



انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

# هندسه هذلولوی



ترجمه :

**اسد الله رضوی**

استاد دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

**بهزاد نجفی**

استادیار دانشگاه شاهد

# هندسه هذلولوی

ترجمه:

اسد الله رضوی

بہزاد نجفی

## فهرست مطالب

صفحه

عنوان

I	پیشگفتار مترجمین	
II	پیشگفتار چاپ دوم	
III	پیشگفتار چاپ اول	
۱	فصل ۱: فضاهاى پایه	
۱-۱	۱- یک مدل برای صفحه هذلولوی	
۲-۱	۲- کره ریمانی در $\bar{\mathbb{C}}$	
۳-۱	۳- مرز در بینهایت $IH$	
۱۹		
۲۳	فصل ۲: گروه موبیوس عام	
۲۳	۱-۲ گروه تبدیلات موبیوس	
۳۰	۲-۲ خواص متعددی بودن عمل $Möb^+$	
۳۷	۳-۲ نسبت ناهمساز	
۴۰	۴-۲ دسته بندی تبدیلات موبیوس	
۴۴	۵-۲ یک نمایش ماتریسی	
۴۹	۶-۲ انعکاس‌ها	
۵۵	۷-۲ هم‌دییسی اعضای $Möb$	
۵۸	۸-۲ حفظ $IH$	
۶۴	۹-۲ خواص تعدی $Möb(IH)$	
۶۸	۱۰-۲ هندسهٔ عمل $Möb(IH)$	
۷۷	فصل ۳: طول و فاصله در $IH$	
۷۷	۱-۳ مسیرها و عناصر طول قوس	
۸۴	۲-۳ عنصر طول قوس روی $IH$	
۹۴	۳-۳ فضاهاى متریک راهی	

۹۸	..... ۳-۴- از طول قوس تا متر
۱۰۷	..... ۳-۵- فرمول فاصله هذلولوی در $IH$
۱۱۲	..... ۳-۶- طولپایها
۱۱۸	..... ۳-۷- خواص متریکی $(IH, d_H)$
۱۲۷	..... فصل ۴: مدل‌های دیگر صفحه هذلولوی
۱۲۷	..... ۴-۱- مدل قرص پوانکاره
۱۴۱	..... ۴-۲- یک روش ساختن عمومی
۱۵۹	..... فصل ۵: تحدب، مساحت و مثلثات
۱۵۹	..... ۵-۱- تحدب
۱۶۹	..... ۵-۲- چند ضلعی‌های هذلولوی
۱۸۱	..... ۵-۳- تعریف مساحت هذلولوی
۱۸۷	..... ۵-۴- مساحت و فرمول گاوس- بونه
۱۹۲	..... ۵-۵- کاربردهای فرمول گاوس- بونه
۲۰۱	..... ۵-۶- مثلثات در صفحه هذلولوی
۲۰۹	..... فصل ۶: الگوهای نامسطح
۲۰۹	..... ۶-۱- الگوی هذلولیگون صفحه هذلولوی
۲۳۲	..... ۶-۲- فضاهای هذلولوی با ابعاد بالا
۲۴۱	..... پاسخ به تمرینات
۳۱۳	..... مراجع
۳۱۷	..... نمایه



## فهرست علائم

هدف از این بخش آن است که فهرستی از علائم مختلف که در طول کتاب بکار رفته آورده شود. فصل یا بخشی که علامت برای اولین مرتبه ظاهر شده در گروه ذکر شده است.

بخش	توضیحات	شماره صفحه	علامت
[1-1]	اعداد حقیقی	۲	$\mathbb{R}$
[1-1]	اعداد مختلط	۱	$\mathbb{C}$
[1-1]	$x =$ قسمت حقیقی عدد مختلط $z = x + iy$	۲	$\operatorname{Re}(z)$
[1-1]	$y =$ قسمت موهومی عدد مختلط $z = x + iy$	۱	$\operatorname{Im}(z)$
[1-1]	نرم یا هنگ عدد مختلط $z$ $\sqrt{x^2 + y^2} =$	۴	$ z $
[1-1]	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ نیم صفحه بالایی در $\mathbb{C}$	۱	$\mathbb{H}$
[1-1]	$\{z \in \mathbb{C} \mid  z  = 1\}$ دایره یکه در $\mathbb{C}$	۲	$S^1$
[2-1]	$\{1, 2, 3, \dots\}$ اعداد طبیعی		$\mathbb{N}$
[2-1]	مینیموم دو عدد حقیقی $x$ و $y$		$\min(x, y)$
[2-1]	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ کره ریمانی	۱۰	$\overline{\mathbb{C}}$
[2-1]	$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ اعداد صحیح		$\mathbb{Z}$
[2-1]	کره یکه در $\mathbb{R}^2$	۱۴	$S^1$
[2-1, 3-1, 2-4]	مرز توپولوژیکی $X$ در $\overline{\mathbb{C}}$		$\partial X$
[3-3, 2-5, 2-1]	قرص باز در $\overline{\mathbb{C}}$ به شعاع $\varepsilon$ و به مرکز $z$	۱۱	$U_\varepsilon(z)$
[2-1]	قرص باز در $\overline{\mathbb{C}}$ به شعاع $\varepsilon$ و به مرکز $\infty$	۱۱	$U_\varepsilon(\infty)$
[2-1]	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ خط حقیقی توسعه یافته	۱۴	$\overline{\mathbb{R}}$
[2-1]	بستار مجموعه $X$ در $\overline{\mathbb{C}}$		$\overline{X}$
[1-4, 3-1]	$\{z \in \mathbb{C} \mid  z  < 1\}$ قرص باز یکه در $\mathbb{C}$	۱۹	$\mathbb{D}$
[1-2]	مجموعه همسانریختی های $\overline{\mathbb{C}}$ که دایره را حفظ می کنند.	۲۳	$\operatorname{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$
[1-2]	گروه تبدیلات موبیوس	۲۸	$\operatorname{Möb}^+$
[3-2]	نسبت ناهمساز اعداد مختلط $z_1, z_2, z_3$ و $z_4$	۳۸	$[z_1, z_2; z_3, z_4]$

[6-2]	گروه موبیوس عمومی	۵۰	$Möb$
[7-2]	زاویه بین دو منحنی $C_1$ و $C_2$	۵۵	$angle(C_1, C_2)$
[8-2]	زیرگروه $Möb$ که $I\mathbb{H}$ را حفظ می‌کند.	۵۸	$Möb(I\mathbb{H})$
[8-2]	زیرگروه $Möb$ که $\overline{I\mathbb{R}}$ را حفظ می‌کند.	۵۹	$Möb(\overline{I\mathbb{R}})$
[8-2]	زیرگروه $Möb$ که $S^1$ را حفظ می‌کند.	۶۱	$Möb(S^1)$
[8-2]	زیرگروه $Möb$ که دایره $A$ را حفظ می‌کند.	۶۱	$Möb(A)$
[1-4, 8-2]	زیرگروه $Möb$ که $ID$ را حفظ می‌کند.	۶۳	$Möb(ID)$
[8-2]	زیرگروه $Möb^+$ که $I\mathbb{H}$ را حفظ می‌کند.	۵۹	$Möb^+(I\mathbb{H})$
[۲-۲]	گروه دوسوئی‌های از $X$ به $X$	۳۲	$bij(X)$
[۵-۲]	دترمینان تبدیل موبیوس $m$	۴۴	$det(m)$
[۵-۲]	مجدور اثر تبدیل موبیوس $m$	۴۵	$\tau(m)$
[۵-۲]	گروه ماتریس‌های $2 \times 2$ وارون‌پذیر روی $\mathbb{C}$	۴۹	$GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$
[۵-۲]	$\frac{GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})}{\{aI \mid a \in \mathbb{C} - \{0\}\}} =$	۴۹*	$PGL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$
[۵-۲]	گروه ماتریس‌های $2 \times 2$ با دترمینان یک روی $\mathbb{C}$	۴۹	$SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$
[۱-۳]	عنصر طول قوس عمومی	۷۹	$\rho(z)   dz  $
[۱-۳]	طول مسیر $f$ نسبت به $\rho(z)   dz  $	۷۹	$\ell_{\rho}(f)$
[۲-۳]	طول هذلولوی مسیر $f$ در $I\mathbb{H}$	۹۲	$\rho_{I\mathbb{H}}(f)$
[۳-۳]	یک فضای متریک	۹۵	$(X, d)$
[۴-۳]	مسیرهای از $x$ به $y$ در $I\mathbb{H}$	۹۸	$\Gamma(x, y)$
[۴-۳], [۷-۳]	فاصله هذلولوی بین نقاط $x, y \in I\mathbb{H}$	۹۹	$d_{I\mathbb{H}}(x, y)$
[۴-۳]	نیم صفحه بالایی بعنوان یک فضای متریک	۹۹	$(I\mathbb{H}, d_{I\mathbb{H}})$
[۶-۳]	گروه طولپایهای $(I\mathbb{H}, d_{I\mathbb{H}})$	۱۱۳	$Isom(I\mathbb{H}, d_{I\mathbb{H}})$
[۱-۴]	زیرگروه $Möb^+$ که $ID$ را حفظ می‌کند	۱۳۰	$Möb^+(ID)$
[۱-۴]	طول هذلولوی مسیر $f$ در $ID$	۱۳۱	$\ell_{ID}(f)$
[۱-۴]	مسیرهای از $x$ به $y$ در $ID$	۱۳۳	$\Theta[x, y]$
[۱-۴]	فاصله هذلولوی بین نقاط $x, y \in ID$	۱۳۳	$d_{ID}(x, y)$
[۱-۴]	قرص پوانکاره بعنوان یک فضای متریک	۱۳۳	$(ID, d_{ID})$
[۱-۴]	گروه طولپایهای $(ID, d_{ID})$		$Isom(ID, d_{ID})$
[۲-۴]	عنصر طول قوس هذلولوی روی قرص تحلیلی $X$	۱۴۵	$ds_X$

[۲-۴]	طول هندولی مسیری روی قرص تحلیلی	۱۴۵	$\ell_X(f)$
	$X$		
[۲-۴]	گروه طولپاهای $(X, d_X)$	۱۴۶	$Isom(X, d_X)$
[۲-۴]	انحنای	۱۵۸	$curv(z)$
[۱-۵]	پوشش محدب $X$	۱۶۴	$conv(X)$
[۳-۵]	مساحت هندولی $X$ در $H$	۱۸۲	$area_H(X)$
[۳-۵]	مساحت هندولی $X$ در $D$	۱۸۵	$area_D(X)$
[۱-۶]	$\mathbb{R}^2$ فرم مربعی روی $\mathbb{R}^2$	۲۱۴	$Q(x)$
[۱-۶]	گروه ماتریس‌هایی که فرم مربعی $Q(x)$ را حفظ می‌کنند.	۲۱۲	$O(Q)$
[۱-۶]	گروه ماتریس‌های $3 \times 3$ روی $\mathbb{R}$	۲۱۲	$GL_r(\mathbb{R})$
[۱-۶]	$\{x \in \mathbb{R}^r \mid Q(x) = c\} =$	۲۱۴	$S_c$
	مجموعه تراز $Q(x)$		
[۱-۶]	پارچه بالایی هندولی گون $-1$ $Q(x) =$	۲۱۵	$IU$
	در $\mathbb{R}^2$		
[۱-۶]	پارچه پایینی هندولی گون $-1$ $Q(x) =$	۲۱۵	$IL$
	در $\mathbb{R}^2$		
[۱-۶]	گروه ماتریس‌هایی که هم $Q(x)$ و هم $IU$ را حفظ می‌کنند.	۲۱۵	$O^+(Q)$
[۱-۶]	گرادیان $Q(x)$	۲۱۶	$\nabla Q(X)$
[۱-۶]	طول هندولی مسیر بطور قطعه‌ای $C^1$ ،	۲۱۷	$\ell_U(f)$
	$f$		
[۱-۶]	فاصله هندولی بین نقاط $u, v \in IU$	۲۲۰	$d_U(u, v)$
[۱-۶]	$O^+(Q)$		$O(2,1)$
[۱-۶]	زیرگروه $O(2,1)$ از عضوهای با		$SO(2,1)$
	دترمینان ۱		
[۱-۶]	گروه $O^+(Q) =$	۲۳۱	$Isom(IU, d_U)$
	طولپاهای $(IU, d_U)$		
[۲-۶]	$\mathbb{R}^{n+1}$ فرم مربعی روی $\mathbb{R}^{n+1}$	۲۳۴	$Q_n(x)$
	$-x_1^2 + \sum_{j=1}^n x_j^2 =$		
[۲-۶]	پارچه بالایی هندولی گون $-1$ $Q_n(x) =$	۲۳۷	$IU^n$
	در $\mathbb{R}^{n+1}$		
[۲-۶]	گروه ماتریس‌هایی که فرم مربعی $Q_n(x)$ را حفظ می‌کنند.	۲۳۵	$O(Q_n)$

[۲-۶]	گروه ماتریس‌هایی که هم $Q_n(x)$ و هم $IU^n$ را حفظ می‌کنند.	۲۳۵	$O^+(Q_n)$
[۲-۶]			$O(n,1)$
[۲-۶]	طول هذلولی مسیر بطور قطعه‌ای $C^1$ .	۲۳۶	$\ell_{IU^n}(f)$
[۲-۶]			$f$
[۲-۶]	فاصله هذلولی بین نقاط $u, v \in IU^n$	۲۳۶	$d_{IU^n}(u, v)$
[۲-۶]	طولپاهای $O^+(Q_n)$ ، گروه $(IU^n, d_{IU^n})$	۲۳۶	$Isom(IU^n, d_{IU^n})$
[۲-۶]	فشرده سازی یک نقطه‌ای $\mathbb{R}^n$	۲۳۸	$\bar{\mathbb{R}}^n$
[۲-۶]	گروه موبیوس عمومی که روی $\bar{\mathbb{R}}^n$ عمل می‌کند.	۲۳۸	$Möb_n$
[۲-۶]	گروه تبدیلات موبیوس که روی $\bar{\mathbb{R}}^n$ عمل می‌کند.	۲۳۸	$Möb_n^{-1}$
[۲-۶]	مدل نیم فضای بالایی فضای هذلولی $n$ بعدی	۲۳۹	$IH^n$
[۲-۶]	مدل گوی پوانکاره فضای هذلولی $n$ بعدی	۲۳۹	$ID^n$
[۲-۶]	زیرگروه $Möb_n$ که $IH^n$ را حفظ می‌کند.	۲۴۰	$Möb_n(IH^n)$
[۲-۶]	طول هذلولی مسیر بطور قطعه‌ای $C^1$ .	۲۳۹	$\ell_{IH^n}(f)$
[۲-۶]			$f$
[۲-۶]	فاصله هذلولی بین نقاط $x, y \in IH^n$	۲۴۰	$d_{IH^n}(X, y)$
[۲-۶]	گروه طولپاهای $Möb_n(IH^n)$ .	۲۴۰	$Isom(IH^n, d_{IH^n})$



## پیشگفتار مترجمین

کتابی که در پیش رو دارید ترجمه کتابی است به همین نام تألیف آقای جیمز آندرسون استاد دانشگاه سوتامپتون انگلستان. مطالب این کتاب چند دوره در آن دانشگاه تدریس شده است. همچنین ترجمه فارسی آن چند نیمسال در دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر و دانشگاه شاهد بعنوان درس اختیاری در دوره کارشناسی ارائه گردیده است. رویکرد این کتاب به هندسه هذلولوی بر اساس برنامه ارلانگن کلاین است که به هندسه بصورت عمل یک گروه روی یک فضا نگاه می‌کند و از این جهت با سایر کتب در این زمینه کاملاً متفاوت است. الگوی انتخاب شده برای هندسه هذلولوی نیم صفحه بالایی صفحه مختصات است و با توجه به قضایایی که در کتاب اثبات شده، مفاهیم مطرح شده را می‌توان در مورد سایر الگوها از جمله قرص پوانکاره و کلاین بکار برد. توضیحات بیشتر در این زمینه در پیشگفتارهای مولف آمده است.

در ترجمه این کتاب حفظ امانت شده است و مطالب کتاب بدون دخل و تصرف ترجمه شده است و در جاهایی که به نظر مترجمین اشتباه چاپی وجود داشته بدان اشاره شده است. بی‌شک این ترجمه دارای اشتباهات و اشکالات زیادی است که امید است خوانندگان محترم با اعلام نظر خود به مترجمین در غنای آن سهم باشند.

در اینجا لازم است از انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر که چاپ این کتاب را تصویب و به انجام رسانده‌اند و همچنین دانشجویان عزیزی که با انتخاب این درس در به بار نشستن این کتاب سهم به سزایی داشته‌اند و همکارانی که مشوق ما بوده‌اند تشکر و سپاسگزاری کنیم.

## پیشگفتار چاپ دوم

ورود شما را به چاپ دوم «هندسه هذلولوی» خوش آمد می‌گویم و از خواندن آن متشکرم. سعی کرده‌ام که ساختار اصلی کتاب را بطور نسبی حفظ کنم بطوریکه کماکان برای خوانندگانی که آن را بعنوان کتاب درسی یا خود آموز می‌خوانند قابل استفاده باشد. همچنین سعی کرده‌ام جنبه خودکفایی کتاب را حفظ کنم. چند تمرین جدید و کمی مطالب جدید به همه فصل‌ها اضافه شده است و در عوض چند تمرین و کمی از مطالب حذف شده است. در مجموع، فصل‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ اساساً همانطور که در چاپ اول بوده‌اند، باقی مانده‌اند. علاوه بر این تغییرات جزئی در مورد تمرین‌ها و مطالب، کتاب دو تغییر اساسی نیز پیدا کرده است. اول اینکه تمرکز فصل ۴ را بر مدل‌های مستوی صفحه هذلولوی بنا نهاده‌ام که از آنالیز مختلط بدست می‌آیند. این کار باعث شده است که مطالب پیشرفته‌تری از آنالیز مختلط مطرح شود ولی نه آن اندازه که جنبه خودکفایی کتاب تهدید شود. سعی کرده‌ام ارتباط بین هندسه هذلولوی مسطح با آنالیز مختلط را روشن‌تر کنم.

دوم این که فصل ۶ را کاملاً عوض کرده‌ام. موضوعات مربوط به زیرگروه‌های گسسته  $Möb(II)$  برداشته شده است. بجای آن مدل هذلولوی گون صفحه هذلولوی معرفی شده است. متأسفانه احساس نکردم که جا دارم به مدل کلاین نیز بطور مبسوط پردازم و لذا بوسیله مدل کلاین پلی بین قرص پوانکاره و مدل هذلولوی گون زده‌ام ولی این کار توسط دیگران انجام شده است. فصل ۶ کتاب را با نگاهی کوتاه به هندسه هذلولوی گون از بعدهای بالا به پایان رسانده‌ام.

اصولاً مطالب مورد نیاز برای خواندن کتاب نسبت به چاپ اول آن تغییر نکرده است. این کتاب اساساً برای دانشجویان دوره کارشناسی سال‌های سوم و چهارم نوشته شده است که مقداری ریاضیات حسابی (یک متغیره و چند متغیره) خصوصاً تعریف طول قوس، انتگرالگیری نواحی فضای اقلیدسی و قضیه تغییر متغیر، قدری آنالیز خصوصاً پیوستگی، مجموعه‌های باز و بسته در صفحه، اینفیموم و سوپریموم و قدری مطالب اصلی آنالیز مختلط از جمله حساب اعداد مختلط  $\mathbb{C}$  و اصول توابع تحلیلی خوانده‌اند.

مایلم این پیشگفتار را با اضافه کردن قدردانی به فهرست کسانی که در پیشگفتار چاپ اول آن آورده شده به پایان برم. لازم می‌دانم از کارن پورت و یک در موسسه اشپرینگر بخاطر این که به اینجانب فرصت دادند که این چاپ دوم را بنویسم و صبر و بردباری خرج دادند تشکر کنم. من به تدریس درس هندسه هذلولوی در دانشگاه سوتامپتون ادامه داده‌ام و در آنجا این کتاب اساس کار بوده است. مایلم از دانشجویانی که بخشی از این درس در

چند سال گذشته بودند و اشتباهات اتفاقی را تذکر داده‌اند تشکر کنم. البته اشتباهاتی که مانده است از اینجانب است. لازم می‌دانم از همسرم باربارا به خاطر تحمل و بردباری که یک بار دیگر در مراحل نهایی نوشتن کتاب بخرج داد، سپاسگزاری کنم.

## پیشگفتار چاپ اول

آنچه در دست دارید مقدمه‌ای بر مبانی هندسه هذلولوی در صفحه است. نوشتن این کتاب مشکل بود نه به خاطر این که مطالبی نداشته‌ام که در کتاب بیاورم بلکه بیشتر بخاطر اینکه مرتب به مطالبی برخورد می‌کردم که احساس می‌کردم باید در یک متن مقدماتی آورده شود. اعتقاد دارم آنچه از روند نوشتن تراوش می‌کند احساس خوبی برای هندسه هذلولوی بدست می‌دهد.

این کتاب بعنوان یک متن درسی یا بیشتر یک کتاب خودآموز و شاید یک درس خواندنی جهت‌دار نوشته شده است. به همین علت من جواب همه تمرین‌ها را آورده‌ام. سعی کرده‌ام تمرین‌ها را طوری انتخاب کنم که پوشش معقولی برای انواع محاسبات و اثبات‌ها باشند و مطالب را بهتر در ذهن بنشانند. خواننده باید احساس آزادی کند در اینکه چگونه تمرین‌های خود را از نظر اثبات و محاسبات تنظیم و از سایر منابع استفاده کند. من کوشش کرده‌ام که متن تا حد ممکن خودکفا باشد و حتی‌المقدور از محاسبات ریاضی کمتر استفاده شود. کتاب برای یک دانشجوی سال سوم و چهارم نوشته شده که مقداری ریاضیات عمومی خصوصاً تعریف طول قوس، انتگرالگیری روی نواحی در فضای اقلیدسی، قضیه تغییر متغیر، مقداری آنالیز بویژه پیوستگی، مجموعه‌های باز و بسته در صفحه، اینفیموم و سوپریموم، خواننده باشد و همچنین با اعداد مختلط، همانقدر که در اغلب کتاب‌ها درباره صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  گفته می‌شود آشنا باشد و لازم است که درس آنالیز مختلط را گرفته باشد و همچنین مقداری با جبر مجرد آشنا باشد. چون ما فقط از مطالب بسیار پایه‌ای نظریه گروه‌ها استفاده می‌کنیم.

هندسه نااقلیدسی در کل و هندسه هذلولوی بخصوص، بخشی از ریاضیات است. که تاریخ جالبی دارد که همه بوسیله محققینی از سراسر دنیا به طور فعال مطالعه می‌شود. یک دلیل اینکه جذابیت هندسه هذلولوی تداوم دارد آن است که حوزه‌های مختلفی شامل آنالیز مختلط، جبر مجرد، نظریه گروه‌ها، نظریه اعداد، هندسه دیفرانسیل و توپولوژی با بعد پایین و حوزه‌های فراوان دیگر در ارتباط با هندسه هذلولوی می‌باشند.

این کتاب یک کتاب مقدماتی به صورت دائرةالمعارف در مورد هندسه هذلولوی نیست، بلکه در عوض تنها یک نیم‌رخ آن است. به ویژه می‌خواستم یک کتاب هندسه هذلولوی بنویسم که در آن مفروضات کمی فرض شده باشد و هرچه بیشتر از دیدگاه کلاین به هندسه منبث شود که از این منظر هندسه هذلولوی، مطالعه کمیاتی است که تحت یک گروه ناوردا می‌ماند. در نتیجه نمی‌خواستم بدون داشتن یک احساس معقول، صرفاً طول



قوس هذلولوی یا گروه طولپاهای هذلولوی روی کاغذ بیایورم بلکه در عوض می‌خواستیم تا حد ممکن مطالب به طور طبیعی ظاهر شوند. فکر می‌کنم که این کار را در این کتاب انجام داده‌ام.

مطالب زیادی وجود دارد که آنها را در کتاب نیآورده‌ام، از جمله مدل‌های کلاین و هذلولی‌گون برای صفحه هذلولوی. همچنین اشاره‌ای به تاریخ هندسه هذلولوی کرده‌ام و برای تعریف صفحه هذلولوی رویکرد اصل موضوعی را انتخاب نکرده‌ام. یک دلیل برای این حذفیات این است که هم اکنون تعدادی کتاب عالی هم در مورد تاریخ هندسه هذلولوی و هم در مورد رویکرد اصل موضوعی آن وجود دارد و احساس من این بود نمی‌توانم چیزی به آنچه انجام شده اضافه کنم. ادبیات گسترده‌ای در مورد هندسه هذلولوی وجود دارد. خواننده علاقه‌مند برای مطالعه بیشتر به فهرست منابع در انتهای کتاب هدایت شده است.

حال به ذکر خلاصه‌ای کوتاه از رویکرد انتخاب شده در این کتاب می‌پردازیم. ابتدا یک مدل هندسه هذلولوی؛ یعنی مدل نیم صفحه بالایی  $\mathbb{H}$  را توسعه می‌دهیم و آنچه منظور ما از خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  است، تعریف می‌کنیم. سپس تلاش می‌کنیم یک گروه از تبدیلات  $\mathbb{H}$  تعیین کنیم که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی ببرد و این کار موجب می‌شود که اوقات ما صرف مطالعه گروه  $Möb^+$  از تبدیلات هذلولوی و گروه تبدیلات هذلولوی عام  $Möb$  شود.

بعد از تعیین زیرگروه  $Möb(\mathbb{H})$  از  $Möb$  که  $\mathbb{H}$  را حفظ می‌کند، یک عنصر طول قوس ناوردا روی  $\mathbb{H}$  بدست می‌آوریم. یعنی وسیله‌ای برای محاسبه طول هذلولوی یک مسیر  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  بدست می‌آوریم بطوریکه طول هذلولوی یک مسیر تحت عمل  $Möb(\mathbb{H})$  ناوردا است. این بدان معنی است که طول هذلولوی مسیر  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  برابر با طول هذلولوی مسیر انتقال داده شده آن  $\gamma \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  به ازای هر عضو  $\gamma$  در  $Möb(\mathbb{H})$  باشد. حال می‌توانیم یک متر طبیعی روی  $\mathbb{H}$  بر حسب کوتاه‌ترین طول یک مسیر که دو نقطه را به هم وصل می‌کند، تعریف کنیم.

بعد از کند و کاو در محاسبات مربوط به طول هذلولوی به بحث تحذب و چند ضلعی هذلولوی و سپس مثلثات چندضلعی‌ها در صفحه هذلولوی می‌پردازیم و سه قاعده اساسی مثلثات در صفحه هذلولوی را بدست می‌آوریم. همچنین نشان می‌دهیم که چگونه مساحت هذلولوی را محاسبه کنیم و فرمول گوس-بونه را در مورد چند ضلعی‌های هذلولوی بیان و اثبات می‌کنیم که مساحت هذلولوی یک چند ضلعی را بر حسب زوایای داخلی آن بدست

می‌دهد. در طول این تحلیل‌ها مدل‌های دیگری از هندسه هذلولوی بویژه مدل قرص پوانکاره  $ID$  را معرفی می‌کنیم. با توضیح و کندوکاو مختصری در مورد خوش رفتاری یک زیر گروه  $Möb(IH)$  مطلب را به پایان می‌بریم.

مایلم این پیشگفتار را با چند تشکر و قدردانی به پایان ببرم. تشکر و سپاسگزاری را از سوزان هسلت بخاطر پیشنهاد نوشتن این کتاب شروع می‌کنم. و همچنین دیوید/ایرلند که بر کامل شدن آن نظارت داشت. قسمتی از نوشتن این کتاب وقتی که من در دانشکده ریاضی دانشگاه رایس میهمان بودم، یعنی سال تحصیلی ۱۹۹۸-۱۹۹۹ انجام شده است و تشکرات خود را تقدیم دانشکده ریاضی آنجا و خصوصاً فرانک جونز می‌کنم که در آن زمان ریاست آنجا را بعهده داشت و برای میهمان شدن من کمک کردند. این کتاب بر اساس درس‌های من در مورد هندسه هذلولوی در دانشگاه سوتامپتون در نیم‌سال‌های پاییزی سال‌های تحصیلی ۱۹۹۶-۹۷ و ۱۹۹۷-۹۸ پایه‌ریزی شده است. از دانشجویان این کلاس‌ها و همچنین دانشجویان دانشگاه رایس تشکر می‌کنم که چشمان تیزبین آنان در پالایش نهایی متن خیلی کمک کرد. البته اشتباهات باقی مانده از اینجانب است.

همچنین از همه معلمان ریاضی‌ام بویژه تد شیفرین و مارلی ماسکیت، پدر و مادرم و بات و مارگارت و خواهرانم الیزابت و کارن برای عشق و علاقه و حمایت آنان در طول این سال‌ها تشکر می‌کنم. همچنین از باربارا که در مراحل نهایی نوشتن این کتاب با من صبر و تحمل کرد، تشکر می‌کنم.

## فضاهای پایه

در این فصل برای آنچه که باید عرضه شود، پایه‌ای بنا می‌کنیم. به عبارت دیگر مدل نیم‌صفحه بالایی  $\mathbb{H}$  را برای صفحه هذلولوی تعریف می‌کنیم که بسیاری از مطالب این کتاب در این مدل مطرح می‌شوند. خطوط هذلولوی را تعریف کرده و مقداری در مورد توازی صحبت می‌کنیم. برای اینکه به ساخت گروه معقولی از تبدیلات  $\mathbb{H}$  کمک کرده باشیم، افق دید خود را به بررسی کره ریمان  $\overline{\mathbb{C}}$  توسعه داده و این فصل را با ملاحظه نشاندن  $\mathbb{H}$  در  $\overline{\mathbb{C}}$  به پایان می‌بریم.

### ۱-۱ یک مدل برای صفحه هذلولوی

بحث خود را با توضیح یک مدل برای صفحه هذلولوی شروع می‌کنیم. منظور ما از مدل، انتخاب یک فضای زمینه و انتخاب چگونگی و تعبیر اشیاء هندسی از قبیل نقطه و خط در این فضای زمینه می‌باشد. همانطوریکه در طول کتاب خواهیم دید، تعداد زیادی مدل برای صفحه هذلولوی وجود دارد. برای اینکه توضیح جامعی تا حد امکان از این هندسه ارائه شود با کار کردن روی یک مدل خاص شروع می‌کنیم.

مدل صفحه هذلولوی که در آن کار می‌کنیم، مدل نیم‌صفحه بالایی است. فضای زمینه این مدل نیم‌صفحه بالایی  $\mathbb{H}$  در صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

از مفهوم عادی نقطه و همچنین از مفهوم معمولی زاویه که  $\mathbb{H}$  از  $\mathbb{C}$  به ارث می‌برد، استفاده می‌کنیم؛ یعنی زاویه بین دو منحنی در  $\mathbb{H}$  را زاویه بین منحنی‌ها وقتی که به عنوان منحنی در  $\mathbb{C}$  تلقی شوند، تعریف می‌کنیم و این به نوبه خود زاویه بین خطوط مماس بر آنها است.

از آنجاییکه خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  را بر حسب خطوط اقلیدسی و دوائر اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  تعریف خواهیم کرد، اینک با محاسباتی در  $\mathbb{C}$  شروع می‌کنیم.

### تمرین ۱-۱.

معادلات خط اقلیدسی  $ax + by + c = 0$  و دایره اقلیدسی  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$  را بر حسب مختصات مختلط  $z = x + iy$  در  $\mathbb{C}$  بیان کنید.

### تمرین ۲-۱.

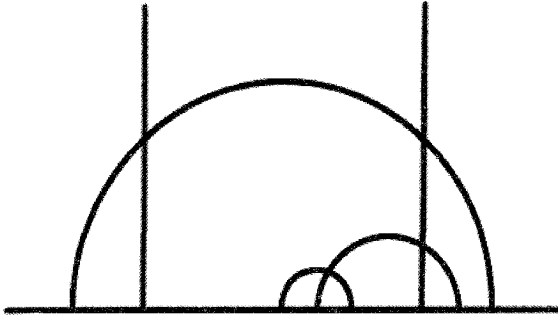
فرض کنیم  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  دایره یکه در  $\mathbb{C}$  باشد. فرض کنیم  $A$  یک دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی  $re^{i\theta}$  با شرط  $r > 1$  و شعاع اقلیدسی  $s > 0$  باشد. نشان دهید  $A$  بر  $S^1$  عمود است اگر و فقط اگر  $s = \sqrt{r^2 - 1}$ . اینک آمادگی داریم خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  را تعریف کنیم.

### تعریف ۱-۱.

دو نوع خط هذلولوی به ظاهر متفاوت وجود دارد که هر دو بر حسب اشیاء اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  تعریف می‌شوند. یکی اشتراک  $\mathbb{H}$  با یک خط اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  است که بر محور حقیقی  $\mathbb{R}$  در  $\mathbb{C}$  عمود است. دیگری اشتراک  $\mathbb{H}$  با یک دایره اقلیدسی با مرکزی روی خط حقیقی  $\mathbb{R}$  است.

در شکل ۱-۱ مثال‌هایی از خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  نشان داده شده است.



شکل ۱-۱ خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$ 

در بخش ۱-۲ روشی را برای یکسان‌سازی این دو نوع خط هذلولوی به ظاهر متفاوت خواهیم دید. ولی فعلاً با در نظر گرفتن این تعریف از خط هذلولوی به بررسی کردن برخی از خواص پایه‌ای هندسه هذلولوی می‌پردازیم.

مشابه هندسه اقلیدسی، خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  باید دارای این خاصیت باشند که همواره یک و فقط یک خط هذلولوی، بین دو نقطه متمایز  $\mathbb{H}$  وجود داشته باشد. برقراری این خاصیت در مورد خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  که به صورت بالا تعریف شدند، نتیجه محاسبات نسبتاً مستقیمی است.

گزاره ۱-۲.

به ازای هر دو نقطه متمایز  $p$  و  $q$  در  $\mathbb{H}$  یک خط هذلولوی یکتای  $\ell$  در  $\mathbb{H}$  وجود دارد که از  $p$  و  $q$  می‌گذرد.

**اثبات.** ابتدا با بحث وجود چنین خطی شروع می‌کنیم. دو حالت برای بررسی وجود دارد. ابتدا فرض می‌کنیم  $\text{Re}(p) = \text{Re}(q)$ . در این صورت خط اقلیدسی  $L$  با معادله  $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = \text{Re}(p)\}$ ، بر محور حقیقی عمود است و از دو نقطه  $p$  و  $q$  می‌گذرد. لذا خط هذلولوی  $\ell = L \cap \mathbb{H}$  خط هذلولوی مطلوب است که از  $p$  و  $q$  می‌گذرد.

حال فرض می‌کنیم  $\text{Re}(p) \neq \text{Re}(q)$ . از آنجاییکه خط اقلیدسی گذرنده از  $p$  و  $q$  دیگر بر  $\mathbb{R}$  عمود نیست، باید یک دایره اقلیدسی بسازیم که مرکز آن روی  $\mathbb{R}$  باشد و از نقاط  $p$  و  $q$  بگذرد.

فرض می‌کنیم  $L_{pq}$  پاره‌خط اقلیدسی باشد که  $p$  را به  $q$  وصل می‌کند و فرض می‌کنیم  $K$  عمود منصف  $L_{pq}$  باشد. در این صورت هر دایره اقلیدسی که از  $p$  و  $q$  می‌گذرد، مرکز آن روی  $K$  قرار دارد. چون  $p$  و  $q$  قسمت‌های حقیقی نامساوی دارند، خط اقلیدسی  $K$  موازی  $\mathbb{R}$  نیست و لذا  $K$  و  $\mathbb{R}$  در یک نقطه یکنای  $c$  یکدیگر را قطع می‌کنند. فرض کنیم  $A$  دایره اقلیدسی به مرکز نقطه تقاطع  $c$  و با شعاع  $|c-p|$  باشد. لذا  $A$  از  $p$  می‌گذرد. چون  $c$  روی  $K$  قرار دارد، بنابراین  $|c-p|=|c-q|$  و لذا  $A$  از نقطه  $q$  نیز می‌گذرد. در این صورت  $\ell = A \cap \mathbb{H}$  خط هذلولوی مطلوب است که از  $p$  و  $q$  می‌گذرد.

