF'}{FA}$$

بنابراین $\Delta CDD' \sim \Delta BEE' \sim \Delta AFF'$. در نتیجه،

$$\angle BCD' \cong \angle CAF' \cong \angle ABE'$$

مقایسه با شکل ۴.۲۸ نشان می‌دهد که سه ضلع زوایای مورد بحث در نقطهٔ بروکارد G تلاقی می‌کنند. نیز، از آن‌جا که $\angle AF'F \cong \angle GF'O \cong \angle GD'O$ ، جمیع نقاط F' ، D' ، O ، G ، چنان که باید اثبات می‌شد، بر یک دایره، دایرهٔ بروکارد، قراردارند. در موردمثلث متساوی‌الاضلاع،مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ هم‌میانهٔ مثلث منطبق‌اند و بنابراین دایرهٔ بروکارد به نقطه‌ای منفرد تحویل می‌شود.

دومین موضوع مهم این بخش قضیه‌ای است که در حدود ۱۸۹۹ توسط فرانک مورلی[۴۷]، پدر کریستوفر مورلی[۴۸] نویسنده،کشف شده است. اهمیت آن در این است که به جای نیمساز زوایا با ثلث‌ساز آن‌ها سروکار دارد. نیمسازهای زوایای مثلث در یک نقطه متلاقی می‌شوند، اما به‌نظر می‌رسد که ریاضیدان ها تنها در ایام اخیر به بررسی آن‌چه که در مورد مجموعه‌های سه‌ثلث ساز مجاور اتفاق می‌افتد پرداخته‌اند.

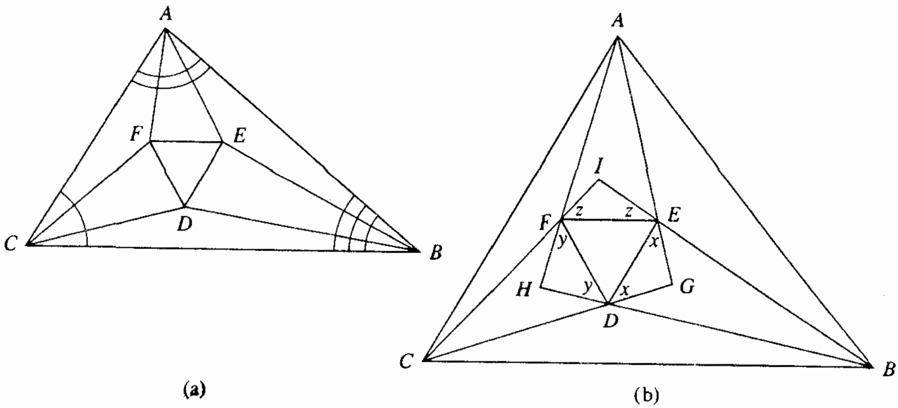
قضیهٔ ۴.۲۶ . قضیهٔ مورلی[۴۹]. ثلث‌ساز[۵۰]های زوایای مثلث دوبه‌دو در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع متقارب‌اند.

پیش از ادامهٔ مطلب، بی‌فایده نیست که با استفاده از نقاله و رسم به احتیاط چندین مثلث به اشکال گوناگون، مستدل بودن قضیهٔ مورلی را تحقیق کنید.

از سال ۱۹۰۰ به بعد، اثبات متفاوت بسیاری در مورد این قضیه داده شده، اما اثبات مابه طریق غیرمستقیم، با آغاز از مثلثی مساوی‌الاضلاع و ختم با مثلث مفروض اصلی، است.

---

47. Frank Morley
48. Christopher Morley
49. Morley's Theorem
50. Trisector



شکل ۴.۳۰

اثبات: شکل ۴.۳۰a آن‌چه را که از ثلث‌سازهای مجاور مقصود داریم نشان می‌دهد. فی‌المثل، $\overline{CD}$ و $\overline{BD}$ یک زوج ثلث‌ساز مجاورند. در شکل ۴.۳۰b، فرض می‌کنیم که ΔDEF مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد. مثلث‌های متساوی‌الساقین DHF، DGE، و FIE را می‌توان چنان مشخص کرد که اندازه‌های x، y، z از زوایای مربوطه هر یک کمتر از ۶۰ و $x+y+z=۱۲۰$ باشد. نقاط A، B، و C از امتداد اضلاع مثلث‌های متساوی‌الساقین فوق مشخص می‌شوند.

اندازه‌های سایر زوایای در نقاط D، E، و F را می‌توان از اطلاعات داده شده تعیین کرد. طبق تمرین ۱۶ی تمرینات ۴.۱، زاویهٔ حاصل از خطوط شامل قطعات از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث به دو رأس آن ۹۰ به‌علاوهٔ نصف اندازهٔ زاویهٔ در رأس سوم آن مثلث است. در مثلث CIB،

$$m\angle CIB = ۱۸۰ - ۲z$$

در حالی که

$$m\angle CDB = ۳۶۰ - (x+y+۲z+۶۰)$$

$$\begin{aligned} ۳۶۰ - (x+y+۲z+۶۰) &= ۳۶۰ - (x+y+z) - z - ۶۰ \\ &= ۳۶۰ - ۱۲۰ - z - ۶۰ \\ &= ۱۸۰ - z \\ &= ۹۰ + \frac{۱}{۲}(۱۸۰ - ۲z) \end{aligned}$$

از این بحث، همراه با تمرین ۱۶ی تمرینات ۴.۱، و این واقعیت که D بر نیمساز $\angle CIB$ واقع است، نقطهٔ D مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ΔCIB می‌شود. به همین

ترتیب، F مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ΔAGC و E مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ΔAHB است. بنابراین، سه زاویهٔ در C، همان‌گونه که سه تای در A و در B، هم‌نهشت‌اند. این زوایا دارای مقادیر

$$60 - x \quad , \quad 60 - z \quad , \quad 60 - y$$

اند. زوایای قاعدهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین را می‌توان برحسب زوایای مثلث‌اصلی یافت؛ و فی‌المثل، $x = 60 - \frac{1}{3}\angle B$ بنابراین همواره می‌توان مثلث ABCای مشابه با هر مثلث مفروضی به دست آورد.

تمرینات ۴.۵

۱. آیا نقطهٔ بروکارد همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد؟

۲. شکلی رسم کنید که نقطهٔ بروکارد دوم مثلث نشان داده شده درشکل ۴.۲۸ را مقرر کند.

۳. ثابت کنید که دونقطهٔ بروکارد مثلث مزدوج همزاویهٔ یکدیگراند.

۴. چهار نقطهٔ مهم واقع بر دایرهٔ بروکارد را نام ببرید.

۵. مثلث $D'E'F'$ شکل ۴.۲۹ به مثلث بروکارد اول موسوم است. ثابت کنید که این مثلث مشابه مثلث اصلی است.

در تمرینات ٦-۹ ،شکلی رسم کنید.که مثلث‌متساوی‌الاضلاع قضیهٔ مورلی را نشان دهد در صورتی که اندازه‌های دو زاویهٔ مثلث اصلی عبارت باشند از:

٦. 90° و 40° ۷. 60° و 20°

۸. 30° و 80° ۹. 25° و 75°

۱۰. درشکل ۴.۳۰b ، ثابت کنید که قطعات $\overline{DI}$ ، $\overline{FG}$ ، و $\overline{EH}$ متقارب‌اند.

۱۱. شکل حاصل از برخوردهای چهار زوج ثلث سازهای مجاور زوایای یک مربع را بررسی کنید.

۱۲. شکل حاصل از برخوردهای چهار زوج چهارساز (ربع سازها[51])ی مجاور زوایای مربع را، در صورتی که ربع سازها اشعهٔ تقسیم کنندهٔ زاویهٔ مربع و داخلش به چهارزاویهٔ هم‌نهشت و داخل‌هاشان تعریف شوند، بررسی کنید.

---

51. Four - Sector (or Quadriseetor)

۱۳I. شکل حاصل از شش زوج ثلث‌ساز مجاور یک شش ضلعی منتظم را بررسی کنید.

۱۴I. مثلثهای گوناگونی بامقیاس بزرگ رسم کرده به دقت اندازه بگیرید، سپس در مورد این که قضیه‌ای مشابه با قضیهٔ مورلی در مورد چهارسازهای زوایای مثلث برقرار است یا نه حدس بزنید.

۱۵I. در مورد پاسخ به صدق یاکذب حدس تمرین ۱۴I، و درمورد قضیه‌ای عمومی به مورد زیر رجوع کنید:

D. J. Kleven, «Morley's Theorem and a Converse,» *The American Mathematical Monthly, February 1978*

۱٦I. راجع به‌صورت عمومی‌تر قضیهٔ مورلی مورد زیر را مطالعه کنید:

Cletus O. Oakley and Justine C. Baker, «The Morley Trisection Theorem,» *The American Mathematical Monthly, January 1979.*

۴.٦ کاربردهای خاص هندسهٔ اقلیدسی

در این بخش کاربردهایی از هندسهٔ اقلیدسی ترکیبی، شامل نسبت طلایی، صفحه‌بندی، مسائل بسته‌بندی، قضیهٔ پیک، و مسائل اکسترمم را به اختصار مورد بحث قرار داده‌ایم. اما خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند مایل به‌گسترش مطالعهٔ مطالب گوناگون ارائه شده‌باشد.

یونانیان قدیم با برداشت‌شان از زیبایی و تناسب بعضی اشکال را خوشایندتر از دیگران درنظرگرفتند و بسیاری از ساختمان‌هاشان را به آن اشکال ساختند. مشهورترین مثال از این نوع موردی است که به نسبت طلایی [52]، نسبت طولهای اضلاع مستطیلی باخوش‌نماترین تناسب، مرسوم است.

در شکل ۴.۳۱، فرض می‌کنیم AB/BC=AC/AB باشد. دراین صورت، گفته می‌شود که نقطهٔ B، AC را به نسبت وسط و ذات طرفین [53] تقسیم می‌کند، و اگر طول $\overline{BC}$، ۱ باشد طول $\overline{AB}$ نسبت طلایی است.

فرض می‌کنیم Φ مقدارعددی نسبت طلایی رانمایش دهد، دراین صورت، از تناسب قبل

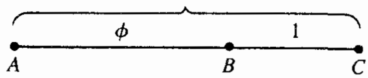
$$\frac{\Phi}{1}=\frac{\Phi+1}{\Phi} \quad , \quad \Phi^2=\Phi+1 \quad , \quad \Phi^2-\Phi-1=0$$

$$\Phi=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

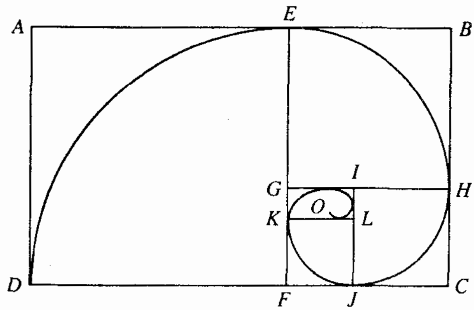
---

52. Golden Ratio

53. Extreme and Mean Ratio



شکل ۴.۳۱



شکل ۴.۳۲

مقدار مثبت Φ،

$$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

مقدار عددی نسبت طلایی است. البته، این عدد گنگ است، و یکی از مقادیر اعشاری تقریبی آن ۱/۶۲ می‌باشد. مجموعهٔ اعداد فیبوناچی، ... , ۲۱ , ۱۳ , ۸ , ۵ , ۳ , ۲ , ۱ , ۱ را می‌توان، بااستفاده از این قاعده که عدد بعدی مجموع آخرین دو عدد قبلی آن باشد، بسط داد. ریاضیدانان هم‌چنین نشان داده‌اند که حد نسبتهای جملهٔ $(n+۱)$ ام به جملهٔ n ام مجموعهٔ اعداد فیبوناچی ... , ۲۱ , ۱۳ , ۸ , ۵ , ۳ , ۲ , ۱ , ۱ به نسبت طلایی میل می‌کند. خواننده می‌تواند برای ملاحظهٔ مستدل بودن این گزاره ۳/۲ ، ۵/۳ ، ۸/۵ ، و غیره را به صورت اعشاری بیان کند.

درشکل ۴.۳۲ ، ABCD مستطیلی طلایی، با AB ی مساوی نسبت طلایی Φ و $\overline{BC}$ ی قطعه خط واحد است. اگر از این شکل مربع AEFD را حذف کنیم، مستطیل باقی‌ماندهٔ EBCF نیز مستطیلی طلایی است.

دراین مورد لازم است که نشان دهیم که $CB/EB = \Phi$ است. از آنجا که $CB = ۱$ و $BH = \Phi - ۱$ است،

$$\frac{۱}{\Phi-۱} = \frac{CB}{BH}$$

یا، از آنجاکه $EB = BH$ است، می‌توان تناسب مزبور را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{CB}{EB} = \frac{۱}{\Phi - ۱}$$

$$\frac{۱}{\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} - ۱}$$

$$= \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

$$= \Phi$$

جریان حذف مربعات را می‌توان ادامه داد، و هربار نتیجه مستطیل طلایی کوچکتری است.نمونهٔ کار، چنان که درشکل ۴.۳۲ نموده شده، مارپیچی را مطرح می‌کند که به مارپیچ طلایی [۵۴] موسوم است، و معادله‌اش در مختصات قطبی $r = \Phi^{۲\theta/\pi}$ است، که درآن Φ نسبت طلایی است.

یکی دیگر از موارد استعمال نسبت طلایی رابطهٔ آن با پنج ضلعی منتظم است.

قضیهٔ ۴.۲۷. اقطار یک پنج ضلعی منتظم یکدیگر را به نسبت طلایی تقسیم می‌کنند.

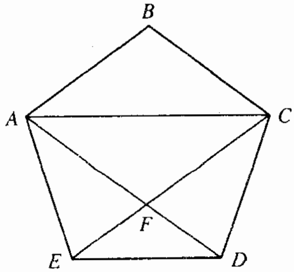
اثبات: از علایم شکل ۴.۳۳ در توضیح قضیهٔ ۴.۲۷ بانشان دادن این که AF/FD نسبت طلایی است استفاده می‌کنیم. در ذوزنقهٔ متساوی الساقین $ACDE$، $\Delta ACF \sim \Delta DEF$، بنابراین $AF/FD = AC/ED$.اما $ED = BC$ و $BC = AF$ است، زیرا $ABCF$ لوزی است (تمرین ۴ را ملاحظه کنید). بنابراین،

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AC}{AF} \qquad \text{یا} \qquad \frac{AF}{FD} = \frac{AD}{AF}$$

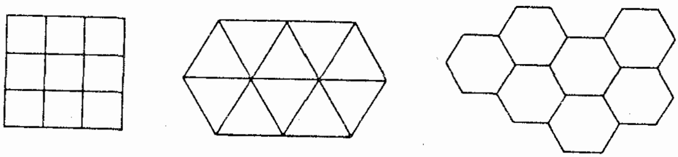
لذا AF/FD نسبت طلایی است. اگر اضلاع پنج ضلعی منتظمی ۱ واحد باشد، دراین صورت طول اقطار آن مقدار عددی نسبت طلایی است.

---

54. Golden Spiral



شکل ۴.۳۳



(a) (b) (c)

شکل ۴.۳۴

برای اطلاعات بیشتر در مورد نسبت طلایی مورد زیر را ملاحظه کنید:
Garth E. Runion, *The Golden Section and Related Curiosa* , Published by Scott, Foresman & Company, Glenview, Illinois, 1972.

دومین کاربرد هندسهٔ اقلیدسی ترکیبی مورد بحث، صفحه‌بندی است.

تعریف. صفحه بندی[55] نمونه‌ای از چند ضلعیهایی است که برای پوشاندن یک صفحهٔ کامل بدون روی هم افتادن پهلوی یکدیگر قرار داده می‌شوند. صفحه بندیهای منتظم[56] صفحه بندیهایی هستند که در آنها جمیع چند ضلعی هم‌نهشت و منتظم، بارئوس مشترک‌اند.

شکل ۴.۳۴ صفحه‌بندیهای منتظمی را با مربعها، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، و شش ضلعیهایی منتظم نشان می‌دهد. اما این که این سه تنها صفحه بندیهای منتظم‌اند در اثبات قضیهٔ بعد ثابت شده‌است.

---

55. Tessellation

56. Regular Tessellations

قضیهٔ ۴.۲۸ . تنها سه صفحه‌بندی منتظم صفحه، صفحه بندیهای با مربع، مثلث متساوی‌الاضلاع، و شش ضلعی منتظم‌اند.

اثبات: فرض می‌کنیم x تعداد اضلاع هرچند ضلعی و y تعداد چند ضلعیهای باهم آینده در هر رأس باشد. دراین صورت دوعبارت مربوط به اندازهٔ هر زاویه دریک رأس را می‌توان مساوی هم قرار داد.

$$\frac{\pi(x-۲)}{x} = \frac{۲\pi}{y}$$

$$\pi xy - ۲\pi y = ۲\pi x$$

$$xy - ۲x - ۲y = ۰$$

$$xy - ۲x - ۲y + ۴ = ۴$$ به دوطرف ۴ اضافه کرده‌ایم

$$(x-۲)(y-۲) = ۴$$

در تجزیهٔ ۴ (با به حساب آوردن تغییر ترتیب عوامل) تنها سه طریق موجوداست، و این سه به سه صفحه‌بندی قبلاً مذکور منجر می‌شوند.

جدول ۴.۱

صفحه‌بندی	y	x	y−۲	x−۲
شکل ۴.۳۴ c	۳	٦	۱	۴
شکل ۴.۳۴ a	۴	۴	۲	۲
شکل ۴.۳۴ b	٦	۳	۴	۱

صفحه‌بندی‌های دیگری جز منتظم نیز زمینهٔ بارآوری برای بررسی‌اند. دراین مورد چه نوع صفحه‌بندی دیگر می‌توانید کشف کنید؟

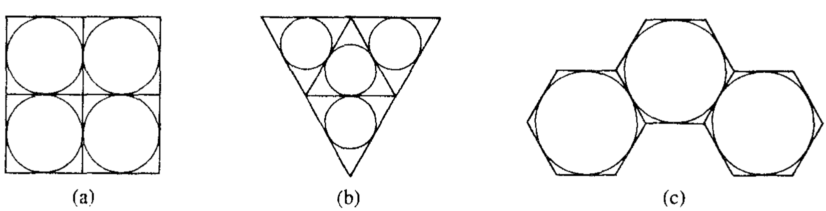
گاهی، تعریف صفحه‌بندی برای دربرگرفتن اشکالی غیراز چند ضلعیها پهناور شده‌است. دراین راستا، هنر ام. سی. اشر، مذکور درفصل ۲ ، مثالهایی از ترسیمات صفحه پرکن گوناگون به دست می‌دهد.

مورد استعمال دیگری که رابطهٔ تنگاتنگی با صفحه‌بندی دارد بسته‌بندی*[۵۷] دوایر هم‌نهشت درصفحه است. مسأله دراین مورد بسته‌بندی به قدرامکان دوایر هم‌نهشت با انتخاب چگالی ماکزیمم است. چگالی بسته بندی به صورت نسبت سطح ناحیهٔ دایروی به سطح چندضلعی‌ای که دایره درآن محاط شده، تعریف شده‌است. و از آنجاکه چند ضلعیها باید صفحهٔ کامل را بدون روی هم افتادن بپوشانند، تنها امکانات بسته‌بندی منتظم، چنان که درشکل ۴.۳۵ نشان داده‌شده، استفاده از سه صفحه بندی منتظم فوق الذکر است.

بااستفاده از فرمولهای سطح ناحیهٔ دایروی و چندضلعیهای منتظم، شخص می تواند نشان دهد که چگالی بسته بندی شکل ۴.۳۵ c بزرگترین است، و مقدار عددی آن بیش از ۰/۹ است. درواقع، بسته‌بندی با شش ضلعی حتی هنگامی که استفاده از چندضلعیهای منتظم حذف شود، هنوز چگالی‌ترین ممکن است. مسألهٔ مشابه این مسأله درفضای سه بعدی، بسته‌بندی کرات، بسیار پیچیده‌تر، و موضوع تحقیقات ادامه‌دار است.

کاربرد از نوع عددی وابسته به چندضلعیها، قضیه‌ای درمورد یافتن سطح چندضلعی‌ای که رئوسش دارای مختصات درست‌اند، است. جدول نقاط واقع برصفحهٔ شکل ۴.۳٦ a شبکه[۵۸]نامیده‌می‌شود،وهرنقطه‌نقطه‌ای‌شبکه‌ای[۵۹]است.نقاط‌مذکوررامی‌توان نقاط واقع برصفحهٔ اقلیدسی بامختصات صحیح درنظر گرفت.

قضیهٔ ۴.۲۹. قضیهٔ پیک[٦۰] (۱۸۹۹). اگر چند ضلعی ساده‌ای دارای رئوسی که‌نقاط شبکه‌ای‌اند باشد، دراین صورت فرمول سطح آن $\frac{1}{2}p+q-1$ است، که در آن p تعداد نقاط شبکه‌ای واقع برمرز و q تعداد نقاط شبکه‌ای داخل آن چند ضلعی است. چندضلعی ساده دارای تنها یک داخل، با اضلاع نامتقاطع با یکدیگر است.

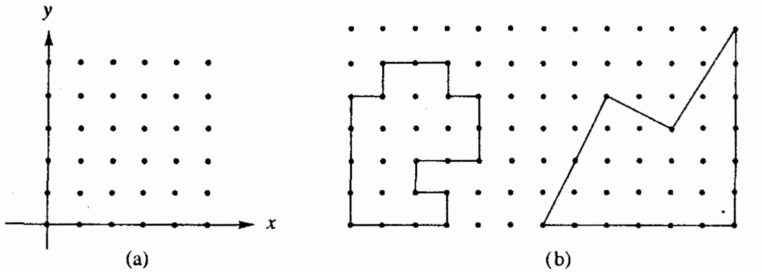


شکل ۴.۳۵

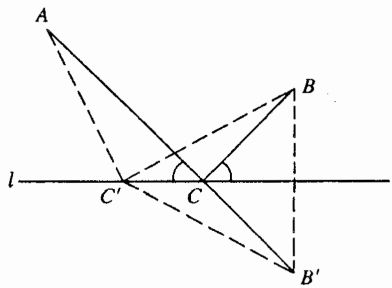
---

57. Packing
58. Lattice
59. Lattice Point
60. Pick's Theorem

* دایره بندی



شکل ۴.۳۶



شکل ۴.۳۷

دراین مورد مرجع شامل اثباتی از قضیهٔ فوق را در تمرینات این بخش بـه دست داده‌ایم. فرمول فوق، درمورد دو چند ضلعی نشان داده‌شده درشکل ۴.۳۶ b ، مساحات

$$\frac{۱}{۲}(۱۶) + ۱۳ - ۱ = ۲۰ \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲}(۲۰) + ۶ - ۱ = ۱۵$$

را به دست می‌دهد.

یکی از موارد استعمال قدیمی و بااین همه جدید هندسهٔ اقلیدسی مثلثهای مشابه موردی است که امروزه آن را به یک کرشمه دوکار[61] یا شدآمد می‌نامند. آمد و شد برخوردی و بعداز آن انعکاسی است. از لحاظ تاریخی، موارد استعمالی از این نوع برمبنای خاصیت اکسترمم (شامل ماکزیمم و می‌نیمم) ی که به صورت قضیهٔ هرون بیان شده بناشده است. هرون اسکندرانی مؤلف منعکسات[62]، که خواص ابتدایی آینه‌ها را دربردارد، است.

قضیه ۴.۳۰. قضیهٔ هرون. در مورد دونقطهٔ واقع دریک طرف یک خط، کوتاهترین فاصله از نقطهٔ اول به خط و سپس به نقطهٔ دوم از طریق نقطهٔ برخورد خط و قطعه خط از نقطهٔ اول به قرینهٔ نقطهٔ دوم نسبت به آن خط است.

---

61. Carom
62. catoptrica

اثبات. در شکل ۴.۳۷، نیاز به اثبات می‌نیمم بودن $AC + CB$ داریم، و این به معنی این است که به ازای هر نقطهٔ C' واقع بر خط مفروض $AC + CB < AC' + C'B$ است.

در مورد B' قرینهٔ B، $CB = CB'$ و $BC' = B'C'$ است. دراین صورت

$$AC + CB = AC + CB' = AB'$$

و

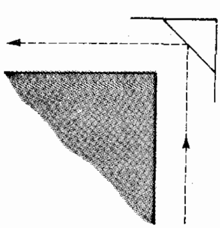
$$AC' + C'B = AC' + B'C'$$

اما $AB' < AC' + B'C'$، زیرا $AC'B'$ مثلث است، بنابراین چنان که باید اثبات می‌کردیم $AC + CB < AC' + C'B$ است.

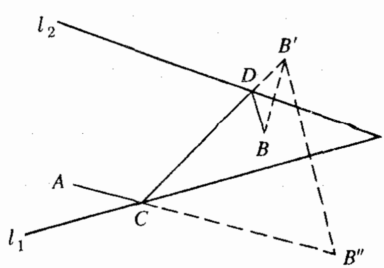
موارد استعمال فیزیکی قضیهٔ هرون بستگی به این اظهار دارد که زوایایی که $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ با خط l تشکیل می‌دهند هم‌نهشت‌اند. فی‌المثل، کوتاهترین فاصلهٔ A تا B از طریق نقطه‌ای واقع بر l مسیر شعاع نورانی‌ای منعکس در آینه‌ای در خط l است. منعکس کنندهٔ گوشه‌ای، یا زاویهٔ آینه‌ای، نشان داده شده در شکل ۴.۳۸، برای این که «دیدار اطراف یک کنج» برای شخص مجاز کند، از اصل فیزیکی انعکاس استفاده می‌کند.

مسألهٔ یافتن کوتاهترین مسیر را می‌توان به بیش از یک خط تعمیم، و به این ترتیب فایدهٔ نظریهٔ مورد بحث را افزایش داد. فی‌المثل، شکل ۴.۳۹، کوتاهترین مسیر از A تا B ی برخوردکننده با l_1 و بعد l_2 را نشان می‌دهد. B' قرینهٔ B نسبت به l_2 و B'' قرینهٔ B' نسبت به l_1 است. مسیر مذکور از A به طرف B''، سپس از C به سمت B' سوق می‌دهد. پریسکوب ساده از این نظریه استفاده می‌کند.

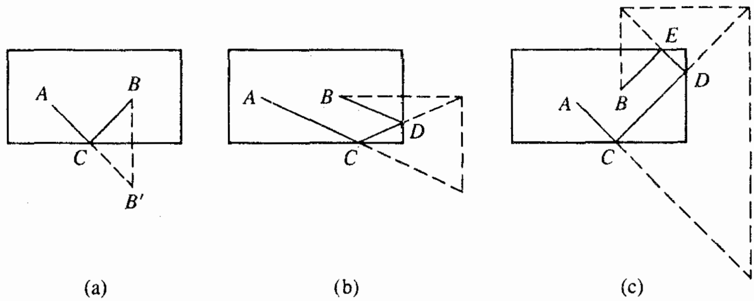
یکی از موارد استعمال نظریهٔ آمد و شدها، که از علاقهٔ رایج ریاضیات نیز از توجه زندگی روزمره برخوردار است، در رابطه با میز بیلیارد است. شکل ۴.۴۰a نشان می‌دهد که چگونه می‌توان توپ در A را به‌منظور برخورد با توپ B با آمد و شدهایی در یک، دو، یا سه طرف میز درنظر گرفت. در شکل ۴.۴۰b، $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ موازی‌اند و در شکل ۴.۴۰c، $\overline{AC}$ و



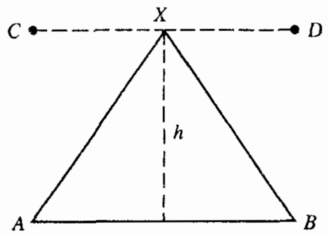
شکل ۴.۳۸



شکل ۴.۳۹



شکل ۴.۴۰



شکل ۴.۴۱

$\overline{ED}$ موازی‌اند و $\overline{CD}$ و $\overline{BE}$ نیز موازی اند.

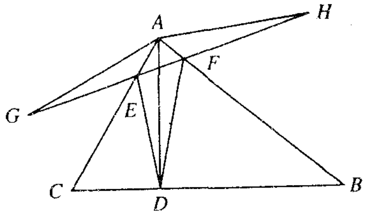
قضیهٔ هرون و تبدیل تقارن درعین حال کاربردهای دیگر هندسه در مسائل اکسترمم[۶۳] را بنیان می‌نهد. دراین مورد، دومثال، که بدون استفاده از حساب جامع و فاضل حل شده‌اند، به‌دست می‌دهیم.

قضیهٔ ۴.۳۱. در مثلثی با سطح و ضلع معلوم، مجموع اندازه‌های وضلع دیگر، اگر و تنها اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، مینیمم است.

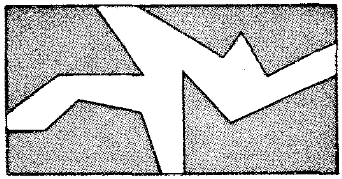
اثبات را مختصر کرده‌ایم، و تفصیلات آن را به‌عنوان تمرینهای ۱۹ و ۲۰ تمرینات ۴.۶، واگذاشته‌ایم. درشکل ۴.۴۱، اگر $\overline{AB}$ ضلع ثابت مورد بحث باشد، دراین صورت رأس سوم X باید برخط $\overline{CD}$ ی موازی با $\overline{AB}$ باشد. چرا؟ بنا به قضیهٔ هرون، $AX + XB$، اگر ΔAXB متساوی الساقین باشد، مینیمم است. چرا؟

مثال دوم را، که به خاطر جی.اف. فاگنانو[۶۴] که آن را در ۱۷۷۵ طرح کرده، مسألهٔ فاگنانو[۶۵] نامیده می‌شود، به‌عنوان آخرین قضیهٔ این فصل بیان می‌کنیم.

63. Extremum Problems
64. J.F.Fagnano
65. Fagnano's Problem



شکل ۴.۴۲



شکل ۴.۴۳

قضیهٔ ۴.۳۲. در یک مثلث حاد الزوایای مفروض، مثلث محاط با محیط مینیمم مثلث ارتفاعیه[66]، که رئوسش پاهای ارتفاعات آن مثلث می‌باشد، است.

بار دیگر تفصیلات قضیه را به عنوان تمرین (تمرین ۲۱، تمرینات ۴.۶) واگذار می‌کنیم. در شکل ۴.۴۲، اگر ΔDEF مثلث محاطی دلخواهی باشد و اگر G و H تصاویر D تحت انعکاس نسبت به $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ باشد، دراین صورت مسافت $GE + EF + FH$ محیط مثلث محاطی مزبور است. چرا؟ این مسافت، در صورتی که G ، E ، F ، H واقع بر یک استقامت باشند، مینیمم است. اندازهٔ $\angle CAB \ = \ \angle GAH$ ۲m است. چرا؟ ΔGAH متساوی‌الساقین است. چرا؟ به علت این که اندازهٔ $\angle GAH$ از انتخاب نقطهٔ D مستقل است، قاعدهٔ $\overline{GH}$ هنگامی که اضلاع هم‌نهشت مثلث مینیمم است اندازه‌ای مینیمم خواهند داشت. اما این شرطی وقتی برقرار می‌شود که $\overline{AD}$ دارای طول مینیمم باشد و این نیز وقتی رخ می‌دهد که $\overline{AD}$ ارتفاع باشد. چرا؟

شاخه‌های جدید علم به مطرح کردن موارد استعمال تازهٔ چند ضلعیها ادامه می‌دهند. یکی از موضوعات تحقیقات جدید طرح حرکت در کاربردی فنی موسوم به روبات شناسی است. یکی از مسائل بیان شدهٔ این مورد طرح مسیر متصلی برای میلهٔ متحرک در فضای دو بعدی‌ای با موانع چند ضلعی شکل (شکل ۴.۴۳ ترسیم ساده‌ای از این معنی را نشان می‌دهد) و مُشابه سه بعدی شامل اجسام چند وجهی آن است.

66. Orthic Triangle

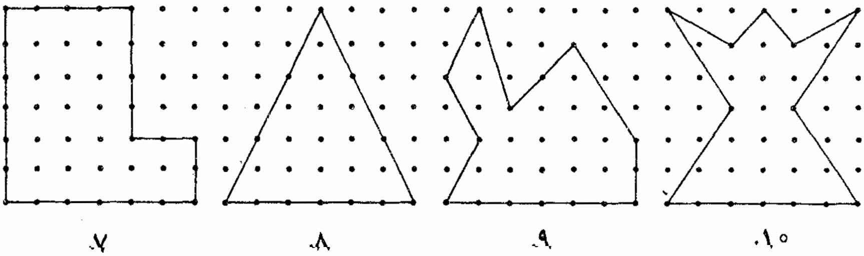
تمرینات ۴.٦

۱. مقدار تقریبی نسبت طلایی را تا چهار رقم صحیح اعشاری بیابید.
۲. از اعداد فیبوناچی برای به‌دست دادن سری تقریبات نسبت طلایی، تا رسیدن به تقریبی که تا سه رقم بعداز ممیز صحیح است، استفاده کنید.
۳. درشکل ۴.۳۲، اگر $BC = 1$ باشد، اندازهٔ قطعهٔ $\overline{IL}$ را بیابید.
۴. درشکل ۴.۳۳، ثابت کنید که ABCF لوزی است.
۵. صفحه بندی رسم کنید که منتظم نباشد.
٦. بارسم و توضیح عددی نشان دهید که چرا هشت ضلعی منتظم نمی‌تواند برای صفحه‌بندی منتظم به‌کار رود.

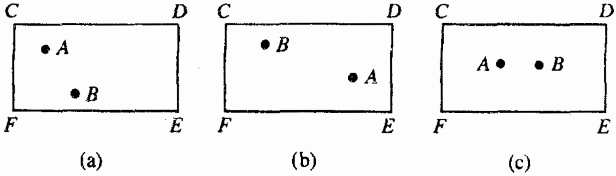
در تمرینات ۷ ـ ۱۰ ، از قضیهٔ پیک برای یافتن سطح هریک از چند ضلعیهای نشان داده‌شده درشکل ۴.۴۴ استفاده کنید.

در تمرینات ۱۱ ـ ۱٦ ، اشکالی مشابه باشکل ۴.۴۵ برای موارد زیر رسم کنید.

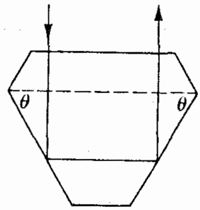
۱۱. توپ A به کجای ضلع $\overline{CF}$ درشکل ۴.۴۵a برخورد کند تا آمدوشد کرده به توپ B برخوردکند؟



شکل ۴.۴۴



شکل ۴.۴۵



شکل ۴.۴۶

۱۲. توپ A به کجای ضلع $\overline{DE}$ درشکل ۴.۴۵a برخورد کند تاآمدوشد کرده به توپ B برخورد کند؟

۱۳. توپ A به کجای ضلع $\overline{CD}$ درشکل ۴.۴۵a برخورد کند تا آمدوشد کرده به توپ B برخورد کند؟

۱۴. توپ A درشکل ۴.۴۵b باید به ضلع $\overline{DE}$، بعد $\overline{EF}$ آمد و شد کند، و سپس با توپ B برخورد کند.

۱۵. توپ A درشکل ۴.۴۵b باید به ضلع $\overline{EF}$، بعد $\overline{CF}$ آمد وشد کند، و سپس باتوپ B برخورد کند.

۱۶. توپ A در شکل ۴.۴۵c باید به ضلع $\overline{CD}$، بعد $\overline{DE}$، بعد $\overline{EF}$ آمدوشد کند، سرانجام باتوپ B برخورد کند.

۱۷. برش الماس برای بیشترین درخشندگی یا تلألؤ یکی دیگر از موارد استعمال وابسته به آمد وشدها است. درشکل ۴.۴۶ مطلوب داشتن اشعه‌ای موازی چنان است که نور در ان جهت اول منعکس شود. کدام زاویهٔ θ ای این انعکاس را ممکن می‌کند.

تفاده از علایم شکل ۴.۳۹، ثابت کنید که کوتاهترین مسیر از A تا B ی از طریق l_1 و l_2، مسیرنشان داده شده‌است.

۱۹. قسمت «اگر» اثبات قضیهٔ ۴.۳۱ را تکمیل کنید.

۲۰. قسمت «تنهااگر» اثبات قضیهٔ ۴.۳۱ را تکمیل کنید.

۲۱. اثبات قضیهٔ ۴.۳۲ را تکمیل کنید.

۲۲I. مفهوم و خواص صفحه‌بندیهای نیمه منتظم را بررسی کنید.

۲۳I. فرمول عمومی به دست آوردن چگالی سه دایره بندی منتظم دوایر درصفحه را گسترش داده سه نسبت عددی مربوطه را محاسبه کنید.

۲۴I. وضعیت جاری تحقیق در مورد مسألهٔ بسته‌بندی کرات را بررسی کنید.

۲۵I. اثبات قضیهٔ پیک را، که در کتاب Coxeter , *Introduction to Geometry*

یا مرجع دیگر یافت می‌شود، به طور مختصر شرح دهید.

I۲۶. مسألهٔ اکسترمم دیگر، موسوم به مسألهٔ فرما، یافتن نقطه‌ای درمثلث حادالزوایایی چنان که مجموع فواصل آن از سه رأس آن مثلث مینیمم باشد، است. چگونه می‌توان موقع این نقطه را یافت؟

تمرینات مروری فصل

فصل ۴

۱. نام نقطه‌ای که از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است چیست؟

۲. نام نقطه‌ای که از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است چیست؟

۳. دایرهٔ خارجی مثلث به چند ضلع مثلث مماس است؟

۴. درحالت کلی، دایرهٔ نه نقطهٔ یک مثلث چند نقطهٔ مشترک با آن مثلث دارد؟

۵. درشکل ۴.۴۷ ، بااستفاده از اندازه‌های داده شده، طول قطعه خط CE را، در صورتی که قطعه خط‌های AD ، BE ، و CF متقارب باشند، بیابید.

۶. درشکل ۴.۴۷، در مورد مثلث CFB و قاطع AD، حاصلضرب سه نسبت مساوی با ۱- را، بااستفاده از قضیهٔ منلائوس، بنویسید.

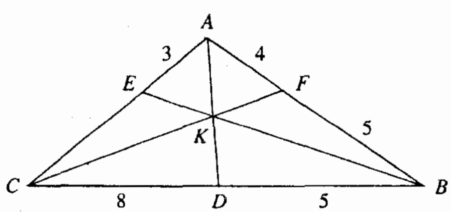
۷. حداقل تعداد نقاط مشترک هر هم میانهٔ مثلث بادایرهٔ بروکارد آن چیست؟

۸. طرحی برای شکل ۴.۴۸ بریزید که نشان دهد که چگونه می‌توان توپ A را وادار کرد که به توپ B، ابتدا با آمدوشد در مورد ضلع $\overline{EF}$، سپس ضلع $\overline{FC}$، برخورد کند.

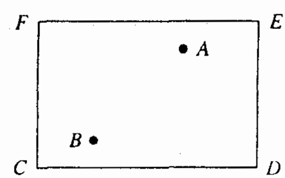
۹. در مورد هر نقطهٔ مفروض بردایرهٔ محیطی یک مثلث مفروض، چند خط سیمسون مشخص می‌شود؟

۱۰. قطعه خطی را نام ببرید که مزدوج همزاویهٔ خود است.

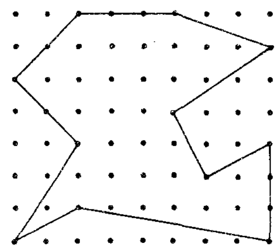
۱۱. کدام یک از این نقطه‌ها هیچ‌گاه برخط اولر قرار ندارد: مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز ثقل، نقطهٔ هم میانه؟



شکل ۴.۴۷



شکل ۴.۴۸



شکل ۴.۴۹

۱۲. کدام یک از این نقاط همواره برخط اولر واقع است: مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، مرکز ثقل، نقطهٔ بروکارد، نقطهٔ لموین، تقارب ارتفاعات، مرکز دایرهٔ محاطی خارجی، نقطهٔ ژرگون؟

۱۳. از قضیهٔ پیک برای پیدا کردن سطح چندضلعی شکل ۴.۴۹ استفاده کنید.

۱۴. ثابت کنید اگر ارتفاع مثلثی ادامه یابد تا دایرهٔ محیطی آن را تلاقی کند، ضلعی که ارتفاع مزبور آن را قطع کرده قطعه خط بین تقارب ارتفاعات و دایرهٔ محیطی از آن را نصف می‌کند.

۱۵. ثابت کنید که فاصلهٔ از رأس یک مثلث تا تقارب ارتفاعات آن دوبرابر فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی آن تا ضلع مقابل آن رأس است.

۱۶. ثابت کنید سه مثلث حاصل از وصل کردن مرکز ثقل یک مثلث به سه رأس آن مساحات مساوی دارند.

۱۷. ثابت کنید اگر بر هر ضلع مثلث مفروضی مثلث متساوی الاضلاعی بسازیم و رأس سوم هر یک از این مثلثها را به رأس مقابل‌شان از مثلث اصلی وصل کنیم، سه قطعه خط مشخص شده متقارب‌اند.

۱۸. ثابت کنید که مجموع طولهای عمودهای از یک نقطهٔ واقع در یک مثلث متساوی الاضلاع به اضلاع آن مساوی طول ارتفاع آن مثلث است.

۱۹. قضیهٔ بطلمیوس را، که بیان می‌کند که در یک چهارضلعی محاطی، حاصل ضرب طولهای دو قطر مساوی مجموع حاصل ضربهای طولهای اضلاع مقابل است، ثابت کنید.

۲۰. ثابت کنید که ۶ پای عمودهای از دونقطهٔ بروکارد یک مثلث به اضلاع آن مثلث هم دایره‌اند.

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان از هرمجموعهٔ تمریناتی که قبلاً از مجموعه‌های تمرینات پیشین این فصل معین نشده‌اند انتخاب کرد.

۵ ترسیمات

۵.۱ حکمت ترسیمات

مفهوم ترسیمات، همان گونه که از مرور آکسیومها و اصول موضوع بیان شده درفصل یک می توان ملاحظه کرد، اساس دستگاه آکسیوماتیک اقلیدس بود. مفهوم ترسیمات در تفکر هندسی هم چنان بااهمیت باقی می ماند. درهندسه های جدید گوناگون، ترسیمات، نه تنها به خاطر خودشان بلکه به این خاطر نیز که کاربردهای سایر مفاهیم هندسی را به دست می دهند، مورد بررسی قرار گرفته اند.

تصریح استفاده از خط کش نامدرج[1] و پرگار به عنوان تنها وسایل ممکن انجام دادن ترسیمات به افلاطون، فیلسوف بزرگ یونانی ای، که حدود یک قرن پیش از اقلیدس، از (۳۴۷ تا ۴۲۷) ق.م. می زیست، نسبت داده شده است. افلاطون استفاده از مقسمها[2] یا پرگارهابط[3] و نه پرگارهای مدرن مورد استفادهٔ امروزی ما را تجویز می کرد.وسیلهٔ مورد بحث چون در ترسیم دایره ای مورداستفاده قرارمی گرفت، اندازه اش به علت این که نمی توانست برای رسم دایره ای باهمان شعاع حرکت کند از بین می رفت. اما نشان داده می شود که مقسم (یا پرگار هابط) معادل پرگارهای مدرن است، و بنابراین خط کش نامدرج و پرگار هنوز دو وسیلهٔ مجاز در ترسیمات ریاضی کلاسیک هندسی اقلیدسی اند (و حتی از خط کش نامدرج می توان صرف نظر کرد).

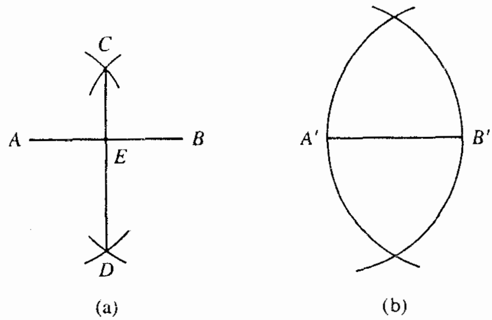
کلمهٔ ترسیم[4] حداقل به سه مفهوم به کار می رود:

۱. توصیف مسألهٔ هندسی مورد حل

۲. توصیف جریان حل مسأله

۳. توصیف رسم تکمیل شده ای که از حل مسأله نتیجه می شود

1. Straightedge
2. Dividers
3. Collapsing Compass
4. Construction



شکل ۵.۱

نتیجهٔ عمل ترسیم رسمی است که روابط معینی را بین خطوط و دوایر نشان می‌دهد. از لحاظ فلسفی، ترسیمات را می‌توان به صورت روشهای حل مسائل هندسی خاصی مطابق با مجموعهٔ ثابتی از قواعد توضیح داد.

مسألهٔ ترسیمات به طور ساده مسألهٔ رسم شکل برقرارکنندهٔ شرایط خاصی نیست بلکه شامل این مطلب، که آیا بااستفاده از پرگار و خط‌کش نامدرج تنها، جوابی راکه از لحاظ تئوریک دقیق است، می‌توان به دست آورد یا نه، نیز هست. سه اصل موضوع اول اقلیدس اساس آکسیوماتیک ترسیمات یونانیان را، که ترسیمات را حتی در حل مسائل جبری‌ای چون حل معادلهٔ درجه دوم نیز به‌کار می‌بردند، به دست می‌دهد. دو اصل موضوع اول اصول موضوع مذکور ترسیم هرقسمت از خط مستقیم گذرنده از دو نقطه را میسر می‌سازد، درحالی که اصل موضوع سوم ترسیم دایره را، در صورتی که مرکز و اندازهٔ شعاعش معلوم باشند، ممکن می‌کند.

مثالی از یک مسألهٔ ترسیمی سادهٔ حل شده با پرگار مدرن و بعد پرگار هابط تفاوت در روشی راکه باید به‌کاربرد توضیح می‌دهد. شکل ۵.۱a روش آشنای یافتن وسط یک پاره خط باترسیم را نشان می‌دهد. در این شکل $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$باید همنهشت باشند. $\overline{AD}$ و $\overline{BD}$ نیز باید هم‌نهشت باشند، اما $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ لزوماً همنهشت نیستند. شکل ۵.۱b همین مسأله را حل شده با پرگار هابط نشان می‌دهد. دراین حالت، برای شعاع مورد نظر از اندازهٔ $\overline{A'B'}$ استفاده شده زیرا طول آن را می‌توان بااستفاده ازیکی از دو سر آن به‌عنوان مرکز کمان مطلوب معین کرد، درحالی که شعاع دلخواه AC درشکل ۵.۱a را نمی‌توان باردیگر بانقطهٔ انتهایی دوم B به‌عنوان مرکز دایرهٔ مطلوب حاصل کرد.

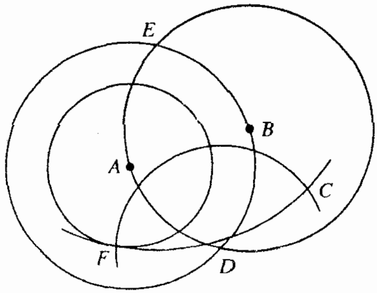
قضیهٔ ۵.۱. پرگار متعارف و پرگار هابط (مقسمها) از لحاظ ریاضی معادل‌اند.

اثبات این قضیه عبارت از نمودن این است که یک دایره را می‌توان با پرگار هابط، با معلوم بودن مرکز آن و دو نقطهٔ دیگری که طول شعاع آن را مشخص می‌کنند، رسم کرد. مراحل انجام گرفتن این ترسیم، بااستفاده از علائم شکل ۵.۲، بیان شده‌اند. دراین صورت مسأله‌مان ساختن دایره‌ای به مرکز A و شعاع BC است.

۱. دایرهٔ به مرکز A و گذرنده از B را رسم می‌کنیم.
۲. دایرهٔ به مرکز B و گذرنده از A را رسم می‌کنیم. این دو دایره در D و E تلاقی می‌کنند.
۳. دایرهٔ به مرکز E و گذرنده از C را رسم می‌کنیم.
۴. دایرهٔ به مرکز D و گذرنده از C را رسم می‌کنیم.
۵. دوایر مراحل ۳ و ۴ باردیگر در نقطهٔ F تقاطع می‌کنند، و دایرهٔ به مرکز A و شعاع AF، دایرهٔ مطلوب است.

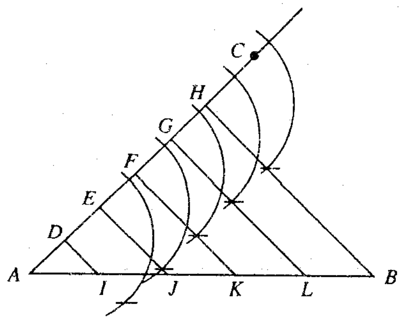
اثبات: بااستفاده از مثلثهای همنهشت، این که $\overline{AF}$ همنهشت با $\overline{BC}$ است به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

ترسیمات اساسی هندسهٔ اقلیدسی شامل انتقال قطعه خط، تنصیف قطعه خط، رسم عمود بریک خط از نقطه‌ای واقع برآن*، رسم عمود بریک خط از نقطه‌ای خارج آن**، رسم نیمساززاویه***، کپی کردن زاویه، رسم مثلث بامعلوم بودن یک زاویه و دوضلع مجاور آن، رسم مثلث بامعلوم بودن سه ضلع آن، رسم مماس از یک نقطه بریک دایره، و رسم خط گذرنده از نقطه‌ای موازی باخطی معلوم است. درضمیمهٔ ۳ هریک از این ترسیمات را، برای

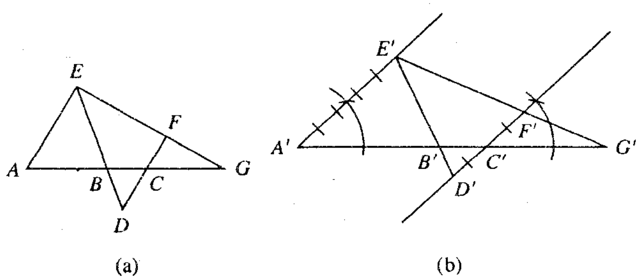


شکل ۵.۲

* اخراج کردن عمود
** وارد کردن عمود
*** منصف الزاویه



شکل ۵.۳



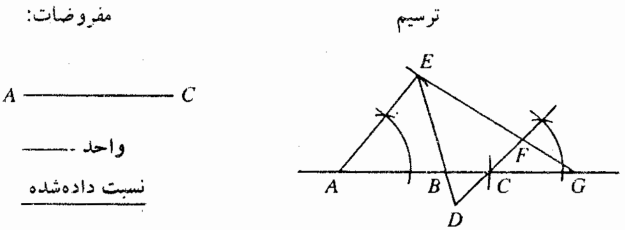
شکل ۵.۴

دانشجویانی که با آنها ناآشنایند، یا کسانی که قبل از ادامه دادن به مابقی این فصل به مرورشان نیازمندند، انجام داده‌ایم.

دراین جا به معرفی یا مرور چندین رسم اساسی، به طوری که بتوانند به آسانی به کار روند، پرداخته‌ایم.

اولین این ترسیمات، تقسیم یک قطعه خط به n قطعه خط هم‌نهشت، به‌ازای n صحیح مثبت بزرگتر از ۱ است، که به ازای $n = ۵$ درشکل **۵.۳** انجام گرفته‌است. مسأله‌مان دراین مورد تقسیم $\overline{AB}$ به پنج قطعه خط هم‌نهشت است. دراین صورت $\overline{AC}$ را از A با زاویهٔ مناسب دلخواهی رسم می‌کنیم. بعد واحد AD ای را برای مشخص کردن پنج قطعه خط همنهشت در امتداد $\overleftrightarrow{AC}$ درنظر می‌گیریم. سپس $\overline{HB}$ را رسم می‌کنیم، و چهار قطعه خط $\overline{DI}$، $\overline{EJ}$، $\overline{FK}$، و $\overline{GL}$ را، از نقاط مقرر شدهٔ بر $\overleftrightarrow{AC}$، موازی $\overline{HB}$ رسم کرده چهار نقطهٔ مطلوب I، J، K و L را معین می‌کنیم.

مسألهٔ دوم در ارتباط با اولی تقسیم یک قطعه خط به نسبتی معلوم است. مسأله‌مان در این مورد یافتن نقطهٔ B ای واقع بر $\overleftrightarrow{AC}$ و چنان است که AB/BC دارای مقدار عددی رسم‌پذیر معلو می‌باشد. یک مورد کاربرد ترسیم مورد بحث در نظریهٔ مجموعه‌های توافقی نقاطِ در



شکل ۵.۵

هندسهٔ تصویری است. شکل ۵.۴a شکل تحلیلی نمایشگر راه حل کامل این مسأله است. فرض براین است که B و G، $\overline{AC}$ را به‌طور داخلی و خارجی در نسبت مطلوب تقسیم کرده‌اند. در این صورت اگر $\overline{AE}$ و $\overline{DF}$ موازی باشند، $\Delta\ AEB \sim \Delta\ CDB$ و $\Delta\ AEG \sim \Delta\ CFG$ است، و نسبتهای تشابه ازواج مثلثهای متشابه مزبور نسبت تقسیم مفروض‌اند. بنابراین نسبت مفروض مان نسبت AE به CD و AE به CF نیز هست؛ و این ترسیم زیر، توضیح داده‌شده در شکل ۵.۴b به‌ازای نسبت ۵/۲، را ممکن می‌سازد. از A' و C'، خطوطی موازی رسم می‌کنیم. بااستفاده از واحدی دلخواه، E' را چنان‌که $A'E' = ۵$ و D' و F' را چنان که $C'D' = C'F' = ۲$ باشد، می‌یابیم. E'، D' و E'، F' را برای مشخص کردن موقع نقاط مطلوب B' و G' وصل می‌کنیم.

در مسألهٔ تقسیم یک قطعه خط به نسبتی مفروض، اطلاعات معلوم را می‌توان به طور کامل به صورت قطعه خط‌ها داد. فی‌المثل، $\overline{AC}$ را می‌توان همراه یک قطعه خط واحد وقطعه خط سومی، که طولش، برحسب واحد داده‌شده، نسبت مفروض را نمایش می‌دهد، مطرح کرد. دراین صورت، قطعه خط واحد می‌تواند برای $\overline{C'D'}$ به‌کار رود، در حالی که قطعه خط سوم طول AB را تعیین خواهد کرد. درشکل ۵.۵ مثال خاصی از این نوع ترسیم داده‌ایم. مسألهٔ موردنظر دراین شکل تقسیم داخلی و خارجی AC به نسبت داده‌شده است.

استفاده از ترسیمات اساسی این بخش به حل مسائل ترسیمی پیچیده‌تر می‌انجامد. ترسیمات شامل تقسیم قطعه خط‌ها، و سایر ترسیمات اشکال فصل ۴ را، درتمرینات واقع در پایان این بخش داده‌ایم. ترسیمات مشکلتر را در فصل ۵.۳ می‌توان یافت.

در بررسی صوری ترسیمات، چهار مرحلهٔ متمایز درحل هر مسألهٔ ترسیمی مطلوب است.

۱. تحلیل. دراین مرحله، حل کننده فرض می‌کند که عمل ترسیم انجام گرفته، سپس تصویر کامل حل را برای یافتن روابط موردنیاز بین عناصر مجهول درشکل و

حقایق مفروض در مسألهٔ اصلی تحلیل می‌کند.

۲. ترسیم. نتیجهٔ این مرحله خودِ رسم، که باخط کش نامدرج و پرگار انجام گرفته، و نشان دادن دلالات ترسیمی است.

۳. اثبات. لازم است که اثبات شود که شکل رسم شده در واقع همان شکل مطلوب است.

۴. بحث. دراین مرحله تعداد جوابهای ممکن و شرایط جواب ممکن توضیح داده می‌شود.

در این کتاب، نیاز به باتفصیل تمام انجام دادن جمیع چهار مرحلهٔ فوق نداریم، گرچه هر مرحله را به توضیح و تصویر می‌کشیم.

تمرینات ۵.۱

در مسائل ۱ و ۲، توضیح دهید که چگونه پرگار هابط را می‌توان در:

۱. تنصیف یک زاویه،

۲. انتقال یک پاره‌خط، به کار برد.

۳. اثبات قضیهٔ ۵.۱ را تکمیل کنید.

در تمرینات ۴ ـ ۸ ترسیم تعیین شده را انجام دهید.

۴. قطعه خط مفروضی را به هفت قطعه خط همنهشت تقسیم کنید.

۵. بامفروض بودن قطعه خط واحد، قطعه خط مفروضی را به‌طور داخلی و خارجی به نسبت ۳ به ۲ تقسیم کنید.

۶. ترسیم تمرین ۵ را با نسبت ۳ به ۴ انجام دهید.

۷. ترسیم تمرین ۵ را بانسبت ۵ به ۷ انجام دهید.

۸. قطعه خط مفروضی را به‌طور داخلی و خارجی به نسبت طولهای دو قطعه خط دلخواه مفروض، که هیچ یک از آنها قطعه خط واحد نیست، تقسیم کنید.

در تمرینات ۹ ـ ۱۸، باآغاز از مثلث و استفاده از ترسیمات اقلیدسی اساسی مورد نیاز، نقطه یا مجموعهٔ نقاط مطلوب را با ترسیم مشخص کنید.

۹. مرکز دایرهٔ محیطی
۱۰. تقارب ارتفاعات
۱۱. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی
۱۲. مرکز ثقل
۱۳. مرکز دایرهٔ محاطی خارجی
۱۴. نقطهٔ ژرگون
۱۵. دایرهٔ نه نقطه
۱۶. خط اولر
۱۷. نقطهٔ هم میانه
۱۸. دونقطهٔ بروکارد
۱۹I. تحقیق کنید که چگونه یونانیان معادلات درجه دوم را به کمک ترسیمات هندسی حل می‌کردند:
۲۰I. نشان دهید که چگونه ترسیمات دیگر را می‌توان با پرگار هابط انجام داد.

۵.۲ اعداد ترسیم‌پذیر

یک قطعه خط واحد عدد یک را نمایش می‌دهد. دراین صورت چه اعـداد دیگـری را می‌توان باآغاز از این قطعه خط واحد و تنها استفاده از خط‌کش نامدرج و پرگار در ترسیم قطعه خط‌های دیگر، باقطعه خط نمایش داد؟ پاسخ این سؤال مجموعه‌ای راکه به مجموعهٔ اعداد ترسیم‌پذیر[5] معروف است، تعریف می‌کند. شکل ۵.٦ ، تعبیر هندسی چهارعمل گویای* براعداد درست، نیز رسم بعضی از اعداد گنگ بااستفاده از جریان استخراج ریشهٔ دوم یک عددگویای مثبت، را نشان می‌دهد. اطلاعات داده شده در این مورد عبارت از سه قطعه خط واقع در شکل ۵.٦a است.

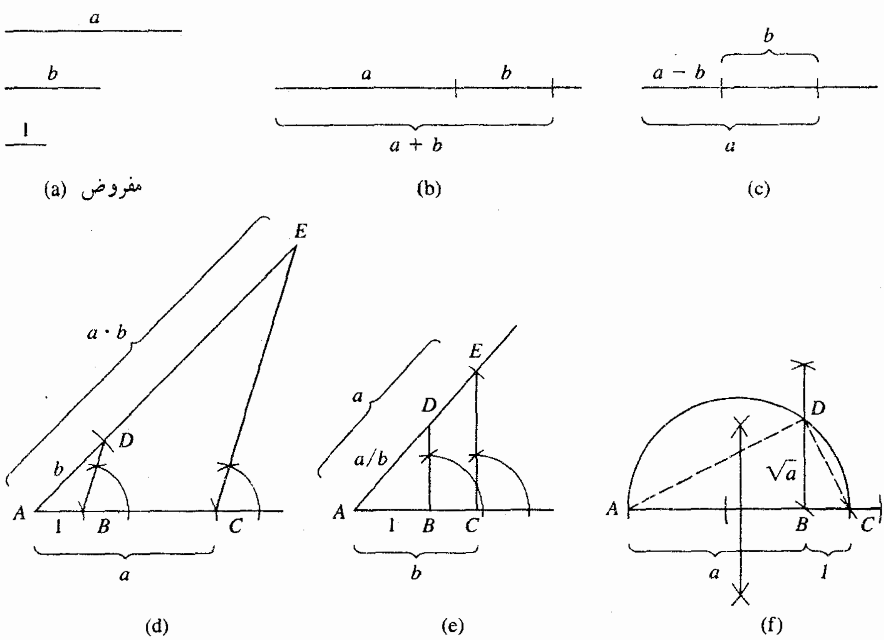
نمودارهای شکل ۵.٦b,c درمورد جمع و تفریق خود ـ شارح[6] اند، و در مورد ضرب، اثبات ترسیم شکل ۵.٦d به تناسب

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{AE}$$

بستگی دارد و بنابراین $AE = ab$ است.

5. Constructible Numbers
6. Self - Explanatory

* چهار عمل اصلی



شکل ۵.٦

در مورد تقسیم نیز، اثبات ترسیم شکل ۵.٦e به یک تناسب وابسته است.

$$\frac{۱}{AD} = \frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad AD = \frac{a}{b}$$

اثبات این که BD در شکل ۵.٦f مساوی $\sqrt{a}$ است نیز به تناسبی که، به نوبهٔ خود، از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابه واقع درشکل مزبور استخراج شده، وابسته است.

$$\Delta ADB \sim \Delta DCB$$

بنابراین

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$$

$$AB = (BD)^۲$$

$$\sqrt{AB} = BD$$

چهار ترسیم اولیهٔ جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم فوق ترسیم قطعه خط نمایش دهندهٔ هر عدد در میدان اعدادگویا را، بامعلوم بودن قطعه خط واحد، ممکن می‌سازند.

از آنجاکه طولها مثبت درنظر گرفته می‌شوند، می‌توان قطعات جهت‌دار را باعلامت منفی‌ای در جلو طول آنها برای نمایش اعداد منفی به کاربرد.

فرض می‌کنیم جمیع اعضای میدان عددی مرتب F ی بتوانند رسم شوند. دراین صورت، دوقضیهٔ بعد نشان می‌دهند که چگونه خط کش نامدرج و پرگار در تعیین این که کدام اعضا ترسیم‌پذیرند، درگیر می‌شوند.

قضیهٔ ۵.۲. استفاده از خط‌کش نامدرج تنها هیچ‌گاه نمی‌تواند قطعه خط هایی خارج میدان عددی اصلی به دست‌دهد.

اثبات: معادلات هر دو زوج خط گذرنده از دو زوج نقطهٔ متمایز بامختصات (a ، b)، (c،d)، (e،f)، (g،h) دریک میدان عبارت‌انداز

$$y - b = \frac{d - b}{c - a}(x - a)$$

و

$$y - f = \frac{h - f}{g - e}(x - e)$$

نقطهٔ تقاطع این دوخط مختصاتی حاصل از اعمال گویا براعضای میدان F دارد؛ درنتیجه استفاده از خط نامدرج تنها منجربه عددی خارج میدان اصلی نمی‌شود. طبیعی است که در این مورد فرض کرده‌ایم که از تقسیم برصفر اجتناب شده‌است.

اکنون عضو a ای از F چنان‌که $\sqrt{a}$ عضوی از F نباشد انتخاب می‌کنیم. دراین صورت جمیع اعداد ازنوع $b + c\sqrt{a}$ (b و c نیز در F) را می‌توان بااستفاده از خط کش نامدرج و پرگار رسم کرد. اعداد به صورت $b + c\sqrt{a}$ خود میدانی تشکیل می‌دهند، و این میدان میدان توسیعی F نامیده می‌شود. ترسیم ریشهٔ‌دوم این امکان را می‌دهد که اعدادی در میادین توسیعی[۷]، دارندهٔ میدان اعداد گویا به عنوان زیر مجموعه، تشکیل دهیم. مثالهایی از میدانهای توسیعی اعداد ترسیم‌پذیر مجموعه‌های اعداد $a+b\sqrt{۲}$، $a+b\sqrt{۳}$، $\sqrt{a+b\sqrt{۲}}$، بــــه ازای اعداد گویای a و b وکل زیر رادیکال مثبت درمثال سوم‌اند. عدد $۵+\sqrt{۳+\sqrt{۷+\sqrt{۲}}}$

7. Extension Fields

عددی ترسیم‌پذیر است، درحالی که $\sqrt[3]{7}$ نیست. (تمرین ۱۸ ، تمرینات ۵.۴ را ملاحظه کنید.) استفادهٔ منفرد پرگار، چنان که در قضیهٔ زیر بیان شده، نمی‌تواند از F به خارج از میدان توسیعی ئی از F منجر شود.

قضیهٔ ۵.۳. کاربرد منفرد پرگار بااستفاده از یک میدان عددی تنها به اعضای میدان توسیعی $l + m\sqrt{n}$ ، که درآن l ، m ، و n اعضای میدان اصلی‌اند، و n مثبت است منتج می‌شود. دراین قضیه ، n مثبت و l و m متغیرند.

برای اثبات این قضیه از نظرگاه جبر، لازم است که تقاطع یک دایره و یک خط و بعد تقاطع دو دایره را بررسی کنیم.

تقاطع یک دایره، $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$، و یک خط مستقیم ، $dx + ey + f = 0$ با جمیع ضرایب در F، توسط جوابهای

$$x^2 - \left(\frac{-f - dx}{e}\right)^2 + ax + b\left(\frac{-f - dx}{e}\right) + c = 0$$

داده می‌شود. معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت زیرنوشت:

$$\left(1 - \left[\frac{d}{e}\right]^2\right)x^2 + \left(\frac{2df - bd}{e} + a\right)x + \left(\frac{f^2 - bf}{e} + c\right) = 0$$

هریک از ضرایب این معادله عضوی از F است، بنابراین آن را می‌توان به‌صورت g ، h ، k مشخص کرد، دراین صورت $gx^2 + hx + k = 0$ ، و فرمول معادلهٔ درجه دوم جوابهای x به‌ازای $h^2 - 4gk \geqslant 0$ مقادیر حقیقی دارد $x = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4gk}}{2g}$ را به دست می‌دهد. هر دو این جوابها به‌ازای اعداد خاصی در F به صورت $l + m\sqrt{n}$ اند، بنابراین استفاده از پرگار به خارج میدان توسیعی حاصل منجر نمی‌شود. اثبات قسمت دوم قضیه، شامل تقاطع دو دایره، به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود. اعداد ترسیم‌پذیر را می‌توان، به عنوان نتیجهٔ این تحلیل، به صورت اعدادی که می‌توانند از دنبالهٔ میادین **توسیعی** نوع موردبحث به‌دست آیند، توصیف کرد. فی‌المثل، عدد $5+\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}$ را، به‌این علت که می‌تواند از دنبالهٔ میادین **توسیعی** $7+\sqrt{2}$ ، $3+\sqrt{7+\sqrt{2}}$ ، و $5+\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}$ به‌دست آید، می‌توان رسم کرد.

در بخش بعد، مسائل ترسیمی به صورت وسیله‌ای برای بیشتر آموختن فایدهٔ ادوات ترسیمی و مفاهیم هندسی فصل ۴، به‌کار رفته است. پیشنهاد دیگر برای پاره‌ای از خوانندگان این است که نظریهٔ ترسیمات و اثباتهای عدم امکان بخش ۵.۴ را بخوانند، و سپس به مسائل عملی بخش ۵.۳ بازگردند.

تمرینات ۵.۲

درمسائل ۱ ـ ۸، بگویید که عدد داده‌شده ترسیم‌پذیر است یا خیر.

۱. $۳/۴$

۲. $\sqrt[۸]{۳}$

۳. $۳+۴\sqrt{۷}$

۴. π

۵. $\sqrt{۷/۵}$

۶. $\sqrt{۲+\sqrt{۳+\sqrt{۵}}}$

۷. $۸/۷۵۹$

۸. $\sqrt[۳]{۵+\sqrt[۳]{۷}}$

برای انجام دادن ترسیمات تمرینات ۹ ـ ۱۳ قطعه خط واحد مفروض و دوقطعه خط مفروض دیگر درنظر بگیرید.

۹. قطعه خطی بیابید که اندازه‌اش مجموع اندازه‌های دوقطعه خط مفروض باشد.

۱۰. قطعه خطی بیابید که اندازه‌اش تفاضل اندازه‌های دوقطعه خط مفروض باشد.

۱۱. قطعه خطی بیابید که اندازه‌اش حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعه خط مفروض باشد.

۱۲. قطعه خطی بیابید که اندازه‌اش خارج قسمت اندازه‌های دوقطعه خط مفروض باشد.

۱۳. قطعه خطی بیابید که اندازه‌اش ریشهٔ دوم اندازهٔ قطعه خط بلندتر باشد.

در تمرینات ۱۴ ـ ۱۸، باقطعه خط واحد مفروضی، درمورد هریک از اعداد در مجموعهٔ اعداد ترسیم‌پذیر، قطعه خطی رسم کنید. نتایج یک تمرین را در مورد تمرین دیگر به‌کاربرید.

۱۴. ۳

۱۵. $\sqrt{۳}$

۱۶. $۲+\sqrt{۳}$

۱۷. $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$

۱۸. $\sqrt{۳+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}$

۱۹. بامفروض بودن قطعه خط واحدی، قطعه خطی در مورد $\sqrt{۲/۳}$ رسم کنید.

۲۰. درقضیهٔ ۵.۲، نقطهٔ تقاطع دو خط مربوطه را بیابید.

۲۱. دراثبات قضیهٔ ۵.۲ ، نشان دهید که مجموعهٔ اعداد به صورت $b + c\sqrt{a}$ تحت چهار عمل گویا بسته است.

۲۲. اثبات قضیهٔ ۵.۳ را در مورد دو دایرهٔ متقاطع تکمیل کنید.

۲۳. مستطیلی طلایی رسم کنید (بخش ۴.۶ را ملاحظه کنید).

I۲۴. در مورد خاصیت بستگی تحت عملیات گوناگون در مورد مجموعهٔ اعداد ترسیم‌پذیر تحقیق کنید.

I۲۵. قسمتهایی از مورد زیر را مطالعه کنید:

Charles R. Hadlock's Field Theory and Its Classical Problems (Washington, D.C.: *Mathematical* Association of America, 1978).

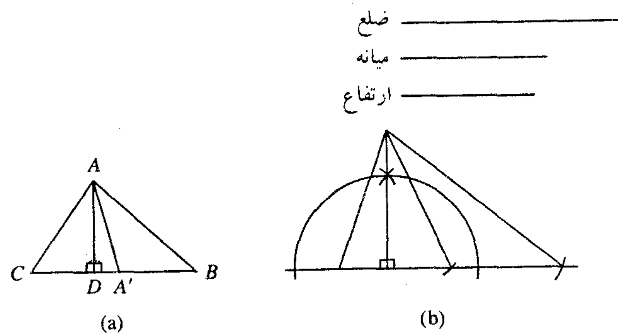
۵.۳ ترسیمات هندسهٔ اقلیدسی پیشرفته

خوانندهٔ این بخش را چنان باید که دریافتی چنداز مسائل ترسیمی گوناگون حاصل کند نیز فایدهٔ ترسیمات را درکاربرد مفاهیمی که پیش از این درفصل قبل خوانده به ادراک آورد. اما، نتیجهٔ مطلوب‌مان از این کار مهارت بیشتر یافتن دراستفاده از ترسیمات نیست، بلکه درعوض، براستفاده از قسمت تحلیلی یک مسألهٔ ترسیمی به عنوان کاربرد مفاهیم فصل ۴ تأکید داریم. به خاطر داشته باشید که ترسیمات وسیلهٔ جالبی درگسترش درک مفاهیم هندسهٔ اقلیدسی پیشرفته به دست می‌دهند.

دریک مسألهٔ ترسیمی ، مثلثی را، بامعلوم بودن طول یک ضلع و طولهای ارتفاع و میانهٔ نظیر آن ضلع را از آن، رسم کنید.

تصویر تحلیلی این مسأله را درشکل ۵.۷a نشان داده‌ایم. از اطلاعات داده‌شده، مثلث قائم $AA'D$ را می‌توان از آنجاکه دوضلع آن معلوم است، بلافاصله رسم کرد. سپس B و C را می‌توان بر $\overleftrightarrow{DA'}$ مکان داد. چه هریک از آنها به فاصلهٔ نصف اندازهٔ ضلع داده شده از نقطهٔ مشخص شدهٔ A' است. رسم واقعی را در شکل ۵.۷b نشان داده‌ایم. مثلث $AA'D$ ، و درنتیجه مثلث مطلوب را، تازمانی که قطعه خط میانه حداقل به درازی قطعه خط ارتفاع است، می‌توان همیشه رسم کرد و تنها یک جواب ممکن موجود است. مثلث $AA'D$ مثالی از مثلث معین[8] در ترسیم است. مثلث، معمولاً قائم‌الزاویهٔ، معین، مثلثی است که می‌تواند بلافاصله از

8. Uxiliary Triangle



شکل ۵.۷

اطلاعات داده‌شده رسم شود.

مثال دوم به توضیح مفهوم بااهمیت مشخص کردن یکی از رئوس مثلث مطلوب به عنوان اشتراک دو مجموعهٔ نقاط برقرارکنندهٔ شرایط داده‌شده، می‌پردازد. به بیان سنّتی، این نقطه به‌عنوان تقاطع دو مکان هندسی[9] به وصف می‌آید.

در این مسأله، مثلثی را، با معلوم بودن یک زاویه، طول ضلع مقابل آن زاویه، و طول ارتفاع نظیر آن ضلع رسم می‌کنیم. تصویر تحلیلی را درشکل ۵.۸a نشان داده‌ایم. فرض می‌کنیم که $\angle BAC$ ، AD، و BC مفروض باشند. از آنجاکه B و C را می‌توان بااطلاعات داده‌شده مشخص کرد، تنها مطلب باقی مانده مشخص کردن مکان Aی منسوب با B و C است. سایر شرایط مسأله به طور فردی A را مشخص نمی‌کنند، اما آنها را می‌توان باهم به کار برد. یکی از شرایط تشخیص مکان A این است که این نقطه باید برخطی موازی $\overline{BC}$ و به فاصلهٔ AD از ضلع مقابلش باشد. A باید بردایرهٔ محیطی مثلث نیز واقع شود، و این دایره را می‌توان باداشتن زاویه و ضلع مقابلش از مثلث یافت. ترسیم معین[10] فوق را درشکل ۵.۸b نشان داده‌ایم. به این ترتیب دو شرط تعیین کنندهٔ A، و مثلث مطلوب را می‌توان رسم کرد.

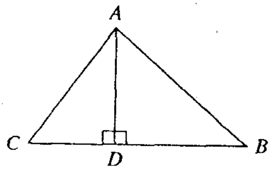
مسألهٔ معین مثال فوق از لحاظ خودش نیز قابل توجه است. درشکل ۵.۸b ، زاویه FCE زاویهٔ مفروض است. بنابراین مرکز دایرهٔ مورد بحث را می‌توان در تقاطع عمودمنصف $\overline{BC}$ و عمود بر $\overline{CE}$ در C مشخص کرد.

بحث مسأله که باشکل ۵.۸ نمایش داده‌شده، عبارت‌از تعیین تعداد جوابهاست. دو خط می‌توان موازی $\overline{BC}$ رسم کرد، و هریک از این دو می‌تواند دایره را دوبار قطع کند. اما، هربار دریکی از حالات، زاویهٔ حاصل مکمل زاویهٔ مفروض می‌شود، و بنابراین، حالت

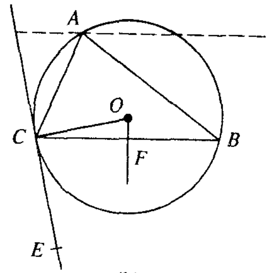
---

9. Locus

10. Auxiliary Construction

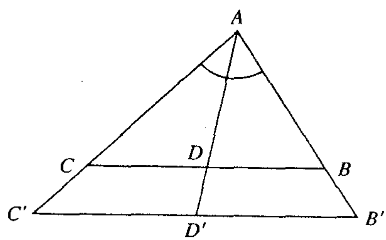


(a)



(b)

شکل ۵.۸



شکل ۵.۹

مزبور باید حذف شود. و این، بسته به این که خط موازی مزبور دایره را چند بار قطع کند، امکان دو، یک، یا هیچ جواب را باقی می‌گذارد.

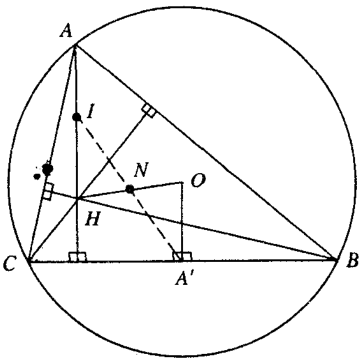
سه عضو عبارت از اندازهٔ یک زاویهٔ مثلث، طول ضلع مقابل آن، و شعاع دایرهٔ محیطی آن، مثالی از یک داده[11] را تشکیل می‌دهند.

تعریف. داده مجموعه‌ای از n عضو است، که هر ۱ـ n عضو آن عضو باقی مانده را مشخص می‌کنند.

شکل ۵.۸b تنها یک قسمت از اثبات این مطلب را، که سه عضو مورد بحث تشکیل یک داده می‌دهند، نشان می‌دهد، زیرا باید نشان دهد که هر دو عضو عضو سوم را معین می‌کنند.

اغلب، می‌توان از مفهوم مثلثهای متشابه در ترسیمات استفاده کرد. این موضوع در مسألهٔ ترسیم مثلثی، با معلوم بودن اندازه‌های دوزاویه، و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ سوم آن، به توضیح آمده است. شکل ۵.۹ تصویر تحلیلی این مسأله است. اندازه‌های سه زاویهٔ مثلث یک داده

11. Datum



شکل ۵.۱۰

تشکیل می‌دهند. دراین صورت می‌توان، بااستفاده از این اطلاعات، مثلث $AB'C'$ی مشابه با مثلث مطلوب رسم کرد. این مفهوم با این عنوان که مثلث مربوطه درنوع*[12] مشخص شده، معروف است. دراین صورت خانواده‌ای از مثلثها تعیین شده، و مثلث مطلوب را می‌توان به‌عنوان عضو خاصی از این خانواده پیدا کرد. مثلث مطلوب با جدا کردن طول نیمساز مفروض در امتداد $\overline{AD'}$ برای مشخص کردن D، و بعد رسم به موازات $\overline{C'B'}$ از D، به دست می‌آید. تا زمانی که مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ مفروض کمتر از π است همواره یک جواب موجود است.

ممکن است ترسیم، شامل مفاهیمی از هندسهٔ اقلیدسی، که پیش رفته از آن‌هایی که تاکنون دراین بخش به کاربرده‌ایم‌اند، باشد. مثالی از این نوع، ترسیم مثلثی، بامعلومات مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز دایرهٔ نه نقطه، و وسط یک ضلع است.

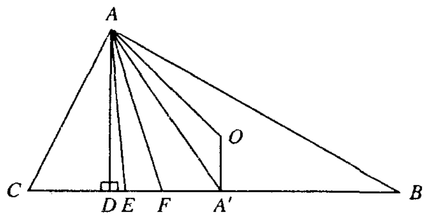
تصویر تحلیلی این مسأله را درشکل ۵.۱۰ داده‌ایم. موقع H، تقارب ارتفاعات مثلث، از این واقعیت که N، مرکز دایرهٔ نه نقطه، وسط قطعه خط واصل تقارب ارتفاعات و O مرکز دایرهٔ محیطی است، معین می‌شود. از آن جاکه N، وسط $\overline{A'I}$، که در آن I وسط $\overline{HA}$ و A' وسط ضلع مفروض است، نیز هست، می‌توان نقطهٔ I را نیز معین کرد، سپس رأس A می‌تواند به فاصلهٔ معلومی بر $\overleftrightarrow{HI}$ ماوراء I یافت شود. یک مکان نقاط B و C خط گذرندهٔ از A' عمود بر $\overline{OA'}$ است. مکان دوم دایرهٔ محیطی است، و این دایره را می‌توان به علت این که شعاع OA را یافته‌ایم، معین کرد.

مثال دوم از ترسیمی که مفهوم پیشرفته‌تری را به کار می‌برد رسم مثلثی با معلومات طولهای

---

* کلی ذاتی، یکی از کلیات خمس

12. Species



شکل ۵.۱۱

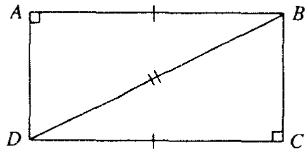
ارتفاع، میانه، و هم میانهٔ مرسوم از یک رأس است. تصویر تحلیلی این مسأله را درشکل **۵.۱۱** نشان داده‌ایم. دراین شکل $\overline{AD}$ ارتفاع، $\overline{AE}$ هم میانه، و $\overline{AA'}$ میانه است. تحلیل و بحث مسأله را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم.

تمرینات ترسیم مثلث پایان این بخش مفاهیم داده‌شده در مثالهای فوق را به کار می‌برند. دراین مورد، مرحلهٔ اول رسم تصویر تحلیلی، و مرحلهٔ دوم بررسی آن **و جهد** دریافتن طرحی در تعیین اطلاعات مفقودهٔ لازم در تکمیل مثلث است. بعضی از سؤالات قابل پرسش در رجوع به تصویر تحلیلی رسم شده عبارت‌انداز:

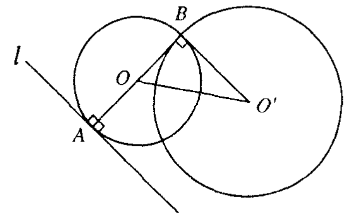
۱. آیا هم اکنون قسمتی از شکل مطلوب (مثلثی قائم‌الزاویه یا مثلث معین دیگری) از داده‌های مفروض تعیین شده‌است؟
۲. آیا تعیین رسم سوم مثلث مطلوب به صورت تقاطع دو مکان مفروض ممکن است؟
۳. آیا دو عضو مفروضی داده‌ای که عضو دیگری را به دست دهد تشکیل می‌دهند؟
۴. آیا می‌توان مثلث مطلوب را با استفاده از اعضای مطلوب در صورت نوع آن ترسیم کرد؟
۵. اگر داده‌های مفروض شامل نقاط خاصی از هندسهٔ اقلیدسی پیشرفته (چون مرکز دایرهٔ نه نقطه) باشند، چه چیزی در مورد موقع آن نقطه در رابطه بارئوس مثلث مطلوب یا در رابطه با اعضای مفروض دیگر می‌دانیم؟

مسائل ترسیمی همیشه با رسم مثلث به عنوان شکلی کامل شده سروکار ندارند. فی‌المثل، فرض می‌کنیم که مطلوب مان رسم مستطیلی، بامعلوم بودن طولهای یک ضلع و یک قطرش باشد. در این صورت، تصویر تحلیلی، شکل **۵.۱۲**، نشان می‌دهد که هریک از دومثلث قائم ABD و BCD را می‌توان از اطلاعات مفروض ترسیم کرد.

آخرین مثال مان رسم دایرهٔ باشعاع معلومی که برخط معلومی مماس و بردایرهٔ معلومی عمود است،



شکل ۵.۱۲



شکل ۵.۱۳

می‌باشد. دو دایره، متعامد[13] یا عمود برهم‌اند اگر به زوایای قائمه تلاقی کنند. تصویر تحلیلی مسأله را درشکل **۵.۱۳** نموده‌ایم. دراین شکل، دایرهٔ مطلوب دایرهٔ به مرکز O ، مماس مفروض l، و دایرهٔ مفروض دایرهٔ به مرکز O' است.

دراین صورت تنها شیئی مورد تعیین موقع مرکز دایرهٔ مطلوب است. یکی از شرایط مسأله این شرط است که مرکز مورد بحث برخطی موازی l به فاصلهٔ قائم مفروض OA از l است. شرط دوم این است که مرکز مزبور به فاصلهٔ معلوم $OO'=\sqrt{(OB)^2+(BO')^2}$ از O' قرار دارد و بنابراین موقع‌اش را می‌توان تثبیت کرد. به علت این که تشخیص مکان O وابسته به تقاطع دایره‌ای با دوخط موازی است، برای بحث کامل مسأله باید به بررسی چهار تا صفر جواب ممکن بپردازیم.

تمرینات ۵.۳

۱. اثبات این را،که اندازهٔ یک زاویهٔ مثلث، اندازهٔ ضلع مقابل آن، و شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث یک داده تشکیل می‌دهند، تکمیل کنید.

۲. شکل ترسیمی واقعی متناظر باشکل **۵.۱۰** را رسم کنید.

۳. بحث تعداد جوابهای شکل **۵.۱۳** را تکمیل کنید.

در مورد هریک از ترسیمات زیر:

a. تصویری تحلیلی رسم کنید.

b. تحلیل مربوطه را به دست دهید.

c. به طور مختصر در تعداد جوابهای ممکن بحث کنید.

---

13. Orthogonal

۴. مثلثی را، بامعلوم بودن اندازهٔ یک زاویه، طول یکی از ضلعهای مجاور آن، و طول ارتفاع وارد برآن ضلع، رسم کنید.
۵. مثلثی را، بامعلوم بودن اندازهٔ یک زاویه، طول نیمساز داخلی آن زاویه، و طول یکی از اضلاع مجاور آن، رسم کنید.
٦. مثلثی را، بامعلوم بودن طول یک ضلع و طولهای میانه‌های دو ضلع دیگر رسم کنید.
۷. مثلثی را، بامعلوم بودن یک ضلع، طول ارتفاع وارد برضلع دوم، و شعاع دایرهٔ محیطی آن رسم کنید.
۸. مثلثی را، بامعلوم بودن طول یک ضلع، طول میانهٔ آن ضلع، و شعاع دایرهٔ محیطی آن رسم کنید.
۹. دایره‌ای را باشعاع معلوم و مماس به دوخط متقاطع مفروض رسم کنید.
۱۰. دایره‌ای را باشعاع معلوم و مماس به خطی مفروض و مماس به دایره‌ای مفروض رسم کنید.
۱۱. مثلثی را، بامعلوم بودن طول یک ضلع، طول میانهٔ آن ضلع، و نسبت طولهای دوضلع باقیمانده رسم کنید.
۱۲. مثلثی را، بامعلوم بودن اندازهٔ یک زاویه، اندازهٔ ضلع مقابل آن زاویه، و شعاع دایرهٔ داخلی رسم کنید.
۱۳. مثلثی را، با معلوم بودن اندازهٔ یک زاویه، طول نیمساز داخلی آن زاویه، و شعاع دایرهٔ داخلی رسم کنید.
۱۴. مثلثی را، بامعلوم بودن اندازهٔ یک زاویه و طولهای ارتفاعات وارد بر دوضلع مجاور این زاویه رسم کنید.
۱۵. مثلثی را، بامعلوم بودن طول یک ضلع، طول میانهٔ آن ضلع، و طول یکی از میانه‌های دیگر رسم کنید.
۱٦. مثلثی را، بامعلوم بودن اندازه‌های دو زاویه و طول میانهٔ ضلع سوم رسم کنید.
۱۷. مثلثی را، بامعلوم بودن اندازهٔ یک زاویه، طول ارتفاع وارد برضلع مقابل آن زاویه، و نسبت دوضلع مجاور آن زاویه رسم کنید.
۱۸. مثلثی را، بامعلوم بودن تقارب ارتفاعات، مرکز دایرهٔ نه نقطه، و پای یک ارتفاع رسم کنید.
۱۹. مثلثی را، بامعلوم بودن طولهای ارتفاع، میانه، و هم میانهٔ یک رأس رسم کنید.
I۲۰. با استفاده از مفاهیم فصل ۴ سه مسألهٔ دیگر ترسیم مثلث را طرح و حل کنید.

I۲۱. مسألهٔ ترسیمی دیگری راکه در مورد* زیر یافت می‌شود حل کنید:
George polya, *Mathematical Discovery*, Chapter 1.

I۲۲. حل بعضی از مسائل ترسیمی را می‌توان بااستفاده از تبدیلات آسان‌کرد. دراین مورد مثالهایی را در:
Eves, *A Survey of Geometry*
مطالعه‌کرده سپس چند مسأله طرح کنید.

۵.۴ ترسیمات و اثباتهای عدم امکان

بعضی از مسائل نمی‌توانستند بااستفاده از وسایلی که افلاطون مشخص کرده بود، توسط یونانیان حل شوند. اما، آنان به جای تسلیم وسایل جدیدی که آن ترسیمات را ممکن می‌ساخت اختراع کردند. گرچه سرانجام، هرچند نه پیش از قرن نوزدهم، پیشرفتهای جبر دستگاه اعداد حقیقی، تشخیص ترسیماتی را،که باخط کش نامدرج و پرگار ناممکن‌اند، میسر ساختند.

در تاریخ ریاضیات، سه مسألهٔ ترسیماتی چنان مشهور شدند که «سه مسألهٔ معروف یونانی» نام‌گرفتند. این سه مسأله مسائل تضعیف** مکعب[۱۴]، تثلیث*** زاویه[۱۵]، و تربیع**** دایره[۱۶] اند. دراین مورد جبر اعداد ترسیم ناپذیر اطلاعات لازم را، برای اثبات این که هریک از این ترسیمات ناممکن است، به دست داده‌است.

در مورد پیدایش مسألهٔ تضعیف مکعب داستانهای افسانه‌آمیز گوناگونی نقل می‌شود. یکی از آنها براین است که پادشاهی می‌خواست اندازهٔ مقبرهٔ مکعب شکل فرزندش را دو برابر کند. دیگری چنین می‌گوید که به دلیان‌ها[۱۷] توسط غیب‌گوشان فرمان داده‌شده بود که برای رهاندن شهر از طاعون، اندازهٔ محرابی راکه برای آپولو نصب شده بود، دو برابر کنند. در این مسائل حجم مکعب، نه یال آن، است که باید دو برابر شود (شکل ۵.۱۴ را ملاحظه کنید).

اگر یال مکعب اصلی ۱ واحد ویال مکعب مطلوب x واحد باشد، در این صورت حجم مکعب اصلی ۱ واحد مکعب و حجم مکعب مضاعف ۲ واحد است، و این بدان معنی

---

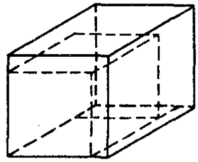
* این کتاب به زبان فارسی تحت عنوان خلاّقیت ریاضی به ترجمهٔ استاد ارجمند آقای پرویز شهریاری توسط انتشارات فاطمی به طبع رسیده‌است.

** دوبرابرکردن

*** سه قسمت مساوی کردن

**** مربع کردن

14. Doubling the Cube
15. Trisecting the Angle
16. Squaring the Circle
17. Delians



شکل ۵.۱۴

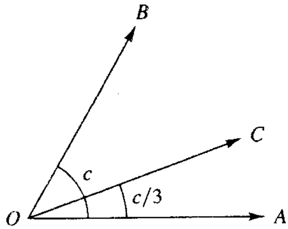
است که x باید جواب حقیقی معادلهٔ $x^3 = 2$ باشد. اما یک عدد ترسیم‌پذیر باید عضوی از میدان توسیعی‌ای از مجموعهٔ اعداد گویا باشد، و این فرض که جواب $x^3 = 2$ بریکی از این میادین توسیعی قراردارد به تناقض می‌انجامد. چه می‌توان ثابت کرد، هرچند تفصیلات جبری را در این مورد انداخته‌ایم، که هرگاه عددی به‌صورت $b + c\sqrt{a}$ جواب معادله‌ای مکعبی باشد، در این صورت $b - c\sqrt{a}$ نیز هست. قبلاً نشان داده‌شد که اعضای میادین توسیعی را می‌توان همواره به‌صورت $b + c\sqrt{a}$ نوشت. اما فرض دو ریشهٔ حقیقی $x^3 = 2$ این واقعیت شناخته شده را، که دو ریشهٔ سوم ۲ ناحقیقی‌اند، نقض می‌کند. بنابراین، x عددی ترسیم‌پذیر نیست.

این موضوع اثبات غیرممکن بودن حل اولین مسأله از مسائل یونانی فوق‌الذکر را تکمیل می‌کند.

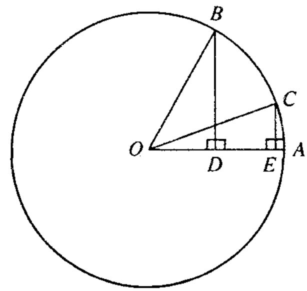
قضیهٔ ۵.۴ ترسیم تضعیف حجم مکعب نمی‌تواند باخط کش نامدرج و پرگار تنها انجام شود.

کار مسألهٔ دوم، یعنی مسألهٔ به سه قسمت مساوی تقسیم کردن یک زاویه درحالت کلی، را می‌توان به طریقی مشابه با اولی به اتمام رساند. مسأله را درشکل ۵.۱۵ به تصویر کشیده‌ایم. اگر زاویهٔ AOB اندازه‌ای برابر c درجه داشته‌باشد، در این صورت مسأله‌مان ترسیم زاویهٔ AOC با اندازه‌ای برابر $c/3$ درجه است.

به طور معمول، بااین مسأله با نشان دادن این که مثال منفردی، چون تثلیث زاویهٔ ۶۰ درجه، ناممکن است، و درنتیجه حالت کلی ناممکن است، برخورد می‌کنند. درشکل ۵.۱۶، فرض می‌کنیم که $m\angle BOA = 60$ و $m\angle COA = 20$ باشد. اگر دایره‌مان دایرهٔ واحد باشد، در این صورت $OD = \cos\angle BOA$ و $OE = \cos\angle COA$ است. دراین صورت مسألهٔ ترسیم زاویهٔ کوچکتر معادل مسألهٔ یافتن OE، بامعلوم بودن OD، است. اتحاد مثلثاتی رابط کسینوسهای یک زاویه و زاویهٔ دوم با یک سوم اندازهٔ زاویهٔ اول عبارت



شکل ۵.۱۵



شکل ۵.۱٦

است از

$$\cos\theta = ۴\cos^{۳}(\frac{\theta}{۳}) - ۳\cos(\frac{\theta}{۳})$$

اگر $x = \cos(\theta/۳)$، و $\cos\theta$ برابر $\frac{۱}{۲}$ (زیرا $\theta = ٦۰^\circ$) باشد، در این صورت

$$۴x^{۳} - ۳x - \frac{۱}{۲} = ۰$$

یا

$$۸x^{۳} - ٦x - ۱ = ۰$$

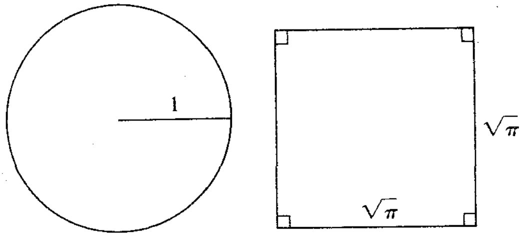
این معادله جواب گویا ندارد، زیرا اگر a/b جواب گویایی باشد، دراین صورت a عامل مثبت یا منفی ۱ و b عامل مثبت یا منفی ۸ است؛ و می‌توان جمیع امکانات را برای ملاحظهٔ این که هیچ یک جواب نیست مورد بررسی قرار داد.

اگر معادله‌ای دارای جوابی به صورت $a + b\sqrt{c}$ باشد، $a - b\sqrt{c}$ را به عنوان جواب دیگر دارد. فرض می‌کنیم که این دومیدان توسیعی جامع کمترینی راکه جواب مان عضوی از آن است را نمایش دهند. مجموع سه ریشهٔ معادلهٔ مورد بحث باید برابر صفر، ضریب جملهٔ $x^{۲}$ باشد، بنابراین اگر r ریشهٔ سوم باشد، (مفروض از رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ بررسی شده در نظریهٔ معادلات)

$$(a+b\sqrt{c}) + (a-b\sqrt{c}) + r = ۰$$

$$۲a + r = ۰$$

$$r = -۲a$$



شکل ۵.۱۷

این تساوی فرض قبل را که $a + b\sqrt{c}$ عددی را در میدان توسیعی جامع کمترین جوابها نمایش می‌دهد، نقض می‌کند. در این صورت نتیجه این است که جوابهای $۸x^۳ - ٦x - ۱ = ۰$ اعداد ترسیم‌پذیر نیستند، و بنابراین قضیهٔ زیربنا می‌شود.

قضیهٔ ۵.۵. ترسیم تثلیث هر زاویه را نمی‌توان بااستفاده از خط‌کش نامدرج و پرگار تنها انجام داد.

سومین و پیچیده‌ترین سه مسألهٔ مشهور یونان تربیع دایره است. این مسأله به معنی یافتن طول ضلع مربعی است که اندازهٔ مساحت دایره‌ای با شعاع معلوم را داراست. از لحاظ جبری، اگر طول مطلوب ضلع مورد بحث x و طول شعاع معلوم ۱ باشد، در این صورت $x^۲ = \pi$ و اندازهٔ یال مطلوب $\sqrt{\pi}$ است. مسأله را درشکل ۵.۱۷ ، که در آن دوشکل مورد بحث مساحت یکسان دارند، توضیح داده‌ایم. اثبات این که این عدد را نمی‌توان رسم کرد بستگی به دو گزارهٔ بعد از تعریف زیر، که هر دو راست‌اند اما در این جا اثبات نمی‌شوند، دارد.

تعریف. عدد جبری جواب معادلهٔ جبری ای به صورت

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \dots + a_۰ = ۰$$

با ضرایب درست ، و $n \geq ۱$ و $a_n \neq ۰$ ، است.

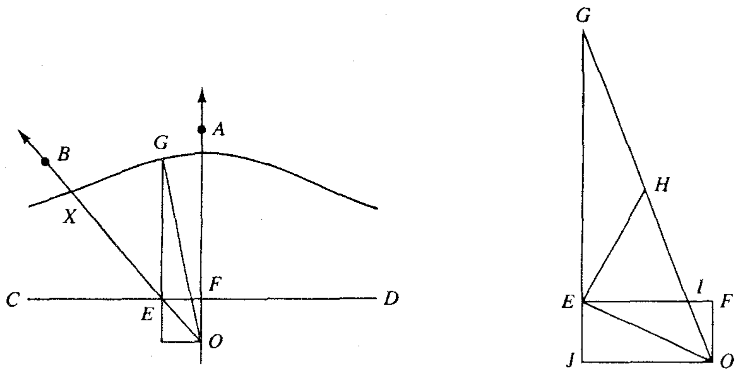
۱. جمیع اعداد ترسیم‌پذیر جبری اند.

۲. عدد π عددی جبری نیست، بنابراین $\sqrt{\pi}$ نیز جبری نیست (جی. لیندمان[18] ، ۱۸۸۲).

18. J. Lindemann

قضیهٔ ۵.۶. ترسیم تربیع دایره تنها بااستفاده از خط کش و پرگار غیرممکن است.

همان‌گونه که قبلاً مذکور افتاد، یونانیان قدیم نتوانستند سه ترسیم فوق را با استفاده از خط کش نامدرج و پرگار انجام دهند. اما این عدم موفقیت آنها را از یافتن جوابها توسط وسایل دیگر باز نداشت. بسیاری از پیشرفتهای ریاضیات، از جمله اغلب نظریهٔ مخروطات، امکاناً به عنوان نتیجهٔ مساعی در اثبات جوابهای مسائل ترسیمی ناشی شدند. در این مورد دو مثال که نشان می‌دهند که چگونه در واقع این ترسیمات را می‌توان انجام داد از تاریخ ریاضیات درنظر گرفته‌ایم. یکی از این دو استفاده از وسیله یا منحنی‌ای موسوم به کانکوئید نیکومدس[19]، به نام نیکومدس ریاضیدان، که در حدود ۲۴۰ قبل از میلاد می‌زیست، است. روش عملی تثلیث زاویه با استفاده از کانکوئید را در شکل ۵.۱۸a شرح داده‌ایم. در این شکل منحنی گذرنده از G کانکوئید موصوف است. به‌ازای خط ثابت $\overleftrightarrow{CD}$ و نقطهٔ ثابت O غیر واقع بر $\overleftrightarrow{CD}$، کانکوئید (که در واقع شامل دو شاخه، هریک دریک طرف $\overleftrightarrow{CD}$، است) مجموعه‌ای از نقاط تعریف شده به صورت زیراست: مجموعهٔ جمیع خطوط گذرنده از O و متقاطع با $\overleftrightarrow{CD}$ را درنظر می‌گیریم. براین خطوط و از آن طرف نقاط تقاطع مذکورشان فاصلهٔ ثابتی اختیار می‌کنیم. فی‌المثل، فرض می‌کنیم $\overleftrightarrow{OB}$ یکی از این خطوط، با فاصلهٔ ثابت EX، باشد. در این صورت به ازای نقطه، خط، و فاصلهٔ مفروضی، مجموعهٔ جمیع نقاط X به فاصلهٔ ثابت از $\overleftrightarrow{CD}$ در امتداد اشعهٔ از O، شاخه‌ای از کانکوئید است.



شکل ۵.۱۸

19. Conchoid of Nicomedes

اگر این منحنی (یا بهتر بگوییم ابزار مکانیکی) چنان که درشکل ۵.۱۸ ، با $\overleftrightarrow{CD}$ ی عمود بر $\overleftrightarrow{OA}$ و EO ی مساوی نصف فاصلهٔ XE ، قرار گرفته باشد، در این صورت زاویهٔ مفروض AOB را می‌توان به سادگی با قرار دادن نقطهٔ E برخط واقع بر $\overrightarrow{OB}$ ، موازی رسم کردن $\overline{EG}$ با $\overrightarrow{OA}$ ، و وصل کردن O به G ، نقطهٔ واقع برکانکوئید، به سه قسمت مساوی تقسیم کرد.

دلیل این که چرا $\overrightarrow{OG}$ زاویهٔ مورد بحث را تثلیث می‌کند بهنظریه‌ای که در رابطه با شکل ۵.۱۸b با فرض $GI = ۲EO$ ، توضیح داده‌شده، وابسته‌است، اگر H وسط $\overline{GI}$ باشد، در این صورت $\overline{EO}$ ، $\overline{HI}$ ، $\overline{GH}$ ، و $\overline{EH}$ همه هم‌نهشت‌اند. بنا به مثلثهای متساوی‌الساقین موجود،

$$m\angle EOH = m\angle EHO = m\angle HGE + m\angle HEG = ۲m\angle HGE$$

اما بنابه خطوط موازی $\angle HGE \cong \angle FOI$ ، بنابراین $۲m\angle HGE = ۲m\angle FOI$ است. در نتیجه اندازهٔ $\angle EOG$ دو برابر $\angle FOI$ ، و بنابراین $\overrightarrow{OI}$ تثلیث ساز است.

مثال دوم از منحنی‌های هندسهٔ بالاتری که در رسم جواب یکی از مسائل مشهور فوق به‌کار رفته استفاده از مارپیچ ارشمیدس[20] در حل مسألهٔ تربیع دایره است. ارشمیدس (۲۱۲ - ۲۸۷ق.م) را بزرگترین ریاضیدان عهد باستان دانسته‌اند. این ریاضیدان علاوه‌بر کتاب در مورد مارپیچ‌ها[21] یش، که شامل ۲۸ قضیه راجع به منحنی‌ای که آن را مارپیچ ارشمیدس می‌نامیم‌است، راجع به موضوعات ریاضی بسیار دیگری از جمله موضوعات هندسی‌ای چون محاسبهٔ π یافتن مساحت نواحی مسطح به طریقی که حساب انتگرال* را پیش‌بینی می‌کند، و سطوح سه بعدی نیز مطالبی نوشته است. مارپیچ ارشمیدس منحنی OCD ی نشان داده شده در شکل ۵.۱۹، با معادلهٔ قطبی $r = k\theta$ ، به ازای ثابت مفروض k ، است. اگر دایره‌ای، چنان که نشان داده شده، دارای شعاع k باشد، در این صورت کمان زاویهٔ AOB ی آن دارای طول $k\theta$، که طول $r = OC$ نیز هست، می‌باشد. مساحت این دایره $\pi k^۲$ است، که می‌تواند به صورت $(۲k)(\frac{\pi k}{۲})$ نوشته شود. اما $\widehat{AB} = \frac{\pi k}{۲}$ ، بنابراین

$$\pi k^۲ = ۲k\left(\frac{\pi k}{۲}\right)$$

اگر OA و OB متعامد باشند، در این صورت

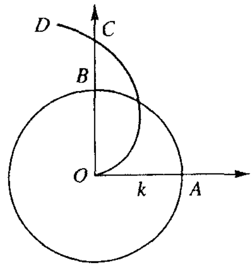
$$(۲k)\left(\frac{\pi k}{۲}\right) = ۲k\,(OC)$$

---

20. Spiral of Archimedes

21. On Spirals

* حساب جامع



شکل ۵.۱۹

اگر بخواهیم مربعی به ضلع x هم اندازهٔ این دایره باشد، در این صورت

$$x^2 = 2k\,(OC)$$

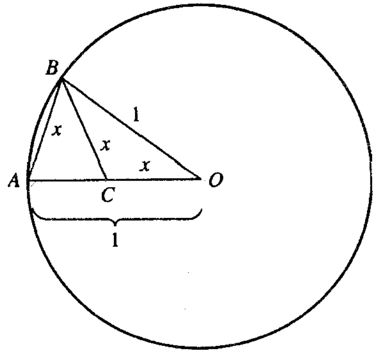
و x می‌تواند رسم شود.

علاوه‌بر سه مسألهٔ مشهور فوق، مسألهٔ متساویاً جالب رسم چند ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای معلوم نیز علاقهٔ ریاضیدان‌ها را از زمان یونانیان باستان به بعد به خود جلب کرده است. در این حالت نیز، اثبات مسألهٔ عمومی جبری است و توسط ریاضیدان بزرگ کارل گوس[22] به دست داده شده است. گوس، در سن ۱۸ سالگی، مسألهٔ قبلاً حل نشدهٔ محاط کردن یک ۱۷ ضلعی منتظم در یک دایره را، تنها با استفاده از خط کش نامدرج و پرگار، حل کرد. نیز قضیه‌ای را که بیان می‌کند که کدام چند ضلعی منتظم می‌تواند محاط شود و کدام نمی‌تواند، اثبات کرد. قضیهٔ مذکور را در این‌جا بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۷. یک چند ضلعی محدب به کمک تنها خط کش نامدرج و پرگار می‌تواند در یک دایره محاط شود اگر و تنها اگر n، تعداد اضلاع آن، بتواند به صورت $2^x P_1 P_2 \ldots P_k$، به ازای عدد صحیح نامنفی x و هر p_i ی اول متمایزی به صورت $2^{2^y} + 1$، به ازاء $y \geq 0$، بیان شود.

بعضی از چند ضلعی‌های منظمی که، طبق قضیهٔ گوس، ترسیم پذیرانند، چند ضلعی‌های با اضلاع ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۲۰، یا ۲۴ اند. صورت قضیهٔ فوق هیچ‌گونه سر رشته‌ای در مورد چگونگی اثبات امکان یا عدم امکان در هر حالت خاص، بدون رجوع به قضیهٔ کلی مورد بحث، به دست نمی‌دهد. در این جا، حالات خاص $n = 10$ و

22. Karl Gauss



شکل ۵.۲۰

$n = ۷$ را به طور مختصر مورد بحث قرار می‌دهیم.

شکل ۵.۲۰ تحلیل ده ضلعی مذکور را نشان می‌دهد. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر $۳۶°$ است، و زوایای OAB و ABO هر یک اندازهٔ $۷۲°$ دارد. اگر $\overline{BC}$ نیمساز $\angle ABO$ باشد، هر دو مثلث ABC و BCO متساوی‌الساقین‌اند، و بنابراین $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CO}$،نیز،

$$\Delta ABO \sim \Delta ACB$$

و

$$\frac{۱}{x} = \frac{x}{۱ - x}$$

یا $x^۲ + x - ۱ \doteq ۰$. جواب مثبت این معادله

$$x = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$$

که عددی ترسیم پذیر است، می‌باشد.

چنان‌که قضیهٔ ۵.۷ مقرر می‌کند، ده ضلعی منتظم می‌تواند در یک دایره رسم شود، در حالی که هفت ضلعی منتظم نمی‌تواند. اثبات غیرممکن بودن ترسیم هفت ضلعی منتظم در یک دایره مشابه اثبات مربوط به تثلیث زاویهٔ کلی است. مسألهٔ مورد بحث معادل ترسیم طول $x = ۲\cos\frac{۲\pi}{۷}$ است. اگر $\theta = \frac{۲\pi}{۷}$ باشد، در این صورت

$$\cos ۳\theta = \cos ۴\theta \text{ و } ۳\theta + ۴\theta = ۳۶۰°$$

برای بیان کسینوس‌های فوق برحسب x می‌توان از اتحادهای مثلثاتی استفاده کرد.

$$۲\cos ۳\theta = ۲(۴\cos^۳\theta - ۳\cos\theta) = x^۳ - ۳x$$

$$\begin{aligned} 2\cos 4\theta &= 2(2\cos^2 2\theta - 1) = 4(2\cos^2\theta - 1)^2 - 2 \\ &= (x^2 - 2)^2 - 2 \end{aligned}$$

مساوی هم قراردادن دو عبارت فوق معادله‌ای درجه چهار برحسب x به دست می‌دهد:

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$$

که می‌تواند به صورت $(x-2)(x^3 + x^2 - 2x - 1) = 0$ تجزیه شود. اثبات این را که چرا عوامل فوق برای x مقادیری که بتوانند با خط کش نامدرج و پرگار رسم شوند نمی‌دهند، به عنوان تمرین وامی‌گذاریم.

تمرینات ۵.۴

۱. کدام یک از سه مسألهٔ مشهور یونان مذکور می‌تواند با استفاده از خط کش نامدرج و پرگار حل شود؟

در تمرینات ۲-۷، کدام یک از اعداد عددی جبری اند؟

۲. $\frac{3}{4}$	۳. $\sqrt{5}$
۴. $\log 2.4$	۵. $\mathrm{tg}\ 19^\circ$
۶. $\frac{\pi}{2}$	۷. $3{,}748$

۸. برای نشان دادن این که $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ عددی جبری است تعریف مربوطه را به کاربرید.

۹. آیا $\sqrt[3]{2}$ عددی جبری است؟ چرا؟

۱۰. جواب اعشاری تقریبی طول یال مکعبی راکه حجمی دو برابر مکعب دیگر با طول یال ۲ اینچ دارد، بیابید.

۱۱. ثابت کنید که یک جواب $x^3 + dx^2 + ex + f = 0$ عددی به صورت $a + b\sqrt{c}$ است، هم‌چنین $a - b\sqrt{c}$ هست.

۱۲. توضیح دهید که چرا معادلهٔ $8x^3 - 6x - 1 = 0$ جواب های گویا ندارد.

۱۳. توضیح دهید که چگونه می‌توان ابزار مکانیکی‌ای که عملاً شاخه‌ای از یک کانکوئید را رسم کند، ساخت.

۱۴. نشان دهید که از مارپیچ ارشمیدس نیز می‌توان در تثلیث زاویه استفاده کرد.

۱۵. از قضیهٔ ۵.۷ برای فهرست کردن چند ضلعی های منظم با اضلاع بین ۲۴ و ۳۰ ای که

می‌توانند در دایره‌ای رسم شوند استفاده کنید.

۱۶. در معادلهٔ درجهٔ چهار هفت ضلعی منتظم، توضیح دهید که چرا عامل اول نمی‌تواند در یافتن جواب به کار رود.

۱۷. در معادلهٔ درجهٔ چهار هفت ضلعی منتظم، توضیح دهید که چرا عامل دوم نمی‌تواند در یافتن جواب به کار رود.

۱۸. نشان دهید که $\sqrt[3]{7}$ ترسیم پذیر نیست.

۱۹. از نظریهٔ مطروحهٔ متن برای انجام عملی ترسیم ده ضلعی منتظم استفاده کنید.

۲۰I. اثبات این قضیه را که جمیع اعداد ترسیم پذیر جبری‌اند یافته شرح مختصری از آن به دست دهید.

۲۱I. اثبات لیندمان را که عدد π عددی جبری نیست یافته شرح مختصری از آن به دست دهید.

۲۲I. تدبیر یکی از ساده‌ترین روش‌های تثلیث زاویه، با استفاده از سَتّاره‌ای*[23] با تنها دو نقطهٔ مشخص بر آن به ارشمیدس منسوب است. ببینید می‌توانید روش او را از نوکشف و اثبات کنید که زاویه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کند. در صورت لزوم از کتاب مرجعی استفاده کنید.

۲۳I. اثبات قضیهٔ ۵.۷ را یافته به طور مختصر شرح دهید.

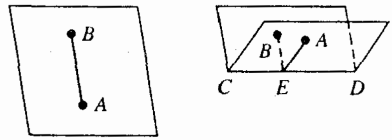
۲۴I. روش‌های تاریخی دیگری را که در حل سه مسأله مشهور مورد بحث به کار رفته‌اند در یکی از کتب تاریخ ریاضی مطالعه کنید.

۵.۵ ترسیمات با تاکردن کاغذ

از زمان یونانیان باستان به بعد، علاوه‌بر استفاده از پرگار معمولی و خط کش نامدرج، طرق دیگر انجام ترسیمات توجه بسیاری از ریاضیدان‌ها را جلب کرده‌است. فی‌المثل، در بخش ۵.۴ دریافتیم که از وسایل گوناگون و معادلات منحنی‌ها برای حل مسائلی که در غیر این صورت حل‌شان ناممکن بود استفاده شده است. در این بخش و بخش بعد، دو طریق دیگر انجام ترسیمات بعضی از امکانات گوناگون این صحنهٔ افسون‌آمیز ریاضیات را نشان می‌دهند. یکی از طرق انجام ترسیماتی که ممکن است مقدماتی به نظر آید، و با این همه توجه ریاضیدان‌ها را در سال‌های اخیر به خود مشغول کرده، برخورد از طریق تاکردن کاغذ[24] است. در

* خط کش نامدرج

23. Ruler
24. Paper Folding



(a) (b)

شکل ۵.۲۱

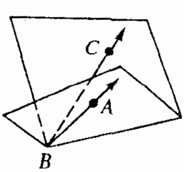
تمرین عملی، معمولاً از کاغذ روغنی استفاده می‌شود که در این صورت تاها مرئی باقی می‌مانند. در این بخش تعداد کمی از ترسیمات اساسی را شرح داده‌ایم تا لُبّ* این کار را بگیرید و به این ترتیب قادر به مقابلهٔ آن با سایر روش‌های ترسیمی هندسهٔ اقلیدسی باشید. پیش از این تاکردن کاغذ به عنوان روش شهودی تحقیق اثبات‌های قضایای فصل ۴ به کار رفته است.

یکی از ترسیماتی که به کمک تاکردن کاغذ انجام می‌گیرد تاکردن کاغذ به خط مستقیمی که عمودمنصف قطعه خط مفروضی است، می‌باشد. فرض می‌کنیم $\overline{AB}$ در شکل ۵.۲۱a مفروض باشد. کاغذ را چنان تا می‌کنیم که نقطهٔ A بر نقطهٔ B قرار گیرد و آن را، چنان‌که در شکل ۵.۲۱ b، تا می‌زنیم. $\overleftrightarrow{CD}$ خط مطلوب است.

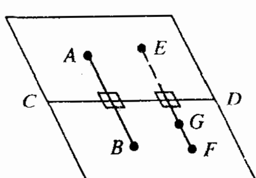
ترسیم دیگر، تاکردن در امتداد نیمساز زاویهٔ معلوم است (شکل ۵.۲۲). برای این کار کاغذ را با تایی گذرنده از رأس زاویه با یک ضلع زاویه بر ضلع دیگر تا می‌کنیم.

ترسیم سوم تاکردن خطی گذرنده از نقطه‌ای مفروض به موازات خطی مفروض است. برای این کار ابتدا تایی برای $\overleftrightarrow{CD}$ عمود بر خط مفروض $\overleftrightarrow{AB}$ درنظر می‌گیریم (شکل ۵.۲۳)، سپس تایی از نقطهٔ مفروض G برای به‌دست آوردن خط $\overleftrightarrow{EF}$ عمود بر $\overleftrightarrow{CD}$ انجام می‌دهیم. این خط موازی $\overleftrightarrow{AB}$ و خط مطلوب است.

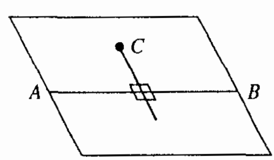
ترسیم دیگر تاکردن عمودی از نقطه‌ای بر خطی است. برای این کار عمودی گذرنده از نقطه بر خط با قراردادن قسمتی از خط $\overleftrightarrow{AB}$ بر خودش تا می‌کنیم (شکل ۵.۲۴).



شکل ۵.۲۲



شکل ۵.۲۳



شکل ۵.۲۴

* مغز

گرچه تا کردن کاغذ بسیار ساده به‌نظر می‌رسد، ریاضی‌دان ها قادر به اثبات قضیهٔ نسبتاً شگفت‌انگیز زیر در مورد ترسیمات کاغذ تا کنی شده‌اند.

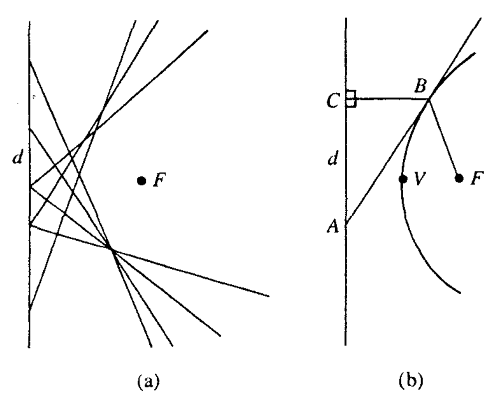
قضیهٔ ۵.۸ . جمیع ترسیمات هندسهٔ اقلیدسی‌ای که می‌توانند با خط کش نامدرج و پرگار انجام شوند می‌توانند با تا کردن کاغذ نیز انجام گیرند.

این قضیهٔ قابل توجه بر مبنای چندین فرض که در مرجع عالی مربوط به تا کردن کاغذ زیر آمده بنا شده است.

Paper Folding for the Mathematics Class, by Donovan A. Johnson

فرض های مذکور، فی‌المثل، شامل این فرض که کاغذ را می‌توان به چنان طریقی تا کرد که یک خط بتواند بر خط دیگری واقع بر همان صفحهٔ کاغذ قرار گیرد و تای ساخته شده در واقع خطی راست باشد، است. نظریهٔ تا کردن کاغذ درست به همان اندازهٔ نظریهٔ ترسیمات با خط کش نامدرج و پرگار ریاضی و دقیق است، اما روش‌های این دو تفاوت بسیار دارند.

از تا کردن کاغذ می‌توان در ترسیم به گونهٔ متفاوتی که معمولاً در هندسهٔ متداول دبیرستان ها بررسی نمی‌شود، یعنی، رسم مماس به سهمی، استفاده کرد. شکل **۵.۲۵** a توضیح می‌دهد که چگونه می‌توان یک رشته مماس بر یک سهمی را با تا کردن کانون F بر خط هادی d مشخص کرد. دلیل چگونگی عملکرد ترسیم مذکور را در شکل **۵.۲۵** b توضیح داده‌ایم. می‌توان ثابت کرد که مماس $\overleftrightarrow{BA}$ در نقطه‌ای واقع بر سهمی شکل نیمساز FBC>، F کانون و C پای عمود از B بر هادی، است.



شکل ۵.۲۵

تمرینات ۵.۵

با استفاده از کاغذ روغنی، ترسیمات زیر را در تمرینات ۱-۹ انجام دهید.

۱. خط مستقیمی را که عمودمنصف قطعه خط مفروضی است تا کنید.
۲. نیمساز زاویهٔ مفروضی را بسازید.
۳. خطی گذرنده از نقطهٔ مفروض و موازی خط مفروض ناگذرنده از آن نقطه رسم کنید.
۴. عمودی از نقطه‌ای بر خطی ناگذرنده از آن نقطه رسم کنید.
۵. با معلوم بودن هادی و کانون یک سهمی، ده مماس بر آن رسم کنید.
٦. مماس در نقطهٔ واقع بر دایره‌ای بر آن دایره را رسم کنید.
۷. مرکز دایرهٔ داخلی مثلث مفروضی را رسم کنید.
۸. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروضی را رسم کنید.
۹. نقطهٔ تقارب ارتفاعات مثلث مفروضی را رسم کنید.
۱۰. ثابت کنید که روش تا کردن کاغذ رسم خطوط مماس به یک سهمی صحیح است.

در تمرینات I۱۱-I۱۴، ترسیمات زیر را با کاغذ روغنی انجام دهید. در صورت لزوم، به مرجع مذکور در بخش، یا مرجع دیگر مراجعه کنید.

I۱۱. مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنید.
I۱۲. شش ضلعی‌ای منتظم رسم کنید.
I۱۳. مماس هایی به یک بیضی رسم کنید.
I۱۴. مماس هایی به یک هذلولی رسم کنید.

۵.٦ ترسیمات با تنها یک وسیله

در بخش‌های ۵.۱-۵.۳، ترسیمات با خط کش نامدرج و پرگار، وسایل سنتی توسط افلاطون مشخص شده، مورد تحقیق قرار گرفتند. در بررسی اثبات‌های ناممکن بودن در بخش ۵.۴ نیز، در توسیع فهرست ترسیمات‌مان، با استفاده از منحنی های هندسی گوناگونی مواجه شدیم. بخش ۵.۵ برخورد دیگری با ترسیمات را به‌کمک تا کردن کاغذ مورد بررسی قرار داد. این بخش به بررسی ایدهٔ مهم دیگری از تاریخ ترسیمات، یعنی مساعی در انجام

ترسیمات با استفاده از تنها یکی از دو وسیلهٔ توسط افلاطون مشخص شده، می‌پردازد.

روش اول در این مورد محدود کردن وسیلهٔ ترسیم مان به پرگار تنهاست. واضح است که رسم خط مستقیم با پرگار تنها غیر ممکن است، لذا باید دانست که یک خط، در صورتی که دو نقطه از آن یافت یا داده شود، به طور کامل معین می‌شود. ترسیمات با پرگار تنها به ترسیمات مور ـ ماشرونی[۲۵] موسوم‌اند. سی. مور اولین روایت شناخته شده از این ترسیمات را در سال ۱۶۷۲ به چاپ رساند، هر چند کتاب وی تا سال ۱۹۲۸، هنگامی که از نو کشف شد، توسط ریاضیدان‌ها شناخته نبود. و در همان دوران، ریاضیدان ایتالیایی به نام ماشرونی (حدود ۱۷۹۷) به‌طور مستقل قضیهٔ زیر را کشف کرد.

قضیهٔ ۵.۹. جمیع ترسیمات ممکن با استفاده از خط کش نامدرج و پرگار می‌توانند با استفاده از پرگار تنها نیز انجام شوند.

در مورد بحث این قضیه مورد زیر را ملاحظه کنید:

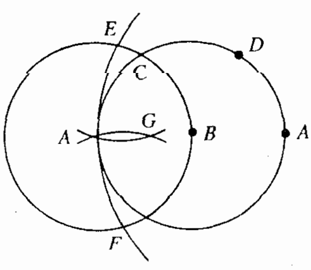
H. Rademacher and O. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics.*

مثال زیر ترسیمی را که به طور کامل با پرگار انجام شده توضیح می‌دهد.

مثال. وسط قطعه خط مفروضی را با استفاده از پرگار تنها به دست آورید.

۱. $\overline{AB}$ را، چون در شکل ۵.۲۶، درنظر می‌گیریم. دایرهٔ به مرکز B و شعاع BA را رسم می‌کنیم.

۲. با AB ی به عنوان شعاع، سه کمان $\widehat{AC}$، $\widehat{CD}$، $\widehat{DA'}$ را، با مشخص کردن A' چنان که AA' قطر دایرهٔ مذکور باشد، جدا می‌کنیم.



شکل ۵.۲۶

25. Mohr _ Mascheroni Constructions

۳. دایرهٔ به مرکز A و شعاع AB را رسم می‌کنیم.
۴. دایرهٔ به مرکز A' و شعاع $A'A$ ی، متقاطع با دایرهٔ مرحلهٔ ۳ در نقاط E، F، را رسم می‌کنیم.
۵. دوایر به مراکز E و F و شعاع EA را رسم می‌کنیم. این دوایر در A و نقطهٔ مطلوب G تلاقی می‌کنند.

اثبات این که ترسیم نسبتاً استادانهٔ فوق به نقطهٔ صحیح منتج می‌شود، بر این واقعیت که A' و G نقاط منعکس[26] نسبت به دایرهٔ به مرکز A و شعاع AB اند استوار است. هندسهٔ نقاط معکوس را در فصل ٦ مورد بحث قرار می‌دهیم، اما اثبات به کاررفته در این مرحله به دانش این مفهوم نیاز ندارد.

مثلث های $A'EA$ و EGA مشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{AA'}{AE} = \frac{AE}{AG} \quad \text{یا} \quad AA' \,.\, AG = (AE)^2$$

به علت این که

$$AA' = 2AB = 2AE$$

داریم

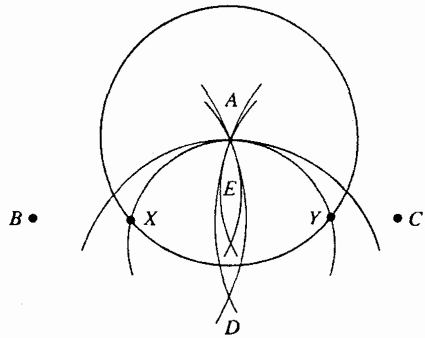
$$2AE.AG = (AE)^2$$
$$2AG = AE = AB$$

و G، چنان که باید ثابت می‌کردیم، وسط $\overline{AB}$ است.

اثبات قضیهٔ ۵.۹ شامل نمایاندن چگونگی یافتن نقاط تقاطع خط مستقیم و دایره و نقاط تقاطع دو خط مستقیم با پرگار تنهاست، زیرا ترسیم دایره و یافتن نقاط تقاطع دو دایره با پرگار تنها به طور واضح و به کفایت ساده است. روش ترسیم نقاط تقاطع دایره و خط ناگذرنده از مرکز آن را در شکل ۵.۲۷ نشان داده‌ایم. فرض می‌کنیم B و C نقاط مفروض، با A مرکز دایرهٔ مفروض باشد. در این صورت

۱. دوایر به مراکز B و C، نقاط مفروض واقع بر خط مورد بحث، گذرنده از A و باردیگر متقاطع در D را رسم می‌کنیم.
۲. با پیروی از مراحل ۴ و ۵ ترسیم قبلی، نقطهٔ E یی را چنان که $AD.AE = r^2$، به ازای r شعاع دایرهٔ اصلی، باشد، می‌یابیم. (این ترسیم باید، در صورتی که D داخل دایرهٔ اصلی باشد، تعدیل شود.)
۳. دایرهٔ به مرکز E و شعاع EA دایرهٔ اصلی را در نقاط مطلوب x و y قطع می‌کند.

26. Inverse Points



شکل ۵.۲۷

اثبات این که x و y نقاط تقاطع خط و دایرهٔ مفروض‌اند، را به عنوان تمرین ۱ تمرینات ۵.۶ واگذاشته‌ایم. در مورد بحث حالتی که در آن خط مفروض از مرکز دایرهٔ مفروض می‌گذرد مورد زیر را ملاحظه کنید:

Howard Eves, *A Survey of Geometry*

جمیع ترسیمات اقلیدسی را نمی‌توان با خط‌کش نامدرج تنها انجام داد. در این مورد ابوالوفا، ریاضیدان مسلمان، استفاده از خط‌کش نامدرج و پرگار زنگین[27] را مطرح کرده است. استفاده از پرگار با دهانهٔ ثابت معادل در دست داشتن دایره‌ای با مرکز آن است. نتیجهٔ اساسی این وسیله در آن‌چه که به عنوان قضیهٔ ترسیمی پونسله ـ اشتینر[28] شناخته شده و در زیر آمده، به بیان آمده است.

قضیهٔ ۵.۱۰. جمیع ترسیماتی که می‌توانند با خط‌کش نامدرج و پرگار انجام شوند می‌توانند با خط‌کش نامدرج تنها و دایره‌ای مفروض و مرکزش انجام گیرند.

خط‌کش نامدرج تنها برای انجام جمیع ترسیمات هندسهٔ تصویری، فصل ۷، کفایت می‌کند. در این هندسه، نه دایره نه قطعه خط، بلکه خاصیت خط بودن لایتغیر است. با ترسیمات با خط‌کش نامدرج و پرگار باردیگر در هندسهٔ منعکسات مواجه خواهیم شد.

---

27. Rusty Compasses

28. Poncelet - Steiner

تمرینات ۵.٦

۱. اثبات ترسیم ماشرونی‌ای نقطهٔ تقاطع دایره و خط ناگذرنده از مرکز آن را تکمیل کنید.

با پرگار تنها، ترسیمات مور ـ ماشرونی‌ای زیر را انجام داده هر مرحله را به‌طور اختصار توصیف کنید. فرض بر این است که خطی با دونقطهٔ متمایز واقع بر آن مفروض است.

۲. با معلوم بودن دایره‌ای و نقطه‌ای داخل آن اما متمایز از مرکز آن، نقطه‌ای هم استقامت با مرکز دایره و نقطهٔ مفروض چنان بیابید که حاصل‌ضرب فواصل دو نقطه از مرکز دایره مساوی مربع شعاع دایرهٔ مفروض باشد.

۳. نقطهٔ متمایز C ای بر $\overleftrightarrow{AB}$ را چنان‌که $AB = BC$، اگر A و B نقاطی مفروض باشند، بیابید.

۴. وسط کمان مفروضی از یک دایره را بیابید.

۵. عمود بر خط مفروضی از نقطهٔ مفروضی واقع بر آن خط را رسم کنید.

٦. خطی موازی خط مفروضی از نقطه‌ای واقع در صفحهٔ آن خط اما نه بر آن خط رسم کنید.

۷. با معلوم بودن دو نقطه بر هر خط، نقطهٔ تقاطع دو خط را بیابید.

در تمرینات ۸ ـ ۱۳، اثبات ترسیمات قبلاً انجام‌گرفته در تمرینات مشخص شده را به دست دهید.

۸. تمرین ۲

۹. تمرین ۳

۱۰. تمرین ۴

۱۱. تمرین ۵

۱۲. تمرین ٦

۱۳. تمرین ۷

در تمرینات ۱۴ و ۱۵، ترسیمات مربوطه را با خط‌کش نامدرج و پرگار زنگین (پرگار با دهانهٔ ثابت) انجام دهید.

۱۴. وسط یک قطعه خط را رسم کنید.

۱۵. عمود بر خط مفروضی در نقطهٔ مفروضی واقع بر آن را رسم کنید.

I۱٦. استفاده از ترسیمات ماشرونی‌ای را، در مورد مسائل دیگری، غیر از آن‌ها که در تمرینات ۲ ـ ۷ داده شده‌اند، تحقیق کنید.

I۱۷. سه ترسیم دیگر را با استفاده از خط‌کش نامدرج و پرگار زنگین مبرهن کنید.

تمرینات مروری فصل
فصل ۵

۱. با استفاده از خط‌کش نامدرج و پرگار هابط، از نقطه‌ای بر خط مفروضی عمودی رسم کنید.

۲. ترسیم تقسیم یک قطعه خط به نه قطعه خط همنهشت را انجام دهید.

۳. ترسیم تقسیم داخلی و خارجی یک قطعه خط به نسبت ۳ به ۵ را انجام دهید.

۴. قطعه خطی را، که اندازه‌اش c تقسیم بر d است، در صورتی که c و d طول های معلوم داشته باشند، رسم کنید. قطعه خط واحد نیز داده شده است:

c ______ d ______ ۱ ______

۵. قطعه خطی را، که اندازه‌اش ریشهٔ دوم قطعه خط معلومی است، رسم کنید. قطعه خط واحد نیز معلوم است:

a ______ ۱ ______

٦. با معلوم بودن قطعه خط واحد، برای عدد $\sqrt{۳} + ۴$ قطعه خطی رسم کنید.

۷. با معلوم بودن قطعه خط واحد، برای عدد $\sqrt{۴ + \sqrt{۳}} + ۷$ قطعه خطی رسم کنید.

۸. مقصود از مرحلهٔ تحلیلی یک مسألهٔ ترسیمی چیست؟

۹. معنی این گفته که مثلثی در نوع مشخص شده چیست؟

۱۰. مثلث معین، آن چنان که در مسألهٔ ترسیمی به کار می‌رود، چیست؟

در تمرینات ۱۱ و ۱۲، در مورد هر ترسیم، شکل تحلیلی را رسم کرده مرحلهٔ تحلیلی را بنویسید.

۱۱. مثلثی را، با معلوم بودن طول یک ضلع، طول نیمساز داخلی زاویهٔ مقابل این ضلع، و نسبت طول های دو ضلع دیگر، رسم کنید.

۱۲. مثلثی را، با معلوم بودن طول های میانه‌های دو ضلع و طول ارتفاع ضلع سوم، رسم کنید.

۱۳. آیا اعداد ترسیم پذیر اعداد جبری نیز هستند؟

۱۴. تعریفی برای نشان دادن این که $\sqrt{۳ + \sqrt{۵}}$ عددی جبری است به کار برید.

۱۵. آیا عدد $\sqrt[۵]{۱۳}$ میدان توسیعی دارای اعداد گویا به عنوان زیر مجموعه است؟

۱۶. چند ضلعی‌های منتظم از ۳۳ تا ۴۰ ضلعی قابل رسم شدن را فهرست کنید.
۱۷. هنگام استفاده از تا کردن کاغذ در رسم مماس به سهمی کدام نقطه روی کدام خط تا می‌شود.
۱۸. از کاغذ روغنی در رسم خط اولر مثلث مفروضی استفاده کنید.
۱۹. مراحل ترسیم، تنها با پرگار، عمود از نقطهٔ مفروضی بر خط داده شده با دو نقطهٔ آن را فهرست کنید.

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان از هر مجموعه تمریناتی که قبلاً از مجموعه های تمرینات پیشین این فصل معین نشده‌اند انتخاب کرد.

٦

تبدیل انعکاس

٦.١ مفاهیم اساسی

تبدیل انعکاس یکی از موضوعات هندسهٔ جدید است که طی نیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح شده است. اختراع تبدیل انعکاس گاهی اوقات به ال. جی. ماگنوس[1] (١٨٦١ - ١٧٩٠)، که اثر راجع به این موضوع خود را در ١٨٣١ منتشر کرد، نسبت داده شده است. اما مقدم بر این دوران، فرانکوویتا[2] در قرن شانزدهم و روبرت سیمسون[3] در قرن هجدهم از اصول این نظریه آگاه بوده اند. سایر ریاضیدان‌ها سهم بیشتر در این مورد را به جی. اشتینر[4] (١٨٦٣ - ١٧٩٦) و لرد کلوین[5] داده‌اند. اما بسیاری از ریاضیدان ها، بی‌توجه به این که چه کسی افتخار اختراع انعکاس را داراست، طی دهه‌های ١٨٣٠ و ١٨٤٠ در توسعهٔ بیشتر نظریهٔ عمومی آن کوشیدند.

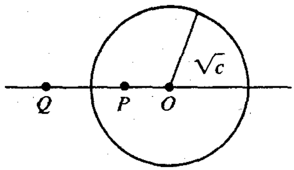
در مورد بررسی این موضوع در فصل حاضر، چندین دلیل موجود است. و از آن جمله اند: شناخت نوع تبدیلی متفاوت از تبدیلات هندسهٔ اقلیدسی، کشف بعضی خاصیت‌های لایتغیر مهم تحت این نوع تبدیل، و بررسی چند کاربرد عملی این نظریهٔ جدید.
مطالعهٔ تبدیل انعکاس با تعریف نقاط منعکس آغاز می‌شود.

تعریف. دو نقطهٔ P و Q نقاط معکوس نسبت به نقطهٔ O و عدد حقیقی مثبت مفروض c است اگر $OP.OQ = c$، و O، P، Q واقع بر یک استقامت باشند.

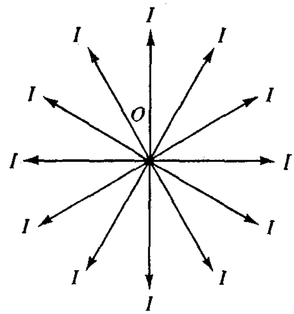
در این تعریف هر دو طول در یک طرف O اندازه گرفته شده‌اند. دایرهٔ به مرکز O و

---

1. L.J. Magnus
2. Francois Vieta
3. Robert Simson
4. J. Steiner
5. Lord Kelvin



شکل ۶.۱



شکل ۶.۲

شعاع $\sqrt{c}$، نشان داده شده در شکل ۶.۱، دایرهٔ انعکاس[6] است. نقطهٔ O به مرکز انعکاس[7] موسوم است. در مورد انعکاس نسبت به دایره، حاصل ضرب فواصل دو نقطهٔ منعکس از مرکز انعکاس مساوی مربع شعاع دایرهٔ انعکاس، موسوم به شعاع انعکاس[8] است. در این فصل طول ها را همواره مثبت درنظر می‌گیریم.

مفهوم انعکاس، در ساده‌ترین تعبیرش، در طبع عددی، و صرفاً شامل دو فاصله که همواره دارای یک حاصل ضرب‌اند، می‌باشد. از گزارهٔ شهودی اخیر به سادگی ملاحظه می‌شود که اگر یکی از نقاط از مرکز انعکاس دور شود، دیگری باید به طرف آن حرکت کند.

مثال: فرض می‌کنیم نقطهٔ P (در شکل ۶.۱) به فاصلهٔ ۲ واحد از نقطهٔ O و حاصل‌ضرب ثابت انعکاس، موسوم به ثابت انعکاس[9]، ۹ باشد. در این صورت

$$۲ .OQ = ۹$$

و

$$OQ = \frac{۹}{۲}$$

مثال: فرض می‌کنیم که شعاع دایرهٔ انعکاس ۱، و فاصلهٔ نقطهٔ P از مرکز انعکاس ۳ باشد. فاصلهٔ نقطهٔ Q از مرکز انعکاس را بیابید.

$$OP .OQ = ۱$$

$$۳ .OQ = ۱$$

$$OQ = \frac{۱}{۳}$$

---

6. Circle of Inversion
7. Center of Inversion
8. Radius of Inversion
9. Constant of Inversion

اگر شعاع انعکاس ۱ باشد، در این صورت مقادیر عددی فواصل مورد بحث معکوس یکدیگرند، و یکی می‌تواند از دیگری با معکوس کردن عدد آن به دست آید.

انعکاس جفت کردن نقاط واقع بر یک خط را در ارتباط با نقطهٔ ثابتی واقع بر آن خط با ثابتی که مربع شعاع دایرهٔ انعکاس را نمایش می‌دهد، ممکن می‌کند. در جفت کردن نقاط فوق، دو حالت خاص ظاهر می‌شود. نقطهٔ واقع بر دایرهٔ انعکاس خود نقطهٔ منعکس خود است. به عبارت دیگر، این نقاط خود ـ منعکس[10] اند. حالت خاص دوم این است که هیچ نقطهٔ واقع بر خطی منعکس مرکز انعکاس نیست، زیرا تقسیم بر صفر به عدد حقیقی منتج نمی‌شود. گزارهٔ اخیر نشان می‌دهد که لازم است که انعکاس را از نظرگاه عمومی‌تری مورد بررسی قرار دهیم.

مروری بر تعریف تبدیل داده شده در فصل ۲ نشان می‌دهد که انعکاس در صفحهٔ اقلیدسی تبدیل نیست، زیرا استثنایی درجفت کردن وجود دارد. اما در صورتی که صفحهٔ منعکس[11] ی با مشمول کردن نقطهٔ منعکسی در مورد مرکز انعکاس آن، به وجود آوریم، تعریف تبدیل مان درست درمی‌آید. خط در صفحهٔ منعکس با مشمول کردن نقطهٔ خاصی، علاوه بر نقاط معمولی، موسوم به نقطهٔ انگاری[12]، تعریف شده به صورت تصویر مرکز انعکاس، ساخته می‌شود. با افزایش نقطهٔ انگاری مورد بحث، هر نقطهٔ واقع بر خط مزبور دارای تصویری منحصر به فرد تحت انعکاس است. این خط خط معمولی اقلیدسی نیست. نقطهٔ انگاری صفحهٔ منعکس مفهومی از هندسهٔ اقلیدسی نیست اما مفهوم تازه‌یی در تضمین تناظر یک به یک مطلوب نقاط به وجود آورده است.

به علت این که مرکز انعکاس صفحهٔ منعکس باید تصویری منحصر به فرد در صفحهٔ منعکس داشته باشد، هر خط گذرنده از مرکز مزبور باید دارای یک نقطهٔ منعکس ثابت باشد، و نقطهٔ تازه به وجود آمده باید بر هر خط گذرنده از نقطهٔ اصلی قرار داشته باشد. صفحهٔ منعکس را به طور سمبلیک در شکل ۶.۲، با مرکز انعکاس O و (نقطهٔ انگاری واقع بر صفحهٔ منعکس) I ی منعکس مرکز انعکاس هر خط گذرنده از O تصویر کرده‌ایم. تصویر نقطهٔ انگاری I مرکز دایرهٔ انعکاس است. باید به‌طور کامل دانسته شود که صفحهٔ منعکس مورد بحث، به علت این که شامل نقطهٔ انگاری ای است که بر هر خط قرار دارد، دارای بعضی خاصیت هایی است که از صفحهٔ اقلیدسی ای که با آن آشنایید متفاوت‌اند. تبدیل انعکاس در صفحهٔ منعکس تبدیل تازه‌ای است که می تواند به خاطر خودش بررسی شود. اما پیش از ادامهٔ

---

10. Self-Inverse
11. Inversive Plane
12. Ideal Point

مطلب، آیا می توانید تحت انعکاس قلم رومن لایتغیری کشف کنید؟

خواص اساسی تبدیل انعکاس به خواص ویژهٔ صفحهٔ منعکس، صفحه‌یی با یک نقطهٔ انگاری، وابسته است. باید بدانیم که صفحهٔ منعکس مان، چنان که در این مرحله به کار رفته، تنها شامل نقاط حقیقی، و نه نقاط مختلطی که بعداً معرفی خواهند شد، است.

قضیهٔ ۶.۱ . دایرهٔ انعکاس تحت تبدیل انعکاس لایتغیر است.

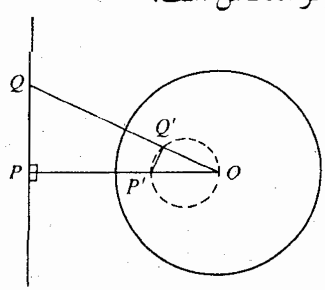
اثبات: این قضیه به این علت نتیجه می‌شود که هر نقطهٔ دایرهٔ انعکاس تحت انعکاس نسبت به آن دایره منعکس خود است. این دایره لایتغیر نقطه به نقطه[۱۳]، قلم رومن، نقطه خود تصویر خود است، می‌باشد.

قضیهٔ ۶.۲ .منعکس هر خط گذرنده از مرکز انعکاس همان خط است.

این خط لایتغیر نقطه به نقطه به این علت نیست که تصویر نقطهٔ مفروضی واقع بر خط‌مان نقطهٔ دومی واقع بر همین خط، به استثنای نقاط واقع بر دایرهٔ انعکاس،است. این که نقاط مُنعکس و مرکز انعکاس واقع بر یک استقامت‌اند در واقع نتیجهٔ بلافاصلهٔ تعریف نقاط منعکس است.

قضیهٔ مهم‌تر، و امکاناً غیر منتظرهٔ بعدی، در رابطه با منحنی منعکس خط مستقیم ناگذرنده از مرکز انعکاس در صفحهٔ منعکس است.

قضیهٔ ۶.۳ . تصویر خط مستقیم ناگذرنده از مرکز انعکاس، تحت تبدیل انعکاس، دایره‌ای گذرنده از مرکز انعکاس است.



شکل ۶.۳

13. Pointwise

اثبات: در شکل ٦.۳، فرض می‌کنیم که O مرکز انعکاس، و P پای عمود از O بر خط مورد بحث باشد. فرض می‌کنیم Q نقطهٔ دیگری واقع بر این خط باشد. و فرض می‌کنیم P و P' و Q و Q' ازواج نقاط منعکس نسبت به دایرهٔ انعکاس به مرکز O باشد.

بنا به تعریف نقاط منعکس،

$$OP.OP' = OQ.OQ'$$

یا

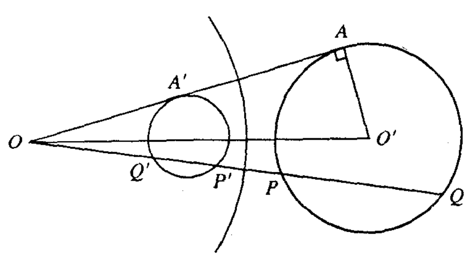
$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$$

این تناسب مستلزم این است که $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$ باشد زیرا زاویه‌ای مشترک دارند. به این ترتیب $\Delta OQ'P'$ مثلثی قائم با رأس زاویهٔ قائمهٔ در Q' است. اگر Q نقطه‌ای بر خط مفروض درنظر گرفته شده باشد، Q' رأسی از مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط در نیمدایره‌ای، با $\overline{OP'}$، قطر دایرهٔ آن، است.

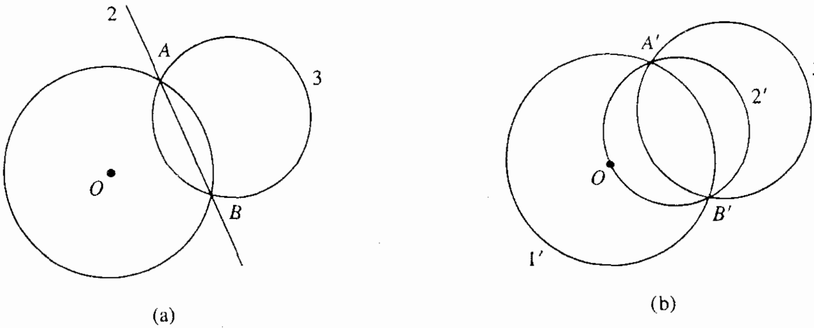
اثبات عکس قضیهٔ ٦.۳ شامل معکوس کردن مراحل استدلال قبل، و به عنوان تمرین (تمرین ۱۵، تمرینات ٦.۱) واگذار شده است.

تصویر خط تحت انعکاس گاهی به جای خط دایره است، بنابراین خاصیت خط مستقیم بودن تحت تبدیل انعکاس همیشه خاصیتی لایتغیر نیست، و این تفاوت بزرگ بین این تبدیل و تبدیلاتی که قبلاً بررسی کردیم است. رابطهٔ بین دوایر و خطوط تحت انعکاس را می‌توان با تحقیق در منعکس دایرهٔ ناگذرنده از مرکز انعکاس، گسترش بیشتر داد. اما پیش از ادامهٔ مطلب، باید پیش بینی کنید که این تصویر چه خواهد بود.

در شکل ٦.۴، فرض می‌کنیم O مرکز انعکاس، با دایرهٔ مفروض O' باشد. در مورد هر خط $\overleftrightarrow{OP}$ متقاطع دایره در دو نقطهٔ متمایز و گذرنده از مرکز انعکاس، اگر P' و Q' نقاط منعکس P و Q باشند، در این صورت



شکل ٦.۴



شکل ۶.۵

$$OP\ .OP' = OQ\ .\ OQ' = c$$

که ثابت انعکاس است. نیز، از قضیهٔ ۴.۹،

$$OP\ .\ OQ = (OA)^{2} = k$$

ثابتی مساوی مربع طول مماس از O به دایرهٔ مفروض است. در این صورت

$$\frac{OP\ .\ OP'}{OQ\ .\ OP} = \frac{OQ\ .\ OQ'}{OQ\ .\ OP} = \frac{c}{OQ\ .\ OP}$$

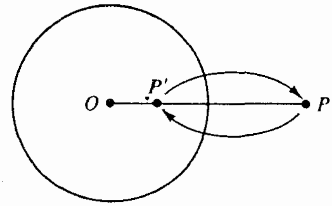
که می‌تواند به

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{c}{k}$$

که ثابتی است، ساده شود.

در این صورت موقعیت مزبور به بسطی (بخش ۲.۸ را ملاحظه کنید) با مرکز O تحویل می‌شود، که بدین معنی است که، چون P نقطه‌ای بر دایرهٔ مفروض باشد، تصویر P' آن نقطه‌ای بر دایره‌ای که تصویر دایرهٔ مفروض است واقع است؛ به این ترتیب $\frac{c}{k}$ نسبت تشابه است و این اثبات قضیهٔ بعد را تکمیل می‌کند.

قضیهٔ ۶.۴. تصویر تحت انعکاس دایرهٔ ناگذرنده از مرکز انعکاس دایره‌ای ناگذرنده از مرکز انعکاس است.



شکل ٦.٦

مثال: تصویر شکل a ٦.۵ را تحت انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز O رسم کنید.

حاصل ترسیم را به صورت شکل b ٦.۵ نشان داده‌ایم. در واقع، شکل مورد بحث باید بر شکل a ٦.۵ منطبق شده باشد، اما برای آسان‌تر مورد بررسی قرارگرفتن به محل دیگری منتقل شده است. دایرهٔ O (مجموعهٔ ۱) مجموعهٔ لایتغیری از نقاط است (درشکل ٦.۵b با برچسب′ ۱ مشخص شده‌است).خط AB، مجموعهٔ ۲، به دایرهٔ گذرنده از O ای، مجموعهٔ ′۲، تغییر یافته است. دایرهٔ ۳ به دایرهٔ ′۳ تغییر یافته، و از نقاط لایتغیر A و B می‌گذرد.

در مثال فوق، شکل اصلی شامل دو دایره و یک خط است، در حالی که شکل جدید شامل سه دایره است. فن منعکس کردن اشکال یکی از مهارت‌های لازم بخش ٦.۴ در اثبات قضایای جدید توسط انعکاس است. فی‌المثل، قضیهٔ اصلی را می‌توان به دو دایره و یک خط ارجاع داد، در حالی که قضیهٔ جدید به سه دایرهٔ شکل تازه رجوع می‌کند.

این بخش با خاصیت مهم دیگری از تبدیل انعکاس خاتمه می‌یابد. در این مورد، چون در شکل ٦.٦، فرض می‌کنیم که P و ′P نقاط منعکس نسبت به دایرهٔ مفروضی با مرکز O باشند. تبدیل مذکور P را به نقطهٔ منعکس آن ′P می‌برد. اگر باردیگر، همان تبدیل منعکس را به کاربریم، تصویر ′P، P است. نتیجهٔ این بحث این است که حاصل ضرب یک انعکاس و همان انعکاس بعد از آن عینیت است. تبدیل انعکاسی به تبدیل پیچندگی[۱۴]، یا تبدیل تاوب دو[۱۵] موسوم است، زیرا دوکاربرد متوالی آن به تبدیل عینیت منتج می‌شود. باید ملاحظه شود که تبدیل انعکاسی خود منعکس خود است، و این دلیل خوب دیگری برای نام داده شده به این تناظر به دست می‌دهد.

---

14. Involutory Transformation

15. Transformation of PeriodTwo

تمرینات ۶.۱

جدول زیر را تکمیل کنید:

	فاصلهٔ مرکزانعکاس ازنقطهٔ اصلی	شعاع دایرهٔ انعکاس	فاصلهٔ نقطهٔ منعکس ازمرکز انعکاس
۱.	۳	۴	؟
۲.	۳	۳	؟
۳.	۳	۲	؟
۴.	۳	۱	؟
۵.	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{7}$	؟
۶.	$\frac{2}{3}$	؟	$\frac{5}{6}$
۷.	؟	$\frac{9}{5}$	$\frac{6}{7}$

۸. اگر P و Q نقاط منعکس نسبت به S باشند، و اگر $SP = m$ و شعاع دایرهٔ انعکاس n باشد، طول SQ را بیابید.

۹. آیا هر دو نقطه در صفحهٔ منعکس خط منحصر به فردی را تعیین می‌کنند؟

۱۰. مکان منعکس هر نقطهٔ داخل دایرهٔ انعکاس را رسم کنید.

۱۱. قضیه‌ای در مورد منعکس مجموعهٔ جمیع نقاط صفحهٔ منعکس خارج دایرهٔ انعکاس بیان و اثبات کنید.

۱۲. تصویر دایره تحت انعکاس چه وقت دایره است، و چه وقت نیست؟

۱۳. چرا باید هر خط، و نه تنها خطوط گذرنده از مرکز انعکاس، شامل نقطهٔ انگاری باشد؟

۱۴. فرض می‌کنیم بدانیم که دو نقطه نقاط منعکس نسبت به دایره‌ای هستند. آیا این اطلاعات به تنهایی یافتن موارد

(a) شعاع آن دایره (b) موقع مرکز آن دایره

را ممکن می‌سازند؟

۱۵. عکس قضیهٔ ۶.۳ را ثابت کنید.

۱۶. حاصل ضرب تبدیلات انعکاسی‌ای که در آن یک تبدیل به عنوان عامل ضرب به دفعات زوج به کار رفته چیست؟

۱۷. تصاویر ممکن مجموعهٔ نقاط شامل دو خط متقاطع متمایز تحت انعکاس چیست؟

۱۸. منعکس دایره‌ای خارج دایرهٔ انعکاس و هم مرکز با آن را رسم کنید.
۱۹. فرض می‌کنیم یک منحنی، منحنی منعکس خود را قطع کند. نقاط تقاطع کجایند؟
۲۰. در بخش ۵.٦، ترسیمی برای یافتن وسط قطعه خط مفروضی با استفاده از پرگار تنها داده شد. از مفهوم انعکاس در اثبات این که ترسیم مذکور به نقطهٔ مطلوب منتج می‌شود استفاده کنید.
۲۱. قضیه‌ای در مورد منعکس خط مماس به دایرهٔ انعکاس بیان و اثبات کنید.
۲۲. قضیه‌ای در مورد منعکس مجموعهٔ جمیع خطوط گذرنده از نقطهٔ P، در صورتی که P نقطه‌ای خارج دایرهٔ انعکاس باشد،بیابید.
۲۳I. قبل از ادامهٔ مطلب، ببینید می‌توانید مشخص کنید که مجموعهٔ جمیع تبدیلات انعکاسی یک گروه است یا نه. از نظرتان دفاع کنید.
۲۴I. مطالب بیشتری در مورد تاریخ هندسهٔ انعکاسات بخوانید.

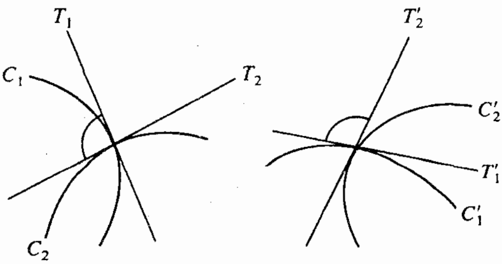
٦.۲ خواص و لایتغیرهای دیگر انعکاس

در بخش ٦.۱، دریافتیم که دایرهٔ انعکاس تحت انعکاس لایتغیر نقطه به نقطه است و خط گذرنده از مرکز انعکاس لایتغیر هست، اما لایتغیر نقطه به نقطه نیست. نیز دریافتیم که انطباق نقاط و منحنی‌ها تحت انعکاس محفوظ می‌ماند. واقعیات فوق اساسی برای ادامهٔ تحقیقات خواص لایتغیر تحت تبدیل انعکاس به دست می‌دهد. در این راستا یکی از مفیدترین لایتغیرها تحت انعکاس را در قضیهٔ بعد بیان کرده‌ایم.

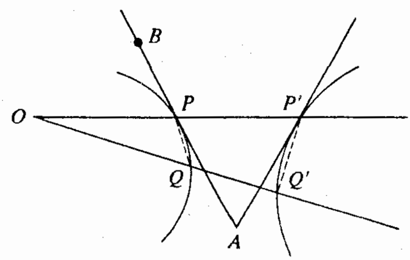
قضیهٔ ٦.۵ . اندازهٔ زاویهٔ بین دو منحنی متقاطع تحت تبدیل انعکاس لایتغیر است.

مفهوم این قضیه را به طور تصویری در شکل ٦.۷ نشان داده‌ایم. زاویهٔ بین دو منحنی C_1 و C_2 به صورت زاویهٔ بین مماس‌های در نقطهٔ تقاطع شان تعریف شده است. در این مورد باید یکی از دو زاویهٔ مکمل موجود درنظر گرفته شود. تصاویر دو منحنی متقاطع مذکور دو منحنی متقاطع C'_1 و C'_2 است. در این صورت زاویهٔ بین دو مماس در نقطهٔ تقاطع شان همان اندازهٔ زاویهٔ بین دو مماس اصلی را داراست.

اثبات: اثبات قضیهٔ ٦.۵ بستگی به اثبات این مطلب که زاویه‌ای که یک منحنی با خط گذرنده از مرکز انعکاس می‌سازد با زاویه‌ای که منعکس منحنی با همین خط می‌سازد



شکل ۶.۷



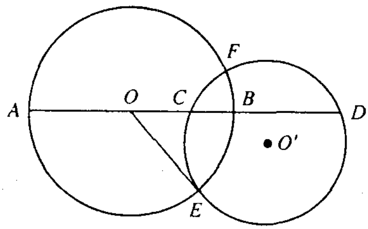
شکل ۶.۸

همنهشت است، دارد. در شکل ۶.۸، فرض می‌کنیم منحنی‌های PQ و P′Q′ منحنی‌های منعکس، با مرکز انعکاس O و ازواج نقاط منعکس P، ′P، و Q، ′Q باشند. جمیع چهار نقطهٔ P، ′P، ′Q، Q بر دایره‌ای واقع‌اند (اثبات این گزاره را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم)، بنابراین زوایای متقابل مکمل‌اند. در این صورت،

$$\angle OPQ \cong \angle P'Q'O$$

موقع حدی $\overrightarrow{OQ}$، چون Q در امتداد منحنی اصلی به P نزدیک شود، $\overrightarrow{OP}$ است. مماس های $\overleftrightarrow{PA}$ و $\overleftrightarrow{P'A}$ مواقع حدی قاطع های $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{P'Q'}$ اند. به این ترتیب، موقع حدی زاویهٔ از $\overrightarrow{OP}$ به منحنی اصلی، $\angle OPA$ است که مکملش، $\angle OPB$، با $\angle OPA$ موقع حدی زاویهٔ از $\overrightarrow{OP}$ به منحنی تصویر، همنهشت است.

توجه به این نکته مهم است که، تحت انعکاس گرچه اندازهٔ زاویهٔ مورد بحث محفوظ می‌ماند، جهتش معکوس می‌شود. در شکل ۶.۸، زاویهٔ از $\overleftrightarrow{OP}$ به $\overleftrightarrow{PB}$ در عکس جهت مثلثاتی



شکل ٦.٩

اندازه گیری می‌شود، در حالی که اندازه گیری زاویهٔ $\overrightarrow{OP'}$ به $\overrightarrow{P'A}$ در جهت مثلثاتی است. به این دلیل، انعکاس نیز (مانند تقارن) مثال دیگری از تبدیل مقابل است. نیز مجموعهٔ جمیع تبدیلات منعکس یک صفحه تشکیل گروه تبدیلات نمی‌دهد، زیرا حاصل‌ضرب دو انعکاس انعکاس نیست. اما، یک انعکاس و عینیت گروه متناهی نسبتاً حقیری با دو عضو تشکیل می‌دهند.

به عنوان نتیجهٔ قضیهٔ ٦.٥، دو منحنی که به زوایای قائمه متقاطع‌اند تصاویری دارند که آن‌ها نیز به زوایای قائمه تلاقی می‌کنند. دوایر متعامد*[16]، دو دایرهٔ متقاطع به زوایای قائمه، نقش بسیار مهمی در نظریهٔ انعکاس ایفا می‌کنند. مفهوم اساسی دیگر در ضمن قضیهٔ بعد آمده است.

قضیهٔ ٦.٦ . دایرهٔ عمود بر دایرهٔ انعکاس تحت تبدیل انعکاس مجموعه‌ای لایتغیر (اما نه لایتغیر نقطه به نقطه) از نقاط است.

اثبات: در شکل ٦.٩، دایرهٔ O دایرهٔ انعکاس و دایرهٔ O' دایرهٔ دلخواه دیگر عمود بر آن است. اگر خط گذرنده از O ای دایرهٔ O' را در C و D قطع کند، در این صورت، به ازای نقطهٔ تقاطع دو دایره، E، $OC \,.\, OD = (OE)^2$ است. اما از آن‌جا که $\overline{OE}$ شعاع دایرهٔ انعکاس نیز هست، C و D بنا به تعریف نقاط منعکس نسبت به دایرهٔ انعکاس‌اند.

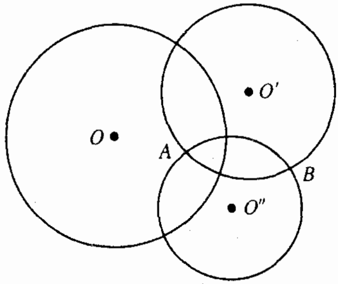
تصویر هر نقطهٔ $\widehat{FDE}$ تحت انعکاس نقطه‌ای از $\widehat{FCE}$، با نقاط انتهایی لایتغیر F و E است. به این ترتیب، دایرهٔ O' مجموعه‌ای از نقاط لایتغیر است.

دومین قضیهٔ مفید مربوط به دوایر متعامد تحت انعکاس قضیهٔ زیر است.

---

16. Orthogonal Circles

* دوایر عمود برهم



شکل ۶.۱۰

قضیهٔ ۶.۷. هرگاه دو دایرهٔ عمود بر دایرهٔ انعکاس یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، این دو نقطه نقاط منعکس اند.

اثبات: در شکل ۶.۱۰، فرض می‌کنیم O دایرهٔ انعکاس با دو دایرهٔ 'O و "O عمود بر آن و متقاطع با یکدیگر در A و B باشد. می‌توان ثابت کرد که نقطهٔ O با A و B بر یک استقامت واقع اند. زیرا این نقطه، نقطه‌ای است که می‌توان از آن مماس های هم‌نهشت بر دوایر 'O و "O رسم کرد (اثبات این گزاره را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم). دراین صورت، A و B، بااستفاده از قضیهٔ ۶.۶، نقاط منعکس‌اند.

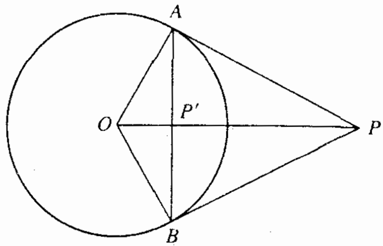
به خاطر بیاورید که در آخرین بخش فصل ۵، راجع به ترسیم، با مفهوم نقطهٔ منعکس مختصراً مواجه شدیم. اندیشهٔ این که در واقع چگونه می‌توان نقطهٔ منعکس یک نقطهٔ معلوم را رسم کرد می‌تواند به کشف خاصیت اساسی دیگری از نقاط منعکس، که مضمون قضیهٔ بعدی است، منجر شود.

قضیهٔ ۶.۸. نقطهٔ منعکس نسبت به یک دایرهٔ نقطه‌ای خارج آن دایره، بر خط واصل نقاط تماس مماس‌های از آن نقطه بر آن دایره قرار دارد.

اثبات: در شکل ۶.۱۱، P نقطه ای خارج دایره است. از مثلث های قائم متشابه OAP و OP'A داریم،

$$\frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{OA}\ ,\ (OA)^{2} = OP\ .\ OP'$$

بنابراین P و 'P نقاط منعکس اند.



شکل ۶.۱۱

از قضیهٔ ۶.۸ و شکل ۶.۱۱، ممکن می‌شود که روشی برای رسم نقطهٔ منعکس یک نقطه، چه این نقطه داخل دایره چه خارج آن باشد، تعبیه کرد. فی المثل، اگر نقطهٔ P' داخل دایره باشد، در این صورت نیاز به رسم عمود $\overleftrightarrow{AB}$ به $\overleftrightarrow{OP'}$ در P' داریم. بعد باید در A عمودی بر $\overrightarrow{OA}$ رسم کنیم. این خط از آن‌جا که بر شعاع دایره عمود است مماس بر آن است. تقاطع مماس مزبور و $\overleftrightarrow{OP'}$ نقطهٔ منعکس P است، اما اگر نقطهٔ P خارج دایره باشد، نیاز به رسم مماس‌هایی به دایره داریم. در این صورت خط واصل نقاط تماس A و B، $\overleftrightarrow{OP}$ را در نقطهٔ مطلوب P' قطع می‌کند. مسائل ترسیمی فوق در ضمن تمرینات آمده‌اند.

تعریف. خط گذرنده از یک نقطهٔ منعکس و عمود بر خط واصل نقطهٔ اصلی به مرکز دایرهٔ انعکاس قطبی[17] نقطهٔ اصلی نامیده می‌شود، در حالی که خود آن نقطه به قطب[18] آن خط موسوم است.

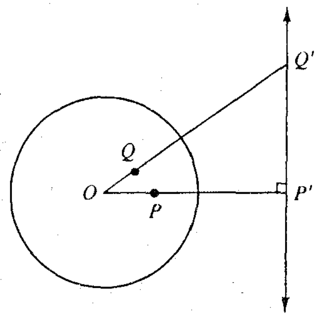
در شکل ۶.۱۱، $\overleftrightarrow{AB}$ قطبی P و P قطب $\overleftrightarrow{AB}$ است. کلمات قطب و قطبی فصول ۱ و ۷ معانی متفاوتی دارند.

در شکل ۶.۱۲، اگر P و P' نقاط منعکس باشند، در این صورت $\overleftrightarrow{P'Q'}$ قطبی P و P قطب $\overleftrightarrow{P'Q'}$ است. از شکل ۶.۱۲، باید ظن برده باشید که بین قطب‌ها و قطبی‌ها، چنان که به طور صوری در قضیهٔ بعد بیان شده، نسبت معکوسیت[19] موجود است.

قضیهٔ ۶.۹ . اگر نقطهٔ دومی بر قطبی نقطهٔ اولی، نسبت به دایرهٔ انعکاس مفروضی، واقع باشد، در این صورت نقطهٔ اول بر قطبی نقطهٔ دوم نسبت به همین دایره خواهد بود.

---

17. Polar
18. Pole
19. Reciprocal Relation



شکل ۶.۱۲

اثبات: در شکل ۶.۱۲، اگر $\overleftrightarrow{P'Q'}$ قطبی P باشد، در این صورت باید نشان دهیم که قطبی Q' از P می‌گذرد. اگر Q نقطهٔ منعکس Q' باشد، در این صورت تمام چیزی را که نیاز داریم نشان دادن این است که $\overleftrightarrow{QP}$ عمود بر $\overleftrightarrow{OQ'}$ است. دو زوج نقطهٔ منعکس، P، P' و Q، Q'، بر دایره‌ای واقع‌اند. به علت این که $\angle PP'Q'$ زاویه‌ای قائمه است، $\angle Q'QP$ زاویهٔ مقابل آن در چهار ضلعی محاطی حاصل، نیز قائمه است.

تبادل قطبی‌ای[20] نسبت به دایره حالت خاصی از تبادل قطبی نسبت به مقاطع مخروطی‌ای، که در فصل ۷ به معرفی آن‌ها می‌پردازیم، است. در تبادل قطبی، تصویر یک مجموعه‌نقاط یک مجموعه خطوط و تصویر یک مجموعه خطوط یک مجموعه نقاط است.

تمرینات ۶.۲

۱. امکانات تصاویر تحت انعکاس دو خط متلاقی به زوایای قائمه‌ای در نقطه‌ای غیر از مرکز انعکاس را فهرست کنید.
۲. جمیع امکانات تصویر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را تحت انعکاس فهرست کنید.
۳. در اثبات قضیهٔ ۶.۵، اثبات کنید که P، P'، Q'، Q همه بر یک دایره واقع‌اند.
۴. در اثبات قضیهٔ ۶.۷، ثابت کنید که نقطهٔ O با نقاط A و B بر یک استقامت واقع است.
۵. با معلوم بودن یک دایره، دایرهٔ دیگری عمود بر آن رسم کنید.
۶. با مفروض بودن نقطه‌ای خارج دایرهٔ مفروضی، نقطهٔ منعکس آن را نسبت به آن دایره رسم کنید.

20. Polar Reciprocation

۷. با مفروض بودن نقطه‌ای داخل دایرهٔ مفروضی، نقطهٔ منعکس آن را نسبت به آن دایره رسم کنید.

۸. ثابت کنید که قطبی های هر نقطهٔ واقع بر یک خط در قطب آن خط متقارب اند.

۹. قطب خطی نامتقاطع با دایرهٔ انعکاس را رسم کنید.

۱۰. قطب خطی متقاطع با دایرهٔ انعکاس در دو نقطهٔ متمایز را رسم کنید.

۱۱. مثلثی خود ـ قطبی[21] نسبت به دایرهٔ انعکاس است که هر ضلع آن قطبی رأس مقابل آن باشد. چگونگی رسم یک مثلث خود ـ قطبی نسبت به دایرهٔ مفروضی را شرح دهید. (در هندسهٔ انعکاسات، مثلث شامل سه خط، نه سه قطعه خط، است.)

۱۲. منعکس دایره‌ای را نسبت به نقطه‌ای واقع بر آن دایره بیابید.

۱۳. از دو نقطه داخل دایرهٔ مفروضی اما نه واقع بر یک استقامت با مرکز آن، دایره‌ای عمود بر دایرهٔ مفروض رسم کنید.

۱۴. منعکس مربعی نسبت به مرکزش را، در صورتی که چهارضلعش به دایرهٔ انعکاس مماس باشند، طرح و رسم کنید. (اضلاع مربع را به صورت خط، نه قطعه خط، درنظر آورید.)

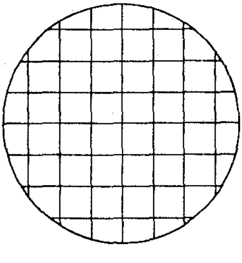
۱۵. منعکس مربعی نسبت به مرکزش را، در صورتی که چهار رأسش بر دایرهٔ انعکاس واقع باشند، طرح و رسم کنید. (اضلاع مربع را به صورت خط، نه قطعه خط، درنظر آورید.)

۱۶. ثابت کنید که هر سه دایره را می‌توان به سه دایره که مراکزشان واقع بر یک استقامت است، منعکس کرد.

۱۷I. تحقیق کنید که چگونه برای یک نقطه امکان دارد که نسبت به دو دایرهٔ انعکاس متفاوت یک نقطهٔ منعکس داشته باشد.

۱۸I. نسبت قطب و قطبی با عطف به دایرهٔ انعکاس حالت خاصی از تبادل قطبی نسبت به یک مخروطی به دست می‌دهد (شرح در فصل ۷). خواص این نسبت را مورد تحقیق قراردهید.

۱۹I. تحقیق کنید که در مورد یک نمونهٔ شطرنجی شکل داخل دایرهٔ انعکاس (شکل ٦.۱۳ را ملاحظه کنید) تحت انعکاس چه رخ می‌دهد.



شکل ٦.۱۳

21. Self - Polar

۶.۳ هندسهٔ تحلیلی انعکاس

معادلات مربوط به انعکاس را می‌توان با استفاده از شکل ۶.۱۴ مطرح کرد. در این شکل دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع r را می‌توان به عنوان دایرهٔ انعکاس درنظر گرفت. در این صورت نقاط منعکس P و P' به ترتیب دارای مختصات (x,y) و (x',y') اند.

از آن‌جا که $OP \cdot OP' = r^2$،

$$(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x'^2+y'^2}) = r^2$$

یا

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = r^4$$

به علت این که P و P' با O بر یک استقامت واقع‌اند، $\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$، یا $x'y = xy'$، یا $x'^2y^2 = x^2y'^2$؛ بنابراین،

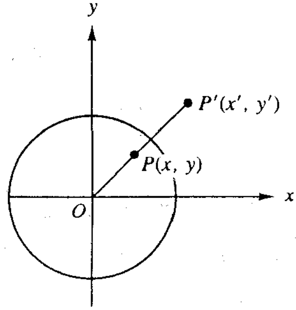
$$(x^2+y^2)\left(\frac{x^2y'^2}{y^2} + y'^2\right) = r^4$$

$$\frac{1}{y^2}(x^2+y^2)(x^2y'^2 + y'^2y^2) = r^4$$

$$\frac{y'^2}{y^2}(x^2+y^2)(x^2+y^2) = r^4$$

اما داریم

$$\frac{y'^2}{y^2} = \frac{x'^2}{x^2}$$



شکل ۶.۱۴

و اگر دو طرف رابطه را در x^2 ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$x'^2 (x^2 + y^2)^2 = x^2 r^4$$

ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این رابطه، و انتخاب ریشهٔ دوم به طوری که x و x' دارای یک علامت باشند، نشان می‌دهد که

$$x' (x^2 + y^2) = x r^2$$

یا

$$x' = \frac{x r^2}{x^2 + y^2}$$

به همین ترتیب، می‌توان عبارت مربوط به y' را یافت و بنابراین قضیهٔ بعد را اثبات کرد.