یکتایی خط هذلولوی مار بر  $p$  و  $q$ ، از یکتایی خطوط اقلیدسی و دایره اقلیدسی مورد استفاده در ساختن آن، نتیجه می‌شود. بدین ترتیب اثبات گزاره ۱-۲ تمام است.

### فهرست مطالب

توجه کنید که استدلال به کار رفته در اثبات گزاره ۱-۲ عملاً اطلاعات بیشتری در بردارد. به ازای هر دو نقطه متمایز  $p$  و  $q$  در  $\mathbb{C}$  با قسمت‌های حقیقی متمایز، یک دایره اقلیدسی یکتا با مرکزی روی  $\mathbb{R}$  وجود دارد که از  $p$  و  $q$  می‌گذرد. نکته اساسی این است که مرکز هر دایره اقلیدسی مار بر  $p$  و  $q$  روی  $K$ ، عمود منصف پاره‌خط اقلیدسی  $L_{pq}$  که  $p$  را به  $q$  وصل می‌کند، قرار دارد و  $K$  موازی  $\mathbb{R}$  نیست.

از آنجاییکه فضای زمینه  $\mathbb{H}$  برای این مدل از صفحه هذلولوی را مشمول در  $\mathbb{C}$  انتخاب کردیم و چون خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  را برحسب خطوط اقلیدسی و دایره اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  تعریف کردیم، بنابراین برای تحلیل رفتار خطوط هذلولوی می‌توانیم همه حقایق صادق در مورد خطوط اقلیدسی و دایره اقلیدسی را به کار ببریم. در واقع، مختصات معمولی روی  $\mathbb{H}$  را برای کار کردن در دست داریم.

مثلاً اگر  $\ell$  خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  مار بر  $p$  و  $q$  در  $\mathbb{H}$  باشد، می‌توانیم  $\ell$  را برحسب  $p$  و  $q$  به طور صریح بیان کنیم. وقتی که  $p$  و  $q$  دارای قسمت‌های حقیقی مساوی باشند، دیدیم که  $\ell = L \cap \mathbb{H}$  که در آن  $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}$  خط اقلیدسی است. بیان  $\ell$  بر حسب  $p$  و  $q$  در حالت  $\operatorname{Re}(p) \neq \operatorname{Re}(q)$  را به عنوان تمرین وا می‌گذاریم.

### تمرین ۱-۳.

فرض کنیم  $p$  و  $q$  نقاط متمایزی در  $\mathbb{C}$  با قسمت‌های حقیقی نامساوی باشند و  $A$

دایره اقلیدسی با مرکزی روی  $\mathbb{R}$  و مار بر  $p$  و  $q$  باشد. مرکز اقلیدسی  $c$  و شعاع اقلیدسی  $r$  دایره  $A$  را برحسب  $\text{Re}(p)$ ،  $\text{Im}(p)$ ،  $\text{Re}(q)$  و  $\text{Im}(q)$  بیان کنید.

یک سوال منطقی در اینجا مطرح است که آیا هندسه هذلولوی در  $\mathbb{H}$  با این تعریف از خط هذلولوی، عملاً متفاوت از هندسه اقلیدسی معمولی در  $\mathbb{C}$  است که با آن آشنا هستیم؟ جواب این سوال کاملاً مثبت است و هندسه هذلولوی در  $\mathbb{H}$  خیلی متفاوت از هندسه اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  رفتار می‌کند.

یک روش برای مشاهده این تفاوت این است که رفتار خطوط موازی را مورد ملاحظه قرار دهیم. یادآوری می‌کنیم که خطوط اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  موازی می‌باشند اگر و فقط اگر مجزا از هم باشند. این تعریف را در صفحه هذلولوی نیز قبول می‌کنیم.

### تعریف ۱-۳.

دو خط هذلولوی موازی<sup>۱</sup> هستند، چنانچه مجزا از هم باشند.

در هندسه اقلیدسی خطوط موازی وجود دارند. در واقع اگر  $L$  یک خط اقلیدسی بوده و  $a$  یک نقطه  $\mathbb{C}$  باشد که روی  $L$  قرار نداشته باشد، آنگاه یک و فقط یک خط  $K$  وجود دارد که از  $a$  می‌گذرد و با  $L$  موازی است.

در واقع، در هندسه اقلیدسی خطوط موازی، متساوی‌الفاصله<sup>۲</sup> نیز می‌باشند؛ یعنی اگر  $L$  و  $K$  خطوط اقلیدسی موازی باشند و اگر  $a$  و  $b$  نقاطی روی  $L$  باشند، در این صورت فاصله اقلیدسی  $a$  تا  $K$  برابر است با فاصله اقلیدسی  $b$  تا  $K$ .

در هندسه هذلولوی، توازی کاملاً متفاوت رفتار می‌کند. هر چند هنوز معیاری برای اندازه‌گیری فاصله هذلولوی در دست نداریم، می‌توانیم یک توصیف کیفی از خطوط موازی ارائه دهیم.

### قضیه ۱-۴.

فرض کنیم  $\ell$  یک خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  باشد و  $p$  یک نقطه از  $\mathbb{H}$  باشد که روی  $\ell$  قرار ندارد. در این صورت تعداد نامتناهی خط هذلولوی متمایز وجود دارند که از نقطه  $p$  می‌گذرند و با  $\ell$  موازی می‌باشند.

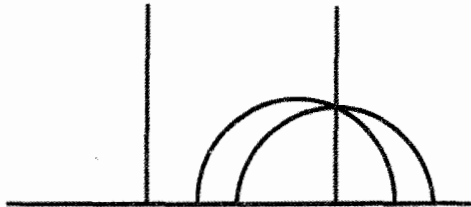
<sup>۱</sup> Parallel

<sup>۲</sup> Equidistant

اثبات. مانند اثبات گزاره ۱-۲، دو حالت برای بررسی وجود دارد. ابتدا فرض می‌کنیم  $\ell$  مشمول در یک خط اقلیدسی مانند  $L$  باشد. از آنجاییکه  $p$  روی  $L$  قرار ندارد. بنابراین یک خط اقلیدسی  $K$  وجود دارد که از  $p$  می‌گذرد و با  $L$  موازی است. چون  $L$  بر  $IR$  عمود است، نتیجه می‌شود که  $K$  نیز بر  $IR$  عمود است. بنابراین یک خط هذلولوی در  $IH$  که از  $p$  بگذرد و با  $\ell$  موازی باشد عبارت است از  $K \cap IH$ .

برای ساختن یک خط هذلولوی دیگر که از  $p$  بگذرد و با  $\ell$  موازی باشد، یک نقطه  $x$  روی  $IR$  بین  $L$  و  $K$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $A$  دایره اقلیدسی باشد که مرکز آن روی  $IR$  است و از نقاط  $x$  و  $p$  می‌گذرد. می‌دانیم که چنین دایره‌ای وجود دارد زیرا که  $Re(x) \neq Re(p)$ .

با توجه به نحوه ساختن،  $A$  و  $L$  مجزا می‌باشند و در نتیجه خط هذلولوی  $A \cap IH$  از  $\ell$  مجزا است. یعنی  $A \cap IH$  خط هذلولوی دومی است که از نقطه  $p$  می‌گذرد و با  $\ell$  موازی است. از آنجاییکه تعداد نامتناهی نقطه روی  $IR$  بین  $K$  و  $L$  وجود دارد، این نحوه ساختن، تعداد نامتناهی خط هذلولوی متمایز به دست می‌دهد که از  $p$  می‌گذرند و با  $\ell$  موازی می‌باشند. تصویری از این پدیده در شکل ۱-۲ ارائه شده است.



شکل ۱-۲ چندین خط هذلولوی موازی

#### تمرین ۱-۴.

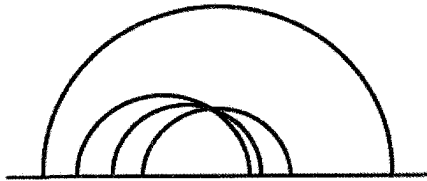
یک توصیف صریح از دو خط هذلولوی در  $IH$  ارائه دهید که از  $i$  می‌گذرند و با خط هذلولوی  $\ell = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) = 3\} \cap IH$  موازی می‌باشند.



حال فرض کنیم  $\ell$  مشمول در یک دایره اقلیدسی  $A$  باشد. فرض کنیم  $D$  دایره اقلیدسی باشد که هم مرکز<sup>۱</sup> با  $A$  باشد و از نقطه  $p$  بگذرد از آنجاییکه دایره هم مرکز مجزا هستند و دارای مرکز یکسانی می باشند، یک خط هذلولوی گذرنده از  $p$  و موازی با  $\ell$  عبارت است از  $D \cap \mathcal{H}$ .

برای ساختن خط هذلولوی دومی که از  $p$  بگذرد و با  $\ell$  موازی باشد، یک نقطه دلخواه  $x$  را روی  $\mathcal{IR}$  بین  $A$  و  $D$  انتخاب می کنیم. فرض کنیم  $E$  دایره اقلیدسی با مرکزی روی  $\mathcal{IR}$  باشد که از نقاط  $x$  و  $p$  می گذرد. مجدداً با توجه به نحوه ساختن،  $A$  و  $E$  مجزا می باشند و در نتیجه  $E \cap \mathcal{H}$  یک خط هذلولوی است که از  $p$  می گذرد و با  $\ell$  موازی است.

مانند بالا، چون تعداد نامتناهی نقطه روی  $\mathcal{IR}$  بین  $A$  و  $D$  موجودند، بنابراین تعداد نامتناهی خط هذلولوی موجودند که از  $p$  می گذرند و با  $\ell$  موازی هستند. یک تصویری از این پدیده در شکل ۱-۳ ارائه شده است.



شکل ۱-۳ چندین خط هذلولوی موازی

بدین ترتیب اثبات قضیه ۱-۴ کامل می شود.

### فهوم المطلوب

#### تمرین ۱-۵.

یک توصیف صریح از دو خط هذلولوی در  $\mathcal{H}$  ارائه دهید که از  $i$  می گذرند و با خط هذلولوی  $\ell = A \cap \mathcal{H}$  موازی می باشند که در آن  $\ell$  دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی<sup>۲</sup>- $2$  و شعاع اقلیدسی<sup>۱</sup> می باشد.

<sup>۱</sup> Concentric

حال یک مدل داریم که با آن کار کنیم. بخش عمده این کتاب اختصاص به بررسی و کشف خواص این مدل خاص صفحه هذلولوی دارد، اگر چه، گاهی به بررسی و کشف خواص مدل‌های دیگر نیز خواهیم پرداخت. اگر چه روی مدل‌هایی از صفحه هذلولوی متمرکز خواهیم شد که فضای زمینه آن‌ها، زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{C}$  است، ولی خاطر نشان می‌کنیم که مدل‌های دیگری نیز وجود دارند. یکی از چنین مدل‌هایی، یعنی مدل هذلولیگون را در بخش ۶-۱ بررسی خواهیم کرد.

این بخش را با ارائه چند نکته‌ای درباره جنبه تاریخی مبحث به پایان می‌رسانیم. تقریباً به طور کامل در جهت عکس روند تاریخی هندسه هذلولوی حرکت خواهیم کرد. یک روش عادی دیگر، شروع کردن با اصل موضوعی کردن هندسه اقلیدسی است. یکی از اصول، درباره خطوط موازی به معنای بالا می‌باشد، یعنی به ازای خط اقلیدسی  $L$  و نقطه  $p$  که روی  $L$  قرار ندارد، یک خط اقلیدسی یکتا وجود دارد که از  $p$  می‌گذرد و با  $L$  موازی است. این اصل گاهی به عنوان «اصل توازی» مطرح می‌گردد که این صورت آن توسط پل‌فیر<sup>۱</sup> ارائه شده است.

هندسه هذلولوی توسط همان اصول هندسه اقلیدسی تعریف شد با یک اصل توازی هذلولوی؛ یعنی به ازای هر خط هذلولوی  $l$  و نقطه  $p$  که روی  $l$  قرار ندارد، حداقل دو خط هذلولوی وجود دارند که از  $p$  می‌گذرند و با  $l$  موازی هستند.

سپس نشان داده شد که مدل نیم‌صفحه بالایی، با خط هذلولوی تعریف شده در بالا، یک مدل برای نمایش هندسه هذلولوی است. برای مثال، کتاب استال<sup>۲</sup> [۳۱] گرینبرگ<sup>۳</sup> [۱۶] و منابع معرفی شده در بخش مطالعات بیشتر را ملاحظه کنید.

در این کتاب، با دیدگاه اصل موضوعی کمتر کار می‌کنیم و ترجیح می‌دهیم که از مختصات معقول نیم‌صفحه بالایی استفاده کنیم که به ما اجازه می‌دهد محاسبات خود را به طور مستقیم انجام دهیم.

اولین کار مهم ما این است که تعیین کنیم در این تعریف هندسه هذلولوی، آیا اطلاعات کافی برای تعریف نمودن طول هذلولوی، فاصله هذلولوی و مساحت هذلولوی در  $\mathbb{H}$  در اختیار داریم؟ این امر را به کمک گروه تبدیلاتی از  $\mathbb{H}$  انجام می‌دهیم که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برند.

<sup>1</sup> Playfair

<sup>2</sup> Stahl

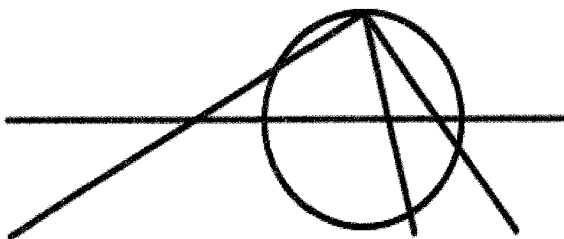
<sup>3</sup> Greenberg

برای جنبه تاریخی موضوع، روزنفلد<sup>۱</sup> [29]، گریببرگ [16]، و بونولا<sup>۲</sup> [11] را ملاحظه کنید. همچنین ترجمه‌های استیل ول [33] از مقالات اسیل بلترامی، کلاین و پوانکاره و همه نقش آفرینان در توسعه هندسه هذلولوی جالب است.

## ۱-۲. کره ریمانی در $\bar{\mathbb{C}}$

برای تعیین تبدیلاتی از  $\mathbb{H}$  که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برند، ابتدا به وعده‌ای که قبلاً داده‌ایم یعنی یکسان کردن دو نوع خط هذلولوی به ظاهر متفاوت، یعنی خطوط مشمول در یک خط اقلیدسی و خطوط مشمول در یک دایره اقلیدسی، می‌پردازیم. ایده اساسی و کلیدی ما عبارت است از مشاهده این نکته که هر دایره اقلیدسی را می‌توان با اضافه کردن یک نقطه تنها به یک خط اقلیدسی به دست آورد.

برای تصریح، فرض می‌کنیم  $S^1$  دایره یکه در  $\mathbb{C}$  باشد و تابع  $\xi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم که بدین ترتیب تعریف می‌شود: به ازای هر نقطه  $z$  در  $S^1 - \{i\}$ ، فرض کنیم  $K_z$  خط اقلیدسی گذرنده از  $z$  و  $i$  باشد و قرار می‌دهیم  $\xi(z) = \mathbb{R} \cap K_z$ . این تابع خوش تعریف است، زیرا  $K_z$  و  $\mathbb{R}$  همدیگر را در یک نقطه یکتا قطع می‌کنند، به این شرط که  $\text{Im}(z) \neq 1$ . شکل ۱-۴ را ببینید.



شکل ۱-۴ تصویر کنج‌نگاری

این عمل را تصویر کنج‌نگاری<sup>۳</sup> می‌نامیم. برحسب مختصات دکارتی معمولی صفحه، محور حقیقی  $\mathbb{R}$  در  $\mathbb{C}$  متناظر با محور  $x$ -ها است و در نتیجه  $\xi(z)$  طول از مبدأ خط  $K_z$  است. با انجام محاسبه، می‌بینیم که  $K_z$  دارای شیب زیر است:

<sup>1</sup> Rosenfeld

<sup>2</sup> Bonola

<sup>3</sup> Stereographic projection

$$m = \frac{\operatorname{Im}(z) - 1}{\operatorname{Re}(z)}$$

و عرض از مبدأ آن برابر ۱ است. بنابراین معادله  $K_z$  عبارت است از:

$$y - 1 = \frac{\operatorname{Im}(z) - 1}{\operatorname{Re}(z)} x$$

به ویژه، طول از مبدأ  $K_z$  عبارت است از:

$$\xi(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{1 - \operatorname{Im}(z)}.$$

تمرین ۱-۶.

ضابطه صریح  $S^1 - \{i\} : \mathbb{R} \longrightarrow \xi^{-1}$  را به دست آورید.

تمرین ۱-۷.

سه نقطه  $z_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{3}i\right)$ ،  $0 \leq k \leq 2$ ، را روی  $S^1$  در نظر بگیرید که رئوس

یک مثلث متساوی الاضلاع در  $\mathbb{C}$  می‌باشند. تصویر آنها را تحت  $\xi$  بیابید.

در واقع،  $\xi$  یک دوسویی بین  $S^1 - \{i\}$  و  $\mathbb{R}$  می‌باشد. از لحاظ هندسی، این مطلب

نتیجه این حقیقت است که هر زوج متمایز از نقاط  $\mathbb{C}$  یک خط اقلیدسی یکتا را معین

می‌کند. اگر  $z$  و  $w$  نقاطی از  $S^1 - \{i\}$  باشند که  $\xi(z) = \xi(w)$ ، آنگاه  $K_z$  و  $K_w$  هر دو از

یک نقطه یکسان  $\mathbb{R}$  می‌گذرند، یعنی  $\xi(z) = \xi(w)$ . چون  $K_z$  و  $K_w$  هر دو از  $i$  نیز عبور

می‌کنند، این نتیجه می‌دهد که دو خط  $K_z$  و  $K_w$  باید برابر باشند و لذا  $z = w$ .

چون  $\mathbb{R}$  را از روی  $S^1$  با حذف فقط یک نقطه از  $S^1$  به دست می‌آوریم، می‌توانیم به

ساختن دایره اقلیدسی  $S^1$  از روی خط اقلیدسی  $\mathbb{R}$  با اضافه کردن فقط یک نقطه به آن فکر

کنیم.

با الهام گرفتن از این نکته، یک امکان برای فضایی که شامل  $\mathbb{H}$  باشد و در آن دو

نوع خط هذلولوی به ظاهر متفاوت، یکسان باشند، عبارت است از فضایی که از  $\mathbb{C}$  با اضافه

کردن یک تک نقطه به آن بدست آید. این همان ساختار کلاسیک کره ریمان<sup>۱</sup>  $\bar{\mathbb{C}}$  در آنالیز

مختلط است.

کره ریمان بعنوان یک مجموعه از نقاط به صورت اجتماع زیر:

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

<sup>۱</sup> Riemann sphere

یعنی اجتماع صفحه مختلط  $\mathcal{C}$  و یک نقطه غیر واقع در  $\mathcal{C}$  که آن را با  $\infty$  نمایش می‌دهیم، می‌باشد. برای اینکه خواص پایه‌ای  $\overline{\mathcal{C}}$  را کشف کنیم، ابتدا به تعریف زیرمجموعه باز  $\overline{\mathcal{C}}$  می‌پردازیم.

با یادآوری این نکته شروع می‌کنیم که مجموعه  $X$  در  $\mathcal{C}$  باز است، هرگاه به ازای هر  $z \in X$  یک  $\varepsilon > 0$  وجود داشته باشد به طوری که  $U_\varepsilon(z) \subseteq X$  که در آن:

$$U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathcal{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$$

قرص اقلیدسی به شعاع  $\varepsilon$  و به مرکز  $z$  است.

مجموعه  $X$  در  $\mathcal{C}$  بسته است، هرگاه متمم آن  $\mathcal{C} - X$  در  $\mathcal{C}$  باز باشد.

مجموعه  $X$  در  $\mathcal{C}$  کراندار است، هرگاه یک  $\varepsilon > 0$  وجود داشته باشد به طوری که  $X \subseteq U_\varepsilon(0)$ .

### تمرین ۸-۱

ثابت کنید  $\mathcal{H}$  در  $\mathcal{C}$  باز است. به ازای هر  $z \in \mathcal{H}$  ماکزیم مقدار  $\varepsilon$  را محاسبه کنید

به طوری که  $U_\varepsilon(z)$  مشمول  $\mathcal{H}$  باشد.

برای اینکه این تعریف را به  $\overline{\mathcal{C}}$  گسترش دهیم، فقط لازم است تعریف کنیم  $U_\varepsilon(z)$  به ازای هر  $z \in \overline{\mathcal{C}}$  و هر  $\varepsilon > 0$  به چه معنی است. چون همه نقاط  $\overline{\mathcal{C}}$  بجز یکی در  $\mathcal{C}$  هستند، بنابراین طبیعی است که از تعریف بالا وقتی که ممکن است استفاده کنیم و لذا به ازای هر  $z \in \overline{\mathcal{C}} - \{\infty\}$  تعریف می‌کنیم:

$$U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathcal{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$$

فقط می‌ماند  $U_\varepsilon(\infty)$  را تعریف کنیم که آن را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_\varepsilon(\infty) = \{w \in \mathcal{C} \mid |w| > \varepsilon\} \cup \{\infty\}$$

### تعریف ۵-۱

مجموعه  $X$  را در  $\overline{\mathcal{C}}$  باز گویند، هرگاه به ازای هر  $x \in X$  یک  $\varepsilon > 0$  (که ممکن

است به  $x$  بستگی داشته باشد) وجود داشته باشد به طوری که  $U_\varepsilon(x) \subseteq X$ .

یک نتیجه فوری این تعریف برای مجموعه باز در  $\overline{\mathcal{C}}$  این است که اگر  $D$  در  $\mathcal{C}$  باز باشد، آنگاه در  $\overline{\mathcal{C}}$  نیز باز است. یعنی با مشاهده  $\mathcal{C}$  بعنوان زیرمجموعه  $\overline{\mathcal{C}}$  شکل آن تغییر نمی‌کند. مثلاً چون بنا بر تمرین ۸-۱،  $\mathcal{H}$  یک زیرمجموعه بازی از  $\mathcal{C}$  است، بلافاصله نتیجه می‌شود که  $\mathcal{H}$  در  $\overline{\mathcal{C}}$  نیز باز است.

به عنوان مثالی دیگر نشان می‌دهیم که مجموعه  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\}$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  باز است.<sup>۱</sup> لازم است نشان دهیم به ازای هر  $z \in E$  یک  $\varepsilon > 0$  وجود دارد به طوریکه  $U_\varepsilon(z) \subseteq E$ . چون  $E = U_1(\infty)$  به ازای  $z = \infty$  یک  $\varepsilon$  مناسب می‌توانیم پیدا کنیم، مثلاً  $\varepsilon = 1$ . به ازای  $z \in E - \{\infty\}$  توجه داشته باشید که فاصله اقلیدسی  $z$  تا  $S^1 = \partial E$  برابر  $|z| - 1$  است و لذا به ازای هر  $0 < \varepsilon < |z| - 1$  داریم  $U_\varepsilon(z) \subseteq E$ . از طرف دیگر دایره  $S^1$  در  $\mathbb{C}$  باز نیست. به ازای هر نقطه  $z$  در  $S^1$  و هر  $\varepsilon > 0$  که در نظر بگیریم  $U_\varepsilon(z)$  در  $S^1$  قرار ندارد، زیرا که  $U_\varepsilon(z)$  الزاماً شامل نقطه  $(1 + \frac{1}{2}\varepsilon)z$  بوده که قدمطلق آن به صورت زیر است:

$$\left| \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right)z \right| = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right)|z| = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon > 1$$

### تعریف ۶-۱.

یک مجموعه  $X$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  بسته است، هرگاه متمم آن  $\bar{\mathbb{C}} - X$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  باز باشد. مثلاً دایره یک  $S^1$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  بسته است، چون متمم آن به صورت اجتماع زیر است:

$$\bar{\mathbb{C}} - S^1 = U_1(0) \cup U_1(\infty)$$

### تمرین ۹-۱.

ثابت کنید اگر  $K$  یک زیرمجموعه بسته و کراندار  $\mathbb{C}$  باشد، آنگاه  $X = (\mathbb{C} - K) \cup \{\infty\}$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  باز است. برعکس، ثابت کنید هر زیرمجموعه باز  $\bar{\mathbb{C}}$  یا یک زیرمجموعه باز  $\mathbb{C}$  است و یا متمم یک زیرمجموعه بسته و کراندار  $\mathbb{C}$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  است. این نحوه ساختن کره ریمان  $\bar{\mathbb{C}}$  از روی صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  مثالی از یک ساختار کلی-تر موسوم به فشردگی تک نقطه‌ای<sup>۲</sup> می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر در مورد فشردگی تک نقطه‌ای و ساختارهای توپولوژیکی مرتبط با آن، خواننده علاقه‌مند را به یک کتاب در زمینه توپولوژی مانند مانکرز<sup>۳</sup> [26] ارجاع می‌دهیم.

یکی از موارد استفاده عمده مجموعه‌های باز در تعریف همگرایی است. همگرایی در  $\bar{\mathbb{C}}$  مشابه همگرایی در  $\mathbb{C}$  است؛ یعنی یک دنباله  $\{z_n\}$  از نقاط  $\bar{\mathbb{C}}$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  همگرا به یک نقطه  $z$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  است، هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک عدد طبیعی  $N$  وجود داشته باشد به

<sup>۱</sup> در واقع  $E$  یک قرص اقلیدسی در  $\bar{\mathbb{C}}$  است و هر قرص اقلیدسی در  $\bar{\mathbb{C}}$  باز است. [م]

<sup>۲</sup> One-point compactification

<sup>۳</sup> Munkres

طوری‌که به ازای هر  $n > N$  داشته باشیم  $z_n \in U_\varepsilon(z)$ .

### تمرین ۱-۱۰.

ثابت کنید  $\{z_n = \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  همگرا به صفر است و  $\{w_n = n \mid n \in \mathbb{N}\}$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  همگرا به  $\infty$  است.

فرض کنیم  $X$  یک زیرمجموعه  $\bar{\mathcal{C}}$  باشد.  $\bar{X}$ ، بست  $X$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  را به صورت مجموعه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{X} = \{z \in \bar{\mathcal{C}} \mid \forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(z) \cap X \neq \emptyset\}$$

باید توجه داشت که هر نقطه  $x \in X$  در  $\bar{X}$  قرار دارد، چون به ازای هر  $\varepsilon > 0$  داریم  $\{x\} \subseteq U_\varepsilon(x) \cap X$ . امکان دارد نقاطی در  $\bar{X}$  غیر از نقاط  $X$  وجود داشته باشد. به ویژه توجه داشته باشید که اگر  $\{z_n\}$  یک دنباله از نقاط  $X$  همگرا به یک نقطه  $x$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  باشد، در این صورت  $x$  الزاماً یک نقطه  $\bar{X}$  است.

### تمرین ۱-۱۱.

بست  $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$  و  $Y = \mathcal{Q} + \mathcal{Q}i = \{a + bi \mid a, b \in \mathcal{Q}\}$  را در  $\bar{\mathcal{C}}$  تعیین کنید.

### تمرین ۱-۱۲.

اگر  $X$  یک زیرمجموعه  $\bar{\mathcal{C}}$  باشد، ثابت کنید  $\bar{X}$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  بسته است.

اینک آمادگی داریم که دو مفهوم خط اقلیدسی و دایره اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  را با هم یکی کنیم.

### تعریف ۱-۷.

یک دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  عبارت است از یک دایره اقلیدسی در  $\mathcal{C}$ ، یا اجتماع یک خط اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  با  $\{\infty\}$ .

یعنی ما از نقطه  $\infty$  که برای به دست آوردن  $\bar{\mathcal{C}}$  به  $\mathcal{C}$  اضافه کردیم، استفاده کرده و آن را نقطه‌ای در نظر می‌گیریم که به یک خط اقلیدسی اضافه شود تا یک دایره به دست آید.

به عنوان یک نمادگذاری به ازای یک خط اقلیدسی  $L$  در  $\mathcal{C}$ ، فرض کنیم  $\bar{L} = L \cup \{\infty\}$  دایره شامل  $L$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  باشد. مثلاً محور حقیقی توسیع یافته<sup>۱</sup>  $\bar{R} = R \cup \{\infty\}$  دایره شامل محور حقیقی  $R$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  است.

باید توجه داشت که این نماد برای دایره شامل خط اقلیدسی  $L$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  با نماد قبلی برای بست یک زیرمجموعه  $\bar{\mathcal{C}}$ ، یعنی بست خط  $L$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  که دقیقاً برابر  $L \cup \{\infty\}$  است، مطابقت دارد.

می توان حدس زد که تعمیمی برای تصویر کنج‌نگاری به کره ریمان و صفحه مختلط وجود دارد.  $\mathcal{C}$  را با صفحه  $x_1x_2$  در  $R^3$  یکی می‌گیریم که در آن  $(x_1, x_2, x_3)$  مختصات در  $R^3$  هستند، بدین ترتیب نقطه  $z = x + iy$  در  $\mathcal{C}$  را با نقطه  $(x, y, 0)$  در  $R^3$  یکی می‌گیریم. فرض کنیم  $S^2$  کره بیکه در  $R^3$  باشد؛ یعنی:

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

و در آن  $N = (0, 0, 1)$  قطب شمال است.

تابع  $\xi: S^2 - \{N\} \rightarrow \mathcal{C}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود را مورد ملاحظه

قرار می‌دهیم: به ازای هر نقطه  $P$  در  $S^2 - \{N\}$  فرض می‌کنیم  $L_P$  خط اقلیدسی در  $R^3$  باشد که از  $N$  و  $P$  می‌گذرد و  $\xi(P)$  را نقطه تقاطع  $L_P \cap \mathcal{C}$  تعریف می‌کنیم.

### تمرین ۱-۱۳.

ضابطه‌های صریح  $\xi$  و وارون آن  $S^2 - \{N\} \rightarrow \mathcal{C}^{-1}: \xi$  را بنویسید.

دوسوی بودن  $\xi$  از اینجا نتیجه می‌شود که می‌توانیم رابطه صریحی برای  $\xi^{-1}$  بنویسیم. همچنین همانطوریکه در مورد تصویر کنج‌نگاری از  $S^1 - \{i\}$  به  $R$  انجام دادیم، می‌توانیم از دیدگاه هندسی نیز در مورد  $\xi$  بحث کنیم.

همچنین می‌توانیم دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  را به صورت مجموعه‌های جواب معادلاتی در  $\bar{\mathcal{C}}$  بنویسیم. یادآوری می‌کنیم که در تمرین ۱-۱ نشان دادیم که هر دایره اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  را می‌توان به صورت مجموعه جواب‌های معادله زیر نوشت:

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

که در آن  $\alpha, \gamma \in R$  و  $\alpha \neq 0$  و  $\beta \in \mathcal{C}$ . همچنین هر خط اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  را می‌توان

به صورت مجموعه جواب‌های معادله زیر نوشت:

<sup>۱</sup> Extended real axis



$$\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

که در آن  $\beta \in \mathbb{C}$  و  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

با ترکیب اینها می‌بینیم که هر دایره در  $\bar{\mathbb{C}}$  را می‌توان به صورت مجموعه جواب‌های

یک معادله به شکل زیر نوشت:

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

که در آن  $\beta \in \mathbb{C}$  و  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ .

در اینجا یک نکته ظریف مطرح است؛ یعنی این سوال که چگونه می‌توانیم ببینیم  $\infty$

جواب چنین معادله‌ای هست یا نیست. در مورد معادله

$$\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

می‌توانیم  $\infty$  را بنا بر پیوستگی، یک جواب معادله در نظر بگیریم. به عبارت دیگر

دنباله‌ای مانند  $\{z_n\}$  از نقاط  $\mathbb{C}$  وجود دارد که در معادله صدق کرده و در  $\bar{\mathbb{C}}$  به  $\infty$  همگرا

است. به طور مشخص فرض کنیم  $w_1$  و  $w_0$  دو جواب متمایز معادله باشند، لذا هر ترکیب

خطی آنها به شکل  $w_0 + t(w_1 - w_0)$  که  $t \in \mathbb{R}$  نیز یک جواب است. دنباله زیر را در نظر

می‌گیریم:

$$\{z_n = w_0 + n(w_1 - w_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

این دنباله به  $\infty$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  همگرا است و به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$\beta z_n + \bar{\beta} \bar{z}_n + \gamma = 0.$$

ولی در مورد معادله

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

با شرط  $\alpha \neq 0$ ، نمی‌توان بنا بر پیوستگی  $\infty$  را جوابی برای معادله تلقی کرد. این

مطلب فوراً از اینجا نتیجه می‌شود که می‌توانیم معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = \alpha \left| z + \frac{\bar{\beta}}{\alpha} \right|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha} = 0$$

بنابراین اگر  $\{z_n\}$  دنباله‌ای از نقاط  $\bar{\mathbb{C}}$  همگرا به  $\infty$  باشد، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha z_n \bar{z}_n + \beta z_n + \bar{\beta} \bar{z}_n + \gamma = \infty$$

بنابراین  $z_n$  نمی‌تواند به ازای  $n$ های بزرگ روی دایره زیر در  $\bar{\mathbb{C}}$  بماند:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0\}$$

لذا نمی‌توان  $\infty$  را بعنوان نقطه‌ای از  $A$  در نظر گرفت.

حال چون تعریفی از زیر مجموعه‌های باز  $\bar{C}$  در دست داریم، می‌توانیم با مقایسه تعریف معمولی پیوستگی توابع از  $IR$  به  $IR$ ، تعریفی برای پیوستگی یک تابع  $\bar{C} \rightarrow \bar{C} : f$  ارائه دهیم.

### تعریف ۸-۱

تابع  $\bar{C} \rightarrow \bar{C} : f$  در نقطه  $z \in \bar{C}$  پیوسته است، هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک  $\delta > 0$  وجود داشته باشد به طوری که از  $w \in U_\delta(z)$  نتیجه شود  $f(w) \in U_\varepsilon(f(z))$ .  
تابع  $\bar{C} \rightarrow \bar{C} : f$  پیوسته است، هرگاه در هر نقطه  $z \in \bar{C}$  پیوسته باشد.

یک فایده تعمیم این تعریف پیوستگی این است که می‌شود از همان اثبات‌های مربوط به توابع از  $IR$  به  $IR$  استفاده کرد و نشان داد که توابع ثابت، همچنین حاصل ضرب، خارج قسمت (وقتی که تعریف شوند)، حاصل جمع و تفاضل (وقتی که تعریف شوند) و ترکیب توابع پیوسته از  $\bar{C}$  به  $\bar{C}$ ، پیوسته‌اند.

ولی یک اختلاف جزئی بین توابع از  $IR$  به  $IR$  و توابع از  $\bar{C}$  به  $\bar{C}$  وجود دارد که از حضور نقطه  $\infty$  منجر می‌شود. مثال زیر را در نظر بگیرید.

### گزاره ۹-۱

تابع  $\bar{C} \rightarrow \bar{C} : J$  با ضابطه زیر:

$$J(z) = \frac{1}{z} \quad z \in \mathcal{C} - \{0\}, \quad J(0) = \infty, \quad J(\infty) = 0$$

روی  $\bar{C}$  پیوسته است.

اثبات. برای اینکه ببینیم  $J$  در صفر پیوسته است،  $\varepsilon > 0$  را مفروض می‌گیریم. چون  $J(0) = \infty$ ، بنابراین باید نشان دهیم یک  $\delta > 0$  وجود دارد به طوری که:

$$J(U_\delta(0)) \subseteq U_\varepsilon(J(0)) = U_\varepsilon(\infty)$$

قرار می‌دهیم  $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ . به ازای هر  $w \in U_\delta(0) - \{0\}$  داریم:

$$|J(w)| = \frac{1}{|w|} > \frac{1}{\delta} = \varepsilon$$

و لذا  $J(w) \in U_\varepsilon(\infty)$ . از طرف دیگر داریم  $J(0) = \infty \in U_\varepsilon(\infty)$ . لذا بنا به

تعریف،  $J$  در صفر پیوسته است.