قضیهٔ ۶.۱۰. معادلات تبدیل انعکاس نقطهٔ $P(x,y)$ به $P'(x',y')$ نسبت به دایرهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ عبارت اند از

$$x' = \frac{x r^2}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y r^2}{x^2 + y^2}$$

معادلات قضیهٔ ۶.۱۰ به وضوح نشان می‌دهند که تصویر مرکز انعکاس، از آن جا که $x^2 + y^2 = 0$ است، و x' و y' مقادیر حقیقی ندارند، نقطه‌ای حقیقی نیست. نیز نشان می‌دهند که در مورد نقاط واقع بر دایرهٔ انعکاس، $x = x'$ و $y = y'$ است.

مثال. منعکس (۲،۳) را نسبت به دایرهٔ با شعاع ۳ و مرکز در مبدأ مختصات بیابید.

$$x' = \frac{۹\,(۲)}{۴ + ۹} = \frac{۱۸}{۱۳}, \quad y' = \frac{۹\,(۳)}{۱۳} = \frac{۲۷}{۱۳}$$

و نقطهٔ منعکس عبارت است از

$$\left(\frac{۱۸}{۱۳}، \frac{۲۷}{۱۳}\right)$$

از آن جا که تبدیل انعکاس خود منعکس خود است، x و x' را می‌توان با یکدیگر تعویض کرد و y و y' را می توان با یکدیگر عوض کرد بنابراین

$$x = \frac{x' r^2}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y' r^2}{x'^2 + y'^2}$$

البته تکلیف فوق در مورد این که مرکز دایرهٔ انعکاس در مبدأ باشد اجباری نیست، جانشینی

$$x'' = x + h \quad , \quad y'' = y + k$$

نشان می‌دهد که صورت های عمومی تر معادلات انعکاس عبارت اند از

$$x' - h = \frac{(x - h)\, r^{۲}}{(x - h)^{۲} + (y - k)^{۲}} \quad , \quad y' - k = \frac{(y - k)\, r^{۲}}{(x - h)^{۲} + (y - k)^{۲}}$$

استفاده از فورمول‌های تحلیلی فوق در تحقیق قضایای انعکاس دو بخش اخیر آموزنده است. فی‌المثل، تصویر خط $x - ۴ = ۰$ تحت انعکاس نسبت به دایره‌ای با مرکز در مبدأ و شعاع سه چیست؟ (شکل ۶.۱۵ را ملاحظه کنید.)

معادلهٔ این تصویر با قراردادن

$$\frac{۹x'}{x'^{۲} + y'^{۲}}$$

به جای x در معادلهٔ خط به دست می‌آید. به این ترتیب،

$$\frac{۹\,x'}{x'^{۲} + y'^{۲}} - ۴ = ۰$$

$$\frac{۹\,x'}{x'^{۲} + y'^{۲}} = ۴$$

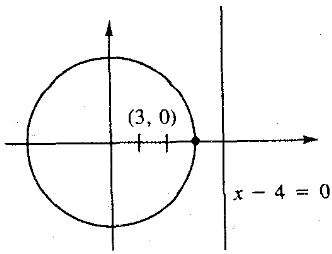
$$۹\,x' = ۴\,(x'^{۲} + y'^{۲})$$

یا

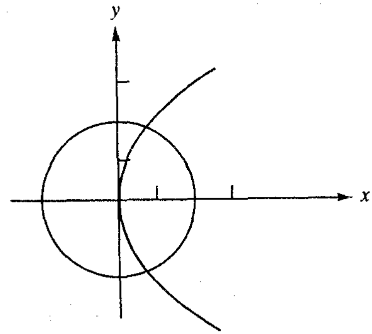
$$۴x'^{۲} - ۹x' + ۴y'^{۲} = ۰$$

که چنان که انتظار می‌رفت دایره‌ای گذرنده از مبدأ است.

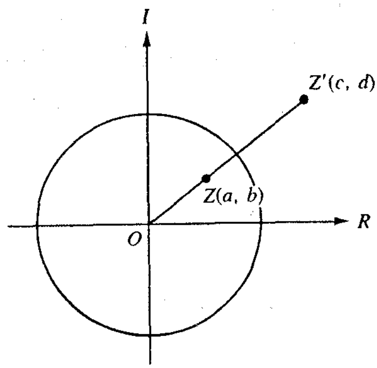
معادلات مربوط به تبدیل انعکاس و تبدیل منعکس آن یافتن معادلات منعکس منحنی‌های نیامده در قضایای قبل را نیز ممکن می‌سازد. در این مورد با مثالی امکانات بسیار متنوع این معادلات را توضیح می‌دهیم. تصویر سهمی $y^{۲} = ۴x$ را تحت انعکاس نسبت به دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۴$ پیدا کنید.(شکل ۶.۱۶ را ملاحظه کنید.)



شکل ۶.۱۵



شکل ۶.۱۶



شکل ۶.۱۷

قرار دادن به جای x و y در معادلهٔ سهمی به

$$\frac{(۴y')^۲}{(x'^۲ + y'^۲)^۲} = ۴\,\frac{۴x'}{x'^۲ + y'^۲}$$

منجر می‌شود. معادلهٔ فوق را می‌توان به طریق زیر ساده کرد:

$$۱۶y'^۲ = ۱۶x'\,(x'^۲ + y'^۲)$$

$$y'^۲ = x'^۳ + x'y'^۲$$

$$y'^۲ - x'y'^۲ = x'^۳$$

$$y'^۲ = \frac{x'^۳}{۱ - x'}$$

منعکس سهمی در این حالت سهمی، حتی مخروطی، نیست، بنابراین خاصیت مخروطی بودن لایتغیر نیست.

چون بررسی انعکاس به اعداد مختلط گسترش داده شود، در معادلهٔ تبدیل تسهیل نسبتاً غیر منتظره‌ای ظاهر می‌شود.

در شکل ۶.۱۷، فرض می‌کنیم که محورهای حقیقی و موهومی داده شده باشند. در این صورت اگر دایرهٔ انعکاس دایرهٔ واحد باشد، و اگر $z' = c + di$ منعکس $z = a + bi$ نسبت به این دایره باشد، قضیهٔ زیر رابطهٔ بین z و z' را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۶.۱۱ . تبدیل نقاط مختلط نسبت به دایرهٔ واحد به مرکز در مبدأ معادلهٔ $z' = ۱/\bar{z}$ ، که در آن $\bar{z}$ مزدوج z است، را داراست. اگر $z = a + bi$ باشد، در این صورت

$$z' = \frac{۱}{\bar{z}} = \frac{۱}{a - bi} \cdot \frac{a + bi}{a + bi}$$

$$= \frac{a + bi}{a^۲ + b^۲}$$

برای نشان دادن این که z و z' نقاط منعکس نسبت به دایرهٔ واحد انعکاس اند، لازم است که نشان دهیم که:

۱. حاصل ضرب فواصل شان از مبدأ یک است.

۲. با مبدأ بر یک استقامت قرار دارند.

برهان این که z و z' نقاط منعکس اند، را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم.

مثال. معکوس نقطهٔ $۲ + ۳i$ را نسبت به دایرهٔ به شعاع ۱ و مرکز در مبدأ بیابید.

$$z' = \frac{۱}{۲ - ۳i}$$

$$= \frac{۱(۲ + ۳i)}{(۲ - ۳i)(۲ + ۳i)}$$

$$= \frac{۲}{۱۳} + \frac{۳}{۱۳} i$$

انعکاس نسبت به‌دایرهٔ به‌مرکز درمبدأ وشعاع به‌ازای‌اعدادمختلط باتبدیل زیرحاصل می‌شود.

$$z' = \frac{r^{۲}}{\overline{z}}$$

مثال. منعکس $۳ + ۴i$، نسبت به دایرهٔ به مرکز در مبدأ و شعاع دو، $\frac{۴}{(۳ - ۴i)}$ است، که می‌تواند به صورت $a + bi$ به ترتیب زیر نوشته شود:

$$\left(\frac{۴}{۳ - ۴i}\right)\left(\frac{۳ + ۴i}{۳ + ۴i}\right) = \frac{۴(۳ + ۴i)}{۹ + ۱٦} = \frac{۱۲}{۲۵} + \frac{۱٦}{۲۵}i$$

تمرینات ٦.۳

در تمرینات ۱ ـ۸، از معادلات انعکاس نسبت به دایره‌ای به مرکز در مبدأ در یافتن منعکس نقاط حقیقی زیر استفاده کنید.

نقطه	شعاع انعکاس	شعاع انعکاس
(۳،۴)	۱. ۱	۲. ۲
(۱،۱)	۳. ۲	۴. ۳
(۰،۳)	۵. ۳	٦. ۴
(۷،۱)	۷. ۴	۸. ۵

در تمرینات ۹ـ۱۲، منعکس نقطهٔ داده شده را نسبت به دایره‌ای به مرکز (۳،۲) بیابید.

نقطه	شعاع انعکاس	شعاع انعکاس
(٦،۲)	۹. ۲	۱۰. ۳
(۵،۵)	۱۱. ۳	۱۲. ۲

۱۳. معادلات منعکس تبدیل منعکس را با به دست آوردن x و y از معادلات اصلی بیابید.

در مورد هر یک از مجموعه نقاط مفروض در تمرینات ۱۴ـ۱۹، تصویر تحت انعکاس نسبت به دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۹$ را بیابید.

۱۴. $x - ۲ = ۰$

۱۵. $x - ۵ = ۰$

۱۶. $x + y + 2 = 0$

۱۷. $y^2 = 4x$

۱۸. $x^2 = y$

۱۹. $x^2 + y^2 = 16$

۲۰. اثبات قضیهٔ ۶.۱۱ را تکمیل کنید.

در مسائل ۲۱-۲۸، منعکس نقاط داده شده برحسب اعداد مختلط رانسبت به دایرهٔ با مرکز در مبدأ و با شعاع مفروض بیابید.

نقطه	شعاع انعکاس	شعاع انعکاس
$2 - 5i$	۲۱. ۱	۲۲. ۲
$3 + 7i$	۲۳. ۱	۲۴. ۲
$1 - 2i$	۲۵. ۲	۲۶. ۳
$3 + 11i$	۲۷. ۳	۲۸. ۴

در تمرینات ۲۹-۳۱،معادلات عمومی منعکس هر مجموعهٔ نقاط را نسبت به دایرهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ استخراج کنید.

۲۹. $x^2 + y^2 = k^2$

۳۰. $ax + by + c = 0$

۳۱. $y^2 = ax$

در تمرینات ۳۲ و ۳۳، برای به دست دادن اثبات تحلیلی قضایای برگرفته از بخش های پیشین از معادلات استفاده کنید.

۳۲. ثابت کنید که تصویر خط گذرنده از مرکز انعکاس، تحت انعکاس، همان خط است.

۳۳. ثابت کنید که تصویر دایرهٔ ناگذرنده از مرکز انعکاس، تحت تبدیل انعکاس، دایره‌ای ناگذرنده از مرکز انعکاس است.

۳۴I. تحقیق کنید که فاصله تحت انعکاس خاصیتی لایتغیر است یا خیر. ازواج نقاطی در نظر بگیرید و فاصلهٔ بین آن ها را با فاصلهٔ بین نقاط تصاویرشان مقایسه کنید.

۳۵I. دربارهٔ کاربرد انعکاس در کتابی راجع به متغیرات مختلط تحقیق کنید.

۶.۴ بعضی از کاربردهای انعکاس

حقیقت تازهٔ زیر در مورد نقاط منعکس یکی از کاربردهای انعکاس را در مورد یکی از مسائل ترسیمی قبلی نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۶.۱۲ . دو نقطهٔ منعکس نسبت به یک دایره قطری از آن دایره را که بر آن قرار دارند به طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم می‌کنند.

اثبات: در شکل ۶.۱۸، $OC \,.\, OD = (OB)^2$، یا

$$\frac{OD}{OB} = \frac{OB}{OC}$$

بنا به قضیه‌ای راجع به تناسب، اگر $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ ، آنگاه

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

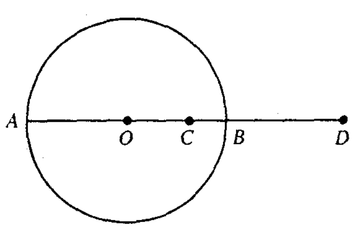
بنابراین

$$\frac{OD+OB}{OD-OB} = \frac{OB+OC}{OB-OC}$$

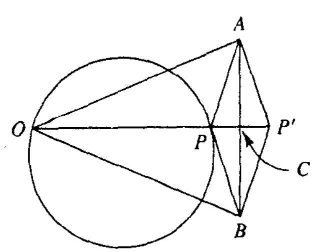
یا

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CB}$$

بنابراین نسبت‌های تقسیم $\overline{AB}$ با C و D مساوی اند (در این مورد قطعه خط های جهت‌دار را درنظر نگرفته‌ایم).



شکل ۶.۱۸



شکل ۶.۱۹

این واقعیت که تبدیل انعکاس گاهی خط مستقیم را به دایره، یا دایره را به خط مستقیم تبدیل می‌کند، اساس کاربردهای فیزیکی انعکاس در رابطه‌هایی که حرکت خطی را به حرکت منحنی الخط تغییر می‌دهد یا برعکس، است. کنترل جزر و مدّ، راندن لوکوموتیو، تهیهٔ الکتریسیته همه مثال‌هایی از تغییر یک نوع حرکت به حرکتی از نوع دیگر است. مسألهٔ مکانیکی اختراع رابط های انجام دهندهٔ این نوع کار مهندسان را در صدسال گذشته به خود مشغول کرده است. یکی از چنین ابزارهایی عاکس پسلیه[22] است، که سازمانش براساس نظریهٔ انعکاس بنا شده است. این وسیله در شکل ۶.۱۹ به تصویر آمده است.

چهار ضلعی $AP'BP$، در این وسیله، لوزی است، بنابراین $\overleftrightarrow{OC}$ عمودمنصف $\overline{AB}$ است.

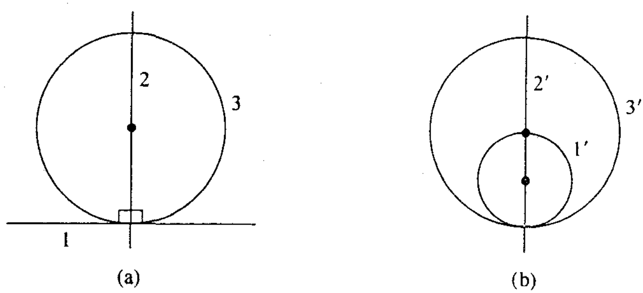
$$OP \cdot OP' = (OC - PC)(OC + CP')$$

$$= (OC)^2 - (PC)^2$$

$$= (OA)^2 - (AC)^2 - [(PA)^2 - (AC)^2]$$

$$= (OA)^2 - (PA)^2$$

اما در این وسیله، که شامل شش میلهٔ تشکیل دهندهٔ لوزی مذکور همراه با $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ است، فواصل OA و PA ثابت می‌باشد، و بنابراین P و P' نقاط منعکس اند. اگر نقطهٔ P حول دایرهٔ شکل حرکت کند، P' خطی مستقیم می‌پیماید.



شکل ۶.۲۰

22. Peucellier's Cell

یکی از موارد استعمال کاملاً متفاوت انعکاس مورد یافتن قضایای جدید با منعکس کردن قضایای آشناست. به طور دقیق تر، ممکن است شکل یک قضیهٔ اقلیدسی آشنا، چون منعکس شود، قضیهٔ جدیدی با طرح خواص متناظر به دست دهد؛ و گذشته از این، لازم به اثبات از آغاز قضیهٔ جدید نیست؛ چرا که این قضیه به علت اثبات قضیهٔ اصلی و خواص پذیرفته شدهٔ انعکاس، راست است. با مثال به توضیح این فن می‌پردازیم.

یکی از قضایای مقدماتی هندسه این گزاره است که اگر خطی در آن انتهای شعاع دایره که بر دایره واقع است بر آن شعاع عمود باشد، در این صورت بر آن دایره مماس است.

این قضیه راباشکل a ٦.٢٠ توضیح داده‌ایم. مجموعه‌های نقاط واقع در قضیه را می‌توان به‌خاطر بهتر یکی کردن‌شان بامجموعه‌های نقاط شکل به ترتیب زیر شماره‌بندی کرد.

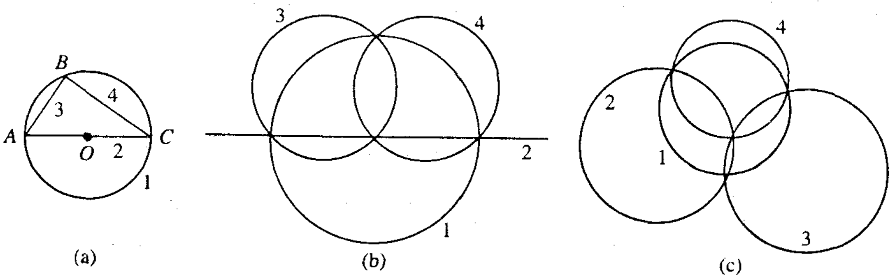
اگر خطی [1] در آن انتهای شعاع [2] دایره که بردایره [3] واقع است بر آن شعاع [2] عمود باشد، دراین صورت بر آن دایره [3] مماس است.

اکنون می‌توان شکل را برای یافتن قضیهٔ جدیدی منعکس کرد. در مورد این مثال، فرض می‌کنیم که دایرهٔ مفروض به عنوان دایرهٔ انعکاس انتخاب شده باشد. شکل منعکس شده را در شکل b ٦.٢٠، با مجموعه های نقاط برای نشان دادن مجموعه های متناظر با پریم شماره گذاری شده، نمایان کرده‌ایم.

خط ۲ (خطی گذرنده از مرکز انعکاس) لایتغیر است. دایرهٔ ۳ (دایرهٔ انعکاس) لایتغیر است. خط ۱ (خطی ناگذرنده از مرکز انعکاس) به‌دایره‌ای گذرنده از مرکز انعکاس تبدیل می‌شود. سه مجموعهٔ نقاط مورد بحث هم چنان نقطهٔ تقاطع مشترکی دارند، و زوایای تقاطع‌شان به همان اندازه باقی می‌ماند. نتیجهٔ قضیهٔ جدید این است که ′۱ و ′۳ مماس اند. قضیهٔ جدید را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ ٦.١٣ . دایره‌ای که قطرش شعاع دایرهٔ دیگری است به طور داخلی بر آن دایره مماس است.

هنگام یافتن قضایای جدید با واسطهٔ انعکاس، بسیار اهمیت دارد که بدانیم که شکل جدید (شکل b ٦.٢٠) تنها با روابط میان مجموعه های تصویر نقاط درنظرگرفته می‌شود و با رابطهٔ بین شکل اصلی و شکل جدید، یا با زمینه‌ها و سایر عوامل نامربوط مورد بررسی قرار



شکل ۶.۲۱

نمی‌گیرد، و تنها رابطهٔ درون شکل جدید است که بیان قضیهٔ جدیدی را ممکن می‌سازد.

شکل ۶.۲۱ a شکل قضیه‌ای را نشان می‌دهد که بیان می‌کند که زاویهٔ محاط در یک نیمدایره زاویه‌ای قائم است. شکل ۶.۲۱ b نتیجهٔ منعکس کردن مجموعه‌های نقاط شکل ۶.۲۱a را نسبت به مرکز انعکاس O، با دایرهٔ انعکاس دایرهٔ مفروض نشان می‌دهد. در شکل ۶.۲۱b، دایرهٔ ۱ و خط ۲ مجموعه‌های لایتغیر نقاط اند. $\overleftrightarrow{AB}$ دایرهٔ ۳ را به عنوان تصویر داراست، و تصویر $\overleftrightarrow{BC}$ دایرهٔ ۴ است. قضیهٔ جدید شامل این نتیجه است که دوایر ۳ و ۴ متعامدند. تنظیم صورت قضیه را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم.

در این مورد انتخاب مرکز انعکاس به اختیار بود، و می‌توان، در صورتی که مراکز انعکاس دیگری انتخاب شوند، قضایای متفاوت‌گوناگونی نوشت. و چنان‌که انتظار می‌رود، انتخاب نقطه‌ای کلیدی از خود شکل به عنوان مرکز انعکاس، چنان که در مثال قبل، به بیشترین تسهیلات منتج می‌شود. شکل ۶.۲۱ c نتیجهٔ انعکاس را نسبت به نقطه‌ای ناواقع بر هیچ یک از خطوط یا دوایر مفروض نشان می‌دهد.

گزاره های زیر را نسبت به شکل ۶.۲۱ c اثبات کنید:

۱. تصویر دایرهٔ O، دایره‌ای ناگذرنده از مرکز انعکاس، یک دایره است (دایرهٔ ۱).

۲. تصویر خط $\overleftrightarrow{AC}$ دایره‌ای است (دایرهٔ ۲) که از مرکز انعکاس می‌گذرد و بر تصویر دایرهٔ O عمود است.

۳. تصویر خط $\overleftrightarrow{AB}$ دایره‌ای است (دایرهٔ ۳) که از تقاطع دوایر ۱ و ۲،نیز از مرکز انعکاس می‌گذرد.

۴. تصویر خط $\overleftrightarrow{BC}$ دایره‌ای است (دایرهٔ ۴) که از تقاطع ۱، ۲ و ۱، ۳، نیز از مرکز انعکاس می‌گذرد.

در این صورت قضیهٔ جدید شامل چهار دایره است، و نتیجهٔ آن، این است که دو دایره

از آن‌ها متعامداند. قضیهٔ جدید حاصل، معتبر در هندسهٔ اقلیدسی، با بیان تا اندازه‌ای پیچیدهٔ زیر تقریر می‌شود.

قضیهٔ ۶.۱۴. اگر دایرهٔ ۲ بر دایرهٔ ۱ عمود باشد، اگر دایرهٔ ۳ از یک تقاطع دوایر ۱ و ۲ بگذرد، نیز دایرهٔ ۱ را در نقطه‌ای متمایز قطع کند، اگر دایرهٔ ۴ از تقاطع دوم دوایر ۱ و ۲ و تقاطع دوم دوایر ۱ و ۳ بگذرد، و اگر دوایر ۲، ۳، ۴ نقطهٔ مشترک دیگری داشته باشند، دوایر ۳ و ۴ متعامدند.

دربحث تاکنون مان، انعکاس را برای به دست آوردن قضایای جدید از قدیم به‌کار برده‌ایم. قضایای جدید مذکور، در حالت کلی، به علت این که بعضی از خطوط به دایره منعکس شدند پیچیده‌تر بودند. اما درکاربرد دیگری از انعکاس، موسوم به اثبات توسط انعکاس[23]، جریان عمل به گونه‌ای معکوس است. در این مورد فکرمان اثبات قضیهٔ پیچیده‌تری با منعکس کردن شکل آن و بعد به کاربردن قضیهٔ ساده‌تر قبلاً اثبات شده‌ای است. مثال کلاسیک این طریق در اثبات قضیهٔ فویرباخ است.

قضیهٔ ۶.۱۵. قضیهٔ فویر باخ[24]. دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث به دایرهٔ داخلی و هر یک از سه دایرهٔ خارجی آن مثلث مماس است.

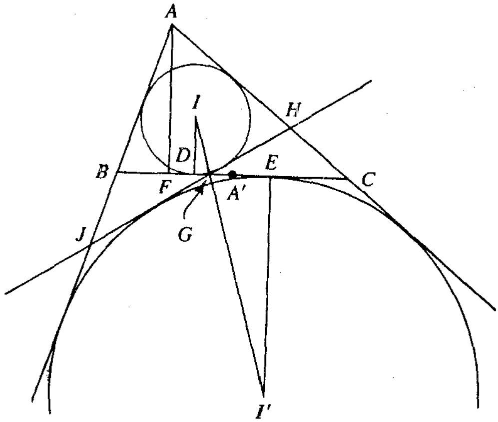
اثبات: در شکل ۶.۲۲، فرض می‌کنیم I و I' مراکز دایرهٔ محاطی داخلی و یکی از دوایر محاطی خارجی، با A' مرکز ضلع $\overline{BC}$، باشد. اگر ID و $I'E$ اشعهٔ عمود بر $\overline{BC}$ باشند، در این صورت A' وسط $\overline{DE}$ نیز هست. این را به این علت می‌توان نشان داد که $\overline{CE} \cong \overline{BD}$، زیرا هر دو اندازه‌ای مساوی نصف محیط مثلث منهای طول ضلع $\overline{AC}$ دارند.

اکنون اگر A' را به عنوان مرکز انعکاس درنظر بگیریم و اگر $A'D = A'E$ به صورت شعاع انعکاس درنظر گرفته شود، در این صورت دایرهٔ داخلی و خارجی مورد بحث هر دو، از آن‌جاکه بر دایرهٔ انعکاس عمودند، لایتغیراند. دایرهٔ نه نقطه از A' و F، پای ارتفاع از A ی مثلث، می‌گذرد. اما A' مرکز انعکاس است و G منعکس F نسبت به دایرهٔ انعکاس می‌باشد. به این ترتیب، تصویر دایرهٔ نه نقطه خطی گذرنده از

---

23. Proof by Inversion

24. Feuer bach's Proof



شکل ۶.۲۲

G است. از آن‌جا که زوایا تحت انعکاس محفوظ می‌مانند، زاویهٔ بین تصویر دایرهٔ نه نقطه و $\overline{BC}$ با زاویه‌ای که مماس بر دایرهٔ نه نقطه در A′ با $\overline{BC}$ می‌سازد هم‌نهشت است. این مماس موازی ضلع مقابلش از مثلث ارتفاعیهٔ (مثلثی‌که رئوسش پاهای سه ارتفاع مثلث اند) مثلث اصلی است. این خط ضد موازی $\overline{BC}$ است. دو خط ضد موازی با نیمساز زاویهٔ بین دو ضلع دیگر چهار ضلعی محاطی زوایای هم‌نهشت می‌سازد. اما این مماس داخلی دیگر دوایر I و I′ است که با BC همان زاویه‌یی را که، $\overline{II'}$ می‌سازد تشکیل می‌دهد، و بنابراین مماس $\overleftrightarrow{HJ}$ که **تصویر دایرهٔ نه نقطه است‌می‌باشد** و این بدان معنی است که دایرهٔ نه نقطه به هر دو دایرهٔ داخلی و خارجی فوق الذکر مماس می‌باشد. به طریقی مشابه، می‌توان نشان داد که دایرهٔ نه نقطه به دوایر خارجی دیگر نیز مماس است.

مثال دیگری از اثبات توسط انعکاس در بخش ۹ راجع به هندسهٔ نااقلیدسی ظاهر می‌شود. در این مثال، انعکاس در مدل پوانکاره در هندسهٔ هذلولوی در پیدا کردن مجموع اندازه‌های زوایای مثلث به کار می‌رود.

این بخش را با نگاهی به انعکاس در فضای سه بعدی به پایان می‌بریم. کرهٔ انعکاس، همان‌گونه که در شکل ۶.۲۳ نموده شده، مشابه دایرهٔ انعکاس است. به این ترتیب، اگر P و P′ نقاط منعکس نسبت به کره‌ای با شعاع r باشند، در این صورت

$$OP \,.\, OP' = r^{2}$$

است. می‌توان ملاحظه کرد که انعکاس در فضای دو بعدی مقطع عرضی‌ای از ترسیم سه‌بعدی‌مان، با صفحهٔ گذرنده از مرکز کرهٔ آن است. باردیگر، برای این که انعکاس تبدیلی از فضای منعکس در خودش باشد، لازم است که نقطه‌ای انگاری را اضافه کنیم. این نقطهٔ انگاری که بر جمیع صفحات قرار دارد، تصویر O است، و به O گسترش می‌یابد.

مثال. P' نقطهٔ منعکس $P(۲،۳،۴)$ نسبت به کره‌ای به مرکز مبدأ O و شعاع ۵ را بیابید.

$$OP \,.\, OP' = ۲۵$$

$$\sqrt{۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲}\, OP' = ۲۵$$

$$OP' = \frac{۲۵}{\sqrt{۲۹}}$$

کسینوس های هادی P و P': $۲/\sqrt{۲۹}$، $۳/\sqrt{۲۹}$، و $۴/\sqrt{۲۹}$ اند، و بنابراین مختصات P' عبارت‌انداز:

$$x = \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} \cdot \frac{۲۵}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۵۰}{۲۹}$$

$$y = \frac{۳}{\sqrt{۲۹}} \cdot \frac{۲۵}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۷۵}{۲۹}$$

$$z = \frac{۴}{\sqrt{۲۹}} \cdot \frac{۲۵}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۱۰۰}{۲۹}$$

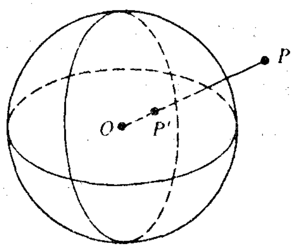
متناظر با روابط انعکاسی بین خط و دایره در فضای دوبعدی، روابط بین صفحه و کره در فضای سه‌بعدی است. در این موردمثالی در قضیهٔ بعد به دست داده‌ایم.

قضیهٔ ٦.١٦ . تصویر تحت انعکاس نسبت به یک کرهٔ صفحهٔ ناگذرنده از مرکز انعکاس، کره‌ای گذرنده از مرکز انعکاس است، و برعکس.

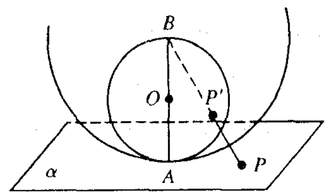
حالت خاصی از انعکاس نسبت به کره به تصویر استریوگرافیک[25] معروف و در نقشه برداری

---

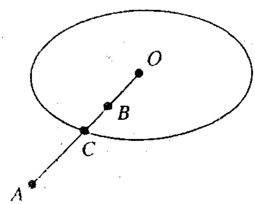
25. Stereographic Projection



شکل ۶.۲۳



شکل ۶.۲۴



شکل ۶.۲۵

بسیار مفید است. این روش تصویر را در شکل ۶.۲۴ توضیح داده‌ایم. صفحهٔ α به هر دو کرهٔ به مرکز O و مرکز B در نقطهٔ مشترک A مماس است. صفحهٔ α و کرهٔ به مرکز O نسبت به کرهٔ دوم منعکس اند. اثر این انعکاس تشکیل تناظر یک به یکی بین نقاط واقع بر کرهٔ به مرکز O و بر صفحهٔ منعکس است. یکی از جنبه‌های مهم نقشه که به این ترتیب تهیه می‌شود این است که جمیع اندازه‌های زاویه‌ای تحت انعکاس محفوظ می‌مانند. تصویر استریوگرافیک به این عنوان که به خصوص در تهیهٔ نقشه‌ای که نمونه‌های زمین شناسی ساختمانی تصویری را نشان می‌دهد مناسب است مطرح شده است. در این مورد کتاب زیر را ملاحظه کنید:

Athelstan Spilhaus, "New Look in Maps Brings Out Patterns of Plate Tectonics," Smith sonian, August 1976

تصویر استریوگرافیک در به دست آوردن مدل پوانکاره در هندسهٔ هذلولی، که در فصل ۹ معرفی خواهد شد، نیز به کار می‌رود.

انعکاس را می‌توان در طرق دیگری جز افزایش ابعاد تعمیم داد. یک امکان انعکاس نسبت به بیضی یا هذلولی به جای دایره است. فی‌المثل، در شکل ۶.۲۵، A و B را می‌توان به‌صورت نقاط منعکس نسبت به یک بیضی، در صورتی که $AO \cdot BO = CO^2$، به ازای نقطهٔ C ی واقع بر بیضی واقع بر یک استقامت با A، B، و مرکز O برقرار باشد، تعریف کرد.

تبدیل انعکاس تبدیل جدید مهم و از لحاظ تاریخی جالبی به دست داده که موارد

استعمال مهمی دارد. مجموعهٔ انعکاسات، برخلاف بسیاری از مجموعه‌های تبدیلات قبلی، تشکیل گروه نمی‌دهد. معادلات آن خطی نیستند، و نتایج آن به این که مرکز انعکاس نقطه‌ای از مجموعهٔ نقاط منعکس شده باشد یا نه وابسته است، و در آن گرچه نه فاصله نه نسبت فواصل لایتغیراند، اندازهٔ زوایا لایتغیر است. فصل بعد نوع متفاوت تبدیلی را معرفی می‌کند که گروه عمومی‌تری، که بعضی از گروه‌های فصل ۲ را به عنوان زیرگروه دارد، تشکیل می‌دهد.

تمرینات ٦.۴

۱. حالت خاص قضیهٔ ٦.۱۲ را در صورتی که یکی از نقاط مربوطه مرکز انعکاس باشد شرح دهید.

۲. با استفاده از مقوا و گیرهٔ کاغذ نمونهٔ کارآیی از عاکس پسلیه بسازید.

۳. شکل خطی عمود بر شعاع دایره‌ای در نقطه‌ای واقع بر محیط آن دایره را نسبت به نقطه‌ای واقع بر مماس مربوطه منعکس کرده، قضیهٔ حاصل را بیان کنید.

۴. شکل مثلثی محاط در یک نیمدایره را نسبت به یکی از نقاط انتهایی قطر آن منعکس کرده قضیهٔ حاصل را بیان کنید.

در تمرینات ۵ ـ ۸، قضایای جدید را با منعکس کردنْ شکل مربوطه بیان کنید.

۵. اگر زوایای مقابل یک چهار ضلعی مکمل باشند، چهار ضلعی مذکور را می‌توان در دایره‌ای محاط کرد.

٦. خط واصل مراکز دو دایرهٔ متقاطع بر وتر مشترک شان عمود است.

۷. اگر دو دایره بر یک خط در یک نقطه مماس باشند، خط واصل مراکز شان از نقطهٔ تماس می‌گذرد.

۸. ارتفاعات مثلث متقارب اند.

تمرینات ۹ ـ ۱۲ به اثبات قضیهٔ ٦.۱۵ مربوط اند.

۹. اثبات کنید که $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.

۱۰. ثابت کنید که G، $\overline{DE}$ را به طور داخلی به همان نسبت که F آن را به طور خارجی تقسیم می‌کند، تقسیم می‌کند.

۱۱. نشان دهید که مماس بر دایرهٔ نه نقطه در وسط یک ضلع موازی ضلع مقابل آن از مثلث ارتفاعیه است.
۱۲. ثابت کنید که دو خط ضد موازی یک چهار ضلعی محاطی با نیمساز زاویهٔ بین دو ضلع دیگر آن چهار ضلعی محاطی زوایای هم‌نهشت می‌سازد.
۱۳. با استفاده از انعکاس این قضیه را که دایرهٔ گذرنده از دو نقطهٔ منعکس واقع بر دو دایرهٔ متقابلاً منعکس دو دایره را در یک زاویه قطع می‌کند، اثبات کنید.
۱۴. تحت انعکاس، نسبت به یک کره، تصویر صفحهٔ گذرنده از مرکز آن کره چیست؟

در تمرینات ۱۵ و ۱۶، نقطهٔ منعکس نقطهٔ مفروض را نسبت به کره‌ای با مرکز در مبدأ و شعاع داده شده بیابید.

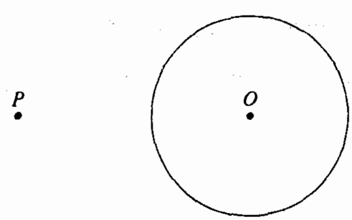
۱۵. (۲،۱،۳) ؛ شعاع ۷
۱۶. (۳،۵،۲) ؛ شعاع ۴

در تمرینات I۱۷ ـ I۲۰، در تمرینات فهرست شده، مجموعهٔ کامل قضایای تازه ممکن را با درنظر گرفتن مرکز انعکاس در هر موقع متفاوت شامل اشتراک مجموعه‌ها یا موقع واقع بر یکی از مجموعه‌های نقاط بنویسید.

I۱۷. قضیهٔ تمرین ۵
I۱۸. قضیهٔ تمرین ۶
I۱۹. قضیهٔ تمرین ۷
I۲۰. قضیهٔ تمرین ۸
I۲۱. نشان دهید که چگونه مسألهٔ ترسیمی رسم دایره‌ای مماس به دو دایرهٔ معلوم و گذرنده از نقطهٔ معلومی را می‌توان با استفاده از تبدیل انعکاس حل کرد.
I۲۲. در مورد تصویر استریوگرافیک تحقیق بیشتری انجام دهید. تصاویر اشکال گوناگونی رابه دست دهید، و بعضی از امتیازات و عدم امتیازات این نوع تصویر نقشه‌ای را بیان کنید.

تمرینات مروری فصل
فصل ٦

۱. در صفحهٔ منعکس تنها نقاطی که خود تصویر خوداند کدام‌اند؟
۲. در هندسهٔ انعکاسات چه وقت یک دایره خود تصویر خود است؟
۳. اگر فاصلهٔ از مرکز انعکاس تانقطهٔ اصلی ۴ باشد، و اگر شعاع دایرهٔ انعکاس ۵ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ منعکس را از مرکز انعکاس بیابید.
۴. اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ ۳ واحد از مرکز انعکاس باشد و اگر تصویر آن به فاصلهٔ ۲ واحد از مرکز انعکاس باشد، شعاع دایرهٔ انعکاس را بیابید.
۵. در حالت کلی، آیا حاصل ضرب دو انعکاس یک انعکاس است؟
٦. چه تبدیل دیگری باید به انعکاس مفروضی افزوده شود تا مثال ساده‌ای از گروه تبدیلات تشکیل دهد؟
۷. تصویر تحت انعکاس دو دایرهٔ متقاطع عمود بر دایرهٔ انعکاس را رسم کنید.
۸. جمیع تصاویر ممکن تحت انعکاس یک مثلث قائم‌الزاویه را رسم کنید.
۹. آیا امکان دارد که تحت تبدیل انعکاس، تصویر مثلثی با سه رأس معمولی مثلثی با سه رأس معمولی باشد؟
۱۰. تحت چه وضعیات خاصی دو نقطهٔ تقاطع دو دایره نقاط منعکس می‌شوند؟
۱۱. نقطهٔ منعکس نقطهٔ P در شکل ٦.۲٦ را رسم کنید.
۱۲. توضیح دهید که چگونه می‌توان از قضیهٔ ٦.۷ برای به دست دادن روش دیگری در رسم نقطهٔ منعکس یک نقطهٔ مفروض استفاده کرد.
۱۳. منعکس نقطهٔ (۳،۲) را نسبت به دایره‌ای به مرکز در مبدأ و شعاع ۲ بیابید.
۱۴. تصویر خط $y + 3 = 0$ را تحت انعکاس نسبت به دایره‌ای با مرکز در مبدأ و شعاع ۳ بیابید.



شکل ٦.۲٦

۱۵. تصویر دایرهٔ ۹ = $x^2 + y^2$ را تحت انعکاس نسبت به دایرهٔ ۱ = $x^2 + y^2$ بیابید.
۱٦. در صفحهٔ مختلط، منعکس نقطهٔ ۳i + ۳ را در رجوع به دایره‌ای با مرکز در مبدأ و شعاع ۴ بیابید.

در تمرینات ۱۷ و ۱۸، قضیهٔ تازه‌ای با منعکس کردن شکل قضیهٔ مفروض بنویسید. مرکز انعکاس را به صورت نقطه‌ای غیر واقع بر مجموعه‌های مفروض نقاط درنظر بگیرید.

۱۷. اگر دو خط متعامد در نقطه‌ای واقع بر دایره‌ای متقاطع شوند، و اگر یکی از این خطوط بر آن دایره مماس باشد، در این صورت خط دوم از مرکز آن دایره می‌گذرد.
۱۸. اگر خطی از نقاط تقاطع دو دایره بگذرد، در این صورت بر خط گذرنده از مراکز آن دو دایره عمود است.
۱۹. نقطهٔ منعکس (۲،۳،۱-) را نسبت به کرهٔ به مرکز در مبدأ و شعاع ۹ بیابید.

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان از هر مجموعهٔ تمریناتی که قبلاً از مجموعه‌های تمرینات پیشین این فصل معین نشده‌اند انتخاب کرد.

۷ هندسهٔ تصویری

۷.۱ مفاهیم اساسی

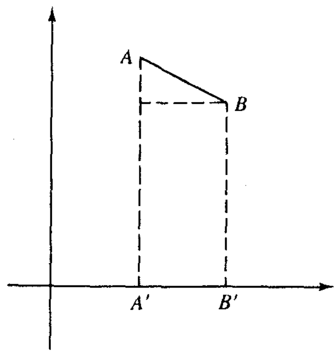
هندسهٔ تصویری یکی از هندسه‌های جدیدی است که در اوایل قرن نوزدهم معرفی شده است. هندسهٔ اقلیدسی، به این مفهوم که گروه حرکات اقلیدسی زیر گروه گروه تبدیلات تصویری‌اند، حالت خاصی از هندسهٔ تصویری است.

در این فصل برای طرح موضوعی که می‌توان آن را به عنوان دورهٔ کوتاهی در هندسهٔ تصویری توصیف کرد هم از گروه‌های تبدیلات هم از مجموعهٔ آکسیوم‌ها استفاده می‌کنیم. و در این مورد به مطرح کردن هندسه‌ای عمومی‌تر از هندسهٔ اقلیدسی یا هندسهٔ تشابهات فصل ۲ تأکید داریم. و مفهوم گروه تبدیلات تصویری و بررسی خواص لایتغیر تحت این مجموعهٔ تبدیلات را محور مرکزی قرار داده‌ایم. هندسهٔ تصویری شامل مفاهیم ریاضی بسیاری که در هندسه‌های قبلی با آن‌ها مواجه نشده‌ایم است، و کاربردهای عملی ای بیش از حد انتظار دارد.

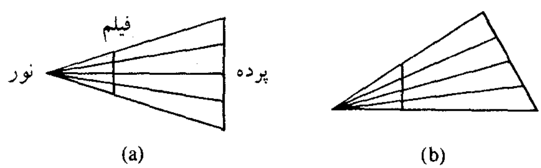
در هندسهٔ تحلیلی معمولی، از تصویر یک قطعه خط بر یک محور استفاده می‌شود، و چنان‌که در شکل ۷.۱ به تصویر آمده، $\overline{AB}$ بر محور xها با وارد کردن عمودهای $\overline{AA'}$ و $\overline{BB'}$ بر آن تصویر شده است. و گرچه AB و $A'B'$ معمولاً مساوی نیستند، بین نقاط آن‌ها به توسط تصویر مذکور تناظری یک به یک به وجود آمده است.

کاربرد آشنای دیگری از کلمهٔ تصویر[1] در رابطه با پروژکتور تصویر متحرک است. دراین مورد، چنان‌که در شکل ۷.۲ a مطرح شده، تصویر فیلم بر پرده مصور می‌شود. باید آشکار باشد که تصاویر فیلم و پرده، از آن جا که شکل هنگامی که اندازه به طور یکنواخت تغییر می‌کند لایتغیر می‌ماند، مشابه یکدیگراند. اما، در شکل ۷.۲ b تصویر پرده به علت این که فیلم و پرده موازی نیستند، تغییر شکل داده است. در این حالت، دیگر اشکال متشابه

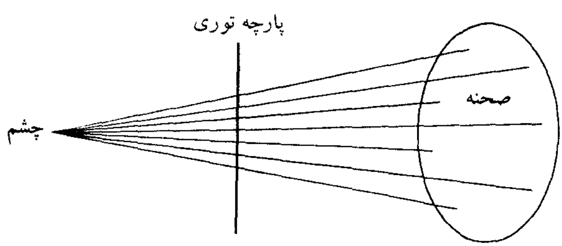
1. Projection



شکل ۷.۱



شکل ۷.۲

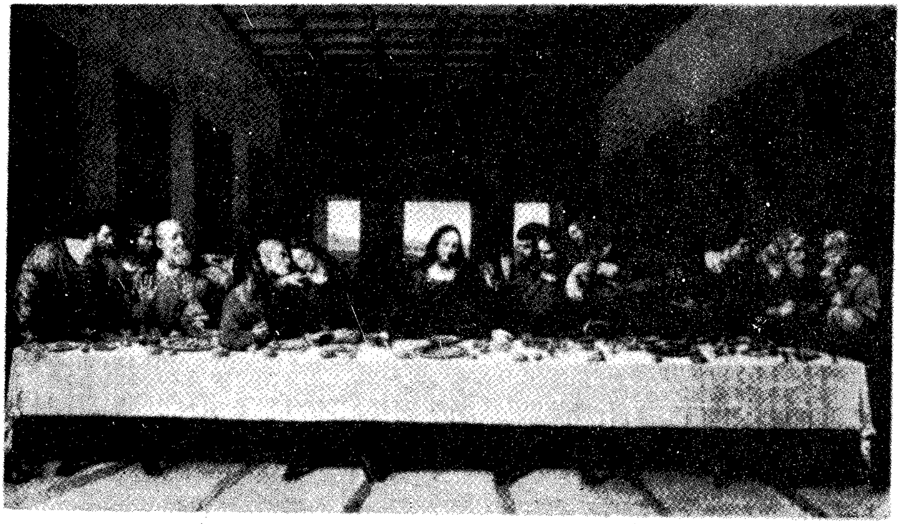


شکل ۷.۳

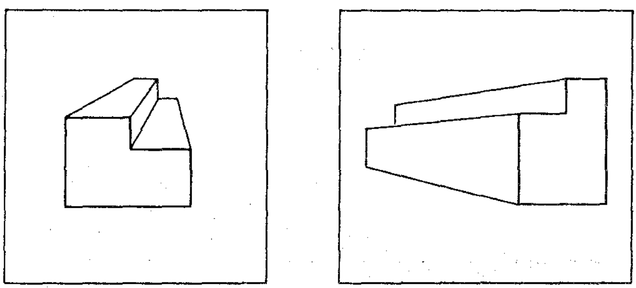
نیستند، و آشکار نیست که کدام یک از خواص آن ها بی‌تغییر باقی می‌ماند. حتی نسبت های فواصل نیز دیگر لا یتغیر نیستند.

شکل ۷.۲ نیز می‌تواند رابطهٔ بین تصویر و مفهوم پرسپکتیو را چنان‌که در هنر نقاشی به کار می‌رود مطرح کند. بسیاری از نقاشان معروف، به خصوص طی دورهٔ رنسانس، کوشیدند که از مفاهیم ریاضی در کمک به خلق توهم عمق[2] در نقاشی استفاده کنند. یکی از تدابیر به کار رفته در این مورد، چنان که در شکل ۷.۳ به تصویر آمده، تصویر موقع اشیای

2. Illusion of Depth



شکل ۷.۴



(a) (b)

شکل ۷.۵

موجود در نقاشی به این صورت که توسط نقطهٔ تقاطع پارچه‌ای توری و خط از چشم به شیء مشخص شده باشند، بود.

دومین استفاده از هندسه در به دست دادن توهم عمق در نقاشی پرسپکتیو خطی[3] نام دارد. این مفهوم شامل این اصل که خطوط موازی چون توسط ناظر دریافت شوند متقارب به نظر می‌رسند، است، و فی‌المثل ریل‌های راه آهن ملاقی در خط افق به چشم می‌خورند. نقاشان این معنی را با متقارب قراردادن خطوط متوازی (در صحنهٔ واقعی) در یک یا بیشتر از یک نقطهٔ محو[4] به کار می‌برند. یکی از مثال های مشهور نقاشی با نقطهٔ محو آخرین شام[5]* اثر لئوناردو داوینچی، نشان داده شده در شکل ۷.۴، است.

3. Linear Perspective 4. Vanishing point 5. The last supper

* شام آخر

شکل‌های a ۷.۵ و b ۷.۵ طرح‌هایی، که در آن‌ها نقطهٔ محو در مرکز نیست، را نشان می‌دهد. بیننده باید بتواند در هر حالت این نقطه را مشخص کند. دیگر مفاهیم مربوط به نقاط محو در بخش ۷.۷ یافت می‌شوند.

تعریف. مجموعه‌های نقاط واقع بر دو خط، پرسپکتیو[6] ند اگر ازواج نقاط متناظر آن ها با نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آنها بر یک استقامت قرار داشته باشند. تناظر بین مجموعه‌های نقاط مزبور بوش پرسپکتیوی[7] است.نقطهٔ ثابت مزبور را مرکز بوش پرسپکتیوی[8] می‌نامند. مجموعه‌های نقاط واقع بر دو خط مزبور ردیف‌های[9] نقاط و مجموعهٔ خطوط گذرنده از نقطهٔ ثابت مورد بحث دستهٔ[10] خطوط نامیده می‌شود.

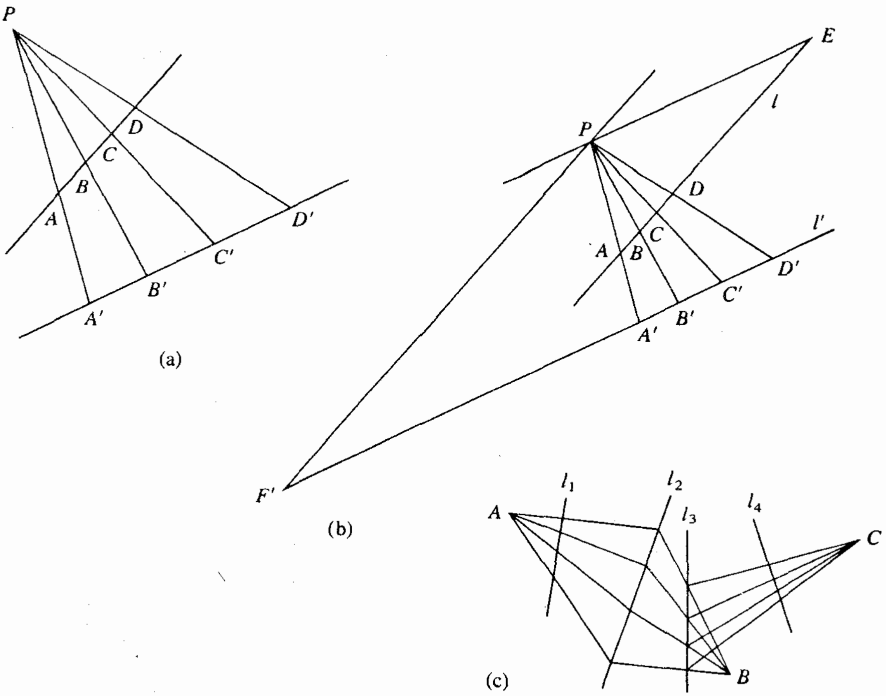
مثالی از بوش پرسپکتیوی را در شکل a ۷.۶ نشان داده‌ایم. علامت بوش پرسپکتیوی مذکور $ABCD \overset{P}{\barwedge} A'B'C'D'$ است. این علامت نشان می‌دهد که P مرکز بوش پرسپکتیوی و A، A' ؛ B، B' ؛ C، C' ؛ D ، D' ازواج نقاط متناظراند.
ممکن است ملاحظه کرده باشید که در شکل a ۷.۶ استثنائاتی چنان موجوداند که در آن ها تناظر یک به یک نقاط واقع بر دو خط مزبور موجود نیست. شکل b ۷.۶ را ملاحظه کنید. اگر $\overleftrightarrow{PE}$ موازی l' باشد، در این صورت نقطهٔ متناظر E' ی بر l' وجود نخواهد داشت. اگر $\overleftrightarrow{PF'}$ موازی l باشد، نقطهٔ متناظری بر l موجود نخواهد بود. این استثنائات نیاز به استفاده از خطی را در هندسهٔ تصویری نشان می‌دهد که با خط اقلیدسی معمولی یکی نیست.
شکل c ۷.۶ چند بوش پرسپکتیوی را در یک رسم نشان می‌دهد. نقاط واقع بر l_1 و l_2 ، به مرکزبوش پرسپکتیوی A، پرسپکتیوند. نقاط واقع بر l_2 و l_3، به مرکز بوش پرسپکتیوی B، پرسپکتیومی‌باشند، و نقاط واقع بر l_3 و l_4، به مرکز بوش پرسپکتیوی C، پرسپکتیوند. نقاط واقع بر l_1 و l_4 پرسپکتیو نیستند، و در عوض تصویری تعریف می‌شوند. از این نظرگاه، بوش تصویری سلسله‌ای از بوش های پرسپکتیوی درنظر گرفته می‌شوند.

تعریف. بوش تصویری حاصل ضرب دنبالهٔ متناهی ای از بوش‌های پرسپکتیوی است.

در هندسهٔ تصویری، خواص لایتغیر بوش های تصویری مورد بررسی قرار می‌گیرد،

---

6. Perspective
7. Perspectivity
8. Center of Perspectivity
9. Ranges
10. Pencil



شکل ۷.۶

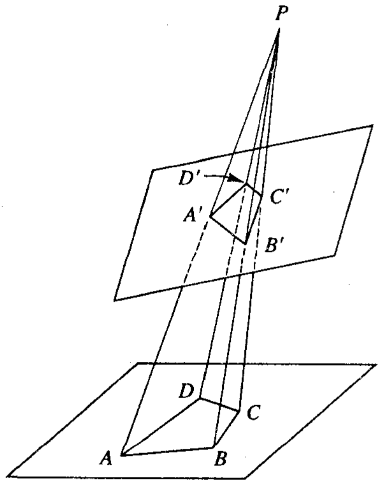
و در حالی که روشن نیست که کدام خاصیت ممکن است محفوظ بماند، باید آشکار باشد که تناظری یک به یک موجود است و گرچه ممکن است فواصل و فواصل نسبی تغییر کنند نقاط واقع بر یک استقامت بر یک استقامت باقی می‌مانند.

مفهوم بوش پرسپکتیوی را می‌توان به فضای سه بعدی نیز گسترش داد.

تعریف. مجموعه‌های نقاط واقع بر دو صفحه پرسپکتیوند اگر ازواج نقاط متناظرآنها با نقطهٔ ثابتی غیرواقع بر آن‌ها واقع بر یک استقامت باشند. نقطهٔ ثابت مزبور را مرکز بوش پرسپکتیوی می‌نامند.

شکل ۷.۷ یک بوش پرسپکتیوی شامل چند ضلعی ها را نشان می‌دهد.

بحث شهودی مزبور چندین مفهوم اساسی هندسهٔ تصویری را معرفی کرده است. اولین کتاب واقعی در مورد هندسهٔ تصویری، گرچه از مفاهیم قبلاً مطرح شده به بار آمده بود، *Traité des Propriétés des Figures*



شکل ۷.۷

در سال ۱۸۲۲ توسط جی.وی. پونسله[11] (۱۸۶۷ - ۱۷۸۸) به طبع رسید. اغلب کارهای این کتاب هنگامی که پونسله، بعد از جنگ های ناپلئون، در روسیه زندانی بود، انجام گرفته بود. پیشرفت های دیگر هندسهٔ تصویری طی قرن نوزدهم انجام گرفت. کارل فون اشتات[12] (۱۸۶۷ - ۱۷۹۸) در کتابش به‌نام Geometric der lage نشان داد که چگونه می‌توان هندسهٔ تصویری بدون استفاده از هیچ مبنای طولی درمورد اندازه مطرح کرد. فلیکس کلاین[13] در برنامهٔ ارلانگر[14] ۱۸۷۲ به هندسهٔ تصویری مرتبهٔ ممتازی راکه سزاوارش بود داد. برنامهٔ ارلانگر نامی است که به نطق افتتاحیهٔ کلاین هنگام منصوب شدنش به ریاست دانشگاه ارلانگن[15]، و به برنامهٔ مطالعهٔ هندسی از آن دفاع شده در آن نطق، داده شده است. از آن زمان به‌بعد طرح‌های اصل موضوعی هندسهٔ تصویری نوشته، و هندسه‌های تصویری متناهی معرفی شده است.

11. J. V. Poncelet
12. Karl Von Staudt
13. Felix Klein
14. Erlanger
15. Erlangen

تمرینات ۷.۱

۱. در شکل ۷.۱، معادلهٔ رابط طول‌های $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ را بنویسید.

در تمرینات ۲ و ۳، محل نقطهٔ محو شکل های مربوطه را مشخص کنید:

۲. شکل ۷.۵ a ۳. شکل ۷.۵ b

۴. آیا، در حالت کلی، حاصل ضرب دو بوش پرسپکتیوی، بوشی پرسپکتیوی است؟

۵. طرح تقریبی جاده‌ای، با دسته‌های تیرهای چراغ برق در دو طرف آن را بکشید. خطوط جادهٔ تصویر را در نقطه‌ای در افق متقارب کنید.

در تمرینات ۶-۱۶، بیان کنید که کدام یک از خواص داده شده‌ای که در هندسهٔ اقلیدسی لایتغیر است، در هندسهٔ تصویری نیز لایتغیر به نظر می‌رسد؟

۶. اندازه‌های زوایا

۷. واقع بر یک استقامت بودن

۸. اندازه‌های سطح

۹. نسبت های فواصل

۱۰. خاصیت دایره بودن

۱۱. خاصیت مربع بودن

۱۲. خاصیت مثلث بودن

۱۳. خاصیت مستطیل بودن

۱۴. خاصیت متوازی الاضلاع بودن

۱۵. خاصیت سه نقطهٔ رئوس مثلث متساوی الاضلاع بودن

۱۶. خاصیت یک نقطه وسط قطعه خط مشخص شده با دو نقطهٔ دیگر بودن

۱۷. رسمی مشابه شکل ۷.۶ بکشید که در آن چندین بوش پرسپکتیوی منتج به نقاطی واقع بر یک خط به نقاطی واقع بر همان خط (اما نه همان نقاط) تصویر شده باشند.

۱۸. رسمی مشابه شکل ۷.۷ بکشید که در آن مربعی به یک چهار ضلعی نامربع تصویر شده باشد.

۱۹I. در یکی از کتب تاریخ ریاضیات مطالب بیشتری راجع به تاریخ هندسهٔ تصویری

بخوانید.

۲۰I. تحقیق بیشتری در این مورد که چگونه نقاشان معروف رنسانس بوش پرسپکتیوی را در نقاشی های خود به کار می‌بردند به عمل آورید. بعضی از نقاشی های این دوره را برای یافتن نقاط محو بررسی کنید.

۷.۲ مبنای اصل موضوعی هندسهٔ تصویری

مبنای اصل موضوعی هندسهٔ تصویری از مبنای اصل موضوعی هندسهٔ اقلیدسی ساده‌تر است. مجموعهٔ آکسیوم های زیر (که پنج مورد اول آن با تعدیلی از مجموعه‌ای ظاهر در "*Projective Geometry*" اثر "Coxeter" اند) بر اساس عبارات تعریف نشدهٔ نقطه، خط، و تلاقی[16] بنا شده است. مفهوم شهودی تلاقی* به طور ساده همان معنی «واقع بودن بر» یا «شامل بودن» است. فی‌المثل، آکسیوم ۱ به این معنی است که هر دو نقطهٔ متمایز درست بر یک خط واقع‌اند، و آکسیوم ۲ به این معنی که هر دو خط حداقل یک نقطه واقع بر هر دوشان دارند. عبارات جدید به کار رفته در آکسیوم ۴ را بعد از صورت آکسیوم ها توضیح می‌دهیم.

آکسیوم های هندسهٔ تصویری

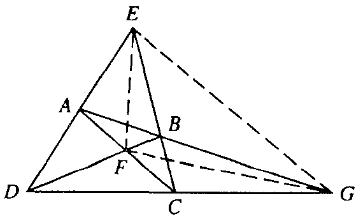
۱. هر دونقطهٔ متمایز دقیقاً با یک خط ملاقی[17] اند.
۲. هر دو خط هم صفحه حداقل در یک نقطه ملاقی اند.
۳. چهار نقطه موجودند که هیچ سه‌ای از آن ها واقع بر یک استقامت نیستند.
۴. سه نقطهٔ قطری چهارگوشه‌ای کامل نمی‌توانند واقع بر یک استقامت باشند.
۵. اگر بوش تصویری‌ای سه نقطهٔ متمایز واقع بر خطی را لایتغیر بگذارد، هرنقطهٔ واقع بر آن خط را لایتغیر می‌گذارد.
۶. جمیع نقاط هم صفحه نیستند.
۷. هر دو صفحهٔ متمایز حداقل دو نقطهٔ مشترک دارند.

صفحه را می‌توان با استفاده از سه عبارت تعریف نشدهٔ فوق تعریف کرد، به این

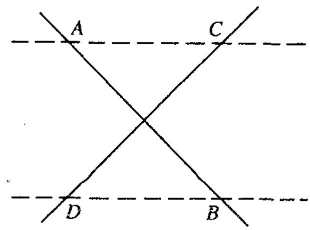
---

* برخورد

16. Incidence
17. Incident



شکل ۷.۸



شکل ۷.۹

ترتیب که، اگر نقطهٔ P و خط p ملاقی نباشند، در این صورت صفحهٔ ملاقی با نقطه و خط مذکور شامل جمیع نقاط ملاقی با خطوط واصل P به نقاط p، و جمیع خطوط ملاقی با ازواج نقاط متمایز به این طریق انتخاب شده است.

تعریف. چهارگوشه‌ای کامل[18] مجموعه‌ای از چهار نقطهٔ (رأس) در یک صفحه، هر سه نقطه شان غیر واقع بر یک استقامت، و خطوط واصل دو به دوی این رئوس است.

در شکل ۷.۸ چهارگوشه‌ای کاملی را نشان داده‌ایم. چهارگوشه‌ای کامل ABCD دارای سه زوج ضلع مقابل $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ ، و $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ است. اضلاع مقابل آن متقاطع‌اند. اضلاع مقابل دو خط اند، که یکی از آن دو با دو رأس و دیگری با رئوس باقی ماندهٔ چهار زاویه‌ای کامل معین می‌شود. فی‌المثل، رئوس A و C یک ضلع را مشخص می‌کنند، و بنابراین ضلع مقابل آن خط تعیین شده با دو رأس باقی ماندهٔ B و D است.

اضلاع مقابل چهارگوشه‌ای کامل دو به دو در سه نقطه غیر از رئوس (نقاط E، F، Gی شکل ۷.۸) تلاقی می‌کنند. این سه نقطه، چنان که در آکسیوم ۴ به کار رفته، نقاط قطری[19] چهار گوشه‌ای کامل نامیده می‌شوند. خطوط خط چین شکل ۷.۸ اضلاع سه گوشه‌ای قطری[20]، که رئوسش نقاط قطری است، می‌باشند.

بسیاری از آکسیوم های هندسهٔ تصویری همانند آکسیوم های هندسهٔ اقلیدسی به نظر می‌آیند، و این صحیح است. اما، آن آکسیوم که همانند نیست، و عهده‌دار دادن سازمان ویژهٔ هندسهٔ تصویری به آن است، آکسیوم ۲ است. مفهوم این آکسیوم را در شکل ۷.۹ به تصویر کشیده‌ایم.

---

18. Complete Quadrangle

19. Diagonal Points

20. Diagonal Triangle

در این شکل، $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ نقطهٔ تقاطع آشکاری دارند، اما $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{DB}$ نقطهٔ تقاطع نشان داده شده‌ای ندارند، و موازی به نظر می‌رسند. اما، نتیجهٔ آکسیوم مذکور این است که هر دو خط صفحه حتی خطوطی چون $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{DB}$، در نقطه‌ای تلاقی می‌کنند. و به عبارت دیگر، خطوط موازی در هندسهٔ تصویر وجود ندارد.

در هندسهٔ اقلیدسی، هر نقطهٔ صفحهٔ اقلیدسی نقطه‌ای معمولی است، و دو خط موازی نقطهٔ مشترک ندارند. اما، در صفحهٔ اقلیدسی گسترش یافته، گفته می‌شود که خطوط موازی در نقاط انگاری تلاقی می‌کنند. گفتن این که دو خط در نقطهٔ انگاری ای در صفحهٔ اقلیدسی گسترش یافته تلاقی می‌کنند درست طریق دیگر گفتن این است که خطوط مزبور در صفحهٔ معمولی موازی‌اند. صفحهٔ اقلیدسی گسترش یافته‌مان شامل اجتماع نقاط معمولی و انگاری در آن صفحه است. معرفی نقاط انگاری فوق، استثنائات مقرر در بوش پرسپکتیوی شکل ۷.۶b را حذف می‌کند. اکنون می‌توانیم بگوییم که نقاط متناظر E و F′ انگاری اند، و بین مجموعه‌های نقاط واقع بر این دو خط تناظری یک به یک برقرار است.

در صفحات و فضاهای هندسهٔ تصویری، نقاط انگاری ذات مخصوص خود را از دست می‌دهند، و توازی نمی‌تواند موجودیت یابد. می‌توان هندسهٔ تصویری را استخراج شده از هندسهٔ صفحهٔ اقلیدسی گسترش یافته با حذف هرگونه تمایز بین نقاط حقیقی و انگاری به نظر آورد. نقاط A، B، C، در شکل ۷.۶، می‌توانند به همان سادگی نقاط حقیقی نقاط انگاری باشند. در شکل ۷.۸، اضلاع مقابل می‌توانند در نقاط انگاری یا نقاط حقیقی متقاطع شوند. توازی دیگر وجود ندارد، و هندسهٔ تصویری به صورت هندسه‌ای عمومی، با هندسهٔ معمولی به صورت حالت بسیار خاصی از آن، ظاهر می‌شود.

گرچه بررسی هندسهٔ تصویری را می‌توان از لحاظ شهودی با گسترش صفحهٔ اقلیدسی مطرح کرد، طرح ریاضی متداول آن دقیقاً برخلاف این است. در این طرح، اگر کار را با صفحهٔ تصویری عمومی آغاز کنیم، در این صورت می‌توانیم به فکر مخصوص گردانیدن یک خط ـ خط شامل جمیع نقاط انگاری (نقاط در بی نهایت یا تقاطعات خطوط موازی) ـ بیفتیم. اگر این خط از صفحهٔ تصویری حذف شود هندسهٔ حاصل آفین[21]، عبارتی که اولین بار توسط اولر حدود ۱۷۵۰ به کار رفت، نامیده می‌شود. تبدیلات هندسهٔ آفینی زیر گروه حقیقی‌ای از گروه جمیع تبدیلات تصویری تشکیل می‌دهد. گروه تبدیلات آفینی گروه تشابهات و گروه حرکات را به عنوان زیر گروههای حقیقی خود داراست. به این ترتیب، هندسهٔ آفین هندسه‌ای است که می‌تواند به عنوان هندسهٔ بین اقلیدسی و تصویری به این مفهوم

---

21. Affine

که عمومی‌تر از هندسهٔ اقلیدسی است، و با این همه تنها زیر هندسهٔ هندسهٔ عمومی تر تصویری است، در نظر گرفته شود.

تمرینات ۷.۲

۱. حداقل یک دلیل به دست دهید که چرا باید انتظار داشت که اساس اصل موضوعی هندسهٔ تصویری از مورد هندسهٔ اقلیدسی ساده‌تر باشد.

۲. کدام یک از پنج آکسیوم اول هندسهٔ تصویری آکسیوم‌های هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی معمولی نیز هست؟

در تمرینات ۳ـ۹، کدام یک از آکسیوم‌های هندسهٔ تصویری آکسیوم هندسهٔ متناهی مذکور نیز هست؟

۳. هندسهٔ سه نقطه و سه خط

۴. هندسهٔ چهار نقطه

۵. هندسهٔ چهار خط

۶. هندسهٔ فانو

۷. هندسهٔ پاپوس

۸. هندسهٔ دزارگ

۹. هندسهٔ یانگ

۱۰. ثابت کنید که، در هندسهٔ تصویری، دو خط متمایز نمی‌توانند بیش از یک نقطهٔ مشترک داشته باشند.

در تمرینات ۱۱ و ۱۲، مجموعهٔ نقاط نشان داده شده در شکل ۷.۸ را به کار برید.

۱۱. اگر AEGC چهارگوشه‌ای کامل مبنا در نظر گرفته شود، چند نقطهٔ قطری آن با حرف مشخص شده است؟

۱۲. اگر AEBF چهارگوشه‌ای کامل مبنا در نظر گرفته شود، چند نقطهٔ قطری آن با حرف مشخص شده است؟

۱۳. فرض می‌کنیم چهار رأس چهارگوشه‌ای کاملی رئوس متوازی الاضلاعی در هندسهٔ

اقلیدسی باشد. این موضوع می‌تواند چه تأثیری بر نقاط قطری داشته باشد؟
۱۴. آیا یک مثلث می‌تواند مثلث قطری بیش از یک چهارگوشه‌ای کامل باشد؟ در تأیید پاسخ‌تان رسمی بکشید.

در مسائل ۱۵-۱۹، از آکسیوم‌های هندسهٔ تصویری استفاده کنید.

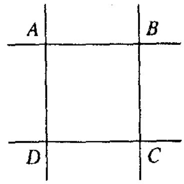
۱۵. ثابت کنید که در مورد یک خط مفروض، نقطه‌ای نه واقع بر آن موجود است.
۱۶. ثابت کنید که هر نقطه حداقل بر سه خط واقع است.
۱۷. ثابت کنید چهار خط هم صفحه که هیچ سه تایی از آن ها متقارب نیستند موجود است.
۱۸. وجود مثلث قطری را در مورد چهارگوشه‌ای مفروضی ثابت کنید.
۱۹. ثابت کنید که یک بوش پرسپکتیوی تناظری یک به یک بین نقاط دو خط ایجاد می‌کند.
۲۰I. نتایج آکسیوم های هندسهٔ تصویری را برحسب کمترین تعداد نقاطی که باید بر هر خط تصویری قرار گیرد بررسی کنید.
۲۱I. مجموعهٔ آکسیوم هایی برای هندسهٔ آفینی بیابید، و هندسهٔ مزبور را هم با هندسهٔ اقلیدسی هم با هندسهٔ تصویری مقایسه کنید.

۷.۳ تثنیه و نتایجی چند

مفهوم تثنیه، ایده‌ای اساسی در هندسهٔ تصویری، در هندسهٔ اقلیدسی آشکار نمی‌شود. در هندسهٔ اقلیدسی، دو نقطه همواره دقیقاً یک خط را مشخص می‌کنند، اما دو خط واقع در یک صفحه همواره یک نقطه را مشخص نمی‌کنند (چه ممکن است موازی باشند). از طرف دیگر، در هندسهٔ تصویری، این استثنا حذف شده است. مقایسهٔ گزاره‌های «دو نقطه خطی را مشخص می‌کنند» و «دو خط نقطه‌ای را مشخص می‌کنند» نسبت به یک صفحه، نشان می‌دهد که یکی را می‌توان، با تبدیل کلمات نقطه و خط به یکدیگر، به دیگری تبدیل کرد. این موضوع مثالی از ثنویت سطحی*[22] است. در مورد مجموعه‌های نقاط صفحهٔ تصویری (صفحهٔ هندسهٔ تصویری) اگر هنگامی که کلمات نقطه و خط به هم تبدیل می‌شوند ازواج کلمات معین دیگری، چون واقع بر یک استقامت و متقارب مطابق آن ها نیز با هم عوض شوند، هر گزاره راست باقی

22. Plane Duality

* صفحه‌ای



شکل ۷.۱۰

می‌ماند. به عنوان مثال، تثنیهٔ سطحی عبارت «سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت» ، «سه خط متقارب» است.

مجموعهٔ آکسیوم های سطحی هندسهٔ تصویری دارای تثنیه های سطحی ای هستند که آکسیوم یا قضیه‌اند. آکسیوم های ۱ و ۲ شامل مفاهیم تثنیه‌ای اند. تثنیهٔ سطحی آکسیوم ۳ قضیه‌ای است که می تواند اثبات شود.

قضیهٔ ۷.۱. چهار خط موجودند که هیچ سه تایی از آن ها متقارب نیستند.

اثبات: فرض می‌کنیم A ، B ، C ، و D در شکل ۷.۱۰ چهار نقطه که هیچ تایی از آن ها بریک استقامت نیستند، باشد. بنا به آکسیوم ۱، این چهار نقطه چهار خط $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ ، و $\overleftrightarrow{BC}$ را مشخص می‌کنند. هیچ سه خطی از این خطوط نمی تواند بدون نقض آکسیوم های ۱ یا ۲ متقارب باشد.

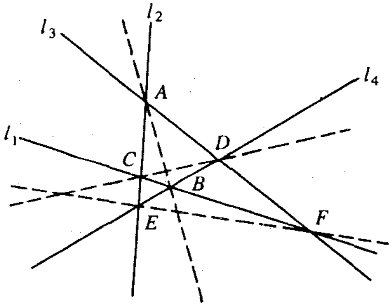
آکسیوم های ۳ و ۴ نیز شامل مفاهیم تثنیه‌ای اند. تثنیهٔ سطحی آکسیوم ۴ اصطلاحی را معرفی می‌کند که باید مورد توضیح قرار گیرد.

تعریف. چهار ضلعی کامل[23] مجموعه‌ای از چهار خط، هر سه خط شان غیر متقارب، و نقاط تقاطع دو به دوی این خطوط است (شکل ۶.۱۱ را ملاحظه کنید).

تثنیهٔ آکسیوم ۴ بر این است که سه خط قطری چهار ضلعی کامل هیچ گاه متقارب نمی‌شوند. تعریف چهار ضلعی کامل با در نظر گرفتن تثنیهٔ سطحی تعریف چهار گوشه‌ای کامل نوشته شد.

---

23. Complete Quadrilateral



شکل ۷.۱۱

خواص چهار ضلعی کامل را می‌توان به عنوان تثنیهٔ سطحی خواص متناظر چهار گوشه‌ای کامل مورد بررسی قرار داد. شش نقطهٔ تقاطع چهار خط مفروض در سه مجموعهٔ رئوس مقابل قرار دارند. در شکل ۷.۱۱، A و B رئوس مقابل اند، چنان‌که C و D و E و F چنین اند. خطوط واصل رئوس مقابل خطوط قطری‌اند، و شکل حاصل از سه خط قطری سه ضلعی قطری[۲۴] است. در هندسهٔ تصویری، رسم است که از مثلث، از آن‌جاکه هم شامل رئوس هم شامل اضلاع است، به عنوان خود ـ تثنیه صحبت کنیم و هم در مورد چهارگوشه‌ای کامل هم در مورد چهار ضلعی کامل مثلث قطری به‌کار بریم.

تثنیهٔ آکسیوم ۴ مستلزم این است که خطوط خط چین شکل ۷.۱۱ نمی‌توانند متقارب باشند. این موضوع را می‌توان، از آن جاکه اگر این خطوط متقارب باشند، در این صورت سه نقطهٔ قطری چهارگوشه‌ای ABCD، مناقض با آکسیوم ۴، واقع بر یک استقامت می‌شوند، به سادگی ملاحظه کرد.

سرانجام، تثنیهٔ آکسیوم ۵ مقرر می‌کند که اگر بوش تصویری ای هر سه خط متمایز واقع بر یک نقطه‌ای را لایتغیر بگذارد، هر خط واقع بر آن نقطه را لایتغیر می‌گذارد. اثبات این که تثنیهٔ مذکور گزاره‌ای راست است (تمرینات ۷.۳ را ملاحظه کنید) منجر به تکمیل این استدلال، که جمیع تثنیه های آکسیوم های هندسهٔ تصویری راست‌اند و مفهوم ثنویت سطحی را می‌توان آزادانه به‌کار برد، می‌شود. در این مورد فرض بر این است که تثنیهٔ سطحی یک تعریف یا قضیهٔ اثبات شده تعریف یا قضیهٔ دیگری است که اثبات آن بدون انجام کار بیشتری تأیید شده است.

به خاطر بیاورید که مفهوم ثنویت سطحی کاربرد مهمی در کمک به طبقه بندی کردن

---

24. Diagonal Trilateral

هندسه‌های متناهی گوناگون دارد. در فصل ۱، آکسیوم های هندسه‌های چهار نقطه‌ای و چهار خطی تثنیه های سطحی یکدیگرند. هندسه‌های تصویری متناهی PG (n,q) ی فانو خود ـ تثنیه‌اند، که بدین معنی است که در مورد آن ها، چون در مورد هندسهٔ تصویری فصل ۷، تثنیهٔ سطحی هر گزارهٔ راست گزاره‌ای راست در آن هندسه است.

مفهوم ثنویت فضایی بر تبدیل به هم کلمات نقطه و صفحه، همراه با کلمهٔ خود ـ تثنیه در فضای خط بنا شده است. در گزاره های زیر، گزارهٔ دوم تثنیهٔ فضایی گزارهٔ اول را به دست می دهد.

هر دو صفحهٔ متمایز حداقل دو نقطهٔ مشترک دارند.

تثنیهٔ فضایی: هر دو نقطهٔ متمایز حداقل دو صفحهٔ مشترک دارند.

یکی از موارد استعمال بسیار اساسی، و با این همه نه غیر مهم، مفهوم تثنیهٔ سطحی در **اثبات قضیهٔ دزارگ و عکس آن آمده است. به خاطر بیاورید که بااین قضیه برای اولین بار دریکی از هندسه‌های متناهی فصل ۱ مواجه شدیم.**

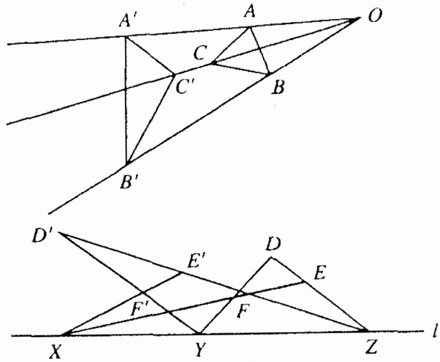
قضیهٔ مذکور به نام ریاضیدان فرانسوی ژرارد دزارگ (۱۶۶۲ ـ ۱۵۹۳)، که گسترش هندسهٔ تصویری را سال های بسیاری پیش از گسترش واقعی آن پیش بینی کرد، نامیده شده است. مقالهٔ ۱۶۳۹ راجع به مقاطع مخروطی اش، یکی از مقاله های کلاسیک گسترش اولیهٔ هندسهٔ تصویری ترکیبی، برای دو قرن مورد غفلت قرار گرفت. تعریف دزارگ از مثلث‌های پرسپکتیو از یک نقطه و خط با شکل ۷.۱۲ روشن شده است. دو مثلث چون ABC و A′B′C′ از نقطهٔ O پرسپکتیوند، زیرا رئوس متناظرشان با O واقع بر یک استقامت‌اند. دو **مثلث چون DEF و D′E′F′ از خط l پرسپکتیوند، زیرا اضلاع متناظرشان در نقاط x، y و z واقع برخط l تلاقی می‌کنند.**

قضیهٔ ۷.۲ . قضیهٔ دزارگ. اگر دو مثلث از نقطه‌ای پرسپکتیو باشند، از خطی پرسپکتیو اند.

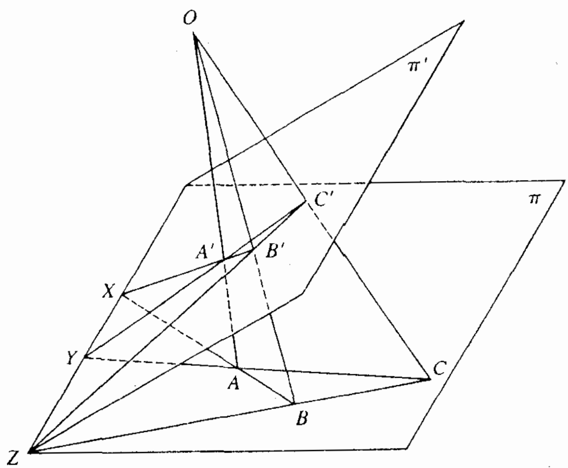
اثبات قضیهٔ دزارگ، برخلاف غالب قضایای هندسه، در مورد دو مثلث واقع در صفحات متفاوت آسان‌تر از مورد دو مثلث در یک صفحه انجام می‌گیرد.

اثبات:

a. فرض می‌کنیم، چون در شکل ۷.۱۳، دو مثلث مفروض در صفحات متفاوت باشند، از آن جاکه O، B′، C′، B، C در یک صفحه قرار دارند، $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{B'C'}$



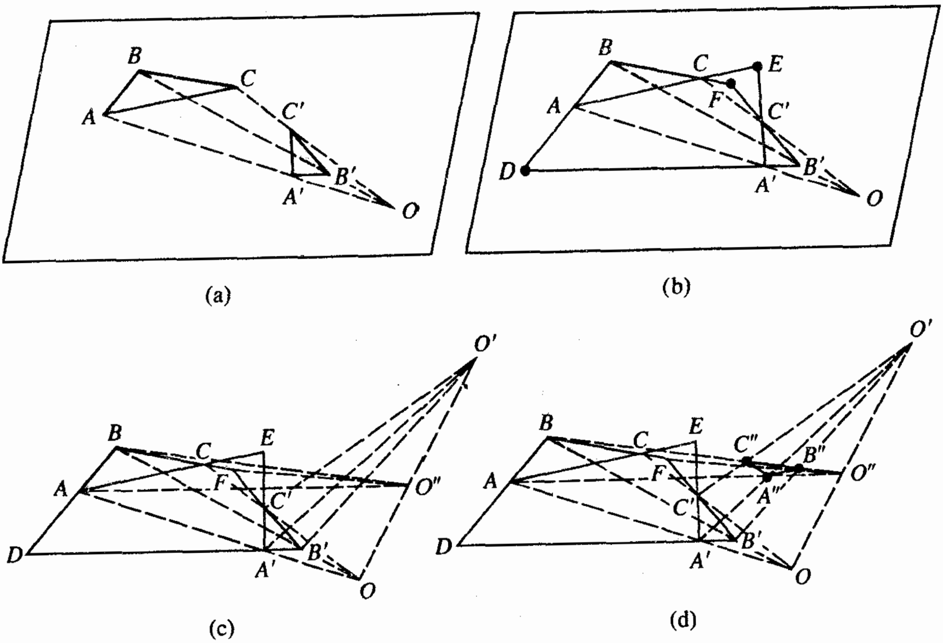
شکل ۷.۱۲



شکل ۷.۱۳

باید تلاقی کنند، و این نقطه باید نقطهٔ Z ی واقع بر فصل مشترک دو صفحهٔ π و π' باشد. به همین ترتیب، O ، A' ، C' ، A ، C صفحه‌ای را مشخص می‌کنند، و $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{A'C'}$ در نقطهٔ Y ی واقع بر فصل مشترک π و π' ملاقی می‌شوند. خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{A'B'}$ نیز به همین ترتیب باید بر همین فصل مشترک π و π' ملاقی باشند، بنابراین ΔABC و $\Delta A'B'C'$ از یک خط پرسپکتیوند.

b. فرض می‌کنیم که دو مثلث مفروض در یک صفحه‌اند. در این صورت فرض می‌کنیم ABC و $A'B'C'$، چنان‌که در شکل ۷.۱۴ a، دو مثلث هم صفحهٔ دلخواه پرسپکتیو از نقطهٔ O باشند، و D ، E ، F نقاط تقاطع ازواج اضلاع متناظر باشند (شکل ۷.۱۴ b). در این صورت نیاز به نشان دادن این داریم که سه نقطهٔ مذکور واقع بر یک استقامت‌اند.



شکل ۷.۱۴

فرض می‌کنیم O' و O'' دو نقطهٔ دلخواه واقع در یک استقامت با O، اما نه در صفحهٔ مثلث‌های مفروض باشند (شکل ۷.۱۴c). O' و رئوس مثلث $A'B'C'$ و O'' و رئوس مثلث ABC را وصل می‌کنیم. از آن جا که خطوط $O'O$ و OA صفحه‌ای را مشخص می‌کنند، AO'' و $O'A'$ در این صفحه واقع می‌شوند و باید در نقطهٔ A'' ی تلاقی کنند. به همین ترتیب، $O''B$ و $O'B'$ در B'' و $O''C$ و $O'C'$ در C'' تلاقی می‌کنند. مثلث های ABC و $A''B''C''$ در صفحات متفاوت و پرسپکتیو از O'' اند، و بنا به قضیهٔ دزارگ در مورد مثلث‌های ناهم صفحه، از فصل مشترک دو صفحه شان پرسپکتیوند. نیز، مثلث های $A'B'C'$ و $A''B''C''$ ناهم صفحه و از O' پرسپکتیوند، لذا آن ها نیز از همین فصل مشترک پرسپکتیو می‌باشند. نتیجهٔ این بحث این است که $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{A'B'}$ در نقطه‌ای واقع بر فصل مشترک صفحهٔ شامل مثلث‌های مفروض و صفحهٔ مثلث $A''B''C''$ تلاقی می‌کنند. به همین ترتیب، $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{B'C'}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{A'C'}$ برهمین خط تلاقی می‌کنند ودومثلث مفروض ازاین خط، یعنی $\overleftrightarrow{DE}$ ، پرسپکتیوند.

از اصل ثنویت سطحی، تثنیهٔ سطحی قضیهٔ دزارگ نیز برقرار می‌شود.

قضیهٔ ۷.۳. اگر دو مثلث از خطی پرسپکتیو باشند، از نقطه‌ای پرسپکتیوند.

تثنیهٔ سطحی قضیهٔ دزارگ عکس آن نیز هست. این موضوع معمول نیست، اما منحصر به فرد نیز نیست.

در مورد شکل ۷.۱۴ چندین ملاحظهٔ دیگر باید مطرح شود. مجموعهٔ نقاط و خطوط صفحهٔ دو مثلث مفروض به ترکیب دزارگ[25] موسوم است. این ترکیب شامل ده نقطه با سه خط بر هر نقطه و ده خط با سه نقطه بر هر خط است. توجه داشته باشید که ترکیب مذکور قبلاً به عنوان اساس هندسهٔ متناهی دزارگ در فصل ۱ به کاررفته است. این ترکیب مثالی از یک هندسهٔ تصویری متناهی است. در ترکیب دزارگ مذکور نه تنها یک زوج بلکه ده زوج مثلث پرسپکتیو، هر پرسپکتیو از نقطه و خطی متفاوت وجود دارد.

تمرینات ۷.۳

۱. چهار ضلعی کامل چند زوج رأس مقابل دارد؟
۲. چهار گوشه‌ای کامل چند نقطهٔ قطری دارد؟

تثنیهٔ سطحی هر گزاره را بنویسید.

۳. اگر a و b خطوط متمایزی از یک صفحه باشند، حداقل یک نقطه واقع بر هر دو خط موجود است.
۴. بر یک نقطه حداقل چهار خط واقع است.
۵. سه زاویه‌ای (مثلث) شامل سه نقطهٔ غیر واقع بر یک استقامت و خطوط واصل دو به دو آن‌هاست.
۶. سه خط قطری چهار ضلعی کامل نمی‌توانند متقارب باشند.

تثنیهٔ فضایی هر یک از سه گزارهٔ بعد را بنویسید.