بحث اینکه  $J$  در  $\infty$  پیوسته است، خیلی شبیه بحث پیوستگی  $J$  در صفر است.

مجدداً به ازای  $\varepsilon > 0$  مفروض، قرار می‌دهیم  $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ . در این صورت به

ازای  $w \in U_\delta(\infty) - \{\infty\}$  داریم:

$$|J(w)| = \frac{1}{|w|} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$$

و لذا  $J(w) \in U_\varepsilon(0)$ . از طرف دیگر، بنا به تعریف داریم  $J(\infty) = 0 \in U_\varepsilon(0)$  و

لذا  $J$  در  $\infty$  پیوسته است.

برای اتمام اثبات، فرض می‌کنیم  $z \in \mathcal{C} - \{0\}$  یک نقطه دلخواه باشد و  $\varepsilon > 0$

مفروض باشد. باید  $\delta > 0$  را پیدا کنیم که از  $w \in U_\delta(z)$  نتیجه شود  $J(w) \in U_\varepsilon(J(z))$ .

فرض می‌کنیم  $\varepsilon' = \min\left(\varepsilon, \frac{1}{2|z|}\right)$  لذا  $U_{\varepsilon'}(z)$  شامل صفر نیست.

به ازای هر  $\xi \in U_{\varepsilon'}(J(z))$  داریم:

$$|\xi| < |J(z)| + \varepsilon' = \frac{1}{|z|} + \varepsilon'$$

چون  $\varepsilon' \leq \frac{1}{2|z|}$ ، بنابراین داریم:

$$|\xi| < \frac{3}{2|z|}$$

با قرار دادن  $\xi = \frac{1}{w}$  نتیجه می‌شود:

$$\left|\frac{1}{w}\right| < \frac{3}{2|z|}$$

و لذا

$$\left|\frac{1}{zw}\right| < \frac{3}{2|z|^2}$$

بنابراین قرار می‌دهیم  $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon'|z|^2$ . حال اگر  $|z-w| < \delta$ ، آنگاه داریم:

$$|J(z) - J(w)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right| = \frac{|z-w|}{|zw|} < \frac{2}{3}\varepsilon'|z|^2 \frac{3}{2|z|^2} = \varepsilon'$$

چون  $\varepsilon' \leq \varepsilon$ ، پس  $J$  در  $\mathcal{C} - \{0\}$  پیوسته است. بدین ترتیب اثبات گزاره ۱-۹ تمام

است.

## تمرین ۱-۱۴.

فرض کنیم  $g(z)$  یک چندجمله‌ای باشد. ثابت کنید تابع  $\bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} : f$  با ضابطه

زیر:

$$f(z) = g(z) \quad z \in \mathcal{C}, \quad f(\infty) = \infty$$

روی  $\bar{\mathcal{C}}$  پیوسته است.

یک خاصیت خیلی مفید و در واقع تعیین کننده توابع پیوسته، آن است که همگرانی

دنباله‌ها را حفظ می‌کنند. یعنی اگر  $\bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} : f$  یک تابع پیوسته باشد و اگر  $\{x_n\}$  یک دنباله در  $\bar{\mathcal{C}}$  همگرا به  $x$  باشد، در این صورت  $\{f(x_n)\}$  همگرا به  $f(x)$  خواهد بود.

یک دسته از توابع پیوسته از  $\bar{\mathcal{C}}$  به خودش وجود دارد که به طور ویژه‌ای خوش‌رفتارند.

## تعریف ۱-۱۰.

تابع  $\bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} : f$  را یک همسانریختی نامند، هرگاه  $f$  یک دوسویی بوده و هر

دوی  $f$  و  $f^{-1}$  پیوسته باشند.

تاکنون یک مثال از همسانریختی  $\bar{\mathcal{C}}$  دیده‌ایم.

## گزاره ۱-۱۱.

تابع  $\bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} : J$  با ضابطه زیر:

$$J(z) = \frac{1}{z} \quad z \in \mathcal{C} - \{0\}, \quad J(0) = \infty, \quad J(\infty) = 0$$

یک همسانریختی  $\bar{\mathcal{C}}$  است.

**اثبات.** چون به ازای هر  $z \in \bar{\mathcal{C}}$  داریم  $J \circ J(z) = z$ ، بلافاصله نتیجه می‌شود که  $J$  دو

سویی است. برای اینکه ببینیم  $J$  یک به یک است، فرض کنیم نقاط  $z$  و  $w$  وجود داشته

باشند به طوری که  $J(z) = J(w)$ . در این صورت  $w = J \circ J(z) = J \circ J(w) = w$ . برای اینکه

ببینیم  $J$  پوشا است، توجه کنید به ازای هر  $z \in \bar{\mathcal{C}}$  داریم  $z = J(J(z))$ .

بعلاوه، چون به ازای هر  $z \in \bar{\mathcal{C}}$  داریم  $J^{-1}(z) = J(z)$  و چون  $J$  بنا بر گزاره ۱-۹

پیوسته است، لذا  $J^{-1}$  نیز پیوسته است. بدین ترتیب اثبات گزاره ۱-۱۱ تمام است.

## فهوالمطلوب

همسانریختی‌های  $\bar{\mathcal{C}}$ ، تبدیلاتی از  $\bar{\mathcal{C}}$  هستند که خیلی مورد توجه ما هستند، لذا قرار می‌دهیم:

$$\text{Homeo}(\bar{\mathcal{C}}) = \{f: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} \text{ یک همسانریختی } \bar{\mathcal{C}} \text{ است}\}$$

بنا به تعریف، وارون یک همسانریختی نیز یک همسانریختی است. همچنین ترکیب دو همسانریختی نیز یک همسانریختی است، چون ترکیب دوسویی ها، دو سویی و ترکیب توابع پیوسته نیز پیوسته است. از آنجاییکه همسانریختی همانی  $\bar{C} \longrightarrow \bar{C} : f$  با ضابطه  $f(z) = z$  یک همسانریختی است، بنابراین  $\text{Homeo}(\bar{C})$  یک گروه است.

### تمرین ۱-۱۵.

فرض کنیم  $g(z)$  یک چندجمله‌ای باشد. ثابت کنید تابع  $\bar{C} \longrightarrow \bar{C} : f$  با ضابطه زیر:

$$f(z) = g(z) \quad z \in \mathbb{C}, \quad f(\infty) = \infty$$

یک همسانریختی است اگر و فقط اگر درجه  $g(z)$  یک باشد.

### تمرین ۱-۱۶.

یک زیر مجموعه  $X$  از  $\bar{C}$  را چگال گویند، هرگاه  $\bar{X} = \bar{C}$ . ثابت کنید اگر  $X$  در  $\bar{C}$  چگال و  $f: \bar{C} \longrightarrow \bar{C}$  تابعی پیوسته باشد به گونه‌ای که به ازای هر  $x$  در  $X$  داشته باشیم  $f(x) = x$ ، در این صورت به ازای هر  $z \in \bar{C}$  خواهیم داشت  $f(z) = z$ .

## ۳-۱. مرز در بینهایت $I\mathbb{H}$

در بخش ۱-۲، دایره در کره ریمانی  $\bar{C}$  را به صورت یک دایره اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  با اجتماع یک خط اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  با  $\{\infty\}$  تعریف کردیم. همچنین مثال‌هایی چند از دایره در  $\mathbb{C}$  از قبیل دایره یکه  $S^1$  در  $\mathbb{C}$  و محور حقیقی توسعه یافته  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ارائه دادیم. به ویژه متمم یک دایره در  $\bar{C}$  دو مؤلفه دارد. در مورد  $S^1$  مؤلفه‌های  $S^1 - \bar{C}$  عبارتند از قرص  $ID = U_1(0)$  و قرص  $U_1(\infty)$ . در حالی که در مورد  $\bar{\mathbb{R}}$  مؤلفه‌های  $\bar{\mathbb{R}} - \bar{C}$  عبارتند از نیم‌صفحه بالایی  $I\mathbb{H}$  و نیم‌صفحه پایینی  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$ .

### تعریف ۱-۱۲.

به هر یک از مؤلفه‌های متمم یک دایره در  $\bar{C}$ ، یک قرص در  $\bar{C}$  می‌گوییم. در این حالت به آن دایره، دایره تعیین‌کننده آن<sup>۱</sup> قرص می‌گوییم.

<sup>۱</sup> Circle determining the disc

باید توجه داشت که هر قرص در  $\bar{C}$  یک دایره یکتا در  $\bar{C}$  مشخص می‌کند ولی هر دایره در  $\bar{C}$  دو قرص مجزا از هم در  $\bar{C}$  مشخص می‌کند.

در ادامه این بخش توجه خود را روی قرص خاصی از  $\bar{C}$  یعنی  $IH$  و دایره‌ای در  $\bar{C}$  که آن را مشخص می‌کند یعنی  $\bar{IR}$  متمرکز می‌کنیم. به  $\bar{IR}$  مرز در بی‌نهایت  $IH$  و به نقاط آن نقاط در بی‌نهایت  $IH$  می‌گوییم. علت استفاده از این اصطلاح در بخش ۳-۷، بعد از اینکه وسیله‌ای برای اندازه‌گیری فاصله در  $IH$  ایجاد کردیم، توضیح داده خواهد شد.

به طور کلی به ازای هر زیرمجموعه  $X$  در  $IH$  می‌توانیم به مفهوم مرز در بی‌نهایت  $X$  معنا بخشیم. به ویژه، بست  $X$  یعنی  $\bar{X}$  را در  $\bar{C}$  تشکیل داده و مرز در بی‌نهایت  $X$  را به صورت  $\bar{X} \cap \bar{IR}$  یعنی اشتراک  $\bar{X}$  با  $\bar{IR}$  مرز در بی‌نهایت  $IH$  تعریف می‌کنیم.

بعنوان مثال، فرض کنیم  $l$  یک خط هذلولوی در  $IH$  و  $l$  مشمول دایره  $A$  در  $\bar{C}$  باشد. در این صورت مرز در بی‌نهایت  $l$  عبارت است از نقاط اشتراک  $A \cap \bar{IR}$ .

مثال‌های مشکل‌تری نیز وجود دارد. فرض کنیم  $l_1$  و  $l_2$  خطوط هذلولوی موازی در  $IH$  باشند و فرض کنیم  $H$  ناحیه شامل دو خط  $l_1$  و  $l_2$  و ناحیه بین آنها در  $IH$  باشد. دو حالت برای مرز در بی‌نهایت این ناحیه  $H$  وجود دارد.

فرض کنیم  $C_k$  دایره‌ای شامل  $l_k$  در  $\bar{C}$  باشد. چون  $l_1$  و  $l_2$  مجزا از هم هستند یا  $C_1$  و  $C_2$  مجزا از هم هستند و یا اینکه  $C_1$  و  $C_2$  تنها در یک نقطه که الزاماً عضو  $\bar{IR}$  است، یکدیگر را قطع می‌کنند.

در حالتی که  $C_1$  و  $C_2$  در یک نقطه  $x$  از  $\bar{IR}$  یکدیگر را قطع می‌کنند، مرز در بی‌نهایت  $H$  اجتماع یک قوس بسته در  $\bar{IR}$  و مجموعه  $\{x\}$  است.

در حالتی که  $C_1$  و  $C_2$  مجزا هستند، مرز در بی‌نهایت  $H$  اجتماع دو قوس بسته در  $\bar{IR}$  است. این دو حالت در شکل ۱-۵ نشان داده شده است.

1 هر خط هذلولوی  $l$  در  $IH$ ، آن را به دو طرف جدا از هم  $E_1$  و  $E_2$  تقسیم می‌کند، بطوریکه  $E_4 \cup E_1 \cup E_2 = IH$  و هر یک از دو خط موازی دقیقاً و تماماً در یک طرف این خط قرار دارد. منظور از «بین» دو خط هذلولوی  $l_1$  و  $l_2$  در  $IH$  عبارت است از اشتراک طرفی از  $l_1$  که شامل  $l_1$  است با طرفی از  $l_2$  که شامل  $l_1$  است. [م]



شکل ۵-۱ دو حالت برای خطوط هذلولوی موازی

این مثال، روشی برای تمیز دو نوع مختلف توازی در مورد خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  به دست می‌دهد. یعنی خطوط هذلولوی موازی وجود دارد که مرزهای آنها در بی‌نهایت یکدیگر را قطع می‌کنند. و خطوط هذلولوی وجود دارند که مرزهای آنها در بی‌نهایت جدا از هم هستند. وقتی که لازم باشد بین موازی‌ها، فرق قائل شویم به دو خط موازی در نوع اخیراً موازی<sup>۱</sup> می‌گوییم. روش دیگری برای مشاهده فرق بین خطوط هذلولوی موازی و فرا موازی وجود دارد.

### تمرین ۱-۱۷.

فرض کنیم  $l_1$  و  $l_2$  خطوط هذلولوی موازی باشند. نشان دهید که  $l_1$  و  $l_2$  فراموازیه اگر و فقط اگر یک خط هذلولوی عمود بر هر دوی  $l_1$  و  $l_2$  وجود داشته باشد. در بخش ۱-۱، خصوصاً در گزاره ۱-۲، دیدیم که دو نقطه در  $\mathbb{H}$  یک خط هذلولوی یکتا در  $\mathbb{H}$  مشخص می‌کنند. کلید اثبات این مطلب این است که در  $\mathbb{C}$  یک دایره اقلیدسی یا خط اقلیدسی یکتا وجود دارد که از دو نقطه مفروض گذشته و بر محور حقیقی  $\mathbb{R}$  عمود است. همین استدلال در مورد خطوط هذلولوی که توسط نقاط در بی‌نهایت مشخص می‌شوند به کار می‌رود.

### گزاره ۱-۱۳.

فرض کنیم  $p$  یک نقطه  $\mathbb{H}$  و  $q$  یک نقطه  $\overline{\mathbb{R}}$  باشد. در این صورت یک خط هذلولوی یکتا در  $\mathbb{H}$  وجود دارد که توسط  $p$  و  $q$  مشخص می‌شود.

<sup>۱</sup>Ultraparallel

اثبات. فرض می‌کنیم  $q = \infty$ . از همه خطوط هذلولوی مار بر  $p$  فقط یک خط وجود دارد که شامل  $q$  در مرز بی‌نهایتش باشد؛ یعنی خط هذلولوی که مشمول خط اقلیدسی  $\{z \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}$  است. بحث یکتایی از مشاهده اینکه هیچ خط هذلولوی مشمول یک دایره اقلیدسی شامل  $\infty$  در مرز بی‌نهایتش نیست، نتیجه می‌شود.

حال فرض می‌کنیم  $q \neq \infty$  و  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)$ . در این صورت خط هذلولوی مشمول خط اقلیدسی  $\{z \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}$ ، خط هذلولوی یکتایی است که از  $p$  گذشته و شامل  $q$  در مرز بی‌نهایتش می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم  $q \neq \infty$  و  $\operatorname{Re}(z) \neq \operatorname{Re}(p)$ . در این صورت دوباره می‌توانیم از ساختن عمودمنصف پاره‌خط اقلیدسی واصل بین  $p$  و  $q$  که در اثبات گزاره ۱-۲ به کار رفت، استفاده کنیم و دایره اقلیدسی یکتایی به مرکزی روی محور حقیقی  $\mathbb{R}$  پیدا کنیم که از  $p$  و  $q$  می‌گذرد. اشتراک این دایره با  $\mathbb{H}$  خط هذلولوی یکتایی که توسط  $p$  و  $q$  مشخص می‌شود به دست می‌دهد. بدین ترتیب اثبات گزاره ۱-۱۳ تمام است.

### فهرالمطلوب

به قسمتی از خط هذلولوی واقع در بین  $p$  و  $q$ ، شعاع هذلولوی مشخص شده توسط  $p$  و  $q$ <sup>۱</sup> یا شعاع هذلولوی مار بر  $p$  با نقطه انتهایی در بی‌نهایت  $q$  گوئیم. بحث وجود و یکتایی یک خط هذلولوی که توسط دو نقطه در بی‌نهایت مشخص می‌شود، به همین ترتیب است و بعنوان تمرین واگذار می‌شود.

### تمرین ۱-۱۸.

فرض کنید  $p$  و  $q$  دو نقطه  $\overline{\mathbb{R}}$  هستند. ثابت کنید  $p$  و  $q$  یک خط هذلولوی یکتا را که نقاط انتهایی آن در بی‌نهایت  $p$  و  $q$  هستند، مشخص می‌کنند.

<sup>۱</sup>Hyperbolic ray determined by  $p$  and  $q$



## گروه موبیوس عام

از آنجایی که هدف ما مطالعه هندسه صفحه هذلولوی با ملاحظه کمیت‌هایی ناوردادگی تحت عمل یک گروه معقول از تبدیلات است، در این فصل به توضیح چنین گروه معقولی می‌پردازیم، یعنی گروه موبیوس عام  $Möb$  که شامل ترکیب‌های تبدیلی  $Möb$  موبیوس و انعکاس‌ها می‌باشد. این فصل را با معطوف کردن توجه خود به تبدیلاتی در  $I\mathbb{H}$  را حفظ می‌کنند، خاتمه می‌دهیم.

### ۱-۲. گروه تبدیلات موبیوس

چون هر خط هذلولوی در  $I\mathbb{H}$  بنا به تعریف مشمول یک دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  است، لذا برای تعیین تبدیلات  $I\mathbb{H}$  که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برند، ابتدا گروه همسانزختی‌های  $\overline{\mathbb{C}}$  را که دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  را به دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌برند، تعیین می‌کنیم. برای سادگی در نمادگذاری، فرض کنیم  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  زیرمجموعه‌ای از  $Homeo(\overline{\mathbb{C}})$  گروه همسانزختی‌های  $\overline{\mathbb{C}}$  باشد که شامل آن همسانزختی‌هایی از  $\overline{\mathbb{C}}$  است که دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  را به دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌برند. توجه کنید که در حالی که به آسانی مشاهده می‌شود که ترکیب دو عضو  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  نیز یک عضو  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  است و اینکه همسانزختی همانی یک عضو  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  است، معذک هنوز نمی‌دانیم که آیا وارون اعضای  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  در  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  قرار دارند و لذا هنوز نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  یک گروه است.

در واقع هسمانریختی‌های زیادی از  $\bar{\mathcal{C}}$  وجود دارد که در  $\text{Homeo}^{\circ}(\bar{\mathcal{C}})$  قرار ندارند.  
تمرین ۲-۱.

یک عضو  $\text{Homeo}(\bar{\mathcal{C}})$  به طور صریح ارائه دهید که در  $\text{Homeo}^{\circ}(\bar{\mathcal{C}})$  نباشد.  
با بررسی دسته‌ای از هسمانریختی‌های  $\bar{\mathcal{C}}$  که می‌شناسیم شروع می‌کنیم، یعنی آنهایی که از چند جمله‌ای‌ها به دست می‌آیند. همانطور که در تمرین ۱-۱۴ و تمرین ۱-۱۵ دیدیم به هر چند جمله‌ای  $g(z)$  می‌توانیم تابع  $f: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  را با ضابطه زیر مربوط کنیم:

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathcal{C} \quad \text{و} \quad f(\infty) = \infty$$

از آنجاییکه می‌خواهیم هسمانریختی‌هایی از  $\bar{\mathcal{C}}$  را مورد ملاحظه قرار دهیم که از چند جمله‌ای‌ها ناشی می‌شوند، توجه خود را به چند جمله‌ای‌های درجه یک محدود می‌کنیم.

گزاره ۲-۱.

عضو  $f$  از  $\text{Homeo}(\bar{\mathcal{C}})$  با ضابطه  $f(z) = az + b \quad \forall z \in \mathcal{C}$  و  $f(\infty) = \infty$  که در آن  $a, b \in \mathcal{C}$  و  $a \neq 0$  یک عضو  $\text{Homeo}^{\circ}(\bar{\mathcal{C}})$  است.

اثبات. از بخش ۱-۲ یادآوری می‌کنیم که هر دایره  $A$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  مجموعه جواب‌های

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

معادله‌ای به صورت زیر است:

که در آن  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  و  $\beta \in \mathcal{C}$ . بعلاوه  $\alpha \neq 0$  اگر و فقط اگر  $A$  یک دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  باشد. از حالتی که  $A$  یک خط اقلیدسی در  $\bar{\mathcal{C}}$  است شروع می‌کنیم. لذا خط اقلیدسی  $A$  که به صورت جواب معادله زیر است در نظر می‌گیریم:

$$A = \{z \in \mathcal{C} \mid \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0\}$$

که در آن  $\beta \in \mathcal{C}$  و  $\gamma \in \mathbb{R}$ . می‌خواهیم نشان دهیم که اگر  $z$  در این معادله صدق

کند، آنگاه  $w = az + b$  در معادله مشابهی صدق می‌کند.

چون  $w = az + b$  داریم  $z = \frac{1}{a}(w - b)$ . با جانشین کردن این در معادله  $A$  که

در بالا ذکر شد نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma &= \beta \frac{1}{a}(w - b) + \bar{\beta} \frac{1}{a} \overline{(w - b)} + \gamma \\ &= \frac{\beta}{a} w + \overline{\left(\frac{\beta}{a}\right) \bar{w}} - \frac{\beta}{a} b - \frac{\bar{\beta}}{a} \bar{b} + \gamma = 0 \end{aligned}$$

چون  $\frac{\beta}{a}b + \overline{\frac{\beta}{a}b} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{\beta}{a}b\right)$  حقیقی است، این نشان می‌دهد که  $w$  نیز در معادله یک خط اقلیدسی صدق می‌کند. بنابراین  $f$  خطوط اقلیدوسی در  $\overline{\mathcal{C}}$  را به خطوط اقلیدسی در  $\overline{\mathcal{C}}$  می‌برد. اثبات اینکه  $f$  دوائر اقلیدسی را به دوائر اقلیدسی می‌برد مشابه است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

### تمرین ۲-۲.

نشان دهید هسمانریختی  $f: \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$  که توسط  $f(z) = az + b \quad \forall z \in \mathcal{C}$  و  $f(\infty) = \infty$  که در آن  $a, b \in \mathcal{C}$  و  $a \neq 0$  تعریف می‌شود دوائر اقلیدسی در  $\overline{\mathcal{C}}$  را به دوائر اقلیدسی در  $\overline{\mathcal{C}}$  می‌برد.  
تمرین ۲-۲ اثبات گزاره ۱-۲ را تمام می‌کند.

### فهرالمطلوب

این بحث را می‌توانیم دقیق‌تر کرده تا اطلاعات کمی در مورد دایره تصویر در  $\overline{\mathcal{C}}$  بر حسب ضرایب  $f(z) = az + b$  و معادله دایره مبدا در  $\overline{\mathcal{C}}$  به دست آوریم.

مثلاً فرض کنیم  $L$  یک خط اقلیدسی با معادله  $\beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$  باشد و با توجه به

جواب تمرین ۱-۱ یادآوری می‌کنیم که شیب  $L$  برابر  $\frac{\operatorname{Re}(\beta)}{\operatorname{Im}(\beta)}$  است.

دیدیم که  $f$  خط  $L$  را به خط اقلیدسی  $f(L)$  با معادله زیر می‌برد:

$$\frac{\beta}{a}w + \overline{\left(\frac{\beta}{a}\right)w} - \frac{\beta}{a}b - \overline{\frac{\beta}{a}b} + \gamma = 0.$$

که دارای شیب  $\frac{\operatorname{Re}(\beta a)}{\operatorname{Im}(\beta a)}$  است.

### تمرین ۳-۲.

مرکز اقلیدسی و شعاع اقلیدسی تصویر دایره اقلیدسی  $A$  به معادله

$$f(z) = az + b \quad \forall z \in \mathcal{C} \quad \text{را تحت هسمانریختی} \quad \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0.$$

$f(\infty) = \infty$  که در آن  $a, b \in \mathcal{C}$  و  $a \neq 0$  تعیین کنید.

هسمانریختی دیگری از  $\overline{\mathcal{C}}$  وجود دارد که آن را قبلاً در گزاره ۱-۱۱ مورد ملاحظه

قرار دادیم، یعنی  $J: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(\infty) = 0 \text{ و } J(0) = \infty \text{ و } J(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

گزاره ۲-۲.

عضو  $J$  از  $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$  با ضابطه  $J(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$  و  $J(\infty) = 0$  است.

اثبات. مثل گذشته عمل می‌کنیم. فرض کنیم  $A$  یک دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  به معادله  $\alpha z\bar{z} + \beta z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$  باشد که در آن  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  و  $\beta \in \mathbb{C}$ .

قرار می‌دهیم  $w = \frac{1}{z}$  لذا  $z = \frac{1}{w}$ . با جانشین کردن این در معادله  $A$  داریم:

$$\alpha \frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} + \beta \frac{1}{w} + \bar{\beta} \frac{1}{\bar{w}} + \gamma = 0$$

با ضرب در  $w\bar{w}$  مشاهده می‌کنیم که  $w$  در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\alpha + \beta\bar{w} + \bar{\beta}w + \gamma w\bar{w} = 0.$$

چون  $\alpha$  و  $\gamma$  حقیقی و ضرایب  $w$  و  $\bar{w}$  مزدوج یکدیگرند، این نیز معادله یک دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  است. بدین ترتیب اثبات گزاره ۲-۲ تمام می‌شود.

### فهرست المطلوب

همانطوریکه در اثبات گزاره ۲-۱ دیدیم برخی از اطلاعات کمی دایره  $J(A)$  را از اثبات گزاره ۲-۲ بر حسب دایره  $A$  می‌توان به دست آورد.

مثلاً اگر  $A$  دایره‌ای در  $\overline{\mathbb{C}}$  با معادله  $\alpha z + \alpha\bar{z} + \gamma = 0$  باشد آنگاه  $J(A)$  دایره‌ای در  $\overline{\mathbb{C}}$  با مرکز اقلیدسی  $-\frac{\alpha}{\gamma}$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{2}{\gamma}$  و با معادله  $\alpha z + \alpha\bar{z} + \gamma = 0$  است.

### تمرین ۲-۴.

فرض کنیم  $A$  یک دایره اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  با معادله  $|z - z_0| = r$  باشد. شرایطی روی  $r$  و  $z_0$  تعیین کنید به طوری که  $J(A)$  یک خط اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  باشد.

توجه داشته باشید که هر ترکیب ممکن از این دو نوع هسمانریختی  $\overline{\mathbb{C}}$

یعنی  $f(z) = az + b$  که در آن  $a \neq 0, a, b \in \overline{\mathbb{C}}$  و  $J(z) = \frac{1}{z}$  به

شکل  $m(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  می باشد که در آن  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  است. این مطلب منجر به تعریف زیر می شود.

### تعریف ۲-۳.

یک تبدیل موبیوس یک تابع  $m: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  به صورت زیر است:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

که در آن  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  و  $ad - bc \neq 0$ . مجموعه همه تبدیلات موبیوس را با  $Möb^+$  نمایش می دهیم.

در اینجا تذکری درباره حساب  $\infty$  ارائه می دهیم. به ازای هر  $a \neq 0$  بدون ابهام می توانیم بنا به پیوستگی  $\infty$  را به مقدار  $\frac{a}{w}$  استناد دهیم. یعنی قرار می دهیم:

$$\frac{a}{\infty} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{a}{w}$$

چون  $a \neq 0$ ،  $\frac{a}{w}$  صفر نیست و با ملاحظه قدر مطلق  $|\frac{a}{w}|$  می توان دید که

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{a}{w} = 0, \quad \frac{a}{0} = \infty, \quad \bar{\mathbb{C}}$$

در  $\bar{\mathbb{C}}$ ، ولی هنوز نمی توانیم معنایی برای  $\frac{\infty}{\infty}$  و  $\frac{0}{0}$  قائل شویم.

به همین ترتیب تصویر  $\infty$  را تحت  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  با پیوستگی تعریف می کنیم، یعنی قرار می دهیم:

$$m(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

مقدار  $m(\infty)$  خوش تعریف است. زیرا یکی از  $a$  یا  $c$  باید غیر صفر باشد، چون از تعریف تبدیل موبیوس می دانیم که  $ad - bc \neq 0$ .

مشاهده کنید که چون  $m(\infty) = \frac{a}{c}$  داریم « $m(\infty) = \infty$  اگر و فقط اگر  $c = 0$ »

بعلاوه چون  $m(0) = \frac{b}{a}$  داریم « $m(0) = 0$  اگر و فقط اگر  $b = 0$ ».

همانطوریکه در تمرین ۲-۵ می بینیم، می توان عبارت صریحی برای وارون یک تبدیل مویوس نوشت. چون ترکیب دو تبدیل مویوس یک تبدیل مویوس است (که بررسی آن را به عهده خواننده واگذار می کنیم)، مجموعه تبدیلات مویوس  $Möb^+$  تحت عمل ترکیب با عضو همانی  $e: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  با ضابطه  $e(z) = z$  یک گروه است.

## تمرین ۲-۵.

برای اثبات اینکه تبدیلات مویوس دو سویی هستند، عبارت صریحی برای وارون

$$\text{تبدیل مویوس } m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ ارائه دهید.}$$

همانطوریکه متذکر شده ایم شکل یک تبدیل مویوس خیلی شبیه شکل

همسانریختی هایی از  $\overline{\mathbb{C}}$  است که قبلاً در این بخش با آنها برخورد داشتیم، یعنی

$$f(\infty) = \infty \text{ و } f(z) = az + b \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$$

که در آن  $a, b \in \mathbb{C}$  و  $a \neq 0$  و همچنین

$$J(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ و } J(0) = \infty \text{ و } J(\infty) = 0.$$

در واقع هر تبدیل مویوس  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  را می توان به صورت ترکیبی از چنین

همسانریختی هایی نوشت.

## قضیه ۲-۴.

تبدیل مویوس  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  را در نظر می گیریم که در آن  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$\text{و } ad - bc \neq 0.$$

$$\text{اگر } c = 0, \text{ آنگاه } m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

اگر  $c \neq 0$ , آنگاه  $m(z) = f(J(g(z)))$  که در آن  $g(z) = c^x z + cd$  و

$$f(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c} \text{ ، بعلاوه } f(\infty) = \infty = g(\infty).$$

اثبات. اثبات این قضیه با محاسبه مستقیم است. اگر  $c = 0$ , آنگاه چیزی برای اثبات

نمی ماند. اگر  $c \neq 0$ , آنگاه

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)c}{(cz+d)c} = \frac{acz+bc}{c^x z + cd}$$

چون  $ad - bc \neq 0$  داریم:

$$m(z) = \frac{acz + bc}{c'z + cd} = \frac{acz + ad - (ad - bc)}{c'z + cd} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c'z + cd} = f(J(g(z))),$$

۲-۴ تمام است. که در آن  $g(z) = c'z + cd$  و  $f(z) = -(ad - bc) + \frac{a}{c}$ . بدین ترتیب اثبات قضیه

### فهرالمطلوب

قضیه ۲-۴ چند نتیجه فوری دارد. اول اینکه هر تبدیل موبیوس یک همسانریختی است، چون یک ترکیب از همسانریختی‌ها است. یعنی:

$$\text{Möb}^+ \subseteq \text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$$

ثانیاً هر تبدیل موبیوس دایره  $\overline{\mathbb{C}}$  را به دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌برد، چون ترکیبی از توابع با این خاصیت است. مشاهده این مطلب را با مشاهدات قبلی در قضیه زیر ترکیب می‌کنیم.  
قضیه ۲-۵.

$$\text{Möb}^+ \subseteq \text{Homeo}^\circ(\overline{\mathbb{C}})$$

توجه داریم که شرط  $ad - bc \neq 0$  در تعریف تبدیل موبیوس بی‌حکمت نیست.

### تمرین ۲-۶.

تابع  $p: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  را با ضابطه  $p(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  که در آن  $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$  و  $ad - bc = 0$  در نظر بگیرید. ثابت کنید  $p$  یک همسانریختی  $\overline{\mathbb{C}}$  نیست.

این بخش را با یک دسته بندی نادقیق از تبدیلات موبیوس بر اساس تعداد نقاط ثابت، خاتمه می‌دهیم. یک نقطه ثابت تبدیل موبیوس  $m$  یک نقطه  $z$  از  $\overline{\mathbb{C}}$  است که در  $m(z) = z$  صدق کند. فرض می‌کنیم  $m$  همانی نباشد.

در این بخش قبلاً دیدیم که در مورد  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  داریم  $m(\infty) = \frac{a}{c}$  و لذا  $m(\infty) = \infty$  اگر و فقط اگر  $c = 0$ .

اگر  $c = 0$ ، آنگاه  $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  و نقطه ثابت  $m$  در  $\mathbb{C}$  جواب معادله

$m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$  است. اگر  $\frac{a}{d} = 1$  جوابی در  $\mathbb{C}$  وجود ندارد در حالی که اگر  $\frac{a}{d} \neq 1$ ،

آنگاه  $z = \frac{b}{d-a}$  تنها جواب در  $\mathcal{C}$  است. به ویژه اگر  $c=0$ ، آنگاه  $m$  یک یا دو نقطه ثابت دارد.

اگر  $c \neq 0$ ، آنگاه  $m(\infty) \neq \infty$  و لذا نقاط ثابت  $m$  جواب‌های معادله  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$  در  $\mathcal{C}$  هستند، که ریشه‌های چند جمله‌ای درجه دوم  $z^2 + (d-a)z - b = 0$  هستند. به ویژه اگر  $c \neq 0$ ، آنگاه دوباره  $m$  یک یا دو نقطه ثابت دارد.

این تحلیل نتیجه مهم زیر را دارد.

### قضیه ۲-۶.

فرض کنیم  $m(z)$  یک تبدیل موبیوس باشد که سه نقطه متمایز  $\overline{\mathcal{C}}$  را ثابت نگه می‌دارد. آنگاه  $m$  تبدیل همانی است؛ یعنی به ازای هر  $z \in \overline{\mathcal{C}}$ ،  $m(z) = z$ .

### تمرین ۲-۷.

نقاط ثابت تبدیلات موبیوس زیر را محاسبه کنید.

الف)  $m(z) = \frac{2z+5}{3z-1}$  (ب)  $m(z) = 7z+6$  (ج)  $J(z) = \frac{1}{z}$  (د)  $m(z) = \frac{z}{z+1}$

### ۲-۲. خواص متعدی بودن عمل $Möb^+$

یکی از اساسی‌ترین خواص  $Möb^+$  آن است که روی  $\overline{\mathcal{C}}$  به طور متعدی سه گانه یکتا عمل می‌کند. منظورمان این است که با در دست داشتن دو سه‌تایی  $(z_1, z_2, z_3)$  و  $(w_1, w_2, w_3)$  از نقاط مختلف  $\overline{\mathcal{C}}$  یک عضو یکتای  $m$  در  $Möb^+$  وجود دارد به طوری که  $m(z_1) = w_1$ ،  $m(z_2) = w_2$ ،  $m(z_3) = w_3$ .

طبق معمول برای اثبات وجود و یکتایی، اول از یکتایی شروع می‌کنیم. سپس یک تبدیل خاص با آنچه در دست داریم می‌سازیم و بنابر یکتایی مشاهده می‌کنیم که این تبدیل باید همان تبدیل یکتا باشد.

لذا به ازای دو سه‌تایی مفروض  $(z_1, z_2, z_3)$  و  $(w_1, w_2, w_3)$  از نقاط مختلف  $\overline{\mathcal{C}}$  فرض می‌کنیم دو عضو  $m$  و  $n$  از  $Möb^+$  وجود داشته باشند که در  $n(z_1) = w_1 = m(z_1)$ ،  $n(z_2) = w_2 = m(z_2)$  و  $n(z_3) = w_3 = m(z_3)$  صدق کنند. بنابر قضیه ۲-۶ می‌دانیم که چون  $m^{-1}on$  سه نقطه متمایز  $\overline{\mathcal{C}}$  را ثابت نگه می‌دارد همانی است و لذا  $m = n$ . بدین ترتیب اثبات یکتایی تمام است.



برای نشان دادن وجود یک تبدیل موبیوس که  $(z_1, z_r, z_r)$  را به  $(w_1, w_r, w_r)$  ببرد، کافی است نشان دهیم یک تبدیل موبیوس  $m$  هست که در  $m(z_r) = 1$ ،  $m(z_1) = 0$  و  $m(z_r) = \infty$  صدق می‌کند. اگر بتوانیم چنین  $m$  را بسازیم، همچنین می‌توانیم یک تبدیل موبیوس  $n$  بسازیم که در شرایط  $m(w_r) = \infty$  و  $m(w_1) = 1$ ،  $m(w_r) = 0$  صدق کند و در این صورت  $n \circ m$  تبدیل مطلوب است که  $(z_1, z_r, z_r)$  را به  $(w_1, w_r, w_r)$  می‌برد. لذا باقی می‌ماند که فقط یک تبدیل موبیوس  $m$  بسازیم که در  $m(z_1) = 0$ ،  $m(z_r) = 1$  و  $m(z_r) = \infty$  صدق کند. در حالتی کار می‌کنیم که همه  $z_k$  ها در  $\mathbb{C}$  قرار داشته باشند و حالتی را که یکی از  $z_k$  ها  $\infty$  است به صورت تمرین می‌گذاریم. صریحاً تابع زیر را روی  $\bar{\mathbb{C}}$  در نظر می‌گیریم:

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_r} \frac{z_r - z_r}{z_r - z_1} = \frac{(z - z_1)(z_r - z_r)}{(z - z_r)(z_r - z_1)}$$

بنا بر نحوه تعریف آن داریم،  $m(z_1) = 0$ ،  $m(z_r) = 1$  و  $m(z_r) = \infty$

بعلاوه چون  $z_k$  ها متمایز هستند، داریم:

$$(z_r - z_r)(-z_r)(z_r - z_1) - (-z_1)(z_r - z_r)(z_r - z_1) = (z_r - z_r)(z_1 - z_r)(z_r - z_1) \neq 0$$

و لذا  $m$  یک تبدیل موبیوس است.

### تمرین ۲-۸

شکل کلی تبدیل موبیوسی را به دست آورید که سه‌تایی  $(\infty, z_r, z_r)$  را به سه‌تایی  $(1, 0, \infty)$  ببرد.

طبق معمول، ساختن عملی یک تبدیل موبیوس خاص که یک سه‌تایی را به سه‌تایی دیگر ببرد، نسبتاً ناخوشایند است. مثلاً دو سه‌تایی  $(2i, 1 + i, 3)$  و  $(2 + 2i, 4)$  را در نظر می‌گیریم و تبدیل موبیوسی می‌سازیم که  $(2i, 1 + i, 3)$  را به  $(2 + 2i, 4)$  ببرد. توجه: این مثال برای اینکه از نظر عددی جالب باشد انتخاب نشده است.

با توجه به اثبات وجود، تبدیل موبیوس  $m$  را که  $(2i, 1 + i, 3)$  را به  $(1, 0, \infty)$  تبدیل موبیوس  $n$  را که  $(2 + 2i, 4)$  را به  $(1, 0, \infty)$  می‌برند، می‌سازیم.

تبدیل موبیوس  $m$  که  $(2i, 1 + i, 3)$  را به  $(1, 0, \infty)$  می‌برد، به صورت زیر است:

$$m(z) = \frac{(z - 2i)(1 + i - 3)}{(z - 3)(1 + i - 2i)} = \frac{(-2 + i)z + 2 + 4i}{(1 - i)z - 3 + 2i}$$

تبدیل مویوس  $n$  که  $(0, 2 + 2i, 4)$  را به  $(0, 1, \infty)$  می برد به صورت زیر است:

$$n(z) = \frac{z}{z-4} \cdot \frac{(2+2i-4)}{(2+2i)} = \frac{(-2+2i)z}{(2+2i)z-8-8i}$$

بنابراین تبدیلی که دنبال آن هستیم به صورت زیر است:

$$n^{-1} \circ m(z) = \frac{(24+8i)z+16-48i}{(6+6i)z+4-24i}$$

تا اینجا سه تایی های مرتب از نقاط متمایز  $\bar{C}$  را در نظر گرفتیم. اگر سه تایی های نامرتب را مورد ملاحظه قرار دهیم و به ویژه، اگر بخواهیم تبدیلات مویوسی را بیابیم که یک سه تایی نامرتب از نقاط متمایز را به یک سه تایی نامرتب دیگر می برند، آنگاه اثبات وجود بدون تغییر معتبر است ولی اثبات یکتایی دیگر برقرار نیست.

## تمرین ۲-۹.

سه تایی نامرتب  $T = \{0, 1, \infty\}$  از نقاط  $\bar{C}$  را در نظر بگیرید. همه تبدیلات مویوس  $m$  را تعیین کنید که در  $m(T) = T$  صدق می کنند.

عمل  $Möb^+$  روی مجموعه سه تایی های نقاط متمایز  $\bar{C}$  مثالی از یک عمل گروهی است.

## تعریف ۲-۷.

گروه  $G$  روی یک مجموعه  $X$  عمل می کند، هرگاه یک همریختی از  $G$  به گروه  $bij(X)$  دو سوئی های  $X$  وجود داشته باشد.

یعنی یک گروه  $G$  روی مجموعه  $X$  عمل می کند، هرگاه هر عضو  $g$  منجر به یک دو سوئی از  $X$  شود و بعلاوه ضرب اعضاء  $G$  با توجه به عمل گروه متناظر با ترکیب دو سوئی های متناظر باشد.

در این کتاب در مورد عمل گروه خیلی کار نمی کنیم، به جز اینکه از برخی از اصطلاحات پایه ای استفاده می کنیم. برای اطلاعات بیشتر، خواننده مشتاق باید یک کتاب درباره جبر مجرد مثل هرشتاین<sup>۱</sup> [۲] را مطالعه کند. از نظر فلسفی با ملاحظه عمل گروهی

<sup>1</sup> Herstein

می‌توان به گروه نه تنها به عنوان یک شیئی مجرد بلکه به عنوان گردایه‌ای از تقارن‌های خوش‌رفتار مجموعه  $X$  نگاه کرد.

صفات زیادی وجود دارد که درباره عمل گروه به کار می‌آید، همچنین محدودیت‌هایی که در مورد انواع دوسویی‌های مورد ملاحظه اعمال می‌شود.

مثلاً می‌گوئیم  $G$  به طور متعدی روی  $X$  عمل می‌کند، اگر به ازای هر زوج  $x$  و  $y$  از اعضای  $X$  یک عضو  $g$  از  $G$  وجود داشته باشد که در  $g(x) = y$  صدق کند. این یکی از خواصی است که خیلی مورد توجه ما است. لم زیر یک شرط کمی ساده‌تر برای تعیین متعدی بودن یک عمل به دست می‌دهد و صرفاً تعمیم ایده‌ای است که در اثبات متعدی بودن عمل  $Möb^+$  روی سه‌تایی‌های نقاط متمایز  $\bar{C}$  به کار رفت.

## لم ۲-۸

فرض می‌کنیم گروه  $G$  روی مجموعه  $X$  عمل کند و فرض کنیم  $x$  یک نقطه  $X$  باشد. فرض می‌کنیم به ازای هر نقطه  $y$  از  $X$  یک عضو  $g$  از  $G$  وجود دارد به طوری که  $g(y) = x$ . در این صورت  $G$  روی  $X$  به طور متعدی عمل می‌کند. اثبات. به ازای دو نقطه  $y$  و  $z$  از  $X$  اعضای  $g_y$  و  $g_z$  از  $G$  را انتخاب می‌کنیم به طوری که  $g_y(y) = x = g_z(z)$ . در این صورت  $g_z^{-1} \circ g_y(y) = z$  و اثبات لم تمام است.

## فهرالمطلوب

همچنین با الهام از عمل  $Möb^+$  روی سه‌تایی‌های نقاط متمایز  $\bar{C}$ ، گوئیم گروه  $G$  به طور متعدی و یکتا روی مجموعه  $X$  عمل می‌کند، هرگاه به ازای هر زوج  $x$  و  $y$  از اعضای  $X$  یک و فقط یک عضو  $g$  از  $G$  وجود داشته باشد به طوری که  $g(x) = y$ . با این زبان آنچه درباره عمل  $Möb^+$  روی سه‌تایی‌های نقاط متمایز  $\bar{C}$  می‌دانیم، مجدداً بیان می‌کنیم.

## قضیه ۲-۹

$Möb^+$  به طور متعدی و یکتا روی  $T$ ، مجموعه سه‌تایی‌های نقاط متمایز  $\bar{C}$  عمل می‌کند.

مجموعه‌هایی از اشیاء دیگر در  $\bar{C}$  وجود دارند که  $Möb^+$  روی آنها به طور متعدی عمل می‌کند.

قضیه ۲-۱۰.

$Möb^+$  به طور متعدی روی  $C$ ، مجموعه دایره  $\bar{C}$  عمل می‌کند.

**اثبات.** اولین قدم برای اثبات قضیه ۲-۱۰ این است که ببینیم یک سه‌تایی از نقاط متمایز  $\bar{C}$  یک دایره یکتا در  $\bar{C}$  مشخص می‌کند.

برای مشاهده این مطلب فرض کنیم  $(z_1, z_2, z_3)$  یک سه‌تایی از نقاط متمایز  $\bar{C}$  باشد. اگر همه  $z_k$ ها در  $C$  بوده و روی یک خط نباشند، آنگاه یک دایره اقلیدسی یکتا هست که از هر سه نقطه می‌گذرد. مرکز این دایره، نقطه اشتراک هر یک از دو عمود منصف پاره‌خط‌هایی است که از دو نقطه  $z_1, z_2$  و  $z_2, z_3$  را به هم وصل می‌کند. اگر همه  $z_k$ ها در  $C$  و هم خط نباشند، آنگاه یک خط اقلیدسی یکتا هست که از هر سه نقطه می‌گذرد. اگر یکی از  $z_k$ ها  $\infty$  باشد، آنگاه یک خط اقلیدسی یکتا هست که از دو نقطه دیگر می‌گذرد.

ولی در حالی که هر سه‌تایی از نقاط متمایز  $\bar{C}$  یک دایره یکتا در  $\bar{C}$  مشخص می‌کند، عکس آن صحیح نیست. با در دست داشتن یک دایره  $A$  در  $\bar{C}$  بی‌نهایت سه‌تایی از نقاط متمایز  $\bar{C}$  وجود دارد که منجر به  $A$  می‌شوند.

لذا فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو دایره در  $\bar{C}$  باشند یک سه‌تایی از نقاط متمایز روی  $A$  و یک سه‌تایی از نقاط متمایز روی  $B$  انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم  $m$  تبدیل موبیوسی باشد که سه‌تایی مشخص کننده  $A$  را به سه‌تایی مشخص کننده  $B$  ببرد. چون  $m(A)$  و  $B$  دایره‌ای در  $\bar{C}$  هستند که از یک سه‌تایی از نقاط متمایز می‌گذرند، و اینکه تبدیلات موبیوس، دایره در  $\bar{C}$  را به دایره در  $\bar{C}$  می‌برند، داریم  $m(A) = B$ . به این ترتیب اثبات قضیه ۲-۱۰ تمام است.

### فهرست‌المطلوب

ولی، این حقیقت که یک دایره در  $\bar{C}$  یک سه‌تایی یکتا از نقاط متمایز  $\bar{C}$  مشخص نمی‌کند، به این معنی است که این عمل به طور متعدی یکتا نیست. یعنی به ازای دو دایره مفروض در  $\bar{C}$  در واقع تبدیلات موبیوس زیادی وجود دارد که یک دایره را به دیگری می‌برند.

مثلاً می‌توان به حل تمرین ۲-۹ اشاره کرد. فرض کنیم  $(z_1, z_2, z_3)$  یک سه‌تایی از نقاط متمایز و  $A$  دایره‌ای در  $\bar{C}$  باشد که توسط  $(z_1, z_2, z_3)$  مشخص شده است. آنگاه نگاشت همانی  $A$  را به  $A$  می‌برد. ولی تبدیل موبیوسی که  $(z_1, z_2, z_3)$  را به  $(z_1, z_2, z_3)$  می‌برد نیز  $A$  را به  $A$  می‌برد. به این پدیده در بخش ۲-۸ نیز بر می‌خوریم که در آن مجموعه تبدیلات موبیوسی را معین می‌کنیم که  $A$  را به  $A$  می‌برند.

این بحث را می‌توان به این شکل بازنویسی کرد که یک تابع پوشای خوش‌تعریفی از مجموعه  $T$ ، سه‌تایی‌های نقاط مختلف  $\bar{C}$  به مجموعه  $C$ ، دوایر در  $\bar{C}$  وجود دارد. چون  $Möb^+$  به طور متعددی روی  $T$  عمل می‌کند، می‌توان از تابع  $Tz$  به  $C$  استفاده کرده تا عمل  $Möb^+$  را از  $T$  به  $C$  پایین بیاوریم. یکتا نبودن عمل  $Möb^+$  روی  $C$  بازتاب این حقیقت است که این تابع یک به یک نیست.

همچنین می‌توانیم عمل  $Möb^+$  را روی  $D$ ، مجموعه قرص‌های  $\bar{C}$  در نظر بگیریم.

قضیه ۲-۱۱.

$Möb^+$  به طور متعددی روی  $D$  مجموعه قرص‌های  $\bar{C}$  عمل می‌کند.

اثبات. همانطوریکه می‌توان انتظار داشت، اثبات قضیه ۲-۱۱ خیلی شبیه اثبات قضیه ۲-۱۰ است. در واقع اثبات‌ها فقط از یک جهت متفاوتند.

فرض کنیم  $D$  و  $E$  دو قرص در  $\bar{C}$  باشند که  $D$  بوسیله دایره  $C_D$  در  $\bar{C}$  و  $E$  بوسیله دایره  $C_E$  در  $\bar{C}$  مشخص می‌شود. چون  $Möb^+$  روی مجموعه  $C$  از دوایر در  $\bar{C}$  به طور متعددی عمل می‌کند، یک تبدیل موبیوس  $m$  وجود دارد که  $m(C_D) = C_E$  و لذا  $m(D)$  قرصی است که توسط  $C_E$  مشخص می‌شود.

ولی دو قرص بوسیله  $C_E$  مشخص می‌شود و هیچ راهی نداریم که بدانیم  $m(D) = E$  یا  $m(D)$  قرص دیگری است که توسط  $C_E$  مشخص می‌شود. اگر  $m(D) = E$  حکم ثابت است.

اگر  $m(D) \neq E$ ، آنگاه باید یک تبدیل موبیوس پیدا کنیم که  $C_E$  را به خودش ببرد و دو قرصی که توسط  $C_E$  مشخص می‌شود را با هم عوض کند.

این ساختن خیلی مشکل نیست. ابتدا با دایره‌ای که در  $\bar{C}$  می‌شناسیم کار می‌کنیم و سپس خاصیت تعدی  $Möb^+$  را روی مجموعه دوایر  $\bar{C}$  به کار برده تا این جواب در مورد این دایره خاص را به هر دایره دیگر انتقال دهیم.

هم اکنون جوابی برای  $\overline{IR}$  در مورد این سؤال دیدیم؛ یعنی تبدیل مویوس

$J(z) = \frac{1}{z}$  چون  $J(\cdot) = \infty$ ،  $J(\infty) = 0$  و  $J(1) = 1$  مشاهده می‌شود که  $J$ ،  $\overline{IR}$  را به خودش می‌برد. چون  $J(i) = \frac{1}{i} = -i$  می‌بینیم که  $J$ ،  $I\mathbb{H}$  را به خودش نمی‌برد و لذا  $J$  دو دیکسی را که بوسیله  $\overline{IR}$  مشخص می‌شوند، با هم عوض می‌کند. حال فرض کنیم  $A$  یک دایره دلخواه در  $\overline{C}$  باشد و  $n$  تبدیل مویوسی باشد که  $n(A) = \overline{IR}$ . آنگاه تبدیل مویوس  $n^{-1} \circ J \circ n$  را به خودش می‌برد و دو قرصی را که توسط  $A$  مشخص می‌شود با هم جابجا می‌کند.

به ویژه، تبدیل مویوس  $p$  چنان موجود است که  $p(C_E) = C_E$  و  $p$  جای دو دیسک تعیین شده با  $C_E$  را با یکدیگر جا به جا می‌کند. بنابراین، در حالتیکه  $m(D) \neq E$ ، ترکیب  $p \circ m$  در شرایط  $p \circ m(C_D) = p(C_E) = C_E$  و  $p \circ m(D) = E$  صدق می‌کند.

### فهرالمطلوب

بدین ترتیب اثبات قضیه ۲-۱۱ تمام است.

همانطوریکه در تعیین تبدیل مویوسی که یک سه‌تایی از نقاط متمایز را به یک سه‌تایی دیگر از نقاط متمایز ببرد دیدیم، محاسبه تبدیل مویوسی که یک قرص  $\overline{C}$  را به قرص دیگری ببرد قدری شلوغ است.

دو قرص  $E = \{z \in \overline{C} \mid |z - (4 + 5i)| < 1\}$  و  $D = \{z \in \overline{C} \mid |z| < 2\}$  را در نظر می‌گیریم. تبدیلات مویوس متفاوت زیادی وجود دارد که  $D$  را به  $E$  می‌برند. یکی را می‌سازیم.

فرض کنیم  $m(z) = z - 4 - 5i$ . چون  $E$  یک قرص اقلیدسی به مرکز  $4 + 5i$  و شعاع ۱ است،  $m(E)$  قرص اقلیدسی با مرکز  $m(4 + 5i) = 0$  و شعاع ۱ است، حال اگر  $m$  را با  $n(z) = 2z$  ترکیب کنیم می‌بینیم که  $n \circ m(E)$  قرص اقلیدسی به مرکز ۰ و شعاع ۲ است و لذا همانطوریکه می‌خواستیم  $n \circ m(E) = D$ . با نوشتن  $n \circ m$  به طور صریح داریم:

$$n \circ m(z) = n(z - 4 - 5i) = 2z - 8 - 10i$$

تمرین ۲-۱۰.

یک تبدیل مویوس که  $ID = U_1(0)$ ، قرص واحد در  $\overline{C}$  را به  $I\mathbb{H}$  ببرد به طور

صریح ارائه دهید.

۲-۳. نسبت ناهمساز<sup>۱</sup>

در بخش ۲-۲ خواص تعدی  $Möb^+$  را مورد ملاحظه قرار دادیم. دیدیم که  $Möb^+$  به طور متعدی و یکتا روی  $T$  مجموعه سه تایی‌های مرتب از نقاط متمایز  $\bar{\mathcal{C}}$  عمل می‌کند و روی  $C$  مجموعه دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  و  $D$  مجموعه قرص‌های  $\bar{\mathcal{C}}$  به طور متعدی عمل می‌کند. در این بخش نوع دیگری از سؤال‌ها را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم و از سؤال در مورد توابعی روی  $\bar{\mathcal{C}}$  که تحت  $Möb^+$  ناوردا هستند، شروع می‌کنیم. شکل‌های مختلف این سؤال در طول کتاب گاه و بیگاه فکرمان را مشغول می‌کند.

## تعریف ۲-۱۲.

یک تابع  $f$  را تحت  $Möb^+$  ناوردا می‌نامند، هرگاه  $f: U \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  که  $U$  یک باز در  $\bar{\mathcal{C}}$  بوده به طوریکه به ازای هر  $m \in Möb^+$  و هر  $z_1, \dots, z_k \in U$  داشته باشیم:

$$f(z_1, \dots, z_k) = f(m(z_1), \dots, m(z_k))$$

در تعریف ۲-۱۲ لازم است که  $U$  تحت عمل  $Möb^+$  ناوردا باشد، یعنی

$$\text{اگر } z_1, \dots, z_k \in U \text{ و } m \in Möb^+, \text{ آنگاه } m(z_1), \dots, m(z_k) \in U$$

## تمرین ۲-۱۱.

نشان دهید تابع  $f: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  با ضابطه  $f(z) = z^2$  و  $f(\infty) = \infty$ ، تحت  $Möb^+$  ناوردا نیست. تعیین کنید آیا زیرگروهی نابديهی از  $Möb^+$  وجود دارد که تحت آن  $f$  ناوردا باشد؟

در واقع از تعدی سه گانه عمل  $Möb^+$  روی  $\bar{\mathcal{C}}$  نتیجه می‌شود که به ازای  $1 \leq n \leq 3$  تنها تابع ناوردای  $f: \bar{\mathcal{C}}^n \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  تحت  $Möb^+$ ، تابع ثابت است.

در مورد توابع  $f: \bar{\mathcal{C}}^n \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  به ازای  $n \geq 4$  وضع فرق می‌کند و جالب‌تر است. یک مثال برای یک تابع ناوردای چهار متغیره روی  $\bar{\mathcal{C}}$  تحت عمل  $Möb$ ، نسبت ناهمساز است.

## تعریف ۲-۱۳.

به ازای چهار نقطه متمایز  $z_1, z_2, z_3, z_4$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  نسبت ناهمساز  $z_1, z_2, z_3, z_4$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

<sup>۱</sup> Cross ratio

$$[z_1, z_r; z_r, z_r] = \frac{(z_1 - z_r)(z_r - z_r)}{(z_1 - z_r)(z_r - z_r)}$$

به روال معمولمان، اگر یکی از  $z_k$  ها  $\infty$  باشد، نسبت ناهمساز را بنا بر پیوستگی

تعریف می‌کنیم. یعنی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} [\infty, z_r; z_r, z_r] &= \lim_{z \rightarrow \infty} [z, z_r; z_r, z_r] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z - z_r)(z_r - z_r)}{(z - z_r)(z_r - z_r)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{z_r}{z})(z_r - z_r)}{(1 - \frac{z_r}{z})(z_r - z_r)} = \frac{z_r - z_r}{z_r - z_r} \end{aligned}$$

نسبت‌های ناهمساز  $[z_1, \infty; z_r, z_r]$ ،  $[z_1, z_r; \infty, z_r]$  و  $[z_1, z_r; z_r, \infty]$  نیز به همین

ترتیب تعریف می‌شوند.

### تمرین ۲-۱۲.

نشان دهید نسبت ناهمساز، بعنوان تابعی روی زیرمجموعه  $U$  از  $\overline{\mathcal{C}}^+$  متشکل از چهارتایی‌های متمایز از نقاط  $\overline{\mathcal{C}}$ ، تحت  $Möb^+$  ناوردا است.

### تمرین ۲-۱۳.

تعیین کنید که آیا تابع  $F: \overline{\mathcal{C}}^+ \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$  که تحت  $Möb^+$  ناوردا باشد، وجود دارد بطوریکه به ازای هر چهارتایی  $z_1, z_r, z_r, z_r$  از نقاط متمایز  $\overline{\mathcal{C}}$  داشته باشیم

$$F(z_1, z_r, z_r, z_r) = [z_1, z_r; z_r, z_r]$$

حالت‌هایی وجود دارد که در آنها نسبت ناهمساز به طور ساده محاسبه می‌شود، مثلاً

$[z, 0; 1, z]$ . بنا بر آنچه در بالا گفته شد، داریم:

$$[\infty, 0; 1, z] = \frac{1}{1-z} = \frac{1-\bar{z}}{|1-z|^2}$$

به ویژه،  $[z, 0; 1, z]$  حقیقی است اگر و فقط اگر  $\bar{z}$  در نتیجه  $z$  حقیقی باشد.



با ترکیب این مطلب با این حقیقت که نسبت ناهمساز بعنوان تابعی روی مجموعه چهارتایی‌های متمایز در  $\bar{\mathcal{C}}$ ، تحت  $Möb^+$  ناوردا است، محک ساده‌ای برای اینکه چهار نقطه متمایز از  $\bar{\mathcal{C}}$  روی دایره‌ای در  $\bar{\mathcal{C}}$  باشند، به دست می‌آوریم.  
گزاره ۲-۱۴.

فرض کنیم  $z_1, z_2, z_3, z_4$  و  $z_1, z_2, z_3, z_4$  چهار نقطه متمایز در  $\bar{\mathcal{C}}$  باشد. آنگاه  $z_1, z_2, z_3, z_4$  و  $z_1, z_2, z_3, z_4$  روی یک دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  قرار دارند اگر و فقط اگر نسبت ناهمساز  $[z_1, z_2; z_3, z_4]$  حقیقی باشد. اثبات. فرض کنیم  $z_1, z_2, z_3, z_4$  چهار نقطه متمایز در  $\bar{\mathcal{C}}$  باشند و  $m$  تبدیل موبیوسی باشد که در  $m(z_1) = \infty$  و  $m(z_2) = 0$  و  $m(z_3) = 1$  صدق می‌کند. توجه کنید که  $m(z_1) = \infty$  و  $m(z_2) = 0$  و  $m(z_3) = 1$  و  $m(z_4)$  روی یک دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  یعنی  $\bar{\mathbb{R}}$  قرار دارند اگر و فقط اگر  $m(z_4)$  حقیقی باشد و در نتیجه  $[m(z_1), m(z_2); m(z_3), m(z_4))]$  حقیقی است.

چون  $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [m(z_1), m(z_2); m(z_3), m(z_4))]$  و چون  $Möb^+$  دوایر در  $\bar{\mathcal{C}}$  را به دوایر در  $\bar{\mathcal{C}}$  می‌برد نتیجه می‌شود که  $z_1, z_2, z_3, z_4$  روی یک دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  قرار دارند اگر و فقط اگر  $[z_1, z_2; z_3, z_4]$  حقیقی باشد. اثبات گزاره ۲-۱۴ تمام است.

### فهوم‌المطلوب

تمرین ۲-۱۴.

آیا  $2+3i$  و  $2i$  و  $1-i$  و  $4$  روی یک دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  قرار دارند؟

تمرین ۲-۱۵.

عدد حقیقی  $s$  را طوری تعیین کنید که نقاط  $2+3i$  و  $2i$  و  $1-i$  و  $s$  روی یک دایره در  $\bar{\mathcal{C}}$  قرار گیرند.

در تعریف نسبت ناهمساز تا اندازه‌ای انتخاب نهفته است، چون آزاد هستیم که مختصات را جابجا کنیم. مثلاً می‌توانیم نسبت‌های ناهمساز را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4]_r = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$

و

$$[z_1, z_2; z_3, z_4]_r = \frac{(z_2 - z_1)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_4)(z_3 - z_1)}$$

توجه داریم که در اینجا همه انتخاب‌های ممکن برای نسبت ناهمساز، از جمله سه نسبت مذکور در این بخش خیلی به هم مربوطند.

### تمرین ۲-۱۶.

دو نسبت ناهمساز  $[z_1, z_2; z_3, z_4]_p$  و  $[z_1, z_2; z_3, z_4]_p$  را برحسب نسبت ناهمساز استاندارد  $[z_1, z_2; z_3, z_4]$  بیان کنید.

## ۲-۴. دسته بندی تبدیلات مویوس

دسته بندی تبدیلات مویوس که در بخش ۲-۱ بر حسب تعداد نقاط ثابت داده شد، همانطوریکه در آن موقع نوشتیم خیلی کامل نبود و به طور قابل ملاحظه‌ای می‌توان آن را اصلاح کرد.

قبل از پرداختن به اصلاح این دسته بندی، مفهوم یکی بودن را در مورد تبدیلات مویوس معرفی می‌کنیم.

### تعریف ۲-۱۵.

دو تبدیل مویوس  $m_1$  و  $m_2$  را مزدوج گویند، هرگاه یک تبدیل مویوس  $p$  وجود داشته باشد به طوری که  $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$ .

از نظر هندسی اگر  $m_1$  و  $m_2$  توسط  $p$  مزدوج باشند، آنگاه عمل  $m_1$  روی  $\overline{C}$ ، همان عمل  $m_2$  روی  $\overline{C}$  است. یعنی مزدوج‌گیری نوعی تغییر مختصات روی  $\overline{C}$  است.

### تمرین ۲-۱۷.

فرض کنید  $m$  و  $n$  تبدیلات مویوسی باشند که توسط  $p$  مزدوجند، به طوری که  $m = p \circ n \circ p^{-1}$ . ثابت کنید تعداد نقاط ثابت  $m$  و  $n$  در  $\overline{C}$  مساوی است.

ایده اصلی در دسته بندی تبدیلات مویوس آن است که یک تبدیل مویوس را مزدوج یک شکل استاندارد کنیم و سپس این شکل‌های استاندارد را دسته بندی کنیم. در ادامه این بخش با یک تبدیل مویوس  $m$  کار می‌کنیم که همانی نیست.

فرض می‌کنیم  $m$  فقط یک نقطه ثابت در  $\overline{C}$  داشته باشد و آن را  $x$  می‌نامیم. فرض کنیم  $y$  یک نقطه در  $\overline{C} - \{x\}$  باشد و مشاهده می‌کنیم که  $(x, y, m(y))$  یک سه‌تایی

از نقاط متمایز  $\overline{\mathcal{C}}$  است. فرض می‌کنیم  $p$  یک تبدیل مویوس باشد که  $(x, y, m(y))$  را به سه‌تایی  $(\infty, 0, 1)$  ببرد و ترکیب  $p \circ m \circ p^{-1}$  را در نظر می‌گیریم.

بنابر ساختمان  $p$  داریم  $p \circ m \circ p^{-1}(\infty) = p \circ m(x) = p(x) = \infty$  چون  $p \circ m \circ p^{-1}$  را ثابت نگه می‌دارد، آن را می‌توانیم به صورت  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = az + b$  که  $a \neq 0$  بنویسیم. چون تنها نقطه ثابت  $p \circ m \circ p^{-1}$  در  $\overline{\mathcal{C}}$ ،  $\infty$  است و معادله  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z$  هیچ جوابی در  $\mathcal{C}$  ندارد و لذا باید داشته باشیم  $a = 1$ .

چون  $p \circ m \circ p^{-1}(0) = p \circ m(y) = 1$  می‌بینیم که همچنین  $b = 1$  و لذا  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z + 1$  بنابراین هر تبدیل مویوس  $m$  با فقط یک نقطه ثابت، مزدوج با تبدیل مویوس  $n(z) = z + 1$  است. می‌گوییم  $m$  سهموی<sup>۱</sup> است و  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z + 1$  شکل استاندارد آن می‌نامیم.

به عنوان مثال، فرض کنیم  $m(z) = \frac{z}{z+1}$ . چون  $m(\infty) = 1 \neq \infty$ ، نقاط ثابت  $m$  جواب‌های معادله  $m(z) = \frac{z}{z+1} = z$  در  $\mathcal{C}$  است که همان جواب‌های معادله  $z = z^2 + z$  هستند. بنابراین تنها نقطه ثابت  $m$ ، نقطه  $0$  است.

برای پیدا کردن تبدیل مویوس  $p$  که  $m$  را مزدوج شکل استاندارد اش کند، یک نقطه در  $\overline{\mathcal{C}} - \{0\}$  مثل  $\infty$  انتخاب می‌کنیم و با محاسبه می‌بینیم که  $m(\infty) = 1$ . سپس  $p$  را تبدیل مویوسی می‌گیریم که سه‌تایی  $(0, \infty, 1)$  را به سه‌تایی  $(\infty, 0, 1)$  ببرد، یعنی  $p(z) = \frac{i}{iz} = \frac{1}{z}$ .

در بحثی که هم اکنون ارائه شد، ابهامی در انتخاب تبدیل مویوس مزدوج ساز  $p$  وجود دارد و آن اینکه شکل خاص  $p$  به انتخاب  $\gamma$  بستگی دارد که توسط  $m$  ثابت نمی‌ماند. ولی این انتخاب نقش اساسی بازی نمی‌کند.

حال فرض می‌کنیم  $m$  دو نقطه ثابت در  $\overline{\mathcal{C}}$  داشته باشد، آنها را  $x$  و  $y$  می‌نامیم. فرض کنیم  $q$  تبدیل مویوسی باشد که  $q(x) = 0$  و  $q(y) = \infty$  و ترکیب  $q \circ m \circ q^{-1}$  مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

<sup>1</sup> Parabolic

<sup>2</sup> در متن اصلی به اشتباه  $p(z) = \frac{iz}{i}$  نوشته شده است.

بنا به تعریف داریم که  $q \circ m \circ q^{-1}(\infty) = q \circ m(y) = q(y) = \infty$  و اینکه  
 $q \circ m \circ q^{-1}(0) = q \circ m(x) = q(x) = 0$  و لذا به ازای یک  $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$  می‌توان  
 نوشت  $q \circ m \circ q^{-1}(z) = az$  را ضریب  $m$  می‌نامیم.

به منظور بررسی یک مثال خاص، فرض کنیم  $m(z) = \frac{2z+1}{z+1}$ . چون

$m(\infty) = 2 \neq \infty$  نقاط ثابت  $m$  جواب‌های معادله  $m(z) = \frac{2z+1}{z+1} = z$  در  $\mathbb{C}$  بوده که

جواب‌های  $z^2 - z - 1 = 0$  هستند. با استفاده از فرمول جواب معادلات درجه دوم  
 می‌بینیم که نقاط ثابت  $m$  به صورت  $z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$  هستند.

برای پیدا کردن تبدیل مویوس  $q$  که  $m$  را به شکل استانداردش مزدوج کند، تبدیل

مویوسی مانند  $q$  را در نظر می‌گیریم که  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  را به  $0$  و  $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  را به  $\infty$

$$q(z) = \frac{z - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}{z - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})} \quad \text{ببرد، مثل:}$$

در اینجا بجای اینکه ترکیب  $q^{-1} \circ m \circ q$  را به طور صریح محاسبه کنیم که تحقیقاً

می‌توانیم، تنها مقدار ضریب  $m$  را با محاسبه تنها یک مقدار می‌یابیم:

$$a = q \circ m \circ q^{-1}(1) = q \circ m(\infty) = q(2) = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

همانطوریکه در بحث تبدیلات مویوس سهموی گفته شد، در انتخاب تبدیل

مویوس مزدوج ساز  $q$  از آنجاییکه اطلاعات کافی برای مشخص کردن  $q$  به طور یکتا

وجود ندارد، برخی ابهامات وجود دارد. ولی همانطوریکه در دو تمرین زیر مشاهده

می‌شود این انتخاب، نقش اساسی بازی نمی‌کند.

تمرین ۲-۱۸.

فرض کنیم  $m$  یک تبدیل مویوس با دو نقطه ثابت  $x$  و  $y$  باشد، ثابت کنید اگر  $n_1$  و

$n_2$  دو تبدیل مویوس باشند به طوریکه  $n_1(x) = 0 = n_2(x)$  و  $n_1(y) = \infty = n_2(y)$ ، آنگاه

ضرایب  $n_1 \circ m \circ n_1^{-1}$  و  $n_2 \circ m \circ n_2^{-1}$  برابرند.

## تمرین ۲-۱۹.

با همان نمادهایی که هم اکنون در بحث تبدیلات موبیوس با دو نقطه ثابت مطرح شد، ثابت کنید اگر  $m$  را مطابق فوق توسط یک تبدیل موبیوس  $s$  مزدوج کنیم که  $s(x) = \infty$  و  $s(y) = 0$ ، آنگاه ضرب  $s^{-1} \circ m \circ s$  برابر  $\frac{1}{a}$  است.

به عنوان یک نتیجه برای تمرین‌های ۲-۱۸ و ۲-۱۹ مشاهده می‌کنیم که ضرب یک تبدیل موبیوس با دو نقطه ثابت، فقط تا حد وارون آن تعریف می‌شود. بعلاوه جواب تمرین ۲-۱۹ نشان می‌دهد که  $J(z) = \frac{1}{z}$  مزدوج  $m(z) = az$  را به صورت  $m^{-1}(z) = \frac{1}{a}z$  در می‌آورد.

اگر ضرب  $m$  در  $|a|=1$  صدق کند، می‌توان به ازای یک  $\varphi$  در  $(0, \pi)$  نوشت  $a = e^{i\varphi}$  و  $q \circ m \circ q^{-1}(z) = e^{i\varphi}z$  یک دوران حول مبدأ به اندازه زاویه  $\varphi$  است. در این حالت  $m$  را بیضوی<sup>۱</sup> و  $q \circ m \circ q^{-1}(z) = e^{i\varphi}z$  را شکل استاندارد آن می‌نامیم.