۷. سه صفحهٔ نه بر یک خط نقطه‌ای را مشخص می‌کنند.
۸. یک صفحه با دو خط متقاطع مشخص می‌شود.
۹. نقطه و خط واقع در یک صفحه ممکن است ملاقی نباشند.
۱۰. توضیح دهید که چرا کلمهٔ خط خود ـ تثنیه در فضاست.
۱۱. تثنیهٔ سطحی آکسیوم ۵ را اثبات کنید.

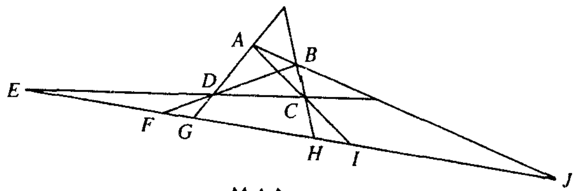
---

25. Desargues's Configuration

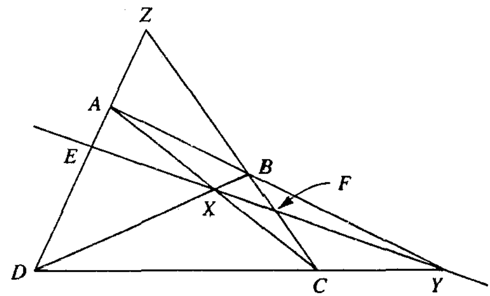
۱۲. عکس قضیهٔ دزارگ را مستقیماً، و بدون مفروض دانستن قضیهٔ اصلی یا به‌کاربردن ثنویت، در مورد مثلث های واقع در صفحات متفاوت اثبات کنید.
۱۳. شکلی رسم کنید که ترکیب دزارگ را نمایش دهد، سپس ده زوج مثلث های پرسپکتیو را، با نام بردن مرکز و محور بوش پرسپکتیوی هر زوج، مشخص کنید.
۱۴. ثابت کنید اگر سه مثلث دارای یک مرکز مشترک بوش پرسپکتیوی باشند، سه محور بوش پرسپکتیوی شان نقطه‌ای مشترک خواهند داشت.
۱۵. ثابت کنید که مثلث قطری یک چهارگوشه‌ای با هر یک از چهار مثلثی که رئوس شان سه رأس از رئوس آن چهارگوشه‌ای است پرسپکتیو است.
۱۶. در مورد دو مثلث هم صفحه که از نقطه‌ای پرسپکتیو باشند حالت بسیار خاصی است. با معلوم بودن یک مثلث، محدودیت هایی را، که باید در انتخاب هر رأس مثلث دوم برای این که دو مثلث از نقطهٔ مفروضی در آن صفحه پرسپکتیو باشند به‌کار برد، توضیح دهید.
۱۷. با معلوم بودن یک مثلث، محدودیت هایی را، که باید در انتخاب مثلث دوم هم صفحهٔ با آن به طوری که دو مثلث از خط مفروضی در آن صفحه پرسپکتیو باشند به‌کاربرد، توضیح دهید.
۱۸I. در قضیهٔ ۷.۲، آیا بـرای خط بوش پرسپکتیـوی گـذشتن از نقطهٔ بوش پرسپکتیوی امکان‌پذیراست؟
۱۹I. ثابت کنید که پاسخ‌تان در مورد تمرین ۱۸I صحیح است.
۲۰I. نمونه‌ای فیزیکی برای شکل ۷.۱۳ تهیه کنید. برای صفحات، دو ورقهٔ مقوا که دوتا از لبه‌هاشان به‌هم وصل شده باشد به‌کار ببرید. نقطهٔ O را داخل زاویهٔ حاصل از این صفحات درنظر بگیرید، و برای $\overline{CC'}$، $\overline{BB'}$ و $\overline{AA'}$ از نوارهای لاستیکی استفاده کنید.
۲۱I. در رسم تمرین ۱۳، برای نشان دادن هر یک از ده زوج مثلث های پرسپکتیو حاصل، روکش های جداگانه تهیه کنید.

۷.۴ مجموعه های توافقی

مجموعه های توافقی مجموعه های خاصی از چهار نقطه یا خط اند که از اهمیت بسیاری در هندسهٔ تصویری برخوردارند. از آن جاکه چهارگوشه‌ای کامل دارای چهار نقطه و شش خط است، خط دلخواهی از صفحهٔ آن شش ضلع آن را در شش نقطهٔ متمایز قطع می‌کند. مجموعهٔ



شکل ۷.۱۵



شکل ۷.۱٦

شش نقطهٔ مذکور، نه لزوماً همه متمایز، مجموعهٔ نقاط چهارگوشه‌ای نسب[26] نامیده می‌شود. شکل ۷.۱۵ چهارگوشه‌ای کامل ABCD و مجموعهٔ نقاط چهارگوشه‌ای نسب آن E ، F ، G ، H ، I، J را نشان می‌دهد. از قضیهٔ دزارگ می‌توان، برای نشان دادن این که هر نقطهٔ مجموعهٔ چهارگوشه‌ای نسب را می‌توان با دانستن پنج نقطهٔ دیگر آن به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، استفاده کرد. در این بحث G و H ، E و J ، F و I بر اضلاع مقابل چهارگوشه‌ای جدید واقع‌اند.

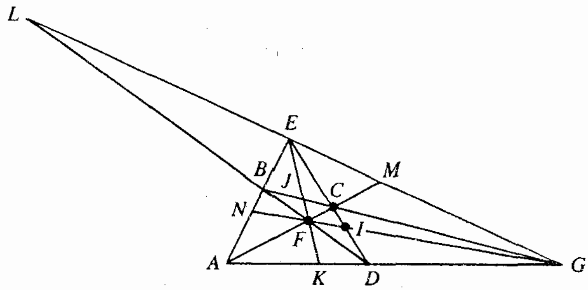
تعریف. مجموعهٔ توافقی نقاط، یا دستهٔ توافقی[27]، مجموعهٔ نقاط چهارگوشه‌ای نسبی است که شامل چهار نقطهٔ تقاطع اضلاع چهارگوشه‌ای کاملی با خط گذرنده از دو نقطهٔ قطری آن است.

شکل ۷.۱٦ مجموعهٔ توافقی نقاطی، EFXY، شامل چهار نقطهٔ تقاطع اضلاع چهارگوشه‌ای کامل ABCD با خط گذرنده از نقاط قطری x و y را نشان می‌دهد. قضیهٔ ۷.۴ نشان می‌دهد که سه نقطه از این نقاط (چون به درستی زوج بندی شوند) نقطهٔ چهارم مجموعهٔ توافقی را به طور منحصر به فردی مشخص می‌کنند.

---

26. Harmonic Range

27. Quadrangular Set of Points



شکل ۷.۱۷

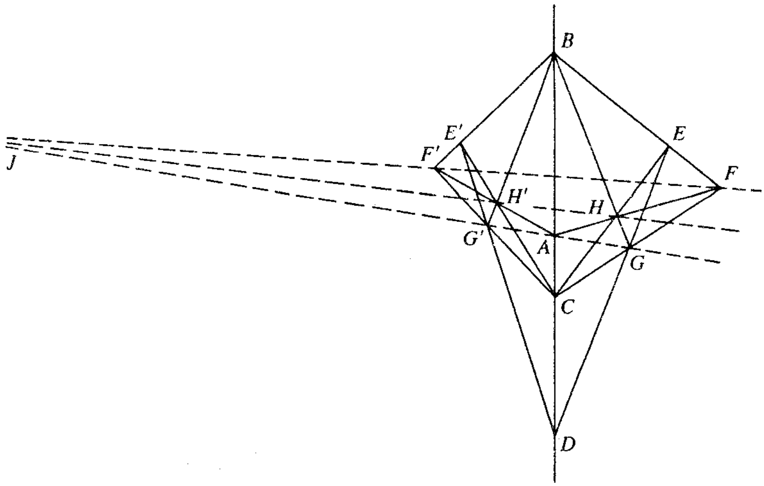
شکل ۷.۱۷ سه مجموعهٔ توافقی نقاط مشخص شده با چهارگوشه‌ای کامل ABCD رانشان می‌دهد. چهار نقطهٔ NFIG مجموعهٔ توافقی نقاط واقع بر خط گذرنده از نقاط قطری F و G اند. به همین ترتیب، چهار نقطهٔ LEMG مجموعه‌ای توافقی واقع بر خط گذرنده از نقاط قطری E و G اند، در حالی که نقاط EJFK مجموعه‌ای توافقی واقع بر خط گذرنده از نقاط قطری E و F می‌باشند. در هر حالت، دو نقطه از چهار نقطهٔ مجموعهٔ توافقی نقطهٔ قطری‌اند، و دو نقطهٔ دیگر بر اضلاع گذرنده از نقطهٔ قطری سوم قرار دارند. علامتی مخصوص مجموعه‌های توافقی بر این تمایز بین دو زوج نقطهٔ واقع در مجموعه تأکید می‌کند. فی المثل، H(FG,NI) مجموعهٔ توافقی مرکب از چهار نقطهٔ F، G و N، I را برقرار می‌دارد. در این علامت، یک زوج، FG یا NI، دو نقطهٔ قطری را مشخص می‌کند، در حالی که دو نقطهٔ دیگر نقاط تقاطع اضلاع چهارگوشه‌ای گذرنده از نقطهٔ قطری سوم اند. همین مجموعهٔ توافقی را می‌توان با H(FG,IN)، H(GF,NI)، یا H(GF,IN) نشان داد.

در علامت H(FG,NI)، N مزدوج توافقی[28] I نسبت به F و G است. هر نقطهٔ مجموعهٔ توافقی مزدوج توافقی عضو دیگر زوج خود نسبت به زوج نقاط دیگر است. از آن جا که آکسیوم ۴ مقرر می‌کند که سه نقطهٔ قطری چهارگوشه‌ای کامل واقع بر یک استقامت نیستند، باید یک نقطه و مزدوج توافقی‌اش نقاطی متمایز باشند، و بنابراین در هندسهٔ تصویری بر هر خط حداقل چهار نقطه موجود است.

موقع هر چهار نقطهٔ یک مجموعهٔ توافقی را نمی‌توان به طور مستقل مشخص کرد. در این مورد گزارهٔ استقلالی در قضیهٔ زیر به دست داده‌ایم.

قضیهٔ ۷.۴. مزدوج توافقی نقطه‌ای چون A نسبت به دو نقطهٔ مفروض دیگر B و C ی واقع بر یک استقامت با آن به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود.

28. Harmonic Conjugate

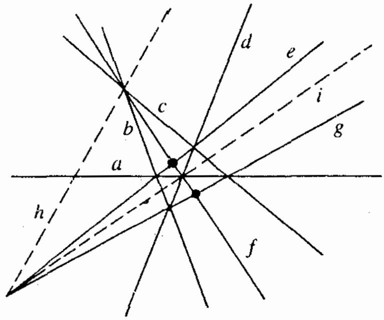


شکل ۷.۱۸

اثبات: در شکل ۷.۱۸، فرض می‌کنیم B ، A ، C سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت دلخواهی باشند. دراین صورت، D مزدوج توافقی A نسبت به B و C ، H (BC,AD)، را می‌توان با رسم چهارگوشه‌ای کامل EFGH چنان‌که B , C دو نقطهٔ قطری باشند و A و D بر خطوط گذرنده از نقطهٔ قطری سوم قرار گیرند، یافت. و این کار را با انتخاب هر نقطهٔ F ناواقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ و ربط F و نقاط A، B، C انجام داد. در این صورت می‌توان خطی از B متقاطع با $\overleftrightarrow{FA}$ در H و $\overleftrightarrow{FC}$ در G رسم کرد. فرض می‌کنیم $\overleftrightarrow{CH}$، $\overleftrightarrow{BF}$ را در E قطع کند. دراین صورت $\overleftrightarrow{EG}$، $\overleftrightarrow{AB}$ را در نقطهٔ مطلوب D قطع می‌کند.

اثبات واقعیت منحصر به فرد بودن D به‌گونه‌ای مشکل‌تر است. برای این کار، چون در شکل ۷.۱۸، فرض می‌کنیم که چهارگوشه‌ای دوم E'F'G'H' را، ابتداءً با اختیار F' به عنوان نقطه‌ای نه واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ نیز متمایز از F، مانند قبل، رسم کرده باشیم. در این صورت مطلوب نشان دادن این است که $\overleftrightarrow{E'G'}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ را در D قطع می‌کند.

مثلث های FGH و F'G'H' از خط $\overleftrightarrow{AB}$، و در نتیجه بنا به عکس قضیهٔ دزارگ از نقطهٔ J پرسپکتیوند. مثلث های FEH و F'E'H' نیز از خط $\overleftrightarrow{AB}$، و بنابراین از همان نقطهٔ J پرسپکتیو می‌باشند، بنابراین EE'J واقع بر یک استقامت‌اند، و این بدان معنی است که مثلث‌های FEG و F'E'G' از J، و بنا به قضیهٔ دزارگ، از خطی پرسپکتیوند. این خط $\overleftrightarrow{AB}$ است، و $\overleftrightarrow{EG}$ و $\overleftrightarrow{E'G'}$ باید بر نقطهٔ Dی واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ تلاقی کنند؛ به این ترتیب، مزدوج توافقی A نسبت به B و C نقطه‌ای منحصر به فرد است.



شکل ۷.۱۹

اثبات قضیهٔ ۷.۴ شامل روشی در ترسیم مزدوج توافقی نقطه‌ای نسبت به دو نقطهٔ با آن واقع بر یک استقامت مفروض دیگر است. این ساخت، چنان که در بخش ۵.۶ پیش بینی شد، تنها از خط کش نامدرج استفاده می‌کند. و خواننده باید بتواند مراحل ترسیم فوق را، برای استفاده از روش مذکور در تمرینات مربوطه، یادداشت کند.

تثنیهٔ تعریف مجموعهٔ توافقی نقاط تعریف مجموعهٔ توافقی خطوط است.

تعریف. مجموعهٔ توافقی خطوط[29]، یا اشعهٔ توافقی[30] (دستهٔ توافقی)، مجموعه‌ای از چهار خط متقارب چنان است که دو خط از آن ها خطوط قطری یک چهار ضلعی کامل‌اند و دو خط دیگر از دو رأس چهار ضلعی واقع بر سومین قطر چهار ضلعی می‌گذرند.

در شکل ۷.۱۹، فرض می‌کنیم a ، b ، c، و d اضلاع چهار ضلعی، با خطوط قطری e ، f ، g باشند. در این صورت H(eg,hi) یک مجموعهٔ خطوط توافقی است.

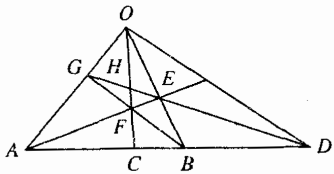
دلیل اصلی بررسی مجموعه‌های توافقی در هندسهٔ تصویری این است که در آن خاصیت مجموعهٔ توافقی بودن یکی از لایتغیرها است.

قضیهٔ ۷.۵ . خاصیت توافقی تحت بوش‌های تصویری محفوظ می‌ماند.

اثبات: بوش تصویری دنباله‌ای متناهی از بوش‌های پرسپکتیوی است، لذا کافی است که

---

29. Harmonic Set of Lines **30.** Harmonic Pencil



شکل ۷.۲۰

نشان دهیم که خاصیت توافقی در بوش پرسپکتیوی منفردی محفوظ می‌ماند. اثبات چنین بودن این مطلب شامل اثبات کردن دو گزارهٔ جداگانه است:

a. مجموعهٔ خطوط واصل هر نقطهٔ غیر واقع بر یک استقامت با چهار نقطهٔ یک مجموعهٔ توافقی نقاط به آن ها مجموعهٔ توافقی‌ای از خطوط است.

b. مجموعهٔ نقاط تقاطع چهار خط یک مجموعهٔ توافقی با هر خط ناگذرنده از نقطهٔ تقارب آن خطوط (مرکز اشعه) مجموعهٔ توافقی‌ای از نقاط است.

اما از آن جاکه دو گزارهٔ فوق تثنیهٔ سطحی‌اند، اثبات یکی از آن هاکفایت می‌کند، و در این جا گزارهٔ اول را اثبات می‌کنیم. در شکل ۷.۲۰، فرض می‌کنیم H(AB,CD) مجموعهٔ توافقی نقاط دلخواهی، با O نقطهٔ دلخواه غیر واقع بر یک استقامت با نقاط آن باشد. در این صورت نیاز به نشان دادن این داریم که $H(\overleftrightarrow{OA}$ ، $\overleftrightarrow{OB}$ ، $\overleftrightarrow{OC}$ ، $\overleftrightarrow{OD})$.وجود مجموعهٔ توافقی نقاط مذکور مستلزم وجود چهار ضلعی کامل OEFG، با دو نقطهٔ قطری A و B و نقاط واقع بر خطوط گذرنده از نقطهٔ قطری سوم C و D است. اما $\overleftrightarrow{GF}$ ، $\overleftrightarrow{AE}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ ، و $\overleftrightarrow{GE}$ چهارضلع یک چهار-ضلعی کامل‌اند. $\overleftrightarrow{AO}$ و $\overleftrightarrow{OB}$ خطوط قطری‌اند، در حالی که $\overleftrightarrow{OC}$ و $\overleftrightarrow{OD}$ خطوط گذرنده از دو رأس دیگر، F و D،که بر خط قطری سوم واقع‌اند، می‌باشند. و این مستلزم $H(\overleftrightarrow{OB}$ ،$\overleftrightarrow{OA}$ ،$\overleftrightarrow{OC}$ ،$\overleftrightarrow{OD})$ است.

علامت بوش پرسپکتیوی، $ABCD \overset{S}{\barwedge} A'B'C'D'$،مقرر می‌کند که S مرکز بوش پرسپکتیوی است و A و A' ، B و B' ، ... نقاط متناظراند. علامت $ABCD \barwedge A'B'C'D'$ ، بوش تصویری‌ای را، که در آن AA' ، BB' ، ... نقاط متناظرند، نشان می‌دهد.

سومین نوع نمایش به کاررفته در بخش بعد، بوش پرسپکتیوی مجموعه‌ای خطوط و نقاط را نشان می‌دهد. علامت $(A'B'C'\text{-}) \barwedge (\overleftrightarrow{AA'}$ ، $\overleftrightarrow{AB'}$، $\overleftrightarrow{AC'}\text{-})$ رابطه‌ای پرسپکتیوی بین مجموعهٔ نقاط -$A'B'C'$ واقع بر یک خط و مجموعهٔ خطوط گذرنده از نقطهٔ A ی ناواقع

شکل ۷.۲۱

بر آن خط را نمایش می‌دهد.

با شروع از سه نقطهٔ متمایز واقع بر یک خط، مزدوج توافقی یکی از این نقاط نسبت به دو نقطهٔ دیگر را می‌توان به طور منحصر به فردی مشخص کرد. و در مورد مجموعهٔ چهار نقطه‌ای، مجموعه های سه نقطه‌ای سایر مزدوج های توافقی را معین می‌کنند. در این صورت گفته می‌شود که، جمیع مزدوج های توافقی واقع بر یک خط با سه نقطهٔ اصلی به طور توافقی در ارتباط[31] اند.

تعریف. مجموعهٔ جمیع نقاط به طور توافقی در ارتباط با سه نقطهٔ متمایز واقع بر یک استقامت یک شبکهٔ توافقی[32] نقاط است.

شکل ۷.۲۱ تنها تعدادکمی از نقاط واقع در شبکهٔ توافقی مشخص شده با نقاط A، B، C را نشان می‌دهد. مجموعه‌های توافقی این شکل $H(AB,CD)$، $H(AC,BE)$، $H(AD,BF)$، و $H(BC,EG)$ اند.

مفهوم شبکهٔ توافقی در گسترش دستگاه مختصات نقاط در هندسهٔ تصویری اساسی است (بخش ۷.۶ را ملاحظه کنید).

تمرینات ۷.۴

در تمرینات ۱ و ۲، سه نقطهٔ A، B و C در همین ترتیب واقع بر خطی مفروض‌اند.

۱. با ترسیم با خط‌کش نامدرج D را، به طوری که $H(AC\ ,\ BD)$ مجموعه‌ای توافقی باشد، مشخص کنید.

۲. با ترسیم با خط‌کش نامدرج D را، به طوری که $H(AB\ ,\ CD)$ مجموعه‌ای توافقی باشد، مشخص کنید.

۳. به مفهوم اقلیدسی، فرض می‌کنیم B وسط $\overline{AC}$ باشد. موقع مزدوج توافقی B را نسبت به A و C رسم کنید.

31. Harmonically Related

32. Harmonic Net

در تمرینات ۴ـ۸، کدام یک از موارد مجموعه های توافقی در شکل ۷.۱۷ اند؟ چرا؟

۴. (AD , KG)
۵. (AC , FM)
۶. (AB , NE)
۷. (LF , BD)
۸. (BC , JG)

۹. گزارهٔ b تحت قضیهٔ ۷.۵ را مستقیماً و بدون استفاده از ثنویت اثبات کنید.
۱۰. ثابت کنید که ششمین نقطهٔ یک مجموعهٔ چهارگوشه‌ای نسب نقاط را می‌توان به طور منحصر به فرد با معلوم بودن پنج نقطهٔ دیگر مشخص کرد.
۱۱. ثابت کنید که یک خط در هندسهٔ تصویری بیش از چهار نقطهٔ متمایز دارد.
۱۲. فرض می‌کنیم ABCD یک چهارگوشه‌ای و PQR سه‌گوشه‌ای قطری آن باشد. ثابت کنید که اگر مثلث PQR و نقطهٔ A مفروض باشد سه رأس دیگر چهارگوشه‌ای را می‌توان به دست آورد.
۱۳. ثابت کنید که یک شبکهٔ توافقی با هر سه نقطهٔ متمایز واقع بر آن، و نه تنها سه نقطهٔ آغازگر اصلی، مشخص می‌شود.
۱۴I. نمونه‌ای متحرک برای شکل ۷.۲۰ چنان بسازید که C و D در امتداد خط مربوطه حرکت کند، در حالی که A، B، و O ثابت قرار گیرند.
۱۵I. اگر H (AB,CD) و A، B نقاط قطری یک چهارگوشه‌ای کامل باشند، نشان دهید که این موضوع مستلزم H (CD,AB) با C، D ی نقاط قطری چهارگوشه‌ای کامل است.
۱٦I. با معلوم بودن سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت تعیین کنندهٔ یک شبکهٔ توافقی ده نقطهٔ دیگر آن شبکه را رسم کنید.

۷.۵ بوش های تصویری

بوش تصویری، تعریف شده به صورت دنباله‌ای متناهی از بوش های پرسپکتیوی، از آن جا که برگسترش نقاط یک به یک است، یک تبدیل است. عکس یک بوش تصویری یک بوش تصویری است، و حاصل ضرب دو بوش تصویری یک بوش تصویری است؛ و به این ترتیب، قضیهٔ زیر راست است (تمرین ۱٦، تمرینات ۷.۵).

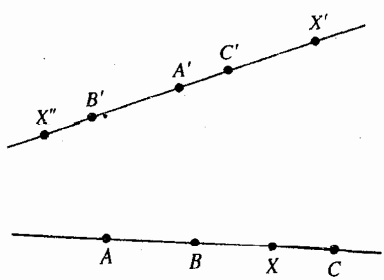
قضیهٔ ۷.٦ . مجموعهٔ جمیع بوش های تصویری‌ای که در مورد آن ها حاصل ضرب در یک صفحه تعریف شده، تشکیل یک گروه تبدیلات می‌دهد.

هندسهٔ تصویری بررسی خواص مجموعه های نقاطی که تحت گروه تبدیلات تصویری لایتغیرند می‌باشد. برای طرح جبری بررسی هندسهٔ تصویری باید تا معرفی مختصات در صفحهٔ تصویری در بخش بعد صبر کنیم. اما، پیش از این، امکان‌دارد که بوش - های تصویری را از نظرگاه متفاوتی مورد مطالعه قرار دهیم. در این مورد مسأله‌ای که ممکن است برای خواننده مطرح شده باشد این است که: حداقل اطلاعات لازم در تعیین یک بوش تصویری چیست؟ و به عبارت دیگر از آن جاکه بوش های تصویری شامل نقاط و تصاویر آن هاست، برای این که جمیع ازواج را بتوان معین کرد چند زوج نقطه و تصویرش باید داده شود؟ پاسخ این سؤالات در آن چه که به قضیهٔ اساسی هندسهٔ تصویری[۳۳] موسوم است ظاهر می‌شود.

قضیه ۷.۷ . قضیهٔ اساسی. بوش تصویری بین مجموعه های نقاط واقع بر دو خط در یک صفحه با سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت و تصاویرشان به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود.

اثبات: به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود بدین معنی است که نمی‌تواند دو تبدیل متفاوت گسترش دهندهٔ سه نقطهٔ مفروض بر تصاویر مفروض شان وجود داشته باشد. تصویر هر نقطهٔ X توسط اطلاعات داده شده به صورت نقطهٔ معینی ثابت است. اثبات قضیه غیرمستقیم است. چنان که در شکل ۷.۲۲ به تصویر آمده، فرض می‌کنیم که به ازای نقاط متمایز X' و X''، $ABCX \barwedge A'B'C'X'$، و $ABCX \barwedge A'B'C'X''$، در این صورت

$$A'B'C'X' \barwedge ABCX \barwedge A'B'C'X'' \text{و} A'B'C'X' \barwedge A'B'C'X''$$



شکل ۷.۲۲

---

33. the Fundamental Theorem of Projective Geometry

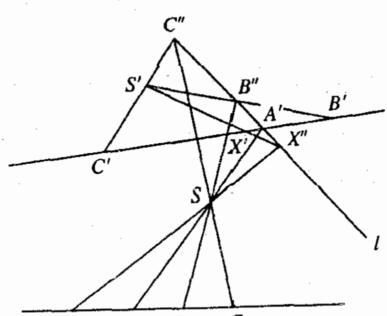
اما در بوش تصویری اخیر، نقاط A'، B'، و C' ثابت‌اند. در این صورت بنا به آکسیوم ۵ بخش ۷.۲، جمیع نقاط دیگر واقع بر این خط نیز باید ثابت باشند. این فرض که X' و X'' متمایزاند این آکسیوم را نقض می‌کند، بنابراین X' و X'' باید یکی باشند.

در حالی که قضیهٔ اساسی هندسهٔ تصویری، از لحاظ تئوری بسیار مهم است، با این همه روشی سازنده در تعیین عملی ازواج نقاط متناظر دیگر در یک بوش تصویری به دست نمی‌دهد. یک چنین روشی بر تعیین دنبالهٔ می‌نیممی از بوش‌های پرسپکتیوی آن بوش تصویری استوار است.

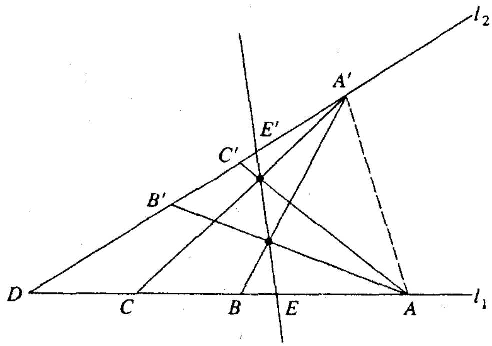
قضیهٔ ۷.۸ . سه نقطهٔ متمایز A ، B ، C واقع بر یک خط را می‌توان در هر سه نقطهٔ متمایز A' ، B' ، C' واقع بر خطی دوم، به کمک دنباله‌ای از حداکثر دو بوش پرسپکتیوی تصویر کرد.

اثبات: در شکل ۷.۲۳، فرض می‌کنیم A، B، C، A'، B'، C' شش نقطهٔ مفروض را نمایش دهند. مرکز بوش پرسپکتیوی‌ای غیر از A یا A' بر $\overleftrightarrow{AA'}$ و خط l (ناشامل B' ، C') گذرنده از A' ای اختیار می‌کنیم. سپس نقاط B'' و C'' را بر l چنان مشخص می‌کنیم که $ABC \overset{S}{\barwedge} A'B''C''$. تقاطع $\overleftrightarrow{C'C''}$ و $\overleftrightarrow{B'B''}$ نقطهٔ S' ی چنان معین می‌کند که $A'B''C'' \overset{S'}{\barwedge} A'B'C'$، بنابراین $ABC \barwedge A'B'C'$

با معلوم بودن هر نقطهٔ X واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$، X'' و X' را می‌توان با استفاده از بوش‌های تصویری قبلاً تعریف شده به دست آورد. اگر شش نقطهٔ مفروض مورد بحث همه بر یک خط واقع باشند، در این صورت به بوش پرسپکتیوی دیگری نیاز است. تمرین ۷ تمرینات ۷.۵ را



شکل ۷.۲۳



شکل ۷.۲۴

ملاحظه کنید. اگر یکی از نقطه های مفروض در بوش تصویری مورد بحث تصویر خودش باشد، در این صورت بوش تصویری مذکور یک بوش پرسپکتیوی است. تمرین ۱۱ی تمرینات ۷.۵ را ملاحظه کنید.

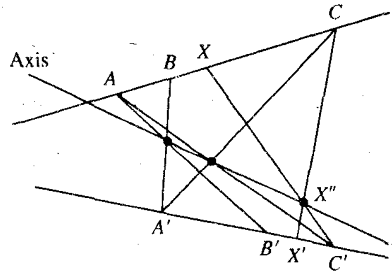
در حالت کلی، نقاط متناظر در یک بوش تصویری پرسپکتیو از یک نقطه نیستند، نیز خطوط متناظر در یک بوش تصویر پرسپکتیو از یک خط نمی‌باشند. اما بوش های تصویری دارای نقاط یا خطوطی، که به گونه‌ای مشابه با مراکز و محورهای بوش پرسپکتیوی‌اند، هستند.

قضیهٔ ۷.۹ . بوش تصویری بین دو مجموعهٔ نقاط واقع بر دو خط متمایز خط سومی، موسوم به محور بوش تصویری[۳۴]، یا محور همانندی[۳۵]، که شامل تقاطعات اتصالات تقاطعی جمیع ازواج نقاط متناظر است، معین می‌کند.

تعریف. اتصالات تقاطعی[۳۶] دو زوج نقطه، چون A، A' و B، B'، $\overleftrightarrow{AB'}$ و $\overleftrightarrow{BA'}$ اند.

اثبات: برای اثبات قضیهٔ ۷.۹، باید نشان دهیم که محور مذکور منحصر به فرد است و جمیع تقاطعات اتصالات تقاطعی واقع بر یک استقامت‌اند. به این مطلب می‌توان، با نشان دادن این که محور مورد بحث مستقل از اختیار نقاط است، رسید. شکل ۷.۲۴ را ملاحظه کنید. از آن جا بین نقاط واقع بر l_1 و l_2 بوش تصویری‌ای،

34. Axis of Projectivity
35. Axis of Homology
36. Cross Joins



شکل ۷.۲۵

$(\overleftrightarrow{A'A},\overleftrightarrow{A'B},\overleftrightarrow{A'C}\text{-}) \overline{\wedge} (ABC\text{-}) \wedge (A'B'C'\text{-}) \overline{\wedge} (\overleftrightarrow{AA'},\overleftrightarrow{AB'},\overleftrightarrow{AC'}\text{-})$ موجود است، بنابراین $(\overleftrightarrow{A'A},\overleftrightarrow{A'B},\overleftrightarrow{A'C}\text{-}) \wedge (\overleftrightarrow{AA'},\overleftrightarrow{AB'},\overleftrightarrow{AC'}\text{-})$.

در بوش تصویری مورد بحث، $A'A$ خطی خود ـ متناظر است، بنابراین بوش ـ تصویری فوق معادل بوش پرسپکتیوی‌ای که خط اش از تقاطع $\overleftrightarrow{A'B}$ و $\overleftrightarrow{AB'}$، $\overleftrightarrow{A'C}$ و $\overleftrightarrow{AC'}$، و غیره می‌گذرد است.

اگر به جای A ، A' ، زوج نقطهٔ دیگری، فی المثل چون B ، B' ، به عنوان مراکز دسته‌های تصویری در نظر گرفته می‌شد، همین محور بوش تصویری تعیین می‌شد، و این به این علت راست است که به هر تقدیر، محور مزبور همواره از دو تصویر نقطهٔ مشترک دو خط مذکور می‌گذرد. در شکل ۷.۲۴، اگر E' تصویر Dی در نظر گرفته شده به عنوان نقطه‌ای واقع بر l_1، و اگر E تصویر Dی در نظر گرفته شده به عنوان نقطه‌ای واقع بر l_2 باشد، در این صورت اتصالات تقاطعی دو زوج نقطهٔ B، B' و D ، E' ، در E' واقع بر محور بوش تصویری‌مان تلاقی می‌کنند. اتصالات تقاطعی دو زوج نقطهٔ B ، B' و D ، E در E واقع بر محور بوش تصویری‌مان ملاقی می‌شوند.

چنان که در مثال زیر نشان داده‌ایم، از محور بوش تصویری می توان در ترسیم ازواج نقاط متناظر دیگر واقع در یک بوش تصویری استفاده کرد. در شکل **۷.۲۵**، فرض می‌کنیم که بوش تصویری ای با ازواج نقاط مفروض A، A'، B، B'، C ، C'، مشخص شده باشد. در این صورت محور بوش تصویری را مـی توان بااستفـاده از تقـاطـع اتصـالات تقـاطعـی $\overleftrightarrow{A'B}$ و $\overleftrightarrow{AB'}$، $\overleftrightarrow{A'C}$ ، $\overleftrightarrow{AC'}$ معین کرد. فرض می‌کنیم X نقطهٔ دلخواه چهارم واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ای را نمـایش دهـد. در این صـورت $\overleftrightarrow{XC'}$ محـور بوش تصـویـری را در نقطـهٔ X'' قطع، و

$\overleftrightarrow{CX''}$ ، $\overleftrightarrow{A'C'}$ را در نقطهٔ مطلوب X' واقع بر $\overleftrightarrow{A'C'}$ تلاقی می‌کند. توجه داشته باشید که ترسیم فوق تنها از خط‌کش نامدرج استفاده می‌برد.

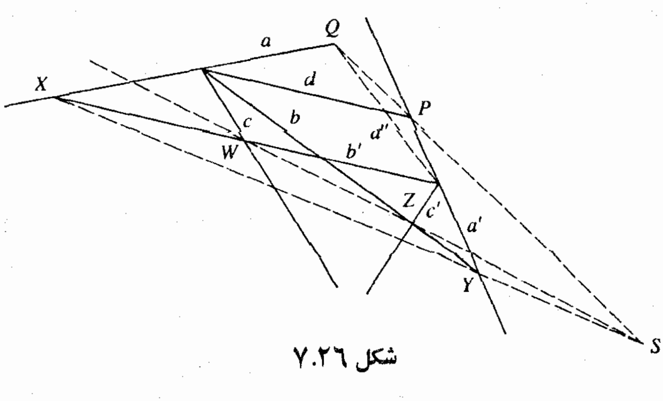
تثنیه‌های قضایای مطرح شده در این بخش به نوبهٔ خود جالب‌اند. اثبات این قضایا به مفهوم ثنویت وابسته‌اند، گرچه آن ها را می‌توان مستقیماً نیز اثبات کرد.

قضیهٔ ۷.۱۰ . تثنیهٔ قضیهٔ اساسی. بوش تصویری بین مجموعه های خطوط واقع بر دو نقطهٔ در یک صفحه با سه خط متقارب و تصاویرشان مشخص می‌شود.

قضیهٔ ۷.۱۱ . تثنیهٔ قضیهٔ ۷.۹ . بوش تصویری بین دو مجموعه خطوط واقع بر دو نقطهٔ متمایز نقطهٔ سومی، موسوم به مرکز بوش تصویری[۳۷]، یا مرکز همانندی[۳۸]، که بر اتصالات تقاطعات تقاطعی خطوط متناظر قرار دارد، معین می‌کند.

قضیهٔ ۷.۱۱ را در شکل ۷.۲۶ به تصویر کشیده‌ایم. خطوط a ، b ، c و a' ، b' ، c' مفروض‌اند. نقطهٔ X تقاطع a، b'، و Y تقاطع a' و b است، بنابراین $\overleftrightarrow{XY}$ از S، مرکز بوش تصویری‌مان، می‌گذرد. به همین ترتیب، c و b' در W تقاطع و c' و b در Z تلاقی می‌کنند، لذا S بر $\overleftrightarrow{WZ}$ واقع می‌شود.

از مرکز بوش تصویری می‌توان در ترسیم ازواج خطوط دیگر واقع در بوش تصویری استفاده کرد. در شکل ۷.۲۶، فرض می‌کنیم d مفروض است. خطوط d و a' در P تلاقی می‌کنند. خط a با d' در نقطهٔ Q ی واقع بر $\overleftrightarrow{PS}$ ملاقی است. خط واصل Q و نقطهٔ تقارب a'، b'، c' خط مطلوب d' است.



شکل ۷.۲۶

37. Center of Projectivity

38. Center of Homology

تمرینات ۷.۵

در تمرینات ۱ـ۳، از شکل ۷.۲۷ a استفاده کنید.

۱. از روش اثبات قضیهٔ ۷.۸ در تشکیل دو بوش پرسپکتیوی، به طوری که بین A، B، C و A′، B′، C′ بوش تصویری ای تشکیل شود، استفاده کنید.

۲. محور بوش تصویری بوش تصویری دارای نقاط متناظر A، A′، B، B′، و C، C′ را رسم کنید.

۳. تصویر نقطهٔ X در بوش تصویری تمرین ۲ را بیابید.

در تمرینات ۴ـ۶، از شکل ۷.۲۷ b استفاده کنید.

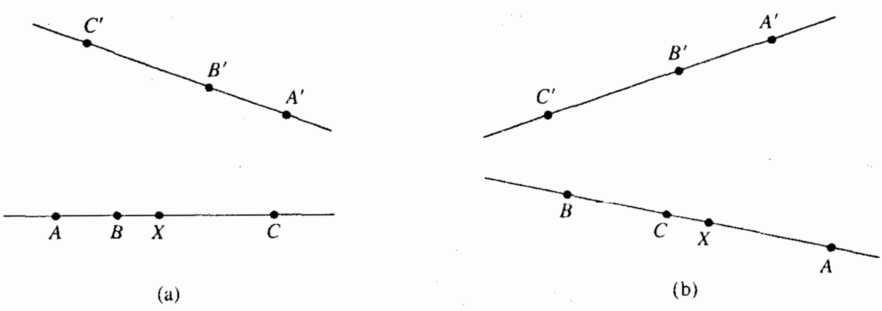
۴. از دستورات تمرین ۱ پیروی کنید.

۵. از دستورات تمرین ۲ پیروی کنید.

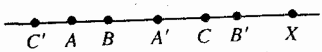
٦. تصویر نقطهٔ X را در بوش تصویری تمرین ۵ بیابید.

۷. ثابت کنید که سه نقطهٔ متمایز A، B، Cی واقع بر یک خط را می‌توان در هر سه نقطهٔ متمایز A′، B′، C′ واقع بر همان خط به‌کمک سلسلهٔ سه بوش پرسپکتیویه تصویر کرد.

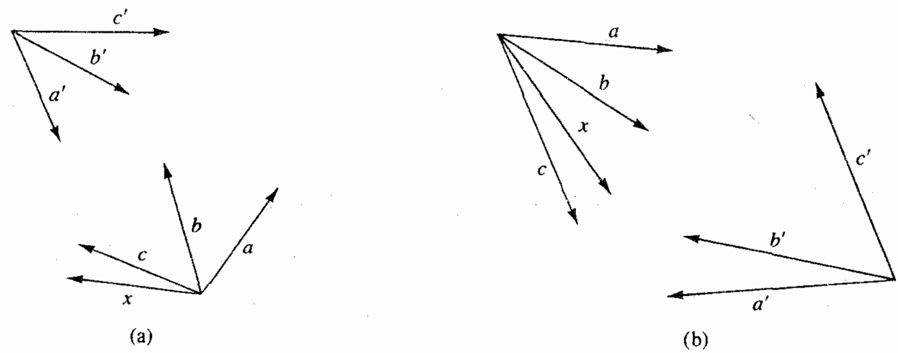
۸. شکل ۷.۲۸ را بکشید. سلسله‌ای از سه بوش پرسپکتیوی چنان برقرار کنید که A و A′، B، و B′، و C و C′ متناظر شوند.



شکل ۷.۲۷



شکل ۷.۲۸



شکل ۷.۲۹

۹. در بوش تصویری تمرین ۸، تصویر X را بیابید.

۱۰. نشان دهید که چگونه سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت A، B، C را می‌توان با سلسله‌ای سه بوش پرسپکتیویه در نقاط متناظر B، C، A تصویر کرد.

۱۱. در بوش تصویری قضایای ۷.۷ و ۷.۸ ثابت کنید که بوش تصویری در صورتی که یکی از نقاط مفروض خود تصویر خود باشد، بوشی پرسپکتیوی است.

۱۲. شکل a ۷.۲۹ را بکشید. مرکزبوش تصویری بوش تصویری باخطوط متناظر aa′، bb′، و cc′ را بیابید.

۱۳. تصویر خط x را در بوش تصویری تمرین ۱۲ بیابید.

۱۴. شکل b ۷.۲۹ را بکشید. مرکز بوش تصویری بوش تصویری با خطوط متناظر aa′، bb′ و cc′ را بیابید.

۱۵. تصویر خط x را در بوش تصویری تمرین ۱۴ بیابید.

۱۶. جزئیات اثبات قضیهٔ ۷.۶ را تکمیل کنید.

۱۷. تثنیهٔ سطحی قضیهٔ اساسی هندسهٔ تصویری را، بدون استفاده از ثنویت، اثبات کنید.

۱۸. ثابت کنید که دو مجموعهٔ توافقی نقاط توسط یک بوش تصویری منحصر به فرد مرتبط‌اند.

۱۹. قضیهٔ ۷.۱۱ را با نوشتن تثنیهٔ اثبات قضیهٔ ۷.۹ ثابت کنید.

I۲۰. قضیهٔ پاپوس را در مورد یک شش ضلعی مسطح بیان و اثبات کنید. در این کار از مرجعی استفاده کنید.

I۲۱. فهرستی از قضایای اساسی شاخه های دیگر ریاضیات (چون قضایای اساسی حساب، جبر، حساب جامع و فاضل) تهیه کنید. توضیح دهید چرا قضیهٔ ۷.۷ برای این که قضیهٔ اساسی هندسهٔ تصویری نامیده شود از اهمیت کافی برخوردار است.

۷.۶ مختصات همگن

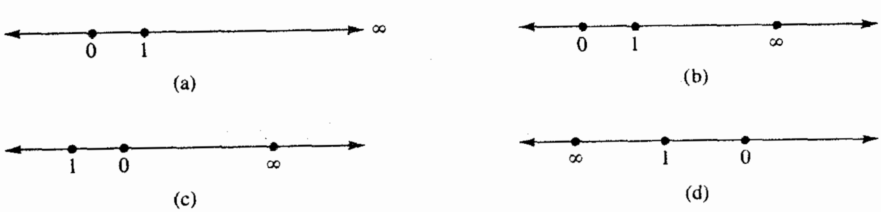
دستگاه مختصات دکارتی هندسهٔ تحلیلی معمولی در هندسهٔ تصویری، از آن جا که نقاط انگاری در آن است، کفایت ندارد؛ و در نتیجه، به دستگاه مختصات عمومی تری نیاز داریم.

اما مقدم بر طرح صوری‌تر دستگاه مختصاتی هندسهٔ تصویری، موسوم به مختصات همگن[۳۹]، اهمیت دارد که چگونگی ارتباط دو دستگاه مختصات مورد بحث را به طور شهودی ملاحظه کنیم. در مورد فضای یک بعدی، خط* عددی هندسهٔ صفحهٔ اقلیدسی ممتد را در شکل ۷.۳۰ a و خطوط عددی هندسهٔ تصویری را در شکل های ۷.۳۰ b - d نمایش داده‌ایم. در شکل ۷.۳۰ a، نقطهٔ با مختص بی‌نهایت به عنوان نقطه‌ای فوق‌العاده با خواصی ویژه مشخص شده است. اما در هندسهٔ تصویری، نقطهٔ با مختص بی‌نهایت را می‌توان برخط ـ عددی جای داده و نقطه‌ای معمولی در نظر گرفت. به این ترتیب، باید دستگاه مختصاتی جدیدی چنان تنظیم کنیم که در آن چیزی متفاوت با بی‌نهایت بتواند به کار رود.

شکل ۷.۳۱ a قالب دستگاه مختصاتی دکارتی معمولی، با نقاط E و F مشخص شده به عنوان «نقاط در بی‌نهایت»، را نمایش می‌دهد. شکل ۷.۳۱ a را می‌توان در شکل ۷.۳۱ b، با اعضای متناظر مشخص شده با پریم تصویر کرد. در این صورت نقاط انگاری E' و F' دیگر نقاط ویژه نیستند، و $\overleftrightarrow{E'F'}$ خط انگاری مربوطه است. نقاط واقع در ربع اول شکل ۷.۳۱a درنقاط داخل‌مثلث $A'E'F'$ تصویر شده‌اند.

مختصات همگن باید به چنان طریقی تعریف شود که میان تعداد نامتناهی‌ای نقطهٔ انگاری تمیز دهد و با این همه در مسیری که این نقاط در آن به کار می‌روند هیچ گونه محدودیتی اعمال نکند. جانشینی

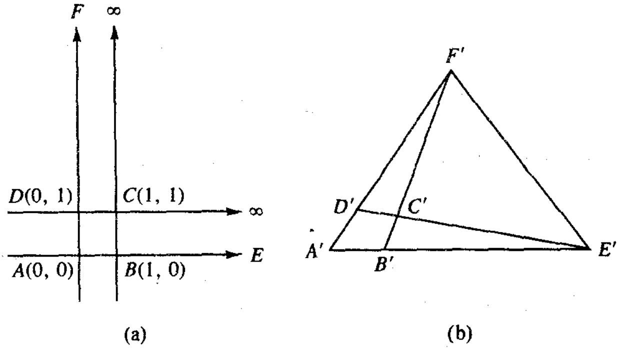
$$x = \frac{x_1}{x_3}\ ,\ y = \frac{x_2}{x_3} \qquad x_3 \neq 0 \text{ به ازای}$$



شکل ۷.۳۰

39. Homogeneous Coordinates

* محور



شکل ۷.۳۱

نقطهٔ اقلیدسی معمولی با مختصات (x,y) را به نقطهٔ نظیرش در صفحهٔ تصویری با مختصات همگن (x_1, x_2, x_3) مربوط می‌سازد. به عنوان مثال، (۲،۳) ، (۲،۳،۱) می‌شود؛ (۳،۴،۵) همان نقطهٔ $(\frac{۴}{۵}، \frac{۳}{۵})$ است در مورد نقاط انگاری باید محدودیت $X_3 \neq 0$ از میان برود، و صحنه برای طرحی صوری‌تر آماده شود. مختصات همگن نقاط واقع در صفحه در حدود ۱۸۳۰ توسط یولیوس پلوکر[۴۰] (۱۸۶۸ - ۱۸۰۱) معرفی شد.

تعریف. در هندسهٔ تصویری تحلیلی، نقطه سه‌تایی مرتب (x_1,x_2,x_3) ای، نه همه صفر، با این شرط که علامت (ax_1,ax_2,ax_3) ، به‌ازای هر a ی نا صفر، همان نقطهٔ (x_1,x_2,x_3) را نمایش دهد، است.

فی‌المثل (۲، ۱، ۳) و (۴، ۲، ۶) در مختصات همگن یک نقطه را نام می‌برند. خط در مختصات همگن به‌طور تثنیه‌ای به‌صورت سه‌تایی مرتب $[X_1, X_2, X_3]$ ، با این شرط که $[aX_1 ,aX_2,aX_3]$ ، به ازای هر a ی ناصفر، همان خط را نام‌برد، تعریف می‌شود. و فی‌المثل،

$$[۱، \frac{۲}{۳}، \frac{۷}{۳}] \quad و \quad [۳،۲،۷]$$

نامهای دوگانهٔ یک خط‌اند. نقطهٔ x برخط X واقع می‌شود اگر و تنها اگر

$$X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = 0$$

40. Julius Plücker

باشد. شرط فوق را می‌توان به صورت حاصل ضرب نقطه‌ای برداری

$$[X_۱,X_۲,X_۳] \cdot [x_۱,x_۲,x_۳] = ۰$$

نوشت. به عنوان مثال، نقطهٔ (۲،۳،۰) واقع برخط [۳،۲-،۰] است زیرا

$$(۲ \cdot ۳) + (۳ \cdot -۲) + (۰.۰) = ۰$$

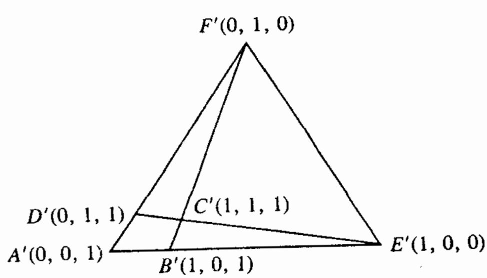
شرط بند قبل تعمیم شرط مربوط به نقاط واقع برخطوط در هندسهٔ تحلیلی اقلیدسی است. اگر $x_۳$ و $X_۳$ مساوی ۱ قرار داده شوند، شرط فوق به $X_۱x_۱ + X_۲x_۲ + (۱ \cdot ۱) = ۰$ تحویل می‌شود. دراین صورت اگر $X_۱$ مساوی a/c و $X_۲$ مساوی b/c قرار داده شود، شرط فوق به

$$(\frac{a}{c})x_۱ + (\frac{b}{c})y_۱ + (۱ \cdot ۱) = ۰ \text{ یا } ax_۱ + by_۱ + c = ۰$$

تحویل می‌شود. اما این شرط شرط واقع شدن نقطهٔ $(x_۱،y_۱)$ برخط اقلیدسی

$$ax + by + c = ۰$$

است. فی المثل، معادلهٔ خط [۲،۵-،۷]، $۲x_۱ - ۵x_۲ + ۷x_۳ = ۰$ است. تثنیةً، معادلهٔ نقطهٔ (۳،۱،۲)، $۳X_۱ + X_۲ + ۲X_۳ = ۰$ است. نقاط درهندسهٔ تحلیلی اقلیدسی معادله ندارند، اما ثنویت درصفحهٔ تصویری باید خواننده راآمادهٔ ظهورشان در بررسی مختصات همگن کرده باشد.



شکل ۷.۳۲

اکنون امکان دارد که تعریف مختصات همگن را، با به خاطر آوردن گسترش شهودی برحسب نسبتهای آن، به شکل ۷.۳۱ ارتباط دهیم. شکل ۷.۳۲ راباتوجه به مختصات همگن هرنقطه به صورت مرتبط با مختصات دکارتی نقاط متناظر واقع در شکل ۷.۳۱a، به دقت مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

از شکل ۷.۳۲ تعیین معادلات خطوط گوناگون موجود و ارتباط دادن آنها باخطوط متناظرشان در هندسهٔ اقلیدسی مشکل نیست. روابط مذکور به ترتیب زیراند:

$$
\begin{array}{lr}
\overleftrightarrow{A'E'} & x_2 = 0 \\
\overleftrightarrow{A'F'} & x_1 = 0 \\
\overleftrightarrow{E'F'} & x_3 = 0 \\
\overleftrightarrow{B'C'} & x_1 - x_3 = 0 \\
\overleftrightarrow{D'C'} & x_2 - x_3 = 0
\end{array}
$$

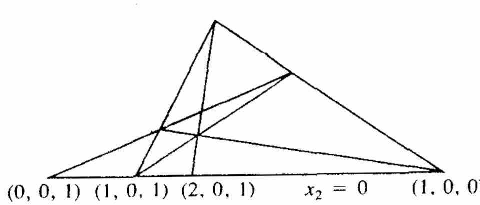
معادلات فوق را می‌توان به طور صوری از شرط قرارگرفتن نقطه برخط، $X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = 0$، باجانشین کردن مختصات دو نقطهٔ واقع برخط و بعد حل کردن دستگاه معادلات مقارن حاصل، استخراج کرد. به عنوان مثال، در مورد $\overleftrightarrow{C'D'}$،

$$X_2 + X_3 = 0$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

فرض می‌کنیم $X_3 = 1$؛ بنابراین،

$$X_2 = -1$$
$$X_1 = 0$$

و معادلهٔ مطلوب $-x_2+x_3 = 0$ یا $x_2 - x_3 = 0$ است. درمورد خطوط مفروض فوق،



شکل ۷.۳۳

معادلات مربوطه را می‌توان به طور شهودی و به سادگی با بررسی مختصات داده‌شده، برای دست یافتن به یک قالب، استخراج کرد.

باید دانست که مثلث شکل ۷.۳۲ شامل کل صفحهٔ تصویری نیست بلکه شامل آن قسمت از این صفحه که متناظر با ربع اول دستگاه مختصات‌مان است می‌باشد. نقاط $A'E'F'$ رئوس چیزی که مثلث اساسی[41] نامیده می‌شود است. در حالی که C'، با مختصات (۱،۱،۱)، به نقطهٔ واحد[42] موسوم است.

جریانی که طی آن مختصات نقاط اضافی در صفحهٔ تصویری یافت می‌شود برمفهوم شبکهٔ توافقی بناشده‌است. این جریان را در شکل ۷.۳۳،در مورد خط $x_2 = 0$ توضیح داده‌ایم. نقطهٔ (۱،۰،۲) به‌عنوان مزدوج توافقی (۱،۰،۰) نسبت به (۱،۰،۱) و (۰،۰،۱) تعریف شده‌است. این نقطه را، چنان که در بخش ۷.۴ توضیح داده‌شده، می‌توان باخط کش نامدرج رسم کرد. در این صورت سری ترسیمات را می‌توان برای نشان دادن این که (۱،۰،۳) مزدوج توافقی (۱،۰،۱) نسبت به (۱،۰،۲) و (۰،۰،۱) است انجام داد. نقطهٔ (۱، ۰، $\frac{1}{2}$) نیز مزدوج توافقی (۰،۰،۱) نسبت به (۱،۰،۰) و (۱،۰،۱) است. جریان فوق می‌تواند در مورد نقاط با مختصات منفی ادامه یابد. به عنوان مثال، (۱،۰،۱-) مزدوج توافقی (۱،۰،۱) نسبت به (۱،۰،۰) و (۰،۰،۱) است. به این ترتیب نه تنها جمیع نقاط واقع برخط مورد بحث بلکه جمیع نقاط واقع در شبکهٔ توافقی مشخص با سه نقطهٔ آغازگر را می‌توان ترسیم کرد.

مختصات همگن نقش مهمی در گرافیکهای کامپیوتری، که به هندسهٔ تصویری کاربرد عملی تازه و مهمتری می‌بخشند، ایفا می‌کنند. در این مورد به خاطر داشته‌باشید که قراردادهای گرافیکهای کامپیوتری در مورد ماتریسهای این فصل به کار می‌روند و ممکن است با آنهایی که در جبر خطی مطالعه کرده‌اید تفاوت داشته‌باشند. انتقال، همان‌گونه که درفصل ۲ توضیح داده‌شده، نمی‌تواند به صورت یک ماتریس ۲×۲ نمایش داده شود. اما، بااستفاده از مختصات همگن، آن را می‌توان به صورت یک ماتریس ۳×۳ نمایش داد. فی‌المثل، انتقال ۲ واحد درجهت مثبت برای x و ۳ واحد در جهت مثبت برای y را می‌توان با

$$(x\quad y\quad 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}=(x+2\quad y+3\quad 1)$$

، از آنجا که

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}$$

نمایش داد. هریک از ماتریسهای ۲×۲ ی فصل ۲ متناظر با یک ماتریس ۳×۳ با همان نتیجه

---

41. Fundamental Triangle

42. Unit Point

درمختصات همگن، با ۱ درگوشهٔ پایینی سمت راست آن، است. فی‌المثل، تبدیل $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ نمایش دهندهٔ تغییری مقیاسی درجهت y، درمختصات همگن، با

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

داده می‌شود.

در مورد این که چرا مختصات همگن به عنوان وسیله‌ای متداول در گرافیکهای کامپیوتری به‌کارمی‌رود،دو دلیل دیگر، علاوه برممکن ساختن نمایش انتقالات به صورت ماتریسها، موجود است. اولین این دو در رابطه با ارزش استفاده از نسبتها هنگام عملیات با نقاط بامختصات بسیار بزرگ است. از آنجاکه یک میکروکامپیوتر معمولی نمی‌تواند عدد صحیحی بزرگتر از ۳۲۷۶۷ را ذخیره کند، نقطه‌ای با مختصات بزرگتر از این عدد نمی‌تواند درآن ذخیره شود. اما بامختصات همگن، عددی بامختصات بزرگتر، چون (۶۰۰۰۰ و۷۵۰۰۰) می‌تواند در مختصات همگن به صورت (۰.۱، ۶۰۰۰، ۷۵۰۰) نمایش داده‌شود، و به این ترتیب میکروکامپیوتر بتواند آن را به آسانی به‌کاربرد.

دلیل سوم این که چرا مختصات همگن در گرافیکهای کامپیوتری به‌کار می‌روند این است که آنها نشان دادن نقاط در بی‌نهایت و تبدیل ترسیمات سه بعدی به ترسیمات پرسپکتیوی برای خلق توهم عمق را ممکن می‌سازند. ممکن است خواننده خود به‌کوشش در کشف این که چگونه مختصات همگن را می‌توان دراین طریق به‌کاربرد علاقه‌مند باشد، و ما این موضوع را باردیگر در بخش ۷.۷ مورد بحث قرارمی‌دهیم.

تمرینات ۷.٦

۱. چگونه شخص می‌تواند یک نقطهٔ انگاری را با دیدن مختصات آن مشخص کند؟

۲. مختصات همگن این نقاط را بنویسید:

a. (۸، ۳)   b. $(\frac{۳}{۴}، ۲)$ c. (۴-، ۱)

۳. مختصات دکارتی این نقاط را بنویسید:

a. (۱، ۵، ۲)   b. (۲، ۳، ۱-)   c. (۳-، ۵، ۲-)

۴. بااستفاده از مختصات همگن، سه نام دیگر نقطهٔ (۳، ۲، ۵) را بنویسید.

۵. آیا نقطهٔ (۱،۱،۱) برخط [۱،۱،۱] واقع است؟
٦. مختصات نقطهٔ انگاری واقع برخط [۱،۱،۱] را بیابید.
۷. فورمول عمومی نقطهٔ انگاری واقع برخط [a،b،c] را بنویسید.
۸. معادلهٔ خط [۲-، ۱، ۳] را بنویسید.
۹. معادلهٔ نقطهٔ (۲-، ۱، ۳) را بنویسید.
۱۰. معادلهٔ $\overleftrightarrow{B'C'}$، شکل ۷.۳۲، را طرح کنید.
۱۱. نقطهٔ تقاطع خطوط [۱،۱،۱] و [۲،۱،۲] را بیابید.
۱۲. معادلهٔ خط گذرنده از (۱،۱،۱) و (۲،۱،۲) را بیابید.
۱۳. نقطهٔ تقاطع خطوط $ax_1+bx_2+cx_3=0$ و $dx_1+ex_2+fx_3=0$ را، بافرض این که نقطهٔ تقاطع شان انگاری نیست، بیابید.
۱۴. مختصات مزدوج توافقی (۰،۱،۰) را نسبت به (۱،۱،۰) و (۱،۳،۰) به دست دهید.

در تمرینات ۱۵ - ۱۸ با خط کش نامدرج نقاط مطلوب را برخط $x_2 = 0$، با معلوم بودن (۱، ۰، ۰)، (۱، ۰، ۱) و (۰، ۰، ۱) بیابید.

۱۵. (۱،۰،۲)
۱۶. (۱،۰،۳)
۱۷. (۱،۰،۱-)
۱۸. (۱،۰،$\frac{۱}{۲}$)

در تمرینات ۱۹ و ۲۰، مختصات همگن هرنقطه راچنان به‌دست‌دهید که‌هیچ‌مختصی بزرگتر از ۳۲ ۷٦۷ نباشد.

۱۹. (۵۰۴۱۵، ۸۴٦۳۲)
۲۰. (۱٦۹۲۰۸، ۲۴۵۳۱٦)

در تمرینات ۲۱ و ۲۲، ماتریس انتقال مربوطه را نوشته از ضرب ماتریسی دریافتن تصویر نقطهٔ ($\frac{۳}{۲}$، ۲-) در مختصات همگن، استفاده کنید.

۲۱. انتقال ۳ واحد درجهت مثبت x و ۷ واحد درجهت منفی y.
۲۲. انتقال ۲ واحد درجهت منفی x و ٦ واحد درجهت مثبت y.
۲۳. ثابت کنید که حاصل ضرب دو انتقال یک انتقال است.
۲۴I. در مورد خطوط عددی شکل ۷.۳۰ b - d، قسمت اعداد منفی را هاشور بزنید.

ترتیبهای دیگر سه نقطهٔ اساسی را طرح کرده قسمت اعداد منفی هریک را هاشور بزنید.

۲۵I. مثلث شکل ۷.۳۲ شامل تنها ربع اول صفحهٔ تصویری است. ترسیم گسترش یافته‌ای کشیده. جمیع ربعها را نشان دهید.

۲۶I. ثابت کنید که سه نقطه با مختصات همگن (a_1,a_2,a_3)، (b_1,b_2,b_3)، و (c_1,c_2,c_3) واقع بریک استقامت‌اند اگر و تنها اگر

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

۷.۷ معادلات تبدیلات تصویری

خطوط مستقیم در هندسهٔ تصویری به خطوط مستقیم تبدیل می‌شوند، بنابراین مجموعهٔ معادلات تبدیلات تصویری مجموعهٔ سه معادلهٔ خطی مقارن رابط مختصات همگن یک نقطه به مختصات همگن تصویر آن نقطه است.

سه نقطهٔ (x_1,x_2,x_3)، (y_1,y_2,y_3)، (z_1,z_2,z_3) واقع بریک استقامت‌اند اگر و تنها اگر سه عدد، نه همه صفر، a، b، c چنان موجود باشند که $ax_i+by_i+cz_i=0$ باشد، و این بدان معنی است که هرنقطهٔ واقع بریک خط ترکیب خطی‌ای از هر دو نقطهٔ متمایز دیگر واقع برآن خط است. به عنوان مثال، نقطهٔ (۲۳،۱۳،۸) برخط با دونقطهٔ (۴،۲،۱) و (۵،۳،۲) واقع است. زیرا

$$(2)(1) + (3)(2) + (-1)(8) = 0$$
$$(2)(2) + (3)(3) + (-1)(13) = 0$$
$$(2)(4) + (3)(5) + (-1)(23) = 0$$

در این مثال، $a=2$، $b=3$، و $c=-1$ است.

هیچ سه نقطه‌ای از چهارنقطهٔ اساسی (۰،۰،۱) ، (۰،۱،۰) ، (۱،۰،۰) ، (۱،۱،۱) واقع بریک استقامت نیستند. این چهار نقطه را می‌توان با تبدیلی تصویری درچهار نقطه غیرواقع بریک استقامت d، e، f، و $(d+e+f)$ ی که مختصات شان عبارت‌اند از

$$(d_1 ، d_2 ، d_3)$$
$$(e_1 ، e_2 ، e_3)$$
$$(f_1 ، f_2 ، f_3)$$

و

$$(d_1 + e_1 + f_1 ، d_2 + e_2 + f_2 ، d_3 + e_3 + f_3)$$

تبدیل کرد. تبدیل فوق را می‌توان با تناظر زیر به‌دست آورد:

$$x'_1 = d_1x_1 + e_1x_2 + f_1x_3$$
$$x'_2 = d_2x_1 + e_2x_2 + f_2x_3$$
$$x'_3 = d_3x_1 + e_3x_2 + f_3x_3$$

مجموعهٔ معادلات فوق هرنقطهٔ دیگر $(k ، l ، m)$ را به نقطه‌ای که مختصاتش توسط معادلات زیر داده می‌شود تبدیل می‌کند:

$$x'_1 = d_1k + e_1l + f_1m$$
$$x'_2 = d_2k + e_2l + f_2m$$
$$x'_3 = d_3k + e_3l + f_3m$$

نقطهٔ جدید فوق را می‌توان با $(dk + el + fm)$ مشخص کرد، و این موضوع نشان می‌دهد که نقطهٔ مزبور مختصات متناظری که به جای رئوس اصلی مثلث اساسی رجوع به نقاط d، e، f می‌کند دارد، زیرا (k,l,m) را می‌توان باضرایب درعبارت

$$([k.1] + [l.1] + [m.1])$$

مشخص کرد.

معادلات خطی مفروض فوق معادلات مقارن مطلوب درنمایش تبدیل تصویری مورد بحث‌اند، و تناظر یک به یک نقاط واقع در صفحهٔ تصویری را به دست می‌دهند. معادلات مذکور واقع بریک استقامت بدون نقاط را محفوظ می‌دارند.

قضیهٔ ۷.۱۲ . مجموعهٔ معادلات نمایش دهندهٔ یک تبدیل تصویری به صورت

زیراست:

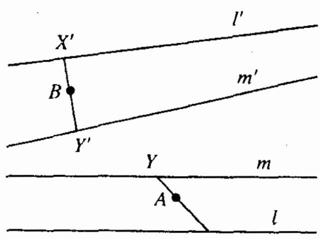
$$\alpha x'_1 = d_1x_1 + e_1x_2 + f_1x_3$$
$$\alpha x'_2 = d_2x_1 + e_2x_2 + f_2x_3$$
$$\alpha x'_3 = d_3x_1 + e_3x_2 + f_3x_3$$

در این مورد شرط این است که دترمینان ضرایب معادلات فوق صفر نیست.

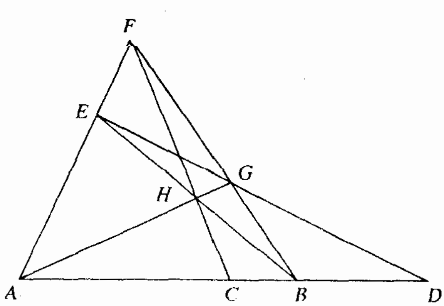
اثبات یک و فرض دو قضیهٔ دیگر به اثبات این مطلب که معادلات قضیهٔ ۷.۱۲، به علت این که خواص تصویری را لایتغیر نگه می‌دارند، برای تبدیلات تصویری مناسب‌اند، کمک می‌کند.

قضیهٔ ۷.۱۳ . تبدیل در صفحه تبدیل تصویری است اگر خطی را به طور تصویری تبدیل کند.

اثبات: درشکل ۳.۳۴ ،فرض می‌کنیم m و 'm خطوطی مفروض باتبدیل تصویری و



شکل ۷.۳۴



شکل ۷.۳۵

زوج خط متناظر دلخواه دیگر l و l' باشند. فرض می‌کنیم X و X' نقاط متناظر واقع بر l و l'، با A و B هر دونقطهٔ متمایز ناواقع بریکی از این چهار خط باشند. خط XAY به $X'BY'$ تبدیل شده و از آنجاکه Y و Y' به طور تصویری مرتبط‌اند، سلسلهٔ زیر، بوش تصویری رابط l و l' را نشان می‌دهد:

$$X \overset{A}{\barwedge} Y \barwedge Y' \overset{B}{\barwedge} X'$$

مختصات همگن سه نقطهٔ واقع بریک خط را می‌توان چنان انتخاب کرد که (x_1,x_2)، (y_1,y_2)، و $(x_1+y_1\ ,\ x_2+y_2)$ باشند. دراین صورت می‌توان ثابت کرد که مزدوج توافقی نقطهٔ سوم نسبت به دونقطهٔ اول دارای مختصات (x_1-y_1,x_2-y_2) است. به عنوان مثال، مزدوج توافقی (۴،۳) نسبت به (۱،۱) و (۲،۳)، (۱-، ۲-) است.

صدق اظهار فوق را می‌توان، بااستفاده از علایم شکل ۷.۳۵ توضیح داد. فرض می‌کنیم $A=(x_1,x_2)$، $B=(y_1,y_2)$، $C=(x_1+y_1,x_2+y_2)$، و $F=(z_1,z_2)$ باشد. در این صورت $E=(z_1+x_1,z_2+x_2)$ است. H تقاطع $\overleftrightarrow{FC}$ و $\overleftrightarrow{EB}$ است و مختصات $(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2)$ دارد. G، واقع بر $\overleftrightarrow{AH}$ و $\overleftrightarrow{FB}$، دارای مختصات $(y_1+z_1\ ،\ y_2+z_2)$ است. سرانجام، D واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{EG}$ است، و مختصات آن باید در معادلهٔ

$$x_i+ky_i = (x_i + z_i) + l(y_i + z_i)$$

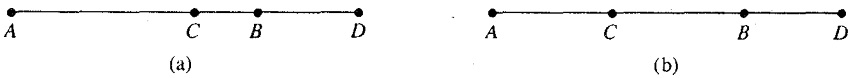
به ازای مقادیری از k و l صدق کند. اما l، برای حذف z_i، باید مساوی منفی یک باشد، که به معنی $x_i+ky_i=x_i - y_i$ است، و k مساوی منهای یک می‌شود. به این ترتیب، مختصات D عبارت‌اند از $(x_1-y_1\ ،x_2-y_2)$.

یکی از تعمیمهای مفهوم دستگاه توافقی مفهوم نسبت تقاطعی[43] چهار نقطه است.

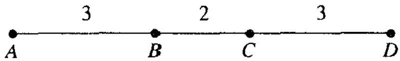
تعریف. نسبت تقاطعی r چهار نقطهٔ واقع بریک استقامت، چون مختصات این چهار نقطه به صورت (x_1,x_2)، (y_1,y_2)، (x_1+y_1,x_2+y_2)، (rx_1+y_1,rx_2+y_2) نوشته شوند، عدد r است.

---

43. Cross Ratio



شکل ۷.۳۶



شکل ۷.۳۷

فی المثل، نسبت تقاطعی A(۲،۳)، B(۵،۶)، C(۷،۹)، D(۹،۱۲)، با زوج بندی‌ای چون در تعریف، از آن جاکه ۵ + (۲.۲) = ۹ و ۶ + (۲.۳) = ۱۲ ، ۲ است.

به جای استفاده از تعریف تصویری قبلاً داده شده، می‌توانیم نسبت تقاطعی را به عنوان نسبت نسبت ها محاسبه کنیم. اگر H(AB,CD)، چنان که در شکل ۷.۳۶ a، دستگاهی توافقی باشد، در این صورت ۱− = (AC/CB) / (AD/DB) است. نسبت نسبت های مذکور حالت خاصی از نسبت تقاطعی است. در شکل ۷.۳۶ b، چهار نقطهٔ موجود دستگاهی توافقی نیست. در این حالت، نسبت تقاطعی، نمایش داده شده با (AB,CD)، هنوز به صورت (AC/CB) / (AD/DB) نمایش داده می‌شود، اما مقدار آن عددی غیر از ۱− است. علامت نسبت تقاطعی چگونگی زوج بندی شدن نقاط مربوطه را نشان می‌دهد. نسبت تقاطعی می‌تواند هر عدد حقیقی را برای مقدار خود داشته باشد.

مثال. مقدار عددی (AC,BD) در شکل ۷.۳۷ را بیابید.

$$(AC\ ,\ BD) = \frac{(AB\,/\,BC)}{(AD\,/\,DC)} = \frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۸}{۳}} = \frac{۳}{۲}\ .\frac{۳}{۸} = -\frac{۹}{۱۶}$$

مثال. با استفاده از همان نقاط تمرین قبل، مقدار عددی (AB , CD) را بیابید.

$$(AB,\ CD) = \frac{(AC\,/\,CB)}{(AD\,/\,DB)} = \frac{-\frac{۵}{۲}}{-\frac{۸}{۵}} = -\frac{۵}{۲}\ -\frac{۵}{۸} = \frac{۲۵}{۱۶}$$

نسبت تقاطعی، و حالت خاص دستگاه توافقی، مفهومی مرتبط با چهار نقطهٔ واقع بر یک خط تصویری است. اگر نسبت تقاطعی (AB,CD) منفی باشد، می‌گوییم که ازواج A ، B و C ، D، چنان که در شکل ۷.۳۶ a، یکدیگر را تفکیک می‌کنند. تفکیک [44] در هندسهٔ

44. Separation

تصویری عبارت کلی تری است که به جای «بین» می‌نشیند. به طور شهودی، اگر یک زوج نقطه زوج دیگر را تفکیک کند، در این صورت نمی‌توان از یکی از نقاط زوج اول به نقطهٔ دوم آن زوج در هر مسیر در امتداد خط شان بدون مواجه شدن با یکی از نقاط مجموعهٔ دوم رسید. در این مورد، دیگر مفهوم «بین»، از آن جاکه در امتداد خط مورد بحث دو مسیر از A به B موجود است، کفایت ندارد؛ و به این ترتیب، گفتن این که C بین A و B است در صورتی که واقع بر قطعه خط واصل آن ها باشد بدون معنی می‌شود.

دو قضیهٔ دیگر، بی‌اثبات بیان شدهٔ زیر، گرفتن نتیجه‌ای را ممکن می‌سازد.

قضیهٔ ۷.۱۴. نسبت تقاطعی چهار نقطه تحت تصویر لایتغیر است.

قضیهٔ ۷.۱۵. تبدیلی که نسبت تقاطعی هر چهار نقطهٔ واقع بر یک استقامت را محفوظ نگه می‌دارد تبدیل تصویری است.

قضیهٔ ۷.۱۴ و قضیهٔ ۷.۱۵ را می‌توان در مورد خط $x_1 = 0$ به کار برد. دستگاه معادلات مقارن داده شده در قضیهٔ ۷.۱۲ نقطهٔ $(0,x_2,x_3)$ واقع بر $x_1 = 0$ را به

$$(e_1x_2 + f_1x_3\ ,\ e_2x_2 + f_2x_3\ ,\ e_3x_2 + f_3x_3)$$

تبدیل می‌کند. چهار نقطهٔ $(1,0,0)$، $(1,1,0)$، $(0,1,0)$، و $(0,x_2,x_3)$ دارای نسبت تقاطعی x_2 / x_3 اند، زیرا

$$(0,x_2,x_3) = (0, \frac{x_2}{x_3}, 1)$$

می‌توان تحقیق کرد که این چهار نقطه به چهار نقطه با همین نسبت تقاطعی تصویر شده‌اند. و از آن جا که چهار مجموعهٔ مختصات انتخاب شده می‌توانند هر چهار نقطهٔ واقع بر خط مربوطه را نمایش دهند، خط مورد بحث به طور تصویری تبدیل شده است.

اکنون ثابت کرده‌ایم که هر تبدیل تصویری واقع در صفحهٔ تصویری دارای معادلاتی به صورت

$$x'_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$x'_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

$$x'_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

با این قید که دترمینان ضرایب شان،

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

صفر نباشد، است.

دستگاه معادلات فوق را می‌توان به عنوان معادله‌ای ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$(x'_1 \;\; x'_2 \;\; x'_3) = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

به خاطر بیاورید که با حالات خاص ماتریس عمومی فوق قبلاً مواجه شده‌ایم. به عنوان مثال، هر ماتریس تشابه دارای صورت

$$\begin{pmatrix} a_1 & \pm(-a_2) & 0 \\ a_2 & (\pm a_1) & 0 \\ a_3 & a_4 & 1 \end{pmatrix}$$

با $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$، و هر حرکت در صفحه دارای همین صورت با $a_1^2 + a_2^2 = 1$ است.

کاربرد ماتریس های تبدیل با مختصات همگن در فضای سه بعدی در گرافیك های کامپیوتری، به خصوص در کاربردهای فنی دارای اهمیت است. ماتریس های 4×4 را می‌توان برای نشان دادن اثر اعضای گوناگون شان به زیر ماتریس هایی افراز کرد.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)$$

زیر ماتریس A	3×3	مقیاس، برش، دوران، تقارن
زیر ماتریس B	1×3	انتقال
زیر ماتریس C	3×1	ترسیم پرسپکتیوی
زیر ماتریس D	1×1	مقیاس جامع

ابتدا مثال های شامل اعضای در زیر ماتریس A داده می‌شود:

مقیاس ناحیه‌ای

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بوش
$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

تقارن نسبت به صفحهٔ $z = ۰$
$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

ماتریس بعد نشان می‌دهد که چگونه یک مقدار در زیر ماتریس D برای مقیاس جامع به‌کار رفته است.

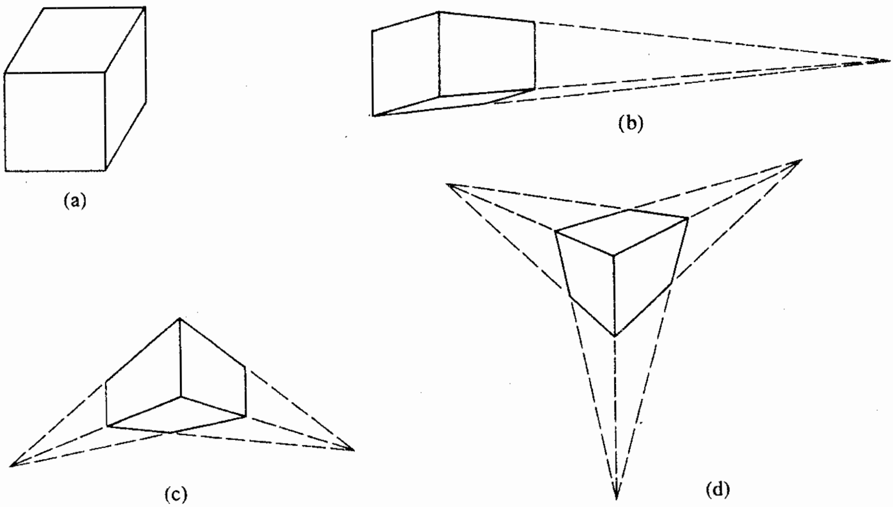
مقیاس جامع
$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی زیر نشان می‌دهد که اعضای واقع در زیر ماتریس B چگونه برای انجام انتقالی در فضای سه بعدی به‌کار رفته است:

$$(۲ \ ۱ \ -۳ \ ۱) \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix} = (۴ \ ۴ \ ۱ \ ۱)$$

بررسی و ملاحظه کنید که ماتریس تبدیل فوق هر نقطهٔ $(x,y,z,۱)$ رابه $(x+۲ ، y+۳ ، z+۴ ، ۱)$ تبدیل می‌کند.

تنها مفهوم تاکنون به توضیح نیامده استفاده از اعضای ناصفر واقع در زیر ماتریس C در به دست دادن ترسیمی پرسپکتیوی است. در مورد ترسیم سه بعدی یک جعبه، چون آن چه که در شکل ۷.۳۸ a نموده‌ایم، خطوط موازی شیء اصلی در ترسیم موازی باقی می‌مانند. از طرف دیگر، در ترسیمات پرسپکتیوی در هنر و نقشه، خطوطی که در اصل موازی‌اند در ترسیم در نقاطی موسوم به نقاط محو تقارب می‌کنند. اگر خطوط در اصل موازی با تنها یک محور مختص تقارب کنند، نتیجه بوش پرسپکتیوی یک نقطه‌ای است. اگر خطوط در اصل موازی دو محور از محورهای مختصات تقارب کنند، نتیجه بوش پرسپکتیوی دو نقطه‌ای است، و اگر خطوط در اصل موازی سه محور از محورهای



شکل ۷.۳۸

مختصات تقارب کنند، نتیجه بوش پرسپکتیوی سه نقطه‌ای است. مثال های این سه نوع ترسیمات پرسپکتیوی را در شکل ۷.۳۸ b - d نشان داده‌ایم.

ماتریس‌های تبدیل مبدّل یک جعبه به‌شکلی باازواج لبه‌های ملاقی دریک یا بیش از یک نقطهٔ محو دارای یک یابیش ازیک عضوناصفر درزیر ماتریس C اند. فی المثل، ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

باعث می‌شود که خطوط موازی محور z ها در نقطهٔ محو $(۰،۰،\frac{۱}{۳}،۱)$ تلاقی کنند. امثلهٔ ماتریس های بوش های پرسپکتیوی دو و سه نقطه‌ای عبارت‌اند از:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

مثال عملی دیگری از ماتریس ها در هندسهٔ تصویری سه بعدی ، تصویرات محور سنجی [۴۵] به‌کاررفته درعملیات مهندسی است. تصویرات محورسنجی در تهیهٔ مناظر دوبعدی

45. Axonometric Projections

گوناگون (موسوم به مناظر معین) شیء سه بعدی به کار می‌رود. تصویرات محورسنجی به علت آن که سبب تغییر بعد می‌شوند، از لحاظ فنی به جای تبدیلات گسترش‌اند، و دترمینان ماتریس مربوطه شان صفر است، و بنابراین معکوس موجود نیست.

ماتریس یک تصویر محورسنجی را می‌توان حاصل ضرب دو ماتریس دیگر در نظر گرفت. اولین این دو تبدیلی است که در دوران یا انتقال به کار می‌رود، و دومین آن ها تصویر کل شکل بر صفحهٔ خاصی، موسوم به صفحهٔ منظر است. در این مورد دو مثال زیر آورده می‌شود.

مثال.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس به تصویری بر صفحهٔ ۲ = z منجر می‌شود. می‌توان تحقیق کرد که هر نقطهٔ $(x,y,z,1)$ به $(x,y,2,1)$ تبدیل یافته، و در نتیجه جمیع نقاط تصویر در صفحه ۲ = z هستند. نیز باید تحقیق کنید که دترمینان این ماتریس صفر است.

مثال.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس فوق به دوران ۹۰ درجه حول محور xها، سپس به تصویری بر صفحهٔ ۰ = z منتج می‌شود.

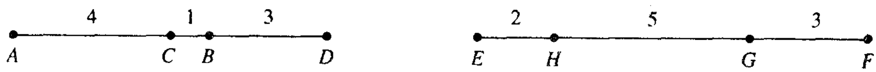
تمرینات ۷.۷

۱. اعداد a، b، c را برای نشان دادن این که خط گذرنده از (۱،۱،۱) و (۳،۲،۱) از (۷،۴،۱) نیز می‌گذرد بیابید.

در تمرینات ۲ و ۳، مزدوج توافقی نقطهٔ سوم را نسبت به دو نقطهٔ اول بیابید.

۲. (۳،۱)، (-۲،۵)، (۱،۶)

۳. (-۱،-۲)، (۳،۲)، (۲،۰)



شکل ۷.۳۹

در تمرینات ۴-۷، با استفاده از شکل ۷.۳۹، مقدار هر نسبت تقاطعی مشخص شده را بیابید.

۴. (AB,CD)

۵. (AB,BD)

۶. (EF,HG)

۷. (EH,GF)

در تمرینات ۸ - ۱۰، تبدیل تصویری زیر را به‌کار برید.

$$x'_۱ = x_۱ + x_۲ + x_۳$$

$$x'_۲ = x_۱ - x_۲ + x_۳$$

$$x'_۳ = x_۱ + x_۲ - x_۳$$

۸. تصاویر نقاط (۰،۰،۱)، (۱،۰،۰)، (۱،۰،۱)، و (۳،۰،۵) را بیابید.
۹. نسبت تقاطعی چهار نقطهٔ اصلی تمرین ۸ را بیابید.
۱۰. تحقیق کنید که نسبت تقاطعی تصاویر نقاط همان نسبت تقاطعی اصلی تمرین ۹ است.

در تمرینات ۱۱-۱۴، چه نوع تبدیلی، در صورت وجود، توسط هر ماتریس نمایش داده شده است؟

۱۱. $\begin{pmatrix} ۲ & -۳ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$

۱۲. $\begin{pmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{pmatrix}$

۱۳. $\begin{pmatrix} ۱ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۰ \\ ۳ & ۶ & ۵ \end{pmatrix}$

۱۴. $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$

در تمرینات ۱۵ - ۲۴، هر یک از ماتریس ها را برای تبدیل یا گسترش شناسایی کنید، بعد از

ضرب ماتریسی در یافتن تصویر نقاط (۱،۱،۰،۱) ، (۱،۱،۱،۰) ، (۱،۰،۰،۰) ، و (۱،۰،۱،۱) استفاده کنید.

.۱۵
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.۱۶
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

.۱۷
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.۱۸
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

.۱۹
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.۲۰
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.۲۱
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.۲۲
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.۲۳
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.۲۴
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۲۵. ثابت کنید که اگر سه نقطهٔ (x_1,x_2,x_3) ، (y_1,y_2,y_3) ، (z_1,z_2,z_3) واقع بر یک استقامت باشند، سه عدد نه همه صفر a ، b ، c چنان موجود است که $ax_i + by_i + cz_i = 0$ باشد.

۲۶. ثابت کنید که ماتریس تبدیل

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

باعث می‌شود که خطوط موازی محور y ها در نقطهٔ محور $(1, 0, \frac{1}{a}, 0)$ تلاقی کنند.

۲۷I. تعریف صوری ای در مورد تفکیک بنویسید.

۲۸I. نشان دهید که مفهوم نسبت تقاطعی به عنوان نسبت نسبت ها با تعریف اصلی داده شده سازگار است.

۲۹I. قضایای ۷.۱۴ و ۷.۱۵ را اثبات کنید، یا اثبات هایی را که در مرجعی می‌یابید مطالعه کنید.

۷.۸ بوش های تصویری خاص

در این بخش بعضی از حالات بوش‌های تصویری در فضای یک یا دوبعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بوش تصویری یک بعدی نقاط واقع بر یک خط نقاط واقع بر آن خط را دوباره نام می‌دهد.

تعریف. بوش تصویری یک‌بعدی بیضوی[۴۶]، سهموی[۴۷]، یا هذلولوی[۴۸] **نامیده می‌شود اگرتعداد** نقاط لایتغیر به ترتیب صفر، یک، یا دو باشد. در صورتی که سه نقطهٔ لایتغیر وجود داشته باشد، بوش تصویری تبدیل عینیت است.

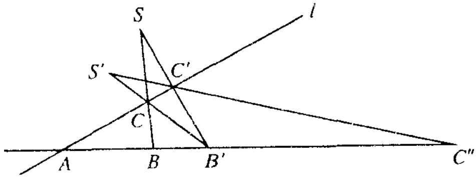
با استفاده از قضیهٔ اصلی هندسهٔ تصویری می‌توان نشان داد که:

۱. بوش تصویری هذلولوی چون هر دو نقطهٔ لایتغیر و یک دستهٔ دیگر از نقاط متناظر آن داده شده باشند به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود.

۲. بوش تصویری سهموی چون نقطهٔ لایتغیر و دو دستهٔ دیگر از نقاط متناظر آن داده شده باشند به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود.

گزارهٔ دوم اخیر را می‌توان با اثبات قضیهٔ زیر به طور معنی داری کوتاه کرد:

قضیهٔ ۷.۱۶. بوش تصویری سهموی چون نقطهٔ لایتغیر و یک مجموعهٔ دیگر از نقاط متناظر آن معلوم باشد به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود.