اگر ضرب  $m$  در  $|a| = \lambda$  صدق کند، آنگاه می‌توان نوشت  $a = \lambda e^{i\varphi}$  به ازای یک عدد حقیقی مثبت  $\lambda \neq 1$  و یک  $\varphi$  در  $[0, \pi]$  به طوری که  $q \circ m \circ q^{-1}(z) = \lambda e^{i\varphi}z$  ترکیب یک تجانس<sup>۲</sup> (اگر  $\lambda > 1$  یک انبساط و اگر  $\lambda < 1$  یک انقباض) و یک دوران (احتمالاً بدیهی) حول مبدأ به اندازه زاویه  $\varphi$  است. (در این حالت) گوئیم  $m$  با زاویه ثابت<sup>۳</sup> است و  $q \circ m \circ q^{-1}(z) = \lambda e^{i\varphi}z$  را شکل استاندارد آن می‌نامیم.

## تمرین ۲-۲۰.

نوع هر یک از تبدیلات موبیوس تمرین ۲-۷ را از نظر سهموی، بیضوی و یا با زاویه ثابت بودن تعیین کنید.

نام «با زاویه ثابت» از «منحنی با زاویه ثابت»<sup>۴</sup> گرفته شده است که یک منحنی روی کره است که هر یک از خطوط نصف النهارات را با یک زاویه ثابت قطع کند. مدارات، منحنی‌های با زاویه ثابت هستند ولی همچنین منحنی‌های با زاویه ثابتی هستند که به صورت مارپیچ به طرف دو قطب می‌پیچند. دلیل اینکه این تبدیلات موبیوس را با زاویه

<sup>1</sup> Elliptic<sup>2</sup> Dialation<sup>3</sup> Luxodromic<sup>4</sup> Luxodrome

ثابت نامیده‌اند این است که یک منحنی با زاویه ثابت را ناوردانگه می‌دارند.

## ۲-۵. یک نمایش ماتریسی

چنانچه رابطه ترکیب دو تبدیل مویوس را بررسی کنیم، مدرکی به دست می‌آوریم که نشان می‌دهد یک ارتباط قوی بین تبدیلات مویوس و ماتریس‌های  $2 \times 2$  وجود دارد.

تبدیل‌های مویوس  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  و  $n(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  را در نظر می‌گیریم. در این

صورت:

$$\begin{aligned} n \circ m(z) &= \frac{\alpha m(z) + \beta}{\gamma m(z) + \delta} = \frac{\alpha \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) + \beta}{\gamma \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) + \delta} \\ &= \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} \\ &= \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d} \end{aligned}$$

اگر به جای ترکیب بالا، ضرایب  $m$  و  $n$  را درایه‌های یک زوج از ماتریس‌های  $2 \times 2$  در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

و درایه‌های ماتریس حاصل ضرب، متناظر با درایه‌های ترکیب دو تبدیل مویوس، یعنی  $n \circ m$  است.

جزئیات این تناظر بین تبدیلات مویوس و ماتریس‌ها را در این بخش بررسی خواهیم کرد. فعلاً بحث خود را روی استفاده از این تشابه متمرکز می‌کنیم، تا دسته بندی تبدیلات مویوس را که در بخش ۲-۴ مطرح کردیم، پیش ببریم.

دو کمیت عددی اصلی در رابطه با یک ماتریس  $2 \times 2$  وجود دارد: دترمینان و اثر<sup>۱</sup>. با استفاده از این تناظر بین ماتریس‌ها و تبدیلات مویوس، می‌توانیم مفاهیم مشابه را در مورد تبدیلات مویوس تعریف کنیم.

دترمینان  $\det(m)$  تبدیل مویوس  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  را به صورت  $\det(m) = ad - bc$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که دترمینان یک تبدیل مویوس یک کمیت خوش‌تعریف

<sup>۱</sup>trace

نیست. اگر ضرایب  $m$  را در یک عدد ثابت غیر صفر ضرب کنیم، تاثیری روی عمل  $m$  روی  $\bar{\mathbb{C}}$  ندارد، چون به ازای هر  $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$  و هر  $z \in \bar{\mathbb{C}}$  داریم:

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d}$$

ولی دترمینان‌های آنها یکی نیستند، چون دترمینان  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  برابر

$$\det(f) = ad - bc \quad \text{و دترمینان} \quad g(z) = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d} \quad \text{برابر} \quad \det(g) = \alpha^2(ad - bc)$$

است.

### تمرین ۲-۲۱.

دترمینان هر یک از تبدیلات موبیوس زیر را محاسبه کنید.

$$m(z) = \frac{-z-3}{z+1} \quad (\text{ج}) \quad m(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{ب}) \quad m(z) = \frac{2z+4}{5z-7} \quad (\text{الف})$$

$$m(z) = \frac{-z}{z+4} \quad (\text{و}) \quad m(z) = iz+1 \quad (\text{ه}) \quad m(z) = \frac{iz+1}{z+3i} \quad (\text{د})$$

ولی همواره می‌توانیم  $\alpha$  را طوری انتخاب کنیم که دترمینان  $m$  برابر ۱ باشد. البته هنوز مقداری ابهام وجود دارد، چون همه ضرایب  $m$  را می‌توان در ۱- ضرب کرد بدون اینکه دترمینان  $m$  تغییر کند، ولی این تنها ابهامی است که می‌ماند. به این روند نرمال کردن  $m$  می‌گوییم.

### تمرین ۲-۲۲.

هر یک از تبدیلات موبیوس تمرین ۲-۲۱ را نرمال کنید.

پس از نرمال کردن یک تبدیل موبیوس  $m$ ، کمیت مفید عددی دیگری وابسته به  $m$  وجود دارد که مربوط به گرفتن اثر است. تابع

$$\tau: \text{Möb}^+ \rightarrow \mathbb{C}$$

را با ضابطه  $\tau(m) = (a+d)^{-2}$  در نظر می‌گیریم که در آن  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  چون

تنها ابهام در تعریف تبدیلات موبیوس نرمال شده، از ضرب همه ضرایب در ۱- ناشی

<sup>1</sup>Normalizing

می‌شود، می‌بینیم که  $\tau(m)$  خوش تعریف است. در واقع بواسطه همین ابهام است که تابع  $\tau$  را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم و نه اثر عملی  $trace(m) = a + d$  را. یک خاصیت خیلی مفید  $\tau$  این است که همانند اثر ماتریس تحت مزدوج‌گیری ناوردا است.

تمرین ۲-۲۳.

$$\tau(m \circ n) = \tau(n \circ m)$$

تمرین ۲-۲۴.

$$\tau(p \circ m \circ p^{-1}) = \tau(m)$$

با استفاده از ناوردایی  $\tau$  تحت مزدوج‌گیری، می‌توانیم انواع مختلف تبدیلات مویوس را از هم تمیز دهیم، بدون اینکه آنها را به طور صریح با شکل‌های استاندارد خودشان مزدوج کنیم. یعنی، فرض کنیم  $m$  یک تبدیل مویوس باشد و  $p$  تبدیل مویوسی باشد که  $m$  را با شکل استاندارد آن مزدوج می‌کند. چون  $\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1})$  کافی است که مقادیر  $\tau$  را روی شکل‌های استاندارد مورد ملاحظه قرار دهیم.

اگر  $m$  سهموی باشد، آنگاه  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z + 1$  و لذا داریم:

$$\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1}) = (1+1)^2 = 4$$

توجه کنید که در مورد تبدیل مویوس همانی  $e(z) = z$ ، نیز

$$\tau(e) = (1+1)^2 = 4$$

اگر  $m$  بیضوی یا با زاویه ثابت باشد، می‌توان نوشت  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = \alpha^2 z$  که

در آن  $\alpha^2 \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ . در هنگام نرمال کردن آن که می‌خواهیم دترمینان  $m$  برابر ۱ شود، نتیجه می‌شود که:

$$m(z) = \frac{\alpha z}{\alpha^{-1}}$$

و لذا

$$\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1}) = (\alpha + \alpha^{-1})^2$$

در حالتی که  $m$  بیضوی است داریم  $|\alpha| = 1$  و به ازای یک  $\theta$  در  $(0, \pi)$

می‌نویسیم  $\alpha = e^{i\theta}$ . با محاسبه می‌بینیم:

$$\tau(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 = 4 \cos^2 \theta$$



به ویژه  $\tau(m)$  حقیقی است و در بازه  $[0, 4]$  قرار دارد.

در حالتی که  $m$  با زاویه ثابت باشد داریم  $|\alpha| \neq 1$  و به ازای  $\rho > 0$  و  $\rho \neq 1$  و یک  $\theta$  در  $(0, \pi)$  می نویسیم  $\alpha = \rho e^{i\theta}$ . با محاسبه می بینیم که:

$$\alpha + \alpha^{-1} = \rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}$$

و لذا

$$\tau(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = \cos(2\theta)(\rho^2 + \rho^{-2}) + 2 + i \sin(2\theta)(\rho^2 - \rho^{-2})$$

به ویژه چون  $\rho \neq 1$ ، می بینیم که به ازای  $\theta \neq 0$  و  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  داریم  $\text{Im}(\tau(m)) \neq 0$ .

در مورد دو حالت  $\theta = 0$  و  $\theta = \frac{\pi}{2}$  از تمرین زیر در ریاضی عمومی استفاده

می کنیم.

### تمرین ۲-۲۵.

نشان دهید که تابع  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف شده با ضابطه  $f(\rho) = \rho^2 + \rho^{-2}$  در شرط  $f(\rho) \geq 2$  صدق می کند و بعلاوه  $f(\rho) = 2$  اگر و فقط اگر  $\rho = 1$ .

به ازای  $\theta = 0$  می بینیم که  $\tau(m) > 4$  و به ازای  $\theta = \frac{\pi}{2}$  می بینیم که  $\tau(m) < 0$ . با خلاصه کردن مطالب فوق، گزاره زیر را ثابت کرده ایم.

### گزاره ۲-۱۶.

فرض می کنیم  $m$  یک تبدیل مویبوس غیرهمانی باشد. در این صورت:

$$1-m \text{ سهموی است اگر و فقط اگر } \tau(m) = 4.$$

۲- $m$  بیضوی است اگر و فقط اگر  $\tau(m)$  حقیقی بوده و در بازه  $[0, 4]$  قرار

داشته باشد.

۳- $m$  با زاویه ثابت است اگر و فقط اگر یا قسمت موهومی  $\tau(m)$  ناصفر باشد

یا  $\tau(m)$  حقیقی و در  $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$  قرار داشته باشد.

برای اینکه با یک مثال خاص کار کنیم،  $m(z) = \frac{z+1}{z+3}$  را در نظر می گیریم.

درمیان  $m$  برابر  $2 = 3 - 1$  است و لذا شکل نرمال  $m$  به صورت زیر است:

$$m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

با محاسبه می‌بینیم که  $\tau(m) = 8$  و لذا  $m$  با زاویه ثابت است.

توجه کنید که می‌توانیم ضریب یک تبدیل بیضوی یا با زاویه ثابت را تا حد وارون آن با در دست داشتن فقط مقدار  $\tau(m)$  تعیین کنیم. به طور مشخص، اگر  $m$  دارای ضریب  $\lambda$  باشد، در این صورت:

$$\tau(m) = (\lambda + \lambda^{-1})^2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 2$$

با ضرب طرفین تساوی در  $\lambda^2$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\lambda^4 + (2 - \tau(m))\lambda^2 + 1 = 0.$$

با به کار بردن فرمول ریشه معادلات درجه دوم داریم:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}[\tau(m) - 2 \pm \sqrt{(2 - \tau(m))^2 - 4}] = \frac{1}{2}[\tau(m) - 2 \pm \sqrt{-4\tau(m) + \tau^2(m)}]$$

چون

$$\frac{1}{2}[\tau(m) - 2 - \sqrt{-4\tau(m) + \tau^2(m)}] \quad \text{و} \quad \frac{1}{2}[\tau(m) - 2 + \sqrt{-4\tau(m) + \tau^2(m)}]$$

وارون یکدیگرند، می‌توانیم ضریب  $\lambda$  را طوری بگیریم که  $|\lambda|^2 > 1$ .

### تمرین ۲-۲۶.

نوع هر یک از تبدیلات موبیوس تمرین ۲-۲۱ را تعیین کنید. چنانچه تبدیل بیضوی یا با زاویه ثابت باشد، ضریب آن را پیدا کنید.

### تمرین ۲-۲۷.

نشان دهید اگر  $m$  یک تبدیل موبیوس سهموی با نقطه ثابت  $x \neq \infty$  باشد، آنگاه یک عدد مختلط یکتای  $\rho$  وجود دارد به طوری که

$$m(z) = \frac{(1 + \rho x)z - \rho x^2}{\rho z + 1 - \rho x}$$

### تمرین ۲-۲۸.

نشان دهید اگر  $m$  یک تبدیل موبیوس با نقاط ثابت متمایز  $x \neq \infty$  و  $y \neq \infty$  و ضریب  $a$  باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$m(z) = \frac{\left(\frac{x-ya}{x-y}\right)z + \frac{xy(a-1)}{x-y}}{\left(\frac{1-a}{x-y}\right)z + \frac{xa-y}{x-y}}$$

این بخش را با ارائه رابطه صریح بین تبدیلات موبیوس و ماتریس‌های  $2 \times 2$  به پایان می‌بریم. قرار می‌دهیم:

$$GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

$$SL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

قبلاً در بحث در مورد نرمال کردن، دیدیم که یک تبدیل موبیوس چند ماتریس را مشخص می‌کند. لذا حدس زدن تابع خوش تعریفی از  $Möb^+$  به  $GL_2(\mathbb{C})$  ممکن نیست. بنابراین از طرف دیگر رفته و تابعی طبیعی از  $GL_2(\mathbb{C})$  به  $Möb^+$  را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. نگاشت  $\mu: GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow Möb^+$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu \left( M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left( m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

توجه کنید که محاسبات انجام شده در ابتدای این بخش ثابت می‌کند که  $\mu$  یک همریختی است.

تمرین ۲-۲۹.

ثابت کنید که  $Ker(\mu)$  هسته  $\mu$ ، زیرگروه  $K = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$  از  $GL_2(\mathbb{C})$  است.

نتیجه بگیرید که  $Möb^+$  با  $PGL_2(\mathbb{C}) = \frac{GL_2(\mathbb{C})}{K}$  یکرخت است.

## ۲-۶. انعکاس‌ها

در قضیه ۲-۵ دیدیم که  $Möb^+$  مشمول  $Homeo^{\circ}(\bar{\mathbb{C}})$ ، مجموعه همسانریختی‌های  $\bar{\mathbb{C}}$  که دوایر را به دوایر می‌برند، است. یک گسترش طبیعی  $Möb^+$  وجود دارد که همچنان در  $Homeo^{\circ}(\bar{\mathbb{C}})$  قرار دارد.

برای گسترش  $Möb^+$  به یک گروه بزرگ‌تر، ساده‌ترین هسمانریختی  $\bar{\mathbb{C}}$  را که در  $Möb^+$  نیست در نظر می‌گیریم، یعنی مزدوج مختلط<sup>۱</sup>. قرار می‌دهیم:

$$c(\infty) = \infty \text{ و } c(z) = \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

### گزاره ۲-۱۷.

تابع  $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} : c$  با ضابطه  $c(z) = \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$  و  $c(\infty) = \infty$  عضو  $Homeo(\bar{\mathbb{C}})$  است. اثبات. با توجه به اینکه  $c$  وارون خودش می‌باشد، یعنی  $c^{-1}(z) = c(z)$ ؛ بنابراین  $c$  یک دو سوپی  $\bar{\mathbb{C}}$  است و لذا فقط کافی است پیوستگی  $c$  را بررسی کنیم. پیوستگی  $c$  از آنجا نتیجه می‌شود که به ازای هر  $z \in \bar{\mathbb{C}}$  و هر  $\varepsilon > 0$ ، داریم که  $c(U_\varepsilon(z)) = U_\varepsilon(c(z))$ . به این ترتیب اثبات گزاره ۲-۱۷ تمام است.

### فهوم المطلوب

### تمرین ۲-۳۰.

نشان دهید  $c$  عضو  $Möb^+$  نیست.

### تعریف ۲-۱۸.

گروه موبیوس عام  $Möb$  عبارت است از گروه تولید شده توسط  $Möb^+$  و  $c$ ؛ یعنی هر عضو (غیر بدیهی)  $Möb$  مانند  $p$  به صورت ترکیبات زیر بیان می‌شود:

$$p = com_k \circ \dots \circ com_1$$

به ازای یک  $k \geq 1$  و در آن هر  $m_k$  عضوی از  $Möb^+$  است.

توجه داشته باشید چون  $Möb$  شامل  $Möb^+$  است، همه خواص تعدی  $Möb^+$  که در بخش ۲-۲ بحث شد، به ارث می‌برد؛ یعنی  $Möb$  نیز روی  $T$  مجموعه سه‌تایی‌های نقاط متمایز در  $\bar{\mathbb{C}}$ ،  $C$  مجموعه دواپر در  $\bar{\mathbb{C}}$  و  $D$  مجموعه قرص‌های  $\bar{\mathbb{C}}$  به طور متعدی عمل می‌کند. ولی متأسفانه  $Möb$  خاصیت یکتایی را در تعدی روی سه‌تایی‌های نقاط متمایز که در تمرین ۲-۳۰ دیدیم به ارث نمی‌برد.

اثبات اینکه  $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} : c$  در  $Homeo^c(\bar{\mathbb{C}})$  است خیلی شبیه اثبات شمول  $Möb^+$  در  $Homeo^c(\bar{\mathbb{C}})$  است.

<sup>۱</sup> Complex conjugation

تمرین ۲-۳۰.

نشان دهید تابع  $c: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  در  $\text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$  است.  
 با ترکیب تمرین ۲-۳۱ و قضیه ۲-۵، قضیه زیر نتیجه می‌شود.  
 قضیه ۲-۱۹.

$$\text{Möb} \subseteq \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$$

اینک می‌توانیم شکل اعضای  $\text{Möb}$  را به طور صریح بیان کنیم.

تمرین ۲-۳۲.

نشان دهید هر عضو  $\text{Möb}$  به یکی از دو شکل زیر است:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$n(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

که در آن  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  و  $ad - bc \neq 0$ .

از نظر هندسی عمل  $c$  روی  $\overline{\mathbb{C}}$  یک انعکاس<sup>۱</sup> نسبت به خط حقیقی توسعه یافته  $\overline{\mathbb{R}}$  است، یعنی هر نقطه  $\overline{\mathbb{R}}$  توسط  $c$  ثابت می‌ماند و هر نقطه  $z$  در  $\overline{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{R}}$  این خاصیت را دارد که  $\overline{\mathbb{R}}$  عمود منصف پاره خط اقلیدسی است که  $z$  و  $c(z)$  را به هم وصل می‌کند.

با در دست داشتن انعکاس نسبت به دایره خاص  $\overline{\mathbb{R}}$  و اینکه  $\text{Möb}$  روی  $C$  مجموعه دوایر  $\overline{\mathbb{C}}$  به طور متعددی عمل می‌کند، می‌توان انعکاس نسبت به هر دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  را تعریف کرد. بالاخص، به ازای هر دایره  $A$  در  $\overline{\mathbb{C}}$  یک عضو  $m$  در  $\text{Möb}$  وجود دارد که  $\overline{\mathbb{R}}$  را به  $A$  می‌برد و انعکاس نسبت به  $A$  را به صورت ترکیب  $c_A = m \circ c \circ m^{-1}$  تعریف می‌کنیم. توجه دارید که در این تعریف  $c_A$ ، با توجه به انتخاب‌های متفاوت تبدیل  $m$ ، امکان ابهام وجود دارد. در بخش ۲-۸ نشان می‌دهیم که  $c_A$  خوش‌تعریف است.

به عنوان مثال  $A = \mathcal{S}^1$  را در نظر بگیرید. یک عضو  $\text{Möb}^+$  که  $\overline{\mathbb{R}}$  را به  $\mathcal{S}^1$  می‌برد تبدیلی است که  $(0, 1, \infty)$  را به  $(i, 1, -i)$  می‌برد، یعنی:

<sup>۱</sup> Reflection

$$m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{i}{\sqrt{2}}}{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

با محاسبه می‌بینیم که

$$c_A(z) = m \circ c \circ m^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

### تمرین ۲-۳۳.

ضابطه صریح دو عضو  $p$  و  $n$  در  $Möb$  را که  $\overline{IR}$  را به  $S^1$  می‌برند، بنویسید. نشان دهید  $p \circ c \circ p^{-1} = n \circ c \circ n^{-1}$ .

در حالتی که  $A$  یک دایره اقلیدسی در  $\overline{C}$  به مرکز  $\alpha$  و شعاع  $\rho$  باشد، می‌توانیم انعکاس مزدوج نسبت به  $S^1$  یعنی  $c(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  را با تبدیل موبیوسی که  $S^1$  را به  $A$  می‌برد، یعنی  $\rho(z) = \rho z + \alpha$  به دست آوریم. به این ترتیب ضابطه صریح انعکاس  $c_A$  نسبت به  $A$  به صورت زیر است:

$$c_A(z) = p \circ c \circ p^{-1}(z) = \frac{\rho^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}} + \alpha$$

به همین ترتیب، چنانچه  $A$  خط اقلیدسی در  $\overline{C}$  باشد که از  $\alpha$  گذشته و با  $IR$  زاویه  $\theta$  می‌سازد، انعکاس مزدوج نسبت به  $\overline{IR}$  یعنی  $c(z) = \bar{z}$  را توسط تبدیل موبیوس  $p$  که  $\overline{IR}$  را به  $A$  می‌برد، به دست می‌آوریم، یعنی  $p(z) = e^{i\theta}z + \alpha$  و به این ترتیب ضابطه صریح  $c_A$  انعکاس نسبت به  $A$  به دست می‌آید، یعنی:

$$c_A(z) = p \circ c \circ p^{-1}(z) = e^{i\theta}(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \alpha.$$

این طرز ساختن انعکاس‌ها نسبت به دایره  $\overline{C}$  خواص زیر را دارد.

### گزاره ۲-۲۰.

هر عضو  $Möb$  را می‌توان به صورت ترکیب انعکاس‌هایی نسبت به تعدادی متناهی دایره در  $\overline{C}$  بیان کرد.

اثبات. چون  $Möb$  توسط  $Möb^+$   $c(z) = \bar{z}$  تولید شده است و  $Möb^+$  توسط

$f(z) = az + b$  و  $J(z) = \frac{1}{z}$  که  $a, b \in C$  و  $a \neq 0$  تولید شده است، فقط نیاز داریم قضیه را در مورد این تبدیلات بررسی کنیم.

$c$  با توجه به ضابطه‌اش، یک انعکاس نسبت به  $\overline{IR}$  است.  $J$  را می‌توان به صورت ترکیب  $c(z) = \bar{z}$  و انعکاس  $c(z) = \frac{1}{z}$  نسبت به  $S$  نوشت. بنابراین اثبات گزاره با توجه به تمرین زیر تمام است.

## تمرین ۲-۳۴.

هر عضو  $Möb^+$  با ضابطه  $f(z) = az + b$  را که در آن  $a, b \in \mathbb{C}$  و  $a \neq 0$  به صورت ترکیبی از انعکاس‌ها نسبت به تعدادی متناهی از دایر  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌توان نوشت. بدین ترتیب اثبات گزاره ۲-۲۰ تکمیل می‌شود.

## فهرده‌المطلوب

در بخش‌های گذشته دیدیم که اعضای  $Möb$  هسمانریختی‌های  $\overline{\mathbb{C}}$  هستند که دایر در  $\overline{\mathbb{C}}$  را به دایر در  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌برند. در واقع این خاصیت،  $Möb$  را مشخص می‌کند. قضیه ۲-۲۱.

$$Möb = Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$$

اثبات. این بخش را با ارائه طرحی از اثبات قضیه ۲-۲۱ به پایان می‌بریم. بنا بر قضیه ۲-۱۹ دیدیم که  $Möb \subseteq Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  و لذا باقی می‌ماند رابطه شمول عکس آن را نشان دهیم، یعنی  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq Möb$ .

برای این منظور فرض کنیم  $f$  عضوی از  $Homeo^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$  باشد. فرض کنیم  $p$  تبدیل موبیوسی باشد که سه‌تایی  $(f(0), f(1), f(\infty))$  را به سه‌تایی  $(0, 1, \infty)$  ببرد. لذا  $p \circ f$  در روابط  $p \circ f(0) = 0$ ،  $p \circ f(1) = 1$  و  $p \circ f(\infty) = \infty$  صدق می‌کند.

چون  $p \circ f$  دایر در  $\overline{\mathbb{C}}$  را به دایر در  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌برد، بنابراین  $p \circ f(IR) = IR$  و  $p \circ f(\infty) = \infty$  و  $\overline{IR}$  دایره‌ای در  $\overline{\mathbb{C}}$  است که توسط سه‌تایی  $(0, 1, \infty)$  مشخص می‌شود. چون  $p \circ f$ ،  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارد و  $IR$  را به  $IR$  می‌برد، یا  $p \circ f(IH) = IH$  یا  $p \circ f$  نیم‌صفحه پایینی است. در حالت اول قرار می‌دهیم  $m = p$  و در حالت دوم قرار می‌دهیم  $m = c \circ p$  که در آن  $c(z) = \bar{z}$  مزدوج مختلط است.

به این ترتیب عضو  $m$  از  $Möb$  را در دست داریم که  $m \circ f(1) = 1$ ،  $m \circ f(0) = 0$ ،  $m \circ f(\infty) = \infty$ ،  $m \circ f(IH) = IH$ ، حال نشان می‌دهیم  $m \circ f$  همانی است. برای این منظور یک مجموعه چگال از نقاط  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌سازیم که نقاط آن توسط  $m \circ f$  ثابت بمانند.

چون  $f \circ m$ ،  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارد و در  $\text{Homeo}^c(\overline{\mathcal{C}})$  قرار دارد می‌بینیم که خطوط اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  را به خطوط اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  و همچنین دوائر اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  را به دوائر اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  می‌برد.

قبل از شروع به ساختن این مجموعه چگال، چند علامت معرفی می‌کنیم. قرار می‌دهیم:  $Z = \{z \in \overline{\mathcal{C}} : m \circ f(z) = z\}$  مجموعه نقاط  $\overline{\mathcal{C}}$  باشد که تحت  $m \circ f$  ثابت می‌مانند. بنابر انتخاب  $m$  نقاط  $0$ ،  $1$  و  $\infty$  در  $Z$  هستند.

همچنین اگر  $X$  و  $Y$  دو خط اقلیدسی در  $\mathcal{C}$  باشند که در یک نقطه  $z$  یکدیگر را قطع کنند و اگر  $m \circ f(X) = X$  و  $m \circ f(Y) = Y$ ، آنگاه  $m \circ f(z) = z$  و لذا  $z$  در مجموعه  $Z$ ، نقاط ثابت  $m \circ f$  است.

به ازای هر  $s \in \mathbb{R}$  فرض کنیم  $V(s)$  خط قائم در  $\mathcal{C}$  باشد که از  $s$  می‌گذرد و  $H(s)$  خط افقی در  $\mathcal{C}$  باشد که از  $is$  می‌گذرد.

فرض کنیم  $H$  یک خط افقی دلخواه در  $\mathcal{C}$  باشد چون  $m \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  و چون  $H$  و  $\mathbb{R}$  مجزا هستند، پس  $m \circ f(H)$  و  $m \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  در  $\mathcal{C}$  مجزا هستند و لذا  $m \circ f(H)$  نیز در  $\mathcal{C}$  افقی است. همچنین چون  $m \circ f(i\mathbb{H}) = i\mathbb{H}$  آنگاه  $H$  در  $i\mathbb{H}$  قرار دارد، اگر و فقط اگر  $m \circ f(H)$  در  $i\mathbb{H}$  باشد.

فرض کنیم  $A$  دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی  $\frac{1}{p}$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{1}{p}$  باشد. چون  $V(0)$  بر  $A$  در  $0$  مماس است، پس  $m \circ f(V(0))$  در  $0$  مماس بر  $m \circ f(A)$  است و به همین ترتیب  $m \circ f(V(1))$  در  $1$  مماس بر  $m \circ f(A)$  است.

چون  $V(0)$  و  $V(1)$  خطوط اقلیدسی موازی در  $\mathcal{C}$  هستند، معلوم می‌شود که  $m \circ f(V(0))$  و  $m \circ f(V(1))$  نیز در  $\mathcal{C}$  خطوط اقلیدسی موازی هستند و لذا باید داشته باشیم:  $m \circ f(V(0)) = V(0)$  و  $m \circ f(V(1)) = V(1)$ .

به ویژه، این باعث می‌شود که  $m \circ f(A) = A$ ، چون خطوط مماس بر هر دایره دیگر که از  $0$  و  $1$  می‌گذرد در  $0$  و  $1$  غیر موازی هستند. اگر چه  $m \circ f(A) = A$  ولی هنوز نمی‌دانیم که آیا  $A \cap Z$  نقطه‌ای غیر از  $0$  و  $1$  دارد یا خیر.

این بحث را می‌توان در مورد دو خط موازی افقی مماس بر  $A$  انجام داد. ابتدا خط

مماس  $H(\frac{1}{p})$  بر  $A$  در  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p}i$  را در نظر می‌گیریم چون  $m \circ f(H(\frac{1}{p}))$  در  $i\mathbb{H}$  نیز



خطی افقی مماس بر  $A = f \circ m$  است معلوم می شود  $(\frac{1}{p}) = H(\frac{1}{p}) \circ f$ .

اینک نقاط بیشتری در  $Z$  داریم، یعنی نقاط تقاطع  $(\frac{1}{p}) = H(\frac{1}{p}) \cap V(0)$  و

$(\frac{1}{p}) = H(\frac{1}{p}) \cap V(1) = \{1 + \frac{i}{p}\}$  از همین بحث نتیجه می شود:  $(-\frac{1}{p}) = H(-\frac{1}{p}) \circ f$  و

لذا هر دوی  $(-\frac{1}{p}) = H(-\frac{1}{p}) \cap V(0) = \{-\frac{1}{p}i\}$  و  $(-\frac{1}{p}) = H(-\frac{1}{p}) \cap V(1) = \{-\frac{1}{p}i\}$  در  $Z$  قرار دارند.

هر دو نقطه از  $Z$  منجر به یک خط اقلیدسی می شود که توسط  $m \circ f$  به خودش برده می شود و هر سه نقطه از  $Z$  منجر به یک دایره اقلیدسی می شود که  $m \circ f$  آن را به خودش می برد. محل تقاطع این خطوط و دایره های اقلیدسی منجر به نقاط بیشتری در  $Z$  می شود که به نوبه خود منجر به خطوط و دایره های اقلیدسی دیگری می شود که به خودشان برده می شوند و قس علی هذا.

با ادامه این روند،  $Z$  شامل یک مجموعه چگال از نقاط  $\bar{C}$  می شود که از آن و تمرین ۱-۶ نتیجه می شود که  $m \circ f$  همانی است. بنابراین  $f = m^{-1}$  یک عضو  $Möb$  است. به این ترتیب طرح اثبات قضیه ۲-۲۱ تمام است.

فهو المطلوب

## ۲-۷. همدیسی اعضای $Möb$

در این بخش به آخرین خاصیت مهم  $Möb$  که مورد استفاده ما است می پردازیم. با یک تعریف شروع می کنیم.

تعریف ۲-۲۲.

فرض کنیم  $C_1$  و  $C_2$  دو منحنی هموار در  $C$  باشند که در نقطه  $z$  یکدیگر را قطع می کنند.  $angle(C_1, C_2)$  زاویه بین  $C_1$  و  $C_2$  در  $z$  را با زاویه بین خطوط مماس بر  $C_1$  و  $C_2$  از  $C_1$  به  $C_2$  در  $z$  تعریف می کنیم.

در اندازه گیری زوایا قرارداد می کنیم که زوایا در خلاف حرکت عقربه های ساعت، مثبت باشد و موافق حرکت آنها منفی باشد. با توجه به این تعریف زاویه داریم:

$$angle(C_2, C_1) = -angle(C_1, C_2)$$

توجه کنید که زاویه ای که به این صورت تعریف کردیم خوش تعریف نیست و فقط تا مضربی از  $\pi$  تعریف شده است. اگر می خواستیم رسمی باشیم، لازم بود تصاویر زاویه را در  $\frac{\mathbb{R}}{\pi\mathbb{Z}}$  می گرفتیم. ولی این ابهام در تعریف زاویه در این بخش اشکالی بوجود نمی آورد.

یک همسانریختی  $\bar{\mathcal{C}}$  که قدر مطلق زاویه بین منحنی‌ها را حفظ کند، همدیس<sup>۱</sup> نامند. لازم به ذکر است که این تعریف قدری غیر استاندارد است، چون بسیاری از مولفین تعریف همدیس را به معنی حفظ خود زوایا و نه قدر مطلق آنها در نظر می‌گیرند. آخرین مطلب مهمی که در مورد  $Möb$  بیان می‌کنیم، همدیس بودن اعضای آن است. اثباتی که ارائه می‌دهیم تحلیلی است. اثبات هندسی نیز بر اساس تصویر کنج‌نگاری وجود دارد. مثلاً رجوع شود به مرجع [۲۳] تالیف جونز<sup>۲</sup> و سینگرمات<sup>۳</sup>.

**قضیه ۲-۲۳.**

اعضای  $Möb$  همسانریختی‌های همدیس  $\bar{\mathcal{C}}$  هستند.

**اثبات.** اثبات این قضیه شامل تعدادی محاسبات است که به خواننده واگذار می‌شوند. چون زاویه بین دو منحنی بنا به تعریف زاویه بین مماس‌های بر آنها است، کافی است بررسی کنیم که آیا زاویه  $\angle(X_\nu, X_\nu)$  بین  $X_\nu$  و  $X_\nu$  برابر زاویه  $\angle(m(X_\nu), m(X_\nu))$  زاویه بین  $m(X_\nu)$  و  $m(X_\nu)$  است که در آن  $X_\nu$  و  $X_\nu$  خطوط اقلیدسی هستند.

لذا فرض کنیم  $X_\nu$  و  $X_\nu$  دو خط اقلیدسی در  $\bar{\mathcal{C}}$  باشند که در نقطه  $z$  یکدیگر را قطع می‌کنند و فرض کنیم  $z_k$  یک نقطه  $X_k$  غیر از  $z$  باشد و  $s_k$  شیب  $X_k$  باشد. این کمیت‌ها با فرمول زیر به هم ارتباط دارند:

$$s_k = \frac{\text{Im}(z_k - z)}{\text{Re}(z_k - z)}$$

فرض کنیم  $\theta_k$  زاویه  $X_k$  با محور حقیقی  $\mathbb{R}$  باشد، در این صورت:

$$s_k = \tan(\theta_k)$$

به ویژه،  $\angle(X_\nu, X_\nu)$  زاویه بین  $X_\nu$  و  $X_\nu$  به صورت زیر است:

$$\angle(X_\nu, X_\nu) = \theta_\nu - \theta_\nu = \arctan(s_\nu) - \arctan(s_\nu)$$

در بخش ۲-۶ دیدیم که  $Möb$  توسط تبدیلاتی به شکل  $f(t) = at + b$ ، که در آن  $a \neq 0$ ،  $a, b \in \mathbb{C}$  و دو تبدیل  $J(z) = \frac{1}{z}$  و  $c(z) = \bar{z}$  تولید می‌شود، لذا هر یک را به نوبت بررسی می‌کنیم.

<sup>1</sup> Conformal

<sup>2</sup> Jones

<sup>3</sup> Singermat

فرض کنیم  $f(t) = az + b$  که در آن  $a, b \in \mathbb{C}$  و  $a \neq 0$ . می نویسیم  $a = \rho e^{i\beta}$ . چون  $f(\infty) = \infty$ ، لذا هر دوی  $f(X_1)$  و  $f(X_r)$  خطوط اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  هستند. چون  $f(X_k)$  از نقاط  $f(z)$  و  $f(z_k)$  می گذرد، لذا شیب خط اقلیدسی  $f(X_k)$  به صورت زیر است:

$$t_k = \frac{\text{Im}(f(z_k) - f(z))}{\text{Re}(f(z_k) - f(z))} = \frac{\text{Im}(a(z_k - z))}{\text{Re}(a(z_k - z))}$$

$$= \frac{\text{Im}(e^{i\beta}(z_k - z))}{\text{Re}(e^{i\beta}(z_k - z))} = \tan(\beta + \theta_k)$$

به ویژه داریم:

$$\text{angle}(f(X_1), f(X_r)) = \arctan t_r - \arctan t_1$$

$$= (\beta + \theta_r) - (\beta + \theta_1)$$

$$= \theta_r - \theta_1 = \text{angle}(X_1, X_r)$$

و لذا  $f$  همدیس است.

حال تبدیل  $J(z) = \frac{1}{z}$  را در نظر می گیریم. در اینجا لازم است رویکرد متفاوتی داشته باشیم، چون  $J(X_1)$  و  $J(X_r)$  الزاماً خطوط اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  نیستند. ولی در عوض این امکان وجود دارد که هر دو دایره ای باشند که در  $\mathbb{C}$  متقاطعند و یا یکی خط اقلیدسی و دیگری یک دایره اقلیدسی است. حالتی که هر دو دایره اقلیدسی هستند را بررسی می کنیم و بقیه حالات را به خواننده وا می گذاریم.

لذا می توان فرض کرد که معادله  $X_k$  به صورت زیر است:

$$\beta_k z + \bar{\beta}_k \bar{z} + 1 = 0.$$

که در آن  $\beta_k \in \mathbb{C}$ . آنگاه شیب  $X_k$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$s_k = \frac{\text{Re}(\beta_k)}{\text{Im}(\beta_k)}$$

با معادله فوق برای  $X_k$ ، معادله  $J(X_k)$  به صورت زیر است:

$$z\bar{z} + \bar{\beta}_k z + \beta_k \bar{z} = 0.$$

که آن را به صورت زیر می توان نوشت:

$$|z + \beta_k|^2 = |\beta_k|^2$$

لذا  $J(X_k)$  یک دایره اقلیدسی به مرکز  $-\beta_k$  و شعاع اقلیدسی  $|\beta_k|$  است.

در این صورت شیب مماس بر  $J(X_k)$  در مبدا به صورت زیر است:

$$-\frac{\operatorname{Re}(\beta_k)}{\operatorname{Im}(\beta_k)} = -\tan \theta_k = \tan(-\theta_k)$$

و لذا  $J(X_k)$  با  $\mathbb{R}$  زاویه  $-\theta_k$  می‌سازد.

زاویه بین  $J(X_1)$  و  $J(X_r)$  به صورت زیر است:

$$\operatorname{angle}(J(X_1), J(X_r)) = -\theta_r - (-\theta_1) = -\operatorname{angle}(X_1, X_r)$$

و لذا  $J$  هم‌مدیس است.

### تمرین ۲-۳۵.

نشان دهید  $c(z) = \bar{z}$  هم‌مدیس است.

به این ترتیب اثبات قضیه ۲-۲۳ تمام است.

### فهوم‌المطلوب

با بررسی دقیق اثبات، مشاهده می‌شود که هر  $f(z) = az + b$  علامت زاویه بین  $X_1$  و  $X_r$  را حفظ می‌کند در حالی که  $c(z) = \bar{z}$  علامت را عوض می‌کند.

در مورد  $J(z) = \frac{1}{z}$  ظرافتی وجود دارد. زاویه بین  $J(X_1)$  و  $J(X_r)$  در  $+$  زاویه بین  $X_1$  و  $X_r$  در  $\infty$  است که قرینه زاویه بین  $X_1$  و  $X_r$  در  $z$  است. بنابراین  $J$  علامت  $X_1$  و  $X_r$  را نیز حفظ می‌کند.

بنابراین هر عضو  $Möb^+$  علامت زاویه بین  $X_1$  و  $X_r$  را نیز حفظ می‌کند، زیرا  $Möb^+$  توسط  $J(z) = \frac{1}{z}$  و  $f(z) = az + b$  تولید شده است که  $a, b \in \mathbb{C}$  و  $a \neq 0$ . در حالیکه هر عضو  $Möb$  که عضو  $Möb^+$  نباشد، علامت زاویه بین  $X_1$  و  $X_r$  را عوض می‌کند.

### ۸-۲. حفظ $\mathbb{H}$

هدف ما از در نظر گرفتن تبدیلات موبیوس و گروه موبیوس عام برای تعیین تبدیلاتی از نیم‌صفحه بالائی بود که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی ببرند. یک محل برای پیدا کردن چنین تبدیلاتی زیرگروه  $Möb$  است که  $\mathbb{H}$  را حفظ می‌کند. لذا گروه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Möb(\mathbb{H}) = \{m \in Möb \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$$

## قضیه ۲-۲۴.

هر عضو  $Möb(IH)$  خطوط هذلولوی در  $IH$  را به خطوط هذلولوی در  $I\bar{H}$  می‌برد. اثبات. اثبات این قضیه، نتیجه مستقیم قضیه ۲-۲۳ است که بیان می‌کند اعضای  $Möb(IH)$  زاویه بین دوائر  $\bar{C}$  را حفظ می‌کنند و اینکه هر خط هذلولوی در  $I\bar{H}$  که اشتراک  $I\bar{H}$  با یک دایره در  $\bar{C}$  است، بر  $\bar{C}$  عمود است و بالاخره اینکه هر عضو  $Möb$  دوائر در  $\bar{C}$  را به دوائر در  $\bar{C}$  می‌برد.

فهوالمطلوب

حال فرض کنیم:

$$Möb^+(IH) = \{m \in Möb^+ \mid m(IH) = IH\}$$

زیرگروه  $Möb(IH)$  متشکل از تبدیلات موبیوسی است که نیم‌صفحه بالائی  $IH$  را حفظ می‌کند.

این تعاریف خیلی رضایت‌بخش نیستند، چون به طور صریح اعضای  $Möb(IH)$  و  $Möb^+(IH)$  را مشخص نمی‌کنند. بقیه این بخش را به پیدا کردن عباراتی صریح برای این اعضا اختصاص می‌دهیم، زیرا به این عبارات صریح در بخش‌های آتی نیاز داریم. چون  $I\bar{H}$  یک قرص در  $\bar{C}$  است که توسط دایره  $\bar{R}$  در  $\bar{C}$  مشخص شده، ابتدا شکل اعضای زیرگروه زیر را تعیین می‌کنیم:

$$Möb(\bar{R}) = \{m \in Möb \mid m(\bar{R}) = \bar{R}\}$$

از تمرین ۲-۳۲ نتیجه می‌شود که اعضای  $Möb$  به یکی از دو صورت

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{و} \quad m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{است که در آن } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{و} \quad ad - bc = 1.$$

می‌خواهیم شرایطی روی  $a, b, c, d$  قرار دهیم به طوری که  $m(\bar{R}) = \bar{R}$ .

توجه داشته باشید که در حالت دوم می‌توانیم به جای آن، ترکیب زیر را مورد

ملاحظه قرار دهیم:

$$m \circ c(z) = m(\bar{z}) = \frac{az + b}{cz + d}$$

و بنابراین فقط حالت اول را بررسی می‌کنیم که:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

که در آن  $a, b, c, d$  در  $\mathbb{C}$  هستند و  $ad - bc = 1$ .

چون  $m$ ،  $\overline{IR}$  را به  $\overline{IR}$  می‌برد، سه نقطه  $m^{-1}(\cdot) = -\frac{b}{a}$ ،  $m(\infty) = \frac{a}{c}$  و  $m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$  همگی در  $\overline{IR}$  قرار دارند.

فعالاً فرض کنیم  $a \neq 0$  و  $c \neq 0$ ، لذا این سه نقطه در  $IR$  قرار دارند. در این صورت هر یک از ضرایب  $m$  را می‌توان به صورت مضربی از  $c$  نوشت. به ویژه داریم:  $a = m(\infty)c$ ،  $d = -m^{-1}(\infty)c$  و  $b = -m^{-1}(\cdot)a = -m^{-1}(\cdot)m(\infty)c$ . بنابراین  $m$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{m(\infty)cz - m^{-1}(\cdot)m(\infty)c}{cz - m^{-1}(\infty)c}$$

حال نرمال کردن، یعنی دترمینان  $m$  برابر یک باشد، شرایطی روی  $c$  قرار می‌دهد،

یعنی:

$$\begin{aligned} 1 &= ad - bc = c^2[-m(\infty)m^{-1}(\infty) + m(\infty)m^{-1}(\cdot)] \\ &= c^2[m(\infty)(m^{-1}(\cdot) - m^{-1}(\infty))] \end{aligned}$$

چون  $m(\infty)$  و  $m^{-1}(\cdot)$  و  $m^{-1}(\infty)$  همه حقیقی هستند، پس  $c$  حقیقی یا موهومی محض است و بنابراین ضرایب  $m$  یا همگی حقیقی و یا همگی موهومی محض هستند.

### تمرین ۲-۳۶.

با فرض این که  $a = 0$  یا  $c = 0$ ، تحلیل فوق را در مورد ضرایب  $m$  تکمیل کنید.

بالعکس اگر  $m$  به یکی از دو صورت  $m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  یا  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  با شرط  $ad - bc = 1$  باشد که در آن ضرایب  $m$  یا همگی حقیقی‌اند و یا همگی موهومی محض، در این صورت سه نقطه  $m(\cdot)$  و  $m(\infty)$  و  $m^{-1}(\infty)$  همگی روی  $\overline{IR}$  قرار دارند و لذا  $m$ ،  $\overline{IR}$  را به  $\overline{IR}$  می‌برد.

این تحلیل را در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

### قضیه ۲-۲۵.

هر عضو  $Möb(\overline{IR})$  به یکی از شکل‌های زیر است:

$$. a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \quad m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{الف})$$

$$. a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \quad m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (\text{ب})$$

(ج)  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  که در آن  $a, b, c, d$  و  $ad - bc = 1$  موهومی محض هستند و

(د)  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  که در آن  $a, b, c, d$  و  $ad - bc = 1$  موهومی محض هستند و

اینک شکل صریح اعضای زیرگروه زیر را نیز در اختیار داریم:

$$\text{Möb}(A) = \{m \in \text{Möb} \mid m(A) = A\}$$

که در آن  $A$  یک دایره در  $\bar{\mathbb{C}}$  است. همه آن کاری که باید بکنیم این است که یک

عضو  $Möb$  مانند  $p$  انتخاب کنیم که  $p(\bar{\mathbb{R}}) = A$  و مجموعه زیر را در نظر بگیریم:

$$\{p \circ m \circ p^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})\}$$

اگر  $n$  عضوی از  $Möb$  باشد که  $n(A) = A$ ، آنگاه  $n(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$ . بنابراین

به ازای عضوی مانند  $m$  در  $\text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})$  داریم  $p \circ m \circ p^{-1} = n$  و در نتیجه

$$n = p \circ m \circ p^{-1}$$

$$\text{Möb}(A) = \{p \circ m \circ p^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})\}$$

این زیرگروه  $Möb(A)$  مستقل از  $p$  است. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم  $q$

عضو دیگری از  $Möb$  باشد که  $q(\bar{\mathbb{R}}) = A$ . لذا  $p^{-1} \circ q$ ،  $\bar{\mathbb{R}}$  را به  $\bar{\mathbb{R}}$  می‌برد و لذا

می‌توان نوشت  $q = p \circ t$  که  $t \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})$ . بنابراین به ازای هر  $m$  در  $\text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})$  داریم:

$$q \circ m \circ q^{-1} = p \circ (t \circ m \circ t^{-1}) \circ p^{-1}$$

و لذا داریم:

$$\{p \circ m \circ p^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})\} = \{q \circ m \circ q^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})\}$$

تمرین ۲-۳۷.

شکل کلی اعضای  $Möb(S^1)$  را پیدا کنید.

حال آمادگی تعیین اعضای  $Möb(IH)$  را داریم. هر عضو  $Möb(IH)$  هر یک از دو

قرص در  $\bar{\mathbb{C}}$  که توسط  $\bar{\mathbb{R}}$  مشخص می‌شوند، یعنی هم نیم‌صفحه بالایی و هم نیم‌صفحه

پایینی را یا حفظ می‌کند یا با یکدیگر جابجا می‌کند. برای اینکه هر یک را مشخص کنیم،

فقط تصویر یک نقطه را در یکی از قرص‌ها مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

خصوصاً یک عضو  $m$  در  $Möb(\bar{\mathbb{R}})$  یک عضو  $Möb(IH)$  است اگر و فقط اگر

قسمت موهومی  $m(i)$  مثبت باشد. لذا باید مقدار  $\text{Im}(m(i))$  را برای هر یک از چهار

شکل ممکن یک عضو  $Möb(\bar{\mathbb{R}})$  بررسی کنیم.

اگر  $m$  به صورت  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  باشد که در آن  $a, b, c, d$  حقیقی و  $ad - bc = 1$  است، آنگاه قسمت موهومی  $m(i)$  به صورت زیر است:

$$\operatorname{Im}(m(i)) = \operatorname{Im}\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(ai+b)(-ci+d)}{(ci+d)(-ci+d)}\right) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} > 0.$$

لذا  $m$  در  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  قرار دارد.

اگر  $m$  به صورت  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  باشد که در آن  $a, b, c, d$  حقیقی و  $ad - bc = 1$  است، آنگاه قسمت موهومی  $m(i)$  به صورت زیر است:

$$\operatorname{Im}(m(i)) = \operatorname{Im}\left(\frac{-ai+b}{-ci+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(-ai+b)(ci+d)}{(-ci+d)(ci+d)}\right) = \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} = \frac{-1}{c^2+d^2} < 0.$$

لذا  $m$  در  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  قرار ندارد.

اگر  $m$  به صورت  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  باشد که در آن  $a, b, c, d$  موهومی محض و  $ad - bc = 1$  است، آنگاه می‌توان نوشت  $a = \alpha i, b = \beta i, c = \gamma i, d = \delta i$  و لذا  $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$  و قسمت موهومی  $m(i)$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(m(i)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-\alpha + \beta i}{-\gamma + \delta i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(-\alpha + \beta i)(-\gamma - \delta i)}{(-\gamma + \delta i)(-\gamma - \delta i)}\right) \\ &= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2} = \frac{-1}{\delta^2 + \gamma^2} < 0. \end{aligned}$$

لذا  $m$  در  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  نیست.

اگر  $m$  به صورت  $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  باشد که در آن  $a, b, c, d$  موهومی محض و  $ad - bc = 1$  است، آنگاه می‌نویسیم  $a = \alpha i, b = \beta i, c = \gamma i, d = \delta i$  و لذا  $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$  و قسمت موهومی  $m(i)$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(m(i)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{-ai+b}{-ci+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)}\right) \\ &= \frac{-\alpha\delta + \beta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2} = \frac{1}{\delta^2 + \gamma^2} > 0. \end{aligned}$$

یعنی در این حالت  $m$  در  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  است.



بنابراین قضیه زیر را داریم.

### قضیه ۲-۲۶.

اعضای  $Möb(H)$  به یکی از دو صورت زیر می‌باشند:

الف)  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  که در آن  $a, b, c, d$  حقیقی هستند و  $ad-bc=1$ .

ب)  $m(z) = \frac{\bar{a}z+b}{\bar{c}z+d}$  که در آن  $a, b, c, d$  موهومی محض هستند و  $ad-bc=1$ .

یک نتیجه قضیه ۲-۲۶ این است که هر عضو  $Möb^+(H)$  به صورت

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

است که در آن  $a, b, c, d$  حقیقی هستند و  $ad-bc=1$ ; زیرا

اعضای  $Möb^+(H)$  به صورت  $m(z) = \frac{\bar{a}z+b}{\bar{c}z+d}$  نمی‌باشند که  $a, b, c, d$  موهومی محض و  $ad-bc=1$  است.

### تمرین ۲-۳۸.

نشان دهید  $Möb(H)$  توسط اعضایی به شکل  $m(z) = az+b$  با

شرط  $a > 0$  و  $b \in \mathbb{R}$  و توابع  $K(z) = \frac{-1}{z}$  و  $B(z) = -\bar{z}$  تولید می‌شود.

### تمرین ۲-۳۹.

شکل کلی یک عضو  $Möb(D)$  که در آن  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  قرص واحد

در  $\mathbb{C}$  است را بنویسید.

توجه داشته باشید که به این سؤال هنوز جواب داده نشده که آیا  $Möb(H)$  شامل

همه تبدیلات  $H$  است که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برند. ما فقط نشان

دادیم که هر عضو  $Möb(H)$  این خاصیت را دارد که فعلاً برای ما کفایت می‌کند.

این بخش را با نشان دادن این نکته به پایان می‌بریم که برای اثبات خوش تعریفی

انعکاس نسبت به یک دایره در  $\bar{\mathbb{C}}$  که در بخش ۲-۶ تعریف نمودیم، مشخص کردن

شکل کلی یک عضو  $Möb(\bar{\mathbb{R}})$  دقیقاً آن چیزی است که مورد نیاز است.

### قضیه ۲-۲۷.

انعکاس نسبت به یک دایره که در بخش ۲-۶ تعریف شد، خوش تعریف است.

اثبات. به ازای هر عضو  $m$  در  $Möb(\bar{\mathbb{R}})$  محاسبه مستقیم بر اساس دو شکل ممکن  $m$ ، نشان می‌دهد که  $c \circ m = m \circ c$  که در آن  $c(z) = \bar{z}$  مزدوج مختلط است. اگر

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{که در آن } a, b, c, d \text{ حقیقی و } ad - bc = 1 \text{ است، آنگاه}$$

$$c \circ m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = m \circ c(z)$$

اگر  $m$  به صورت  $m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  باشد که در آن  $a, b, c, d$  موهومی محض و  $ad - bc = 1$  است، آنگاه

$$c \circ m(z) = \frac{-az - b}{-cz - d} = \frac{az + b}{cz + d} = m \circ c(z)$$

فرض کنیم  $A$  دایره‌ای در  $\bar{\mathbb{C}}$  باشد و  $m$  و  $n$  دو عضو  $Möb(\bar{\mathbb{R}})$  باشند که  $\bar{\mathbb{R}}$  را به  $A$  می‌برند. در این صورت  $n^{-1} \circ m$ ،  $\bar{\mathbb{R}}$  را به  $\bar{\mathbb{R}}$  برده و لذا به ازای یک  $p$  در  $Möb(\bar{\mathbb{R}})$  داریم  $n^{-1} \circ m = p$ . به ویژه  $p \circ c = c \circ p$ . می‌نویسیم  $m = n \circ p$  و با محاسبه داریم:

$$m \circ c \circ m^{-1} = n \circ p \circ c \circ p^{-1} \circ n^{-1} = n \circ p \circ p^{-1} \circ c \circ n^{-1} = n \circ c \circ n^{-1}$$

بنابراین انعکاس نسبت به یک دایره در  $\bar{\mathbb{C}}$  خوش تعریف است.

فهوم‌المطلوب

## ۲-۹. خواص تعدی $Möb(\mathbb{H})$

در بخش ۲-۲ بعضی از مجموعه‌هائی را که  $Möb$  روی آنها به طور متعدی عمل می‌کند، توضیح دادیم و همچنین مشاهده کردیم که دانستن تعدی عمل  $Möb^+$  روی این مجموعه‌ها سودمند است. در این بخش توجه خود را معطوف به عمل  $Möb(\mathbb{H})$  روی  $\mathbb{H}$  می‌کنیم و نشان می‌دهیم که می‌توانیم نتایجی از همان نوع به دست آوریم. در ابتدا مشاهده می‌کنیم که  $Möb(\mathbb{H})$  روی خود  $\mathbb{H}$  به طور متعدی عمل می‌کند. یعنی به ازای هر زوج  $w_1$  و  $w_2$  از نقاط متمایز  $\mathbb{H}$  یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  وجود دارد که  $w_1$  را به  $w_2$  می‌برد. اگرچه می‌دانیم که  $Möb$  روی سه تایی‌های نقاط متمایز  $\bar{\mathbb{C}}$  به طور متعدی عمل می‌کند، بدیهی نیست که یک عضو  $Möb$  وجود داشته باشد که هم  $\mathbb{H}$  را به  $\mathbb{H}$  و هم  $w_1$  را به  $w_2$  ببرد.

## گزاره ۲-۲۸.

$Möb(\mathbb{H})$  روی  $\mathbb{H}$  به طور متعدی عمل می‌کند.

اثبات. با استفاده از لم ۲-۸، کافی است نشان دهیم به ازای هر نقطه  $w$  در  $\mathbb{H}$  یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  مانند  $m$  وجود دارد به طوری که در شرط  $m(w) = i$  صدق می‌کند. می‌نویسیم  $w = a + ib$  که در آن  $a, b \in \mathbb{R}$  و  $b > 0$ . با ترکیب توابع، یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  می‌سازیم که  $w$  را به  $i$  ببرد. ابتدا  $w$  را به محور موهومی با استفاده از  $p(z) = z - a$  حرکت می‌دهیم به طوری که  $p(w) = bi$ . سپس  $q(z) = \frac{1}{b}z$  را روی  $p(w)$  اعمال می‌کنیم. لذا  $q(p(w)) = q(bi) = i$ . توجه کنید که چون  $a \in \mathbb{R}$  و  $\frac{1}{b} > 0$  بنا به قضیه ۲-۲۶ هر دوی  $p(z)$  و  $q(z)$  در نتیجه  $q \circ p(z)$  در  $Möb(\mathbb{H})$  قرار دارند. به این ترتیب اثبات گزاره ۲-۲۸ تمام است.

## فهوم‌المطلوب

## تمرین ۲-۴۰.

نشان دهید  $Möb(\mathbb{H})$  به طور متعدی روی  $L$  مجموعه خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  عمل می‌کند.

## تمرین ۲-۴۱.

عبارت صریحی برای عضوی از  $Möb(\mathbb{H})$  ارائه دهید که خط هذلولوی مشخص شده بوسیله ۱ و ۲- را به محور موهومی  $I$  ببرد.

## تمرین ۲-۴۲.

فرض کنیم  $X$  مجموعه تمام سه تایی‌های  $(l, r, z)$  است که در آن  $l$  یک خط هذلولوی و  $z$  نقطه‌ای روی  $l$  و  $r$  یکی از دو شعاع بسته در  $l$  مشخص شده با  $z$  می‌باشند. نشان دهید  $Möb^+(\mathbb{H})$  روی  $X$  بطور متعدی عمل می‌کند.

هر چند که  $Möb(\mathbb{H})$  روی  $L$  مجموعه خطوط هذلولوی  $\mathbb{H}$  به طور متعدی عمل می‌کند و هر چند که یک خط هذلولوی با یک زوج از نقاط در  $\mathbb{H}$  مشخص می‌شود، با وجود این نتیجه نمی‌شود که  $Möb(\mathbb{H})$  روی  $P$  مجموعه زوج‌های نقاط متمایز  $\mathbb{H}$  به

طور متعددی عمل کند که این خیلی ساده‌تر از  $T$ ، مجموعه سه تایی‌های نقاط متمایز در  $\mathbb{H}$  است.

این مطلب را مستقیماً با ملاحظه محور موهومی مثبت می‌توان مشاهده کرد. چون نقاط انتهائی در بینهایت  $I$  عبارتند از  $0$  و  $\infty$ ، هر عضو  $Möb(\mathbb{H})$  که  $I$  را به خودش ببرد یا  $0$  و  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارد و یا جای آنها را با هم عوض می‌کند. با یادآوری قضیه ۲-۲۶ شکل کلی یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  را می‌دانیم، یعنی یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  که هر دوی  $0$  و  $\infty$  را ثابت نگه دارد یا به شکل  $m(z) = az$  است که در آن  $a \in \mathbb{R}$  و  $a > 0$  یا به شکل  $m(z) = -a\bar{z}$  است که در آن  $a \in \mathbb{R}$  و  $a > 0$ .

یک عضو  $m$  در  $Möb(\mathbb{H})$  که  $0$  و  $\infty$  را با هم عوض کند یا به شکل  $m(z) = \frac{-b}{z}$  است که در آن  $b \in \mathbb{R}$  و  $b > 0$  و یا به شکل  $m(z) = \frac{b}{z}$  است که در آن  $b \in \mathbb{R}$  و  $b > 0$ .

در هر یک از این حالات می‌توان دید که هیچ عضو  $Möb(\mathbb{H})$  محور موهومی مثبت را به خودش نمی‌برد به طوری که  $i$  را به  $i$  و  $2i$  را به  $3i$  ببرد. در واقع تنها عضو غیرهمانی  $Möb(\mathbb{H})$  که  $I$  را به خودش برده و  $i$  را ثابت نگه می‌دارد  $B(z) = -\bar{z}$  است که یک انعکاس نسبت به  $I$  است و بنابراین هر نقطه  $I$  را ثابت نگه می‌دارد. بعلاوه  $K(z) = \frac{1}{z}$  دو شعاع هذلولوی در  $I$  با نقطه شروع  $i$  را با هم جا به جا می‌کند.

ما به این عدم متعددی عمل نمودن  $Möb(\mathbb{H})$  روی  $P$  مجموعه زوج‌های نقاط متمایز  $\mathbb{H}$ ، بعد از اینکه وسیله‌ای برای اندازه‌گیری فاصله هذلولوی در  $\mathbb{H}$  پیدا کردیم برمی‌گردیم. همچنین نیاز داریم از مفهوم مشابه قرص در  $\bar{\mathbb{C}}$  برای  $\mathbb{H}$  استفاده کنیم.

### تعریف ۲-۲۹.

متمم یک خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  از دو مولفه تشکیل می‌شود که به هر یک از آن دو یک نیم‌صفحه باز<sup>۱</sup> در  $\mathbb{H}$  گوئیم. به ویژه هر نیم‌صفحه بوسیله یک خط هذلولوی یکتا مشخص می‌شود و هر خط هذلولوی یک زوج از نیم‌صفحه‌ها را مشخص می‌کند.

<sup>1</sup> Open half-plane

یک خط هذلولوی که یک نیم صفحه را مشخص کند خط مرزی<sup>۱</sup> نیم صفحه است. یک نیم صفحه بسته است اگر به صورت اجتماع یک خط هذلولوی  $l$  و یکی از مولفه های  $l - IH$  باشد و باز است چنانچه درست یکی از مولفه های  $l - IH$  باشد. درست همانطوریکه تعدی  $Möb$  روی  $C$  مجموعه دوایر در  $\bar{C}$  را به تعدی روی  $D$  مجموعه قرص های در  $\bar{C}$  توسیع دادیم، می توانیم تعدی  $Möb(IH)$  روی  $L$  مجموعه خطوط هذلولوی در  $IH$  را به  $H$  مجموعه نیم صفحه های  $IH$  توسیع دهیم. تمرین ۲-۴۳.

نشان دهید  $Möb(IH)$  روی  $H$  مجموعه نیم صفحه های باز  $IH$  به طور متعدی عمل می کند.

همچنین می توان عمل  $Möb(IH)$  را روی  $\bar{IR}$ ، مرز در بینهایت  $IH$  بررسی کرد.

گزاره ۲-۳۰.

$Möb(IH)$  به طور متعدی روی  $T_{\bar{IR}}$  مجموعه سه تایی های نقاط متمایز  $\bar{IR}$  عمل می کند. اثبات. دوباره با استفاده از لم ۲-۸ به ازای یک سه تایی مفروض  $(z_1, z_2, z_3)$  از نقاط متمایز  $\bar{IR}$ ، کافی است نشان دهیم که یک عضو  $Möb(IH)$  وجود دارد که  $(z_1, z_2, z_3)$  را به  $(0, 1, \infty)$  می برد.

فرض کنیم  $l$  خط هذلولوی باشد که نقاط انتهایی آن در بینهایت  $z_1$  و  $z_2$  باشد و  $m$  عضوی از  $Möb(IH)$  باشد که  $l$  را به محور موهومی  $I$  ببرد. در صورت لزوم با ترکیب  $m$  با  $K(z) = -\frac{1}{z}$ ، می توان فرض کرد  $m(z_1) = 0$  و  $m(z_2) = \infty$ . قرار می دهیم  $b = m(z_3)$ .

اگر  $b > 0$ ، در این صورت ترکیب  $m$  با  $p(z) = \frac{1}{b}z$  سه تایی  $(z_1, z_2, z_3)$  را به  $(0, 1, \infty)$  می برد.

اگر  $b < 0$ ، در این صورت  $p(z) = \frac{1}{b}z$  دیگر در  $Möb(IH)$  نیست، ولی ترکیب  $m$

با  $q(z) = \frac{1}{b}\bar{z}$  که در  $Möb(IH)$  قرار دارد،  $(z_1, z_2, z_3)$  را به  $(0, 1, \infty)$  می برد. بدین ترتیب اثبات گزاره ۲-۳۰ تمام است.

<sup>۱</sup> Bounding line

### فهرست مطالب

این بخش را با ذکر این نکته که  $Möb^+(IH)$  به طور سه گانه متعددی روی  $T_{\mathbb{R}}$  عمل نمی‌کند به پایان می‌بریم، چون هیچ عضو  $Möb^+(IH)$  وجود ندارد به طوریکه  $(0, \infty)$  را به  $(0, -1, \infty)$  ببرد. برای دیدن این امر، توجه کنید که اگر  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in Möb^+(IH)$  نقاط مبدا و  $\infty$  را ثابت نگه دارد، آنگاه  $b=c=0$  چون  $ad=1$  لذا  $m(z) = a^x z$  به ویژه،  $m(1) = a^x > 0$  و در نتیجه  $m(1)$  نمی‌تواند برابر  $-1$  باشد.

## ۲-۱۰. هندسه عمل $Möb(IH)$

هدف این بخش بررسی نحوه عمل کردن یک عضو  $Möb(IH)$  روی  $IH$  است. این بخش را بهتر است به عنوان کاتالوگ امکانات در نظر گرفت.

در بخش ۲-۸، دیدیم که هر عضو غیربدیهی  $Möb(IH)$  را می‌توان یا به صورت زیر:

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{که در آن } a, b, c, d \text{ حقیقی هستند و } ad-bc=1$$

یا به صورت زیر نوشت:

$$m(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} \quad \text{که در آن } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ موهومی محض هستند}$$

$$\text{و } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

با به کارگیری این فرمول‌های صریح، می‌توانیم مجموعه نقاط ثابت را تعیین کنیم.

ابتدا حالت  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  که در آن  $a, b, c, d$  حقیقی هستند و  $ad-bc=1$

را در نظر می‌گیریم. آنچه در ادامه می‌آید عملاً مشابه بحث در بخش ۲-۴ است. در بخش ۲-۱ دیدیم که نقاط ثابت  $m$ ، جواب‌های معادله

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$$

می‌باشند، که ریشه‌های چندجمله‌ای  $p(z) = cz^2 + (d-a)z - b = 0$  در  $\overline{\mathbb{C}}$  هستند.

در حالتیکه  $c=0$ ، یک نقطه ثابت  $\infty$  موجود است. نقطه ثابت دیگری موجود است،

یعنی  $\frac{b}{d-a}$  اگر و فقط اگر  $d \neq a$  و چنین نقطه ثابتی الزاماً یک عدد حقیقی است. لذا،

در حالتیکه  $c = 0$ ، یا فقط یک نقطه ثابت  $\infty$  وجود دارد یا دو نقطه ثابت وجود دارد، یکی در  $\infty$  و دیگری در  $\mathbb{R}$ .

در حالتیکه  $c \neq 0$ ، دو ریشه برای  $p(z)$  در  $\mathbb{C}$  وجود دارند، یعنی:

$$\frac{1}{2} \left[ a - d \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4bc} \right]$$

از آنجاییکه ضرائب  $p(z)$  حقیقی هستند، لذا ریشه‌های  $p(z)$  تحت عمل مزدوج‌گیری ناوردا می‌باشند. در نتیجه یا هر دو ریشه حقیقی هستند یا یکی در  $\mathbb{H}$  و دیگری نیم‌صفحه پایینی قرار دارد.

توجه داریم که  $p(z)$  دقیقاً یک ریشه دارد، که در این حالت حقیقی هم خواهد بود، اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$(d-a)^2 - 4bc = (a+d)^2 - 4 = 0.$$

دو ریشه حقیقی دارد اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$(d-a)^2 - 4bc = (a+d)^2 - 4 > 0.$$

دو ریشه مختلط مزدوج دارد اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$(d-a)^2 - 4bc = (a+d)^2 - 4 < 0.$$

با ترکیب تحلیل بالا با طبقه‌بندی اعضای  $Möb^+$  که در بخش ۲-۴ توصیف شد، می‌بینیم که  $m$  یک نقطه ثابت در  $\mathbb{H}$  دارد اگر و فقط اگر  $m$  بیضوی باشد؛ و اینکه  $m$  یک نقطه ثابت در  $\overline{\mathbb{R}}$  دارد اگر و فقط اگر  $m$  سهموی باشد؛ و اینکه  $m$  دو نقطه ثابت در  $\overline{\mathbb{R}}$  دارد اگر و فقط اگر  $m$  با زاویه ثابت باشد؛ و اینکه همین‌ها تمام حالات ممکن می‌باشند. در حالتیکه  $m$  بیضوی است و در نتیجه یک نقطه ثابت در  $\mathbb{H}$  دارد، عمل  $m$  روی  $\mathbb{H}$  عبارت است از دوران حول آن نقطه ثابت. در واقع، اگر نقطه ثابت  $m$  را  $i$  بگیریم، در نتیجه نقطه ثابت دیگر  $m$  برابر  $-i$  است، می‌توانیم با به کار بردن تمرین ۲-۲۸ مشاهده کنیم که  $m$  به ازای یک عدد حقیقی  $\theta$  به فرم زیر است:

$$m(z) = \frac{\cos(\theta)z + \sin(\theta)}{-\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$$

چون  $Möb(\mathbb{H})$  روی  $\mathbb{H}$  بطور متعددی عمل می‌کند، هر عضو بیضوی آن مزدوج با یک تبدیل موبیوس به فرم بالا خواهد بود: اگر  $m \in Möb(\mathbb{H})$  بیضوی بوده و نقطه  $x \in \mathbb{H}$  ثابت نگه دارد، آنگاه اگر  $p \in Möb(\mathbb{H})$  چنان باشد که  $x$  را به  $i$  ببرد،

در این صورت  $p \circ m \circ p^{-1}$  بیضوی است و  $i$  ثابت نگه می‌دارد.

خاطر نشان می‌کنیم که  $m$  دوران استاندارد اقلیدسی حول  $i$  نیست. بعنوان مثال، فرض کنیم  $\theta = \frac{\pi}{2}$  و توجه داریم که  $m(1+i) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ . در واقع، خط هذلولوی گذرنده از  $i$  و  $1+i$  خط اقلیدسی افقی گذرنده از  $i$  یعنی خط  $L = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) = 1\}$  نیست، که این خط  $L$  به هیچ وجه یک خط هذلولوی نمی‌تواند باشد. بلکه در عوض، خط هذلولوی گذرنده از  $i$  و  $1+i$  مشمول در دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $\frac{1}{2}$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  می‌باشد که از نقطه  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  می‌گذرد.

در حالتیکه  $m$  سهموی است و در نتیجه یک نقطه ثابت  $x$  روی  $\overline{\mathbb{R}}$  دارد، می‌توانیم از متعدی سه‌گانه عمل نمودن  $Möb(\mathbb{H})$  روی  $\overline{\mathbb{R}}$  استفاده کنیم تا  $m$  را مزدوج با یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  به فرم  $m(z) = z+1$  بکنیم. اگرچه، یک عضو سهموی دلخواه در  $Möb^+(\mathbb{H})$  لزوماً با عضوی از  $Möb^+(\mathbb{H})$  به فرم  $m(z) = z+1$  مزدوج نیست، و آن هم به دلیل عدم متعدی سه‌گانه عمل نمودن  $Möb^+(\mathbb{H})$  روی  $\overline{\mathbb{R}}$  است.

به ویژه، یک تبدیل سهموی  $m$  در  $Möb(\mathbb{H})$  با نقطه ثابت  $x$ ، هر دایره را در  $\overline{\mathbb{C}}$  که مشمول در  $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$  بوده و بر  $\overline{\mathbb{R}}$  در  $x$  مماس است، حفظ می‌کند. این دایره‌ها، دایره زمانی<sup>۱</sup> می‌باشند که تحت  $m$  به خودشان برده می‌شوند. مولفه‌های متمم یک دایره زمانی در  $\mathbb{H}$  عبارتند از دو قرص زمانی<sup>۲</sup> که با آن دایره زمانی معین می‌گردند. این مطلب در حالتیکه نقطه ثابت  $x = \infty$  ساده‌تر دیده می‌شود. که در آن این دایره‌ها در  $\overline{\mathbb{C}}$  دقیقاً دایره‌هایی در  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌باشند که از اجتماع یک خط اقلیدسی افقی در  $\mathbb{H}$  با  $\{\infty\}$  به دست می‌آیند.