شکل ۷.۴۰

46. Elliptic
47. Parabolic
48. Hyperbolic

اثبات: در شکل ۷.۴۰، فرض می‌کنیم بوش تصویری سهموی ای، با نقطهٔ لایتغیر A و یک زوج نقطهٔ دلخواه دیگر B و B' مفروض باشد. نقطهٔ دلخواه S را می‌توان چنان انتخاب کرد که $ABB' \overset{S}{\barwedge} ACC'$، که در آن A، C، C' واقع بر خط l گذرنده از Aی ناشامل S اند، باشد. مرکز بوش پرسپکتیوی دوم S' را می‌توان چنان اختیار کرد که $ACC' \overset{S'}{\barwedge} AB'C'$ باشد. تصویر هر نقطهٔ دیگر D واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ را می‌توان با به کاربردن دو بوش پرسپکتیوی معین شده یافت. از آن چه که تاکنون گفته‌ایم، ثابت نشده که بوش تصویری تعیین شده در واقع به جای هذلولوی سهموی است. یعنی، به ازای نقطهٔ Dای بر خط AB، دو بوش پرسپکتیوی مذکور می‌توانند به D، در حالی که نقطهٔ لایتغیر دومی را به دست می‌دهند، به عنوان تصویر آن منجر شوند، و برای این که چنین اتفاق بیفتد، باید D، S، و S' واقع بر یک استقامت باشند، و این وضعیتی است که می‌توان از آن به سادگی با درج این محدودیت که S و S' بر یک خط گذرنده از A واقع اند، اجتناب کرد.

بعضی بوش‌های تصویری خاص، به این مفهوم که بعد از تعداد متناهی‌ای کاربرد به تبدیل عینیت منجر می‌شوند، متناوب‌اند.

تعریف. بوش تصویری با تناوب[49] n بوش تصویری ای است که باید، پیش از آن که برای اولین‌بار به تبدیل عینیت منتج شود، n بار تکرار شود.

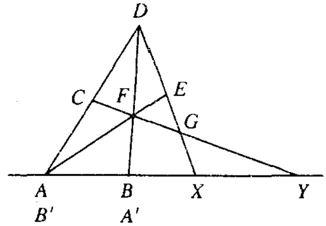
تعریف. پیچیدگی[50] بوش تصویری با تناوب دو است.

به طور شهودی می‌توان ملاحظه کرد که پیچیدگی یک بعدی ازواج نقاط را به هم تبدیل می‌کند. قضیهٔ زیر حداقل شرایط پیچیدگی بودن یک بوش تصویری را مشخص می‌کند.

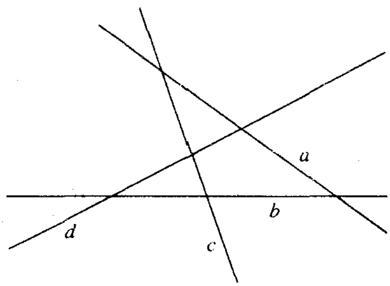
قضیهٔ ۷.۱۷ . بوش تصویری یک بعدی ای که یک زوج نقطهٔ متمایز را معاوضه می‌کند پیچیدگی است.

---

49. Period　　50. Involution



شکل ۷.۴۱



شکل ۷.۴۲

اثبات: در شکل ۷.۴۱، فرض می‌کنیم ABX سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت متمایز مفروض، با تصاویر A'B'Y شان در بوش تصویری‌ای که A و B را به یکدیگر تبدیل می‌کند باشد. شش نقطهٔ فوق بوش تصویری منحصر به فردی را که می‌تواند توسط بوش های پرسپکتیوی:

$$ABXY \overset{F}{\barwedge} EDXG \overset{A}{\barwedge} FCYG \overset{D}{\barwedge} BAYX$$

نمایش داده شود معین می‌کنند، بنابراین $ABXY \barwedge BAYX$. این بوش تصویری جمیع ازواج نقاط XY را به یکدیگر تبدیل می‌کند و پیچیدگی است.

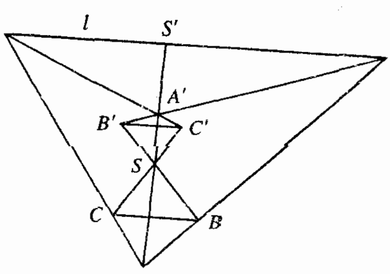
تا این جا بعضی از تبدیل های یک بعدی خاص را ذکر کردیم، و مع هذا تبدیلات یک بعدی در بحث هندسهٔ تصویری صفحه درگیرند. بوش تصویری دو بعدی هر مجموعهٔ یک بعدی را به‌طور تصویری تبدیل می‌کند. به عبارت‌دیگر تبدیل تصویری دو بعدی می‌تواند شامل هر نقطهٔ صفحه‌مان باشد، اما هر خط واقع در صفحه به خط دیگر تبدیل می‌شود و بنابراین بوش تصویری توسط نقاط واقع بر دو خط مذکور مشخص شده است.

قضیهٔ ۷.۱۸ . تبدیل تصویری دو بعدی ای که چهار خط یک چهار ضلعی کامل را لایتغیر می‌گذارد تبدیل عینیت است.

همان‌گونه که در شکل ۷.۴۲ در مورد چهار ضلعی a، b، c، d به تصویر آورده‌ایم، هر سه از شش رأس بر یکی از خط ها واقع است، و این رئوس نقاط لایتغیرند. بین دو ضلع متناظر بوشی تصویری موجود است، و هر نقطهٔ واقع بر این اضلاع باید لایتغیر باشد زیرا سه زوج چنین‌اند. هر خط دیگر واقع در صفحه اضلاع این چهار ضلعی را در نقاط لایتغیر تلاقی می‌کند، بنابراین سه نقطهٔ لایتغیر موجود است، و هر نقطهٔ واقع بر آن باید لایتغیر باشد، بنابراین تبدیل مورد بحث عینیت است.

انواع خاص بوش‌های تصویری دو بعدی شامل بوشی موسوم به هم راستایی پرسپکتیوی[51] است که دو مثلث پرسپکتیو مفروض را به هم ربط می‌دهد، به این ترتیب که، دو مثلث مزبور تحت بوشی تصویری، تصویراندوپرسپکتیو نیز هستند. نقطه و خط بوش پرسپکتیوی مرکز و محور تبدیل مذکورند. حالت خاصی که در مورد آن مرکز مزبور برمحور موصوف واقع می‌شود تعالی[52] نامیده می‌شود، درحالی‌که جمیع تبدیلات دیگر این نوع همانندی‌ها[53] یند. حالتی خاص در این مورد همانندی‌ای است که در آن مزدوج توافقی مرکز تبدیل نسبت به ازواج نقاط متناظر واقع بر محور آن است. این تبدیل همانندی توافقی[54] نامیده می‌شود و با مثال شکل ۷.۴۳ به تصویر کشیده شده است. در این شکل مثلث‌های ABC و A′B′C′ از نقطهٔ S و خط l پرسپکتیوند. از این گذشته، مزدوج توافقی S نسبت به ازواج رئوس متناظر بر خط l واقع‌اند. به عنوان مثال، S′ مزدوج توافقی S نسبت به A و A′ است.

اگر مرکز و محور مفروض باشند، ازواج نقاط متناظر واقع در همانندی توافقی را می‌توان معین کرد، زیرا آنها مزدوج‌های توافقی نسبت به مرکز و نقطه‌ای واقع بر یک استقامت واقع بر محورند. این نوع تبدیل به تناوب دو است، زیرا تکرار آن به عینیت منتج می‌شود. در واقع، می‌توان ثابت کرد که هر تبدیل دوبعدی به تناوب دو یک همانندی توافقی است.



شکل ۷.۴۳

---

51. Perspective Collineation

52. Elation

53. Homologies

54. Harmonic Homology

تمرینات ۷.۸

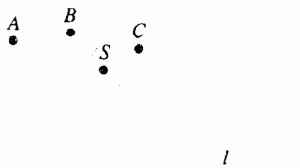
۱. توضیح دهید که چرا تقارن مثالی از پیچیدگی است.
۲. در حالت کلی، آیا تقارن سرشی پیچیدگی است؟

در تمرینات ۳-۵، مثالی از دورانی که به تناوب داده شده است بدهید:

۳. دو　　　۴. سه　　　۵. چهار

٦. نشان دهید که در یک بوش تصویری سهموی یک بعدی، چگونه تصویرهر نقطهٔ دیگر واقع بر خط آن را می‌توان در صورتی که نقطهٔ لایتغیر و دستهٔ دیگری از نقاط متناظر مفروض باشند، رسم کرد.
۷. نشان دهید که در یک بوش هذلولوی یک بعدی، چگونه تصویر هر نقطهٔ دیگر واقع بر خط آن را می‌توان در صورتی که نقاط لایتغیر و دستهٔ دیگری از نقاط متناظر مفروض باشند، رسم کرد.
۸. قضیه‌ای در مورد اطلاعات موردنیاز در تعیین یک پیچیدگی یک‌بعدی منحصربه‌فرد بیان و اثبات کنید.
۹. تثنیهٔ سطحی قضیهٔ ۷.۱۸ را بیان و با نوشتن تثنیهٔ اثبات قضیهٔ ۷.۱۸ آن را اثبات کنید.
۱۰. مثالی از تعالی را طرح کنید.
۱۱. آیا تعالی می‌تواند همانندی توافقی باشد؟
۱۲. همانندی‌ای که همانندی توافقی نیست طرح کنید.
۱۳. در شکل ۷.۴۴، فرض می‌کنیم S و l یک همانندی توافقی را مشخص کنند. تصاویر نقاط A، B، C را رسم کنید.

در تمرینات ۱۴-۱٦، در صورت امکان، برای یافتن مقادیر حقیقی ناصفر a، به‌طوری‌که



شکل ۷.۴۴

تبدیل‌مان پیچیدگی باشد، از ضرب ماتریسها استفاده کنید.

۱۴. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۱۵. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

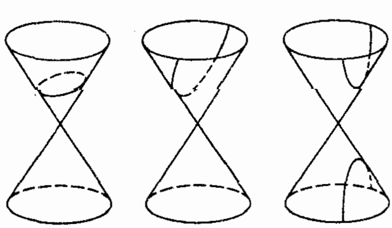
۱۶. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۱۷I. با استفاده از توانهای ماتریس، امکان وضع شرایطی چنان که، علاوه‌بر دورانات، تبدیلات دیگری بتوانند دارای تناوب سه یا بیشتر باشند را بررسی کنید. آیا می‌توانید یکی کشف کنید؟

۷.۹. مخروطیات (مقاطع مخروطی)

تمام مخروطیات گوناگون هندسهٔ اقلیدسی را می‌توان به عنوان مقاطع مخروطهای دودامنه، چنان که در شکل ۷.۴۵ به تصویر آمده، توصیف کرد. شکل ۷.۴۵، از نظرگاهی متفاوت، نشان می‌دهد که دایره را می‌توان به بیضی (شکل ۷.۴۵a)، سهمی (شکل ۷.۴۵b)، یا هذلولی (شکل ۷.۴۵c) تصویر کرد. خاصیت مخروطی بودن تحت‌گروه تبدیلات تصویری لایتغیر است، اما خاصیت بیضی، سهمی، یا هذلولی بودن نیست. خاصیت تغییرناپذیربودن مخروطی توضیح می‌دهد که چرا در این فصل داخل شده است.

درست همان‌گونه که بیش‌از یک‌طریق در تعریف مقاطع مخروطی در هندسهٔ تحلیلی اقلیدسی موجود است، بیش‌از یک امکان در هندسهٔ تصویری وجود دارد. تعریفات اول اختیارشده در این مرحله منسوب به ژاکوب اشتینر[55]، ریاضیدان سوئیسی‌ای که (در سال ۱۸۳۲) راجع به تقسیم توافقی و مقاطع مخروطی در هندسهٔ تصویری نوشت، است. تعاریف



(a) (b) (c)

شکل ۷.۴۵

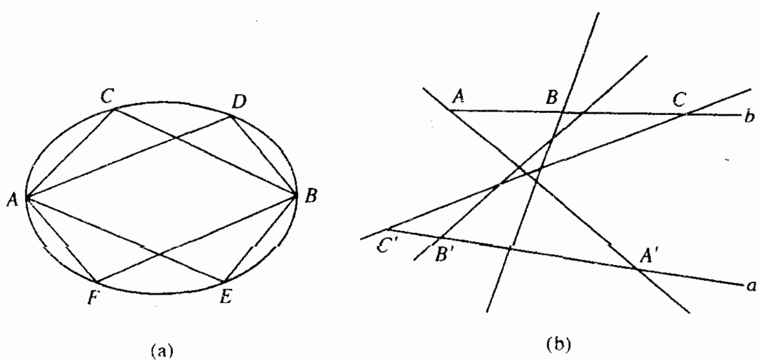
55. Jacob Steiner

مذکور به این علت به‌کار رفته‌اند که به طور واضح به رابطهٔ بین مخروطیات و بوشهای تصویری قبلاً بررسی شده را تأکید دارند. در این تعریفات دسته‌های خطوط[56] مجموعه‌های خطوط متقارب[57] و ردیف‌های نقاط مجموعه‌های نقاط واقع بر یک استقامت‌اند.

تعریف. مخروطی نقطه‌ای[58] مجموعه‌ای از نقاطی است که تقاطعات خطوط متناظر در دو دسته خطوط به طور تصویری در ارتباط واقع در یک صفحه‌اند.

تعریف. مخروطی خطی[59] مجموعه‌ای از خطوطی است که نقاط متناظر در دو ردیف نقاط به‌طور تصویری در ارتباط واقع در یک صفحه را وصل می‌کنند.

نیک است که بر تعاریف جالب فوق تأملی داشته باشیم. ملاحظه کنید که چند شکل قبلی این فصل شامل نقاطی واقع بریک مخروطی بوده‌اند، گرچه متن کتاب به این واقعیت توجه نداده است، و درحالی که ممکن است که تطبیق کامل تعاریف مزبور با مفاهیم شهودی از آنچه که یک مخروطی هست بسیار مشکل باشد، ملاحظهٔ این مطلب مشکل نیست که تعاریف مورد بحث برای این حقیقت که هیچ سه نقطهٔ یک مخروطی نقطه‌ای واقع بر یک استقامت نباشد درنظر گرفته شده‌اند. شکل‌های ۷.۴۶ a و b یک مخروطی نقطه‌ای و یک مخروطی خطی، با تأکیدبر ارتباطات بین آنها و بوش‌های تصویری تعیین کنندهٔ آنها را نشان می‌دهند. در شکل ۷.۴۶a، A و B مراکز دو دستهٔ به‌طور تصویری در ارتباط، با نقاط تقاطع خط متناظر C، D، E، F به‌طوری که بوش تصویری مورد بحث با



شکل ۷.۴۶

56. Pencils of Lines
57. Ranges of Points
58. Point Conic
59. Line Conic

$$(\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{AF} - \barwedge\ \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{BF} -)$$

مشخص شده است، می‌باشند. در شکل ۷.۴۶b، a و b خطوطی با دو ردیف نقطهٔ به‌طور تصویری در ارتباط A، A′؛ B، B′؛ C، C′ ازواج نقاط متناظرند به‌طوری که بوش تصویری مذکور با

$$(A, B, C - \barwedge\ A', B', C' -).$$

مشخص شده است.

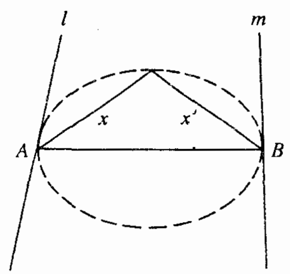
دو قضیهٔ در مورد مخروطی‌های نقطه‌ای زیر خواص بیشتری را مشخص می‌کند.

قضیهٔ ۷.۱۹. مراکز دسته‌های خطوط واقع در بوش تصویری معرف مخروطی نقطه‌ای خود نیز نقاطی از آن مخروطی‌اند.

اثبات: در شکل ۷.۴۷، فرض می‌کنیم A و B مراکز مفروض باشند. اگر $\overleftrightarrow{AB}$ به‌عنوان یکی از خطوط واقع در دسته با Aای به عنوان مرکز درنظر گرفته شود، در این صورت خط متناظر m آن یکی از خطوط واقع در دستهٔ مورد بحث با Bی به‌عنوان مرکز است. دو خط مذکور در B، نقطه‌ای واقع بر مخروطی تقاطع می‌کنند. به همین ترتیب، A بر $\overleftrightarrow{AB}$، که به‌عنوان خطی گذرنده از B درنظر گرفته شده، و بر l خط متناظر گذرنده از Aیش واقع است.

تعریف. مماس بر مخروطی نقطه‌ای خطی واقع در صفحهٔ مخروطی دارای دقیقاً یک نقطهٔ مشترک با آن است.

قضیهٔ ۷.۲۰. خطوط متناظر با خط مشترک دو دسته خطوط معرف یک مخروطی نقطه‌ای مماس‌های در مراکز آن دو دسته خطوط‌اند.



شکل ۷.۴۷

اثبات: در شکل ۷.۴۷، هر خط x گذرنده از A دو نقطهٔ مشترک، A و تقاطع x با خط متناظرش، با مخروطی دارد. اما بنابه قضیهٔ ۷.۱۹، اگر x′ به‌صورت خط گذرنده از B ی $\overleftrightarrow{AB}$ درنظر گرفته شود، در این صورت x و x′ در A متقاطع می‌شوند، بنابراین باید x مماس I باشد.

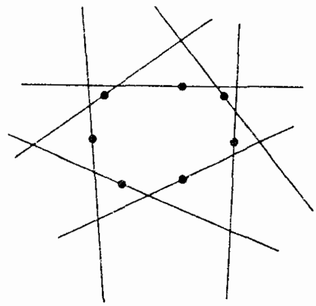
طرح دوم در تعریف مخروطیات در هندسهٔ تصویری نیازبه معرفی چندین مفهوم جدید دارد. تا این مرحله، بوشهای تصویری را به چنان طریقی تعریف کرده‌ایم که نقاط را با نقاط و خطوط را با خطوط زوج می‌کنند. همراستایی[60] را می‌توان به صورت تبدیل نقطه ـ به ـ نقطه یا خط ـ به ـ خطی که تلاقی را محفوظ نگه می‌دارد تعریف کرد. همراستایی تصویری همراستایی‌ای است که هر دسته یا ردیف را به‌طور تصویری تبدیل می‌کند. امکان دارد که تعریف مذکور را برای دربرگرفتن تناظر بین نقاط و خطوط تعمیم دهیم. در این صورت نوع اصلی بوش تصویری همراستایی، و نوع جدیدتر اکنون معرفی شده همنسبتی[61] است. دستگاه معادلات نمایشگر همنسبتی دارای مختصات خطی حروف پریم‌دار، اما از جهات دیگر به همان صورت همراستایی است. در همنسبتی، هرجزء و تثنیهٔ سطحی‌اش متناظرند، و به این ترتیب، تصویر یک چهارگوشه‌ای کامل چهارضلعی‌ای کامل است.

همنسبتی تصویری موردتوجه خاص این کتاب همنسبتی به تناوب دو، موسوم به قطبیت[62]، است. قطبیت نقطه‌ای موسوم به قطب و خطی موسوم به قطبی، چون A و a در شکل ۷.۴۸، را زوج می‌کند. هر نقطهٔ X واقع‌بر a با خط x گذرنده از A ای زوج می‌شود. نقاطی چون A و X نقاط مزدوج‌اند، زیرا قطبی یکی از دیگری می‌گذرد. به همین ترتیب، x و a خطوط مزدوج می‌باشند.

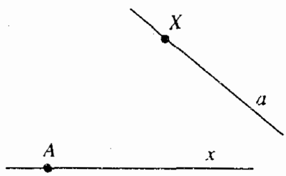
درشکل ۷.۴۸، نقاط مزدوج A و X متمایزند. قطبیت را قطبیت هذلولوی[63] نامند. اگر نقطه‌ای بتواند خود مزدوج باشد، نقطهٔ خود ـ مزدوج برقطبی خود واقع است. شکل ۷.۴۹ خطوط گوناگونی، بانقاط خود ـ مزدوج مشخص شده، را دریک قطبیت هذلولوی نشان می‌دهد. اکنون می‌توان از این مفاهیم در به دست دادن تعریف دیگری در مورد مخروطی‌ها استفاده کرد. بررسی مجموعه‌های نقاط مزدوج نسبت به یک مخروطی را می‌توان در مورد تبدیلی موسوم به تعویض قطبی[64]، که به تناظر قطبها و قطبی‌های نسبت به یک مخروطی منجر می‌شود، به کاربرد (تمرین 15I را ملاحظه کنید).

---

60. Collineation
61. Correlation
62. Polarity
63. Hyperbolic Polarity
64. Polar Reciprocation



شکل ۷.۴۹



شکل ۷.۴۸

تعریف. مخروطی نقطه‌ای مجموعه‌ای نقاط خود- مزدوج در یک قطبیت هذلولوی است.

این بخش را با دو قضیهٔ مهم، تثنیهٔ سطحی یکدیگر، که خاصیت دیگری از هر مخروطی را به دست می‌دهند ختم می‌کنیم.

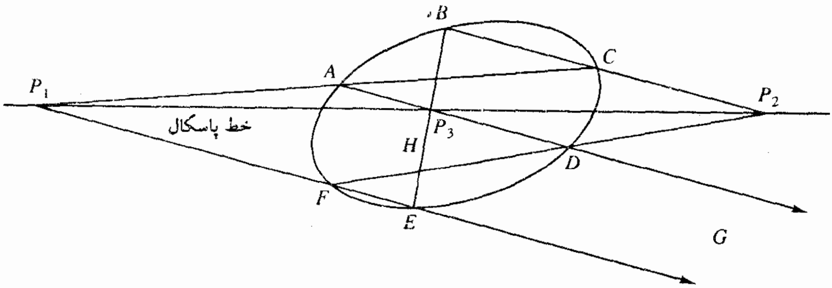
تعریف. شش‌ضلعی ساده[65] مجموعهٔ شش نقطه در یک صفحه، هر سه نقطه‌ای از آنها ناواقع‌بر یک‌استقامت، و خطوط واصل آنها به ترتیبی خاص، است. اضلاع مقابل یک شش‌ضلعی با رئوس متوالی A، B، C، D، E، F، عبارت‌اند از $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{DE}$، $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{EF}$، و $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{AF}$. این تعریف شش‌ضلعی‌هایی را که اضلاع مقابل آنها در داخل مخروطی تقاطع می‌کنند مجاز می‌کند.

قضیهٔ ۷.۲۱ (پاسکال). اگر شش‌ضلعی ساده‌ای در یک مخروطی نقطه‌ای محاط شود، تقاطعات سه زوج اضلاع مقابل آن واقع بر یک استقامت‌اند.

فرض می‌کنیم ACBEFD در شکل ۷.۵۰ هر شش‌ضلعی سادهٔ محاطی‌ای رانمایش دهد. ازواج اضلاع مقابل آن عبارت‌اند از $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{EF}$، $\overleftrightarrow{CB}$ و $\overleftrightarrow{FD}$، و $\overleftrightarrow{BE}$ و $\overleftrightarrow{DA}$. فرض می‌کنیم نقاط تقاطع P_1، P_2، P_3 باشند. مطلوب اثبات بر یک استقامت واقع‌بودن این سه‌نقطه است. روش اثبات واقع بر یک استقامت بودن سه‌نقطه نشان دادن این است که دو نقطه از آنها، در بوش پرسپکتیوی‌ای که در آن نقطهٔ سوم مرکز است، متناظرند.

---

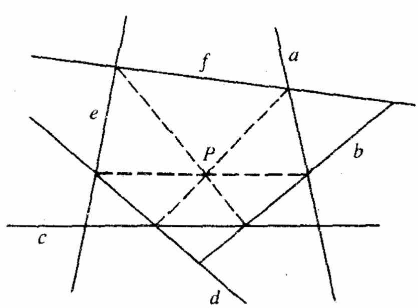
65. Simple Hexagon



شکل ۷.۵۰

دو نقطهٔ A و B را می‌توان به‌عنوان مراکز دسته‌های خطوط واقع در بوش تصویری تعیین‌کنندهٔ مخروطی انتخاب کرد. نیز بوش تصویری‌ای مشخص بر $\overleftrightarrow{EF}$ و $\overleftrightarrow{FD}$ با درنظرگرفتن نقاط تقاطع این خطوط و ازواج خطوط متناظر در بوش تصویری قبلی موجود است. و این بدان معنی است که اگر $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{EF}$ در G، و $\overleftrightarrow{BE}$ و $\overleftrightarrow{FD}$ در H تلاقی کنند، در این‌صورت $P_1EFG \overline{\wedge} P_2HFD$. این دو مجموعه نقاط عضو مشترک f شان را خود ـ متناظر دارند، و با بوشی پرسپکتیوی در ارتباط‌اند (تمرین ۸، تمرینات ۷.۹ را ملاحظه کنید). مرکز این بوش پرسپکتیوی P_3 است، که مستلزم این است که، چنان‌که باید اثبات می‌کردیم، P_1 و P_2 برخطی گذرنده از P_3 واقع‌اند.

شش رأس شش‌ضلعی ساده، ۶۰ شش‌ضلعی متفاوت را که از وصل نقاط رئوس در ترتیبات متفاوت به‌وجود می‌آیند، مشخص می‌کند. هر یک از این شش‌ضلعی‌ها به نوبهٔ خود خط پاسکال متفاوتی دارد. ۶۰ خط پاسکال مذکور با شش‌نقطهٔ معلوم واقع بر یک مخروطی



شکل ۷.۵۱

که به عنوان شش پرعرفانی پاسکال[66] معروف‌اند وابسته‌اند.

قضیهٔ ۷.۲۲. قضیهٔ بریانشون[67]. اگر شش خط شش‌ضلعی ساده‌ای خطوط مخروطی خطی‌ای باشد، در این صورت سه خط رابط ازواج رئوس مقابل شش‌ضلعی متقارب‌اند.

اگر شش خط متوالی مزبور a، b، c، d، e، f باشند، در این صورت رئوس مقابل نقاط تقاطع a، b و d، e؛ b، c و e، f؛ c، d و f، a هستند. شکل ۷.۵۱ قضیه را به تصویر می‌کشد. نقطهٔ تقارب p به نقطهٔ بریانشون موسوم است.

تمرینات ۷.۹

۱. اثر تجویز پرسپکتیوبودن دسته‌های خطوط در تعریف مخروطی نقطه‌ای چیست؟

۲. به اشکال قبل از شکل ۷.۴۵ این فصل، که می‌توان در آنها نقاطی بر مخروطی مشخص کرد اشاره کنید.

۳. تثنیهٔ سطحی قضیهٔ ۷.۱۹ رابیان کنید.

۴. تثنیهٔ سطحی قضیهٔ ۷.۲۰ رابیان کنید.

۵. معادلهٔ خطی را که تصویر نقطهٔ (۱،۱،۱) تحت همنستبی به معادلات

$$X'_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$X'_2 = x_1 - x_2 - x_3$$
$$X'_3 = x_1 + x_2 - x_3$$

است، بیابید.

۶. ثابت کنید که خط واصل دو نقطهٔ خود- مزدوج در یک قطبیت نمی‌تواند خطی خود- مزدوج (گذرنده از قطبش) باشد.

۷. در شکل ۷.۴۸، فرض می‌کنیم تقاطع a و x نقطهٔ Y باشد. مثلثی چنان‌که هر رأس آن قطب ضلع مقابلش باشد به مثلث خود- قطبی موسوم است، آیا مثلث AXY لزوماً مثلثی خود- قطبی است.

۸. ثابت کنید اگر دو مجموعه نقاط در یک بوش تصویری واقع بر دو خط دارای نقطهٔ خود-

---

66. Pascal's Mystic Hexagram

67. Brianchon's Theorem

متناظر مشترک‌شان باشند، با بوش پرسپکتیوی‌ای در ارتباط‌اند.

۹. توضیح دهید چرا شش‌نقطهٔ، هر سه‌ای از آنها ناواقع‌بر یک‌استقامت، ۶۰ شش‌ضلعی مشخص می‌کنند.

۱۰. قضیهٔ بریانشون را مستقیماً ثابت کنید.

۱۱. معادلهٔ عمومی یک مخروطی را در هندسهٔ تصویری با دوباره‌نویسی معادلهٔ
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
در مختصات همگن بنویسید.

۱۲. نقاط تقاطع خط $x_2 - 2x_3 = 0$ و مخروطی $x_1{}^2 - x_2x_3 = 0$ را بیابید.

۱۳. ثابت کنید که هر دونقطهٔ مزدوج A و Bی واقع‌بر قاطع مخروطی‌ای مزدوج‌های توافقی نسبت به نقاط تقاطع C و Dاند.

۱۴. ثابت کنید اگر یک چهارگوشه‌ای، در یک مخروطی محاط باشد، نقاط قطری آن مثلثی خود-قطبی می‌سازند.

۱۵I. مفهوم وموارداستعمال تعویض قطبی نسبت به‌یک‌مخروطی‌عمومی را(درموردزیریا مرجع دیگری) مطالعه‌کنید: Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2d Edition.

۱۶I. در یکی از کتب تاریخ ریاضی در مورد کودکی پاسکال و کشف قضیهٔ پاسکالش راجع به مخروطیات مطالعه کنید.

۱۷I. شش‌نقطه واقع‌بر یک بیضی درنظر بگیرید و ۶۰ خط شش پرعرفانی پاسکال را رسم کنید.

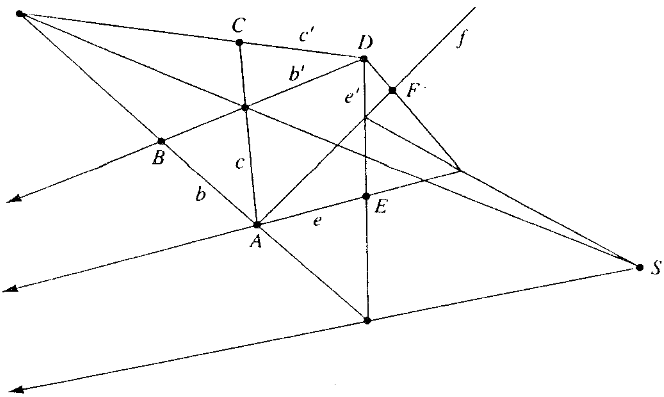
۱۸I. در شکل ۷.۵۱، نقاط بریانشون دیگری رسم کنید.

۱۹I. گسترش آکسیوماتیک هندسهٔ تصویری متناهی PG(۲،۵) را (با استفاده از مورد زیر یا مرجع دیگری) مطالعه کنید: Coxeter, *Projective Geometry*, 2d Edition (تمرین ۱.۶ را ملاحظه کنید).

۷.۱۰ ترسیم مخروطیات

به علت این که مخروطیات را برحسب بوش‌های تصویری تعریف کرده‌ایم، هر تعداد نقاط یا خطوط واقع به مخروطی را می‌توان تنها با استفاده از خط کش نامدرج، درصورتی که اطلاعات کافی برای تعیین یک بوش تصویری داده شده باشند، رسم کرد. این جریان را طی مثالهای زیر تحلیل می‌کنیم

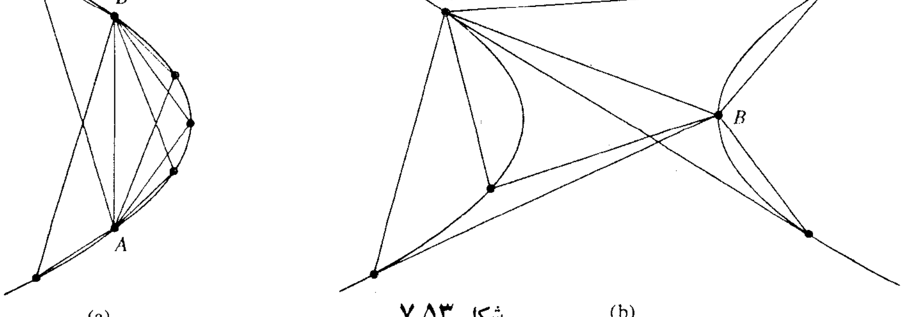
مثال. بامعلوم بودن پنج‌نقطه بر یک مخروطی نقطه‌ای، نقاط دیگر آن را رسم کنید.



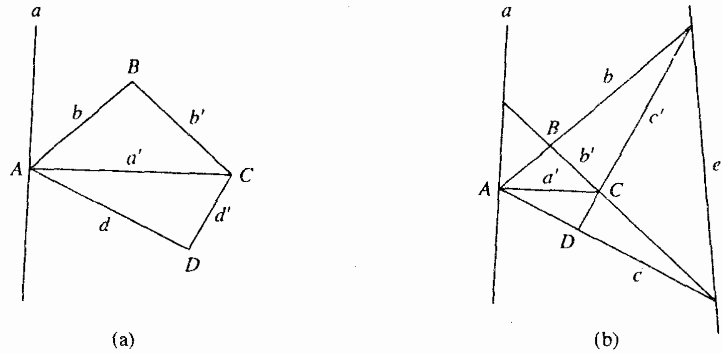
شکل ۷.۵۲

در شکل ۷.۵۲ فرض می‌کنیم A، B، C، D، E پنج‌نقطهٔ مفروض باشند. دونقطهٔ دلخواه از این نقاط، مثلاً A و D، را به‌عنوان مراکز دسته‌های خطوط یک بوش تصویری اختیار می‌کنیم. ازواج خطوط متناظر در B، C، E تلاقی می‌کنند. خطوط در دستهٔ به مرکز A را با حروف b، c، e، ...، و خطوط در دستهٔ به مرکز D را با حروف ′b، ′c، ′e، ... مشخص می‌کنیم. خطوط رابط تقاطعات اتصالات تقاطعیS، مرکز همانندی را مشخص می‌کنند. فرض می‌کنیم f خط گذرنده از Aی دیگری باشد. از آنجاکه ′fe و ′efباید در Sمتلاقی باشند، می‌توان ′fرا رسم کرد. تقاطع fو ′fنقطهٔ F، یکی از نقاط مطلوب است.

شکل ۷.۵۳ نقاط واقع بر سهمی و هذلولی‌ای را، به‌عنوان تقاطعات خطوط متناظر بوش‌های تصویری دونقطهٔ واقع بر مخروطی مربوطه، نشان می‌دهد.



شکل ۷.۵۳

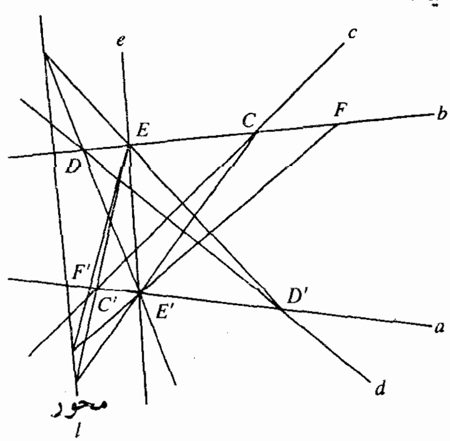


شکل ۷.۵۴

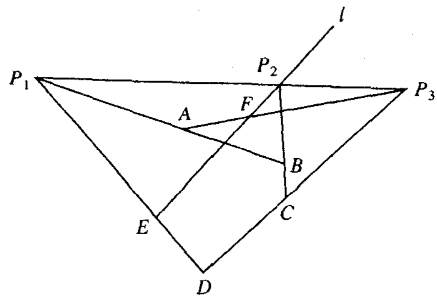
مثال. با معلوم بودن چهار نقطهٔ واقع بر یک مخروطی و مماس در یکی از آنها بر آن، نقطهٔ دیگری از آن مخروطی نقطه‌ای را رسم کنید.

اگر نقاط A، B، C، D، و مماس a چنان که در شکل ۷.۵۴ داده شده باشند، بوش تصویری را می‌توان با سه زوج خطوط نشان داده شده مشخص کرد. اتصالات تقاطعی a'b و b'a (شکل ۷.۵۴b را ملاحظه کنید) هر دو بر a واقع‌اند، و بنابراین مرکز بوش تصویری واقع بر این مماس است. دومین زوج اتصالات تقاطعی bc' و cb' خط e را معین می‌کنند. مرکز بوش تصویری نقطهٔ تقاطع a و e است.

مثال. خطوط دیگر یک مخروطی خطی را، بامعلوم‌بودن پنج‌خط، نه هر سهٔ آنها متقارب، رسم کنید.



شکل ۷.۵۵



شکل ۷.۵۶

فرض می‌کنیم پنج خط مفروض a، b، c، d، e در شکل ۷.۵۵ باشند. دو خط از آنها، مثلاً a و b، را می‌توان به‌عنوان خطوط شامل نقاط متناظر در بوش تصویری انتخاب کرد، درحالی‌که سه خط دیگر سه‌زوج نقاط متناظر را مشخص می‌کنند. تقاطعات ازواج اتصالات تقاطعی l محور همانندی را معین می‌کنند.

نقطهٔ دلخواه F‌ای بر b اختیار می‌کنیم. $\overleftrightarrow{FC'}$ و $\overleftrightarrow{CF'}$ باید بر محور تلاقی کنند و بنابراین می‌توان F' را معین کرد. دراین صورت $\overleftrightarrow{FF'}$ خط دیگری از مخروطی مورد بحث است.

قضایای پاسکال و بریانشون، که شامل این امکان که جمیع شش نقطهٔ مفروض متمایز نباشد، باشد، روش دیگری در رسم نقاط یا خطوط دیگری از یک مخروطی به‌دست می‌دهد.

مثال. با معلوم بودن پنج نقطه از یک مخروطی یک نقطهٔ دیگر آن را بیابید.

درشکل **۷.۵۶** فرض می‌کنیم A ، B ، C ، D ، E پنج نقطه مفروض، l خط دلخواه گذرنده از E ای نه از تقاطع با هیچ‌یک از دیگر نقاط مفروض باشد. ششمین نقطه f بر l چنان واقع است که A ، B ، C ، D ، E ، F نقاط یک شش ضلعی محاطی باشند.

اطلاعات داده شده برای تعیین دو نقطهٔ واقع‌بر خط پاسکال و در نتیجه خود خط مورد بحث کافی است. فرض می‌کنیم $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{DE}$ در P_1، و $\overleftrightarrow{BC}$ و l در P_2 تلاقی کنند. در این صورت $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{AF}$ باید در نقطهٔ P_3 ای واقع‌بر $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ملاقی باشند، و بنابراین F تقاطع AP_3 و l است.

این بخش به طرح هندسهٔ تصویری به صورت هندسهٔ عمومی‌تری که شامل هندسهٔ

اقلیدسی به‌عنوان، حالت خاصی از آن است خاتمه می‌دهد. در این فصل با مختصات همگن و کاربردهاشان در گرافیك‌های کامپیوتری، ترسیمات تنها با یک خط کش نامدرج، و تبدیلات تصویری مواجه شدیم. و بعضی از خواص لایتغیر را در هندسه‌ای که در آن قبلاً نمی‌دانستید که چه چیز لایتغیر است و چه نیست، بررسی کردیم. در فصل بعد هندسه‌ای با عمومیت بیشتر معرفی می‌شود، و هندسهٔ تصویری تنها یک زیرهندسهٔ خاص خواهد بود.

تمرینات ۷.۱۰

۱. مانند شکل ۷.۵۲، پنج نقطهٔ مفروض جدید مشخص کنید، و روش موصوف در متن را برای رسم نقطهٔ ششم واقع بر مخروطی به‌کار برید.

۲. از دستورات تمرین ۱ پیروی کنید. اما پنج نقطهٔ جدید متفاوت اختیار کنید.

۳. چون در شکل ۷.۵۴، نقاط مفروض جدید و خط جدیدی مشخص کرده روش موصوف در متن را برای رسم نقطهٔ ششم واقع‌بر مخروطی به‌کار برید.

۴. از دستورات تمرین ۳ پیروی کنید، اما نقاط و خط جدید متفاوتی اختیار کنید.

۵. در شکل ۷.۵۵ پنج خط مفروض جدید مشخص کرده روش موصوف در متن را برای رسم خط ششم واقع‌بر مخروطی به‌کار برید.

۶. از دستورات تمرین ۵ پیروی کنید، اما خطوط جدید متفاوتی اختیار کنید.

۷. بامعلوم‌بودن چهار خط از یک مخروطی و نقطهٔ تماس یکی از این خطوط با آن، خط دیگری از آن را رسم کنید.

۸. از دستورات تمرین ۷ پیروی کنید، اما خطوط و نقطهٔ متفاوتی اختیار کنید.

۹. پنج نقطه، نه هر سه‌ای از آن واقع‌بر یک استقامت، چنان اختیار کنید که آشکار باشد که بر هذلولی‌ای واقع‌اند، بعد از قضیهٔ پاسکال در رسم نقطهٔ ششمی واقع‌بر همین مخروطی استفاده کنید.

۱۰. از قضیهٔ بریانشون دریافتن خطی دیگر از یک مخروطی خطی در صورتی که پنج خط آن مفروض باشد، استفاده کنید.

۱۱. از دستورات تمرین ۱۰ استفاده کنید، اما خطوط متفاوتی اختیار کنید.

۱۲. از قضیهٔ پاسکال با یک شش‌ضلعی فاسد[68] در رسم یک نقطهٔ دیگر واقع‌بر یک

68. Degenerate

مخروطی درصورتی که چهارنقطه و مماس در یکی از این نقاط معلوم باشد، استفاده کنید.

۱۳. از دستورات تمرین ۱۲ پیروی کنید، اما نقاط و مماس متفاوتی اختیار کنید.

۱۴. با معلوم‌بودن پنج نقطهٔ واقع بر یک مخروطی نقطه‌ای، روش دلخواهی باخط کش نامدرج تنها در رسم ده نقطهٔ دیگر واقع‌بر آن مخروطی به کار برید.

I۱۵. با ۵ نقطهٔ واقع‌بر یک بیضی شروع و ۲۰ نقطهٔ دیگر واقع‌بر همین مخروطی رسم کنید. نمونه‌ای را تشریح کنید که رسم نقاط دیگری را با رسم کمترین تعداد خطوط اضافی مجاز کند.

I۱٦. مسائل ترسیمی را در مورد مسائل شامل داده‌های مفروض شامل چند نقطه و چند خط، چون سه نقطه و دو مماس، تعمیم دهید.

تمرینات مروری فصل

فصل ۷

در تمرینات ۱-۳، کدام خواص تحت تبدیل تصویر لایتغیر است؟

۱. خاصیت دایره بودن

۲. خاصیت واقع‌بر یك استقامت بودن سه نقطه

۳. خاصیت برخورد‌داشتن یک نقطه و خط

۴. آیا خواص لایتغیری در هندسهٔ تصویری موجود است که در هندسهٔ اقلیدسی لایتغیر نباشد؟ پاسخ‌تان را توضیح دهید.

۵. آیا یک مثلث می‌تواند به یک چهارگوشه‌ای تصویر شود؟

٦. در چهارگوشه‌ای کامل، دونقطهٔ قطری نسبت به کدام زوج دیگر نقاط مزدوج‌های توافقی‌اند؟

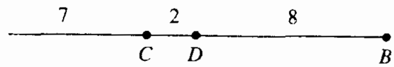
۷. چهارگوشه‌ای کامل چند زوج ضلع مقابل دارد؟

۸. تثنیهٔ سطحی این گزاره را بنویسید: چهارگوشه‌ای کامل سه زوج ضلع مقابل دارد.

۹. به خاطر تعیین به‌طور منحصربه‌فرد جمیع نقاط یک شبکهٔ توافقی، کمترین تعداد نقاطی از آن که شبکه باید داده شود، چیست؟

۱۰. نقطهٔ تقاطع خطوط [۱،۳،۲] و [۱-،۷،۲] را بیابید.

۱۱. نقطهٔ انگاری واقع‌بر خط $۳x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ = ۰$ را نام ببرید.



شکل ۷.۵۷

۱۲. مختص سوم صحیح را برای این‌که نقطهٔ (ـ ،۱،۲) برخط [۳،۲-،۱-] واقع شود، بیابید.

۱۳. اندازهٔ عددی نسبت تقاطعی (AB,CD) را برای نقاط واقع برخط شکل ۷.۵۷ بیابید.

۱۴. اگر ماتریس ۳ × ۳ ای حرکت مسطحی را نمایش دهد، در این صورت برستون سوم ماتریس مزبور دقیقاً چند صفر باید موجود باشد؟

۱۵. تصویر نقطهٔ (۳،۲،۱) را تحت بوش تصویری با معادلات مفروض زیر بیابید:

$$x'_1 = x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$x'_2 = x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$x'_3 = 2x_1 + x_2 - x_3$$

۱۶. معادلهٔ $2x - 5y + 7 = 0$ را در مختصات همگن بررسی کنید.

۱۷. دوران ۴۰ درجهٔ حول یک نقطه مثال بوش تصویری‌ای با چه تناوبی است؟

۱۸. آیا ماتریس زیر را می‌توان درنمایش تبدیلی تصویری به کار برد؟

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

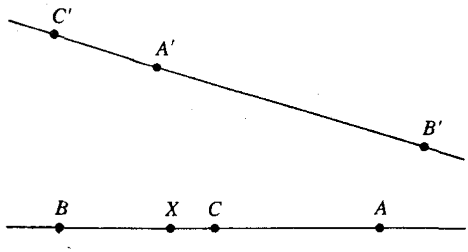
در تمرینات ۱۹-۲۱، ماتریس مربوطه را برای تبدیل یاگسترش دسته‌بندی کرده تصویر نقاط (۰،۳؛۱،۲) و (۱،۱−،۲،۱) را بیابید.

۱۹. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

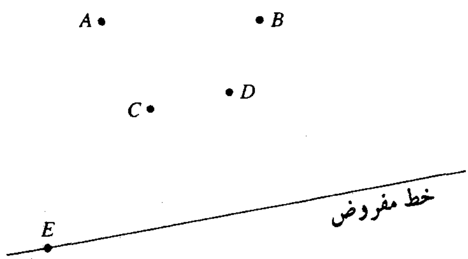
۲۰. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

۲۱. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

شکل ۷.۵۸



شکل ۷.۵۹



شکل ۷.٦۰

۲۲. معادلهٔ همگن نقطهٔ (۲،۳،۴) را بنویسید.

۲۳. بااستفاده از شکل ۷.۵۸، و با ترسیم با خط کش نامدرج مزدوج توافقی C را نسبت به A و B مشخص کنید.

۲۴. در بوش تصویری مشخص شده با سه زوج نقطهٔ مفروض در شکل ۷.۵۹، سلسله‌ای از دو بوش پرسپکتیوی معین کنید، سپس از این سلسله در یافتن تصویر نقطهٔ X استفاده کنید.

۲۵. در مخروطی مشخص شده با پنج نقطهٔ مفروض در شکل ۷.٦۰، نقطهٔ ششمی از مخروطی رسم کنید که برخط مفروض نیز واقع باشد.

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان از هرمجموعهٔ تمریناتی که قبلاً از مجموعه‌های تمرینات پیشین این فصل معین نشده‌اند انتخاب کرد.

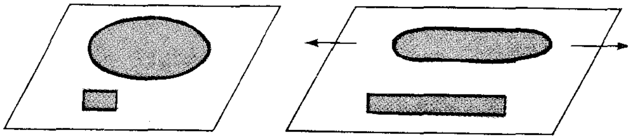
۸
مدخل
تبدیلات توپولوژیک

۸.۱ تبدیلات توپولوژیک

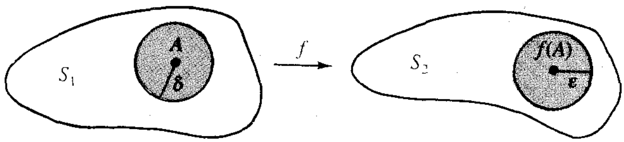
در این فصل به معرفی گروهی از تبدیلاتی که بسیار عمومی‌تر از تبدیلات هندسهٔ تصویری‌اند، و شامل تبدیلات تصویر به عنوان حالتی خاص‌اند، می‌پردازیم. یکی از دلایل مطالعهٔ تبدیلات توپولوژیک بررسی بعضی از خواص لایتغیری است که یافت می‌شوند، هرچند که بسیاری از خواص لایتغیر آشنای گروههای دیگر تبدیل از بین می‌روند. گرچه فصل حاضر شامل بعضی از مطالبی است که در دوره‌های آغازگر توپولوژی و نظریهٔ گرافها بررسی می‌شوند، به معنی مدخل سیستماتیکی در هیچ یک از دو زمینهٔ ریاضی نیست، و در این مورد ارتباطات تاریخی با هندسه است که موضوع مورد بحث را مشخص می‌کند.

مجموعه‌های نقاطی واقع برصفحه‌ای پلاستیکی، چون درشکل ۸.۱، را به تصور می‌آوریم. صفحهٔ مزبور می‌تواند کش بیاید و تاب بخورد، اما نمی‌تواند پاره شود یا چنان قرارگیرد که دو نقطهٔ متمایز عملاً منطبق شوند. توصیف مزبور از نقاط واقع برصفحهٔ لاستیکی مفهومی شهودی (امانه به کلی صحیح) از هندسهٔ موسوم به توپولوژی به‌دست می‌دهد. در این هندسه می‌توان، فی‌المثل، ملاحظه کرد که تصویر یک دایره می‌تواند بیضی، مثلث، یا چند ضلعی باشد، و خطوط مستقیم لزوماً به خطوط مستقیم تبدیل نمی‌شوند. و غالب خواص متداول هندسهٔ اقلیدسی تحت مجموعهٔ تبدیلات توپولوژیک دیگر محفوظ نمی‌مانند. امّا آیا می‌توانید خواصی راکه لایتغیرند بیابید؟

بسیاری از اصطلاحات اساسی توپولوژی را قبلاً، به خصوص در فصل ۳ ی تحدب معرفی کرده‌ایم، و خواننده‌ای که فصل ۳ را نخوانده، باید، در موقع لزوم، به عبارات توضیح داده‌شده در آن فصل رجوع کند. از لحاظ تاریخی، توپولوژی و تحدب به‌طور تنگاتنگی در ارتباط‌اند و بسیاری از مفاهیم اساسی یکسان، چون همسایگی یک نقطه و داخل، خارج نقاط مرزی را مشترک‌اند.



شکل ۸.۱



شکل ۸.۲

عبارت توپولوژی[1] در ۱۸۴۷ توسط جی. بی. لیستینگ[2] (۱۸۸۲ - ۱۸۰۸)، یکی از شاگردان گوس، برای این که به جای نام قبلی «موقع تحلیلی[3]» بنشیند، معرفی شد. نامهای برجستهٔ دیگر تاریخ توپولوژی شامل ای.اف. موبیوس[4] (۱۸٦۸ - ۱۷۹۰)، فلیکس هاوس‌دورف[5] (۱۹۴۸ - ۱۸٦۸)، اس. لفشتس[6] (۱۹۷۲ - ۱۸۸۴)، و برنهاد ریمان[7] (۱۸٦٦ - ۱۸۲٦) اند. کار بررسی توپولوژی به بالش و گسترش ادامه می‌دهد. دوره‌های توپولوژی در سطوح کاردانی و کارشناسی معمول است، و مفاهیم شهودی‌ای از توپولوژی غالباً درغنی کردن فعالیتهای مدارس ابتدایی و متوسطه به‌کار می‌رود.

توپولوژی به عنوان شاخه‌ای از هندسه آغازید، اما اکنون خود بخشی اساسی از ریاضیات است. به‌طور شهودی، توپولوژی را می‌توان به عنوان بررسی ریاضی پیوستگی درنظر گرفت. اما، تعریف و بحث آورده‌شده دراین جا محدود به بعضی از جنبه‌های هندسی توپولوژی است.

در این مرحله تعریف تبدیل پیوسته*[8]، از آنجاکه تعریف آن مفهوم توپولوژیک همسایگی یک نقطه را به‌کار می‌برد، به طور مختصر، مرور شده‌است. تبدیل نقاط واقع در ناحیهٔ مسطح S_1 برنقاط واقع در ناحیهٔ مسطح S_2 پیوسته است اگر به ازای هر نقطهٔ S_2 و هر عدد مثبت ε عدد مثبت δ ای چنان موجود باشد که تصویر هر نقطهٔ S_1 که در همسایگی نقطهٔ A با شعاع δ است درهمسایگی تصویر A باشعاع ε باشد. شکل ۸.۲ را ملاحظه کنید.

1. Topology
2. J.B.Listing
3. Analysis Situs
4. A.F.Möbius
5. Felix Hausdorff
6. S.Lefschetz
7. Bernhad Riemann
8. Continuous

* متصل

تعریف. تبدیل f دو پیوسته‌ای*[9] است اگر و تنها اگر f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند. تبدیل دو پیوسته را همسازمانی[10] نیز می‌نامند.

تعریف. توپولوژی مطالعهٔ خواصی از مجموعهٔ نقاط تحت گروه تبدیلات دوپیوسته‌ای یک فضا بر خودش لایتغیر است.

تبدیل پیوسته، به طور شهودی، یک مجموعهٔ نقاط به قدرکافی نزدیک به یکدیگر را به مجموعهٔ دیگر نقاط نزدیک یکدیگر قرارگرفته می‌برد. پارگی کنار یک سطح می‌تواند نقاط نزدیک را به نقاطی به فواصل بزرگ ببرد.

انتقال در هندسهٔ اقلیدسی مثال بسیار ساده‌ای از یک تبدیل پیوسته است. مقادیر ε و δ را می‌توان مساوی اختیار کرد، زیرا نقاط واقع در هرناحیهٔ دایروی تصاویر در ناحیهٔ دایروی هم‌نهشت دیگری دارند. مثال دیگری از تبدیل پیوسته $x \to x^3+2x-1$ است، درحالی که مثالی از تبدیلی که پیوسته نیست $x \to \operatorname{tg} x$ به‌ازای x مجموعهٔ اعداد حقیقی است. معادلهٔ $x'=(1-x)/x$ مثالی از تبدیلی است که دریک برد ـ مثلاً، $-2<x<-0.5$ ـ پیوسته است، اما معکوسش $x=1/(x'+1)$ در این برد پیوسته نیست.

توپولوژی را می‌توان به‌صورت تعمیم هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ تصویری هر دو درنظر گرفت، زیراگروه حرکات سطحی وگروه تبدیلات تصویری هر دو زیرگروه حقیقی گروه تبدیلات توپولوژیک اند.

قضیهٔ ۸.۱. مجموعهٔ تبدیلات توپولوژیک یک فضا برخودش یک گروه تبدیلات است.

پرسشهای راجع به اثبات قضیه ۸.۱ را می‌توان در تمرینات ۸.۱ یافت.

در اوایل این بخش پیشنهاد کردیم که در این مورد که کدام خواص تحت گروه تبدیلات توپولوژیک محفوظ می‌مانند اندیشه کنید. این بخش را با بررسی یکی از این خواص که اساسی است خاتمه می‌دهیم.

مفهوم مجموعهٔ مرتبط[10] نقاط یکی از مفاهیم اساسی توپولوژی است.

تعریف. یک مجموعه مربوط است اگر و تنها اگر هر دو نقطهٔ آن را بتوان با منحنی‌ای به تمامی واقع در آن **مجموعه وصل کرد.**

---

9. Bicontinuous
10. Homeomorphism, Connected Set

* دو اتصاله

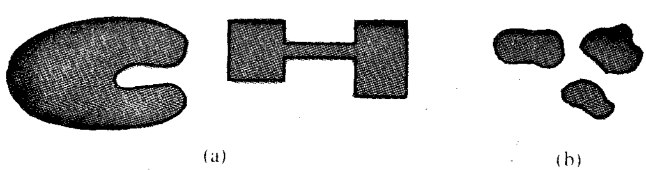
به‌خاطر بیاورید که در فصل ۳ منحنی را به صورت نمودار مجموعهٔ معادلات به صورت $x=f(t)$، $y=g(t)$، به ازای توابع متصل f، g و دامنهٔ t ی فاصله‌ای از اعداد حقیقی، تعریف کردیم.

جمیع مجموعه‌های محدب مربوط‌اند، زیرا هر دونقطه از نقاط‌شان را می‌توان با قطعه خطی در آن مجموعه وصل کرد. طلب مربوط بودن یک مجموعه طلبی بسیار سست‌تر از محدب بودن یک مجموعهٔ نقاط به مفهوم زیرین است: اگر جمیع منحنیهای در تعریف مجموعهٔ مربوط باید قطعه خط باشند، در این صورت مجموعه محدب است. بعضی از مثالهای معمول مجموعه‌های مربوط دوایر متقاطع، مربع، خط ، و هرم‌اند. مثالهایی از مجموعه‌هایی که مربوط نیستند شامل هذلولی، دو خط موازی، و دو دایرهٔ نامتقاطع می‌باشند. شکل ۸.۳a مثالهایی از مجموعه‌های مربوطی که محدب نیستند، نشان می‌دهد، در حالی که شکل ۸.۳b مجموعه‌ای رانشان می‌دهد که مربوط نیست.

خاصیت مجموعهٔ مربوط بودن لایتغیری توپولوژیک است. اما جمیع مجموعه‌های مربوط نقاط از لحاظ توپولوژیک معادل نیستند. به عبارت دیگر، پیداکردن تبدیل توپولوژیکی چنان‌که هر دو مجموعهٔ مربوط مفروض نقاط تصاویر یک‌دیگر باشند، همیشه ممکن نیست. اما، انواع متفاوت رابطیت موجود است، و یک مجموعهٔ نقاط و تصویرش در هر تبدیل توپولوژیک دارای یک نوع رابطیت اند. تحلیل انواع رابطیت در این بخش به مجموعه‌های دو بعدی نقاط بانقاط داخلی محدود می‌شود.

تعریف. یک مجموعه ساده مربوط[11] است اگر هر منحنی بسته واقع در آن بتواند به طور پیوسته به نقطهٔ منفردی در آن تغییر صورت دهد. مجموعهٔ مربوطی که ساده مربوط نیست افزون مربوط[12] است.

مثالی از یک مجموعهٔ ساده مربوط در شکل ۸.۴a نشان داده‌ایم؛ مجموعه‌ای افزون



شکل ۸.۳

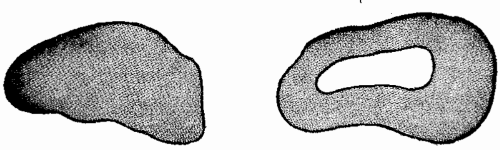
11. Simply Connected

12. Multiply Connected

مربوط در شکل ۸.۴b نموده‌شده است.

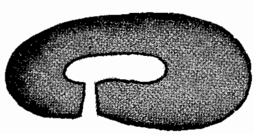
آنچه را که از به‌طور پیوسته تغییر شکل دادن به یک نقطه مقصود داریم می‌توان با درنظر گرفتن منحنی بسته‌ای، شبیه نواری لاستیکی، به تمامی واقع در ناحیهٔ شکل ۸.۴a، واضح‌تر کرد. نوار مزبور را می‌توان بدون رفتن نقطه‌ای به خارج ناحیه منقبض کرد. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم که نوار لاستیکی مورد بحث درناحیهٔ شکل ۸.۴b ، اما پیچیده به دور حفرهٔ آن، باشد. در این صورت راهی برای منقبض کردن آن به یک نقطه بدون رفتن از نقاط واقع در حفر نیست. یک مجموعهٔ افزون مربوط، چون آن که درشکل ۸.۴b ، را می‌توان به مجموعه‌ای ساده مربوط با انجام یک برش، چنان که درشکل ۸.۵ نموده شده، تبدیل کرد. این موضوع را باردیگر به طور شهودی با بررسی وضعیت نوار لاستیکی محقق کنید. اما، مجموعهٔ مربوطی با دو حفره، چنان که درشکل ۸.٦a نموده‌شده، برای این که به مجموعه‌ای ساده مربوط تبدیل شود، به دو برش (چون برشهای درشکل ۸.٦b) نیازمند است.

تعریف. درحالت عمومی، اگر ۱ - n برش نامتقاطع برای تبدیل یک مجموعه به یک مجموعهٔ ساده مربوط لازم باشد، دامنهٔ آن n گانه مربوط[13] است.

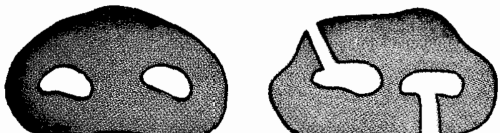


(a) (b)

شکل ۸.۴



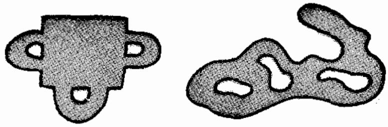
شکل ۸.۵



(a) (b)

شکل ۸.٦

13. n - Tuply Connected



شکل ۸.۷

فی‌المثل، درجهٔ رابطیت، در صورتی که دو برش لازم باشد، سه است. درجهٔ رابطیت یک مجموعهٔ نقاط تحت گروه تبدیلات توپولوژیک لایتغیر است. فی‌المثل، شکل ۸.۷ دو مجموعهٔ مسطح نقاطی را که از لحاظ توپولوژیک معادل‌اند، و هردو با درجهٔ رابطیت چهارند، نشان می‌دهد. این دو مجموعهٔ نقاط به ازای تبدیلی توپولوژیک تصاویر یک دیگرند.

تمرینات ۸.۱

۱. مثالی دیگر از یک تبدیل متصل و مثالی دیگر از تبدیلی که متصل نیست به دست دهید.

تمرینات ۲ و ۳ در رابطه با اثبات قضیهٔ ۸.۱ اند.

۲. توضیح دهید که چرا معکوس یک تبدیل دو پیوسته همواره یک تبدیل دو پیوسته است.

۳. اثبات این را که حاصل ضرب دو تبدیل دو پیوسته یک تبدیل دو پیوسته است به‌طور مختصر شرح دهید.

۴. بعضی لایتغیرهای تحت گروه حرکات سطحی‌ای را که لایتغیر توپولوژیک نیستند نام ببرید.

۵. تعریف مجموعهٔ محدب را به‌عنوان نوع خاصی از مجموعهٔ مربوط بنویسید.

در تمرینات ۶ ـ ۱۵ ، بیان کنید که کدام یک از مجموعه‌های نقاط همواره مجموعهٔ مربوط‌اند.

۶. خط
۷. دایره
۸. چند ضلعی
۹. زاویه
۱۰. هذلولی
۱۱. مثلث رولو
۱۲. دودایرهٔ هم‌مرکز
۱۳. نیم صفحه
۱۴. مجموعهٔ باز
۱۵. مجموعهٔ کران‌دار

در تمرینات ۱۶ ـ ۲۱، بیان کنید که کدام از مجموعه‌ها همواره مجموعهٔ مربوط‌اند.

۱۶. کره
۱۷. هذلولوی دو پارچه
۱۸. بیضوی
۱۹. چهار وجهی
۲۰. $\{x,y,z \mid x>y\}$
۲۱. $\{x,y,z \mid$ z ،y ،x اعداد گویا هستند$\}$

در تمرینات ۲۲ ـ ۲۴، مثالی عملی از شئی مسطح از دنیای فیزیکی مشابه مجموعه‌ای نقطه با رابطیت درجهٔ مربوطه به دست‌دهید:

۲۲. یک
۲۳. دو
۲۴. پنج

۲۵. دومجموعهٔ دیگر نقاط از لحاظ توپولوژیک معادل با مجموعه‌های شکل ۸.۷ رسم کنید.

در تمرینات ۲۶ ـ ۲۹، بیان کنید که کدام یک از خواص داده‌شده لایتغیر توپولوژیک به نظر می‌رسد.

۲۶. تقاطع منحنیها
۲۷. نسبت تقاطعی
۲۸. نقطهٔ وسط
۲۹. تحدب

I۳۰. قسمتی لاستیکی از جزء بالای یک دستکش لاستیکی معمولی ببرید و مدلهایی برای اثبات خواصی که در توپولوژی لایتغیر نیستند آماده کنید.

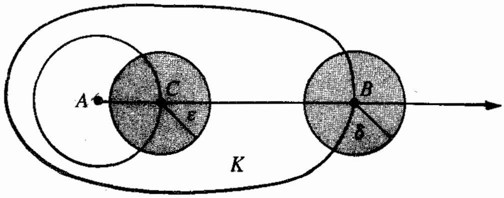
I۳۱. مثالهای بیشتری از مجموعه‌های نقاطی که مربوط‌اند و مجموعه‌هایی که مربوط نیستند به دست‌دهید.

I۳۲. برای نشان دادن این‌که اجتماع و اشتراک مجموعه‌های مربوط مجموعه‌های مربوط‌اند تحقیق کرده مثالهای خاصی به دست‌دهید.

I۳۳. در مورد تاریخ توپولوژی مطالعهٔ بیشتری کنید.

۸.۲ منحنیهای بستهٔ ساده

مفهوم منحنی بستهٔ ساده در فصل ۳ی مربوط به تحدب به کار رفت. در این مورد در صورت



شکل ۸.۸

لزوم تعاریف بخش ۳.۱ را باید مورد مطالعه قرار داد. دلیل تمدید بررسی منحنیهای بستهٔ ساده در این فصل این است که خاصیت منحنی بستهٔ ساده بودن لایتغیری توپولوژیک است. تصویر یک منحنی بستهٔ ساده تحت تبدیل توپولوژیک یک منحنی بستهٔ ساده‌است.

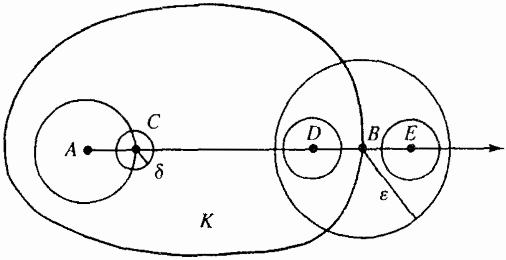
مفهوم اخیر اگرچه نسبتاً ساده به نظر می‌رسد، درعمل اثبات این که یک منحنی تصویر منحنی دیگر تحت تبدیلات توپولوژیک است مشکل است. در این مورد حالت خاصی را که توضیح می‌دهد که باید پیوستگی را برای تبدیل مربوطه و معکوس آن ثابت کرد، به دست می‌دهیم.

قضیهٔ ۸.۲. منحنی بستهٔ ساده‌ای که مرز یک جسم محدب دو بعدی است تصویر دو پیوستهٔ یک دایره است.

اثبات: درشکل ۸.۸ ، K جسم محدب مورد بحث است. K شامل نقطهٔ داخلی A ای است، و دایره‌ای به مرکز A ی به تمامی واقع در K وجود دارد. هر شعاع با نقطهٔ انتهایی A هریک از دایرهٔ مزبور و مرز جسم محدب مورد بحث را دقیقاً دریک نقطه قطع می‌کند، و بنابراین تبدیلی از مرز بردایره موجوداست. باید نشان دهیم که تبدیل مذکور پیوسته است. فرض می‌کنیم B و C نقاط متناظر، یکی واقع برمرز K و دیگری واقع بر دایره باشد. به ازای هر عدد مثبت ε ، می‌توان عدد مثبت δ را به قدرکافی کوچک چنان یافت که قطعه خط واصل هر نقطهٔ $N(B,\delta)$ به A دایرهٔ مزبور را در نقطه‌ای از $N(C,\varepsilon)$ قطع کند. دراین صورت تبدیل مذکور پیوسته است.

برای این که تبدیل مورد بحث دوپیوسته باشد، باید تبدیل معکوس آن نیز پیوسته باشد. در شکل ۸.۹ ، ε عدد مثبت دلخواه نمایش دهندهٔ شعاع همسایگی نقطهٔ B ی واقع بر مرز جسم محدب مزبور است.

برشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، یافتن نقطهٔ D با همسایگی $N(D,\alpha)$ در داخل K و $N(B,\varepsilon)$ هر دو و نقطهٔ خارجی E با همسایگی $N(E,\beta)$ درخارج K اما داخل $N(B,\varepsilon)$ ، به‌ازای



شکل ۸.۹

اعداد مثبت α، و βای ممکن است.

اکنون، δرا می‌توان برای $N(C,\delta)$به قدرکافی کوچک انتخاب کرد به طوری که هر شعاع با نقطهٔ انتهایی A ی گذرنده از نقطه‌ای از $N(C,\delta)$ از $N(D,\alpha)$ و $N(E,\beta)$ نیز بگذرد. از آنجاکه یکی از این همسایگیها داخل K و دیگری خارج آن است، نقطهٔ مرزی K برآن شعاع نیز در $N(B,\varepsilon)$ واقع می‌شود. و نتیجه می‌شود که تبدیل معکوس مورد بحث با تعریف تابع پیوسته سازش دارد.

بعضی اثباتهای قضیهٔ اساسی جبر به‌کاربردی از توپولوژی که مفاهیم بسیار مشابهی با مفاهیم واقع در اثبات قضیهٔ ۸.۲ را به‌کار می‌برد وابسته است.

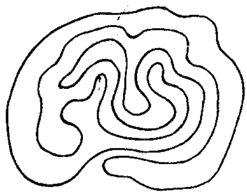
مفهوم شهودی مسیر یک منحنی بستهٔ ساده با حرکت دادن یک مداد برروی یک تکه کاغذ را، تحت تنها این محدودیت که نمی‌توان از مسیری پیشین گذشت و باید به نقطه آغاز رجوع داشت، در نظر می‌گیریم، نتیجهٔ این کار می‌تواند ترسیم پیچیده‌ای چون ترسیم شکل ۸.۱۰ باشد. در این صورت تصور یک ناحیهٔ داخلی ساده که هیچ، تمایز بین نقاط داخلی و خارجی نیز سخت است. یکی از قضایای مهم در مورد منحنیهای بستهٔ ساده اثبات شده در توپولوژی، اما مفروض در فصول اولیه و هندسهٔ مقدماتی، به نام کامیل جوردن[14] (۱۸۳۸ - ۱۹۲۲)، به قضیهٔ منحنی جوردن موسوم است.

قضیهٔ ۸.۳ . قضیهٔ منحنی جوردن[15]. هر منحنی بستهٔ سادهٔ واقع در صفحه، صفحه را به سه مجموعهٔ مربوط مجزا چنان افراز می‌کند که مجموعه‌ای که منحنی است مرز دو مجموعهٔ دیگر است.

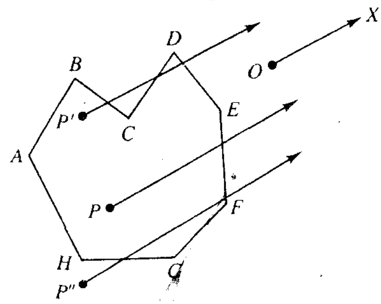
---

14. Camille Jordan

15. Jordan Curve Theorem



شکل ۸.۱۰



شکل ۸.۱۱

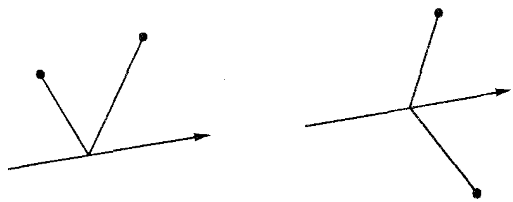
اثبات قضیهٔ منحنی جوردن در این بخش تنها برای حالت خاص زیر که در آن منحنیهای بستهٔ سادهٔ مورد بحث چند ضلعی‌اند، مختصرشده‌است. گرچه اختصار مزبور پیچیده به نظر می‌آید، شامل بعضی روشهای جالب است و نشان می‌دهد که ممکن است اثباتهای توپولوژی هندسی کاملاً متفاوت از اثباتهای جبری است.

قضیهٔ ۸.۴ . هر چند ضلعی بستهٔ سادهٔ واقع در صفحه، صفحه را به سه مجموعهٔ مربوط مجزا چنان افراز می‌کند که مجموعه‌ای که چند ضلعی است مرز دو مجموعهٔ دیگر است.

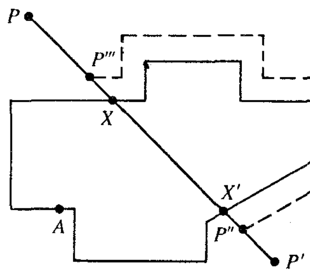
فرض می‌کنیم $\overrightarrow{OX}$ شعاع ثابتی در صفحه، ناموازی با هیچ یک از اضلاع چند ضلعی باشد. شکل ۸.۱۱ مثالی نمونه را نشان می‌دهد. هر نقطهٔ P ی صفحه را می‌توان به عنوان نقطهٔ انتهایی شعاعی موازی $\overrightarrow{OX}$ درنظر گرفت. درشکل ۸.۱۱ ، سه چنین شعاعهایی با نقاط انتهایی P، ′P، و ″P نشان داده شده است. تعداد نقاط تقاطع این اشعه و چند ضلعی به ترتیب یک، سه، و دواست. اگر تعداد تقاطعات فرد باشد، گفته می‌شود که نقطهٔ انتهایی P زوجیت فرد[16] دارد؛ و اگر تعداد تقاطعات زوج باشد، نقطهٔ انتهایی مزبور زوجیت زوج[17] دارد. به این

16. Odd Parity

17. Even Parity



شکل ۸.۱۲



شکل ۸.۱۳

ترتیب، P و P′ دارای زوجیت فرداست، درحالی که P″ زوجیت زوج دارد.

برای یافتن زوجیت هرنقطهٔ واقع در صفحه، لازم است که امکان گذر یک شعاع را از یک یا بیش‌از یک رأس چندضلعی درنظر بگیریم. دو رابطهٔ ممکن اضلاع مجاور و رأس تقاطع آنها را درشکل ۸.۱۲ به تصویر کشیده‌ایم. درشکل ۸.۱۲a رأس چندضلعی، به‌عنوان تقاطع به شمار نمی‌آید. اما درشکل ۸.۱۲b رأس مزبور به شمار می‌آید. رأس هنگامی که دوضلع مجاور چند ضلعی دریک طرف شعاع باشند به حساب نمی‌آید، و چون در اطراف مقابل شعاع باشند می‌آید.

فرض می‌کنیم که مجموعهٔ S مجموعهٔ جمیع نقاطع واقع بر صفحهٔ غیرواقع بر چند ضلعی مورد بحث چنان که زوجیت‌شان فرد باشد، باشد، و S′ مجموعهٔ جمیع نقاط واقع بر صفحهٔ غیرواقع برچند ضلعی چنان که زوجیت مربوطه زوج باشد، باشد. و فرض می‌کنیم $\overline{PP'}$ هرقطعه خط نامتقاطع با چند ضلعی باشد. دراین صورت هر نقطهٔ واقع بر $\overline{P'P}$ دارای یک‌زوجیت است، و قطعه خط مزبور به تمامی در S یا S′ واقع می‌شود.

اکنون می‌توان نشان داد که هر دونقطهٔ P، P′ از یک مجموعهٔ S، یا S′، می‌تواند با منحنی چند ضلعی شکلی که چند ضلعی موردبحث را قطع نمی‌کند وصل شود. اگر $\overline{PP'}$ چندضلعی را قطع نکند، گزارهٔ مزبور واضح است. درغیراین صورت، فرض می‌کنیم X نزدیکترین نقطهٔ تقاطع به P و X′ نزدیکترین نقطهٔ تقاطع به P′، چنان که درشکل ۸.۱۳ نشان

داده شده، باشد. و فرض می‌کنیم P'' نقطه‌ای از $\overline{PP'}$ نزدیک P' باهمان زوجیت P' باشد.

ممکن است مسیری چند ضلعی شکلی بااضلاع نزدیک به اضلاع چندضلعی اصلی رسم کنیم تا به نقطهٔ P''' واقع بر $\overline{PP'}$ نزدیک Pای برسیم. P''' بین P و X است، و مسیر چند ضلعی شکل از P'' به P''' به طور کامل از نقاطی با زوجیت یکسان ترکیب شده‌است.

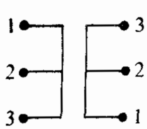
چند ضلعی اصلی مرز هر دومجموعهٔ S و S' است. اگر A نقطهٔ دلخواهی از چند ضلعی باشد، دراین صورت نقاط B و C در دوطرف A، اما به دلخواه نزدیک، چنان که زوجیت‌شان متفاوت باشد، موجود است. از آنجاکه هر همسایگی A شامل نقاط S و S'، هردو، است، چند ضلعی مزبور مرز S و S'، هر دو، است. نقاط واقع درخارج چند ضلعی دارای زوجیت زوج، و نقاط واقع در داخل آن دارای زوجیت فرداند.

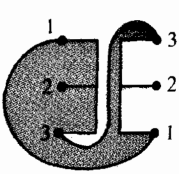
دوقضیهٔ زیر، که اثبات شان را به‌عنوان تمرینات ۱۴ و ۱۵ ی تمرینات ۸.۲ واگذار شده، خواص دیگری از منحنیهای بستهٔ ساده و تقاطعات شان بامجموعه‌های محدب یک بعدی واقع در همان صفحهٔ آنها را به دست می‌دهند.

قضیهٔ ۸.۵. به ازای یک نقطهٔ A واقع در داخل و یک نقطهٔ B واقع در خارج منحنی بستهٔ سادهٔ S، $\overline{AB}$ و S حداقل یک نقطهٔ مشترک دارند.

قضیهٔ ۸.۶. هرشعاع بانقطهٔ نهایی واقع در داخل یک منحنی بستهٔ ساده منحنی مزبور را قطع می‌کند.

قضیهٔ منحنی جوردن بامسائل معماگون متنوعی در توپولوژی سروکار دارد. یکی از این مسائل را در شکل ۸.۱۴a به تصویر کشیده‌ایم. مسألهٔ مزبور رسم منحنیهای رابط سه زوج نقطه با شماره‌های یکسان به چنان طریقی است که منحنیهای مزبور یکدیگر یا هر یک از خطوط دیگر مفروض در صفحه را قطع نکند. حل این مسأله، چنان که باشکل ۸.۱۴b نموده شده، ناممکن است، زیرا خطوط مفروض و مسیرهای مرسوم از ۱-۱ و ۳-۳ منجربه ناحیهٔ سایه خوردهٔ نمایشگر یک منحنی بستهٔ ساده و داخل آن می‌شود. یکی از نقاط با علامت ۲ داخلی و دیگری خارجی است، و بنابراین هر منحنی رابط آنها باید مرز مربوطه را قطع کند.





شکل ۸.۱۴

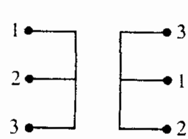
تمرینات ۸.۲

در تمرینات ۱ ـ ۴، مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های نقاط از لحاظ توپولوژیک معادل هر منحنی سادهٔ بسته‌ای است.

۱. مثلث
۲. هذلولی
۳. دو دایرهٔ هم مرکز
۴. مرز مثلث رولو
۵. فهرست مجموعه‌های نقاط دیگری را که لحاظ توپولوژیک معادل یک منحنی بستهٔ ساده‌اند، بیاورید.

در تمرینات ٦ـ۹، مشخص کنید که کدام یک از نواحی مسطح از لحاظ توپولوژیک معادل با هر منحنی بستهٔ ساده و داخل آن است؟

٦. ناحیهٔ مثلث شکل
۷. ناحیهٔ دایروی
۸. ناحیهٔ مسطح با درجهٔ رابطیت یک
۹. ناحیهٔ مسطح با درجهٔ رابطیت دو
۱۰. فهرست مجموعه‌های نقاط دیگری را که از لحاظ توپولوژیک معادل یک منحنی بستهٔ ساده و داخل آن هستند، بیاورید.
۱۱. درشکل ۸.۱۱، توضیح دهید که هنگامی که رئوس C و E ی چند ضلعی با اشعهٔموازی با $\overrightarrow{OX}$ رسم شدهٔ با نقاط نهایی واقع بر $\overline{P'P}$، برخورد کند چه رخ می‌دهد؟
۱۲. آیا نقاط واقع در داخل یک منحنی بستهٔ ساده زوجیت فرد یا زوج دارند؟
۱۳. آیا خارج یک چند ضلعی بستهٔ ساده، ساده مربوط یا چندگانه مربوط است؟
۱۴. قضیهٔ ۸.۵ را اثبات کنید.
۱۵. قضیهٔ ۸.٦ را اثبات کنید.
۱٦. درشکل ۸.۱۵، آیامی‌توان منحنهایی‌رابط سه‌زوج نقطهٔ باشماره‌های یکسان رابه چنان



شکل ۸.۱۵

طریقی رسم کرد که منحنیهای مزبور یکدیگر و هیچ یک از خطوط دیگر مفروض درشکل را قطع نکند؟ توضیح دهید. چرا یا چرا نه.

۱۷. آکسیوم پاش[18] در مورد هندسهٔ اقلیدسی مقرر می‌کند که خط در صفحهٔ مثلثی که یک ضلع آن مثلث را درنقطه‌ای غیراز رأس آن قطع کند ضلعی دومی از آن را نیز قطع می‌کند. بااستفاده از قضایای این بخش، آکسیوم پاش را به عنوان قضیه‌ای در توپولوژی ثابت کنید.

۱۸I. آن اثبات قضیهٔ اساسی جبر را، که از مفاهیمی بسیار مشابه با مفاهیم اثبات قضیهٔ ۸.۲ استفاده می‌کند، بیابید و فایدهٔ آنها را توضیح دهید.

۱۹I. معمای توپولوژیکی مشابه بامعمای شکل ۸.۱۴ طرح کرده نشان دهید که چه موقع حل آن غیرممکن است.

۲۰I. مرجعی یافته اثبات عمومی قضیهٔ منحنی جوردن را به اختصار بیان کنید.

۸.۳ نقاط لایتغیر و شبکه‌ها

تداول نقاط لایتغیر تحت تبدیلات توپولوژی کمتر از حرکات صفحه است. یکی از ساده‌ترین مثالهای قضیه‌ای در مورد نقاط لایتغیر تحت تبدیلات توپولوژیک قضیهٔ نقطهٔ ثابت بروئر در مورد ناحیه‌ای دایروی است. این قضیه به نام ال. ئی. جی. بروئر[19] ریاضیدان هلندی معروف قرن بیستم (۱۹۶۶ - ۱۸۸۲) است.

قضیهٔ ۸.۷. قضیهٔ نقطهٔ ثابت بروئر[20]. اگر نقاط یک ناحیهٔ دایروی محمول تبدیلی پیوسته چنان باشند که هرتصویر عضوی از مجموعهٔ مربوطه باشد، در این صورت حداقل یک نقطهٔ ثابت موجود است.

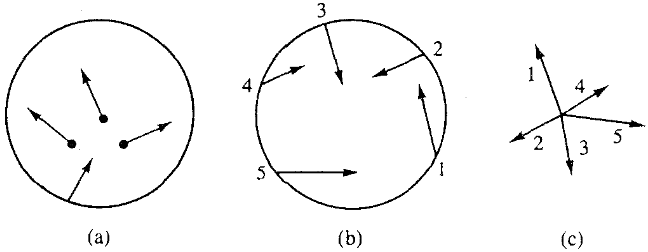
مثالی ساده از قضیهٔ ۸.۷ دایره‌ای است که حول مرکز خود، بامرکز در نقطه‌ای ثابت دوران می‌کند. قضیهٔ مزبور را می‌توان به طور غیرمستقیم اثبات کرد، و بیان مختصری از این اثبات به ترتیب زیراست. فرض می‌کنیم نقطهٔ ثابتی موجود نباشد. تبدیل مورد بحث را می‌توان با مربوط کردن یک بردار به هرنقطه، چنانکه درشکل ۸.۱۶a متصور ساخت. نقطهٔ ابتدایی هر بردار نقطهٔ اصلی، و نقطهٔ انتهایی آن تصویر آن است.

---

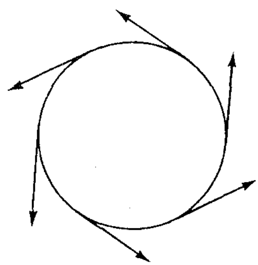
18. Pasch

19. L.E.J.Brouwer

20. Brouwer Fixed Point Theorem



شکل ۸.۱٦



شکل ۸.۱۷

جمیع بردارهای نقاط واقع بر مرز ناحیه، چنان که درشکل ۸.۱٦b ، متوجه داخل دایره‌اند. فرض می‌کنیم که نقاط واقع برمرز درجهت عکس‌ساعتگردبه دور دایره درنظر گرفته شده‌باشند. استفاده از نموداری برداری، چون درشکل۸.۱٦c،نشان می‌دهد که دنبالهٔ بردارها به نظر می‌رسد که به دور دایره پیش می‌رود و به موقع اولیهٔ برمی‌گردد. می توان نشان داد که کل تغییر جبری درجهت بردارها (نه مجموع برداری) به دورانی مثبت بالغ می‌شود (اندیس*[21] بردارها یک است). این موضوع را می‌توان با مقایسهٔ این مجموعهٔ بردارها با بردارهای مماسی به‌ازای جمیع نقاط واقع بردایره، چنان که درشکل ۸.۱۷، نشان داد.

بردارهای مماسی مزبور یک دوران کامل انجام می‌دهند، و اگر بردارهای به ازای نقاط واقع برمحیط دایره به اندازهٔ زاویهٔ متفاوتی گردش کنند، تفاوت عمل مضربی از 2π است، و این بدین معنی است که بردارهای تبدیل موردبحث باید حداقل یک‌بار به طور کامل به دور مماسها بگردند. اما از آنجا که بردارهای مزبور به طور پیوسته درگردش اند، باید در زمانی بردار تبدیل و بردار مماس متوجه یک جهت شوند، و این از آنجا که جمیع بردارهای تبدیل متوجه داخل دایره‌اند، ناممکن است.

---

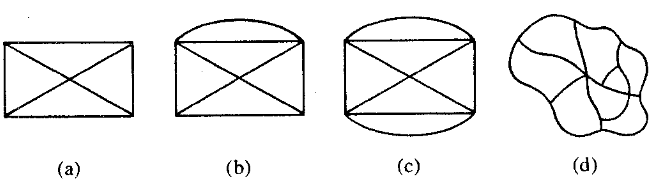
21. Index

* شاخص

به ازای هر دایرهٔ هم مرکز با دایرهٔ مفروض و مشمول در آن نیز، اندیس بردارهای تبدیل باید یک باشد. و این راست است زیراگذر به طور پیوسته از یک محیط به محیطهای کوچکتر به تغییری پیوسته در اندیس بردار تبدیل می‌انجامد. و این بدین معنی است که تغییرات مذکور نمی‌تواند انجام پذیرد، زیرا اندیس برداری مذکور می‌تواند تنها مقادیر درست را بپذیرد. اندیس بردارهای تبدیل مزبور بی‌توجه به چگونگی کوچکی دایرهٔ هم‌مرکز مورد بحث همواره یک خواهدبود. اما این غیر ممکن است؛ بردارهای واقع بردایره‌ای به قدر کافی کوچک جمیعاً متوجه تقریباً همان جهت بردار در مرکز دایرهٔ مورد بحث‌اند، زیراتبدیل پیوسته است. اگر اندیس بردارها صحیح باقی بماند و کوچکتر از یک شود، صفر خواهدشد. به این ترتیب، فرض یک بردار برای هرنقطه به تناقض انجامیده، و بنابراین حداقل یک نقطهٔ ثابت وجود دارد.