در حالتیکه  $m$  با زاویه ثابت است و در نتیجه دو نقطه ثابت  $x$  و  $y$  روی  $\overline{\mathbb{R}}$  دارد، می‌توانیم از متعدی عمل نمودن  $Möb(\mathbb{H})$  روی زوج‌های نقاط متمایز  $\overline{\mathbb{R}}$  استفاده کنیم تا  $m$  را مزدوج با یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  به فرم  $m(z) = \lambda z$  بکنیم که در آن  $\lambda$  یک عدد حقیقی مثبت است. در این حالت قسمت مثبت محور موهومی تحت  $m$  به خودش تصویر می‌شود، و همین‌طور هر دو نیم‌صفحه معین شده با قسمت مثبت محور موهومی.

<sup>1</sup> horocircle  
<sup>2</sup> Horodisc



در حالت کلی، محور یک تبدیل با زاویه ثابت  $m$  را با خط هذلولوی متشکل از نقاط ثابت  $m$  تعریف می‌کنیم و با نماد  $axis(m)$  نمایش می‌دهیم. دقیقاً مانند پاراگراف قبلی، نتیجه می‌شود که  $m$  محورش را به خودش تصویر می‌کند و هر یک از نیم‌صفحه‌های معین شده با  $axis(m)$  را به خودش می‌برد.

نتایج تحلیل بالا را در قالب قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.  
قضیه ۲-۳۱.

فرض کنیم  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  عضو  $Möb^+(\mathbb{H})$  از  $Möb^+(\mathbb{H})$  باشد شرط  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  و  $ad - bc = 1$  در این صورت دقیقاً یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:  
۱-  $m$  همانی است.

۲-  $m$  دقیقاً دو نقطه ثابت در  $\overline{\mathbb{R}}$  دارد؛ در این حالت  $m$  با زاویه ثابت است و به ازای یک عدد حقیقی مثبت  $\lambda$  با عضو  $q(z) = \lambda z$  از  $Möb^+(\mathbb{H})$  مزدوج است.

۳-  $m$  یک نقطه ثابت در  $\overline{\mathbb{R}}$  دارد؛ در این حالت  $m$  سهموی است و با عضو  $q(z) = z + 1$  از  $Möb^+(\mathbb{H})$  مزدوج است.

۴-  $m$  یک نقطه ثابت در  $\mathbb{H}$  دارد؛ در این حالت  $m$  بیضوی است و با عضو  $q(z) = \frac{\cos(\theta)z + \sin(\theta)}{-\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$  از  $Möb^+(\mathbb{H})$  به ازای یک عدد حقیقی  $\theta$  مزدوج است.

فرض کنیم  $m$  تبدیل با زاویه ثابت در  $Möb^+(\mathbb{H})$  و  $x$  و  $y$  دو نقطه ثابت  $m$  در  $\overline{\mathbb{R}}$  می‌باشند و فرض کنیم  $A$  یک دایره دلخواه در  $\overline{\mathbb{C}}$  گذرنده از  $x$  و  $y$  باشد که لزوماً بر  $\overline{\mathbb{R}}$  عمود نیست. چون  $m$  دایره‌های در  $\overline{\mathbb{C}}$  را به دایره‌هایی در  $\overline{\mathbb{C}}$  می‌برد، زاویه‌ها را حفظ می‌کند و نیم‌صفحه‌های معین شده با محورش را حفظ می‌کند، می‌بینیم که  $m$ ،  $A \cap \mathbb{H}$  را به خودش تصویر می‌کند. بعلاوه،  $m$  بعنوان انتقال در امتداد  $A \cap \mathbb{H}$  عمل می‌کند. این مطلب گردش مختصرمان در بررسی عمل اعضای  $Möb^+(\mathbb{H})$  روی  $\mathbb{H}$  را کامل می‌کند.

همچنین اعضای  $Möb(\mathbb{H}) \setminus Möb^+(\mathbb{H})$  نیز باید در نظر گرفته شوند که در آن داریم:

$$Möb(\mathbb{H}) \setminus Möb^+(\mathbb{H}) = \{m \in Möb(\mathbb{H}) \mid m \notin Möb^+(\mathbb{H})\}$$

همانطوریکه در بخش ۲-۸ دیدیم، هر عضو  $n$  از  $Möb(\mathbb{H}) \setminus Möb^+(\mathbb{H})$  به فرم زیر است:

$$m(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$$

که در آن  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  موهومی محض هستند و  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ .

مانند بالا، توصیف خود از عمل  $n$  روی  $\mathbb{H}$  را با تعیین نقاط ثابت  $n$  که نقاطی

در  $\mathbb{H}$  هستند که در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} = z$$

تحلیل خود را با در نظر گرفتن یک مثال خاص آغاز می‌کنیم، یعنی تبدیل زیر:

$$q(z) = \frac{i\bar{z} + \gamma i}{i\bar{z} + i}$$

نقاط ثابت  $q$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  جواب‌های معادله  $q(z) = z$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  می‌باشند. چون  $q(\infty) = 1 \neq \infty$ ,

اینها آن نقاطی مانند  $z$  در  $\mathcal{C}$  می‌باشند که در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$i\bar{z} + \gamma i = z(i\bar{z} + i)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$-2\text{Im}(z) + i(|z|^2 - 2) = 0$$

با در نظر گرفتن قسمت‌های حقیقی و موهومی، می‌بینیم که برای هر نقطه ثابت  $q$

مانند  $z$  داریم  $\text{Im}(z) = 0$ ، در نتیجه هیچ نقطه ثابتی برای  $q$  در  $\mathbb{H}$  وجود ندارد. چون

همچنین  $|z|^2 = 2$  برقرار است، دو نقطه ثابت برای  $q$  در  $\bar{\mathbb{R}}$  وجود دارد، یعنی  $\pm\sqrt{2}$ .

در این حالت، می‌بینیم که  $q$  خط هذلولوی  $l$  مشخص شده با  $\pm\sqrt{2}$  را به خودش

می‌برد، ولی هیچ نقطه‌ای روی آن را ثابت نگه نمی‌دارد. در عوض،  $q$  بعنوان یک انعکاس

نسبت به  $l$  که با یک انتقال در امتداد  $l$  نیز ترکیب می‌شود، عمل می‌کند. خاصه

اینکه، عمل  $q$  دو نیم‌صفحه تعیین شده با  $l$  در  $\mathbb{H}$  را با هم جا به جا می‌کند. به  $q$  یک

لغزه<sup>۱</sup> در امتداد  $l$  می‌نامیم.

تمرین ۲-۴۴.

$q$  را به صورت ترکیب یک انعکاس نسبت به  $l$  و یک انتقال در امتداد  $l$  بیان کنید.

برای بررسی حالت کلی، می‌نویسیم  $\alpha = ai, \beta = bi, \gamma = ci, \delta = di$  که در آن

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$  و  $ad - bc = -1$ . همچنین می‌نویسیم  $x = \text{Re}(z)$  و  $y = \text{Im}(z)$  در

<sup>۱</sup> Glide reflection

این صورت نقاط ثابت  $n$  در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$c|z|^2 + dz - a\bar{z} - b = cx^2 + cy^2 + (d-a)x - b + i(d+a)y = 0.$$

فرض می‌کنیم که  $n$  دارای نقطه ثابت  $z = x + iy$  در  $\mathbb{H}$  است. با در نظر گرفتن قسمت حقیقی و موهومی معادله بالا و با توجه به اینکه  $y > 0$ ، می‌بینیم که  $d + a = 0$ ، در نتیجه  $d = -a$ . به ویژه، می‌بینیم که:

$$ad - bc = -d^2 - bd = -1$$

بنابراین نقاط ثابت  $n$  در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$cx^2 + cy^2 + 2dx - b = 0.$$

در حالتیکه  $c = 0$ ، هیچ محدودیتی روی قسمت موهومی نقطه ثابت  $z$  نداریم. همچنین داریم  $d \neq 0$  زیرا  $ad - bc = -1$ ، لذا نقاط ثابت  $n$  دقیقاً نقاطی در  $\mathbb{H}$  هستند که روی خط اقلیدسی زیر قرار دارند که خط هذلولوی مشخص شده با  $\infty$  و  $\frac{b}{2d}$  است، یعنی:

$$\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = \frac{b}{2d}\}$$

یعنی، هر نقطه روی خط هذلولوی  $\ell$  مشخص شده با  $\infty$  و  $\frac{b}{2d}$  تحت  $n$  ثابت می‌ماند. فرض کنیم  $r_\ell$  انعکاس نسبت به خط  $\ell$  است و ترکیب  $r_\ell \circ n$  را در نظر می‌گیریم. چون  $n \in \operatorname{Mob}(\mathbb{H}) \setminus \operatorname{Mob}^+(\mathbb{H})$ ، داریم  $r_\ell \circ n \in \operatorname{Mob}^+(\mathbb{H})$ . چون  $r_\ell \circ n$  بیش از دو نقطه از  $\mathbb{H}$  را ثابت نگه می‌دارد، یعنی تمام نقاط روی  $\ell$  را، می‌بینیم که  $r_\ell \circ n$  همانی است، و در نتیجه  $n = r_\ell$  انعکاس نسبت به  $\ell$  است.

## تمرین ۲-۴۵.

نقاط ثابت  $q(z) = -\bar{z} + 1$  را تعیین کنید.

در حالتیکه  $c \neq 0$ ، با تقسیم بر  $c$  و مربع کامل نمودن می‌بینیم که نقاط ثابت  $n$  در  $\mathbb{H}$  با معادله زیر داده می‌شوند:

$$x^2 + y^2 + \frac{2d}{c}x - \frac{b}{c} = (x + \frac{d}{c})^2 + y^2 - \frac{d^2 + bc}{c^2} = (x + \frac{d}{c})^2 + y^2 - \frac{1}{c^2} = 0.$$

که معادله دایره اقلیدسی  $A$  به مرکز اقلیدسی  $-\frac{d}{c}$  و به شعاع اقلیدسی  $\frac{1}{|c|}$  است.

به ویژه، این معادله نشان می‌دهد که نقاط ثابت  $n$  دقیقاً نقاط روی خط هذلولوی

$A \cap \mathbb{H}$  قرار دارند. همانند حالتیکه  $c = 0$ ، در این حالت نیز  $n$  انعکاس نسبت  $A \cap \mathbb{H}$  است.

## تمرین ۲-۴۶.

نقاط ثابت  $q(z) = \frac{\gamma i \bar{z} - i}{\gamma i \bar{z} - \gamma i}$  را بیابید.

باید کمی دقت کنیم و هوشیار باشیم، چون اعضای  $Möb(\mathbb{H})$  مانند تبدیل

$q(z) = \frac{i\bar{z} + \gamma i}{i\bar{z} + i}$  که پیشتر در نظر گرفته شد، وجود دارند بطوریکه به عنوان انعکاس

نسبت به یک خط هذلولوی عمل نمی‌کنند.

مشکل کار در تحلیل اعضای  $Möb(\mathbb{H}) \setminus Möb^+(\mathbb{H})$  این است که با فرض

وجود نقطه ثابتی در  $\mathbb{H}$  برای تبدیل مورد سوال، کار را شروع کردیم.

بنابراین، برای تکمیل تحلیل اعضای  $Möb(\mathbb{H}) \setminus Möb^+(\mathbb{H})$ ، حالتی را در نظر

می‌گیریم که نقطه ثابتی در  $\mathbb{H}$  برای تبدیل  $n$  موجود نباشد.

در این حالت، جواب‌های  $n(z) = z$  نقاطی مانند  $z$  در  $\bar{\mathbb{C}}$  هستند که در معادله زیر

صدق می‌کنند:

$$cx^2 + cy^2 + (d-a)x - b + i(d+a)y = 0.$$

چون مایلیم حالتی را در نظر بگیریم که هیچ جوابی در  $\mathbb{H}$  وجود نداشته باشد، قرار

می‌دهیم  $\gamma = 0$  و جواب‌هایی را در نظر می‌گیریم که در  $\bar{\mathbb{R}}$  قرار دارند.

در حالتیکه  $c = 0$ ، دو جواب داریم، یعنی  $\infty$  و  $\frac{b}{\gamma d}$ . در این حالت،  $n$  خط

هذلولوی  $l$  مشخص شده با  $\infty$  و  $\frac{b}{\gamma d}$  را به خودش می‌برد و دو نیم‌صفحه تعیین شده

با  $l$  را با هم جا به جا می‌کند، ولی هیچ نقطه‌ای روی  $l$  را ثابت نگه نمی‌دارد، زیرا

$n$  هیچ نقطه ثابتی در  $\mathbb{H}$  ندارد. یعنی،  $n$  بعنوان یک لغزه در امتداد  $l$  عمل می‌کند.

در این حالت، می‌توانیم  $n$  را به صورت ترکیب یک انعکاس نسبت به  $l$  و یک تبدیل

با زاویه ثابت با محور  $l$  بنویسیم. راحت‌ترین راه برای دیدن این امر، توجه به ترکیب زیر

است:

$$n \circ B(z) = n(-\bar{z}) = \frac{-\alpha z + \beta}{-\gamma z + \delta} = \frac{-az + b}{-cz + d}$$

که یک تبدیل با زاویه ثابت است، که در آن  $\alpha = ai$ ،  $\beta = bi$ ،  $\gamma = ci$  و  $\delta = di$

در آن  $ad - bc = -1$  و  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

در حالتیکه  $c \neq 0$ ، با حل کردن معادله درجه دوم  $cx^2 + (d-a)x - b = 0$  و با استفاده از  $ad - bc = -1$  نقاط ثابت  $n$  به دست می‌آیند:

$$x = \frac{1}{2c} [a-d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}] = \frac{1}{2c} [a-d \pm \sqrt{(d+a)^2 + 4}]$$

به ویژه، اگر  $n$  نقطه ثابتی در  $\mathbb{H}$  نداشته باشد، آنگاه ضرورتاً  $n$  دارای دو نقطه ثابت در  $\overline{\mathbb{R}}$  است، در نتیجه  $n$  بعنوان یک لغزه در امتداد خط هذلولوی مشخص شده با این دو نقطه عمل می‌کند. دقیقاً مانند بالا، اینچنین تبدیل  $n$  ترکیب یک انعکاس نسبت به این خط هذلولوی و یک تبدیل با زاویه ثابت که محورش همین خط هذلولوی است، می‌باشد. تحلیل خود را در مورد اعضای  $Möb(\mathbb{H}) \setminus Möb^+(\mathbb{H})$  در قالب قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

### قضیه ۲-۳۲.

فرض کنیم  $n(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$  عضوی از  $Möb(\mathbb{H}) \setminus Möb^+(\mathbb{H})$  است که در آن  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  موهومی محض هستند و  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ . در این صورت دقیقاً یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

۱-  $n$  نقطه‌ای را در  $\mathbb{H}$  ثابت نگه می‌دارد؛ که در این حالت خط هذلولوی  $l$  موجود است بطوریکه  $n$  بعنوان انعکاس نسبت به  $l$  عمل می‌کند.

۲-  $n$  هیچ نقطه‌ای را در  $\mathbb{H}$  ثابت نگه نمی‌دارد؛ که در این حالت  $n$  دقیقاً دارای دو نقطه ثابت در  $\overline{\mathbb{R}}$  است و بعنوان لغزه در امتداد خط هذلولوی  $l$  مشخص شده با این دو نقطه عمل می‌کند.

### تمرین ۲-۴۷.

فرض کنیم  $p(z) = z+1$  سهموی است و فرض کنیم  $n$  انعکاس نسبت به خط هذلولوی  $l$  است. ترکیب  $p \circ n$  را بیابید و نقاط ثابت  $p \circ n$  را بیابید.

## طول و فاصله در $IH$

اینک یک گروه مناسب از تبدیلات  $IH$  را در دست داریم، یعنی  $Möb(IH)$ . این گروه از این جهت مناسب است که اعضای آن، خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برند و زاویه را حفظ می‌کنند. در این فصل وسیله‌ای برای اندازه‌گیری مسیرها در  $IH$  به دست می‌آوریم که تحت عمل این گروه ناوردا است و از آن به عنوان عنصر ناوردای طول قوس<sup>۱</sup> نام برده می‌شود. بوسیله این عنصر ناوردای طول قوس، مفهوم ناوردای فاصله در  $IH$  را ساخته و برخی از خواص آن را به دست می‌آوریم.

### ۳-۱. مسیرها و عناصر طول قوس

حال که گروهی از تبدیلات  $IH$ ، یعنی  $Möb(IH)$  را در دست داریم که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برد، در موقعیتی قرار داریم که عنصر طول قوس را برای متر هذلولوی روی  $IH$  به دست آوریم. برای این منظور ابتدا لازم است تعریف طول قوس از ریاضی عمومی را یادآوری کنیم.

<sup>۱</sup> Invariant element of arc-length

یک مسیر  $C^1$  در صفحه  $\mathbb{R}^2$  عبارت است از یک تابع  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  که روی  $[a, b]$  پیوسته بوده و روی  $(a, b)$  مشتق پذیر با مشتق پیوسته باشد. در دستگاه مختصات، می‌توانیم بنویسیم  $f(t) = (x(t), y(t))$  که در آن  $x(t)$  و  $y(t)$  توابعی پیوسته روی  $[a, b]$  و روی  $(a, b)$  مشتق پذیر با مشتق پیوسته است. تصویر یک بازه (بسته، باز و یا نیم-باز) تحت مسیر  $f$  را یک منحنی<sup>۱</sup> در  $\mathbb{R}^2$  می‌نامیم.

طول اقلیدسی مسیر  $f$  با انتگرال زیر داده می‌شود<sup>۲</sup>:

$$l(f) := \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

که در آن  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$  عنصر طول قوس صفحه  $\mathbb{R}^2$  می‌باشد.

توجه کنید که طول نمودار یک تابع  $C^1$  مانند  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  حالت خاصی از طول یک مسیر  $C^1$  به صورت فوق است. در این حالت به ازای تابع مفروض  $g$ ، یک مسیر  $\mathbb{R}^2 \rightarrow [a, b]$  به صورت  $f(t) = (t, g(t))$  می‌سازیم.

بعنوان مثال طول مسیر  $\mathbb{R}^2 \rightarrow [1, 2]$  با ضابطه  $f(t) = (1 + t, \frac{t^2}{2})$  عبارت است

از:

$$\begin{aligned} l(f) &= \int_1^2 \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} [t\sqrt{1+t^2} + \ln |t + \sqrt{1+t^2}|] \Big|_1^2 \\ &= \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

اینک به معرفی چند نماد می‌پردازیم. چنانچه مسیر  $f$  را به جای  $\mathbb{R}^2$  در  $\mathcal{C}$  تلقی کنیم و بنویسیم  $f(t) = x(t) + y(t)i$ ، در این صورت می‌دانیم که  $f'(t) = x'(t) + y'(t)i$  و  $|f'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ . به ویژه، انتگرال مربوط به طول اقلیدسی  $f$  به صورت زیر در می‌آید:

$$l(f) := \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b |f'(t)| dt,$$

و لذا می‌توان عنصر طول قوس استاندارد در  $\mathcal{C}$  را به صورت زیر نوشت:

$$|dz| = |f'(t)| dt.$$

<sup>1</sup> Curve

<sup>2</sup> مولف از نماد  $length(f)$  برای نمایش طول اقلیدسی مسیر  $f$  استفاده می‌کند.

در اینجا نماد جدیدی به کار برده و انتگرال سمت راست را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_a^b |f'(t)| dt = \int_f |dz|$$

یک فایده این نماد این است که خیلی قابل انعطاف بوده و به آسانی قابل توسیع است. به طور مثال به آسانی می‌توان هر انتگرال مسیری را با این نماد نوشت. یعنی فرض کنیم  $\rho$  یک تابع پیوسته  $\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  باشد. انتگرال مسیری  $\rho^1$  در امتداد مسیر  $C^1$  مانند  $\mathbb{C} \rightarrow [a, b]$  با انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$\int_f \rho(z) |dz| = \int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| dt$$

این انتگرال مسیری را می‌توان به صورت یک عنصر طول قوس جدید تفسیر نمود که با  $|dz| \rho(z)$  نمایش داده شده و از تغییر مقیاس عنصر طول قوس اقلیدسی یعنی  $|dz|$  در هر نقطه  $z \in \mathbb{C}$  به دست می‌آید که میزان این تغییر مقیاس توسط تابع  $\rho$  داده می‌شود. از اینجا تعریف زیر را داریم.

### تعریف ۱-۳

فرض کنیم  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  یک مسیر  $C^1$  در  $\mathbb{C}$  باشد. طول  $f$  نسبت به عنصر طول قوس  $|dz| \rho(z)$  به صورت انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$l_\rho(f) = \int_f \rho(z) |dz| = \int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| dt.$$

در این مقوله تنوع زیادی وجود دارد که در ادامه این بخش به پیدا کردن برخی از آنها می‌پردازیم. در بخش بعدی مطالعه خود را به عناصر طول قوس روی  $\mathbb{H}$  محدود خواهیم کرد.

به عنوان یک مثال خاص، فرض می‌کنیم  $\rho(z) = \frac{1}{1+|z|^2}$  و عنصر طول قوس زیر را روی  $\mathbb{C}$  در نظر می‌گیریم:

$$\rho(z) |dz| = \frac{1}{1+|z|^2} |dz|$$



به ازای  $r > 0$ ، فرض کنیم مسیر  $\mathcal{C} \rightarrow [0, 2\pi]: f$  با ضابطه  $f(t) = re^{it}$  تعریف شود که معادله پارامتری یک دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی مبدا و به شعاع اقلیدسی  $r$  است. از آنجاییکه  $|f(t)| = r$  و  $|f'(t)| = |ire^{it}| = r$ ، طول  $f$  نسبت به عنصر طول قوس  $|\rho(z)| dz$  عبارت است از<sup>۱</sup>:

$$l_\rho(f) = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1+|z|^2} |dz| = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2} |f'(t)| dt = \frac{2\pi r}{1+r^2}$$

### تمرین ۳-۱.

فرض کنید تابع  $\delta$  روی  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  به این صورت تعریف شود که  $\delta(z)$  برابر با معکوس فاصله اقلیدسی  $z$  تا  $S^1 = \partial D$  است. ضابطه صریح  $\delta(z)$  را بر حسب  $z$  به دست آورید. به ازای هر  $0 < r < 1$ ، فرض کنید  $C_r$  دایره اقلیدسی در  $D$  به مرکز اقلیدسی  $0$  و به شعاع اقلیدسی  $r$  باشد. طول  $C_r$  را نسبت به عنصر طول قوس  $|\rho(z)| dz$  پیدا کنید.

عنصر طول قوس به شکل  $|\rho(z)| dz$  را *انحراف همدیس*<sup>۲</sup> عنصر طول قوس استاندارد  $|dz|$  روی  $\mathcal{C}$  می‌گوییم. انحراف‌های همدیس  $|dz|$  کلی‌ترین شکل عنصر طول قوس روی یک زیر مجموعه باز  $\mathcal{C}$  نمی‌باشند. یک عنصر طول قوس کلی‌تر ممکن است به صورت  $|\xi(z, \nu)| dz$  باشد که در آن  $\nu$  یک بردار در  $\mathbb{C}$  است. برای یک مسیر مشتق‌پذیر  $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  با مشتق ناصفر، این عنصر طول قوس را به صورت زیر تعبیر می‌کنیم:

$$\int_f |\xi(z, \nu)| dz| = \int_a^b |\xi(f(t), f'(t))| |f'(t)| dt.$$

در اینجا با عنصرهای طول قوس به شکل کلی بالا کار نمی‌کنیم، زیرا نیازی به این امر نداریم. برای پیدا کردن یک عنصر طول قوس روی  $\mathbb{H}$  که تحت عمل  $Möb(\mathbb{H})$  ناورد باشد، کافی است با انحراف‌های همدیس  $|dz|$ ، یعنی عنصرهای طول قوسی به شکل  $|\rho(z)| dz$  کار کنیم.

<sup>۱</sup> توجه کنید که اگر  $r$  به قدر کافی کوچک باشد، یعنی بتوان از  $r^2$  صرف نظر نمود، طول  $f$  نسبت به عنصر طول قوس  $|\rho(z)| dz$  همان طول اقلیدسی  $f$  خواهد بود [م].

<sup>۲</sup> Conformal distortion

تاکنون فقط مسیرهای  $C^n$  را مورد مطالعه قرار داده‌ایم که به آسانی و راحتی می‌توان مجموعه این مسیرها را توسعه داد. یک مسیر  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  را بطور قطعه‌ای  $C^n$  نامند، اگر  $f$  پیوسته باشد و یک افرازی از  $[a, b]$  به زیر بازه‌های  $[a_1, a_2]$  و  $[a_2, a_3]$  و ... و  $[a_n, a_{n+1} = b]$  وجود داشته باشد بطوریکه  $f$  روی هر زیر بازه  $[a_i, a_{i+1}]$ ،  $C^n$  باشد.

یک مثال طبیعی از مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C^n$  با استفاده از قدر مطلق به دست می‌آید. مثلاً مسیر  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  با ضابطه  $f(t) = t + |t|i$  را در نظر می‌گیریم. چون  $|t|$  در  $t = 0$  مشتق‌پذیر نیست،  $f$  یک مسیر  $C^1$  نیست. در اینجا روی  $[-1, 0]$  داریم  $|t| = -t$  و لذا  $f(t) = t - it$  است. همچنین روی  $[0, 1]$  داریم  $|t| = t$  و لذا  $f(t) = t + it$  است.  $C^1$  است. لذا  $f$  روی بازه  $[-1, 1]$  به طور قطعه‌ای  $C^1$  است.

هر محاسبه و عملی که روی یک مسیر  $C^1$  بتوان انجام داد، روی یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  نیز با ترکیبی از تعدادی از مسیرهای  $C^1$  می‌توان انجام داد. در ادامه، همه مسیرها را به طور قطعه‌ای  $C^1$  می‌گیریم، مگر اینکه خلاف آن تصریح شود.

### تمرین ۲-۳

طول مسیر  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  با ضابطه  $f(t) = t + |t|i$  را نسبت به عنصر طول قوس

$$\frac{1}{1+|z|^2} |dz|$$
 پیدا کنید.

در اینجا یک سؤال مطرح است که وقتی حوزه تعریف یک مسیر  $C^1$  مانند  $f$  تغییر کند چه تغییری در طول مسیر  $f$  رخ می‌دهد. یعنی فرض کنیم  $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  یک تابع به طور قطعه‌ای  $C^1$  پوشا باشد (لذا  $[a, b] = h[\alpha, \beta]$ ). یک مسیر  $C^1$  جدید به صورت ترکیب  $g = f \circ h$  می‌سازیم. چه رابطه‌ای بین  $l_\rho(f)$  و  $l_\rho(g)$  وجود دارد؟

طول مسیر  $f$  نسبت به  $|dz| \rho(z)$  به صورت زیر است:

$$l_\rho(f) = \int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| dt$$

در حالی که طول  $g$  نسبت به  $|dz| \rho(z)$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} l_\rho(g) &= \int_\alpha^\beta \rho(g(t)) |g'(t)| dt \\ &= \int_\alpha^\beta \rho(f \circ h(t)) |(f \circ h)'(t)| dt \\ &= \int_\alpha^\beta \rho(f(h(t))) |f'(h(t))| |h'(t)| dt \end{aligned}$$

اگر به ازای هر  $t \in [\alpha, \beta]$  داشته باشیم  $h'(t) \geq 0$ ، در این صورت  $h(\beta) = b$ ،  $h(\alpha) = a$  و  $|h'(t)| = h'(t)$  و لذا بعد از تغییر متغیر  $s = h(t)$ ، طول  $g$  نسبت به  $\int_a^b \rho(z) |dz|$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} l_\rho(g) &= \int_\alpha^\beta \rho(f(h(t))) |f'(h(t))| |h'(t)| dt \\ &= \int_a^b \rho(f(s)) |f'(s)| ds = l_\rho(f) \end{aligned}$$

به همین ترتیب اگر به ازای هر  $t \in [\alpha, \beta]$  داشته باشیم  $h'(t) \leq 0$ ، در این صورت  $h(\beta) = a$ ،  $h(\alpha) = b$  و  $|h'(t)| = -h'(t)$  و لذا بعد از تغییر متغیر  $s = h(t)$ ، طول  $g$  نسبت به  $\int_a^b \rho(z) |dz|$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} l_\rho(g) &= \int_\alpha^\beta \rho(f(h(t))) |f'(h(t))| |h'(t)| dt \\ &= - \int_b^a \rho(f(s)) |f'(s)| ds = l_\rho(f) \end{aligned}$$

لذا نشان داده‌ایم که اگر به ازای هر  $t \in [\alpha, \beta]$ ،  $h'(t) \geq 0$  یا به ازای هر  $t \in [\alpha, \beta]$ ،  $h'(t) \leq 0$  آنگاه:

$$l_\rho(f) = l_\rho(f \circ h)$$

که در آن  $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  و  $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  به طور قطعه‌ای  $C^1$  است. در این حالت به  $f \circ h$  یک تجدید پارامتر<sup>۱</sup>  $f$  گویند. توجه کنید که با تجدید پارامتر می‌توان دامنه تعریف یک مسیر را به دلخواه انتخاب کرد، زیرا همواره می‌توان چنین تابعی بین دو بازه پیدا کرد.

عکس این مطلب، هر چند که آن را در اینجا اثبات نمی‌کنیم، نیز برقرار است؛ یعنی  $l_\rho(f) = l_\rho(f \circ h)$  نتیجه می‌دهد که به ازای هر  $t \in [\alpha, \beta]$ ،  $h'(t) \geq 0$  یا به ازای هر  $t \in [\alpha, \beta]$ ،  $h'(t) \leq 0$ . این نکته را در قالب گزاره زیر بیان می‌کنیم.

### گزاره ۳-۲.

فرض کنیم  $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  و  $[\alpha, \beta]$  بازه دیگری باشد و  $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  به طور قطعه‌ای  $C^1$  و پوشا باشد. فرض کنیم  $\rho(z) |dz|$  یک عنصر طول قوس روی  $\mathcal{C}$  باشد. در این صورت  $l_\rho(f \circ h) \geq l_\rho(f)$  و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که  $f \circ h$  یک تجدید پارامتر  $f$  باشد. به طور معادل تساوی فقط و فقط

<sup>۱</sup> Reparametrization

وقتی برقرار است که به ازای هر  $t \in [\alpha, \beta]$ ،  $h'(t) \geq 0$  یا به ازای هر  $t \in [\alpha, \beta]$ ،  $h'(t) \leq 0$ .

این بخش را با ذکر چند اصطلاح به پایان می‌بریم.

### تعریف ۳-۳.

یک پارامتری‌سازی زیرمجموعه  $X$  از  $\mathcal{C}$  عبارت است از یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  مانند  $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  بطوریکه  $X = f([a, b])$ .  
 بعنوان یک مثال، مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$ ،  $\mathcal{C} \rightarrow [0, 4\pi]: g$  با ضابطه  $g(t) = \cos t + i \sin t$  یک پارامتری‌سازی دایره واحد در  $\mathcal{C}$  یعنی  $S^1$  است.  
 می‌توانیم پارامتری‌سازی  $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  برای مجموعه  $X$  را بعنوان یک توصیف از قدم زدن در امتداد  $X$  تلقی کنیم: همانطوری‌که  $t$  در امتداد  $[a, b]$  قدم می‌زند، نقطه  $f(t)$  در امتداد  $X$  قدم می‌زند.

### تعریف ۳-۴.

مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$   $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  مسیر ساده<sup>۱</sup> است هرگاه یک به یک باشد.  
 یک مثال مسیر ساده، مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$   $\mathcal{C} \rightarrow [-1, 1]: f$  با ضابطه  $f(t) = t + |t|i$  است که قبلاً بحث شد. یک مثال از مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  که ساده نیست عبارت است از مسیر  $\mathcal{C} \rightarrow [0, 4\pi]: g$  با ضابطه  $g(t) = \cos t + i \sin t$ ، زیرا به ازای هر  $0 \leq t \leq 2\pi$  داریم  $g(t) = g(t + 2\pi)$ .

### تعریف ۳-۵.

فرض کنیم  $f$  یک پارامتری‌سازی مجموعه  $X$  در  $\mathcal{C}$  است. اگر  $f$  یک مسیر ساده باشد، می‌گوییم  $f$  یک پارامتری‌سازی ساده<sup>۲</sup>  $X$  است.  
 برای بیشتر آنچه که انجام می‌دهیم، این تعریف پارامتری‌سازی ساده بسیار محدود کننده است، بطور مشابه کار کردن فقط با مسیرهای  $C^1$  و نه مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C^1$  بسیار محدود کننده است. این امر ما را به تعریف زیر رهنمون می‌گردد.

<sup>1</sup> Simple path

<sup>2</sup> Simple parametrization

## تعریف ۳-۶.

مسیر به طور قطعه‌ای  $C: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  یک مسیر تقریباً ساده<sup>۱</sup> است هرگاه قابل بیان به صورت ترکیب  $f = h \circ g$  باشد، که در آن  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  یک مسیر ساده و  $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$  یک تابع به طور قطعه‌ای  $C$  است بطوریکه  $g'(t)$  تغییر علامت ندهد (بنابراین یا به ازای هر  $t \in [c, d]$   $g'(t) \geq 0$  یا به ازای هر  $t \in [c, d]$   $g'(t) \leq 0$ )

## تعریف ۳-۷.

فرض کنیم  $f$  یک پارامتری‌سازی مجموعه  $X$  در  $\mathbb{C}$  است. اگر  $f$  یک مسیر تقریباً ساده باشد، می‌گوییم  $f$  یک پارامتری‌سازی تقریباً ساده<sup>۲</sup>  $X$  است.

مزیت این تعاریف مسیر تقریباً ساده و پارامتری‌سازی تقریباً ساده این است که اگر یک پارامتری‌سازی مجموعه  $X$  را بعنوان یک توصیف از قدم زدن در امتداد  $X$  تلقی کنیم، آنگاه یک پارامتری‌سازی تقریباً ساده مجموعه  $X$  قدم زدن با وقفه و مکث در امتداد  $X$  خواهد بود که البته به عقب هم برنگردیم. همانطوریکه هم اکنون در گزاره ۳-۲ دیدیم، این امر نتیجه می‌دهد که اگر  $f$  یک مسیر تقریباً ساده باشد و  $f = h \circ g$  که در آن  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  یک مسیر ساده و  $g'(t)$  تغییر علامت ندهد، آنگاه طول  $f$  و طول  $h$  با هم برابرند.

## تعریف ۳-۸.

مجموعه  $X$  در  $\mathbb{C}$  یک منحنی بسته ساده<sup>۳</sup> است، هرگاه یک پارامتری‌سازی  $f$  برای  $X$  موجود باشد بطوریکه  $f$  روی  $[a, b]$  یک به یک باشد و  $f(a) = f(b)$ . بعنوان یک مثال خاص، دایره واحد  $S^1$  یک منحنی بسته ساده در  $\mathbb{C}$  با پارامتری‌سازی  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  با ضابطه  $g(t) = \cos t + i \sin t$  است.

۳-۲. عنصر طول قوس روی  $IH$ 

هدف ما پیدا کردن وسیله‌ای برای اندازه‌گیری طول هذلولوی و فاصله هذلولوی در  $IH$  است. برای اینکه طول هذلولوی را اندازه بگیریم، لازم است یک عنصر طول قوس هذلولوی مناسب پیدا کنیم. از آنجاییکه می‌خواهیم طول هذلولوی را اندازه بگیریم و چون

<sup>1</sup> Almost simple

<sup>2</sup> Almost simple parametrization

<sup>3</sup> Simple closed curve

یک گروه خوش‌رفتار از تبدیلات  $\mathbb{H}$ ، یعنی  $Möb(\mathbb{H})$  را در دست داریم، معقول به نظر می‌رسد که عناصر طول قوسی را روی  $\mathbb{H}$  در نظر بگیریم که تحت عمل  $Möb(\mathbb{H})$  ناوردا باشند.