یکی ازکاربردهای اخیر نقاط لایتغیر و توپولوژی در حوزهٔ اقیانوس نگاری[22] است. درکوشش برای تبیین تئوری جریانهای قاره‌ای، مدلی ریاضی برای توضیح این که چون دو ورقهٔ صلب برکره‌ای از ستیغی قطع شده با منطقه‌های انکسارگسترده شوند چه اتفاقی می‌افتد، به کار رفته‌است. ورقه‌های مذکور باید حول نقطهٔ متغیری موسوم به قطب گسترش[23] دوران کند. دوران مزبور حول محور گسترش[24]، که از قطب گسترش و مرکز زمین می‌گذرد، نیز انجام می‌گیرد. برای اطلاعات بیشتر کتاب: *Planet Earth* تألیف «Jonathan Weiner» را مطالعه کنید.

مثال دوم این بخش از لایتغیر توپولوژیک در ارتباط بامفهوم شبکه[25] است. کلمهٔ شبکه در توصیف مجموعهٔ مربوطی از رئوس، قطعه خطها، و منحنیها چون آنهاکه درشکل ۸.۱۸ نشان داده شده، می‌باشند و راجع به آنها می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ رئوس با مسیرهای رابط



شکل ۸.۱۸

22. Oceanography
23. Pole of Spreading
24. Axis of Spreading
25. Network

آن اندیشید. شبکه‌هایی چون موارد مذکور مثالهایی از آنچه که به‌عنوان معماهای مسیر[۲۶] معروف است به دست می‌دهند. در این صورت آیا می‌توان شبکه‌ها را بدون برداشتن مداد از کاغذ و بدون تکرار قسمتی از مسیر پیمود؟ کوشش کنید که شبکه‌های شکل ۸.۱۸ a ـ c را بپیمایید، و پیش از مطالعه بند بعد، کشف کنید که تشخیص پیشاپیش این که می‌توان آنها را پیمود یا نه چگونه است.

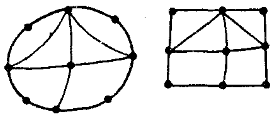
شبکهٔ شکل ۸.۱۸a را نمی‌توان پیمود، درحالی که شبکه‌های اشکال ۸.۱۸b و c را می‌توان سعی در تشخیص این که تفاوت اساسی بین شبکه‌هایی که می‌توانند پیموده شوند و شبکه‌هایی که نمی‌توانند داشته‌باشید.

تعداد مسیرهای منجربه هر رأس یک شبکه درکوشش در تشخیص این که می‌توان یا نمی‌توان آن را پیمود اثر قاطع دارد. اگر رأسی دارای تعداد زوجی مسیر منجربه آن باشد (رأس زوج)[۲۷]، در این صورت می‌توان آنها را به ازواج در رفتن به و بازگشتن از آن رأس به کاربرد. و اگر تعداد فردی مسیربه یک نقطه موجود باشد (رأس فرد)[۲۸]، نمی‌توانند به ازواج به کار روند، و لازم است که کار را با آن نقطه آغاز یا به آن ختم کنیم. اگر شبکه‌ای دارای دو یا کمتر از دو رأس با تعداد فردی مسیر باشد، می‌تواند پیموده شود. شبکه در این حالت منحنی می‌شود. اگر رئوسی باتعداد فردی مسیر موجود نباشد، در این‌صورت شبکه را می‌توان با آغاز کردن و انجام دادن در یک نقطه پیمود، و شبکه در این حالت یک منحنی بسته است. اکنون شکل ۸.۱۸d را امتحان می‌کنیم. این شبکه بیش از دو رأس با تعداد فردی مسیر دارد.

جدول ۸.۱

تعدادرئوس باتعدادفردی مسیر	شبکه می‌تواند پیموده شود.	نام شبکه
بیش از دو	نه	غیرمنحنی
دو یاکمتر	بله	منحنی
صفر	بله	منحنی بسته

26. Tracing Puzzles
27. Even Vertex
28. Odd Vertex



شکل ۸.۱۹

بنابراین نمی‌تواند پیموده شود. اطلاعات در مورد معماهای مسیر را در جدول ۸.۱ خلاصه کرده‌ایم.

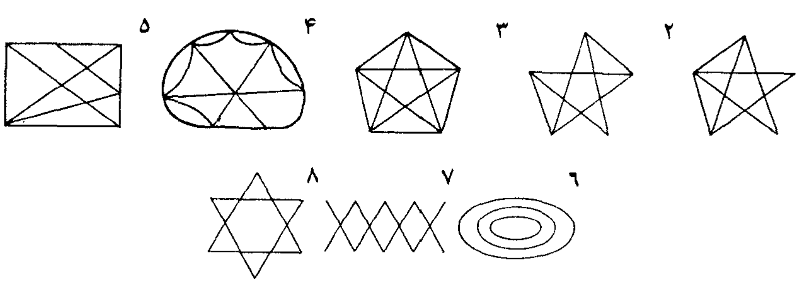
ویژگیهای اساسی یک شبکه برحسب تعداد رئوس زوج یا فرد لایتغیری توپولوژیک است. به عبارت دیگر، دریک شبکهٔ خاص، تعداد مسیرهای منجربه یک رأس با تبدیل توپولوژیک تغییر نمی‌کنند. وفی‌المثل، دوشبکهٔ شکل ۸.۱۹ از لحاظ توپولوژیک معادل‌اند.

اغلب کارهای مربوط به شبکه‌های این بخش، و مطالب بخشهای باقی ماندهٔ این فصل، در دوره‌ای معمولی در نظریهٔ گرافها[29] نیز مندرج است. گراف در این زمینه، مجموعه‌ای قطعه خط مختوم به نقاط است. نظریهٔ گرافها به نوبت خود، مانند توپولوژی، شاخهٔ ثابتی از ریاضیات، باکاربردهایی در تعدادی تحیرآوری از حوزه‌های جدید مطالعه است.

تمرینات ۸.۳

۱. آیا تبدیل پیوستهٔ قضیهٔ ۸.۷ تقارنی سرشی است؟ چرا؟
۲. مراحل مهم اثبات قضیهٔ ۸.۷ را به‌طور مختصر بیان کنید.

در تمرینات ۳ ـ ۱۰، بگویید که آیا می‌توان شبکه‌های شکل ۸.۲۰ را پیمود یا خیر.



شکل ۸.۲۰

29. Graph Theory

در تمرینات ۱۱ ـ ۱۸ ، بگویید که شبکه‌های تمرینات ۳ ـ ۱۰ منحنی هستند یا خیر.
در تمرینات ۱۹ ـ ۲۶ ، بگویید که شبکه‌های تمرینات ۳ ـ ۱۰ منحنیهای بسته‌اند یا خیر.
در تمرینات ۲۷ ـ ۳۴ ، بگویید که شبکه‌های تمرینات ۳ ـ ۱۰ منحنیهای بستهٔ ساده‌اند یا خیر.

I۳۵. آیا داشتن شبکه‌ای با دقیقاً یک رأس فرد ممکن است؟ پاسخ تان را توضیح دهید.
I۳٦. مطالب راجع به شبکه‌های این بخش را، بااستفاده از عبارات و تعاریف نظریهٔ گراف بازنویسی کنید.

۸.۴ مدخل توپولوژی سطوح

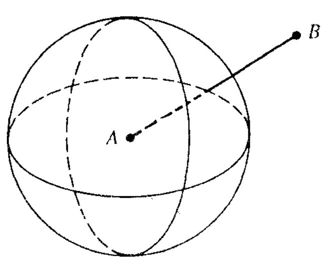
این بخش به معرفی بعضی از قضایای اساسی سطوح بستهٔ ساده می‌پردازد، لایتغیر توپولوژیکی از سطوح را تحلیل می‌کند، و مثالی از یکی از مسائل اخیراً حل شده به دست می‌دهد.

قضیهٔ زیر قضیهٔ منحنی جوردن است که درفضای سه بعدی بیان شده است.

قضیهٔ ۸.۸ . هر سطح بستهٔ ساده در فضای سه بعدی فضا را به سه مجموعهٔ مربوط مجزا چنان افراز می‌کند که مجموعه‌ای که سطح است مرز دو مجموعهٔ دیگر باشد.

قضیه و نتیجهٔ زیر را نیز می‌توان برای سطوح بستهٔ ساده اثبات کرد؛ آنها مشابه قضیهٔ اثبات شده در مورد منحنی بستهٔ ساده‌اند.

قضیهٔ ۸.۹ . بەازای نقطهٔ A ی واقع در داخل و نقطهٔ B ی واقع در خارج سطح بستهٔ سادهٔ S، $\overline{AB}\cap S$ تهی نیست (شکل ۸.۲۱ را ملاحظه کنید).



شکل ۸.۲۱

نتیجهٔ زیر، به علت این که سطح بستهٔ سادهٔ مربوطه کران‌دار است، راست است؛ درنتیجه شعاع مورد بحث باید دارای نقطه‌ای خارجی باشد.

قضیهٔ ۸.۱۰. هر شعاع بانقطهٔ انتهایی واقع در داخل یک سطح بستهٔ ساده سطح مزبور را قطع می‌کند.

خاصیت سطح بستهٔ ساده بودن تحت گروه تبدیلات توپولوژیک درفضای سه بعدی یک لایتغیر است.

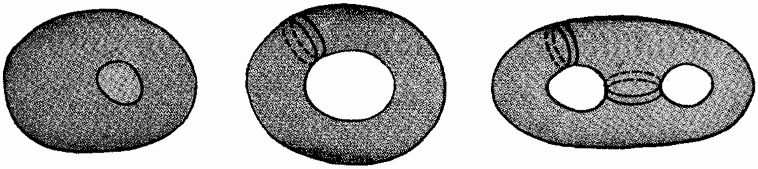
متناظر با بررسی رابطیت نواحی مسطح تحلیل جنس[30] سطح است.

تعریف. جنس یک سطح بزرگترین عدد منحنیهای بستهٔ سادهٔ نامتقاطعی است که می‌توانند بر آن سطح بدون تفکیک آن به دو جزء نامربوط رسم شوند.

به عنوان مثال، جنس کره صفر است، زیرا هر منحنی بسته ساده‌ای، چنان‌که درشکل ۸.۲۲ نشان داده شده، آن را به دوجزء نامربوط تفکیک می‌کند. به همین ترتیب، بسیاری از سطوح متداول چون بیضوی و چند وجهی محدب نیز از جنس صفرند.

اما غیراز سطوح باجنس صفر سطوح دیگری نیز موجودند. شکل ۸.۲۲b چنبره‌ای[31] با جنس یک را نشان می‌دهد، و شکل ۸.۲۲c سطحی با جنس دو را می‌نمایاند. در مورد شکلی از جنس یک، برش دومی آن را به دو جزء نامربوط تفکیک می‌کند. به همین ترتیب، در مورد شکلی از جنس دو، برش سومی آن را به اجزای نامربوط تفکیک می‌کند.

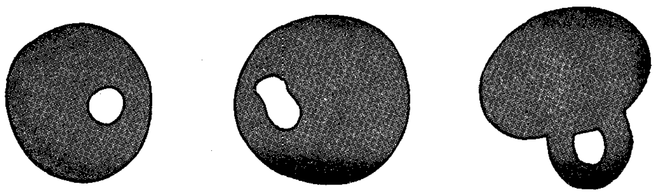
جنس یک سطح مثال دیگری از یک لایتغیر تحت هر تبدیل توپولوژیک است. نیز، هرسطح از جنس خاص را می‌توان با تبدیلی توپولوژیک به هر سطح دیگری از همان جنس



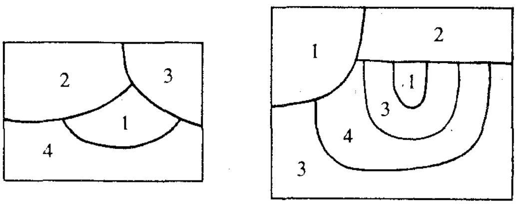
(a) جنس صفر　　(b) جنس یک　　(c) جنس دو

شکل ۸.۲۲

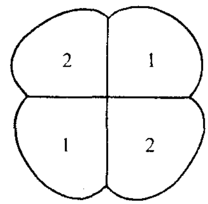
30. Genus　　31. Torus



شکل ۸.۲۳



شکل ۸.۲۴



شکل ۸.۲۵

تبدیل کرد. تأثیر دو گزارهٔ قبلی این است که دو سطح با یک جنس از لحاظ توپولوژیک معادل‌اند. شکل ۸.۲۳ چندین سطح از لحاظ توپولوژیک معادل از جنس یک را نشان می‌دهد.

یکی از کاربردهای توپولوژی سطوح در زمینه‌ای است که نظریهٔ فاجعه[32] نامیده می‌شود. (مورد زیر را ملاحظه کنید: Wood Cock and Davis,Catastrophe Theory).

یکی از مسائل توپولوژیک جالبی که به طور تنگاتنگی با شبکه‌ها، منحنیهای بستهٔ ساده، و لایتغیرها در ارتباط است به رنگ‌آمیزی نقشه مربوط می‌شود.

درمورد نقشه‌های دو بعدی چون آنها که درشکل ۸.۲۴ نموده‌شده‌اند، یا مشابهات‌شان بریک کره، در صورتی که لازم باشد که دو کشور با مرز مشترک دارای رنگهای متفاوت باشند، تنها به چهاررنگ نیاز است. در این مورد فرض می‌شود که دوکشور می‌توانند، درصورتی که مرزهاشان دریک نقطهٔ منفرد تقاطع کنند، یکرنگ داشته‌باشند. و این حالت دوکشور با شمارهٔ ۱ در شکل ۸.۲۵ است.

اثبات گزارهٔ عمومی ای که هرنقشه رامی‌توان با چهار رنگ، رنگ‌کرد بسیار مشکل است، گرچه موبیوس خیلی پیش‌از این درسال ۱۸۴۰ اثبات گزارهٔ مزبور را پیشنهاد کرده‌است، و در حدود ۵۰ سال بعد، قضیهٔ بعد ثابت شد.

---

32. Catastrophe Theory

قضیهٔ ۸.۱۱. هر نقشهٔ واقع بر کره می‌تواند مطابق قواعد مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه با استفاده از حداکثر پنج رنگ، رنگ شود.

فرض براین است که کشورهای درقضیهٔ ۸.۱۱ نواحی به طور ساده مربوط باشند. قواعد رنگ‌آمیزی نقشه عبارت‌اند از این که دوکشور هم مرز باید رنگهای متفاوت داشته‌باشند اما می‌توانند در صورتی که مرزهاشان در نقطه منفردی تقاطع کنند دارای یک رنگ باشند.

همان‌گونه که در آغاز بحث خاطرنشان شد، مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه با سایر مفاهیم توپولوژیک در ارتباط است. مرزهای کشورها می‌توانند هر منحنی بستهٔ ساده‌ای باشند، بنابراین شکل دقیق نقشه دارای اهمیت نیست. مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه درصورتی که جنس سطح مربوطه عوض شود تغییر می‌کند. قضیهٔ ۸.۱۱ در مورد هر سطح از جنس صفر، و نه فی‌المثل در مورد یک چنبره، به کار می‌رود.

مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه سرانجام در ژوئیه ۱۹۷۶، توسط کنث اپل[۳۳] و ولف گانگ هاکن[۳۴] از دانشگاه ایلینویز، که قضیهٔ زیر را اثبات کردند، حل شد.

قضیهٔ ۸.۱۲ . هر نقشه واقع برسطحی از جنس صفر می‌تواند مطابق قواعد مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه بااستفاده از حداکثر چهار رنگ، رنگ کرد.

حل مسألهٔ موردبحث به‌کامپیوتری نیاز دارد، اما اثبات آن علی‌رغم این واقعیت که بعضی از ریاضیدانان هنوز امیدوار به اثباتی از نوعی متفاوت‌اند، به پذیرفته شدن ادامه می‌دهد.

تمرینات ۸.۴

۱. قضیهٔ ۸.۹ را اثبات کنید.
۲. جنس یک سطح بستهٔ ساده چیست؟

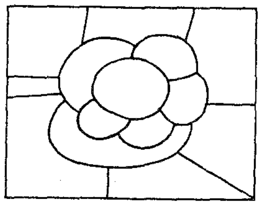
در تمرینات ۳ - ۷، سطوح دیگری از جنس داده‌شده، علاوه بر آنها که در این بخش نام

33. Kenneth Appel
34. Wolfgang Haken

بردهایم، نام برده یا توصیف کنید.

۳. صفر ۴. یک ۵. دو ۶. سه ۷. چهار

۸. نشان دهید که نقشهٔ شکل ۸.۲۶ رامی‌توان، مطابق با محدودیتهای مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشهٔ نه با بیشتر از چهاررنگ، رنگ کرد.



شکل ۸.۲۶

۹. کمترین تعداد رنگهای لازم برای رنگ کردن هر نقشهٔ شکل ۸.۲۴ مطابق با قواعد مسألهٔ رنگ آمیزی نقشه چیست؟

۱۰. نقشه‌ای با ۱۲ کشور که تنها به سه رنگ نیاز داشته‌باشد، و بااین همه تقاضای مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه را برآورده کند، رسم کنید.

۱۱. نقشه‌ای با ۱۲ کشور که تنها به دورنگ نیاز داشته‌باشد تا نیازهای مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه را برآورده کند رسم کنید.

۱۲. توضیح دهید که چرا اهمیت دارد که در مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه، کشورهای واقع بر یک نقشه، نواحی به‌طور ساده مربوط باشند.

۱۳. توضیح دهید که چرا اهمیت دارد که در مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه کشورهای با یک نقطهٔ منفرد مشترک بتوانند یک رنگ داشته‌باشند.

۱۴I. قضیهٔ ۸.۸ را اثبات کنید، یا اثبات آن را در مرجعی بخوانید.

۱۵I. اثبات قضیهٔ ۸.۱۱ را، درصورت لزوم بااستفاده از مرجع، به طور مختصر بیان کنید.

۱۶I. مفاهیم اساسی تئوری فاجعه را مطالعه کرده اهمیت آن را توضیح دهید.

۱۷I. اثبات مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشهٔ اپل و هاکن را مطالعه کرده به اختصار شرح دهید.

۱۸I. مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه را درمورد چنبره تحقیق کنید. چند رنگ کفایت می‌کند؟

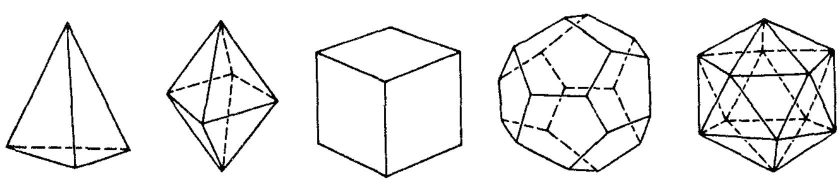
۸.۵ فورمول اولر و سطوح خاص

این بخش به بررسی توپولوژی سطوح بامعرفی فورمول اولر در مورد سطوحی که جنس یکسان ندارند و با طرح سطوح خاصی با خواصی شگفت نامشابه با موارد هندسهٔ اقلیدسی معمولی، ادامه می‌دهد.

گسترش موضوع توپولوژی طی صدسال گذشته انجام گرفته، اما موضوع مورد بحث آغاز خود را حتی پیش از این تاریخ داشته است. در این مورد، یکی از مفاهیمی که در واقع ذاتاً توپولوژیک است نخستین بار توسط دکارت و بعد باردیگر توسط اولر درسال ۱۷۵۲ کشف شد، و از این تاریخ به بعد به عنوان فورمول اولر[35] معروف است. فورمول اولر تعداد وجوه، رئوس، ویالهای یک چند وجهی ساده را به هم ربط می‌دهد. به خاطر بیاورید که چند وجهی[36] سطح بسته‌ای شامل تعدادی وجه، که هریک از آنها ناحیه‌ای چند ضلعی شکل است، می‌باشد. و اگر سطح مزبور دارای حفره نباشد و بتواند باتبدیلی پیوسته به کره‌ای تغییر شکل دهد، یک چند وجهی ساده[37] است. چندوجهی ساده جنسی از صفر دارد.

یونانیان باستان علاقهٔ خاصی به پنج چندوجهی ـ چندوجهیهای منتظم[38]، با وجوه و زوایای هم‌نهشت ـ نشان می‌دادند. پنج چندوجهی منتظم مزبور، که در کتاب XIII اصول اقلیدس مورد بحث قرارگرفته‌اند، در شکل ۸.۲۷ نشان داده شده‌اند. اسامی و بعضی از عددهای رئوس، وجوه، و یالها را در جدول ۸.۲ فهرست کرده‌ایم. تکمیل جدول مزبور به‌عنوان تمرین ۱، در تمرینات ۸.۵ واگذارشده است.

اما، رابطهٔ بین تعداد رئوس، وجوه، و یالهای این چند وجهیها چیست؟ پیش از ادامهٔ مطالعه، و درصورت نیاز، مثالهای گوناگون دیگری از خودتان برای رسیدن به فورمول اولر بیاورید.



(a) (b) (c) (d) (e)

شکل ۸.۲۷

35. Euler's Formula
36. Polyhedron
37. Simple
38. Regular

جدول ۸.۲

شمارهٔ شکل	نام چندوجهی	V	F	E
۸.۲۷a	چهاروجهی	۴	۴	٦
۸.۲۷b	هشت وجهی	٦	۸	۱۲
۸.۲۷c	مکعب	۸	؟	؟
۸.۲۷d	دوازده وجهی	؟	۱۲	؟
۸.۲۷e	بیست وجهی	؟	؟	؟

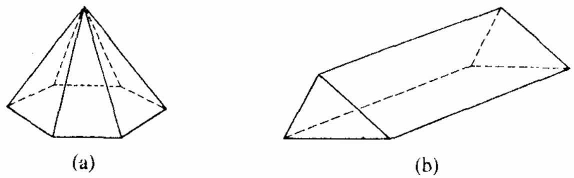
قضیهٔ ۸.۱۳ . درمورد چندوجهی بستهٔ ساده داریم $V+F=E+2$ ، که در آن V تعداد رئوس، E تعداد یالها، و F تعداد وجوه است.

شکل ۸.۲۸ دومثال از چندوجهیهایی را که می‌توانند برای تحقیق فورمول اولر به کار روند نشان می‌دهد. نتیجهٔ تحقیق در جدول ۸.۳ مختصر شده‌است.

اثبات: در اثبات قضیهٔ ۸.۱۳ ، حذف یکی از وجوه چند وجهی مورد بحث را درنظر می‌گیریم بنابراین سطح باقی مانده می‌تواند با تبدیلی توپولوژیک به صورت مسطح کشیده شود. در این صورت شبکهٔ رئوس و یالهای واقع درصفحه دارای همان تعداد رئوس ویالهای چند وجهی اصلی است. اما در این مورد یک وجه از آنجاکه حذف شده، کمتر است. شکل ۸.۲۹ مثالی از این مورد بااستفاده ازیک مکعب را نشان می‌دهد.

اکنون شبکهٔ مسطح مزبور را با رسم اقطار رابط رئوس تا اجزای مثلث شکل حاصل شود مثلث بندی می‌کنیم. در این مثلث بندی، مقدار $V-E+F$ ، از آنجاکه رسم هرقطر یک یال ویک وجه اضافه می‌کند، تغییر نمی‌کند.

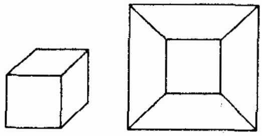
چون مثلث بندی تکمیل شد، می‌توان هربار یکی از مثلثهای مزبور را حذف کرد تا یک مثلث باقی بماند. (این جریان رادر مورد مکعب درشکل ۸.۳۰ به تصویر کشیده‌ایم.) یالهای بعضی از این مثلثها بر مرز شبکهٔ مزبور واقع است. در این مورد ابتدا، هریک از یالهای مثلثی مرزی راکه یال مثلث دیگر نباشد، حذف می‌کنیم.



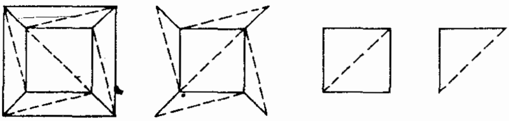
شکل ۸.۲۸

جدول ۸.۳

	V	F	E	V+F=E+۲
هرم مسدس القاعده	۷	۷	۱۲	۷+۷=۱۲+۲
منشور قائم مثلث القاعده	٦	۵	۹	٦+۵=۹+۲



شکل ۸.۲۹



شکل ۸.۳۰

۱. اگر مثلث مورد بحث تنها یک یال واقع بر مرز داشته‌باشد، حذف آن یال یک واحد نقصان در E و F، هر دو، به وجود می‌آورد. بنابراین V−E+F تغییر نمی‌کند.

۲. اگر مثلث مزبور دارای دو یال برمرز باشد، حذف آنها در V یک، در E دو، و در F یک واحد نقصان پدیدمی‌آورد. بنابراین V−E+F بی‌تغییر می‌ماند.

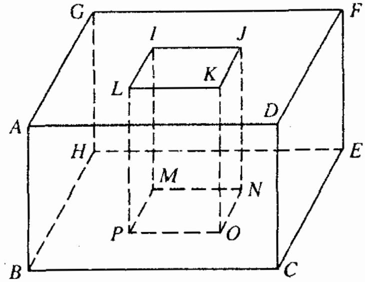
با ادامهٔ این جریان، می‌توان مرز مزبور را تا این که تمام چیزی که از شبکهٔ مثلث بندی مزبور باقی می‌ماند مثلث منفردی با سه یال، سه رأس، و یک وجه باشد، تغییر داد. در این مورد این مثلث، $V-E+F=1$ است. اما از آنجا که $V-E+F$ در این جریان براندازی مثلثها لایتغیر است، فورمول $V-E+F=1$ در مورد شبکهٔ مسطح اصلی نیز برقراراست. و فورمول $V-E+F=2$ درمورد چند وجهی اصلی، که یک وجه بیشتر داشت، به کار می‌رود.

فورمول اولر $V-E+F=2$ مثالی از یکی از خواص توپولوژیک یک شکل است، زیرا تحت تبدیلی توپولوژیک تغییرناپذیر است. البّته، چندوجهی موردبحث می‌تواند به هرسطح بستهٔ ساده چنان تبدیل یابد که دستگاه رئوس، وجوه، و یالها به شبکه‌ای از نقاط، نواحی، و مسیرهای واقع برآن سطح مبدل شود.

فورمول اولر، جز این که جنس سطح موردنظر صفر باشد، برقرارنیست. از این گذشته، به توافقی در مورد چگونگی شمارش وجوه نیازاست. فی‌المثل، مجموعهٔ نقاط شکل ۸.۳۱ دارای جنس یک است. و شمردن وجوه به توافقی که درآن وجه AGFD به حساب آید اما بعد IJKL تفریق شود چنان که کل تعداد وجوه هشت باشد، نیاز است. بررسی و ملاحظه کنید که فورمول اولر در مورد این سطح برقرارنیست. روش دیگر شمردن وجوه در تمرین I۲۱ مطرح شده است.

جالب است که دریابیم که مفهوم فورمول اولر را می‌توانیم در مورد هر سطح بسته‌ای، بی‌توجه به جنس آن، تعمیم دهیم.

قضیهٔ ۸.۱۴ . اگر سطح بسته‌ای از جنس n توسط تعدادی رئوس وصل شده باکمانهای منحنی به نواحی ای افراز شود، در این صورت $V-E+F=2-2n$ (F



شکل ۸.۳۱

نواحی و E کمانهای شبکه را نمایش می‌دهد). عدد ۲n - ۲ به ویژگی اولر[39] موسوم است. توجه داشته‌باشید که فورمول فوق در مورد سطحی از جنس صفر به فورمول معمولی اولر تحویل می‌شود.

آخرین موضوع توپولوژیکی‌ای که معرفی می‌شود مربوط به نوع بسیار خاص سطحی نامشابه باسطوحی که تاکنون مورد بررسی قرار داده‌ایم است. سطوح معمولی دو رو دارند، اما آگوستوس موبیوس[40]، که راجع به هندسهٔ تصویری تحلیلی نیز مطالبی نوشته، در حدود ۱۸۶۵ مقاله‌ای راجع به سطوح چندوجهی نوشت که منجربه پیدایش این که امکان داشتن سطوحی با تنها یک رو موجود است، شد. در مورد سطح یک رو، مسیر از یک نقطه به نقطهٔ دیگر نیاز به قطع لبهٔ سطح ندارد.

در شکل ۸.۳۲، که سطحی با دو رو را نشان می‌دهد، نمی‌توانیم، فی‌المثل، خطی از A به B بدون ردشدن از لبهٔ آن رسم کنیم.

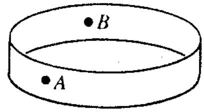
ساده‌ترین سطح یک رویه[41] به نوار موبیوس[42] موسوم است. این نوار را درشکل ۸.۳۳ به تصویر کشیده‌ایم. نمونه‌ای از نوار موبیوس را می‌توان از نوارکاغذی مستطیل شکلی ساخت. نوار موردبحث را نیم‌دور داده دو سرآن را به هم بچسبانید. نوار موبیوس تنها یک رو و یک لبه دارد. می‌توان منحنی‌ای را از هر نقطهٔ واقع براین سطح به هریک از نقاط دیگر بدون عبور از این لبه پیمود. آزمایش کردن با نوار موبیوس برای ملاحظهٔ این که این نوار مانند سطوح دو رویه عمل نمی‌کند جالب است. فی‌المثل، اگر نوارموبیوسی را از وسط درخطی موازی لبه ببریم یک تکه باقی می‌ماند.

مثال دوم سطوح یک رویه بطری کلاین، نموده‌شده درشکل ۸.۳۴ است. سطح جالب مذکور داخل یا خارج ندارد. یکی از کاربردهای غیرمعمول سطوح یک رویه در لباس زنانه در مقالهٔ «Dressing up Mathematics» از «Jean J. Pedersen» در «The Mathematics Teacher,February 1968» آمده‌است. کاربرد امکاناً عملی‌تری از نوار موبیوس درشکل ۸.۳۵ نشان داده‌شده‌است. شکل نوار موبیوس دادن به تسمهٔ رابط دوچرخ می‌گذارد که تسمه در هر جا به یک شدت، و نه چون در ترتیب معمول درست در یک رو، فرسوده شود.

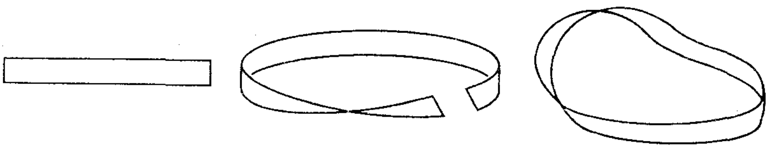
خاصیت سطح یک رویه یا دو رویه بودن لایتغیری توپولوژیک است، و نشان

---

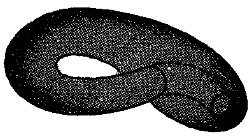
39. Euler Characteristic
40. Augustus Möbius(or Moebius)
41. One - Sided Surface
42. Möbius Strip



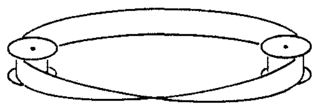
شکل ۸.۳۲



شکل ۸.۳۳



شکل ۸.۳۴



شکل ۸.۳۵

می‌دهد که چرا این موضوع در این بخش آمده است. فی‌المثل، نوار موبیوس نمی‌تواند با تبدیلی توپولوژیک به سطحی دو رویه تغییر کند. یکی از کاربردهای مربوط توپولوژی که باید در این مرحله ذکر شود دسته‌بندی کردن انواع گوناگون گره‌ها[43] است. دو گره از لحاظ توپولوژیک معادل‌اند اگر یکی از آنها بتواند به طریقی پیوسته به دیگری تبدیل شود.

۸.۵ تمرینات

۱. جدول ۸.۲ را، بانشان دادن تعداد رئوس، وجوه، و یالهای پنج چندوجهی منتظم تکمیل کنید.

۲. فورمول اولر را در مورد هریک از پنج چندوجهیهای منتظم تحقیق کنید.

۳. فورمول اولر را در موارد زیر تحقیق کنید:

a. منشور قائم مسدس القاعده　　b. منشور قائم مثمن القاعده

۴. ترسیماتی مشابه شکلهای ۸.۲۹ و ۸.۳۰ در مورد چهاروجهی بکشید.

43. Knots

۵. ویژگی اولر را در مورد مجموعهٔ نقاط شکل ۸.۳۱ بیابید.

در تمرینات ۶ ـ ۹، مقدار عددی ویژگی اولر به‌ازای سطح از جنس مشخص شده چیست؟

۶. صفر ۷. یک

۸. دو ۹. سه

در تمرینات ۱۰ ـ ۱۳، جنس متناظر با مقدار مفروض ویژگی اولر چیست؟

۱۰. ۸- ۱۱. ۱۲- ۱۲. ۳ ۱۳. ۴

۱۴. شکلی مشابه با شکل ۸.۳۱، اما با جنس دو رسم کنید. تعداد رئوس، وجوه و یالهای آن را بیابید؛ سپس ویژگی اولر را مشخص کنید.

۱۵. با ساختن یک نمونه، تحقیق کنید که اگر نوار موبیوس درخطی از وسط بریده شود، یک تکه باقی می‌ماند.

۱۶. نتیجهٔ کار، درصورتی که نوار موبیوس به‌جای وسط، از یک سوم فاصله از لبهٔ آن از درازا بریده شود، چیست؟

۱۷. فرض می‌کنیم سطحی با دادن یک دور کامل قبل‌از چسباندن دو سرش ساخته‌شده باشد. آیا این سطح‌نوار موبیوس است؟ در صورتی که این نوار در وسط از درازا بریده شود چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۱۸. به همان سؤالات تمرین ۱۷ پاسخ دهید، اما فرض کنید که به نوار مزبور قبل از چسباندن دو سرش یک دورونیم پیچ داده‌شده باشد.

۱۹. نوار موبیوس به‌ازای n مساوی کدام عدد مجموعه‌ای از نقاط در فضای n بعدی است؟

I۲۰. عملیات تمرینات ۱۵ ـ ۱۸ را درمورد سطح ساخته‌شده با بیش‌از یک پیچ ونیم انجام دهید. نمونه‌ها و تعمیمات ممکنی را که کمک به پیشگویی آنچه که چون آن سطح به طرق گوناگون بریده شود رخ می‌دهد می‌کند، جستجو کنید.

I۲۱. سعی در کشف روش دیگری در شمردن وجوه سطحی از جنسی غیراز صفر باافزودن یالهای جدید به شکل موجود کنید.

I۲۲. دراثبات قضیهٔ ۸.۱۳، به‌عنوان مثال از هشت‌وجهی استفاده کرده نمودارهایی در مراحل اثبات نشان دهید.

I۲۳. اثباتی در مورد قضیهٔ ۸.۱۴ مطالعه و به اختصار شرح دهید.

۲۴I. راجع به دسته‌بندی توپولوژیک گره‌ها مطالعه کرده گزارش دهید. می‌توانید از مقالهٔ زیر استفاده کنید:
«The Theory of Knots,» by Lee Neuwirth, in the June 1979, issue of *Scientific American.*

تمرینات مروری فصل
فصل ۸

۱. آیا ممکن است تبدیلی وجود داشته‌باشد که دو پیوسته باشد، اما معکوسش پیوسته‌نباشد؟

در تمرینات ۲ ـ ۵، مشخص کنید که کدام یک از مجموعه‌های نقاط زیر همواره مجموعه‌هایی مربوط‌اند.

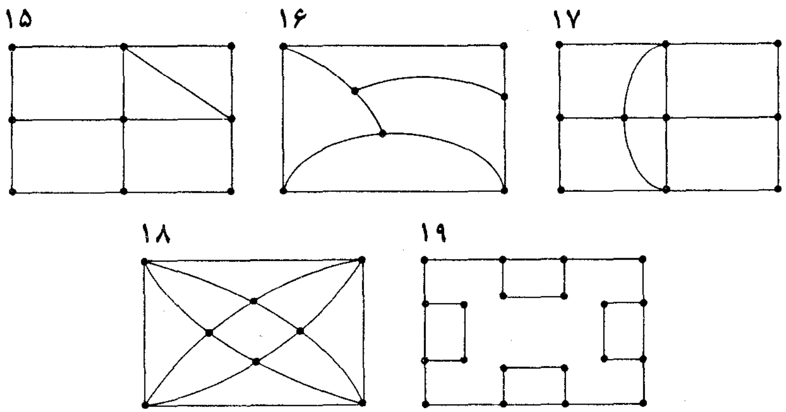
۲. مجموعهٔ ۲۵ نقطهٔ متمایز واقع برسطح کره
۳. مجموعهٔ نقاط با درجهٔ رابطیت ۲۵
۴. مجموعهٔ ۲۵ خط متمایز با یک نقطهٔ مشترک
۵. چندضلعی با ۲۵ ضلع
۶. اگر سطحی دارای درجهٔ رابطیت سه باشد، در این صورت برای تبدیل آن به ناحیهٔ ساده مربوط به چند برش نیاز دارد؟
۷. اگر دو ناحیهٔ مسطح هر دو دارای یک درجهٔ رابطیت باشند، در این صورت آیا تبدیل یکی به دیگری با تبدیل توپولوژیک ممکن است؟
۸. به ازای یک نقطه واقع در داخل و یک نقطه واقع در خارج یک منحنی بستهٔ ساده، قطعه خط به نقاط انتهای آن دو نقطه حداقل چند نقطهٔ مشترک با آن منحنی دارد؟

در تمرینات ۹ و ۱۰، در مورد سطحی از جنس صفر، فورمول اولر را به‌کار برید.

۹. تعداد رئوس را درصورتی که تعداد وجوه ۷ و تعداد یالها ۲۵ باشد بیابید.
۱۰. تعداد وجوه را در صورتی که تعداد رئوس ۱۶ و تعداد یالها ۳۴ باشد بیابید.
۱۱. سطحی با جنس دو چند حفره درون خود دارد؟
۱۲. درصورتی که ویژگی اولر در مورد سطحی ۸- باشد، جنس آن سطح چیست؟
۱۳. آیا می‌تواند یک سطح یک رویه تحت تبدیلی توپولوژیک تصویر سطحی دو رویه

باشد؟

۱۴. فرض می‌کنیم نوار موبیوسی از تکه کاغذ مستطیل شکلی به عرض ۲cm و طول ۱۲cm، بدون هیچ کمبود حاصل از چسباندن لبه‌های آن به یکدیگر باشد. کل مساحت سطح نوار موبیوس حاصل را بیابید.



شکل ۸.۳۶

در تمرینات ۱۵ ـ ۱۹، تعداد رئوس فرد را بررسی کنید؛ سپس بگویید که کدام یک از موارد زیر ترسیمات شکل ۸.۳۶ را با بیشترین دقت توصیف می‌کند: نامنحنی، منحنی، یا منحنی بسته.

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان از هر مجموعهٔ تمریناتی که قبلاً از مجموعه‌های تمرینات پیشین این فصل معین نشده‌اند انتخاب کرد.

۹ هندسه‌های نااقلیدسی

۹۰۱ مدخل هندسهٔ هذلولوی

درفصول ۲ ـ ۵ بررسی هندسهٔ اقلیدسی را بامعرفی مفاهیم جدید بسیاری گسترش دادیم. فصول ۶ ـ ۸ تبدیلات جدیدی را تشکیل داد که به هندسه‌های بسیار عمومی‌تری یا هندسه‌ای متفاوت از هندسهٔ اقلیدسی انجامیدند. هندسه‌های مطرح در این آخرین فصل درفصل ۱ طی بحث مجموعه‌های گوناگون آکسیومها و خواص‌شان پیش‌بینی شدند.

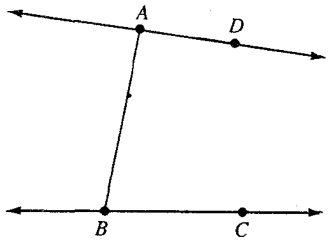
هندسه‌های نااقلیدسی مثالهای ویژه‌ای از هندسه‌های جدید با مجموعه‌های آکسیومهایی متفاوت از مجموعه‌های هندسهٔ اقلیدسی است. عبارت هندسهٔ نااقلیدسی[1] به مفهوم بسیار محدودی به‌کاررفته‌است. این هندسه به این علت از هندسهٔ اقلیدسی متفاوت است که طریق دیگری در مورد اصل موضوع پنجم مربوط به موازیهایش برگزیده است. مطالعهٔ هندسهٔ اقلیدسی به مطالعهٔ فلسفه شباهت بسیار دارد، چه ممکن است که روابط عمیق حاصل از تعقیب دستگاههای آکسیوماتیک سازگار، نظرگاههای دیرپای مربوط به طبیعت ریاضیات و جهان را دگرگون کند.

ساخت اصل موضوع پنجم هندسهٔ اقلیدسی چنان‌که توسط اقلیدس بیان شده به طور قابل ملاحظه‌ای پیچیده‌تر از ساخت اصول موضوع و آکسیومهای دیگر آن بود: «اگر قاطعی بر دو خط به چنان طریقی برخورد کند که زوایای داخلی واقع بریک طرف آن کمتر از دو زاویهٔ قائمه باشد، در این صورت دوخط مزبور در آن طرفی که زوایا کمتر از دو زاویهٔ قائمه‌اند تلاقی می‌کنند.» طبق نظر اقلیدس، $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$، در صورتی که مجموع اندازه‌های $\angle DAB$ و $\angle ABC$ کمتر از π رادیان باشد، درطرف راست شکل ۹.۱ تلاقی می‌کنند.

کلمهٔ موازی[2] در اصل موضوع پنجم اقلیدس ظاهر نیست. متداولترین تعبیر اصل

1. non - Euclidean Geometry

2. Parallel



شکل ۹.۱

موضوع پنجم اقلیدس در آکسیومی که آکسیوم پلی فیر[3] (به‌نام جان پلی فیر[4]، ۱۸۱۹ - ۱۷۴۸، فیزیکدان و ریاضیدان اسکاتلندی) نامیده‌شده به‌کاررفته است: از یک نقطهٔ غیرواقع برخطی مفروض، دقیقاً یک خط می‌توان موازی آن خط معلوم در صفحهٔ مربوطه رسم کرد. کلمهٔ موازی چنان که دراین مورد به‌کاررفته به مفهوم نامتقاطع یا نقطهٔ اقلیدسی مشترک نداشتن است. آکسیوم پلی‌فیر و اصل موضوع پنجم اصلی منطقاً معادل‌اند. و این بدین معنی است که هریک را می‌توان همراه بامفروضات دیگر هندسهٔ اقلیدسی در اثبات دیگری به‌کاربرد.

هندسه نااقلیدسی مدل مناسبی به دست اینشتاین در مورد کارش راجع به نسبیت داد، و درحالی که در هندسهٔ دیفرانسیل و موارد دیگر به کار می‌رود به دلایل دیگر نیز ارزشمند است. گاهی درک حقیقی مفهوم اصل موضوع تنها وقتی که شخص کار را بااصول موضوعی که بدیهی یا عملی نیستند می‌آغازد حاصل می‌شود. نیز، هندسهٔ نااقلیدسی، برخلاف هندسهٔ تصویری یا توپولوژی، در اینکه چیزی غیراز تعمیم هندسهٔ اقلیدسی است، دارای اهمیت است. هندسهٔ نااقلیدسی شامل هندسهٔ معمولی به عنوان حالتی خاص نیست.

از زمانی که اقلیدس اصول موضوع خود را تقریر کرد، حدود ۳۰۰ ق.م.، بحثهایی درمورد اصل موضوع پنجمش پیش‌آمد، و جانشینهای بسیاری (از جمله آکسیوم پلی‌فیر) برای آن پیشنهاد شد، اما از این مهمتر این بود که ریاضیدانان احساس کردند که اصل مزبور اصلاً اصل نیست. برای تقریباً ۲۰۰۰ سال، بسیاری از اشخاص کوشیدند که نشان دهند که گزارهٔ مزبور در واقع قضیه‌ای است که می‌تواند از بقیهٔ اصول موضوع اثبات شود. بحث تا قرن هجدهم ادامه یافت. کارهای ساکری[5] و لامبرت[6]، که دربخش ۹.۳ به اختصار بررسی می‌شود، سعی در اثبات اصل موضوع پنجم را ادامه داد. دو شخص اخیر روش غیرمستقیم طرح اصل

---

3. Play fair's Axiom
4. John Playfair
5. Saccheri
6. Lambert

موازی دیگر و سعی در رسیدن به تناقض را به‌کار بردند. اما اصل پنجم مزبور نه هیچگاه ثابت شد، نه به تناقض رسید.

اندکی پس‌از ۱۸۰۰ ، ریاضیدانانی چون کارل فردریش گوس[7] (۱۸۵۵ - ۱۷۷۷) شروع به دریافت این کردند که اصل پنجم را هیچ‌گاه نمی‌توان از اصول دیگر اثبات کرد، چه در واقع اصل مزبور اصلی مستقل در مجموعهٔ اصول اقلیدسی، و نه قضیه است. کوشش در اثبات اصل پنجم باانکار آن قضایای غریبی حاصل داده بود که درصورتی که اصل جانشین دیگری به‌کار می‌رفت ناچار از معتبر پذیرفته شدن بودند.

در افتخار کشف هندسهٔ نااقلیدسی، نیز چون درکشف حساب جامع و فاضل، بیش از یک شخص سهیم بودند، و دراین مورد گرچه گوس از اهمیت موضوع آگاه بود، هیچ‌گونه مطلبی نشر نداد. اولین شرح هندسهٔ نااقلیدسی به چاپ رسیده براین فرض مبتنی بود که از یک نقطهٔ غیرواقع بریک خط مفروض، بیش‌از یک خط به موازات آن خط در صفحه می‌توان رسم کرد. این نوع هندسه، موسوم به هندسهٔ نااقلیدسی هذلولوی[8]، مستقلاً توسط یک روسی، نیکولای لُباچِوسکی[9]، (۱۸۵۶ - ۱۷۹۳) ، و ، در حدود همان سنوات، توسط یک مجارستانی، یوهان بولیای[10]، (۱۸۶۰ - ۱۸۰۲) کشف شد. نتایج کار در حدود ۱۸۳۰ چاپ شد. نوع دومی از هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ بیضوی[11]، را به اختصار در بخش ۹.۶ معرفی کرده‌ایم. دادن اسامی هذلولوی، بیضوی ، و سهموی[12] به‌ترتیب به هندسه‌های نااقلیدسی و هندسهٔ اقلیدسی در سال ۱۸۷۱ منسوب به فلیکس کلاین است.

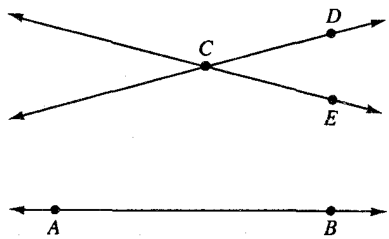
ممکن است که ابتدا بررسی هندسهٔ هذلولوی را بااستفاده از مدلها ـ شاید طریق شهودی‌تر از طرح آکسیوماتیک آن‌که بعداً می‌آید ـ مطرح کنیم. در این بخش، یک مدل در مورد هندسهٔ بیضوی دربخش ۹.۶ به‌بحث آمده‌و دو مدل درمورد هندسهٔ هذلولوی در بخش ۹.۷ دربحث سازگاری به‌کار رفته است.

طرح هندسهٔ هذلولوی این فصل بر جمیع مفروضات و عبارات تعریف نشدهٔ هندسهٔ اقلیدسی جدید به استثنای جانشینی زیر در مورد اصل موضوع موازی آن، که به‌عنوان اصل موضوع ویژهٔ هندسهٔ هذلولوی شناخته می‌شود، بناشده است.

اصل موضوع ویژه. از نقطهٔ مفروض C ، غیرواقع برخط مفروض $\overleftrightarrow{AB}$، بیش‌از یک خط واقع در صفحهٔ نامتقاطع با خط مفروض می‌گذرد.

---

7. Carl Friedrich Gauss
8. Hyperbolic
9. Nikolai Lobachewsky
10. Johann Bolyai
11. Elliptic Geometry
12. Parabolic



شکل ۹.۲

در صورت لزوم بخش ۱.۷ را مرورکنید. قضایایی از هندسهٔ مطلق نیز در هندسهٔ نااقلیدسی آمده‌اند، زیرا به هیچ اصل موضوع موازی‌ای بستگی ندارند.

رابطهٔ موصوف دراصل موضوع ویژهٔ مزبور درشکل ۹.۲، درصورتی که فرض شود که $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CE}$ دوخط متمایز گذرنده از C و نامتقاطع با $\overleftrightarrow{AB}$ می‌باشند، به تصویر کشیده شده‌است.

ممکن است اندیشهٔ تغییر اصل موضوع موازی بسیار عجیب به‌نظر برسد، اما هندسه‌های متناهی بسیاری وجود دارد که اصل موضوع موازی اقلیدس در آنها برقرار نیست. فی‌المثل، چند هندسهٔ متناهی فصل ۱ دارای آکسیومی هستند که مقرر می‌کند که هر دو خط در نقطه‌ای تقاطع می‌کنند. هندسهٔ متناهی دزارگ غرابت خاصی در ارتباط با موازیها دارد؛ در این هندسه، هرنقطه می‌تواند سه خط درگذر آن موازی یک خط خاص، قطبی آن نقطه، داشته‌باشد.

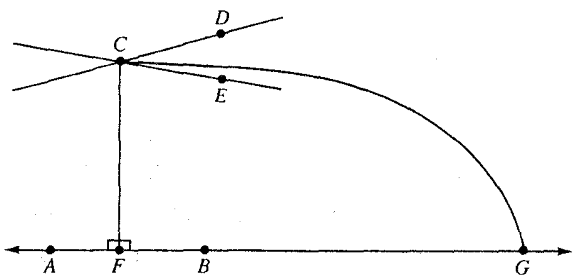
هندسهٔ متناهی‌ای وجود ندارد که جمیع آکسیومهای هندسهٔ هذلولوی را داشته‌باشد، اما بعضی اصل موضوع ویژه را دارند. مثال خاصی در این مورد هندسهٔ سیزده نقطه و بیست و شش خط، مطرح در جدول ۹.۱ است، که در آن هر مجموعهٔ سه نقطه‌ای بریک خط واقع است.

با بازگشت به هندسهٔ هذلولوی و اصل موضوع ویژه‌اش، باید برای بررسی بعضی از نتایج تغییر اصول موضوع درنگ و ملاحظه کنیم که آیا می‌توانیم پیش‌از خواندن گسترش قضایا و اثباتهای هندسهٔ مسطحهٔ جدید مورد بحث، بعضی از قضایای آن را پیشگویی کنیم یا خیر.

قضیهٔ ۹.۱ . از نقطهٔ مفروض C، غیرواقع برخط مفروض $\overleftrightarrow{AB}$، بی‌نهایت خط نامتقاطع باخط مفروض مورد بحث می‌گذرد.

جدول ۹.۱

A, B, C	B, D, F	C, D, G	D, H, I	E, F, K	F, G, M	G, I, K	H, J, L
A, D, E	B, E, I	C, E, J	D, J, K	E, G, L	F, I, J		
A, F, H	B, G, H	C, F, L	D, L, M	E, H, M			
A, G, J	B, J, M	C, H, K					
A, I, L	B, K, L	C, I, M					
A, K, M							

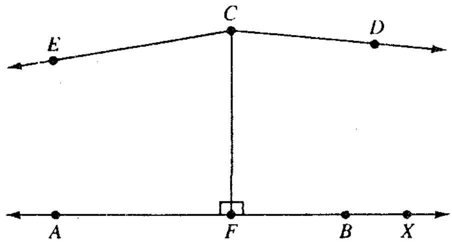


شکل ۹.۳

اثبات: درشکل ۹.۲ بی‌نهایت خط گذرنده از C و داخل زاویهٔ DCE موجوداست. درشکل ۹.۳، فرض می‌کنیم $\overline{CF}$ عمود از C بر $\overleftrightarrow{AB}$ باشد، و $\overleftrightarrow{CG}$ یکی از خطوط داخلی مورد بحث، $\overleftrightarrow{AB}$ را قطع کند. این بدین معنی است که $\overleftrightarrow{CE}$ نیز باید، بنابه آکسیوم پاش که به برقرار بودنش در هندسهٔ هذلولوی، از آنجاکه تنها آکسیوم موازیها از هندسهٔ اقلیدسی تغییریافته، ادامه می‌دهد، $\overleftrightarrow{FG}$ را قطع کند.

به خاطر بیاورید که آکسیوم پاش براین است که خط داخل در مثلث از یک رأس ضلع مقابل آن رأس را قطع می‌کند. درشکل ۹.۳ ، $\overleftrightarrow{CE}$ داخل مثلث CFG است. این واقعیت که $\overleftrightarrow{CE}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ را قطع می‌کند این فرض راکه با $\overleftrightarrow{AB}$ موازی است نقض می‌کند، بنابراین $\overleftrightarrow{CG}$ نمی‌تواند $\overleftrightarrow{AB}$ را قطع کند.

درشکل ۹.۴ ، مجموعهٔ جمیع خطوط واقع دریک صفحهٔ گذرنده از C به دو زیرمجموعه افرازشده است: آنهاکه $\overleftrightarrow{AB}$ را قطع می‌کنند و آنهاکه نه. به علت فرض تناظر یک به یک بین مجموعه‌های اعداد حقیقی و مجموعه‌های خطوط گذرنده ازیک نقطه، که از هندسهٔ اقلیدسی القاء شده، معلوم است که افراز فوق با دو خط متفاوت، نشان شده به صورت $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CE}$، به وقوع پیوسته است. این دوخط باید یا آخرین خطوط در یکی از دوجهتی که $\overleftrightarrow{AB}$ را قطع می‌کنند یا اولین خطوط دریکی از دو جهتی که $\overleftrightarrow{AB}$ را قطع نمی‌کنند باشند. اما



شکل ۹.۴

این فرض که آخرین خط متقاطعی، مثلاً $\overleftrightarrow{CX}$، وجود دارد، بلافاصله با این گزاره که نقاط دیگر واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ ی سمت راست X نیز مشخص خطوط متقاطع‌اند، نقض می‌شود. در این صورت $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CE}$ اولین خطوطی که $\overleftrightarrow{AB}$ را قطع نمی‌کنند می‌باشند.

تعریف. در هندسهٔ هذلولوی، اولین خطوط در دوجهت گذرنده از نقطه‌ای که خط مفروضی را قطع نمی‌کنند، خطوط موازی[13] اند.

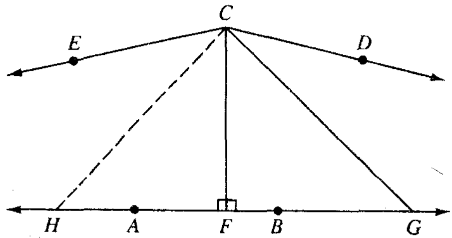
تعریف. جمیع خطوط دیگر گذرنده از یک نقطهٔ نامتقاطع با خط مفروض مورد بحث غیر از دو خط موازی فوق خطوط نامتقاطع[14] اند.

طبق تعاریف فنی فوق، دقیقاً دو خط موازی با $\overleftrightarrow{AB}$ ی گذرنده از C موجود است، $\overleftrightarrow{CD}$ موازی سمت راست[15] و $\overleftrightarrow{CE}$ موازی سمت چپ[16] نامیده می‌شود. زوایای FCD و FCE زوایای توازی[17] به ازای فاصلهٔ FC اند.

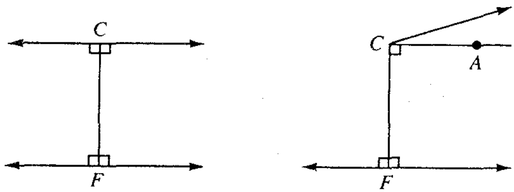
قضیهٔ ۹.۲ . دو زاویهٔ توازی به‌ازای فاصلهٔ یکسان هم‌نهشت و حاده‌اند.

اثبات: اثبات غیرمستقیم است، و شامل حذف امکانات هم‌نهشت نبودن و حاده نبودن است. فرض می‌کنیم که درشکل ۹.۵ $\angle$ FCE و $\angle$ FCD زوایای توازی CF ، اما ناهمنهشت ،باشند.بعد فرض می‌کنیم که، فی‌المثل، $\angle$ FCD بزرگتر باشد. در این صورت زاویه‌ای، $\angle$FCG ، هم‌نهشت با $\angle$FCE و چنان موجود باشد که $\overleftrightarrow{CG}$ داخل

13. Parallel Lines
14. Non inter secting
15. Right - Hand Parallel
16. Left - Hand Parallel
17. Angles of Parallelism



شکل ۹.۵



(a) (b)

شکل ۹.۶

$\angle FCD$ باشد. اگر $FH = FG$ ، دراین صورت $\Delta FCG \cong \Delta FCH$ ، و بنابراین $\angle FCE \cong \angle FCH$. و این به این علت که $\overleftrightarrow{CE}$ نقطهٔ مشترک با $\overleftrightarrow{AB}$ ندارد تناقض است. درنتیجه $\angle FCD \cong \angle FCE$.

زوایای توازی، چنان که درشکل ۹.٦a ، نمی‌توانند قائمه باشند، زیرا فرض این نکته نیز اصل موضوع ویژهٔ هندسهٔ هذلولوی به تناقض می‌انجامد. گذشته از این، زاویهٔ توازی، چنان که درشکل ۹.٦ b نموده‌شده نمی‌تواند منفرجه باشد، زیرا در این صورت دارای خط نامتقاطع $\overleftrightarrow{CA}$ ی داخل این زاویه می‌شود، و این، با این واقعیت که خط موازی به صورت اولین خط ناقاطع تعریف شده مغایرت دارد.

زوایای توازی در هندسهٔ هذلولوی نه قائمه نه منفرجه‌اند، و لاجرم باید حاده باشند. و این نتیجه‌ای از اصل موضوع ویژه را توضیح می‌دهد که اصلاً با این گزارهٔ زوایای اقلیدسی توازی که اندازه‌هاشان مجموع π را داراست متفاوت است.

تمرینات ۹.۱

۱. آکسیوم پلی فیر را، با فرض اصل موضوع پنجم اقلیدس درصورت اصلی‌اش، ثابت کنید.

۲.گزارهٔ اصلی اصل موضوع پنجم اقلیدس را، با فرض آکسیوم پلی‌فیر، ثابت کنید.

می‌توان ثابت کرد که هریک از گزاره‌های تمرینات ۳-۸ معادل اصل موضوع پنجم اقلیدس است. هریک از این جمله را چنان تغییر کلمات دهید که به‌گزاره‌ای معتبر در هندسهٔ نااقلیدسی تبدیل شود.

۳. اگر خط مستقیمی یکی از دو خط موازی را قطع کند، همواره دیگری را قطع می‌کند.
۴. خطوط مستقیم موازی بایک خط مستقیم همواره موازی یکدیگرند.
۵. مثلثی وجود دارد که مجموع اندازه‌های زوایای آن π رادیان است.
۶. یک زوج مثلث مشابه اما ناهم‌نهشت موجود است.
۷. یک زوج خط مستقیم به یک فاصله جدا در هر نقطه موجود است.
۸. گذراندن دایره‌ای از سه نقطهٔ غیرواقع بریک استقامت همواره ممکن است.
۹. اصل موضوع پنجم اقلیدس در مورد کدام یک از این هندسه‌های متناهی فصل ۱ همواره برقرار است؟

a. هندسهٔ پاپوس — b. هندسهٔ فانو

c. هندسهٔ چهار خطی — d. هندسهٔ دزارگ

۱۰. در مورد هندسهٔ متناهی سیزده نقطه‌ای این بخش، جمیع خطوط گذرنده از نقطهٔ A ای را، که نقطهٔ مشترکی باخط BDF ندارند، نام ببرید.
۱۱. بدون استفاده از آکسیوم توازی، ثابت کنید که اگر قاطع دوخط زوایای متبادل هم‌نهشت تشکیل دهد ، در این صورت دو خط مفروض مورد بحث تقاطع نمی‌کنند.
۱۲. در هندسهٔ هذلولوی، از نقطهٔ مفروض ناواقع برخط مفروضی، دقیقاً می‌توان چند خط واقع در آن صفحه که موازی آن خط مفروض باشد، رسم کرد؟

در تمرینات ۱۳ - ۱۵، ثابت کنید که هرگزاره معادل اصل موضوع پنجم اقلیدس است.

۱۳. اگر خط مستقیمی یکی از دوخط متوازی را قطع کند، همواره دیگری را قطع می‌کند.
۱۴. دو خط مستقیم موازی خط مستقیم دیگر همواره با یکدیگر موازی‌اند.
۱۵. مثلثی وجود دارد که مجموع اندازه‌های زوایای آن π رادیان است.
۱۶I. در یکی از کتابهای تاریخ ریاضی مطالبی دربارهٔ مساعی بیشتر در اثبات اصل موضوع پنجم اقلیدس بخوانید.
۱۷I. مثلث متناهی دیگری به‌وجود آورید که دارای اصل موضوع ویژهٔ هندسهٔ هذلولوی موردبحث باشد، و جدولی مشابه جدول ۹.۱ تهیه کنید.

۹.۲ نقاط انگاری و مثلثهای امگا

در هندسهٔ هذلولوی، دوخط موازی نقطهٔ مشترک معمولی ندارند، اما گفته می‌شود که در نقطه‌ای انگاری تلاقی می‌کنند.

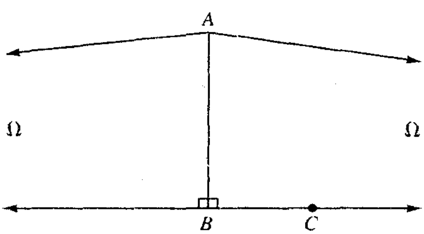
تعریف. در هندسهٔ هذلولوی می‌گوییم که دو خط موازی در یک نقطهٔ انگاری[18] تقاطع می‌کنند.

درشکل ۹.۷ موازیهای سمت راست و سمت چپ نشان داده شدهٔ از A به $\overleftrightarrow{BC}$ این خط را در نقاط انگاری Ω (امگا) و Ω' تلاقی می‌کنند. می‌توان ثابت کرد که (تمرین ۱، تمرینات ۹.۲ را ملاحظه کنید) Ω و Ω' نقاطی متمایزند. درهندسهٔ تصویری یک خط معمولی دقیقاً یک نقطهٔ انگاری دارد، اما در هندسهٔ هذلولوی یک خط دارای دو نقطهٔ انگاری متمایز است.

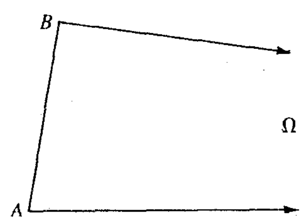
گسترش خواص خطوط موازی در هندسهٔ هذلولوی با بررسی مثلث امگا[19]، شکل سه ضلعی چون در شکل ۹.۸ ، با یک رأس انگاری، ادامه می‌یابد. مثلث امگا، گرچه مثلثی به مفهوم معمول نیست، بعضی از همان خاصیتهای مثلث با سه رأس معمولی را داراست.

قضیهٔ ۹.۳ . آکسیوم پاش در مورد مثلث امگا، چه خط مربوطه از رأس داخل مثلث شود چه از نقطهٔ نارأس برقرار است.

اثبات. در شکل ۹.۹، فرض می‌کنیم C نقطهٔ داخلی دلخواهی از مثلث امگای AB Ω



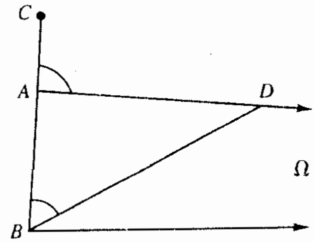
شکل ۹.۷



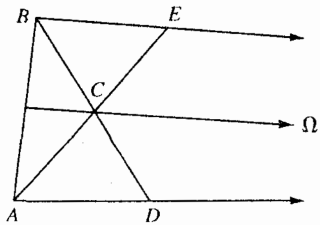
شکل ۹.۸

18. Ideal Point

19. Omega Triangle



شکل ۹.۱۰



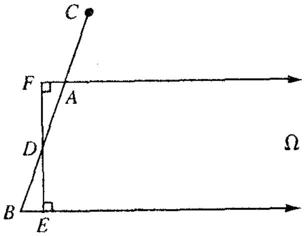
شکل ۹.۹

باشد. در این صورت $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ ضلع مقابل‌شان را به این علت قطع می‌کنند که $\overleftrightarrow{B\Omega}$ اولین خط ناقاطع گذرنده از B ی $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ اولین خط ناقاطع گذرنده از A ی $\overleftrightarrow{BE}$ است. (تمرین ۱۴ I را ملاحظه کنید.) اگر خط $\overleftrightarrow{C\Omega}$ از رأس انگاری داخل مثلث امگا شود، $\overleftrightarrow{AB}$ را به این علت قطع می‌کند که آکسیوم پاش در مورد Δ ABD به کار می‌رود. قسمت دوم اثبات را به عنوان تمرین ۶ تمرینات ۹.۲ واگذاشته‌ایم.

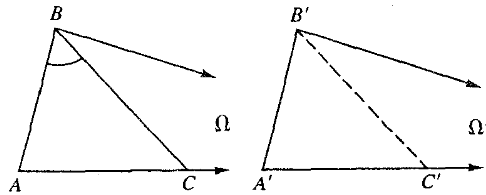
اقلیدس، بدون استفاده از اصل موضوع پنجم خود، اثبات کرد که زاویهٔ خارجی مثلث اندازه‌ای بزرگتر از هریک از دوزاویهٔ داخلی مقابل دارد، و این گزاره در مورد هندسهٔ هذلولوی نیز برقرار است. رابطهٔ آشنای اندازه‌های زوایای خارجی و مقابل در مورد مثلث‌های امگا تنها به مقدار کمی تعدیل شده است.

قضیهٔ ۹.۴ . در مورد هر مثلث امگای AB Ω، اندازه‌های زوایای خارجی حاصل از ادامه دادن $\overline{AB}$ بزرگتر از اندازه‌های زوایای داخلی مقابل‌شان است.

اثبات: این قضیه را می‌توان به طور غیرمستقیم با حذف دو امکان دیگر اثبات کرد. درشکل ۹.۱۰، فرض می‌کنیم که $m(\angle CA\Omega) < m(\angle AB\Omega)$ باشد. در این صورت نقطهٔ Dای واقع بر $\overleftrightarrow{A\Omega}$ چنان می‌توان یافت که $\angle CAD \cong \angle ABD$. اما این ناممکن است، زیرا Δ ABD مثلثی معمولی است و زاویهٔ خارجی آن نمی‌تواند بازاویهٔ داخلی مقابلی هم‌نهشت باشد. بعد، چون در شکل ۹.۱۱، فرض می‌کنیم که $\angle CA\Omega \cong \angle AB\Omega$. فرض می‌کنیم D وسط $\overline{AB}$، $\overline{DE}$ عمود بر $\overleftrightarrow{B\Omega}$، و FA = BE باشد. در این صورت $\Delta FAD \cong \Delta EBD$، FDE خطی مستقیم، و $\angle$DFA زاویه‌ای قائم است. اما زاویهٔ توازی فاصلهٔ EF به‌علت قضیهٔ ۹.۲ نمی‌تواند



شکل ۹.۱۱



شکل ۹.۱۲

قائم باشد، که بدان معنی است که تناقضی درکار است و فرض همنهشتی زوایا باید مردود شود.

هم‌نهشتی مثلثهای امگا اندکی ساده‌تر از آن مثلثهای معمولی است، زیرا به اطلاعات کمتر نیاز دارد. یک مجموعهٔ شرایط همنهشتی را در قضیهٔ زیر به دست داده‌ایم.

قضیهٔ ۹.۵ . مثلثهای امگای $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$ هم‌نهشت‌اند اگر اضلاع به طول متناهی آن هم‌نهشت باشند و اگر زوج زوایای متناظر در A و A' یا B و B' هم‌نهشت باشند.

اثبات: قضیه را در این جا با این فرض که زوج زوایای در رأس معمولی باقی مانده هم‌نهشت نیستند و بعد ـ برمبنای این فرض ـ با رسیدن به تناقض اثبات می‌کنیم. درشکل ۹.۱۲، فرض می‌کنیم که $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ و $\angle BA\Omega \cong \angle B'A'\Omega'$. فرض می‌کنیم که یکی از زوایای مورد بحث مثلا $\angle AB\Omega$، بزرگتر از $\angle A'B'\Omega'$ باشد. نقطهٔ C ای را می‌توان بر $\overleftrightarrow{A\Omega}$ چنان که $\angle ABC \cong \angle A'B'\Omega'$ قراردهیم. اگر C' بر $\overleftrightarrow{A'\Omega'}$ چنان که $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$ واقع شود، در این صورت $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ می‌شود. اما این بدان معنی است که $\angle A'B'C' \cong \angle A'B'\Omega'$، که تناقض است.

مجموعهٔ دوم شرایط همنهشتی مثلثهای امگا را در این جا بیان کرده‌ایم، اما اثبات آن را به‌عنوان تمرین ۸ تمرینات ۹.۲ واگذاشته‌ایم.

قضیهٔ ۹.۶ . مثلثهای امگای $AB\Omega$ و $A'B'\Omega'$ همنهشت‌اند اگر زوج زاویهٔ A و A' همنهشت باشند و اگر زوج زاویهٔ B و B' همنهشت باشند.

تمرینات ۹.۲

۱. توضیح دهید که چرا خط در هندسهٔ هذلولوی باید شامل دو نقطهٔ انگاری باشد.
۲. سه مثلث امگا، جمیعاً با رأس انگاری یکسان نیز هر دو از آنها دارای یک رأس معمولی مشترک، رسم کنید.
۳. شکلی سه ضلعی با دو رأس انگاری رسم کنید.
۴. شکلی سه ضلعی با سه رأس انگاری رسم کنید.
۵. جمیع مثلثهای امگای نشان داده‌شده در شکل ۹.۹ را نام ببرید.
۶. ثابت کنید که خط متقاطع با یک ضلع یک مثلث امگا در نقطه‌ای غیراز رأس ضلع دومی از آن را قطع می‌کند.
۷. ثابت کنید که مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ رئوس معمولی یک مثلث امگا کمتر از π است. (راهنمایی: از قضیهٔ ۹.۴ استفاده کنید.)
۸. قضیهٔ ۹.۶ را اثبات کنید. (راهنمایی: قضیهٔ ۹.۵ را به کار برید.)
۹. ثابت کنید که زاویهٔ توازی به ازای فاصلهٔ مفروض ثابت است.
۱۰. زاویهٔ توازی، وقتی فاصله افزایش می یابد، اضافه می‌شود یا کم می‌شود؟ ثابت کنید که پاسخ تان صحیح است.
۱۱. ثابت کنید اگر دو زاویهٔ رئوس معمولی مثلث امگایی همنهشت باشند، در این صورت خط از رأس انگاری به وسط ضلع مقابل آن به آن ضلع عمود است.
۱۲. عکس گزارهٔ تمرین ۱۱ را ثابت کنید.
۱۳I. جمیع موارد ممکنهٔ (a) شباهات مثلث امگا و مثلث معمولی، و (b) عدم شباهات مثلث امگا و مثلث معمولی را فهرست کنید.
۱۴I. خاصیت متقارنی[20] توازی (در هندسهٔ اقلیدسی) بر آن است که هرگاه خط اولی موازی خط دوم باشد، خط دوم موازی اول است. این خاصیت را اثبات کنید، یا، درصورت لزوم اثبات آن را در مرجعی یافته مطالعه کنید.
۱۵I. خاصیت تسری‌پذیری[21] توازی (درهندسهٔ اقلیدسی) بر آن است که هرگاه دو خط موازی خط سومی باشند، با یکدیگر موازی‌اند. این خاصیت را اثبات کنید. یا، درصورت لزوم اثبات آن را در مرجعی یافته مطالعه کنید.
۱۶I. بااستفاده از اصول، توضیح دهید که چگونه اقلیدس، بدون استفاده از اصل موضوع پنجم

---

20. Symmetric Property
21. Transitive Property

ثابت کرد که زاویهٔ خارجی مثلث اندازه‌ای بزرگتر از هر یک از دوزاویهٔ داخلی مقابلش دارد.

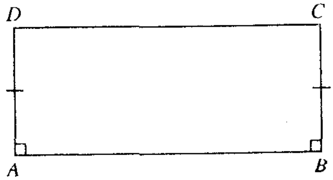
۹.۳ چهارضلعیها و مثلثها

مفهوم مثلثهای امگا، مطرح شده در بخش ۹.۲، به طرز بسیار منطقی‌ای به تشکیل قضایای به ظاهر غریب مثلثها و چهار ضلعیهای معمولی در هندسهٔ هذلولوی می‌انجامد.

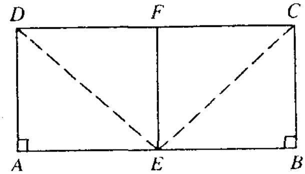
در میان مساعی مربوط به اثبات اصل پنجم اقلیدس بارورترین شان به‌کار برندگان روش غیرمستقیم بوده‌اند. ریاضیدانها باپذیرفتن اصل موضوعی متناقض و رسیدن به نتایج معتبر برمبنای آن، عملاً به گسترش هندسهٔ نااقلیدسی پرداخته بودند، هرچند از اهمیت کارشان غافل ماندند.

جیرولاموساکری[22] (۱۷۳۳ - ۱۶٦۷)، کشیش ژزوئیت ایتالیایی، «اقلیدس عاری از هر نقص»[23] را درسال ۱۷۳۳ به نشر رساند. ساکری در مجاهده‌اش در اثبات اصل پنجم از مجموعهٔ نقاطی استفاده کرد که امروزه به چهارضلعی ساکری[24] موسوم است. چهارضلعی ساکری، که چنان در شکل ۹.۱۳ نموده شده، دارای دو زاویهٔ قائم و دوضلع همنهشت است. $\overline{AB}$ قاعده و $\overline{CD}$ رأس[25] چهار ضلعی مزبور نامیده می‌شود. دوقطعه خط همنهشت آن اضلاع آن اند. قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که بعضی از خواص اشکال متناظر در هندسهٔ اقلیدسی به برقراربودن در هندسهٔ هذلولوی ادامه می‌دهند.

قضیهٔ ۹.۷ . قطعه خط واصل اوساط قاعده و رأس چهار ضلعی ساکری به هر دو عمود است.



شکل ۹.۱۳



شکل ۹.۱۴

---

22. Girolamo Saccheri
23. Euclid Freed of Every Flaw
24. Saccheri Quadrilateral
25. Summit

اثبات: درشکل ۹.۱۴، $\Delta DAE \cong \Delta CBE$، بنابراین $\Delta DFE \cong \Delta CFE$، و اثبات نتیجه می‌شود.

آثار مربوط به همنهشتی مثلثهای اقلیدس، که به اصل پنجم وابسته نیستند، به برقراربودن در هندسهٔ نااقلیدسی ادامه می‌دهند.

بعضی از خواص چهار ضلعی ساکری نامشابه با هر خاصیت مجموعه‌های نقاط در هندسهٔ اقلیدسی‌اند.

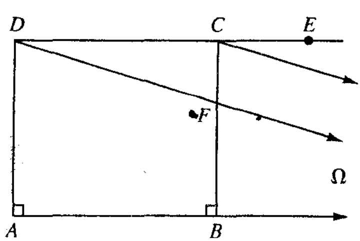
قضیهٔ ۹.۸ . زوایای رأس چهار ضلعی ساکری همنهشت و حاده‌اند.

اثبات: همنهشتی زوایای رأس مورد بحث نتیجهٔ همنهشتی ازواج مثلثها درشکل ۹.۱۴ است، و این واقعیت بااهمیت که زوایای رأس حاده‌اند نتیجهٔ خواص ثابت شدهٔ مثلث امگا است. درشکل ۹.۱۵، از آنجا که $\angle EC\,\Omega$ زاویهٔ خارجی مثلث امگای $CD\,\Omega$ است، $m(\angle EC\Omega) > m(\angle CD\Omega)$ است. از آنجا که $\angle AD\Omega \cong \angle BC\Omega$، $m(\angle BCE) > m(\angle ADC)$. اما $\angle ADC \cong \angle BCD$، و درنتیجه $m(\angle BCE) > m(\angle BCD)$، بنابراین $\angle BCD$ حاده است.

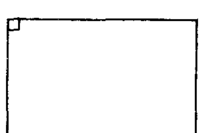
جی. اچ. لامبرت (۱۷۷۷ - ۱۷۲۸)، نیز مانند ساکری، سعی دراثبات اصل پنجم بااستفاده از استدلالی غیرمستقیم کرد، وکارش را باچهار ضلعی‌ای با سه‌زاویهٔ قائمه، اکنون به چهارضلعی لامبرت موسوم، نشان داده شده در شکل ۹.۱۶، آغازید.

قضیهٔ ۹.۹ . چهارمین زاویهٔ چهارضلعی لامبرت حاده است.

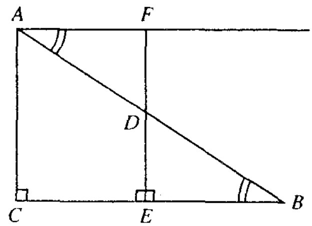
اثبات: اثبات قضیهٔ ۹.۹ از ملاحظهٔ این مطلب نتیجه می‌شود که، درشکل ۹.۱۴، EFCB و EFDA چهارضلعی‌های لامبرت اند.



۹.۱۵



شکل ۹.۱۶



شکل ۹.۱۷

لامبرت راجع به نظریهٔ تصاویر درنقشه‌برداری نیز مطالبی نوشت، و یکی از انواع متداول تصویر به نام او نامگذاری شده‌است.

قضیهٔ ۹.۹ در اثبات قضیهٔ حتی مهمتر زیر لازم است، قضیه‌ای که در تمیز واضح بین هندسهٔ هذلولوی و اقلیدسی به‌کار می‌رود.

قضیهٔ ۹.۱۰ . مجموع اندازه‌های زوایای یک مثلث قائم الزاویه کمتر از π است.

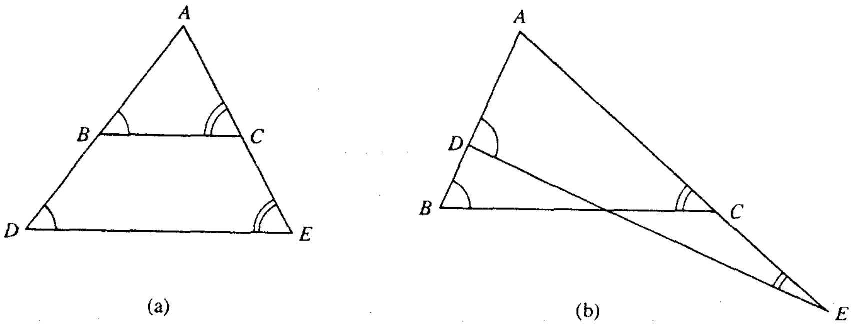
اثبات: درشکل ۹.۱۷ ، فرض می‌کنیم ΔABC مثلث قائم دلخواهی، با نقطهٔ وسط وتری به نام D باشد، $\overline{DE}$ عمود بر $\overline{BC}$ است. خط $\overleftrightarrow{AF}$ طوری رسم شده که $\angle FAD \cong \angle EBD$ و $\overline{AF} \cong \overline{BE}$ باشد. دراین‌صورت $\Delta AFD \cong \Delta BED$. این بدین معنی است که $\angle AFE$ زاویه‌ای قائم است و $\angle ADF \cong \angle EDB$ ، و بنابراین E و D و F خطی مستقیم است. نتیجه این می‌شود که ACEF چهارضلعی لامبرتی بازاویهٔ حادهٔ A است. دوزاویهٔ در A ی $\angle CAB$ و $\angle BAF$ ، اندازه‌هایی به مجموع مساوی مجموع اندازه‌های $\angle CAB$ و $\angle CBA$ دارند، بنابراین مجموع اندازه‌های سه زاویهٔ ΔABC کمتر از π است.

دو قضیهٔ زیر نتایج قضیهٔ ۹.۱۰ اند، که اثبات‌شان به عنوان تمرینهای ۱۳ و ۱۴ تمرینات ۹.۳ واگذار شده‌است.

قضیهٔ ۹.۱۱ . مجموع اندازه‌های زوایای هرمثلث کمتر از π است.

تعریف. تفاوت بین π و مجموع زاویه‌ای یک مثلث به مقدار نقص[۲۶] موسوم است.

26. Defect



شکل ۹.۱۸

به عنوان مثال، درصورتی که مجموع زاویه‌ای مثلث $۱۹\pi/۲۰$ باشد، مقدار نقص $\pi/۲۰$ است.

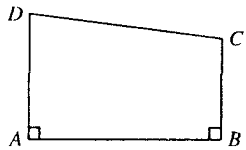
قضیهٔ ۹.۱۲. مجموع اندازه‌های زوایای هر چهارضلعی محدب کمتراز ۲π است.

درحالت کلی دریافتیم که نظریهٔ همنهشتی مثلثها در هندسهٔ هذلولوی بسیار شبیه نظریهٔ همنهشتی درهندسهٔ اقلیدسی است. یک تفاوت مهم این مورد از کاربرد قضیهٔ ۹.۱۲ حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۹.۱۳. دو مثلث همنهشت اند اگر سه زوج زاویه‌های متناظرش همنهشت باشند.

اثبات: اثبات باتناقض است. فرض می‌کنیم، چون درشکل ۹.۱۸a ، ΔABC و ΔADE سه زوج زاویه‌های متناظر همنهشت داشته‌باشد. درنتیجه، مجموع اندازه‌های زوایای چهارضلعی BCED مساوی ۲π می‌شود، که تناقض قضیهٔ ۹.۱۲ است. به این ترتیب، باید فرض وجود مثلثهای مشابه اما ناهمنهشت را در هندسهٔ هذلولوی کناربگذاریم. اگر $\overline{BC}$ و $\overline{DE}$، چون درشکل ۹.۱۸b ، تقاطع کنند باز هم به تناقض می‌رسیم، زیرا در این صورت زاویهٔ خارجی مثلثی بایکی از زاویه‌های داخلی مقابلش همنهشت می‌شود.

یکی از نتایج قضیهٔ ۹.۱۳ این است که، در هندسهٔ هذلولوی، شکل و اندازهٔ زوایا مستقل نیست. جمیع مثلثهای از یک شکل لزوماً به یک اندازه‌اند. اشکال مشابه اما



شکل ۹.۱۹

ناهمنهشت در هندسهٔ هذلولوی وجود ندارد. وجود یک زوج از چنین مثلثهایی معادل اصل موضوع پنجم اقلیدس است.

تمرینات ۹.۳

۱. بیشترین تعداد زوایای چهار ضلعی ساکری‌ای که می‌توانند بایکدیگر همنهشت باشند چیست؟

۲. چرا در هندسهٔ هذلولوی نمی‌تواند مربع یا مستطیل موجود باشد؟

۳. در مورد شکلی چون شکل ۹.۱۹، ثابت کنید که اگر $AD > BC$ باشد، دراین صورت $m(\angle BCD) > m(\angle ADC)$ است.

۴. درچهار ضلعی لامبرت کدام بلندتر است: ضلع مجاور زاویهٔ حاده یا ضلع مقابل آن؟ ثابت کنید که پاسخ‌تان صحیح است.

۵. پاسخ تمرین ۴ در مورد فاصلهٔ بین خطوط نامتقاطع چه می‌گوید؟

۶. کدام بلندتر است: قاعده یا رأس چهارضلعی ساکری؟

۷. ثابت کنید که پاسخ به تمرین ۶ تان صحیح است.

۸. آیا قطعه خط واصل اوساط اضلاع یک چهار ضلعی ساکری به این اضلاع عمود است؟ ثابت کنید که پاسخ‌تان صحیح است.

۹. فرض می‌کنیم مثلثی دارای مقدار نقص $0/426^\circ$ باشد. اگر دوزاویه به اندازه‌های $37/514^\circ$ و $71/689^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ سوم را بیابید.

۱۰. فرض می‌کنیم ناحیهٔ مثلث شکلی باقطعه خط گذرنده از رأسی به دو ناحیهٔ مثلث شکل تقسیم شده‌باشد. مقدار نقص مثلث اصلی را با مقدار نقص دو مثلث کوچکتر ساخته شده مقایسه کنید.

۱۱. فرض می‌کنیم ناحیهٔ مثلث شکلی با قطعه خطهای گذرنده از یک رأس به تعداد دلخواهی ناحیهٔ مثلثی افراز شده باشد. قضیه‌ای در مورد مقادیر نقص مثلث اصلی و مثلثهای فرعی

حاصل بیان و اثبات کنید.

۱۲. در اثبات قضیهٔ ۹.۱۰ مشخص کنید که دقیقاً در کدام مرحله گزاره‌های موجود باگزاره‌های صحیح هندسهٔ اقلیدسی تفاوت دارد.

۱۳. قضیهٔ ۹.۱۱ را ثابت کنید.

۱۴. قضیهٔ ۹.۱۲ را ثابت کنید.

۱۵. قضیه‌ای را که کمترین شرایطی را که برای همنهشت بودن دوچهار ضلعی ساکری باید دانسته شود به دست می‌دهد؛ بیان و ثابت کنید.

۱۶. قضیه‌ای را که مجموعهٔ کمترین شرایطی متفاوت از پاسخ تمرین ۱۵ تان به دست می‌دهد بیان و اثبات کنید.

۱۷I. طرقی را که در آنها چهار ضلعی لامبرت مشابه یک مستطیل معمولی است و طرقی را که در آنها بایک مستطیل معمولی تفاوت دارد خلاصه کنید.

۱۸I. ثابت کنید، یا اثباتی را مطالعه کنید، که هرگاه خطی، خط نامتقاطع گذرنده از نقطهٔ مفروضی نسبت به خط‌مفروضی‌باشد، درهریک از نقاطش، خطی نامتقاطع نسبت به خط مفروض مذکور است.

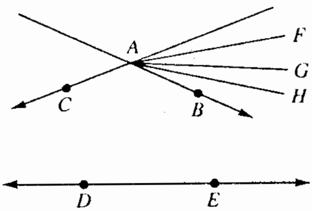
۱۹I. ثابت کنید، یا اثباتی را مطالعه کنید، که هرگاه خطی،خط موازی گذرنده از نقطهٔ مفروضی نسبت به خط مفروضی باشد، در هریک از نقاطش، خطی موازی خط مفروض است.

۹.۴ ازواج خطوط و سطح نواحی مثلث شکل

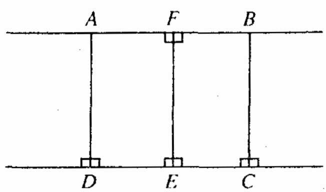
در بحث کامل مجموعهٔ نقاط در هندسهٔ هذلولوی باید علاوه برنقاط معمولی و انگاری نقطه‌ای از نوع دیگر به‌وجود آوریم. در این صورت می‌گوییم که دوخط نامتقاطع در نقطهٔ گاما[27] (Γ) تلاقی می‌کنند. نام دیگر این نقطه، نقطهٔ اَبَر ـ انگاری[28] است. به‌خاطر بیاورید که خطوط نامتقاطع شامل خطوط موازی گذرنده از یک نقطهٔ نسبت به یک خط نیستند. فی‌المثل، اگر $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ موازیهای از A به $\overleftrightarrow{DE}$ باشند، در این صورت $\overleftrightarrow{AF}$، $\overleftrightarrow{AG}$، و $\overleftrightarrow{AH}$ سه خط از بی‌نهایت خط نامتقاطع نسبت به $\overleftrightarrow{DE}$ ی گذرنده از A اند. هریک از این خطوط نقطهٔ گامای مشترکی با $\overleftrightarrow{DE}$ دارد (شکل ۹.۲۰).

شاید تعجب آور باشد که خطوط نامتقاطع، علاوه بر مشترک داشتن نقطهٔ گاما، یکی

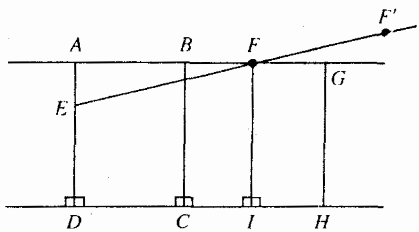
27. Gamma Point 28. Ultra – Ideal Point



شکل ۹.۲۰



شکل ۹.۲۱



شکل ۹.۲۲

از خواص خطوط موازی هندسهٔ اقلیدسی، یعنی، عمود مشترک داشتن، را نیز دارند.

قضیهٔ ۹.۱۴. دو خط نامتقاطع یک عمود مشترک دارند.

در تحلیل شکل نشان داده‌شده در شکل ۹.۲۱ ، می‌توان ملاحظه کرد که می‌شود راجع به $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ، واقع بر دوخط نامتقاطع، به عنوان قاعده و رأس چهارضلعی ساکری ABCD اندیشید؛ در نتیجه $\overline{EF}$ ، رابط اوساط قاعده و رأس، عمود مشترک مذکور است، و مسأله به یافتن دوقطعه خط همنهشت، چون $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$، هر دو عمود بر یکی از خطوط نامتقاطع مفروض مذکور، تحویل می‌شود، چه در این صورت می‌توان عمود مشترک مطلوب را یافت؛ طرحی از اثبات را در زیر می‌آوریم.

چون در شکل ۹.۲۲ ، فرض می‌کنیم که $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ عمود بر یک خط، اما ناهمنهشت، باشند. فرض می‌کنیم $\overline{ED} \cong \overline{BC}$، و $\angle F'ED \cong \angle GBC$ ، و F نقطهٔ تقاطع $\overleftrightarrow{EF'}$ و $\overleftrightarrow{AG}$ باشد. اگر $\overline{BG} \cong \overline{EF}$ و $\overline{CH} \cong \overline{DI}$ باشد، در این صورت می‌توان ثابت کرد که چهارضلعی BGHC هم با EFID همنهشت است، و $\overline{GH}$ عمود در H است؛ به‌این ترتیب، $\overline{FI}$ و $\overline{GH}$ اضلاع مطلوب چهارضلعی ساکری‌اند. توجه داشته باشید که اثبات وجود نقطهٔ F واقع بر خط AB را در این‌جا نیاورده‌ایم.

جدول ۹.۲

نوع نقطهٔ مشترک دوخط	اختلاف در فاصله
نقطهٔ معمولی	خطوط از نقطهٔ تقاطع شان تباعد می‌کنند
نقطهٔ انگاری	خطوط درجهت توازی تقارب می‌کنند ودرجهت مقابل تباعد
نقطهٔ اَبر انگاری	خطوط از عمود مشترک‌شان تباعد می‌کنند

می‌توان، به علت قضیهٔ ۹.۱۴، چنین گفت که جمیع خطوط عمود بریک خط مفروض یک نقطهٔ ابر انگاری مشترک دارند. و اثبات این که در هندسهٔ هذلولوی دوخط نمی‌توانند دو عمود مشترک متمایز داشته باشند را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم.

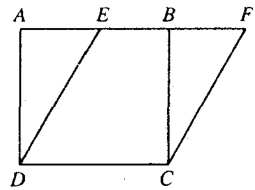
می‌توان با درج اطلاعات پیشین در مورد نقطهٔ گاما و عمود مشترک خطوط نامتقاطع، جدول جمع‌بندی رابطهٔ بین ازواج خطوط متقاطع در هر نوع نقطه در هندسهٔ هذلولوی ۹.۲ را به دست داد.

ممکن است ملاحظهٔ این مطلب که درهیچ یک از حالات مذکور دو خط مورد بحث همواره متساوی‌الفاصله نیستند را جالب بیابید. اما می‌توانید در مورد طبیعت مجموعهٔ نقاط با هر عضو به فاصلهٔ یکسان از خطی مفروض بیندیشید (بخش ۹.۵ را ملاحظه کنید). نیز در این رابطه توجه داشته‌باشید که تعریف خطوط موازی به عنوان دوخط در هر جا متساوی‌الفاصله معادل فرض اصل پنجم اقلیدس است.

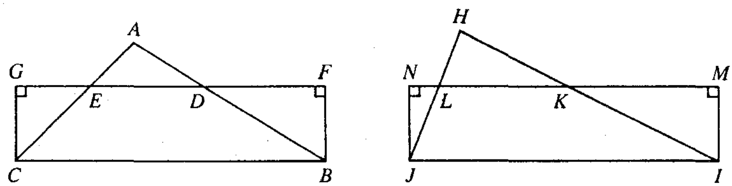
این واقعیت که در هندسهٔ هذلولوی مربعی وجود ندارد بدین معنی است که باید روشی برای اندازه گیری سطح یک ناحیهٔ مسطح که به واحدهای مربعی وابسته نباشد درنظر گرفته‌شود. در هندسهٔ هذلولوی مثلثهای همنهشت موجودند، و نظریهٔ سطح مورد بحث می‌تواند براین مفهوم به طریقی بسیار مشابه با نظریهٔ جدید سطح در هندسهٔ اقلیدسی بناشود.

تعریف. دو چند ضلعی معادل[۲۹] اند اگر بتوانند به یک تعداد متناهی از ازواج مثلثهای همنهشت افراز شوند.

29. Equivalent



شکل ۹.۲۳



شکل ۹.۲۴

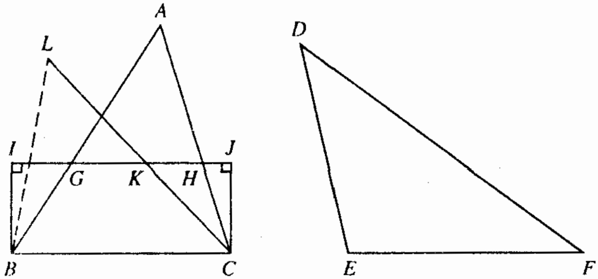
به عنوان مثال، چندضلعیهای ABCD و CDEF درشکل ۹.۲۳ معادل اما ناهمنهشت‌اند. دو چند ضلعی هر دو معادل با چند ضلعی دیگر نیز با یک دیگر معادل‌اند. به خاطر بیاورید که در هندسهٔ هذلولوی، تفاوت بین π و مجموع اندازه‌های زوایای یک مثلث به عنوان مقدار نقص آن مثلث تعریف شد. ارتباط بین مقدار نقص و تعادل مثلثها در قضیهٔ زیر واضح شده‌است.

قضیهٔ ۹.۱۵ . دومثلث معادل‌اند اگر و تنها اگر مقدار نقص یکسان داشته‌باشند.

اثبات: اگر دومثلث هم ارز باشند، می‌توانند به تعداد متناهی‌ای از زواج مثلثهای همنهشت افراز شوند. مقدار نقص هریک از مثلثهای اصلی مساوی مجموع مقدار نقصهای مثلثهای در افراز است؛ در نتیجهٔ مقدار نقصهای اصلی مساوی‌اند. تمرین ۱۱، تمرینات ۹.۳ را ملاحظه کنید.

اکنون فرض می‌کنیم که دو مثلث مزبور یک مقدار نقص دارند. اگر آنها یک زوج ضلع متناظر همنهشت نیز داشته‌باشند، می‌توان نشان داد که باچهار ضلعیهای ساکری همنهشت‌اند و درنتیجه همنهشت با یک‌دیگرند.

درشکل ۹.۲۴ فرض می‌کنیم مثلثهای ABC و JHI دارای یک مقدار نقص و اضلاع همنهشت $\overline{BC}$ و $\overline{IJ}$ اند. مثلث ABC معادل چهار ضلعی ساکری BCGF، که



شکل ۹.۲۵

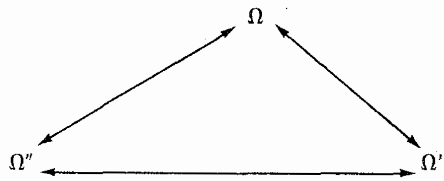
در آن D و E اوساط $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ اند است (تمرین ۱۰، تمرینات ۹.۴ را ملاحظه کنید). مثلث HIJ معادل چهارضلعی ساکری IJNM، که در آن K و L اوساط $\overline{HJ}$ و $\overline{HI}$ اند می‌باشد. اما دو چهارضلعی ساکری موردبحث از آنجاکه رئوس همنهشت و زوایای رأسی همنهشت دارند، همنهشت‌اند.

سرانجام، فرض می‌کنیم که دو مثلث مقدار نقص یکسان دارند اما دارای زوج اضلاع همنهشت نیستند. فرض می‌کنیم مثلث‌های ABC و DEF ، چون درشکل ۹.۲۵ دو چنین مثلث‌هایی ، با DF>AC، باشند.

اگر G و H اوساط $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ باشند، در این صورت ΔABC معادل چهار ضلعی ساکری BIJC است. نقطهٔ K واقع بر $\overline{IJ}$ نقطه‌ای است که چنان واقع شده که $KC = \frac{1}{2}DF$، و $\overline{LC} \cong \overline{DF}$. می توان نشان داد که مثلثهای ABC و LBC دارای یک مقدار نقص و معادل‌اند. مثلثهای LBC و DEF نیز دارای یک مقدار نقص و یک زوج ضلع همنهشت اند؛ و درنتیجه معادل‌اند. از آنجاکه ΔDEF و ΔABC هر دو معادل یک مثلث‌اند، بایکدیگر معادل‌اند.

در اثبات قضیهٔ ۹.۱۵، مفهوم مقدار نقص یک مثلث بود که تعادل مثلثها با چهارضلعیهای ساکری ای راکه همنهشت اثبات شدند، ممکن ساخت. از آنجاکه تعادل مثلثها بسته به مقدار نقص است، تعریف اندازهٔ سطح یک مثلث درهندسهٔ هذلولوی به عنوان تابعی از این مقدار نقص ممکن است.

تعریف. $A = Kd$، به ازای مقدار نقص d و مقدار k ی ثابت و مثبت یکسان در مورد تمام مثلثهای در هندسهٔ هذلولوی، به این ترتیب، چند ضلعیهای معادل نیز سطح یکسان دارند.



شکل ۹.۲۶

مقدار k به مثلث خاصی که برای سطح واحد داشتن انتخاب شده وابسته است. باید آشکار باشد که چون مقدار نقص اضافه شود اندازهٔ سطح افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، هرچه مثلث بزرگتر باشد، مجموع اندازه‌های زوایای آن کوچکتر می‌شود.

غریب است که، درهندسهٔ هذلولوی، مثلثها بدون حد بزرگتر و بزرگتر نمی‌شوند. مثلث با سه رأس انگاری، نشان داده شده در شکل ۹.۲۶ ، مثلث بیشترین سطح[30] است و می‌تواند مجموع زاویه‌ای‌اش صفر درنظر گرفته شود.

تمرینات ۹.۴

۱. توضیح دهید که چرا دوخط متمایز نمی‌تواند بیش از یک عمود مشترک داشته باشد.

۲. درکجا دوخط نامتقاطع بیشتر از همه به هم نزدیک‌اند؟

۳. در هندسهٔ هذلولوی برهر خط چند نقطهٔ گاما هست؟

۴. آیا در هندسهٔ هذلولوی دو خط همواره از نقطهٔ تقاطع شان تباعد می‌کنند؟

۵. ثابت کنید که دو خط موازی به طور پیوسته درجهت توازی تقارب می‌کنند.

۶. ثابت کنید که دوناحیهٔ چند ضلعی شکل معادل با یک ناحیهٔ چند ضلعی شکل با یکدیگر معادل اند.

۷. ثابت کنید که چهارضلعی‌ای با چهار زاویهٔ همنهشت موجوداست.

۸. درمورد چهار ضلعی تمرین ۷، آیا چهار ضلع همنهشت‌اند؟ ثابت کنید که پاسخ‌تان صحیح است.

۹. ثابت کنید که پاره‌خط واصل اوساط دوضلع یک مثلث طولی کمتر از نصف طول ضلع سوم دارد.

۱۰. ثابت کنید که ΔABC ، شکل ۹.۲۴، معادل چهار ضلعی ساکری BCGF است.

30. Triangle of Maximum Area

۱۱. چرا در شکل ۹.۲۴، دو چهار ضلعی ساکری زوایای رأس همنهشت دارند؟

۱۲. طرحی برای نشان دادن این که چگونه یک شش ضلعی و یک مثلث می‌توانند معادل باشند بکشید.

۱۳. باداشتن هر مثلث، نشان دهید که چگونه یک مثلث بیشترین سطح می‌تواند متضمن مثلث مفروض در داخلش رسم شود.

۱۴I. در شکل ۹.۲۲، نشان دهید که نقطهٔ F باید موجود باشد (یعنی، 'EF و AG باید تقاطع کنند).

۱۵I. اثبات تمرین ۸ وابسته براین واقعیت است که عمود از A به BC داخل مثلث ABC واقع می‌شود. چگونه می‌دانید که این مطلب راست است؟

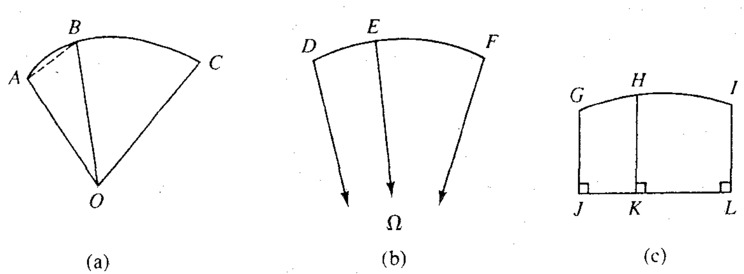
۱۶I. بااستفاده از این بخش، بعلاوهٔ مراجع دیگری دربارهٔ هندسهٔ نااقلیدسی، توضیح دهید که چگونه، از آنجا که واحدهای مربعی موجود نیستند، شخص عملاً می‌تواند سطح یک ناحیهٔ مسطح را در هندسهٔ هذلولوی بیابد.

۹.۵ منحنیها

در هندسهٔ هذلولوی، دایره را می‌توان به طریق معمول، یعنی، یک مجموعهٔ نقاط متساوی‌الفاصله از نقطه‌ای مفروض، تعریف کرد. تعریف دایرهٔ مذکور و خواصی، چون خواص در ارتباط باتعامد، مربوط به دایره که به اصل پنجم وابسته نیستند، قسمتهایی از هندسهٔ هذلولی‌اند. در هندسهٔ هذلولوی، اندازهٔ زاویهٔ محاطی دیگر مساوی یک دوم اندازهٔ کمان روبروی آن نیست، زیرا این نتیجه وابسته به اصل پنجم است.

تعریف نقاط انگاری و ابرانگاری چنان که هر دوخط هندسهٔ هذلولوی نقطهٔ مشترکی داشته باشند به کاربردهایی که تعمیمات شامل دوایرند می‌انجامد.

به‌ازای هر دونقطهٔ A و B ی واقع بر دایره‌ای معمولی، چنان که درشکل ۹.۲۷a،



شکل ۹.۲۷

رابطهٔ $\angle OBA \cong \angle OAB$، که در آن O مرکز دایره است، به‌علت آن که ΔABO متساوی‌الساقین است، برقرار می‌باشد، و این به‌تعریف تعمیم یافتهٔ نقاط متناظر[31] منجر می‌شود.

تعریف: دونقطه، هریک بریکی از دوخط، نقاط متناظر نامیده می‌شوند اگر دوخط مزبور با قطعه خطی که نقاط انتهایی‌اش دو نقطهٔ مفروض‌اند، دریک طرف آن زوایای همنهشت تشکیل دهند.

به این ترتیب، A و B درشکل ۹.۲۷a به‌علت همنهشتی زوایای OAB و OBA نقاط متناظرند. و به همین ترتیب می‌توان نشان داد که نقاط C و B، یا C و A نقاط متناظر می‌باشند. در واقع، هر دو نقطهٔ واقع بریک دایره نقاط متناظرند. ویک دایرهٔ معمولی را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ جمیع نقاط متناظر نسبت به یک نقطهٔ مفروض (نه مرکز) واقع بردسته شعاع‌هایی با نقطه‌ای معمولی به عنوان مرکز تعریف کرد. یک دسته‌اشعه جمیع شعاعهای واقع در صفحهٔ با نقطهٔ انتهایی مشترک‌اند. دایره را می‌توان، به علت این واقعیت که مماس بریک دایره در نقطهٔ تماس برشعاع آن عمود است، مسیر متعامد[32] دسته شعاعهایی با رأسی معمولی درنظر گرفت.

اکنون می‌توان دومنحنی جدید را، که در هندسهٔ هذلولوی دوایر تعمیم یافته درنظر گرفته می‌شوند، تعریف کرد.

تعریف. منحنی حدی [33] (شکل ۹.۲۷b را ملاحظه کنید) مجموعهٔ جمیع نقاط متناظر نسبت به نقطه‌ای مفروض واقع بردسته اشعه‌ای با نقطهٔ انگاری‌ای به عنوان رأس است.

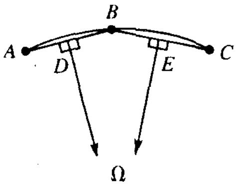
منحنی حدی را می‌توان مسیر متعامد دسته اشعه‌ای با رأسی انگاری درنظر گرفت.

تعریف. منحنی متساوی الفاصله[34] (شکل ۹.۲۷c را ملاحظه کنید) مجموعهٔ جمیع نقاط متناظر بانقطه‌ای مفروض واقع بر دسته اشعه‌ای باعمودی مشترک است.

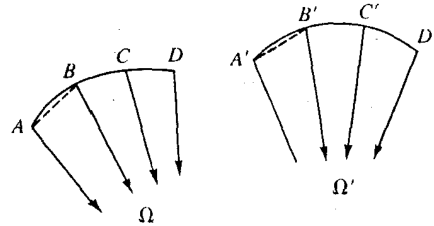
منحنی متساوی الفاصله را می‌توان مسیر متعامد دسته اشعه‌ای با عمودی مشترک درنظرگرفت. منحنی حدی در هندسهٔ هذلولوی دارای بسیاری از خواص دایرهٔ معمولی

---

31. Corresponding Points
32. Orthogonal Trajectory
33. Limiting Curve
34. Equidistant Curve



شکل ۹.۲۸



شکل ۹.۲۹

است. فی‌المثل، خط عمود بر وتر در وسط آن شعاع است. قضیهٔ ۹.۱۶ خاصیت مشترک دومی را بیان می‌کند.

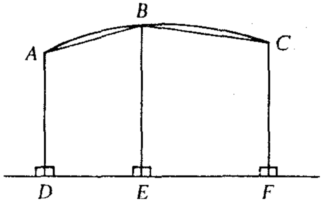
قضیهٔ ۹.۱۶. سه نقطهٔ متمایز واقع بر یک منحنی حدی آن را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کند.

درشکل ۹.۲۸ ، عمودمنصفهای $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$، در مورد نقاط A، B، C ی واقع برمنحنی‌ای حدی، نقطهٔ منحصر به فرد Ω، مرکز منحنی حدی، رامشخص می‌کنند. باید تأکید شود که قسمتی از شرط داده‌شده این است که سه نقطهٔ مورد بحث واقع بر منحنی حدی‌ای می‌باشند. و این لزوماً حالت مربوط به هر سه نقطهٔ انتخاب شده به تصادف نیست. به عنوان مثال، درشکل ۹.۲۸، سه نقطهٔ A، B، C، در صورتی که عمودمنصفهای در DوE درنقطه‌ای حقیقی تلاقی کنند، بردایره‌ای واقع می‌شود.

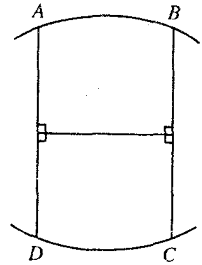
قضیهٔ زیر خاصیتی از منحنیهای حدی راکه نامشابه با هر خاصیت دوایر است بیان می‌کند.

قضیهٔ ۹.۱۷ . هردو منحنی حدی متفاوت همنهشت‌اند.

اثبات: فرض می‌کنیم ABCD و A′B′C′D′ درشکل ۹.۲۹ دومنحنی حدی دلخواه باشند، فرض می‌کنیم که نقاط A ، B ، C ، D مفروض باشند و A′ نقطهٔ دلخواهی برمنحنی حدی دومی باشد. اگر $\angle B'A'\Omega'$ همنهشت با $\angle BA\Omega$ رسم شود، و اگر $\overline{A'B'}$ همنهشت با $\overline{AB}$ باشد، دراین صورت نقطهٔ B′ چنان قرار گرفته که مثلث امگای $A'B'\Omega'$ بامثلث امگای $AB\Omega$ همنهشت باشد. نتیجه این می‌شود که



شکل ۹.۳۰



شکل ۹.۳۱

$\angle ABΩ \cong \angle A'B'Ω'$، و A' و B' نقاط متناظر با B' واقع برمنحنی حدی دوم‌اند. به همین طریق، می‌توان نشان داد که نقاط C'، D'،... واقع برمنحنی حدی را می‌توان چنان که $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$، $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$، و غیره باشد، یافت.

یک نتیجهٔ قضیهٔ ۹.۱۷ این گزاره، که در منحنیهای حدی اوتار همنهشت کمانهای همنهشت جدا می‌کنند و کمانهای همنهشت اوتار همنهشت دارند، است.

دومین نوع جدید منحنی مورد بررسی در هندسهٔ هذلولوی منحنی متساوی الفاصله است. فرض می‌کنیم A، B، C، چنان که درشکل ۹.۳۰ نشان داده شده، سه نقطهٔ دلخواه واقع بریک منحنی متساوی‌الفاصله باشد. عمود مشترک $\overleftrightarrow{DF}$ خط قاعده[۳۵] نام دارد. چهارضلعی ABED، از آنجا که A و B نقاط متناظر و $\angle BAD \cong \angle ABE$ است، چهارضلعی ساکری است. نام «منحنی متساوی‌الفاصله» به‌علت این که هر نقطهٔ واقع برمنحنی به فاصلهٔ عمودی یکسان از خط قاعده می‌باشد، موجه است.

عملاً جمیع نقاط واقع درصفحهٔ به یک فاصله از خط قاعده، چنان که درشکل ۹.۳۱ نشان داده شده، برمنحنی متساوی‌الفاصله‌ای از دو شاخه واقع می‌شوند. در تمرینات ۹.۵، خواص شکل ABCD را، که شگفتانه مشابه خواص متوازی‌الاضلاع است، مورد بررسی قرارداده‌ایم. منحنی متساوی الفاصله دارای خواص بسیار دیگری است که اندکی از آنها را در این جابیان کرده‌ایم، و بررسی آن گرچه در بحث تحلیلی هندسهٔ نااقلیدسی به اساسی منحنی حدی نیست، آسانتر است.

سه نقطهٔ واقع بریک منحنی متساوی‌الفاصله منحنی را، از آنجا که خط قاعده را می‌توان مشخص کرد، به طور منحصر به فردی معین می‌کنند. جمیع منحنیهای

35. Baseline

متساوی‌الفاصله همنهشت نیستند، و تنها آنهایی چنین‌اند که نقاط شان به یک فاصله از خط قاعده‌شان‌اند. در منحنیهای متساوی‌الفاصلهٔ همنهشت، اوتار همنهشت کمانهای همنهشت قطع می‌کنند، و کمانهای همنهشت وترهای همنهشت دارند. بامعلوم بودن یک خط، خطی متقاطع از نقطهٔ تقاطع تباعد می‌کند؛ علاوه براین، خطوط موازی و خطوط نامتقاطع به فاصله‌ای ناثابت‌اند. تنها منحنی متساوی‌الفاصله در هندسهٔ هذلولوی است که خاصیت متساوی‌الفاصلهٔ ویژهٔ خطوط موازی در هندسهٔ اقلیدسی را داراست.

این گزاره که همواره می‌توان دایره‌ای یافت که از سه نقطهٔ غیرواقع بریک استقامت بگذرند، معادل اصل پنجم اقلیدس است. از طرف دیگر، درهندسهٔ هذلولوی سه نقطهٔ غیرواقع بریک استقامت می‌تواند بریک دایره، یک منحنی حدی، یا یک شاخهٔ منحنی متساوی الفاصله واقع شود.

تمرینات ۹.۵

۱. درهندسهٔ هذلولوی، آیا اندازهٔ یک زاویهٔ محاطی کوچکتر از یا بزرگتر از نصف کمان روبروی آن است؟

۲. چرا هر دونقطهٔ مفروض واقع بریک دایرهٔ معمولی نقاط متناظرند؟

۳. دریک منحنی حدی، ثابت کنید که خطی عمود بریک وتر در وسط آن شعاع است.

۴. ثابت کنید که قطعات اشعهٔ بین هر زوج منحنی حدی با مرکز انگاری یکسان همنهشت‌اند.

۵. آیا یک خط مستقیم می‌تواند یک منحنی حدی را در سه نقطهٔ متمایز قطع کند؟ چرا؟

۶. آیا یک خط مستقیم می‌تواند یک شاخهٔ یک منحنی متساوی الفاصله را در سه نقطهٔ متمایز قطع کند؟ چرا؟

۷. در هندسهٔ هذلولوی، در صورتی که سه نقطهٔ غیرواقع بریک استقامت را داده باشند، برای مشخص کردن این که سه نقطهٔ مزبور بردایره، منحنی حدی، یا یک شاخهٔ منحنی متساوی‌الفاصله قرار دارد، به دانستن چه چیز دیگری نیاز داریم.

۸. نشان دهید که چگونه بامعلوم بودن سه نقطهٔ واقع بریک شاخهٔ یک منحنی متساوی‌الفاصله خط قاعدهٔ آن منحنی را مشخص می‌کنیم.

۹. درشکل ۹.۳۰، اگر در نقطهٔ B مماسی برمنحنی متساوی الفاصلهٔ موجود رسم شود، این مماس باخط قاعده چه نوع نقطهٔ تقاطعی خواهدداشت؟

۱۰. درشکل ۹.۳۰ ثابت کنید که اگر ACFD چهارضلعی ساکری باشد، رأس $\overline{AC}$، $\overline{BE}$ را در نقطهٔ G ای چنان قطع می‌کند که $EG<EB$ باشد.

۱۱. ثابت کنید که هرقطعه خط رابط دو نقطه، هریک بریکی از شاخه‌های منحنی متساوی‌الفاصله، توسط خط قاعده نصف می‌شود.

۱۲. توضیح دهید که چگونه خط قاعدهٔ یک منحنی متساوی الفاصله را بامعلوم بودن سه نقطهٔ نه همه بریک شاخهٔ آن منحنی، مشخص می‌کنید.

۱۳. ثابت کنید که از سه رأس یک مثلث سه منحنی متساوی‌الفاصلهٔ متفاوت، با دو رأس بریک شاخه و رأس سوم برشاخهٔ دیگر، می‌گذرد.

۱۴. خواص ABCD درشکل ۹.۳۱ را باخواص متوازی الاضلاع در هندسهٔ اقلیدسی مقایسه کنید.

۱۵I. خواص گوناگون دایره، منحنی حدی، و منحنی متساوی الفاصله را با تهیهٔ اطلاعاتی به صورت جدول مقایسه کنید.

۱۶I. مسألهٔ ترسیمات درهندسهٔ هذلولوی بسیار پیچیده‌تر از موردش در هندسهٔ اقلیدسی است. در: Wolfe, *Non - Euclidean Geometry* بخشهایی راجع به ترسیمات را مطالعه و ترسیمی در هندسهٔ هذلولوی را مبرهن کنید.

۹.۶ هندسهٔ بیضوی

درپنج بخش اول این فصل به معرفی یک نوع هندسهٔ نااقلیدسی ـ هذلولوی ـ پرداختیم. دو مدل از این هندسه را در بخش ۹.۷ مورد بحث قرارداده‌ایم. پس‌از طرح هندسهٔ هذلولوی، طولی نکشید که ریمان ریاضیدان آلمانی (۱۸۶۶ - ۱۸۲۶) که در بسیاری از زمینه‌های ریاضیات از جمله توپولوژی و هندسهٔ فضاهای متری سهیم است هندسه‌ای را، که امروزه بیضوی[۳۶] نامیده می‌شود، برمبنای همتراز دیگری بااصل پنجم، که براین است که از نقطه‌ای خارج یک خط هیچ خط موازی‌ای با آن موجود نیست، مطرح کرد.

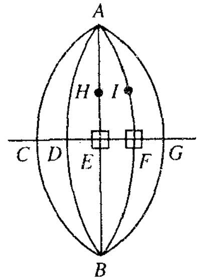
اصل موضوع ویژهٔ هندسهٔ بیضوی

هر دوخط واقع درصفحه درنقطه‌ای معمولی تلاقی می‌کنند.

هندسه‌های متناهی گوناگون فصل ۱، چون هندسهٔ سه نقطه‌ای و هندسهٔ فانو، تقاضای این اصل را برآورده می‌کنند، هر چند جمیع اصول موضوع هندسهٔ بیضوی را برقرار نمی‌دارند.

---

36. Elliptic



شکل ۹.۳۲

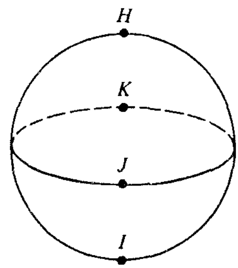
نیز لازم است که دستگاه اصل موضوعی اقلیدس را با تعویض گزارهٔ مربوط به نامتناهی بودن خط با این گزارهٔ ملایمتر که خط در هندسهٔ بیضوی بی‌کران[37] است، تعدیل کنیم. مفهوم شهودی معنی کلمهٔ بی‌کران این است که خط مربوطه نمی‌تواند توسط دایره‌ای واقع در صفحهٔ آن خط محصور شود. به عبارت دیگر، بی‌کران، چنان که درفصل ۳ به کار رفته، به‌معنی ناکراندار است. نیز لازم است که تعدیلات دیگری از جمله این گزاره که لزومی ندارد که دوایر همواره موجود باشند، و این که می‌تواند از بعضی زوج نقطه‌ها بی‌نهایت خط بگذرد، انجام شود. لازم است که خواننده پیش از ادامهٔ کار سعی در پیشگویی بعضی از پیامدهای اصل جدید مورد بحث و تعدیلات مذکور داشته باشد.

اگر شکل ۹.۳۲ درهندسهٔ بیضوی، با $\overline{EH}$ و $\overline{FI}$ هر دو عمود بر $\overleftrightarrow{CG}$ باشد، این دو خط، بنابه اصل موضوع ویژهٔ این هندسه که هر دو خطی متقاطع اند، در نقطهٔ A ای تقاطع می‌کنند. در هندسهٔ بیضوی، رسم براین است که برای نشان دادن خطوط مستقیم از منحنیها استفاده کنند. اگر $\overline{DE} \cong \overline{EF}$، در این صورت $\Delta AEF \cong \Delta\ AED$، و $\overline{AD}$ نیز عمودبر $\overline{CG}$ است. با توسیع این استدلال، می‌توان نشان داد که هرخط گذرنده از A، $\overleftrightarrow{CG}$ را در زوایای قائم قطع می‌کند. نقطهٔ A قطب $\overleftrightarrow{CG}$ و خط مزبور قطبی نقطهٔ A نامیده‌می‌شود. در این جا، فاصلهٔ A از هر نقطهٔ واقع بر $\overleftrightarrow{CG}$ ثابت است. سایر موارد استعمال کلمات قطب و قطبی را برای نشان دادن رابطه‌ای بین نقطه و خط در هندسه‌های گوناگون برخوردشده در این کتاب، به یاد آورید.

درشکل ۹.۳۲، اگر $\overline{AE} \cong \overline{EB}$، در این صورت $\Delta BEF \cong \Delta\ AEF$، و A، F، و B نیز واقع بریک استقامت‌اند. این بدان معنی است که B نیز قطب $\overleftrightarrow{CG}$ است، و دوخط در دونقطه تقاطع می‌کنند. در این جا فرض براین است که A و B نقاطی متمایزند، گرچه این

---

37. Boundless



شکل ۹.۳۳

امکان (در هندسهٔ بیضوی منفرد[38]) که یکسان شان در نظر بگیریم نیز هست. قطبی مشترک دونقطهٔ تقاطع مذکور عمودمشترک منحصر به فرد دوخط مورد بحث است. جالب است که در هندسهٔ بیضوی، دوخط مستقیم، چون ADB و AFB ، ناحیه‌ای را محصور می‌کنند. این ناحیه دایگون[39] یا دوزاویه‌ای[40] نامیده می‌شود.

خوشبختانه، درمورد هندسهٔ بیضوی سطح مدلی ساده و آشنا ـ سطح زمین و خطوط طول جغرافیایی واقع برسطح آن ـ وجود دارد. درشکل ۹.۳۲، A و B را به‌عنوان قطبهای شمال و جنوب و $\overleftrightarrow{CG}$ را به مثابهٔ استوا درنظر بیاورید. هندسهٔ اقلیدسی واقع برسطح یک کره مدلی در مورد هندسهٔ بیضوی دوبعدی به دست می‌دهد.

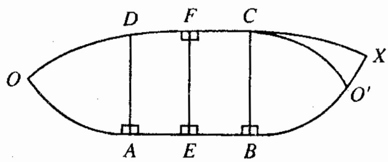
درشکل ۹.۳۳، فرض می‌کنیم $\overleftrightarrow{HI}$ و $\overleftrightarrow{KJ}$ خطوطی در هندسهٔ بیضوی چنان باشندکه H و I اقطاب $\overleftrightarrow{KJ}$، و K و J اقطاب $\overleftrightarrow{HI}$ شوند. در هندسهٔ بیضوی، فاصلهٔ هرخط تا قطبش ثابت، وبه عبارت دیگر برای جمیع خطوط یکسان است. از این گذشته، طول خط متناهی، و چهاربرابر فاصلهٔ قطب از خط است.

استفاده از مدل به توضیح این مطلب نیزکه مقصود از این که خط بی‌کران نامیده می‌شود چیست، کمک می‌کند. دایرهٔ عظیمهٔ کره، نمایشگر خط در هندسهٔ بیضوی، نمی‌تواند توسط منحنی‌ای واقع برآن کره محصور شود، و راهی برای «دور زدن» دایرهٔ عظیمه از نقطه‌ای واقع بریک طرف آن به نقطه‌ای واقع درطرف دیگرش بدون قطع کردن دایرهٔ عظیمهٔ مورد بحث موجود نیست.

درهندسهٔ بیضوی، از آنجاکه هر دوخط تلاقی می‌کنند، خطوط موازی یا نامتقاطع موجودنیست. اما، چهارضلعیها و مثلثهایی که بعضی خواص مشابه باخواصی که در هندسهٔ

---

38. Single Elliptic Geometry
39. Digon
40. Biangle



شکل ۹.۳۴

هذلولوی با آنها مواجه شدیم، موجودند. تعریف چهار ضلعی ساکری دراین جا نیز مانند هندسهٔ هذلولوی است.

قضیهٔ ۹.۱۸ . قطعهٔ واصل نقطهٔ وسط قاعده و رأس چهار ضلعی ساکری به قاعده و رأس مزبور عموداست.

اثبات: این قضیه مانند اثبات قضیهٔ ۹.۷ در مورد هندسهٔ هذلولوی است.

قضیهٔ ۹.۱۹ . زوایای رأسی چهار ضلعی ساکری همنهشت و منفرجه‌اند.

اثبات: درشکل ۹.۳۴، فرض می‌کنیم ABCD چهارضلعی ساکری دلخواهی؛ با O و O′ اقطاب $\overrightarrow{EF}$، خط واصل نقاط وسط قاعدهٔ و رأس آن، باشد.

این واقعیت که زوایای رأسی همنهشت‌اند از مثلثهای همنهشت به‌کار رفته در اثبات قضیهٔ ۹.۱۸ به دست می‌آید.

برای نشان دادن این که زوایای رأسی منفرجه‌اند، ابتدا می‌توان ثابت کرد که مکملهای آنها حاده‌اند. اگر چون درشکل ۹.۳۴، X بر BO′ واقع شود و قطب $\overleftrightarrow{BC}$ باشد، در این صورت از آنجاکه $BO'<EO'$، $BX>BO'$ است. به این ترتیب، $\angle BCX$ زاویه‌ای قائم است و بنابراین $\angle BCO'$ حاده و مکمل آن، $\angle BCD$، منفرجه است.

قضایای زیر نتایج قضیهٔ ۹.۱۹ اند، و اثباتهاشان به عنوان تمرینهای ۱۳ - ۱۵ ی تمرینات ۹.۶ واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۹.۲۰ . در هندسهٔ بیضوی، چهارمین زاویهٔ چهار ضلعی لامبرت منفرجه است، و هر ضلع این زاویه کوتاهتر از ضلع مقابلش است.

قضیهٔ ۹.۲۱ . مجموع اندازه‌های زوایای هرمثلث بزرگتر از π است.

قضیهٔ ۹.۲۲ . مجموع اندازه‌های زوایای هر چهار ضلعی بزرگتر از 2π است.

ارزشمند است که به بخشهای مربوط به هندسهٔ هذلولوی بازگردیم و ملاحظه کنیم که کدام یک از مفاهیم تاکنون ذکرنشدهٔ آن را می‌توان در هندسهٔ بیضوی به‌کار برد. فی‌المثل، هیچ زاویهٔ توازی‌ای در هندسهٔ بیضوی موجود نیست. دوایر در هندسهٔ بیضوی وجود دارند. آنها را می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ جمیع نقاط به فاصلهٔ (به قدرکافی کوچک) ثابتی از نقطهٔ مفروضی درنظر گرفت، و از آنجا که هرنقطهٔ واقع بر یک دایره به فاصلهٔ یکسان از قطبی نقطهٔ مفروض نیز هست، می‌توان دایره را به‌عنوان منحنی متساوی الفاصله‌ای در هندسهٔ بیضوی درنظر گرفت.

تمرینات ۹.۶

۱. دو هندسهٔ دیگر از فصل ۱ نام ببرید که اصل موضوع ویژهٔ هندسهٔ بیضوی در مورد آن برقرار است.

۲. آیا خط، در هندسهٔ اقلیدسی معمولی، بی‌کران است؟

۳. خط عرض جغرافیایی‌ای که استوای یک کره نیست کدام مفهوم دیگر در مدل هندسهٔ بیضوی نشان داده شده درشکل ۹.۳۳ رانمایش می‌دهد؟

۴. در هندسهٔ بیضوی، اگر فاصلهٔ یک خط از قطبش به اندازهٔ دو باشد، اندازهٔ طول یک خط در این هندسه چیست؟

۵. چه وقت دونقطه نمی‌تواند همواره خط منحصر به فردی را در هندسهٔ بیضوی مشخص کند؟

در تمرینات ۶و۷، در مورد دو زاویه‌ای، آیا باید همواره راست باشد که:

۶. قطب یکی از خطوط تشکیل دهندهٔ دو زاویه‌ای باید نقطه‌ای درون دو زاویه‌ای باشد؟

۷. دقیقاً یک عمود مشترک نسبت به خطوط تشکیل دهندهٔ دوزاویه‌ای موجود است؟

۸. توضیح دهید که چرا در هندسهٔ بیضوی به‌ازای هر نقطه و هرشعاع همواره دایره موجود نیست.

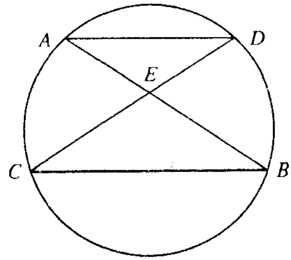
۹. آیا منحنیهای حدی در هندسهٔ بیضوی موجودند؟ چرا؟

۱۰. بیشترین اندازهٔ سومین زاویهٔ یک مثلث در هندسهٔ بیضوی، اگر دوزاویه از زوایای آن قائم باشند، چیست؟
۱۱. این واقعیت را، که اثبات قضیهٔ ۹.۱۸ مانند اثبات قضیهٔ ۹.۷ است، تحقیق کنید.
۱۲. درهندسهٔ بیضوی، دوخط مفروض درکجا بیشترین جدایی را دارند؟
۱۳. قضیهٔ ۹.۲۰ را اثبات کنید.
۱۴. قضیهٔ ۹.۲۱ را اثبات کنید.
۱۵. قضیهٔ ۹.۲۲ را اثبات کنید.
۱۶. ثابت کنید که مثلثهای مشابه اما نا همنهشت نمی‌توانند در هندسهٔ بیضوی موجود باشند.
۱۷I. فهرستی از ده گزاره راکه در هندسهٔ بیضوی و هذلولوی راست‌اند، به دست دهید.
۱۸I. پیش از مطالعهٔ بخش بعد، جهد در کشف مدل معقولی برای هندسهٔ هذلولوی کنید.

۹.۷ سازگاری هندسهٔ نااقلیدسی

جهان اقلیدسی یا نااقلیدسی است؟ این سؤال که کدام نوع هندسه هندسهٔ «شایستهٔ» آمدن به جهان فیزیکی است سؤالی است که ممکن است هیچ‌گاه پاسخ نگیرد. در حالی که از لحاظ حل شدن مسألهٔ ساده‌ای به نظر می‌رسد، اشکالات صعبی به‌وجود می‌آورد. به‌عنوان مثال، ممکن است چنین به‌نظر برسد که اندازه گیری فیزیکی زوایای مثلثها به آسانی این مسأله راکه این مجموع مساوی π هست یا نه، سروسامان می‌دهد. اما اندازه گیری فیزیکی همیشه متضمن خطاست. بعلاوه چنین معلوم است که در هندسهٔ نااقلیدسی مجموعهٔ زاویه‌ای مورد بحث به اندازهٔ مثلث مان وابسته است. ممکن است این قسمت کوچک از جهان که در آن زندگی می‌کنیم آن چنان بزرگ نباشد که شامل مثلثهایی با مقدار نقص (یاکمال) به اندازهٔ کافی بزرگی که اندازه گیری شود باشد. ممکن است روزی سفرهای فضایی مسأله را سامان دهد.

در مورد غالب مقاصد عملی، این مطلب که جهان اقلیدسی است یا نه، تفاوت اندکی درحیات مان ایجاد می‌کند. هندسهٔ اقلیدسی مدل ساده‌ای برای به کار بردن در اغلب کاربردهای عملی، چون مهندسی، به دست می‌دهد. هندسهٔ نااقلیدسی می‌تواند چون بشر مطالب بیشتری از جهان راکشف کند. کاربردهای تازه‌ای داشته‌باشد، و در بسیاری از موارد، بدون ایجاد تفاوت زیادی، به جای هندسهٔ اقلیدسی به کار رود. مدل تئوریک جدیدی از جهان، مبتنی برنظریهٔ عمومی نسبیت اینشتین، به هندسهٔ نااقلیدسی پیچیده‌تری از هذلولوی یا بیضوی وابسته است. این فرض مقرر شده که جهان دقیقاً اقلیدسی نیست، اما تمرکز نایکنواخت ماده درفضا وسعت انحراف از مدل اقلیدسی را مشخص می‌کند.



شکل ۹.۳۵

از نظرگاه صرفاً ریاضی، صدق یک دستگاه آکسیوماتیک آن چیزی که باید بررسی شود نیست، و مطلب مهم، چنان که درفصل ۱ به اختصار مورد بحث قرار گرفت، مشخص کردن این است که دستگاه مورد بحث سازگار[41] هست یا نه، و به عبارت دیگر، این که، آیا آکسیومهای هندسهٔ نااقلیدسی، بدون هیچ‌گونه تناقضی، به نتایج معتبر[42] می‌انجامند یا خیر. در واقع، ریاضیدانها به چیزی که سازگاری نسبی[43] نامیده‌می‌شود علاقه‌مندند. و نیاز به این دارند که مطمئن شوند که هندسهٔ نااقلیدسی به اندازهٔ هندسهٔ اقلیدسی یا جبر اعداد حقیقی سازگارند.

افتخار اولین اثبات سازگاری نسبی هندسهٔ نااقلیدسی، درسال ۱۸۶۸، به بلترامی[44] داده شده است. اثبات سازگاری نسبی یک هندسهٔ نااقلیدسی شامل پیدا کردن مدلی در هندسهٔ اقلیدسی است که، با تعبیرات مناسب، دارای همان ساخت اصل موضوعی آن هندسهٔ نااقلیدسی باشد.

در مورد هندسهٔ بیضوی مسطحه مدلی دربخش قبل معرفی شد. دوایر عظیمهٔ واقع برسطح یک کره متناظر باخطوط‌اند، و هرخط دوقطب مرتبط با خود دارد. خطوط عرضی مدلهای منحنیهای متساوی‌الفاصله‌اند.

مدلهای دو بعدی هندسهٔ هذلولوی درهندسهٔ اقلیدسی شامل مدلهایی که توسط فلیکس کلاین و پوانکاره مطرح شده‌اند. مدل کلاین را درشکل ۹.۳۵ توضیح داده‌ایم. نقاط واقع بردایرهٔ شکل نقاط انگاری را نمایش می‌دهند. قاطعات دایره خطوط هذلولوی را نمایش می‌دهند، و نقاط واقع براوتار داخل دایرهٔ نمایشگر نقاط معمولی‌اند. درشکل ۹.۳۵، $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ خطوط متقاطع‌اند، $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ خطوط موازی‌اند، و $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ خطوط نامتقاطع می‌باشند.

---

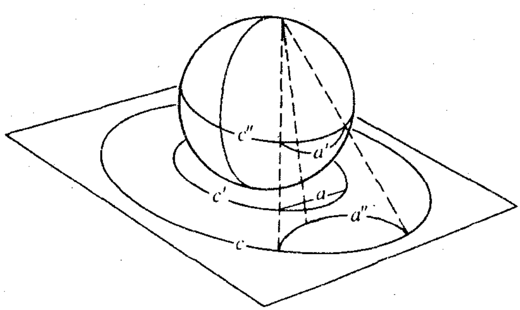
41. Consistent
42. Valid
43. Relative Consistency
44. Beltrami

یکی از امتیازات مدل کلاین این است که خطوط مستقیم باقسمتهایی از خطوط مستقیم نموده شده‌اند. اما، معضلات مهم در رابطه با مدل کلاین به زودی چهره می‌نمایند. یکی از آنها این مسأله است که باید تعبیری از فاصله چنان داده‌شود که قطعه خطی چون $\overline{AD}$ درشکل ۹.۳۵ ویژگی خط بی‌نهایت طول را دارا باشد. دومین مسألهٔ مهم این است که باید تعبیری از زاویه چنان داده‌شود که مجموع اندازه‌های زوایای یک مثلث از مقدار π داشتن اجتناب کند.

مدل پوانکاره، که توسط هانری پوانکاره[۴۵] ریاضیدان بزرگ فرانسوی (۱۸۵۴ - ۱۹۱۲)، مطرح شده، دومین معضل نامبرده در بندپیشین، اما نه اولی، را حذف می‌کند. رابطهٔ بین مدلهای هندسهٔ هذلولوی پوانکاره و کلاین را درشکل ۹.۳۶ مصور کرده‌ایم. مدل کلاین، برصفحهٔ مماس به کرهٔ شکل، به صورت داخل دایرهٔ C' همنهشت با دایرهٔ عظیمهٔ C''کره نشان داده شده‌است.

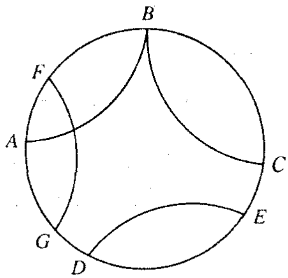
نقاط واقع بر دایرهٔ C' و داخل آن توسط تصویری از نقطهٔ انگاری‌ای برنیمکرهٔ تحتانی کره مزبور تصویر شده‌اند. هر وتر، چون a، درکمان a' دایره‌ای عمود بر C'' تصویر شده‌است. نقاط واقع بر نیمکرهٔ تحتانی با تصویر استریوگرافیکی (بررسی شده در بخش ۶.۴ به‌عنوان کاربردی از هندسهٔ انعکاسات) در نقاط واقع بردایرهٔ C و داخل آن برده شده‌است. کمان a' درکمان a''ی عمود بردایرهٔ C در صفحهٔ مماس تصویر شده‌است. مدل پوانکاره در مورد نقاط معمولی هندسهٔ هذلولوی توسط داخل C مصور شده‌است. نقاط معمولی واقع بر یک خط توسط نقاط واقع برکمانی، چون a''، داخل C مصور شده‌اند.

طبق طرح فوق، خطها در مدل پوانکاره توسط کمانهای دوایر عمود به دایره‌ای معلوم نمایش داده‌شده‌اند. درشکل ۹.۳۷، $\widehat{AB}$ و $\widehat{FG}$ خطوط متقاطع، $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ خطوط موازی، و

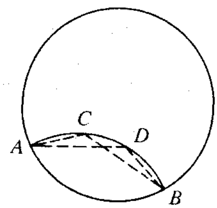


شکل ۹.۳۶

45. Henri Poincaré



شکل ۹.۳۷



شکل ۹.۳۸

$\widehat{AB}$ و $\widehat{DE}$ خطوط نامتقاطع را نمایش می‌دهند.

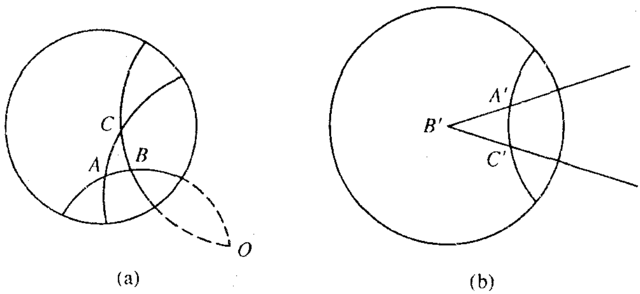
روش داهیانه‌ای را که فاصله در مدل پوانکاره طبق آن تعریف شده، در فورمول زیر، که رجوع به شکل ۹.۳۸ دارد:

$$CD = k \ \log_e \frac{(AC/CB)}{(AD/DB)}$$

و در آن AC ، CB ، AD، و DB طولهای قطعه خطها، نه کمانها، و k پارامتر است، نشان داده‌ایم. بررسی و ملاحظه کنید که فورمول فوق چون فاصلهٔ بین دو نقطه (چون D و B درشکل ۹.۳۸) نامتناهی یا صفر ـ یعنی، اگر دونقطه منطبق باشند ـ باشد، نتایج صحیح را به دست می‌دهد.

خوشبختانه، اندازهٔ زوایا در مدل پوانکاره را می‌توان به طریق معمول در هندسهٔ اقلیدسی تعریف کرد. و این موضوع به علت این که زوایا تحت تصویر استریوگرافیک محفوظ می‌مانند راست است. از انعکاس (فصل ٦ را ملاحظه کنید) به‌عنوان ابزار اصلی نشان دادن این که هندسهٔ نقاط و خطوط در مدل پوانکاره دارای همان ساخت اصل موضوعی هندسهٔ هذلولوی مسطح است، استفاده کرده‌ایم. به‌عنوان مثال، برای اثبات این که مجموع اندازه‌های زوایای مثلث در مدل پوانکاره کمتر از π است، اثباتی بااستفاده از انعکاس به کار رفته است.

درشکل ۹.۳۹a ، مثلث ABC، که مثلث دلخواهی را در مدل پوانکاره نمایش می‌دهد، توسط انعکاسی به مرکز O ، نقطهٔ منعکس نقطهٔ B ، با دایرهٔ ثابت به عنوان دایرهٔ انعکاس، به مثلث $A'B'C'$ ، نشان داده شده درشکل ۹.۳۹b،منعکس شده‌است. از شکل $A'B'C'$ ، از آنجا که $A'C'$ به‌طرف داخل خم می‌شود، هویداست که مجموع اندازه‌های زاویه‌ای آن کمتر از π است. اهمیت دارد که توجه داشته‌باشیم که در واقع شکل ۹.۳۹ مواقع



شکل ۹.۳۹

نسبی صحیح مجموعهٔ نقاط در (a) و منعکسش (b) را، از آنجا که موقع نسبی مذکور در اثبات مان بی‌اهمیت است، نشان نمی‌دهد. در واقع مجموعه‌های نقاط درصورتی که به طور صحیح رسم شوند متقاطع می‌شوند، و چنین رسمی گیج کننده می‌شود، و به این ترتیب تعبیر روابط واقع درشکل منعکس شده را سخت‌تر می‌سازد.

پیش از ترک مدل پوانکاره، باید مفهوم دیگری را که به نشان دادن تفاوت میان چند هندسه کمک می‌کند بررسی کنیم. مجموعهٔ نقاط انگاری در صفحهٔ مجموعهٔ مطلق[46] نامیده‌می‌شود، و طبیعت مجموعهٔ مطلق از یک هندسه به هندسهٔ دیگر تغییر می‌کند. در هندسهٔ بیضوی، مجموعهٔ مطلق تهی است. در هندسه سطح اقلیدسی بسط یافته (هندسهٔ سهموی)، مجموعهٔ مطلق می‌تواند خطی مستقیم درنظر گرفته‌شود. در هندسهٔ هذلولوی، مجموعهٔ مطلق را می‌توان، از آنجا که خط گذرنده از داخل آن، آن را در دونقطهٔ متمایز قطع می‌کند، مخروطی (دایرهٔ در مدل پوانکاره) درنظر گرفت.

هریک از هندسه‌های جدید نمایش داده‌شده در این کتاب از جنبهٔ خودش دارای اهمیت است، اما هر یک از آنها در درک کاملتری از مفهوم عبارت «هندسه‌های جدید» نیز سهیم‌اند. هندسه‌های جدید دیگر برای بررسی شدن توسط خوانندهٔ مشتاق باقی می‌مانند. این هندسه‌ها شامل هندسه‌های مبتنی بر تخفیف محدودیتهای تعریف کلاین از تبدیل به گسترش، هندسه‌های فضاهای مجرد، و هندسه‌های بیش‌از سه بعدند.

به عنوان مثال، اگر تنها به گسترش نیاز داشته‌باشیم، در این صورت مجموعه‌های بسیاری از معادلات را می‌توان به‌عنوان عنصری در تعریف ساخت یک هندسه به‌کار برد، و به عبارت دیگر به‌ازای یک مقدار مفروض x و y دقیقاً یک مقدار منحصر به فرد x′ و y′

---

46. Absolute

وجود دارد. و لازم نیست که در مورد نشان دادن این که معکوس آن تبدیل است نگران باشیم. در این مورد چند امکان آورده‌ایم:

$$x' = x+y \qquad x' = x^2+y^2$$
$$y' = y^2 \qquad y' = x^3+y^3$$

$$x' = \frac{9x}{x^2-y^2}$$

$$y' = \frac{9y}{x^2-y^2}$$

افتخار بررسی فضاهای مجرد در۱۹۰۶ به موریس فرشت[47] (۱۹۷۳ - ۱۸۷۸) داده شده‌است. تعریف فلیکس کلاین دیگر کفایت نداشت، وامروزه ساختهای هندسه‌های بسیاری راکه هیچ کاری باگروههای تبدیلات ندارند موردبررسی قرارمی‌دهیم. فضای مجرد شامل مجموعه‌ای اشیا (که غالباً نقاط نامیده می‌شوند) و مجموعه‌ای گزاره از روابط شامل این اشیا است. ساخت فضای متریک شامل عددی حقیقی موسوم به متریک[48] (تابع فاصله‌ای) فضا، که فهرستی ازاصول موضوع رابرقرار می‌کند، است. فضاهای متریک متفاوت با به‌دست دادن تعاریف متفاوت در مورد متریک مشخص می‌شوند. دراین قرار، نظریهٔ فضاهای مجردشامل باساختهایی که ممکن است هندسه‌شان درنظر بگیریم سروکار دارند.

تمرینات ۹.۷

تمرینات ۱ - ۴ رجوع به مدل کلاین دارند.

۱. مثلثی با سه نقطهٔ معمولی به عنوان رأس آن رسم کنید.
۲. مثلث امگایی رسم کنید.
۳. مثلثی با دقیقاً دو رأس انگاری رسم کنید.
۴. مثلثی با سه رأس انگاری رسم کنید.

تمرینات ۵ - ۸ رجوع به مدل پوانکاره دارند.

47.Maurice Fréchet

48. Metric

۵. مثالی از زاویهٔ توازی رسم کنید.
۶. مثلث امگایی رسم کنید.
۷. مثلثی با دقیقاً دو رأس انگاری رسم کنید.
۸. مثلثی با سه رأس انگاری رسم کنید.
۹. چهار ضلعی ساکری‌ای رسم کنید.
۱۰. درشکل ۹.۳۸ ، بااستفاده از فورمول داده شده، فاصلهٔ AD را بیابید.
۱۱. در اثبات باانعکاس در مورد اندازه‌های زوایا چگونگی استخراج شکل ۹.۳۹b را از شکل ۹.۳۹a به تفصیل شرح دهید.
۱۲I. در مورد مدل کلاین مطالعهٔ بیشتری کنید و توضیح دهید که چگونه فاصله و زاویه را می‌توان تعبیر کرد.
۱۳I. مدل پوانکاره را برای اثبات قضایای بیشتری از هندسهٔ هذلولوی مشخص شده دراین فصل به کار برید.
۱۴I. مفهوم و اهمیت این گزاره را توضیح دهید: «هندسهٔ برسطح یک کره نااقلیدسی نیست اما در عوض برای هندسهٔ بیضوی دوبعدی مدلی در فضای سه بعدی به دست می‌دهد.»
۱۵I. فایدهٔ شبه کره[49] را در تهیهٔ مدلی برای هندسهٔ هذلولوی تحقیق کنید.
۱۶I. فصل ۱۹، «The Universe» ، از کتاب «Weeks» به نام «*The Shape of Space*» ، یا مرجعی مشابه را برای توضیح این که دانشمندان چگونه از هندسهٔ نااقلیدسی در مساعی‌شان در توصیف طبیعت فیزیکی جهان استفاده می‌کنند، به کار برید.
۱۷I. برای هر نوع هندسهٔ واقع در «شجره نامهٔ» هندسه‌های صفحهٔ ۱۹ی کتاب «Coxeter» موسوم به: «Non - Euclidean Geometry» تعریفی به دست‌دهید.
۱۸I. مثالی ازگسترشی که می‌تواند در تعریف یک هندسه به‌کار رود بسازید. برای ملاحظهٔ این که آیا می‌توانید خواص لایتغیر هندسه تان راکشف کنید تحقیق کنید.
۱۹I. تعاریف گوناگون متریکی راکه فضاهای متریک متفاوت را مشخص می‌کنند فهرست کنید.
۲۰I. مرجعی به کار برید و هندسهٔ «taxicab»را به عنوان یک فضای متریک تعریف کنید. توضیح دهید که چرا دارای این نام است.

49. Pseudosphere

تمرینات مروری
فصل ۹

۱. درهندسهٔ متناهی بخش ۹.۱، جمیع خطوط گذرنده از نقطهٔ B ای راکه نقطهٔ مشترک با خط H، J، L ندارند فهرست کنید.
۲. ثابت کنید که این گزاره که از هر سه نقطهٔ غیرواقع بریک استقامت می‌توان دایره‌ای گذراند معادل اصل پنجم اقلیدس است.
۳. جمیع مثلثهای امگای نشان داده‌شده درشکل **۹.۱۵** را نام ببرید.
۴. مثلث امگا دقیقاً چند رأس معمولی دارد؟
۵. فرض می‌کنیم که می‌دانیم که در دومثلث امگا اضلاع به طول متناهی همنهشت‌اند. برای نتیجه گرفتن این که دو مثلث همنهشت‌اند به دانستن چه چیز دیگری نیاز است؟
٦. ثابت کنید که در هندسهٔ هذلولوی، چون فاصله کم شود، زاویهٔ توازی افزایش می‌یابد.
۷. خط در هندسهٔ هذلولوی دارای چند نقطهٔ انگاری و چند نقطهٔ اَبَرانگاری‌است؟
۸. در هندسهٔ هذلولوی، کدام بلندتر است: قاعده یا رأس چهارضلعی ساکری؟
۹. درهندسهٔ هذلولوی، آیا دوضلع همنهشت یک چهار ضلعی ساکری برخطوط متقاطع، موازی یا نامتقاطع قرار دارند؟
۱۰. در چهارضلعی لامبرت در هندسهٔ هذلولوی، بیشترین تعداد اضلاعی که می‌توانند با یکدیگر همنهشت باشند چیست؟
۱۱. فرض می‌کنیم در هندسهٔ هذلولوی مثلثی دارای مقدار نقص $^\circ$۰.۰۷۳ است و یک زاویه‌اش اندازهٔ $^\circ$۴۹/٦۱۲ دارد. در مورد مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ دیگر آن چه می‌دانید؟
۱۲. آیا امکان دارد که در هندسهٔ هذلولوی مثلث و چهار ضلعی‌ای بتوانند معادل باشند؟
۱۳. آیا در هندسهٔ هذلولوی برای دو خط موازی امکان دارد که عمود مشترکی داشته‌باشند؟ چرا؟
۱۴. در هندسهٔ هذلولوی پیش از این که بتوانید نتیجه بگیرید که دومثلث همنهشت‌اند باید بدانید که چند زوج زاویهٔ متناظر همنهشت‌اند؟
۱۵. در هندسهٔ هذلولوی، توضیح دهید که چگونه یک دایره، یک منحنی حدی، و یک منحنی متساوی‌الفاصله جمیعاً می‌توانند مسیرهای متعامد چیزی درنظر گرفته‌شوند.
۱٦. در مدل کرهٔ زمینی هندسهٔ بیضوی، خطوط طولی چه چیزی را نمایش می‌دهند؟

۱۷. در هندسهٔ بیضوی، اگر فاصلهٔ یک خط از قطبش یک واحد باشد، طول یک خط در این هندسه چیست؟

۱۸. در مدل کلاین دوخط موازی و خط سومی متقاطع با هر دو در نقاط معمولی رسم کنید.

در تمرینات ۱۹ ـ ۲۱، تصویری در مدل پوانکاره برای هندسهٔ هذلولوی طرح کنید.

۱۹. دوخط موازی

۲۰. دوخط نامتقاطع

۲۱. دو خط متقاطع و خطی موازی هر دو آنها

تمرینات مروری اضافی فصل را می‌توان از هر مجموعهٔ تمریناتی که قبلاً از مجموعه‌های تمرینات پیشین این فصل معین نشده‌اند انتخاب کرد.

ضمیمهٔ ۱
آکسیوم های هیلبرت

آکسیوم های این ضمیمه از کتاب پای بندان هندسه[1] اثر دیوید هیلبرت با اجازهٔ ناشر آن است. ویراستهٔ جدیدی از این کتاب توسط همین ناشر در ۱۹۸۰ به چاپ رسیده است.

گروه I. آکسیوم های وصل[2]

I، ۱. دو نقطهٔ متمایز A و B همواره و به طورکامل خط مستقیم* a ای را مشخص می‌کنند در این صورت می‌نویسیم $AB = a$ یا $BA = a$.

I، ۲. هر دو نقطهٔ متمایز از یک خط مستقیم به طور کامل آن خط را مشخص می‌کنند؛ به عبارت دیگر، اگر $AB = a$ و $AC = a$، که در آن $B \neq C$ است، آن‌گاه $BC = a$ می‌شود.

I، ۳. سه نقطهٔ A ، B ، C غیر واقع بر یک خط مستقیم همواره و به طور کامل صفحهٔ αای را مشخص می‌کنند. در این صورت می‌نویسیم $ABC = \alpha$.

I، ۴. هر سه نقطهٔ A، B، C ی صفحهٔ α ، که بر یک خط مستقیم قرار نداشته باشند، به طور کامل آن صفحه را مشخص می‌کنند.

I، ۵. اگر دو نقطهٔ A، B از خط مستقیم a بر صفحهٔ α واقع شود، در این صورت هر نقطهٔ a در α واقع می‌شود.

I، ۶. اگر دو صفحهٔ α ، β در نقطهٔ A مشترک باشند، در این صورت حداقل در نقطهٔ دوم B ای مشترک اند.

I، ۷. بر هر خط مستقیم حداقل دو نقطه موجود است، در هر صفحه حداقل سه نقطهٔ

---

1. The Foundation of Geometry ; David Hilbert, (La Salle, III. : Open Court Publishing company, 1950)
2. Axiom of Connection

* یا راست

غیر واقع بر یک خط مستقیم موجود است، و در فضا حداقل چهارنقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه موجود است.

:: گروه II. آکسیوم‌های ترتیب[3]

II.۱، اگر A، B، C نقاطی از یک خط مستقیم باشند و B بین A و C واقع باشد، در این صورت B بین C و A نیز واقع است.

II.۲، اگر A و C دو نقطه از خط مستقیمی باشند، در این صورت حداقل نقطهٔ Bای واقع بین A و C و حداقل نقطهٔ Dی چنان جایگزین شده‌ای که C بین A و D واقع باشد، موجود است.

II.۳، از هر سه نقطهٔ واقع بر یک خط مستقیم، همواره یکی و تنها یکی موجود است که بین دو نقطهٔ دیگر قرار می‌گیرد.

II.۴، هر چهار نقطهٔ A ، B ، C ، Dی یک خط مستقیم همواره می‌توانند چنان مرتب شوند که B بین A و C نیز بین A و D واقع شود، و از این گذشته، C بین A و D نیز بین B و D واقع شود.

II.۵، فرض می‌کنیم A، B، C سه نقطهٔ غیر واقع بر یک خط مستقیم و فرض می‌کنیم a خط مستقیم واقع بر صفحهٔ ABCی ناگذرنده از هیچ یک از نقاط A، B، C ای باشد. در این صورت، اگر خط مستقیم a از نقطه‌ای از قطعهٔ AB بگذرد، از نقطه‌ای از قطعهٔ BC یا از نقطه‌ای از قطعهٔ AC نیز خواهد گذشت.

گروه III. آکسیوم موازی ها[4]

III. در صفحهٔ α می‌توان از هر نقطهٔ Aی واقع در خارج خط مستقیم a، یک و تنها یک خط مستقیم که خط مستقیم a را قطع نکند رسم کرد. این خط مستقیم به موازی a از نقطهٔ مفروض A موسوم است.

---

3. Axioms of Order

4. Axiom of Parallels

گروه IV. آکسیوم های هم نهشتی[5]

IV ،۱.اگر A ، B دو نقطهٔ واقع بر خط مستقیم a ای باشند، و اگر A' نقطه‌ای بر همین خط یا بر خط مستقیم دیگر a' باشد، در این صورت، بر طرف مفروضی از A' برخط مستقیم a'، همواره می توان یک و تنها یک نقطهٔ B' چنان رسم کرد که قطعهٔ AB (یا BA) همنهشت با قطعهٔ $A'B'$ باشد. این رابطه را با نوشتن $AB \equiv A'B'$ نشان می دهیم. هر قطعه خطی با خودش همنهشت است؛ یعنی، همواره داریم $AB \equiv AB$.

IV ،۲.اگر قطعهٔ AB با قطعهٔ $A'B'$ نیز با قطعهٔ $A''B''$ همنهشت باشد، در این صورت قطعهٔ $A'B'$ با قطعهٔ $A''B''$ همنهشت است؛ یعنی، اگر $AB \equiv A'B'$ و $AB \equiv A''B''$ ، در این صورت $A'B' \equiv A''B''$.

IV ،۳. فرض می‌کنیم AB و BC دو قطعه از خط مستقیم a که نقطهٔ مشترکی جز نقطهٔ B ندارند باشند، و ، از این گذشته، فرض می‌کنیم $A'B'$ و $B'C'$ دو قطعه از همین خط یا خط مستقیم دیگر a' که، به همین ترتیب، نقطهٔ مشترك دیگری جز B' ندارند، باشند. در این صورت، اگر $AB \equiv A'B'$، و $BC \equiv B'C'$ باشد، داریم $AC \equiv A'C'$.

IV ،۴. فرض می‌کنیم زاویهٔ (h,k) ای در صفحهٔ α مفروض باشد و فرض می‌کنیم خط مستقیم a' ی در صفحهٔ α' مفروض باشد. نیز می‌انگاریم که در صفحهٔ α' طرف مشخصی از خط مستقیم a' معین باشد. نیم شعاع خط مستقیم a' بیرون آمده از نقطهٔ O' واقع بر این خط را با h' نمایش می‌دهیم. در این صورت در صفحهٔ α' یک و تنها یک نیم شعاع k' چنان موجود است که زاویهٔ (h,k) یا (k,h) با زاویهٔ (h',k') همنهشت است، و در عین حال جمیع نقاط داخلی زاویهٔ (h',k') برطرف مفروض a' قرار دارند. این نسبت را با علامت $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ بیان می‌کنیم. هر زاویه با خودش همنهشت است؛ یعنی

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$$

$$\angle(h,k) \equiv \angle(k,h)$$

5. Axiom of Congruence

۵، IV. اگر زاویهٔ (h,k) با زاویهٔ (h',k') و زاویهٔ $(h",k")$ همنهشت باشد، در این صورت زاویهٔ (h',k') با زاویهٔ $(h",k")$ همنهشت است؛ و به عبارت دیگر، اگر $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ و $\angle(h, k) \equiv \angle(h", k")$، در این صورت $\angle(h',k') \equiv \angle(h",k")$.

۶، IV. اگر، در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، همنهشتی‌های $AB \equiv A'B'$، $AC \equiv A'C'$، $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ برقرار باشد، در این صورت همنهشتی‌های $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ و $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ نیز برقرار است.

گروه V. آکسیوم تداوم[6]

V. فرض می‌کنیم A_1 نقطه‌ای بر خط مستقیمی بین نقاط به دلخواه انتخاب شدهٔ A و B باشد. نقاط A_2 ، A_3 ، A_4 ،... را چنان در نظر می‌گیریم که A_1 بین A و A_2، A_2 بین A_1 و A_3 ، A_3 بین A_2 و A_4 ، و غیره باشد. گذشته از این فرض می‌کنیم قطعات AA_1 ، A_1A_2 ، A_2A_3 ، A_3A_4 ،... مساوی یکدیگر باشند. در این صورت، میان این سری نقاط، همواره نقطهٔ معین A_n ی چنان موجود است که B بین A، A_n واقع شود.

6. Axiom of Continuity

ضمیمهٔ ۲
اصول موضوع برکهوف

این آکسیومها از «مجموعهٔ اصول موضوع هندسهٔ مسطحه (برمبنای مقیاس و نقاله)» جی. دی. برکهوف، وقایع سالانهٔ ریاضیات، جلد ۳۳، ۱۹۳۲[1]، با اجازهٔ وقایع سالانهٔ ریاضیات به طبع مجدد رسیده است.

I. اصل موضوع مقیاس خطی[2]: نقاط A، B، ... از هر خط l را می‌توان در تناظر (۱،۱) با اعداد حقیقی x، به طوری که به ازای جمیع نقاط A و B، $|x_B - x_A| = d(A,B)$ باشد، قرار داد.

II. اصل موضوع نقطه ـ خط[3]: یک و تنها یک خط مستقیم l شامل دو نقطهٔ مفروض P، Q، $(P \neq Q)$ است.

III. اصل موضوع مقیاس زاویه‌ای[4]: نیم خط های l، m، ... از هر نقطهٔ O را می‌توان در تناظر (۱،۱) با اعداد حقیقی $a \pmod{2\pi}$ چنان قرار داد که، اگر $A \neq O$ و $B \neq O$ نقاطی به ترتیب واقع بر l و m باشند، تفاضل $\angle AOB$ $a_m - a_l \pmod{2\pi}$ باشد. گذشته از این، اگر نقطهٔ B بر m در خط r ناشامل رأس O به طور پیوسته تغییر کند، عدد a_m نیز به طور پیوسته تغییر می‌کند.

IV. اصل موضوع تشابه[5]: اگر در دو مثلث، ΔABC، $\Delta A'B'C'$ و به ازای ثابت $k > 0$، $d(A',B') = kd(A,B)$، $d(A',C') = kd(A,C)$ و نیز $d(B',C') = kd(B,C)$، در این صورت نیز $\angle B'A'C' = \pm \angle BAC$، $\angle C'B'A' = \pm \angle CBA$، و $\angle A'C'B' = \pm \angle ACB$.

---

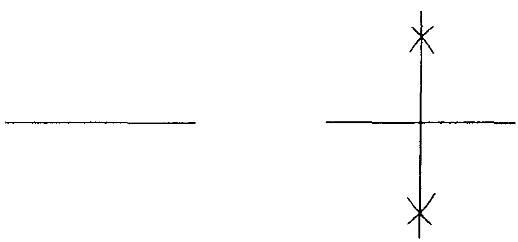
1. A Set of Postulates for Plane Geometry (Based on Scale and Protractor) G.D. Bir khoff, Annals *of Mathematics,* Vol, 33, 1932,

2. Postulate of Line Measure
3. Point - Line Postulate
4. Postulate of Angle Measure
5. Postulate of Similarity

ضمیمهٔ ۳
اشکال ترسیمات اساسی اقلیدسی

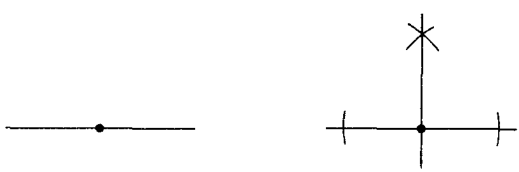
(a) (b)

انتقال قطعه خط



(a) (b)

تنصیف قطعه خط

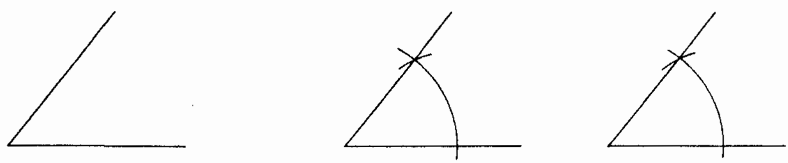


(a) (b)

رسم عمود بر یک خط از
نقطهٔ معینی واقع بر آن

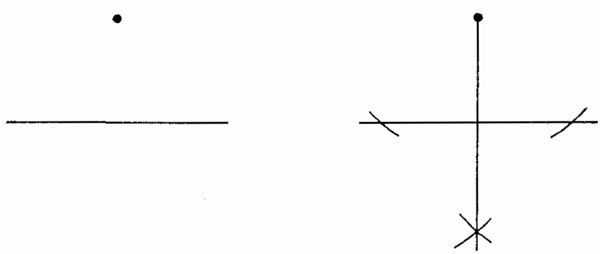
(a) (b)

رسم نیمساز یک زاویه (تنصیف زاویه)



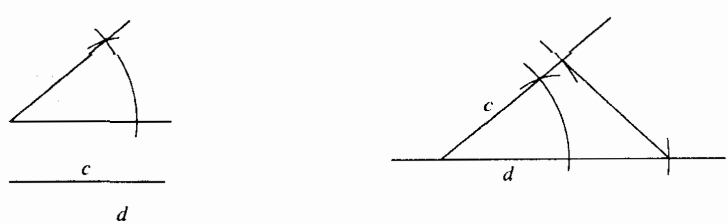
(a) (b)

رسم زاویه‌ای مساوی با یک زاویه



(a) (b)

رسم عمود از یک نقطه خارج یک خط بر آن

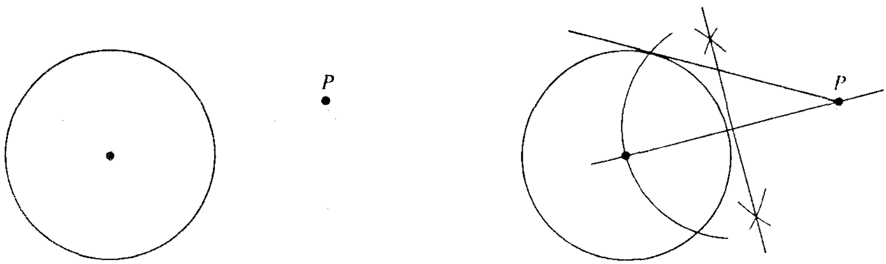


(a) (b)

رسم یک مثلث با معلوم بودن یک
زاویه و دو ضلع آن زاویه از آن

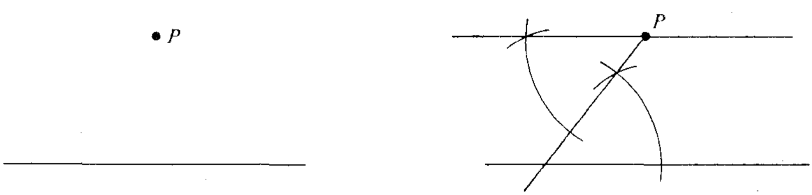
(a) (b)

رسم یک مثلث با معلوم بودن سه ضلع آن



(a) (b)

رسم مماس از یک نقطهٔ خارج یک دایره بر آن



(a) (b)

رسم خطی از نقطه‌ای به موازات خطی مفروض

ضمیمهٔ ۴
مفاهیمی منتخب از منطق

۱. جداول ارزش

نقیض	
p	$\sim p$
T	F
F	T

ترکیب عطفی (و)		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ترکیب شرطی (استلزام)		
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ترکیب فصلی (یا)		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

۲.صادق گزارهٔ مرکبی است که خواه مؤلفه هایش راست باشند خواه نه ، راست است.
امثلهٔ زیر مثال‌هایی از صادق اند:

$$p \vee \sim p$$

$$q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(p \wedge [p \rightarrow q]) \rightarrow q$$

۳.استدلال درست از طرح صادق پیروی می‌کند. نتیجهٔ یک استدلال راست است اگر آن استدلال درست باشد و اگر جمیع مقدمات آن راست باشند. اثبات استدلال درست دارای جمیع مقدمات راست است.

ضمیمهٔ ۵
قضایای منتخب از هندسهٔ اقلیدسی مسطحه

۱. اگر دو ضلع و زاویهٔ بین از مثلثی، به ترتیب، با دوضلع و زاویهٔ بین از مثلث دیگر همنهشت باشد، دو مثلث همنهشت‌اند.

۲. اگر دو زاویه و ضلع بین از مثلثی، به ترتیب، با دو زاویه و ضلع بین از مثلث دیگر همنهشت باشد، دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۳. اگر سه ضلع مثلثی، به ترتیب، با سه ضلع مثلث دیگر همنهشت باشد، دو مثلث همنهشت‌اند.

۴. قطعه خط واصل اوساط دو ضلع یک مثلث موازی ضلع سوم آن و طولش مساوی نصف طول ضلع سوم آن است.

۵. مجموع اندازه های زوایای داخلی مثلث 180° است.

۶. اندازهٔ زاویهٔ خارجی مثلث مساوی مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن زاویهٔ مثلث است.

۷. اگر دو زاویه از مثلثی، به ترتیب، با دو زاویه از مثلث دیگر همنهشت باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

۸. اگر یک زاویه از مثلثی با یک زاویه از مثلث دیگر همنهشت باشد و اضلاع آن زوایا متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۹. اگر اضلاع متناظر دو مثلث متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۱۰. ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مشابه با یکدیگر و مثلث اصلی تشکیل می‌دهد.

۱۱. اقطار متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند.

۱۲. میانهٔ ذوزنقه* طولی مساوی نصف مجموع طول های قاعده های آن دارد.
۱۳. زوایای مقابل متوازی الاضلاع همنهشت‌اند.
۱۴. دو قطر لوزی متعامدند.
۱۵. مجموع اندازه‌های زوایای داخلی n ضلعی $180^\circ(n-2)$ است.
۱۶. اگر دو چند ضلعی متشابه باشند ، در این صورت نسبت هر دو ضلع متناظر آن ها ثابت است.
۱۷. در یک دایره یا در دوایر همنهشت ، اوتار مساوی متساوی الفاصله از مرکزند.
۱۸. اگر یک چهار ضلعی در دایره‌ای محاط شود، زوایای مقابلش مکمل‌اند.
۱۹. خط واصل مراکز دو دایرهٔ متقاطع عمود منصف وتر مشترک آن دو دایره است.
۲۰. زاویهٔ محاط در یک نیم‌دایره** زاویهٔ قائمه است.
۲۱. زاویهٔ مرکزی دایره با کمان روبه رویش اندازه گیری می‌شود.
۲۲. اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف کمان روبه روی آن است.
۲۳. اندازهٔ زاویهٔ ظلّی نصف کمان روبه روی آن است.
۲۴. نسبت اندازهٔ قطاع یک دایره به اندازهٔ مساحت کل دایره مساوی نسبت درجه‌های واقع در آن زاویه به 360° است.
۲۵. اگر دو خط متوازی توسط قاطعی قطع شوند، زوایای متبادل داخلی حاصل همنهشت‌اند و زوایای متقابل حاصل همنهشت‌اند.

---

* قطعه خطی که اوساط دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند.
** زاویهٔ محاطی روبه رو به قطر

فهرست مراجع

ADLER, CLAIRE F. *Modern Geometry.* 2d ed. New York: McGraw-Hill, 1967.

ALBERT, ABRAHAM A., and SANDER, REUBEN. *An Introduction to Finite Projective Plane.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

ARTWICK, BRUCE A. *Applied Concepts in Microcomputer Graphics.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984.

BARNETTE, DAVID. *Map Coloring, Polyhedra, and the Four-Color Problem.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1984.

BARRY, EDWARD H. *Introduction to Geometrical Transformations.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1966.

BENSON, RUSSELL V. *Euclidean Geometry and Convexity.* New York: McGraw-Hill, 1966.

BERGAMINI, DAVID, and editors of Time-Life Books. *Mathematics.* New York: Life Science Library, 1970.

BLUMENTHAL, LEONARD M. *A Modern View of Geometry.* San Francisco: W. H. Freeman, 1961.

BULLARD, SIR EDWARD. "The Origin of the Oceans." *Scientific American*, September 1969, Vol. 221 (3).

CHINITZ, WALLACE. "Rotary Engines." *Scientific American*, February 1969, Vol. 220 (2).

CHRESTENSON, H. E. *Mappings of the Plane.* San Francisco: W. H. Freeman, 1966.

COOPER, LEON, and STEINBURG, DAVID. *Methods and Applications of Linear Programming.* Philadelphia: W. B. Saunders, 1974.

COURANT, RICHARD, and ROBBINS, HERBERT. *What Is Mathematics?* London: Oxford University Press, 1951.

COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry.* 2d ed. New York: Wiley, 1969.

COXETER, H. S. M. *Non-Euclidean Geometry.* 5th ed. Toronto: University of Toronto Press, 1965.

COXETER, H. S. M. *Projective Geometry*, 2d ed. Toronto: University of Toronto Press, 1974.

COXETER, H. S. M., and S. L. GREITZER. *Geometry Revisited.* New York: Random House, 1967.

DAVIS, DAVID R. *Modern College Geometry.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1954.

DEMEL, JOHN T., and MILLER, MICHAEL J. *Introduction to Computer Graphics.* Monterey: Brooks Cole Engineering Division, 1984.

DODGE, CLAYTON W. *Euclidean Geometry and Transformations.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1972.

DORWART, HAROLD L. *The Geometry of Incidence.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1966.

EGGLESTON, H. G. *Convexity.* Cambridge: Cambridge University Press, 1966.

ESCHER, M. C. *The Graphic Work of M. C. Escher.* New York: Ballantine, 1971.

EVES, HOWARD. *An Introduction to the History of Mathematics.* 5th ed. Philadelphia: Saunders College Publishing, 1983.

EVES, HOWARD. *A Survey of Geometry.* 2 vols. Boston: Allyn and Bacon, 1964–65.

FABER, RICHARD L. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry.* New York: Dekker, 1983.

FALCONER, K. J. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

FISHBACK, W. T. *Projective and Euclidean Geometry.* New York: Wiley, 1962.

FLEGG, H. GRAHAM. *From Geometry to Topology.* London: The English Universities Press Limited, 1984.

FOLEY, JAMES D., and VAN DAM, ANDRIES. *Fundamentals of Interactive Computer Graphics.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1982.

GANS, DAVID. *An Introduction to Non-Euclidean Geometry.* New York: Academic Press, 1973.

GANS, DAVID. *Transformations and Geometries.* New York: Appleton-Century-Croft, 1969.

GARNER, LYNN E. *An Outline of Projective Geometry.* New York: North Holland, 1981.

GOUDMAN, JACOB E. et al, eds. *Discrete Geometry and Convexity.* New York: New York Academy of Sciences, 1985.

GRAUSTEIN, WILLIAM C. *Introduction to Higher Geometry.* New York: Macmillan, 1930.

GRAY, JEREMY. *The Geometrical Work of Girard Desargues.* New York: Springer-Verlag, 1987.

GREENBERG, MARVIN J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries.* San Francisco: W. H. Freeman, 1980.

HILBERT, DAVID. *The Foundations of Geometry.* La Salle, Ill.: Open Court, 1980.

JOHNSON, DONOVAN A. *Paper Folding for the Mathematics Class.* National Council of Teachers of Mathematics, 1957.

JOHNSON, DONOVAN A., AND GLENN, W. H. *Topology, the Rubber Sheet Geometry.* New York: McGraw-Hill, 1960.

KÁRTESZI, F. *Introduction to Finite Geometries.* Amsterdam: North-Holland, 1976.

KLEE, VICTOR L., ed. *Convexity.* Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, Providence, R. I., 1963.

KLINGENBERG, WILHELM. *Riemannian Geometry.* Berlin: Walter de Gruyter, 1982.

KRAUSE, EUGENE F. *Taxicab Geometry.* New York: Dover Publications, 1986.

LAY, STEPHEN R. *Convex Sets and their Applications.* New York: Wiley, 1982.

LEVI, HOWARD. *Topics in Geometry.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1970.

LEVY, LAWRENCE S. *Geometry: Modern Mathematics via the Euclidean Plane.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1970.

LIETZMAN, WALTHER. *Visual Topology.* New York: American Ensevier, 1965.

LOCKWOOD, JAMES R., and RUNION, GARTH E. *Deductive Systems: Finite and Non-Euclidean Geometries.* Reston, V.: NCTM, 1978.

LYUSTERNIK, L. *Convex Figures and Polyhedra.* New York: Dover, 1963.

MANDELBROT, BENOIT B. *The Fractal Geometry of Nature.* New York: W. H. Freeman, 1983.

MANDELBROT, BENOIT B. *Les Objects Fractals.* Paris: Flammarion, 1984.

MARSHALL, GEORGE R. *Computer Graphics in Application.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1987.

MARTIN, GEORGE E. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.* New York: Springer-Verlag, 1982.

M. C. ESCHER, ART AND SCIENCE. Edited by H. S. M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose, and M. L. Teuber. Amsterdam: Ensevier Science Publishers, 1986.

MESERVE, BRUCE E. *Fundamental Concepts of Geometry.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1955.

MESERVE, BRUCE E., and IZZO, JOSEPH A. *Fundamentals of Geometry.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1969.

MOISE, EDWIN E. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963.

PATTERSON, E. M. *Topology*. New York: Interscience, 1959.

PEARSON, H. R., and SMART, J. R. *Geometry*. Boston: Ginn, 1971.

PEDERSEN, JEAN J. "Dressing Up Mathematics." *The Mathematics Teacher*, February 1968, Vol. 61 (2).

PEDOE, D. *A Course of Geometry for Colleges and Universities*. Cambridge: At the University Press, 1970.

PENNA, MICHAEL A. *Projective Geometry and its Applications to Computer Graphics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1986.

PERFECT, HAZEL. *Topics in Geometry*. London: Pergamon Press, 1963.

PERVIN, W. J. *Foundations of General Topology*. New York: Academic Press, 1964.

POLYA, GEORGE. *Mathematical Discovery*. New York: Wiley, 1981.

PRATT, M. M. "Finite Geometries." Master's thesis, San Jose State College, San Jose, California, 1964.

PRENOWITZ, WALTER, and SWAIN, HENRY. *Congruence and Motion in Geometry*. Boston: Heath, 1966.

RADEMACHER, H., and TOEPLITZ, O. *The Enjoyment of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 1957.

REULEAUX, FRANZ. *The Kinematics of Machinery*. Translated and edited by Alex. B. W. Kennedy. London: Macmillan & Co., 1876.

ROGERS, DAVID F., and ADAMS, J. ALAN. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. New York: McGraw-Hill, 1976

RYAN, PATRICK J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

SACCHERI, GIROLAMO. *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus*. New York: Chelsea, 1986.

SNAPPER, ERNST, and TROYER, ROBERT J. *Metric Affine Geometry*. New York: Academic Press, 1971.

TORRETTI, ROBERTO. *Relativity and Geometry*. Oxford: Pergamon Press, 1983.

TSUZUKU, TOSHIRO. *Finite Groups and Finite Geometries*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

TULLER, ANNITA. *A Modern Introduction to Geometries*. Princeton: Van Nostrand, 1967.

VALENTINE, F. *Convex Sets*. New York. McGraw-Hill, 1964.

WEEKS, JEFFERY R. *The Shape of Space*. New York: Dekker, 1985.

WEINER, JONATHAN. *Planet Earth*. Toronto: Bantam Books, 1986.

WILSON, ROBIN J. *Introduction to Graph Theory*. 2d ed. New York: Academic Press, 1979.

WOLFE, HAROLD E. *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. New York: Dryden Press, 1945.

WOODCOCK, ALEXANDER, and DAVIS, MONTE. *Catastrophe Theory*. New York: E. P. Dutton, 1978.

WYLIE, C. R. *Foundations of Geometry*. New York: McGraw-Hill, 1964.

YAGLOM, I. M., and BOLTYANSKII, V. G. *Convex Figures*. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1961.

پاسخ های تمرینات منتخب

تمرینات ۱.۱

۱. $۳^{۲} + ۴^{۲} = ۵^{۲}$ ۲. ۳۰ ۳. ۳۶ ۴. ضلع سوم مقدار درستی نیست.
۵. ۱۲،۵۲۵≈ km ۶. ۹/۱°≈ ۷. ۱۸،۰۰۰ مایل ۸. ۱۸،۰۰۰ مایل ۹. دروغ
۱۰. راست ۱۱. دروغ ۱۲. راست ۱۳. راست ۱۴. دروغ

تمرینات ۱.۲

۲. جمیع نقاط بر یک واقع‌اند. ۳. دو نقطهٔ متمایز بر بیش از یک خط قرار دارند. ۴. (۱) دقیقاً سه کتاب متمایز در دستگاه مان موجود است. (۲) دو کتاب متمایز در دقیقاً یک کتابخانه موجود است. (۳) جمیع کتب دستگاه‌مان در یک کتابخانهٔ ثابت قرار ندارد. (۴) دو کتابخانهٔ متمایز حداقل یک کتاب مشترک دارند.
۵. (۱) دقیقاً سه دانشجوی متفاوت وجود دارند. (۲) دو دانشجوی متفاوت در دقیقاً یک کمیته موجودند. (۳) جمیع دانشجوها در یک کمیتهٔ ثابت وجود ندارند. (۴) دو کمیتهٔ متفاوت حداقل یک دانشجوی مشترک دارند. ۶. بله ۷. نه ۸. بله
۹. هیچ خط ۱۰. دو ۱۱. نه ۱۲. نه ۱۳. نه

تمرینات ۱.۳

۱. (۱) در این هندسه دقیقاً سه خط متمایز موجود است. (۲) دقیقاً دو خط متمایز از یک نقطه می‌گذرد. (۳) جمیع خطوط این هندسه از یک نقطه نمی‌گذرند.

(۴) دو نقطهٔ متمایز بر حداقل یک خط واقع‌اند. ۳. هیچ یک ۴. (۱) کل تعداد گروه ها چهار است. (۲) هر زوج گروه دقیقاً در یک دانشجو مشترک است. (۳) هر دانشجو دقیقاً در دو گروه است. ۵. نه ۶. چهار ۷. هیچ ۱۱. آکسیوم ۲ ۱۲. (۱) کل تعداد درخت ها چهار است. (۲) هر زوج درخت دقیقاً یک ردیف مشترک دارد. (۳) هر ردیف شامل دقیقاً دو درخت است. ۱۳. نه ۱۵. یک

تمرینات ۱.۴

۱ - ۵. در تمرینات ۱ - ۵، شماره های ۱، ۲، ۳، و ۴ راست اند. ۶. (۱) در این هندسه حداقل یک کتابخانه موجود است. (۲) در هر کتابخانهٔ این هندسه دقیقاً سه کتاب موجود است. (۳) تمام کتاب های این هندسه در یک کتابخانه قرار ندارند. (۴) به ازای هر دو کتاب متفاوت این هندسه، دقیقاً کتابخانه‌ای شامل هر دو آن ها موجود است. (۵) هر دو کتابخانهٔ آن حداقل یک کتاب مشترک دارند. ۷. ۱، ۳، ۴

۸.

۷، ۶، ۴	۵، ۳، ۴	۳، ۲، ۴	۲، ۱، ۴
	۶، ۳، ۴	۵، ۲، ۴	۳، ۱، ۴
	۶، ۵، ۴	۷، ۲، ۴	۶، ۱، ۴
	۷، ۵، ۴		۷، ۱، ۴

تمرینات ۱.۵

۱. (۱) حداقل یک ردیف موجود است. (۲) هر ردیف آن دقیقاً سه درخت دارد. (۳) جمیع درخت های آن بر یک ردیف قرار ندارند. (۴) دقیقاً یک ردیف دارای یک درخت غیر واقع در ردیفی که شامل درختی از ردیف مفروض نیست موجود است. (۵) اگر درختی در ردیفی نباشد، دقیقاً درخت متفاوت دیگری در آن ردیف چنان موجود است که دو درخت مزبور در ردیفی مشترک نیستند. (۶) به استثنای مورد آکسیوم ۵، دقیقاً یک ردیف شامل هر زوج درخت متمایز موجود است.

۲. ۱، ۳، ۴ ۳. دو ۱۱. a. A' ؛ b. B' ۱۲. a. $\overleftrightarrow{A'P}$ ؛ b. $\overleftrightarrow{PB}$ ۱۳. BRB' و ASA'

۱۴. ۱، ۳، ۴ ۱۵. $\overleftrightarrow{A'T}$ ، $\overleftrightarrow{B'P}$ ، $\overleftrightarrow{B'R}$

تمرینات ۱.۶

۲. چهار ۳. دروغ ۴. راست ۵. راست ۶. a، b، و d ۷. a.۲۱ ؛ b.۳۱ ؛ d. ۵۷
۸. چهار ۹. ده، پنج ۱۰. هیچ ۱۱. بله ۱۲. دو ۱۳. چهار، چهار ۱۴. یک ۱۵. خیر
۱۶. دوازده، شش ۱۷. یک ۱۸. خیر

تمرینات ۱.۷

۸. II، ۵ ۹. I، ۱ و I، ۲ ۱۰. II، ۱-۴ ۱۱. بله ۱۲. بله ۱۳. بله ۱۴. بله

تمرینات مروری، فصل ۱

۱. اعضا ۲. km ۳۰،۳۶۱ ≈ .
گزاره‌های راست عبارت اند از: ۳، ۵، ۶، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۳۴، ۴۶، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۴، ۵۵.

تمرینات ۲.۱

۲. c ۳. ۱۳ ۴. −۵ ۵. $-\frac{۵}{۲}$ ۶. (۷، −۲) ۷. (۵، −۳) ۸. (۲، −۵)
۹. {(a , i) , (c , j) , (e , k)} ۱۰. تعریف نشده ۱۱. {(b , a) , (d , c) , (h , e)}
۱۲. {(i , b) , (j , d) , (k , h)} ۱۳. (x,y) → (x − ۳ , y − ۱)
۱۴. (x , y) → (x − ۳ , y − ۱) ۱۵. (x ,y) → (x + ۵ , y − ۲)
۱۶. (x,y) → (x − ۲ , y + ۳) ۱۷. خیر ۲۰. a = ۰ ، b = ۰

تمرینات ۲.۲

۳. $R_{۱}$ ۴. $R_{۲}$ ۵. R(۲۴۰) ۶. R(۱۲۰) ۷. خیر ۸.

	$R_{۱}$	I
$R_{۱}$	I	$R_{۱}$
I	$R_{۱}$	I

۱۰. بله ۱۱. $R_{۱}$ ، I ؛ I

۱۸. یک زیرگروه با هشت عضو؛ سه زیرگروه با چهار عضو؛ پنج زیرگروه با دو عضو؛ و یک زیرگروه با یک عضو

تمرینات ۲.۳

۱. بله   ۲. خیر   ۳. خیر   ۴. دوران صفر درجه

۵. زاویهٔ دوران می‌تواند °۱۸۰ باشد.   ۶. $R(A,\alpha+\beta)$

۸. دوران $360^\circ - \theta^\circ$

۹. قطعه موازی با یا عمود بر محور تقارن باشد.   ۱۰. بله

۱۱. همان تقارن و بعد از آن معکوس انتقال

۱۲. وقتی که قطعه خط موازی با یا عمود بر محور تقارن است.   ۱۳. خیر

تمرینات ۲.۴

۱. $(3, -5)$ ۲. $(8, 2)$ ۳. $(2, -13)$ ۴. $\left(1, -\frac{13}{2}\right)$

۵. $(-5, -9)$ ۶. $(0, 0)$ ۷. $y' = 2x' + 1$ ۸. $7x' - y' - \frac{101}{5} = 0$

۹. $2x' - 5y' - 16 = 0$ ۱۰. $3x' + 4y' + 2 = 0$ ۱۲. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$

۱۳. $(\sqrt{3}, 1)$ ۱۴. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

۱۵. $x-h=(x'-h)\cos\alpha+(y'-k)\sin\alpha,\ y-k=-(x'-h)\sin\alpha+(y'-k)\cos\alpha$

۱۶. $\left(\frac{3+7\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-7}{2}\right)$ ۱۷. $\left(\frac{17\sqrt{3}-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}-3}{2}\right)$ ۱۸. (-۵و۱۰)

۱۹. $y=y'-2;\ x=x'+5$ ۲۰. $y=y'+3;\ x=x'-4$

۲۱. $y=-y';\ x=-x'$ ۲۲. $y=-y';\ x=x'$

۲۳. $y=-x'\sin 30^\circ+y'\cos 30^\circ;\ x=x'\cos 30^\circ+y'\sin 30^\circ$

۲۴. $y=x'\sin 60^\circ-y'\cos 60^\circ;\ x=x'\cos 60^\circ+y'\sin 60^\circ$

۲۵. $y'=y+7;\ x'=x+4$ ۲۶. $y'=y-5;\ x'=x-1$

تمرینات ۲.۵

۱. (۱۴، ۱۴)   ۲. (۱۰، −۲۵)   ۳. (−۱۸، −۱)

۴. (−۲۱، −۱۱)   ۵. (۹، ۴)، (۶، ۷)   ۶. (−۴، −۵)، (۱، −۳)

۷. (۱، ۴)، (۳، −۲)   ۸. (۰، ۸)، (۱۶، −۲۰)

۹. (۰، −۳)، (۷، ۰)، (۵، −۵)   ۱۰. (۱، ۲)، (−۴، ۰)، (−۳، ۳)

۱۱. (−۲، −۲)، (−۳، −۳)، (−۴، −۴)، (−۵، −۵)

۱۲. (۱۵، ۴)، (۵، ۶)، (۱۰، ۳)، (۴۵، ۵)

۱۳. (−۲۵، ۲۰)، (−۱۰، −۱۵)، (−۲۵، −۱۰)، (−۵، ۱۵)، (−۳۰، ۲۵)

۱۴. (۴، −۵)، (−۳، −۲)، (−۲، −۵)، (۳، −۱)، (۵، −۶)

۲۱. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ۲۲. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

۲۳. (−۹، −۳)، (−۲، −۵)، (−۴، −۷)

۲۴. (−۱۲، −۱۵)، (۴، ۴۰)، (۱۶، ۷۰)

تمرینات ۲.۶

۷. خیر   ۸. خیر   ۹. خیر   ۱۰. ۳

۱۱. نتیجه می‌شود که a و b در معادلات عمومی انتقال صفرند، بنابراین انتقال عینیت است.

۱۲. تنها مرکز دوران نقطه‌ای لایتغیر است.

۱۴. خطوط را $y = 0$ و $y = mx$ فرض کنید.

تمرینات ۲.۷

۱. a. (−۲، ۱، ۷)؛ b. (۰، ۶، ۱۰)؛ c. (−۴، −۲، ۲)؛ d. (−۲، −۳، ۸)

۲. a. (۱، ۳، −۴)؛ b. (۳، ۲، −۱)؛   ۴. $\left(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, 4, 7\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

۵. (۳، ۸، −۱)   ۶. (−۲، −۴، ۳)   ۷. (−۲، ۳، ۹)

۸. (۷، ۴، −۲)   ۱۲. a. تقارن، تقارن دورانی، یا تقارن سرشی؛ b. تقارن، تقارن دورانی، یا تقارن سرشی.   ۱۳. $x' = x$، $y' = y$، $z' = 4 - z$

تمرینات ۲.۸

۱. ۴ cm   ۲. $\frac{۶}{۵}$ ۳. طول و سطح   ۷. اندازهٔ سطح در مربع نسبت تشابه ضرب می‌شود.   ۸. $\frac{\sqrt{۵۱}}{۶}$ ۹. مساوی اند.

۱۰. $\left(\frac{۱۵}{۴}،\frac{۹}{۴}\right)$ ۱۱. $\left(\frac{۲۰+۱۳\sqrt{۱۰}}{۵}،\frac{۵۰+۹\sqrt{۱۰}}{۵}\right)$

۱۳. بله

تمرینات مروری، فصل ۲

۱. $\{(۲،۶)،(۵،۷)،(۱،۳)\}$ = ؛ fg تعریف نشده‌است.   ۲. (۳،۳،۱-)

۶. تبدیلات   ۷. مثال نمونه: I، $R_۱$ ۸. ۴

۹. $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ ۱۰. $(x+۲)^۲$ ۱۱. $x'+y'=۱۲$

۱۲. $۲x' + y' = ۵$ ۱۳. انتقالات و تقارنات سر شی   ۱۴. ۳

۱۵. $(۱،\sqrt{۳})$ ۱۶. (۵،۱۲-،۳)   ۱۷. $\frac{۹}{۴}$

۱۸ - ۲۵. در مورد تمرینات ۱۸ - ۲۵، شماره‌های ۱۸،۲۲، و ۲۵ گروه‌اند.

تمرینات ۳.۱

۱. b، c، d، e، f، g   ۲. a، b   ۴. بله، خیر

۸. همسایگی یک بعدی باز باشعاع r نقطهٔ P مجموعهٔ نقاط داخلی قطعه خط به طول ۲r بانقطهٔ وسط P است. ۹. e. مجموعهٔ تهی، خود مجموعه، متمم مجموعه، f. مجموعهٔ تهی، کل صفحه، مجموعهٔ تهی. ۱۰. c. مجموعهٔ تهی، $\{(x,y,۰) : x \geq y\}$ ، متمم مرز. d. مجموعهٔ تهی، خود مجموعه، متمم مجموعه   ۱۱. a، هیچ یک   b. بسته   c. بسته؛ باز؛ باز؛ بسته؛ هیچ یک   d. بسته ؛ بسته؛ هیچ یک؛ بسته   e. هیچ یک ۱۲. a. a،d؛ b،a.b   ۱۵. نه بسته نه باز است. ۱۶. a. داخل ناحیه‌ای دایروی   b. سهمی و داخلش

تمرینات ۳.۲

۱. نیست ۲. هست ۳. هست ۴. نیست ۵. هست ۶. بی‌معنی زیرا رأس نقطهٔ گوشه‌ای است ۷. نیست ۸. نیست ۹. همه منظم ۱۰. رئوس نقاط گوشه‌ای‌اند. ۱۱. رأس نقطه‌ای گوشه‌ای است ۱۲. رئوس نقاط گوشه‌ای اند. ۱۳. a. ناحیهٔ مثلث شکل اشتراک سه نیم صفحهٔ پشتیبان مشخص شده بااضلاع مثلث مربوطه است. b. ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب اشتراک n نیم صفحهٔ پشتیبان مشخص شده با اضلاع چند ضلعی مربوط است. ۱۵. اگر خطی شامل حداقل یک نقطهٔ مرزی مجموعه اما نه نقاط داخلی آن باشد، خط پشتیبانی از مجموعهٔ محدب نقاطی است. اگر خطی خط پشتیبان مجموعهٔ محدبی از نقاط نباشد (اما شامل حداقل یک نقطهٔ مرزی باشد)، در این صورت شامل نقاط داخلی است. اگر خطی شامل حداقل یک نقطهٔ مرزی مجموعه نیز شامل نقاط داخلی آن باشد، در این صورت آن خط خط پشتیبان مجموعهٔ محدب نقاطی نیست.

تمرینات ۳.۳

۱. هست ۲. نیست، کران‌دار نیست ۳. نیست، کران دار نیست ۴. نیست، محدب نیست. ۵. نیست، کران‌دار نیست ۶. نیست، همواره کران‌دار نیست ۷. نیست، کران دارنیست ۸. هست ۹. نیست، بسته نیست ۱۰. نیست، ممکن است تهی باشد ۱۱. یک ۱۲. بله ۱۳. خیر ۱۵. قطعه خط ۱۹. سه از اولی و شش از دومی ۲۰. دویست B و صد H

تمرینات ۳.۴

۱. دستهٔ در و در، کتاب در قفسه ۲. ثُمنی را در فضا، با رأس در مبدأ و سه پهلوی واقع بر صفحات مرجع، پرمی‌کند.
۳. نه، باید از نقطهٔ مرزی آن مجموعهٔ محدب بگذرد. ۴. هست ۵. نیست
۶. نیست ۷. هست ۸. هست ۹. نیست ۱۰. نیست ۱۱. نیست
۱۳. جسم چهار وجهی شکل اشتراک چهار نیم فضای بستهٔ شامل پهلوهای چهار وجهی و رأس نه برآن پهلو است.

---
*Octant (یک هشتم)

تمرینات ۳.۵

۱. ناحیهٔ دایروی ۲.ناحیهٔ مثلث شکل ۳. ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب
۴. قطعه خط ۵.کل صفحه ۷. ناحیهٔ سهمی شکل ۸.کل صفحه
۹.زاویه و داخل آن ۱۰. ناحیهٔ مثلث شکل یا ناحیهٔ چهار ضلعی شکل
۱۱. بسته بندی یک کارتن کتاب؛گذراندن یک بستهٔ بزرگ نامنظم شکل از در ۱۳.بله
۱۴.بله ۱۶. خطی ونقطه‌ای نه واقع برآن ۱۸. زاویهٔ مزبور و داخلش
۲۰.ناحیه‌ای کروی ۲۱. ناحیه‌ای چهاروجهی شکل یا حالات خاص دیگر
۲۲.خیر

تمرینات ۳.۶

۱. $۱cm$ ، $\sqrt{۲}cm$ ۲. $۲cm$ ، $\sqrt{۱۳}cm$ ۳. $۱cm$ ، $۱cm$
۴. $۳\sqrt{۱۸۷}/۱۴cm$ ، $۷cm$ ۵. راست ۶.راست ۷. دروغ ۸. دروغ
۹. راست ۱۰. دروغ ۱۱. دروغ ۱۲. دروغ ۱۳.راست
۱۴. دروغ ۱۹. ۴π، $۸(\pi - \sqrt{۳})$ ۲۱. $\sqrt{۳}$

تمرینات ۳.۷

۳. فرض می‌کنیم $K = \{K_۱,K_۲,...,K_N\}$ ، N مجموعهٔ محدب نقاط، $N\geq ۳$ ، واقع درفضای دوبعدی، به‌طوری که هرسه مجموعه اشتراکی ناتهی داشته‌باشند، باشد. دراین صورت اشتراک جمیع این مجموعه‌ها ناتهی است. ۸. بله ۹. ۶ ۱۰.فرض می‌کنیم $S=\{P_۱,...,P_n\}$ مجموعهٔ متناهی نقاطی در یک صفحه باشد. دراین صورت نقطهٔ Aای چنان موجود است که هر نیم صفحهٔ بستهٔ حاصل از صفحهٔ گذرنده از A ای شامل حداقل $n/۳$ نقاط S است.

تمرینات مروری، فصل ۳

۱-۱۰. در تمرینات ۱ - ۴ شمارهٔ ۱ راست است. در تمرینات ۵ - ۱۰ شماره‌های ۶ و ۹ محدب‌اند.

۱۱. جمیع نقاط صفحه ۱۲. رئوس نقاط گوشه‌ای‌اند، هست. ۱۳. رأس نقطهٔ گوشه‌ای است. شعاع خط نیست ۱۴ - ۲۰ درتمرینات ۱۴ - ۲۰، شماره‌های ۱۴، ۱۶، و ۱۹ صحیح‌اند.

 .۲۱

۲۲. ناحیه‌ای مثلث شکل با سه نقطهٔ مربوطه به عنوان رئوس

۲۳. منشورو داخلش ۲۴. $۲\sqrt{۵}$cm

۲۵ - ۲۸. درتمرینات ۲۵ - ۲۸، شماره‌های ۲۵ و ۲۶ صحیح‌اند. ۲۹. بزرگتر از قطر K است. ۳۰. بله ۳۱. ۴ عدد از جنس P و ۱۲ عدد از جنس Q.

تمرینات ۴.۱

۱. ABC، H؛ ACH، B؛ AHB، C؛ CHB، A ۲. خیر ۳. خیر

۴. بله ۵. خیر ۶. دررأس زاویهٔ قائمه ۷. در مورد مثلث منفرج الزاویه

۸. سه ۹. بله ۱۰. $\approx$ ۴۱ ۱۱. $\approx$ ۸ ۱۲. $\approx$ ۳۹۵ ۱۳. $\approx$ ۴۳۰

۲۴. این قضیه نتیجهٔ این واقعیت که مجموعهٔ نقاطی که از آنها قطعه خط مفروضی به زاویهٔ مفروضی دیده‌می‌شود دایره‌ای گذرنده از نقاط انتهایی آن قطعه خط است، می‌باشد.

تمرینات ۴.۲

۱. خیر ۲. $\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BD}{DF}\cdot\frac{FE}{EA}=-1$ ۳. $\frac{CA}{AB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DE}{EC}=-1$

۴. $\frac{FA}{AE}\cdot\frac{EC}{CD}\cdot\frac{DB}{BF}=-1$ ۵. $\frac{AF}{FE}\cdot\frac{ED}{DC}\cdot\frac{CB}{BA}=-1$ ۱۰. $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BD}{DA}=1$

۱۵. بی‌نهایت ۱۶. یکی از ارتفاعات

تمرینات ۴.۳

۱. a. یک؛ b. یک؛ c. بی‌نهایت عدد ۲. ۶ ۳. ۳،۶

تمرینات ۴.۴

۱. میانه ۲. مرکز ثقل ۳. یک ۵. درمرکز ثقل

۶.خیر ۷.کوچکتر ۸. $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۴}{۵}$

تمرینات ۴.۵

۱. بله ۴. دونقطهٔ بروکارد، مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ هم میانه

۱۱. چهار نقطهٔ مربوطه رئوس یک مربع‌اند.

۱۲. چهار نقطهٔ مربوطه رئوس یک مربع‌اند.

تمرینات ۴.۶

۱. ۱/۶۱۸۰ ۲. $۱/۶۱۸ \approx \frac{۵۵}{۳۴}$ ۳. $۱/x^{۴}$ یا ۳x - ۵

۶. زوایای داخلی آن به اندازهٔ ۱۳۵ را دارند، و این عدد عامل ۳۶۰ نیست.

۷. ۲۸ ۸. ۱۸ ۹. $\frac{۴۵}{۲}$ ۱۰. ۲۱ ۱۷. ۴۵°

تمرینات مروری، فصل ۴

۱. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ۲. مرکز دایرهٔ محیطی ۳. ۳

۴. ۶ ۵. ۶ ۶. $\frac{CK}{KF} \cdot \frac{FA}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} = -۱$

۷. یک ۹. یک ۱۰. نیمساززاویه ۱۱. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و نقطهٔ هم میانه ۱۲. مرکز ثقل، تقارب ارتفاعات ۱۳. $\frac{۷۳}{۲}$

تمرینات ۵.۲

۱. بله ۲. بله ۳. بله ۴. نه ۵. بله ۶. بله ۷. بله ۸. نه

۲۰. $\frac{(c-a)\ (fg-eh) - (g-e)\ (bc-ad)}{(c-a)\ (h-f)-(g-e)\ (d-b)}$ ،

$$\frac{(d-b)}{(c-a)}\left[\frac{(c-a)\ (fg-eh)-(g-e)\ (bc-ad)}{(c-a)\ (h-f)-(g-e)\ (d-b)}\right]+\frac{bc-ad}{c-a}$$

تمرینات ۵.۳

۳. ۱،۲،۳،۴ جواب موجود است،یا جواب ندارد. ۴. ۱ جواب ۵. ۱ یا هیچ جواب
۶. ۱ یاهیچ جواب ۷. ۱ یاهیچ جواب ۸. ۱،۲، یاهیچ جواب ۹. ۴ جواب
۱۰. ۱،۲،۳،۴، یاهیچ جواب ۱۱. ۱،۲، یا هیچ جواب
۱۲. ۱ جواب ۱۳. ۱،۲، یا هیچ جواب ۱۴. ۱ جواب ۱۵. ۱ یا هیچ جواب
۱۶. ۱ یا هیچ جواب ۱۷. ۱ جواب ۱۸. ۱ یا هیچ جواب ۱۹. ۱ یا هیچ جواب

تمرینات ۵.۴

۱. هیچ یک ۲ ـ ۷. در تمرینات ۲ ـ ۷، اعداد ۲،۳،۷ جبری‌اند.
۸. x یک جواب $x^۴-۴x^۲+۲=۰$ است. ۹. بله، جواب $x^۳-۲=۰$ است.
۱۰. ۲.۵۱۹۸≈ ۱۲. تنها امکانات ±۱ ، $\pm\frac{۱}{۲}$ ، $\pm\frac{۱}{۴}$ ، $\pm\frac{۱}{۸}$ اند، و هریک از اینها را می‌توان برای نشان دادن این که جواب نیست، باتقسیم ترکیبی امتحان کرد.
۱۵. هیچ یک ۱۶. این عامل کسینوس یک زاویهٔ حاده را برابر ۱ می‌کند.
۱۷. معادله جواب گویا ندارد.

تمرینات مروری ، فصل ۵

۸. حل کننده فرض می‌کند که ترسیم انجام گرفته است، سپس شکل کامل شدهٔ حل را برای یافتن روابط لازم بین اعضای مجهول درشکل و واقعیات داده‌شده در مسألهٔ اصلی بررسی می‌کند.
۹. مثلثی مشابه با مثلث مطلوب می‌تواند با داده‌های مفروض رسم شود.
۱۰. مثلث اولیه‌ای که می‌تواند با اطلاعات مفروض بلافاصله رسم شود.
۱۳. بله ۱۴. $x^۴-۶x^۲+۴=۰$ ۱۵. نه
۱۷. کانون را روی هادی تا کنید.

تمرینات ۶.۱

۱. $\frac{۱۶}{۳}$ ۲. ۳ ۳. $\frac{۴}{۳}$ ۴. $\frac{۱}{۳}$ ۵. $\frac{۸}{۴۹}$

۶. $\sqrt{۵}/۳$ ۷. $\frac{۱۸۹}{۵۰}$ ۸. $\frac{n^۲}{m}$ ۹. نه

۱۰. خارج دایرهٔ انعکاس ۱۲. وقتی که دایره از مرکز انعکاس نمی‌گذرد؛ وقتی که دایره از مرکز انعکاس می‌گذرد.

۱۳. تصویر دایره‌ای شامل مرکز انعکاس است. ۱۴. (a) نه (b) نه

۱۶. تبدیل عینیت ۱۷. دو خط متقاطع متمایز، یک دایره و یک خط متقاطع، یا دو دایرهٔ متقاطع

۱۸. دایره‌ای داخل دایرهٔ انعکاس و هم مرکز باآن ۱۹. بردایرهٔ انعکاس

تمرین ۶.۲

۱. دو دایرهٔ متعامد، یک دایره و یک خط گذرنده از مرکز آن ۱۲. خطی ناگذرنده از مرکز انعکاس

تمرین ۶.۳

۱. $(\frac{۳}{۲۵}،\frac{۴}{۲۵})$ ۲. $(\frac{۱۲}{۲۵}،\frac{۱۶}{۲۵})$ ۳. $(۲،۲)$

۴. $(\frac{۹}{۲}،\frac{۹}{۲})$ ۵. $(۰،۳)$ ۶. $(۰،\frac{۴۸}{۹})$

۷. $(\frac{۵۶}{۲۵}،\frac{۸}{۲۵})$ ۸. $(\frac{۷}{۲}،\frac{۱}{۲})$ ۹. $(\frac{۵۰}{۱۷}،\frac{۴۷}{۱۷})$

۱۰. $(\frac{۷۰}{۱۷}،\frac{۴۲}{۱۷})$ ۱۱. $(\frac{۵۳}{۱۳}،\frac{۵۷}{۱۳})$ ۱۲. $(\frac{۳۸}{۱۳}،\frac{۴۷}{۱۳})$

۱۴. $۲x^۲+۲y^۲-۹x=۰$ ۱۵. $۵x^۲+۵y^۲-۹x=۰$

۱۶. $۲x^۲+۲y^۲+۹x+۹y=۰$ ۱۷. $۳۶x^۲+۳۶xy^۲-۸۱y^۲=۰$

۱۸. $۹y^۳+۹x^۲y-۸۱x^۲=۰$

۱۹. $x^۲+y^۲=\frac{۸۱}{۱۶}$ ۲۱. $\frac{۲-۵i}{۲۹}$

۲۲. $\frac{۸-۲۰i}{۲۹}$ ۲۳. $\frac{۳+۷i}{۵۸}$ ۲۴. $\frac{۱۲+۲۸i}{۵۸}$

۲۵. $\frac{۴-۸i}{۵}$ ۲۶. $\frac{۹-۱۸i}{۵}$ ۲۷. $\frac{۲۷+۹۹i}{۱۳۰}$

۲۸. $\frac{۴۸+۱۷۶i}{۱۳۰}$

تمرینات ۶.۴

۱. نقطهٔ دیگر نقطهٔ انگاری خواهدبود.

۳. مماس بر یک دایره از مرکز دایرهٔ عمود بر آن دایره در نقطهٔ تماس می‌گذرد.

۴. دایرهٔ محیط بر مثلث قائم‌الزاویه دارای وتر آن به عنوان قطر است.

۱۴. همان صفحه

۱۵. $(\frac{۹۸}{۱۴}،\frac{۴۹}{۱۴}،\frac{۱۴۷}{۱۴})$ ۱۶. $(\frac{۲۴}{۱۹}،\frac{۱۵}{۱۹}،\frac{۱۶}{۱۹})$

تمرینات مروری، فصل ۶

۱. نقاط واقع بر دایرهٔ انعکاس ۲. زمانی‌که دایرهٔ انعکاس است یا عمود بر دایرهٔ انعکاس

۳. $\frac{۲۵}{۴}$ ۴. $\sqrt{۶}$ ۵. نه

۶. عینیت ۷. همان دودایره ۹. نه ۱۰. هردو بر دایرهٔ انعکاس عمود باشند.

۱۳. $(\frac{۱۲}{۱۳}،\frac{۸}{۱۳})$ ۱۴. $۳'x^۲+۳'y^۲+۹'y=۰$

۱۵. $x'^۲+y'^۲=\frac{۱}{۹}$ ۱۶. $\frac{۸}{۳}+\frac{۸}{۳}i$

۱۷. اگر دودایرهٔ متعامد در نقطه‌ای واقع بر دایرهٔ سومی تقاطع کنند، و اگر یکی از آنها بر دایرهٔ سوم مزبور در آن نقطه مماس باشد، در این صورت دومین آنها بردایرهٔ سوم مزبور عمود است.

۱۸. اگر دایره‌ای از نقاط تقاطع دو دایره بگذرد، در این صورت بردایره‌ای که بر دو دایرهٔ متقاطع مزبور عمود می‌باشد عمود است. ۱۹. ($\frac{۱٦۲}{۱۴}$، $\frac{۲۴۳}{۱۴}$، $-\frac{۸۱}{۱۴}$)

تمرینات ۷.۱

۱. $A'B' = AB\cos\theta$	۲. مرکز بالا	۳. به طرف چپ
۴. خیر	٦. لاتغیرنیست	۷. لایتغیر
۸. لایتغیرنیست	۹. لایتغیر نیست	۱۰. لایتغیر نیست.
۱۱. لایتغیر نیست	۱۲. لایتغیر	۱۳. لایتغیر نیست.
۱۴. لایتغیر نیست	۱۵. لایتغیر نیست	۱٦. لایتغیر نیست.

تمرینات ۷.۲

۱. خواص تغییرناپذیر کمتری موجودند.

۲. ۱،۳،۴   ۳. ۱،۲   ۴. ۱،۳   ۵. ۲،۳   ٦. ۱،۲،۳   ۷. ۳   ۸. ۳

۹. ۳   ۱۱. دو   ۱۲. دو   ۱۳. دونقطه از آنها نقاط انگارند   ۱۴. بله

تمرینات ۷.۳

۱. ۳   ۲. ۳   ۳. اگر A و B دونقطهٔ متمایز از یک صفحه باشند، حداقل یک خط واقع بر هردو نقطه موجود است.   ۴. بریک خط حداقل چهار نقطه واقع‌اند.

۵. مثلث (سه‌ضلعی) شامل سه خط نامتقارب و نقاط تقاطع دو به دو آنهاست.

٦. سه نقطهٔ قطری چهارگوشه‌ای کامل نمی‌توانند واقع بریک استقامت باشند.

۷. سه نقطهٔ نه واقع بریک خط صفحه‌ای را مشخص می‌کنند.

۸. یک نقطه با دو خط متقاطع مشخص می‌شود.

۹. صفحه و خط واقع بریک نقطه ممکن است ملاقی نباشند.

تمرینات ۷.۴

۳. نقطه‌ای در بی‌نهایت ۴. هست ۵. هست ٦. هست ۷. هست
۸. هست

تمرینات ۷.٦

۱. آخرین مختص صفر است. ۲. a. (۱،۸،۳)؛ b. (۱، $\frac{۳}{۴}$، ۲)؛ c. (۱، ۱، ۴-)

۳. a. (۵،۲)؛ b. ($\frac{۳}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$-)؛ c. ($\frac{۵}{۳}$-، $\frac{۲}{۳}$)

۴. (۱، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۵}{۳}$)؛ (۱۰،۴،٦)؛ (۲۰،۸،۱۲) ۵. نه ٦. (۰، ۱-، ۱)
۷. $(b^3, -a^3, 0)$ ۸. $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
۹. $3X_1 + X_2 - 2X_3 = 0$ ۱۰. $x_1 - x_3 = 0$ ۱۱. (۱-، ۰، ۱)
۱۲. $x_1 - x_3 = 0$ ۱۴. (۱، ۲، ۰)

تمرینات ۷.۷

۱. ۲-، ۳، ۱ ۲. (۴-، ۵) ۳. (۴-، ۴-)

۴. $-\frac{۳}{۲}$ ۵. $\frac{۵}{۲}$ ٦. $\frac{۳}{۲۸}$ ۷. $\frac{۲۸}{۲۵}$

۸. (۱-، ۱، ۱)؛ (۱، ۱، ۱)؛ (۰، ۱، ۱)؛ (۱-، ۴، ۴)

۹. $\frac{۵}{۳}$ ۱۱. تشابه ۱۲. هیچ

۱۳. آفین ۱۴. انتقال ۱۵. مقیاس نامساوی، (۱،۴،۰،۳)، (۱،۴،۲،۰)، (۱،۰،۰،۰)، (۱،۰،۲،۳)
۱٦. انتقال؛ (۱،۳،۴،۴)، (۱،۳،۵،۳)، (۱،۲،۴،۳)، (۱،۲،۵،۴)
۱۷. پرسپکتیو سه نقطه‌ای؛ (۸،۱،۰،۱)، (۷،۱،۱،۰)، (۱،۰،۰،۰)، (٦،۰،۱،۱)

۱۸. تصویر؛ (۱،۴،۰،۱)، (۱،۴،۱،۰)، (۱،۴،۰،۰)، (۱،۴،۱،۱)
۱۹. تقارن؛ (۱،۱،۰،۱)، (۱،۱،-۱،۰)، (۱،۰،۰،۰)، (۱،۰،-۱،۱)
۲۰. برش؛ (۱،۴،۲،۵)، (۱،۱،۱،۴)، (۱،۰،۰،۰)، (۱،۳،۳،۱)
۲۱. مقیاس سراسری؛ (۲،۱،۰،۱)، (۲،۱،۱،۰)، (۲،۰،۰،۰)، (۲،۰،۱،۱)
۲۲. پرسپکتیو دونقطه‌ای؛ (۳،۱،۰،۱)، (۴،۱،۱،۰)، (۱،۰،۰،۰)، (۶،۰،۱،۱)
۲۳. تصویر؛ (۱،۱،-۲،۱)، (۱،۱،-۲،۰)، (۱،۰،-۲،۰)، (۱،۰،-۲،۱)
۲۴. تقارن، (۱،-۱،۰،۱)، (۱،-۱،۱،۰)، (۱،۰،۰،۰)، (۱،۰،۱،۱)

تمرینات ۷.۸

۱. حاصل ضرب یک تقارن و همان تقارن عینیت است. ۲. خیر
۳. دوران °۱۸۰ ۴. دوران °۱۲۰ ۵. دوران °۹۰
۸. پیچیدگی یک بعدی منحصر به فردی با دو زوج نقطهٔ متناظر معین می‌شود.
۹. بوش تصویری دو بعدی‌ای که چهار رأس یک چهار گوشه‌ای کامل را لایتغیر باقی می‌گذارد تبدیل عینیت است. ۱۱. خیر

تمرینات ۷.۹

۱. می‌تواند یک مخروطی فاسد باشد. ۲. اشکال ۷.۶، ۷.۲۳، ۷.۲۵، ۷.۲۶، ۷.۲۷، ۷.۲۹ ۳. خطوط ردیفهای نقاط واقع در بوش تصویر معرف مخروطی خطی خود نیز خطوطی از آن مخروطی‌اند.
۴. نقاط متناظر بانقطهٔ مشترک دوردیف نقاط معرف یک مخروطی خطی نقاط تماس آن دوردیف نقطه‌اند. ۵. $3x_1+x_2+x_3=0$ ۷. بله
۹. ۷۲۰ تبدیل شش شیء چون شش به شش درنظرگرفته‌شوند موجود است. نیمی از اینها به علت معکوس کردن ترتیب نقاط دوبرابر شده‌اند. از ۳۶۰ حالت باقی‌مانده شش نام متفاوت در مورد ۶۰ شش ضلعی موجود است.

تمرینات مروری، فصل ۷

۱-۳. در تمرینات ۱-۳، ۲و۳ لایتغیرند. ۳.۷

۸. چهار ضلعی کامل ۳ زوج رأس مقابل دارد.　　۹. ۳
۱۰. (۱،۵،-۱۷)　　۱۱. (۰،۳،-۴)　　۱۲. $\frac{۴}{۳}$
۱۳. $\frac{۲۸}{۴۵}$　　۱۴. ۲　　۱۵. (۱،۸،۹)
۱٦. $۲x_۱ - ۵x_۲ + ۷x_۳ = ۰$　　۱۷. ۹　　۱۸. بله
۱۹. مقیاس نامساوی؛ (۰،۳،۳،۴)، (۱،-۱،٦،۲)
۲۰. انتقال؛ (۰،۳،۱،۲)، (۱،-۲،۷،-۳)
۲۱. پرسپکتیو دونقطه‌ای؛ (۷،۳،۱،۲)، (۲،-۱،۲،۱)
۲۲. $۲X_۱ + ۳X_۲ + ۴X_۳ = ۰$

تمرینات ۸.۱

۱. دوران؛ $x \to \cot g\, x$　　۲. معکوس موردبحث دارای معکوسی است که تبدیلی پیوسته است.　　۴. طول قطعه خط؛ مساحت یک ناحیه؛ تعداد اضلاع چند ضلعی
۵. مجموعهٔ محدب مجموعهٔ مربوطی است که در مورد آن منحنی واصل دو نقطه می‌تواند همواره یک قطعه‌خط باشد.
٦ - ۲۱. در تمرینات ٦ ـ ۱۵، جوابها ٦،۷،۸،۹،۱۱،۱۳ اند. در تمرینات ۱٦ - ۲۱. جوابها ۱٦،۱۸،۱۹،۲۰ اند.　　۲۲. سکه　　۲۳. واشر　　۲۴. دکمه
۲٦ـ۲۹. در تمرینات ۲٦ ـ ۲۹، جواب ۲٦ است.

تمرینات ۸.۲

۱-۹. در تمرینات ۱ـ۴، جوابها a و ۴ اند. در تمرینات ٦ـ۹، جوابها ٦،۷،۸ اند.
۱۱. رأس C به شمار نیامده است. رأس E به شمار آمده‌است.
۱۲. فرد　　۱۳. چندگانه مربوط　　۱٦. بله

تمرینات ۸.۳

۱. نه. تصاویر همواره درناحیهٔ دایروی نیستند.　　۳. نه　　۴. نه
۵. بله　　٦. نه　　۷. بله　　۸. بله　　۹. نه
۱۰. نه　　۱۱. نه　　۱۲. نه　　۱۳. بله　　۱۴. نه

۱۵. بله　　۱۶. بله　　۱۷. نه　　۱۸. نه　　۱۹. نه
۲۰. نه　　۲۱. بله　　۲۲. نه　　۲۳. نه　　۲۴. بله
۲۵. نه　　۲۶. نه　　۲۷. نه　　۲۸. نه　　۲۹. نه
۳۰. نه　　۳۱. نه　　۳۲. نه　　۳۳. نه　　۳۴. نه

تمرینات ۸.۴

۲. صفر　　۳. منشور　　۴. فنجان چای　　۵. صندلی دسته‌دار اتاق غذا خوری
۶. صفحه بندسه حلقه‌ای　　۷. دکمه　　۹. چهار؛ چهار
۱۲. قضیه تنها درمورد کشورهای از لحاظ توپولوژیک معادل با ناحیهٔ دایروی به‌کار می‌رود.
۱۳. بیش از چهار کشور با نقطهٔ مشترک هریک رنگی جداگانه می‌خواهد.

تمرینات ۸.۵

۱. با سطرهای؛ ۶؛ ۱۲؛ ۲۰؛ ۳۰؛ ۱۲، ۲۰، ۳۰
۵. ۰　　۶. ۲　　۷. ۰　　۸. ۲-　　۹. ۴-
۱۰. ۵　　۱۱. ۷　　۱۲. غیرممکن　　۱۳. غیرممکن
۱۶. دوتکهٔ داخل یکدیگر قفل　　۱۷. نه. دوتکهٔ داخل یکدیگر قفل　　۱۸. نه. یک تکهٔ پیچ‌دار　　۱۹. سه

تمرینات مروری، فصل ۸

۱. نه　　۲. نه　　۳. بله　　۴. بله　　۵. بله
۶. ۲　　۷. بله　　۸. یک　　۹. ۲۰　　۱۰. ۲۰
۱۱. ۲　　۱۲. ۵　　۱۳. نه　　۱۴. $48cm^2$
۱۵. منحنی　　۱۶. نامنحنی　　۱۷. منحنی　　۱۸. منحنی بسته　　۱۹. نامنحنی

تمرینات ۹.۱

۳. اگر خط مستقیمی یکی از دوخط موازی را قطع کند، همواره دیگری را قطع نمی‌کند.

۴. خطوط مستقیم موازی بایک خط مستقیم همواره موازی یکدیگر نیستند.
۵. مثلثی که به ازای آن مجموع زوایای مورد بحث π رادیان باشد وجودندارد.
٦. یک زوج مثلث مشابه اما ناهمنهشت موجود نیست.
۷. یک زوج خط مستقیم به یک فاصله جدا درهر نقطه موجود نیست.
۸. گذراندن دایره‌ای از سه نقطهٔ غیرواقع بریک استقامت همواره ممکن نیست.
۹. a　　۱۰. AGJ، AIL، AKM　　۱۲. دو

تمرینات ۹.۲

۱. درغیراین صورت، دوخط متمایز می‌توانند هم موازی، هم متقاطع باشند.

تمرینات ۹.۳

۱. دو　　۲. مجموع اندازه‌های زوایا 2π خواهدبود.　　۴. ضلع مجاور
۵. نایکسان درهرنقطه　　٦. رأس　　۹. $70/371^\circ$
۱۰. مقدار نقص مثلث اصلی مساوی مجموع مقادیر نقص دومثلث کوچکتر است.

تمرینات ۹.۴

۱. مستطیل موجود خواهدشد.　　۲. در عمود مشترک‌شان
۳. بی‌نهایت　　۴. نه
۱۱. مجموع اندازه‌های زوایای رأس مساوی مجموع اندازه‌های سه زاویهٔ مثلثهای اصلی است.

تمرینات ۹.۵

۱. کوچکتراز　　۲. زوایای مشخص شده با اشعهٔ مربوطه و قطعه خط واصل نقاط مذکور همنهشت‌اند.　　۵. نه　　٦. نه　　۷. نوع نقطهٔ تقاطع عمودمنصفهای قطعه خطهای واصل نقاط　　۹. نقطهٔ ابر انگاری
۱۲. اوساط دوقطعه خط واصل ازواج نقاط

تمرینات ۹.۶

۱. هندسهٔ چهارخطی؛$PG(۲،۳)$ ۲. بله ۳. دایره ۴. ۸

۵. هنگامی که دوقطب یک خط‌اند. ۶. نه ۷. بله ۹. نه، نقاط انگاری موجود نیستند. ۱۰. کمتر از ۲π ۱۲. درقطبی نقاط مشترک شان

تمرینات ۹.۷

۱۰. نامتناهی ۱۱. $\overleftrightarrow{A'B'}$ تصویر دایرهٔ A ، B است، $\overleftrightarrow{B'C'}$ تصویر دایرهٔ B ، C است. دایرهٔ A' ، C' تصویر دایرهٔ A ، C است. هریک از سه تصویر مذکور برتصویر دایرهٔ اصلی عمود است.

تمرینات مروری، فصل ۹

۱. A ، B ، C ؛ B ، D ، F ؛ B ، E ، I ۴. ۲

۵. این که یکی از ازواج زوایای متناظر دریک رأس همنهشت باشند. ۷. ۲؛ نامتناهی ۸. رأس ۹. نامتقاطع ۱۰. ۲ ۱۱. مجموع اندازه‌های زوایای مذکور ۳۱۵°. ۱۳۰است. ۱۲. بله ۱۴. ۳ ۱۶. منحنیهای متساوی الفاصله ۱۷. ۴

فهرست لغات فنی

Abel, N. H.	آبل، ان. اچ.
Abelian group	گروه آبلی
Absolute	مطلق
Absolute geometry	هندسهٔ مطلق
Absolute value of vector	قدر مطلق بردار
Abul - Wefa	ابوالوفا
Adjacent trisectors	ثلث سازهای مجاور
Affine geometry	هندسهٔ آفینی
Affine transformations	تبدیلات آفینی
Algebraic numbers	اعداد جبری
Altitudes	ارتفاعات
American Mathematical Society	انجمن ریاضی آمریکا
Analysis	تحلیل
Analysis figure	شکل تحلیلی
Analytic geometry	هندسهٔ تحلیلی
Analysis situs	موقع تحلیلی
Angle (s):	زاویه(ها):
in elliptic geometry	در هندسهٔ تحلیلی
interior	داخلی
in inversive geometry	در هندسهٔ انعکاسی
of parallelism	توازی
sum for triangle	مجموع ... مثلث
trisectors	ثلث سازها
undefined term	عبارت تعریف نشدنی
Angle mirror	زاویهٔ آیینه‌ای

Antiparallel	ضد متوازی
Apollonius	آپولونیوس
Appel, K.	اپل، کی.
Archimedes	ارشمیدس
Area:	سطح:
axioms on	آکسیومهای
cyclic quadrilateral	چهارضلعی دوری
in hyperbolic geometry	در هندسهٔ هذلولوی
triangle	مثلث
Associative property	خاصیت شرکت‌پذیری
Auxiliary construction	ترسیم معین
Auxiliary triangle	مثلث معین
Axiom(s):	آکسیوم (ها):
of Birkhoff	آکسیوم برکهوف
complete	آکسیوم تمام
consistent	سازگار
of Euclid	اقلیدس
existence	وجود
Fano`s geometry	هندسهٔ فانو
of Forder	فوردر
four - line geometry	هندسهٔ چهارخطی
four - point geometry	هندسهٔ چهار نقطه‌ای
geometry of Desargues	هندسهٔ دزارگ
of Hilbert	هیلبرت
of Huntington	هانتینگتن
incidence	برخورد، تلاقی
independent sets	مجموعه‌های مستقل
modern geometry texts	کتب هندسهٔ جدید
of Pappus	پاپوس
part of Euclidean geometry	قسمتی از هندسهٔ اقلیدسی
of Pasch	پاش
of Peano	پئانو
projective geometry	هندسهٔ تصویری
three - point geometry	هندسهٔ سه نقطه‌ای
of Veblen	وبلن

of Young	یانگ
Axiomatic viewpoint	نظرگاه آکسیوماتیک
Axis:	محور:
of homology	همانندی
of perspective collineation	همراستایی پرسپکتیوی
of projectivity	بُوش تصویری
of spreading	گسترش
Axonometric projections	تصویرات محورسنجی
Babylonian geometry	هندسهٔ بابلی
Barbier`s theorem	قضیهٔ باربیه
Base	قاعده
Baseline	خط قاعده
Beltrami , E	بلترامی، ای
Between	بین
Biangle	دو زاویه‌ای
Bicontinuous transformations	تبدیلات دو پیوسته
Birkhoff, G. D.	برکهوف، جی. دی.
Bisecting angle	تنصیف زاویه
Bisecting segment	تنصیف قطعه‌خط
Bisector (s):	نیمساز، منصف(ها)
concurrence	تقارب
external	خارجی
perpendicular	عمود
ratio of opposite side	نسبت ضلع مقابل
Blaschke - Lebesque theorem	قضیهٔ بلاشکه لبسک
Blaschke`s theorem	قضیهٔ بلاشکه
Bolyai, J.	بولیای، جی.
Bonnesen	بنسن
Boundary	مرز
Boundary point	نقطهٔ مرزی
Bounded set	مجموعهٔ کران‌دار
Boundless	بی‌کران
Brahmagupta	برهماگوپتا
Brianchon, C. J.	بریانشون، سی.جی.

Brianchon point	نقطهٔ بریانشونی
Brianchon`s theorem	قضیهٔ بریانشون
Brocard, Henri	بروکارد، هنری
Brocard circle	دایرهٔ بروکاردی
Brocard`s points	نقاط بروکاردی
Brouwer, L. E. J.	بروئر، ال. ای. جی.
Brouwer fixed point theorem	قضیهٔ نقطهٔ ثابت بروئری
Brunn, H.	برون، اچ.
Bussey	بوسی
Caroms	شدآمدها
Cartesian coordinates	مختصات دکارتی
Catastrophe theory	نظریهٔ فاجعه
Catoptrica	منعکسات
Cayley. A.	کیلی، ای.
Center:	مرکز:
of dilation	بسط
of gravity	ثقل
of homology	همانندی
of inversion	انعکاس
of perspective collineation	همراستایی پرسپکتیوی
of perspectivity	بوش پرسپکتیوی
of projectivity	بوش تصویری
Centroid	برمیانه‌ها
Ceva	سوا
Ceva`s theorem	قضیهٔ سوا
Characteristic postulate	اصل موضوع ویژه
Circle (s):	دایره (ها):
of Apollonius	آپولونیوس
circumscribed	محیطی
in construction problem	در مسألهٔ ترسیمی
in elliptic geometry	در هندسهٔ بیضوی
in hyperbolic geometry	در هندسهٔ هذلولوی
image under dilation	تصویر ... تحت بسط
of inversion	انعکاس

nine - point	نه نقطه
orthogonal	متعامد
packing problems	مسائل بسته‌بندی
Secants and tangents	قاطعها و مماسها
Circular neighborhood	همسایگی دایروی
Circumcenter	مرکز دایرهٔ محیطی
Circumcircle	دایرهٔ محیطی
Circumscribed circle	دایرهٔ محیطی
Closed curve	منحنی بسته
Closed neighborhood	همسایگی بسته
Closed set	مجموعهٔ بسته
Closure property	خاصیت بستگی
Codomain	هم‌دامنه
Collapsing compass	پرگار هابط
College geometry	هندسهٔ دانشکده‌ای
Collinear	واقع بر یک استقامت
Collineation	همراستایی
Combinations	ترکیبات
Common perpendicular	عمود مشترک
Commutative group	گروه تعویض پذیر
Compass	پرگار
Complement	متمم
Complete	تمام
Complete quadrangle	چهارگوشه‌ای کامل
Complete quadrilateral	چهارضلعی کامل
Complex points	نقاط مختلط
Computer graphics	گرافیکهای کامپیوتری
Conchoid of Nicomedes	کانکوئید نیکومدس
Conclusion	نتیجه
Concurrence theorems	قضایای تقارب
Concurrent	متقارب
Concyclic	دوری
Conditional	شرطی
Cone	مخروط
Congruence:	همنهشتی:

in hyperbolic geometry	در هندسهٔ هذلولوی
of limiting curves	منحنیهای حدی
of omega triangles	مثلثهای امگا
of segments	قطعه خطها
of triangles	مثلثها
Conics	مخروطیّات
Conjugate	مزدوج
Conjugate points	نقاط مزدوج
Conjunction	ترکیب عطفی
Connected set	مجموعهٔ مربوط
Consistency	سازگاری
Constant of inversion	ثابت انعکاس
Constant width	ثابت پهنا
Constructible numbers	اعداد ترسیم‌پذیر
Construction (s):	ترسیم(ها):
auxiliary	معین
in axioms of Euclid	در آکسیومهای اقلیدس
basic	اساسی
with compass	با پرگار
conics	مخروطیات
in Euclidean geometry	در هندسهٔ اقلیدسی
harmonic conjugate	مزدوج توافقی
in hyperbolic geometry	در هندسهٔ هذلولوی
impossibility proofs	اثباتهای عدم امکان
inverse points	نقاط منعکس
one instrument	تك ابزاری
paper folding	با تاکردن کاغذ
philosophy of	حکمتِ
projectivity	بوش تصویری
regular polygons	چند ضلعیهای منظم
steps	مراحل
with straightedge	با خط‌کش نامدرج
Continental drift	جریان قاره‌ای
Continuity	پیوستگی
Continuously deformed	تغییر شکل پیوسته

Continuous transformation	تبدیل پیوسته
Contrapositive	عکس نقیض
Converse:	عکس (مستوی):
of Ceva`s theorem	قضیهٔ سوا
of Menelaus`theorem	قضیهٔ منلائوس
of theorem	قضیه
Convex	محدب
Convex body:	جسم محدب:
boundary	مرز
definition of	تعریف
perimeter of	محیط
in three - space	در فضای سه بعدی
in two - space	در فضای دو بعدی
Convex - concave lens	عدسیهای محدب - مقعر
Convex - convex lens	عدسیهای محدب‌الطرفین
Convex cover (see Convex hulls)	پوشش محدب (قشرهای محدب را ملاحظه کنید)
Convex hulls	قشرهای محدب
Convexity:	تحدب:
axiom on	آکسیوم
symposium on	کنفرانس راجع به
Convex polygonal regions	نواحی چند ضلعی شکل محدب
Convex polyhedral solid	جسم چند وجهی محدب
Convex set (s):	مجموعه(های) محدب:
connected sets	مجموعه‌های مربوط
convex hull	قشر محدب
definition of	تعریف
intersection of	اشتراک
Coordinate systems	دستگاههای مختصات
Copying an angle	رسم زاویه‌ای مساوی با یک زاویه
Corner point	نقطهٔ گوشه‌ای
Corner reflector	منعکس‌کنندهٔ گوشه‌ای
Correlation	هم نسبتی
Correspondence	تناظر
Corresponding points	نقاط متناظر
Coxeter, H. S. M.	کاکسی‌تر، اچ. اس. ام.

Cross intersections	تقاطعات تقاطعی
Cross joins	اتصالات تقاطعی
Cross ratio	نسبت تقاطعی
Cube	مکعب
Curve (s):	منحنی (ها):
Closed	بسته
in hyperbolic geometry	در هندسهٔ هذلولوی
meaning of	مفهوم
simple	ساده
simple closed	بستهٔ ساده
Cut	برش
Cyclic quadrilateral	چهار ضلعی دوری
Datum	داده
da Vinci, Leonardo	داوینچی، لئوناردو
Decagon	ده ضلعی
Defect	مقدار نقص
Defined terms	عبارات تعریف شده
Degree of connectivity	درجهٔ رابطیت
Desargues. G.	دزارگ. جی.
Desargues` configuration	ترکیب دزارگ
Desargues` finite geometry	هندسهٔ متناهی دزارگ
Desargues` theorem	قضیهٔ دزارگ
Descartes, R.	دکارت، ار.
Determinant	دترمینان
Diagonal lines	خطوط قطری
Diagonal points	نقاط قطری
Diagonal triangle	سه زاویه‌ای قطری
Diagonal trilateral	سه ضلعی قطری
Diameter:	قطر:
of earth	زمین
of set	مجموعه
Digon	دایگون
Dilatation (see Dilation)	گسترش (بسط را ملاحظه کنید)
Dilation	بسط

Directed segments	قطعه خطهای جهت‌دار
Direction cosines	کسینوسهای هادی
Direct motion	حرکت مستقیم
Discussion	بحث
Disjunction	ترکیب فصلی
Displacements	تغییر مکانها
Distance:	فاصله:
formula in analytic geometry	فرمول ... در هندسهٔ تحلیلی
in Poincaré model	در مدل پوانکاره
preserved in Euclidean geometry	محفوظ در هندسهٔ اقلیدسی
undefined term	عبارت تعریف نشده
Dividers	مقسمها
Dodecahedron	بیست وجهی
Domain	دامنه
Doubling the cube	تضعیف مکعب
Duality	ثنویت
Earth measure	اندازه‌گیری زمین
Egyptian geometry	هندسهٔ مصری
Einstein, A.	اینشتاین، ای.
Elation	تعالی
Elements	عضوها، اعضا
Ellipse	بیضی
Elliptic geometry	هندسهٔ بیضوی
Elliptic projectivity	بوش تصویری بیضوی
Equations:	معادلات:
glide reflection	تقارن سُرشی
inverse of transformation	معکوس تبدیل
inversion transformation	تبدیل انعکاس
motions of plane	حرکات سطح
motions of three - space	حرکات فضای سه بعدی
product of motions	حاصل ضرب حرکات
projective transformations	تبدیلات تصویری

reflection	تقارن
rotation	دوران
similarity transformations	تبدیلات تشابه
translation	انتقال
Equidistant curve	منحنی متساوی الفاصله
Equilateral triangle:	مثلث متساوی الاضلاع:
symmetries of	تقارناتِ
tessellation	صفحه‌بندی
Equivalence	تعادل
Equivalent polygons	چندضلعیهای معادل
Equivalent triangles	مثلثهای معادل
Eratosthenes	اراتستن
Erlanger program	برنامهٔ ارلانگر
Escher, M. C.	اشر، ام. سی.
Escher - type drawing	ترسیمات اشرگونه
Euclid	اقلیدس
Euclidean geometry	هندسهٔ اقلیدسی
Euclidean group	گروه اقلیدسی
Euclidean motions	حرکات اقلیدسی
Euler, L.	اولر، ال.
Euler characteristic	ویژگی اولری
Euler line	خط اولری
Euler`s formula	فرمول اولر
Even parity	زوجیت زوج
Even vertex	رأس زوج
Excircles	دوایر محاطی خارجی
Existence axiom	آکسیوم وجود
Extended Euclidean plane	صفحهٔ اقلیدسی گسترش یافته
Extension fields	میادین توسیعی
Exterior angle	زاویهٔ خارجی
Exterior point	نقطهٔ خارجی
External bisectors	نیمسازهای خارجی
Extreme and mean ratio	نسبت ذات وسط و طرفین
Extreme point	نقطهٔ نهایی
Extremum problems	مسائل اکسترمم

linear programming	برنامه‌ریزی خطی
Fundamental theorem:	قضیهٔ اساسی
of algebra	جبر
of projective geometry	هندسهٔ تصویری
Fundamental triangle	مثلث اساسی
Gamma point	نقطهٔ گاما
Gauss. k.	گوس، کارل.
Genus	جنس
Geometric transformation (see Transformation)	تبدیل هندسی (تبدیل را ملاحظه کنید)
Geometry :	هندسه (ی):
absolute	مطلق
abstract spaces	فضاهای مجرد
affine	آفینی
analytic	تحلیلی
college	دانشکده‌ای
convexity	تحدب
definition of	تعریف
demonstrative	برهانی
differential	دیفرانسیل
elliptic	بیضوی
Euclidean	اقلیدسی
finite	متناهی
history of	تاریخ
hyperbolic	هذلولوی
inversion	انعکاس
literal meaning of	معنی تحت اللفظی
non - Euclidean	نااقلیدسی
projective	تصویری
similarity	تشابه
Gergonne, J. D.	ژرگون، جی. دی.
Gergonne point	نقطهٔ ژرگونی
Gibbs, J. W.	گیبس، جی. دبلیو.
Glide reflection	تقارن سُرشی
Golden ratio	نسبت طلایی

Golden rectangle	مستطیل طلایی
Golden spiral	مارپیچ طلایی
Graph theory	نظریهٔ گرافها
Great circle	دایرهٔ عظیمه
Greek geometry	هندسهٔ یونانی
Greek problems	مسائل یونانی
Group:	گروه:
Abelian	آبلی
bicontinuous transformations	تبدیلات دو پیوسته
Euclidean	اقلیدسی
infinite	متناهی
motions in three - space	حرکات در فضای سه بعدی
projective transformations	تبدیلات تصویری
rotations	دورانات
similarities	تشابهات
similarities in three - space	تشابهات در فضای سه بعدی
subgroup	زیر گروه
transformations	تبدیلات
translations	انتقالات
Haken, W.	هاکن، دبلیو.
Half - plane	نیم صفحه
Half - space	نیم فضا
Hammer	همر
Harmonically related	به‌طور توافقی در ارتباط
Harmonic conjugate	مزدوج توافقی
Harmonic homology	همانندی توافقی
Harmonic net	شبکهٔ توافقی
Harmonic pencil	اشعهٔ توافقی (دستهٔ توافقی)
Harmonic property	خاصیت توافقی
Harmonic range	ردیف توافقی
Harmonic sets	مجموعه‌های توافقی
Hausdorff, F.	هاوس دورف، اف.
Helly, E.	هلی، ای.
Helly´s theorem	قضیهٔ هلی

Heron of Alexandria	هرون اسکندرانی
Heron´s formula	فرمول هرون
Heron´s theorem	قضیهٔ هرون
Hexagon	شش ضلعی
Hilbert, D.	هیلبرت، دی.
Homeomorphism	همسازمانی
Homogeneous coordinates	مختصات همگن
Homology	همانندی
Homothetic figures	اشکال متجانس
Homothety (see Dilation)	تجانس (بسط را ملاحظه کنید)
Huntington, E. V.	هانتینگتن، ای. وی.
Hyperbola	هذلولی
Hyperbolic geometry	هندسهٔ هذلولوی
Hyperbolic polarity	قطبیت هذلولوی
Hyperbolic projectivity	بوش تصویری هذلولوی
Icosahedron	بیست وجهی
Ideal line	خط انگاری
Ideal point	نقطهٔ انگاری
Identical sets	مجموعه‌های یکسان
Identity element	عضو عینیت
Identity transformation	تبدیل عینیت
If and only if	اگر و تنها اگر
If - then statement	گزارهٔ اگر - آنگاه
Implication	ترکیب شرطی (استلزام)
Impossibility proofs	اثباتهای عدم امکان
Incenter	مرکز داخلی
Incidence axioms	آکسیومهای وقوع (تلاقی)
Incircle	دایرهٔ داخلی
Inconsistent system	دستگاه ناسازگار
Independent sets	مجموعه‌های مستقل
Index	اندیس
Indirect argument	برهان خلف (غیر مستقیم)
Infinite groups	گروههای نامتناهی
Inscribed angle	زاویهٔ محاطی

Interior points	نقاط داخلی
Internal angle bisectors	نیمسازهای داخلی
Intersecting lines	خطوط متقاطع
Intersection	اشتراک، تقاطع
Into mapping	درگسترش
Invariant (s):	لایتغیر(ها):
dilation	بسط
distance	فاصله
group of motions	گروه حرکات
inversion	انعکاس
meaning of	مفهوم
motions in three - space	حرکات در فضای سه بعدی
projection	تصویر
topology	توپولوژی
Inverse	قلب
Inverse element	عضو معکوس
Inverse points	نقاط منعکس
Inverse tranformation	تبدیل معکوس
Inversion:	انعکاس:
analylic geometry of	هندسهٔ تحلیلی
applications of	کاربردهای
complex points	نقاط مختلط
equations for transformation	معادلات تبدیل
geometry of	هندسهٔ
in three dimensions	در فضای سه بعدی
proof by	اثبات توسط
transformation of	تبدیل
Inversive plane	صفحهٔ منعکس
Inverting theorems	قضایای عاکس
Involution	پیچیدگی
Involutory transformation	تبدیل پیچیدگی
Isogonal conjugates	مزدوجهای همزاویه
Isogonal lines	خطوط همزاویه
Isometry	همفاصله‌ای
Isomorphic	ایزومورفیک

Isosceles triangle	مثلث متساوی‌الساقین
Jordan, C.	جوردان. سی
Jordan curve theorem	قضیهٔ منحنی‌جوردان
Jung´s theorem	قضیهٔ جانگ
Kaleidoscope	کالی دسکوپ
Klein, F.	کلاین، اف.
Klein bottle	بطری کلاین
Klein model	مدل کلاین
Knots	گره‌ها
Lambert, J. H.	لامبرت، جی. اچ.
Lambert quadrilateral	چهارضلعی لامبرت
Lattice points	نقاط شبکه‌ای
Law of sines	قانون سینوسها
Least upper bound	کمترین کران زبرین
Lefschetz, S.	لفشتس، اس.
Left hand parallel	موازی سمت چپ
Lemoine, E.	لموین، ای.
Lemoine point	نقطهٔ لموینی
Length:	طول:
of curve	منحنی
of segment	قطعه خط
Limiting curve	منحنی حدی
Lindemann, T.	لیندمان، تی.
Line	خط
Linear perspective	پرسپکتیو خطی
Linear programming	برنامه‌ریزی خطی
Linear transformation	تبدیل خطی
Line conic	مخروطی خطی
Linkages	رابطها
Listing, J. B.	لیستینگ، جی. بی.
Lobachewsky, N.	لُباچوسکی، ان.
Locus (loci)	مکان هندسی (مکانهای هندسی)

Logic	منطق
Logically equivalent	منطقاً معادل
Longitude	طولی، طول جغرافیایی
Lord Kelvin	لرد کلوین
Magnus, L. J.	ماگنوس، ال. جی.
Map - coloring problem	مسألهٔ رنگ‌آمیزی نقشه
Mapmaking	نقشه‌برداری
Mapping	گسترش
Mascheroni, L.	ماشرونی، ال.
Mathematical induction	استقرای ریاضی
Matrix (ces):	ماتریس (ها):
homogeneous coordinates	مختصات همگن
multiplication	ضرب
for points	برای نقاط
reflection in three - space	تقارن در فضای سه بعدی
for transformations	برای تبدیلات
Maximum value	مقدار ماکزیمم
Maximum width	پهنای ماکزیمم
Medians	میانه‌ها
Menelaus	منلائوس
Menelaus´ theorem	قضیهٔ منلائوس
Metrica	معیار
Metric spaces	فضاهای متریک
Midpoint of segment	وسط قطعه خط
Miniature geometries (see Finite geometry)	هندسه‌های تنک مایه (هندسهٔ متناهی را ملاحظه کنید)
Minkowski, H.	مینکوفسکی، اچ.
Miquel, A.	میکوئل، ای.
Miquel point	نقطهٔ میکوئلی
Miquel´s theorem	قضیهٔ میکوئل
Model:	مدل:
for elliptic geometry	هندسهٔ بیضوی
for hyperbolic geometry	هندسهٔ هذلولوی
for independence	استقلال

Modern geometry	هندسهٔ جدید
Moebius, A. F.	موبیوس، ای. اف.
Moebius strip	نوار موبیوس
Mohr, C.	مور، سی.
Mohr - Mascheroni constructions	ترسیمات مور - ماشرونی
Morley, F.	مورلی، اف.
Morley´s theorem	قضیهٔ مورلی
Moscow Papyrus	پاپیروس مسکو
Motion (s):	حرکت (حرکات):
definition	تعریف
direct	مستقیم
equations in three - space	معادلات ... در فضای سه بعدی
group of	گروه
invariant properties	خواص لایتغیر
matrix for	ماتریس
opposite	معکوس، مقابل
of plane	سطح
product of	حاصل ضرب
rigid	صلب
sets of equations for	مجموعهٔ معادلات
of three - space	فضای سه بعدی
types of	انواع
Multiply connected	افزون مربوط
Mystic hexagram	شش پر عرفانی
Negation	نقیض
Neighborhood	همسایگی
Network	شبکه
Nicomedes	نیکومدس
Nine - point circle	دایرهٔ نه نقطه
Nonconvex sets	مجموعه‌های نامحدب
Non - Euclidean geometry	هندسهٔ نااقلیدسی
Nonintersecting lines	خطوط نامتقاطع
N - tuply connected	*N*گانهٔ مربوط
Number lines	خطهای عددی

Oceanography	اقیانوس نگاری
Octahedron	هشت وجهی
Odd parity	زوجیّت فرد
Odd vertex	رأس فرد
Omega triangle	مثلث امگا
On	بر
One - sided surface	سطح یک رویه
One - to - one correspondence	تناظر یک به یک
Onto mapping	برگسترش
Open neighborhood	همسایگی باز
Opent set	مجموعهٔ باز
Opposite motion	حرکت معکوس
Opposite sides	اضلاع مقابل
Opposite transformation	تبدیل معکوس
Optimization	بهینه‌سازی
Orientation	جهت
Orthocenter	تقاربات ارتفاعات
Orthocentric set	مجموعهٔ تقاربات ارتفاعات
Orthogonal circles	دوایر متعامد
Orthogonal curves	منحنیهای متعامد
Orthogonal trajectory	مسیر متعامد
Packing problem	مسألهٔ بسته‌بندی
Pairs of lines	ازواج خطوط
Paper folding	تا کردن کاغذ
Pappus	پاپوس
Papyruses	پاپیروسها
Parabola	سهمی
Parabolic geometry	هندسهٔ سهموی
Parabolic projectivity	بوش تصویری سهموی
Paradox	پارادکس
Parallel line (s):	خط (های) موازی:
construction	ترسیم
definition	تعریف

under dilation	تحت بسط
in Fano´s geometry	در هندسهٔ فانو
fifth postulate	اصل موضوع پنجم
in four - point geometry	در هندسهٔ چهار نقطه‌ای
in geometry of Desargues	در هندسهٔ دزارگ
in geometry of Pappus	در هندسهٔ پاپوس
in hyperbolic geometry	در هندسهٔ هذلولوی
by paper folding	با تاکردن کاغذ
Parity	زوجیّت
Partition of segment	تقسیم قطعه خط
Pascal, B.	پاسکال، بی.
Pascal line	خط پاسکال
Pascal´s mystic hexagram	شش پر عرفانی پاسکال
Pascal´s theorem	قضیهٔ پاسکال
Pasch, M.	پاش، ام.
Pasch´s axiom	آکسیوم پاش
Peano, G.	پئانو، جی.
Pencil of lines	دستهٔ خطوط
Pencil of rays	دستهٔ اشعه
Pentagon	پنج ضلعی
Perimeter	محیط
Period	تناوب
Permutation group symbols	علایم گروه تبدیل
Perpendicular	عمود
Perpendicular bisectors	عمود منصفها
Perspective	پرسپکتیو
Perspective collineation	همراستایی پرسپکتیوی
Perspective drawing	ترسیم پرسپکتیوی
Perspective from line	پرسپکتیو از خط (از خط پرسپکتیو)
Perspective from point	پرسپکتیو از نقطه (از نقطهٔ پرسپکتیو)
Perspectivity	بوش پرسپکتیوی
Peucellier´s cell	عاکس پسلیه
Pick´s theorem	قضیهٔ پیک
Plane:	صفحه (ی):
of inversive geometry	هندسهٔ منعکس

supporting	پشتیبان
tangent	مماس
undefined in Euclidean geometry	تعریف نشده در هندسهٔ اقلیدسی
Plane duality	ثنویت سطحی
Plane - filling patterns	نمونه‌های صفحه پرکن
Plane region	ناحیهٔ مسطح
Plane similarity	تشابه سطحی
Plate tectonics	زمین‌شناسی ساختمانی تصویری
Plato	افلاطون
Playfair, J.	پلی‌فیر، جی.
Playfair´s axiom	آکسیوم پلی‌فیر
Plimpton	پلیمتون
Plücker, J.	پلوکر، جی.
Poincaré, H.	پوانکاره، اچ.
Poincaré model	مدل پوانکاره
Point:	نقطه (ی):
analytic projective geometry	هندسهٔ تصویری تحلیلی
Euclidean geometry	هندسهٔ اقلیدسی
finite geometries	هندسه‌های متناهی
ideal	انگاری
Point at infinity	نقطه در بی‌نهایت
Point conic	مخروطی نقطه‌ای
Pointwise invariant	لایتغیر نقطه به نقطه
Polar	قطبی
Polarity	قطبیت
Polar reciprocation	تبادل قطبی‌ای
Pole	قطب
Pole of spreading	قطب گسترش
Polygons	چند ضلعیها
Polyhedron	چند وجهی
Poncelet, J. V.	پونسله، جی. وی.
Poncelet - Steiner construction theorem	قضیهٔ ترسیمی پونسله - اشتینر
Positive Brocard point	نقطهٔ بروکاردی مثبت
Postulates (see Axioms)	اصول موضوع (آکسیومها را ملاحظه کنید)
Pre - Greek mathematics	ریاضیات ماقبل یونانی

Product:	حاصل ضرب:
matrices	ماتریسها
transformations	تبدیلات
Projection	تصویر
Projective collineation	همراستایی تصویری
Projective geometry	هندسهٔ تصویری
Projective plane	صفحهٔ تصویری
Projective transformations	تبدیلات تصویری
Projectivities	بوش‌های تصویری
Proof:	اثبات:
analytic	تحلیلی
of conditional	شرطی
of invariance	تغییرناپذیری
by inversion	به وسیلهٔ انعکاس
step in construction problem	مرحلهٔ ... در مسألهٔ ترسیمی
synthetic	ترکیبی
of theorems	قضایا
Properties:	خواص:
invariant	لایتغیر
proof of invariance	اثبات تغییر ناپذیری
of sets of points	مجموعهٔ نقاط
Proportions	تناسبات
Proposition	قول جازم
Ptolemy´s theorem	قضیهٔ بطلمیوس
Pyramid	هرم
Pythagorean theorem	قضیهٔ فیثاغورث
Pythagorean triples	سه تایی‌های فیثاغورثی
Quadrangle	چهارگوشه‌ای
Quadrangular set	مجموعهٔ چهار ضلعی نسبها
Quadrilateral:	چهار ضلعی:
complete	کامل
cyclic	دوری
in hyperbolic geometry	در هندسهٔ هذلولوی
inscribed in circle	محاطی

Radius of inversion	شعاع انعکاس
Radon´s theorem	قضیهٔ رادن
Range of mapping	حوزهٔ گسترش
Range of points	ردیف نقاط
Ratio:	نسبت:
division of segment	تقسیم قطعه خط
extreme and mean	وسط و ذات طرفین
golden	طلایی
of similarity	تشابه
Rational numbers	اعداد گویا
Rays	اشعه
Rectangle	مستطیل
Reflection (s):	تقارن (ات):
equations for	معادلات
matrix for	ماتریس
in plane	در سطح
product of	حاصل ضرب
symmetries of triangle	تقارنات مثلث
in three - space	در فضای سه بعدی
Region	ناحیه
Regular decagon	ده ضلعی منتظم
Regular heptagon	هفت ضلعی منتظم
Regular hexagon	شش ضلعی منتظم
Regular Pentagon	پنج ضلعی منتظم
Regular point	نقطهٔ منتظم
Regular polygon	چند ضلعی منتظم
Regular polyhedra	چند وجهیهای منتظم
Regular tessellation	صفحه‌بندی منتظم
Relative consistency	سازگاری نسبی
Reuleaux, F.	رولو، اف.
Reuleaux polygons	چند ضلعیهای رولو
Reuleaux triangle	مثلث رولو
Rhind papyrus	پاپیروس ریند
Rhombus	لوزی

Riemann, B.	ریمان، بی.
Right hand parallel	موازی سمت راست
Right triangle	مثلث قائم (الزاویه)
Rigid motions	حرکات صلب
Robotics	روبات شناسی
Rotation (s):	دوران (ات):
definition of	تعریف
equations for	معادلات
matrix for	ماتریس
in plane	در صفحه
product of reflections	حاصلضرب تقارنات
symmetries of triangle	تقارنات مثلث
in three - space	در فضای سه بعدی
Rotatory reflection	تقارن دورانی
Rubber sheet geometry	هندسهٔ صفحه لاستیکی
Rusty compasses	پرگار زنگین
Saccheri, G.	ساکری، جی.
Saccheri quadrilateral	چهار ضلعی ساکری
Scaling	مقیاس
Screw displacement	تغییر مکان پیچی
Secants	قاطع (ات)
Self - conjugate point	نقطهٔ خود مزدوج
Self - dual	خود تثنیه
Self - inverse	خود منعکس
Self - polar triangle	مثلث خود قطبی
Semitangents	نیم مماسها
Separation	تفکیک
Set (s):	مجموعه (ها):
bounded	کران دار
closed	بسته
of constant width	پهنا ثابت
open	باز
of points	نقاط
width of	پهنای

Shear	برش
Sides	اضلاع
Similarity transformations	تبدیلات تشابه
Simple closed curves	منحنیهای بستهٔ ساده
Simple closed polygon	چندضلعی بستهٔ ساده
Simple closed surface	سطح بستهٔ ساده
Simple curve	منحنی ساده
Simple hexagon	شش ضلعی ساده
Simple polyhedron	چند وجهی ساده
Simplex method	روش ساده
Simply connected	ساده مربوط
Simson, R.	سیمسون، ار.
Simson line	خط سیمسون
Single elliptic geometry	هندسهٔ بیضوی منفرد
Sobyzk.	زوبیتسک
Space duality	ثنویت فضایی
Species	نوع
Sphere	کره
Sphere of inversion	کرهٔ انعکاس
Spherical neighborhood	همسایگی کروی
Spiral:	مارپیچ:
of Archimedes	ارشمیدس
golden	طلایی
Square	مربع
Square root	ریشهٔ دوم
Squaring the circle	تربیع دایره
Steiner, J.	اشتینر، جی.
Stereographic projection	تصویر استریوگرافیک
Straightedge	خط‌کش نامدرج
Subgroup	زیر گروه
Submatrix	زیر ماتریس
Subset	زیر مجموعه
Summit	رأس
Summit angles	زوایای رأسی
Superposition	انطباق

Supporting half - plane	نیم صفحهٔ پشتیبان
Supporting half - space	نیم فضای پشتیبان
Supporting line	خط پشتیبان
Supporting plane	صفحهٔ پشتیبان
Surface	سطح
Surface of one side	سطح یکرو
Sylvester, J.	سیلوستر، جی.
Symmedian	هم‌میانه
Symmedian point	نقطهٔ هم‌میانه‌ای
Symmetric property	خاصیت متقارن
Symmetries	تقارنات
Symposium on convexity	کنفرانس راجع به تحدب
Synthetic geometry	هندسهٔ ترکیبی
Tacit assumptions	مفروضات ضمنی
Tangent	مماس
Tangent cone	مخروط مماسی
Tangent plane	صفحهٔ مماسی
Tangent vectors	بردارهای مماسی
Tautology	صادق
Taxicab geometry	هندسهٔ تاکسی کاب
Tessellation	صفحه بندی
Tetrahedron	چهار وجهی
Theorem (s):	قضیه (ها):
conditionals	شرطیها
inverting	عاکس
part of Euclidean geometry	از هندسهٔ اقلیدسی
Three famous Greek problems	سه مسألهٔ معروف یونانی
Three - point geometry	هندسهٔ سه نقطه‌ای
Three - space	فضای سه بعدی
Topological invariant	لایتغیر توپولوژیک
Topology	توپولوژی
Torus	چنبره
Tracing puzzles	معماهای مسیر

Transferring a segment	انتقال قطعه خط
Transformation (s):	تبدیل (ات):
bicontinuous	دو پیوسته
computer graphics	گرافیکهای کامپیوتری
compatible	سازش پذیر
construction problems	مسائل ترسیمی
continuous	پیوسته
definition	تعریف
equations for plane motion	معادلات حرکت سطحی
Euclidean plane	سطح اقلیدسی
examples of	مثالهای
groups of	گروههای
in high school geometry	در هندسهٔ دبیرستان
identity	عینیت
inverse	معکوس
of inversion	انعکاس
involutory	پیچندگی
isometry	هم فاصله
linear	خطی
matrices for	ماتریسهای
opposite	معکوس
period of	تناوب
polar reciprocation	تعویض قطبی
product of	حاصل ضرب
projective	تصویری
similarity	تشابه
topological	توپولوژیک
Transitive property	خاصیت تسری پذیری
Translation (s):	انتقال (ات):
continuous	پیوسته
equations	معادلات
homogeneous coordinates	مختصات همگن
matrix for	ماتریس
plane motion	حرکت سطحی
product of reflections	حاصل ضرب تقارنات

three - space	فضای سه بعدی
Transversal	قاطع
Triangle (s):	مثلث (ها):
altitudes	ارتفاعات
angles of	زوایای
area	سطح
auxiliary	معین
bisectors	نیمسازها
circumcircle	دایرهٔ محیطی
congruent	هم نهشت
construction	ترسیم
equivalent	معادل
maximum area	بیشترین سطح
medians	میانه‌ها
perspective from a line	پرسپکتیو از خط
perspective from a point	پرسپکتیو از نقطه
properties of right triangle	خواص مثلث قائم(الزاویه)
Reuleaux	رولو
self - polar	خود قطبی
similar	مشابه
symmetries	تقارنات
in three - point geometry	در هندسهٔ سه نقطه‌ای
Triangular decomposition	تجزیهٔ مثلثی
Triangular right prism	منشور قائم مثلث القاعده
Trisecting the angle	تثلیث زاویه
Trisectors of angle	ثلث‌سازهای زاویه
Truth	صدق، راستی
Truth tables	جداول ارزش
Ultra - ideal point	نقطهٔ ابرانگاری
Undefined terms	عبارات تعریف نشده
Unit point	نقطهٔ واحد
Unit segment	قطعه خط واحد
U. S. Coast and Geodetic Survey	نقشه‌برداری ساحلی و زمین‌سنجی آمریکا
Universal cover	پوشش عمومی

Valid	معتبر
Vanishing point	نقطهٔ محو
Veblen	وبلن
Vector (s):	بردار (ها):
addition of	جمع
dot product	حاصل ضرب نقطه‌ای
equal	مساوی
fixed point theorem	قضیهٔ نقطهٔ ثابت
length or magnitude	طول یا مقدار
notation	علامت
for translation	انتقال
Vieta, F.	ویتا، اف.
Viewing plane	صفحهٔ منظر
von Staudt, K.	فن اشتادت، کی.
Wankel engine	موتور وانکل
Width of a set	پهنای مجموعه
Young´s geometry	هندسهٔ یانگ