فرض کنیم  $\rho(z)|dz|$  یک عنصر طول قوس روی  $\mathbb{H}$  باشد، یعنی یک انحراف همدیس عنصر طول قوس استاندارد باشد. بنابراین طول یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C' \rightarrow \mathbb{H}$   $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  به صورت زیر است:

$$l_\rho(f) = \int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)| dt.$$

هر چند که واضح به نظر می‌رسد که این انتگرال به ازای هر مسیر  $f$  روی  $\mathbb{H}$  متناهی است، با وجود این در گزاره ۳-۱۳ نیز این مطلب را اثبات می‌کنیم.

منظور ما از جمله «طول»، تحت عمل  $Möb(\mathbb{H})$  ناورداست. این است که به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C' \rightarrow \mathbb{H}$   $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  و هر عضو  $\gamma$  از  $Möb(\mathbb{H})$  داریم:

$$l_\rho(f) = l_\rho(\gamma \circ f).$$

حال ببینیم این فرض چه شرطی روی  $\rho$  قرار می‌دهد. ابتدا  $\gamma$  را عضوی از  $Möb^+(\mathbb{H})$  در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف  $l_\rho(f)$  و  $l_\rho(\gamma \circ f)$  داریم:

$$l_\rho(f) = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)| dt$$

و

$$l_\rho(\gamma \circ f) = \int_a^b \rho(\gamma \circ f(t))|(\gamma \circ f)'(t)| dt$$

و لذا به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C' \rightarrow \mathbb{H}$   $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  و هر عضو  $\gamma$  از  $Möb^+(\mathbb{H})$  داریم:

$$\int_a^b \rho(f(t))|f'(t)| dt = \int_a^b \rho(\gamma \circ f(t))|(\gamma \circ f)'(t)| dt$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم  $(\gamma \circ f)'(t) = \gamma'(f(t))f'(t)$ . بنابراین انتگرال مسیری مربوط به  $l_\rho(\gamma \circ f)$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_a^b \rho(f(t))|f'(t)| dt = \int_a^b \rho(\gamma \circ f(t))|\gamma'(f(t))||f'(t)| dt$$

## تبصره ۳-۹.

در اینجا لازم است در مورد مشتق اعضای  $Möb(IH)$  تذکری بدهیم. بر خلاف حالت توابع یک متغیره حقیقی، به طور مثال مسیره‌ها، به دو روش می‌توان در مورد مشتق یک عضو  $Möb(IH)$  صحبت کرد.

یکی با استفاده از آنالیز مختلط است. یعنی یک عضو  $m$  از  $Möb(IH)$  را به صورت تابعی از  $\bar{C}$  به  $\bar{C}$  در نظر گرفت و مشتق آن  $m'(z)$  را (با استفاده از تعریف رایج مشتق) به صورت زیر تعریف کرد:

$$m'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{m(w) - m(z)}{w - z}.$$

با استفاده از این تعریف، همه فرمول‌های مشتق برقرار است؛ مانند قواعد ضرب، خارج

قسمت و زنجیره‌ای و مشتق عضوی مانند  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  از  $Möb(IH)$  (که نرمال شده است یعنی  $ad - bc = 1$ ) به صورت زیر است:

$$m'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

معمولاً از این تعریف مشتق‌پذیری استفاده می‌کنیم. این توابع را غالباً تحلیلی یا هولومورفیک نامند.

ولی یکی از معایب این تعریف این است که مشتق عضوی از  $Möb(IH)$  که عضو  $Möb^+(IH)$  نباشد، وجود ندارد. به ویژه مشتق  $c(z) = \bar{z}$  وجود ندارد، در نتیجه  $c(z)$  هولومورفیک نیست.

روش دومی نیز برای تعریف مشتق یک عضو  $Möb(IH)$  وجود دارد که در آن از دیفرانسیل توابع چند متغیره استفاده می‌شود. یعنی از اینکه یک عضو  $m$  از  $Möb(IH)$ ، تابعی از یک متغیره مختلط است چشم‌پوشی می‌کنیم و در عوض به آن به صورت تابعی از زیرمجموعه باز  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  به زیرمجموعه باز  $Y \subseteq \mathbb{R}^2$  نگاه می‌کنیم. در این حالت مشتق آن دیگر یک تابع تنها نیست، بلکه به صورت یک ماتریس  $2 \times 2$  از مشتقات جزئی است. یعنی  $z$  را برحسب قسمت‌های حقیقی و موهومی آن به صورت  $z = x + iy$  می‌نویسیم و نیز  $m$  را برحسب قسمت‌های حقیقی و موهومی آن به صورت  $m(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  می‌نویسیم که در آن  $f$  و  $g$  توابع حقیقی-مقدار هستند، در این صورت مشتق  $m$  به صورت زیر است:

$$Dm = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

از این تعریف مشتق در بخش ۴-۵ در مورد تعریف مساحت هذلولوی استفاده خواهیم کرد.

این دو مفهوم از مشتق پذیری را به این شکل از هم تمییز می‌دهیم که به اولی می‌گوییم به عنوان تابعی از  $z$  مشتق پذیر است و به دومی می‌گوییم که به عنوان تابعی از  $x$  و  $y$  مشتق پذیر است. مشتق پذیری به عنوان تابعی از  $z$ ، مشتق پذیری به عنوان تابعی از  $x$  و  $y$  را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن صحیح نیست. تمایز بین این دو مفهوم مشتق پذیری یکی از مباحث اصلی آنالیز مختلط می‌باشد. بدین ترتیب تبصره ۳-۹ به پایان می‌رسد.

اینک بر می‌گردیم به بحث اصلی، شرط روی  $\rho(z)$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| dt = \int_a^b \rho(\gamma \circ f(t)) |(\gamma'(f(t)))| |f'(t)| dt$$

که در آن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  دلخواه و  $\gamma$  یک عضو دلخواه  $Möb^+(\mathbb{H})$  است. به طور معادل، شرط فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_a^b (\rho(f(t)) - \rho(\gamma \circ f(t)) |(\gamma'(f(t)))|) |f'(t)| dt = 0.$$

که در آن  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  دلخواه و  $\gamma$  یک عضو دلخواه  $Möb^+(\mathbb{H})$  است.

به ازای  $\gamma \in Möb^+(\mathbb{H})$  قرار می‌دهیم:

$$\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z)) |\gamma'(z)|$$

بنابراین شرط روی  $\rho(z)$  تبدیل به شرطی روی  $\mu_\gamma(z)$  می‌شود؛ یعنی به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  دلخواه  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  و به ازای هر عضو دلخواه  $Möb^+(\mathbb{H})$  مانند  $\gamma$  داریم:

$$\int_f \mu_\gamma(z) |dz| = \int_a^b \mu_\gamma(f(t)) |f'(t)| dt = 0.$$

چون  $\rho(z)$  پیوسته و  $\gamma$  مشتق پذیر است، پس  $\mu_\gamma(z)$  به ازای هر عضو دلخواه  $Möb^+(\mathbb{H})$  مانند  $\gamma$  پیوسته است.



شرطی که برای  $\mu_\gamma(z)$  پیدا کرده‌ایم بهتر از شرط روی  $\rho(z)$  قابل پیگیری است، زیرا تحلیل و آنالیز آن ساده‌تر است. به ویژه استفاده از این شرط به ما این امکان را می‌دهد که به جای در نظر گرفتن مسیرهای به طور قطعه‌ای مشتق‌پذیر روی کل  $HH$ ، فقط مسیرهای به طور قطعه‌ای مشتق‌پذیر روی یک زیر مجموعه باز  $\mathcal{C}$  را در نظر بگیریم. این موضوع در لم بعد بیان می‌شود.

### لم ۱۰-۳.

فرض کنیم  $D$  یک زیر مجموعه باز  $\mathcal{C}$  و  $\mathbb{R} \rightarrow D: \mu$  یک تابع پیوسته باشد و به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1: [a, b] \rightarrow D$  داشته باشیم  $\int_f \mu(z) dz = 0$ . این صورت  $\mu \equiv 0$ .

**اثبات.** اثبات به روش برهان خلف است. فرض کنیم نقطه‌ای مانند  $z \in D$  وجود داشته باشد که در آن  $\mu(z) \neq 0$ . با جانشین کردن  $\mu - \mu(z)$  به جای  $\mu$  در صورت لزوم می‌توان فرض کرد  $\mu(z) > 0$ .

از پیوستگی  $\mu$  نتیجه می‌شود که به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک  $\delta > 0$  موجود است که اگر  $U_\delta(z) \subseteq D$  و  $w \in U_\delta(z)$ ، آنگاه  $\mu(w) \in U_\varepsilon(\mu(z))$  که در آن  $U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{R} \mid |s - t| < \varepsilon\}$  و  $U_\delta(z) = \{u \in \mathcal{C} \mid |u - z| < \delta\}$ .

با در نظر گرفتن  $\varepsilon = \frac{1}{3} |\mu(z)|$  نتیجه می‌شود که یک  $\delta > 0$  موجود است که اگر  $U_\delta(z) \subseteq D$  و  $w \in U_\delta(z)$ ، آنگاه  $\mu(w) \in U_\varepsilon(\mu(z))$ . با در نظر گرفتن شرط  $\mu(z) > 0$  و همچنین استفاده از نامساوی مثلثی مشاهده می‌شود که به ازای هر  $w \in U_\delta(z)$  داریم  $\mu(w) > 0$ .

حال یک مسیر غیر ثابت و به طور قطعه‌ای مشتق‌پذیر خاص  $f: [0, 1] \rightarrow U_\delta(z)$  با ضابطه زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$f(t) = z + \frac{1}{3} \delta t$$

چون به ازای هر  $t \in [0, 1]$  داریم  $|f(t) - z| \leq \frac{1}{3} \delta < \delta$  بنابراین  $f(t) \in U_\delta(z)$  و در نتیجه  $\mu(f(t)) > 0$ . بنابراین  $\int_f \mu(z) dz > 0$ . تناقض مطلوب ما است و لذا اثبات لم

۱۰-۳ تمام است

به خاطر داشته باشید که ما فرض کرده‌ایم که طول تحت عمل  $Möb^+(\mathbb{H})$  ناوردا است که نتیجه می‌دهد به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  دلخواه  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  و به ازای هر عضو دلخواه  $Möb^+(\mathbb{H})$  مانند  $\gamma$ ،  $\int_f \mu_\gamma(z) |dz| = 0$ . با به کارگیری لم ۳-۱۰ در مورد  $\mu_\gamma(z)$  نتیجه می‌شود که

$$\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z)) |\gamma'(z)| = 0.$$

به ازای هر  $z \in \mathbb{H}$  و هر  $\gamma \in Möb^+(\mathbb{H})$ .

حال بینیم  $\mu_\gamma$  با ترکیب اعضای  $Möb^+(\mathbb{H})$  چگونه رفتار می‌کند. فرض کنیم  $\gamma$  و

$\varphi$  دو عضو  $Möb^+(\mathbb{H})$  باشند. با محاسبه خواهیم دید که:

$$\begin{aligned} \mu_{\gamma \circ \varphi}(z) &= \rho(z) - \rho((\gamma \circ \varphi)(z)) |(\gamma \circ \varphi)'(z)| \\ &= \rho(z) - \rho((\gamma \circ \varphi)(z)) |\gamma'(\varphi(z))| |\varphi'(z)| \\ &= \rho(z) - \rho(\varphi(z)) |\varphi'(z)| + \rho(\varphi(z)) |\varphi'(z)| \\ &\quad - \rho((\gamma \circ \varphi)(z)) |\gamma'(\varphi(z))| |\varphi'(z)| \\ &= \mu_\varphi(z) + \mu_\gamma(\varphi(z)) |\varphi'(z)|. \end{aligned}$$

بنابراین اگر به ازای هر  $\gamma$  در یک مجموعه مولد  $Möb^+(\mathbb{H})$  داشته باشیم  $\mu_\gamma = 0$ ،

در این صورت به ازای هر  $\gamma$  در  $Möb^+(\mathbb{H})$  نیز خواهیم داشت  $\mu_\gamma = 0$ . در تمرین ۲-۳۸ دیدیم که یک مجموعه مولد برای  $Möb^+(\mathbb{H})$  وجود دارد که از تبدیلات

$m(z) = az + b$  با شرط  $a, b \in \mathbb{R}$  و  $a > 0$  و همچنین تبدیل  $K(z) = -\frac{1}{z}$  تشکیل شده است.

مجدداً بررسی تبدیل  $B(z) = -\bar{z}$  را برای بعد کنار می‌گذاریم، چون عضوی از  $Möb^+(\mathbb{H})$  نیست.

بنابراین کافی است شرایط روی  $\mu_\gamma$  و در نتیجه روی  $\rho$  را برای این مجموعه مولد بررسی کنیم. این مولدها را به نوبت در نظر خواهیم گرفت.

ابتدا فرض کنیم  $\gamma(z) = z + b$  که در آن  $b \in \mathbb{R}$  (فرض کرده‌ایم  $a=1$ ). چون به

ازای هر  $z \in \mathbb{H}$  داریم  $\gamma'(z) = 1$ ، شرط در نظر گرفته شده روی  $\rho$  به صورت زیر در می‌آید:

$$0 \equiv \mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z)) |\gamma'(z)| = \rho(z) - \rho(z + b)$$

به ازای هر  $b \in \mathbb{R}$  و هر  $z \in \mathbb{H}$  یعنی

$$\rho(z) = \rho(z + b)$$

به ازای هر  $b \in \mathbb{R}$  و هر  $z \in \mathbb{H}$ . به ویژه،  $\rho(z)$  فقط بستگی به قسمت موهومی به ازای هر  $z = x + iy$  یعنی  $y = \text{Im}(z)$  دارد. به عبارت دیگر اگر قسمت موهومی  $z_1 = x_1 + iy$  و  $z_2 = x_2 + iy$  برابر باشند، در این صورت داریم  $z_2 = z_1 + (x_2 - x_1)$ . چون  $x_2 - x_1$  یک عدد حقیقی است، بنابراین  $\rho(z_2) = \rho(z_1)$ .

بنابراین  $\rho(z)$  را می‌توان به صورت تابعی حقیقی-مقدار از یک متغیر حقیقی  $y = \text{Im}(z)$  در نظر گرفت. در واقع اگر تابع حقیقی  $r: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  با ضابطه  $r(y) = \rho(iy)$  را در نظر بگیریم، در این صورت به ازای هر  $z \in \mathbb{H}$  داریم  $\rho(z) = r(\text{Im}(z))$ . حال مولد  $\gamma(z) = az$  را با شرط  $a > 0$  در نظر می‌گیریم (فرض کرده‌ایم  $b = 0$ ). چون  $\gamma'(z) = a$  شرط روی  $\rho$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\rho'(z) = \rho'(az) \cdot a \quad \text{یا} \quad \rho'(z) = \rho'(az) \cdot a$$

به ازای هر  $z \in \mathbb{H}$  و هر  $a > 0$ . یعنی به ازای هر  $z \in \mathbb{H}$  و هر  $a > 0$  باید داشته

باشیم:

$$\rho(z) = a\rho(az)$$

به ویژه به ازای هر  $y > 0$  و هر  $a > 0$  داریم:

$$r(y) = ar(ay)$$

با تعویض نقش  $a$  و  $y$ ، مشاهده می‌کنیم که  $r(a) = yr(ay)$ . با تقسیم کردن دو طرف بر  $y$  خواهیم داشت:

$$r(ay) = \frac{1}{y}r(a)$$

اگر قرار دهیم  $a = 1$ ، نتیجه می‌شود:

$$r(y) = \frac{1}{y}r(1)$$

و لذا  $r$  کاملاً با مقدارش در  $1$  مشخص می‌شود.

با در نظر گرفتن تعریف  $r$ ، شرط ناوردا بودن طول تحت عمل  $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$  نتیجه می‌دهد که  $\rho(z)$  باید به صورت زیر باشد:

$$\rho(z) = r(\text{Im}(z)) = \frac{c}{\text{Im}(z)}$$

که در آن  $c$  یک عدد مثبت دلخواه است.

## تمرین ۳-۳.

به ازای عدد حقیقی  $\lambda > 0$  فرض کنید  $A_\lambda$  پاره خط اقلیدسی باشد که  $1 + i\lambda$  را به  $1 + i\lambda$  متصل می‌کند. همچنین فرض کنید  $B_\lambda$  پاره خط هذلولوی باشد که  $1 + i\lambda$  را به  $\frac{c}{\text{Im}(z)}$  متصل می‌کند. طول  $A_\lambda$  و  $B_\lambda$  را نسبت به عنصر طول قوس  $|dz|$  محاسبه کنید.

باید توجه داشت که در استخراج  $\rho(z)$ ، از همه مولدهای  $Möb(I\mathbb{H})$  استفاده نشده است. بنابراین این سؤال مطرح است که آیا این شکل  $\rho(z)$  با ناوردا بودن طول مسیره‌های به طور قطعه‌ای  $C'$  تحت تبدیلات  $K(z) = -\frac{1}{z}$  و  $B(z) = -\bar{z}$  نیز سازگار است.

## تمرین ۳-۴.

بررسی کنید که طول یک مسیر به طور قطعه‌ای مشتق‌پذیر  $f: [a, b] \rightarrow I\mathbb{H}$  نسبت به عنصر طول قوس  $|dz| \frac{c}{\text{Im}(z)}$  تحت  $K(z) = -\frac{1}{z}$  و  $B(z) = -\bar{z}$  ناوردا است. (توجه داشته باشید که برای  $B(z)$ ، نمی‌توانیم از استدلال و روش بالا استفاده کنیم، زیرا  $B'(z)$  تعریف نشده است؛ به جای آن ابتدا ترکیب  $f \circ B$  را به دست آورید، سپس از آن به عنوان یک مسیر مشتق بگیرید.)

با در نظر گرفتن نتیجه تمرین ۳-۴، قضیه زیر به اثبات می‌رسد.

## قضیه ۳-۱۱.

به ازای هر عدد مثبت ثابت  $c$ ، عنصر طول قوس

$$\frac{c}{\text{Im}(z)} |dz|$$

روی  $I\mathbb{H}$  تحت عمل  $Möb(I\mathbb{H})$  ناوردا است.

یعنی به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $f: [a, b] \rightarrow I\mathbb{H}$  و هر  $\gamma$  عضو  $Möb(I\mathbb{H})$  داریم:

$$l_\rho(f) = l_\rho(\gamma \circ f).$$

از آنچه تاکنون گفته شد نمی‌توان مقدار مشخصی برای  $c$  معین کرد، در واقع، تنها با در نظر گرفتن عمل  $Möb(I\mathbb{H})$  نمی‌توان مقداری برای  $c$  معین کرد. برای سهولت در محاسبات و اینکه مجبور نباشیم  $c$  را در تمام محاسبات وارد کنیم، قرار می‌دهیم  $c = 1$ .

## تعریف ۳-۱۲.

برای یک مسیر به طور قطعه‌ای  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$  طول هذلولوی  $l_H$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l_H(f) = \int_a^b \frac{1}{|\operatorname{Im}(f(t))|} |f'(t)| dt$$

محاسبه طول هذلولوی بعضی از مسیرها بسیار ساده و سراسر است. مثلاً فرض کنیم  $0 < a < b$  و مسیر  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$  را با ضابطه  $f(t) = it$  در نظر می‌گیریم. در این صورت تصویر بازه  $[a, b]$  تحت  $f$ ، یعنی  $f([a, b])$ ، پاره‌خطی در قسمت مثبت محور موهومی بین  $ai$  و  $bi$  است، چون  $\operatorname{Im}(f(t)) = t$  و  $|f'(t)| = 1$  داریم:

$$l_H(f) = \int_a^b \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} |dz| = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

البته مسیرهایی نیز وجود دارند که محاسبه طول هذلولوی آنها بسیار پیچیده و مشکل است.

## تمرین ۳-۵.

به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، انتگرال مسیری مربوط به محاسبه طول هذلولوی مسیر  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^n$  با ضابطه  $f_n(t) = t + i(t^n + 1)$  را بنویسید.

## تمرین ۳-۶.

برای هر مسیر  $f_n$  تعریف شده در تمرین ۳-۵ رفتار طول هذلولوی  $\gamma_n = f_n([0, 1])$  را زمانیکه  $n \rightarrow \infty$  حدس بزنید و سپس حد طول هذلولوی  $\gamma_n = f_n([0, 1])$  را زمانیکه  $n \rightarrow \infty$  محاسبه کنید.

## تمرین ۳-۷.

فرض کنیم  $G$  زیرگروه  $Möb^+$  تولید شده با تمام تبدیلات موبیوس سهموی باشد که  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارند. نشان دهید اگر  $\lambda(z) |dz|$  یک عنصر طول قوس روی  $\mathbb{C}$  باشد که تحت  $G$  ناورداست، آنگاه  $\lambda(z)$  ثابت است.

## تمرین ۳-۸

فرض کنیم  $H$  زیرگروه  $Möb^+$  تولید شده با تمام تبدیلات مویبوسی باشد که  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارند. نشان دهید اگر  $|\lambda(z)| dz$  یک عنصر طول قوس روی  $C$  باشد که تحت  $H$  ناورداست، آنگاه  $\lambda(z)$  ثابت است.

قبل از اینکه به مطالعه و بررسی طول هذلولوی ادامه دهیم، باید یک نکته نه چندان مهم را درباره آن خاطر نشان کنیم و آن اینکه مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C'$  در  $\mathbb{H}$  دارای طول هذلولوی متناهی می‌باشند.

## گزاره ۳-۱۳.

فرض کنیم  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C'$  باشد، در این صورت طول هذلولوی  $f$  متناهی است.

اثبات. اثبات، نتیجه مستقیم این نکته است که یک عدد ثابت  $B > 0$  موجود است<sup>۱</sup> به طوری که تصویر بازه  $[a, b]$  تحت  $f$ ، یعنی  $f([a, b])$ ، مشمول در زیر مجموعه  $K_B$  است که

$$K_B = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) \geq B\}$$

و این از آنجا ناشی می‌شود که  $[a, b]$  و در نتیجه  $f([a, b])$  فشرده است، مفهومی که در بخش ۳-۷ با جزئیات بیشتری به آن خواهیم پرداخت.

با فرض اینکه  $f([a, b])$  مشمول در  $K_B$  است، می‌توانیم انتگرال مربوط به طول هذلولوی  $f$  را تخمین بزنیم. ابتدا توجه داریم که با توجه به اینکه  $f$  به طور قطعه‌ای  $C'$  است، یک افراز  $P$  از  $[a, b]$  مانند

$$P = \{[a = a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, a_{n+1} = b]\}$$

موجود است به طوری که  $f$  روی هر زیر بازه  $[a_k, a_{k+1}]$   $C'$  است.

به ویژه مشتق آن  $f'$  روی هر یک از این زیر بازه‌ها پیوسته است. بنا بر قضیه مقدار اکسترمم برای توابع پیوسته روی بازه‌های بسته، به ازای هر  $k$  وجود دارد عدد  $A_k$  به طوری که به ازای هر  $t \in [a_k, a_{k+1}]$

$$|f'(t)| \leq A_k$$

<sup>۱</sup> در واقع با توجه به پیوسته بودن توابع  $\text{Im}(z)$  و  $f$  تابع  $\text{Im}(f(t))$  روی  $[a, b]$  پیوسته خواهد بود و لذا مینیمم خود را روی  $[a, b]$  می‌گیرد. کافی است قرار دهیم  $B = \min(\text{Im}(f))$  [م].

فرض کنیم  $A$  ماکزیمم  $A_1, \dots, A_n$  باشد. در این صورت داریم:

$$l_{IH}(f) = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt \leq \int_a^b \frac{1}{B} Adt = \frac{A}{B}(b-a)$$

و در نتیجه طول هذلولوی  $f$  متناهی است. بدین ترتیب اثبات گزاره ۳-۱۳ تمام است.

### فهردهالمطلوب

این بخش را با ذکر این نکته به پایان می‌رسانیم که اثبات گزاره ۳-۱۳ یک روش نه چندان دقیق برای یافتن کران بالایی برای طول هذلولوی یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  در  $I\mathbb{H}$  به دست می‌دهد.

## ۳-۳. فضاهای متریک راهی

اکنون می‌دانیم که چگونه می‌توان طول هذلولوی یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  در  $I\mathbb{H}$  را محاسبه کرد؛ یعنی با انتگرال گرفتن از عنصر طول قوس هذلولوی  $\frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$  در طول آن مسیر. اینک می‌توانیم یک ساختار کلی را به کار برده و با استفاده از طول هذلولوی مسیرها در  $I\mathbb{H}$  یک متر هذلولوی روی  $I\mathbb{H}$  به دست آوریم. ابتدا تعریف متر را یادآوری می‌کنیم. به طور کلی یک متر روی یک مجموعه  $X$  وسیله‌ای است که به هر دو نقطه از  $X$  یک فاصله نسبت می‌دهد. در اینجا فقط یک تعریف مختصر و توضیح غیر جامعی از متر ارائه می‌دهیم. خواننده می‌تواند برای بحث بیشتر، به کتاب‌های توپولوژی نقطه‌ای از قبیل کتاب مانکرز [26] مراجعه کند.

### تعریف ۳-۱۴.

یک متر روی یک مجموعه  $X$  عبارت است از تابعی مانند:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(۱) \text{ به ازای هر } x, y \in X \text{ و } d(x, y) \geq 0 \text{ و } d(x, y) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = y.$$

$$(۲) d(x, y) = d(y, x)$$

$$(۳) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (نامساوی مثلث).}$$

اگر  $d$  یک متر روی  $X$  باشد، زوج  $(X, d)$  را یک فضای متریک<sup>۱</sup> می‌نامیم. مفهوم متر خیلی کلی است ولی خوب است به خاطر داشته باشیم که تاکنون با چند مورد متر برخورد داشته‌ایم.

یک مثال، متر استاندارد روی  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{C}$  است که به وسیله قدر مطلق تعریف می‌شود. روی  $\mathbb{C}$  این متر به صورت زیر است:

$$\begin{cases} n: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (z, w) \mapsto |z - w| \end{cases}$$

سه شرط به کار رفته در تعریف متر را می‌توان به نوعی مجردسازی شده خواص عادی تابع  $n$  در نظر گرفت.

یک مثال پیچیده‌تر، متر روی کره ریمن  $\mathbb{R} \xrightarrow{s} \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$  است که با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$s(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \quad z, w \in \mathbb{C} \quad \text{به ازای هر}$$

$$s(z, \infty) = s(\infty, z) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{و به ازای هر}$$

اثبات متر بودن  $s$  روی  $\overline{\mathbb{C}}$  با استفاده از تصویر کنج‌نگاری صورت می‌گیرد. در واقع، اگر نقاط متناظر روی  $S^1$  تحت تصویر کنج‌نگاری را در نظر بگیریم، این فرمول‌ها عباراتی بر حسب مختصات  $\overline{\mathbb{C}}$  برای فاصله اقلیدسی آن نقاط متناظر در  $\mathbb{R}^2$  است.

### تبصره ۳-۱۵.

باید توجه داشت که وقتی یک متر  $d$  روی یک فضای  $X$  داریم، می‌توان مجموعه‌های باز و بسته تعریف شده در  $\mathbb{C}$  و  $\overline{\mathbb{C}}$  را روی  $X$  تعریف کنیم و لذا مفاهیمی چون همگرایی دنباله‌ها در  $(X, d)$  و پیوستگی توابع که بُرد و یا دامنه آنها، فضای متریک هستند قابل تعریف است.

به ویژه در یک فضای متریک  $(X, d)$  می‌توانیم قرص باز به شعاع  $\varepsilon > 0$  و به مرکز  $x$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

<sup>۱</sup> Metric space



در این صورت زیر مجموعه  $A$  در  $X$  باز است، اگر به ازای هر  $x \in A$  یک  $\varepsilon > 0$  موجود باشد، به طوریکه  $U_\varepsilon(x) \subseteq A$ ؛ زیر مجموعه  $B$  در  $X$  بسته است اگر متمم آن  $X - B$  باز باشد.

یک دنباله  $\{x_n\}$  از نقاط  $X$  همگرا به یک نقطه  $x$  در  $X$  است، اگر به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک  $N > 0$  موجود باشد، به طوریکه به ازای هر  $n > N$  داشته باشیم  $x_n \in U_\varepsilon(x)$ .  
 همین طور می توان پیوستگی توابع بین فضاهای متریک را تعریف کرد. اگر  $(X, d_X)$  و  $(Y, d_Y)$  دو فضای متریک باشند و  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد، در این صورت  $f$  در نقطه  $x \in X$  پیوسته است، اگر به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک  $\delta > 0$  موجود باشد به طوریکه  $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$ . می گوئیم  $f$  پیوسته است، هرگاه  $f$  در هر نقطه  $X$  پیوسته باشد.

یک مثال برای تابع پیوسته از خود متر به دست می آید. یک نقطه  $z \in X$  را ثابت در نظر می گیریم و تابع  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  را با ضابطه  $f(x) = d(x, z)$  تعریف می کنیم. در این صورت  $f$  یک تابع پیوسته است. از پیوستگی این تابع در بخش ۵-۱ استفاده خواهیم کرد.

بنابراین بسیاری از مفاهیم آشنا و به کار گرفته شده در مورد  $\mathbb{C}$  و  $\bar{\mathbb{C}}$  را می توان به هر فضای متریک گسترش داد. بدین ترتیب تبصره ۳-۱۵ به پایان می رسد.

یک مثال دیگر برای فضای متری هست که در رابطه با مطالعه صفحه هذلولوی اهمیت دارد. فرض کنیم  $X$  یک مجموعه باشد که در آن بتوانیم طول مسیرها را اندازه بگیریم؛ به ویژه به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $X$  فرض کنیم که  $\Gamma[x, y]$  گردایه ناتهی مسیرهای  $f: [a, b] \rightarrow X$  موجود باشد به طوریکه  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$ . فرض کنیم به هر مسیر  $f$  متعلق به  $\Gamma[x, y]$  بتوانیم یک عدد حقیقی نامنفی  $\ell(f)$  را نسبت دهیم که آن را طول  $f$  نامیم.

به عنوان مثال،  $X$  را نیم صفحه بالایی، یعنی  $\mathbb{H}$  در نظر می گیریم و  $\Gamma[x, y]$  را مجموعه مسیرهایی به طور قطعه ای مشتق پذیر  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  با شرط  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$  و طول هر مسیر  $f$  متعلق به  $\Gamma[x, y]$  را طول هذلولوی  $f$ ، یعنی  $l_{\mathbb{H}}(f)$  در نظر می گیریم.

تابع  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(x, y) = \inf\{\ell(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\}$$

در مورد ساختن این تابع  $d$  چند سؤال مطرح است. یک سؤال اینکه چه شرایطی را باید روی تعریف این طول گذاشت تا اینکه به یک متر روی  $X$  تبدیل شود؟ به خاطر اشکالات فنی، این سؤال را در حالت کلی در نظر نمی‌گیریم. زیرا آنچه مورد توجه ما است، متر روی  $IH$  است که از طول هذلولوی نتیجه می‌شود و در بخش ۳-۴ مورد ملاحظه قرار خواهیم داد.

و اما سؤال دوم، بر فرض اینکه  $d$  یک متر روی  $X$  تعریف کند. آیا الزاماً مسیرهای محقق‌کننده فاصله<sup>۱</sup> در  $X$  وجود دارد. یعنی به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $X$  آیا الزاماً یک مسیر  $f$  متعلق به  $\Gamma[x, y]$  وجود دارد به طوریکه  $\ell(f) = d(x, y)$ ؟

همانطور که گفته شد، هر دو سؤال را به تفصیل در مورد نیم‌صفحه بالایی  $IH$  در بخش ۳-۴ بحث می‌کنیم. برای روشن شدن ساختار بالا، برخی از خواص کلی آن را برای حالت  $X = \mathcal{C}$  مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. وارد جزئیات نخواهیم شد، زیرا جزئیات استدلال خیلی شبیه توضیحات ارائه داده شده برای حالت  $X = IH$  است.

به ازای هر زوج از نقاط  $x, y \in \mathcal{C}$  فرض می‌کنیم  $\Gamma[x, y]$  مجموعه مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C^1$   $f: [a, b] \rightarrow X$  باشد به طوریکه  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$  و فرض می‌کنیم  $\ell(f)$  طول اقلیدسی  $f$  باشد. در این حالت، چون کوتاه‌ترین فاصله اقلیدسی بین دو نقطه بخشی از یک خط اقلیدسی است که به وسیله یک مسیر مشتق‌پذیر قابل پارامتری شدن است، لذا مشاهد می‌کنیم که:

$$d(x, y) = \inf\{\ell(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} = n(x, y)$$

باید توجه داشت که در این حالت، تابعی که روی  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  با گرفتن اینفیموم از طول مسیرها ساخته می‌شود، همان متر استاندارد  $(\cdot, \cdot)$  روی  $\mathcal{C}$  می‌باشد. به ویژه همواره یک مسیر در  $\Gamma[x, y]$  مانند  $f$  وجود دارد به طوریکه طول آن برابر با فاصله اقلیدسی  $x$  و  $y$  باشد، در واقع  $f$  پاره خط اقلیدسی واصل  $x$  به  $y$  می‌باشد.

مثال بعدی، یکی از مشکلاتی را که در روند ساختار بالا ممکن است رخ دهد، روشن می‌سازد. فرض کنیم  $X = \mathcal{C} - \{0\}$  صفحه مختلط سفته بوده و به ازای هر  $x, y \in X$  فرض کنیم  $\Gamma[x, y]$  مجموعه همه مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C^1$   $f: [a, b] \rightarrow X$  باشد به طوریکه  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$  و فرض می‌کنیم  $\ell(f)$  طول اقلیدسی  $f$  باشد.

<sup>1</sup> Distance-realizing paths

<sup>2</sup> یعنی  $d(x, y) = \ell(f)$ .

در این حالت می‌توانیم از اطلاعات خود در مورد  $(\mathcal{C}, n)$  برای تجزیه و تحلیل  $X$  استفاده کنیم. در این حالت نیز تابعی که روی  $X \times X$  با گرفتن اینفیموم از طول مسیره‌ها ساخته می‌شود، عبارت است از  $n(x, y) = |x - y|$ .

ولی دیگر الزاماً یک مسیر در  $\Gamma[x, y]$  وجود ندارد به طوری‌که طول اقلیدسی بین  $x$  و  $y$  را محقق سازد. مثلاً دو نقطه ۱ و  $-۱$  را در نظر می‌گیریم. پاره خط اقلیدسی واصل ۱ و  $-۱$  از مبدا می‌گذرد و لذا یک مسیر در  $X$  نیست. هر مسیر دیگری که نقاط ۱ و  $-۱$  را به هم متصل می‌کند، دارای طولی اکیداً بزرگتر از  $n(1, -1) = ۲$  است.

یادآوری می‌کنیم که در مجموعه‌ای مانند  $X$  کار می‌کنیم که می‌دانیم طول مسیره‌ها را در آن چطور می‌توان اندازه گرفت. به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $X$  یک گردایه ناتهی  $\Gamma[x, y]$  از مسیره‌های  $X: [a, b] \rightarrow f$  با شرط  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$  وجود دارد و به ازای هر مسیر  $f$  در  $\Gamma[x, y]$  طول  $f$  را با  $\ell(f)$  نمایش می‌دهیم. فرض کنیم به علاوه  $X$  یک فضای متریک با متر  $d$  باشد. می‌گوییم  $(X, d)$  یک فضای متریک راهی<sup>۱</sup> است اگر به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $X$  داشته باشیم:

$$d(x, y) = \inf\{\ell(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\}$$

و به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $X$  یک مسیر در  $\Gamma[x, y]$  مانند  $f$  وجود داشته باشد به طوری‌که فاصله بین  $x$  و  $y$  را محقق سازد، یعنی:

$$d(x, y) = \ell(f).$$

توجه داریم که این تعریف از فضای متریک راهی قوی‌تر از تعریف استاندارد آن است، چون نیاز به وجود یک مسیر دارد که فاصله را محقق سازد. از فضاهای متری گفته شده در این بخش  $(\mathcal{C}, n)$  و  $(\overline{\mathcal{C}}, s)$  فضاهای متریک راهی هستند در حالی که  $(\mathcal{C} - \{0\}, n)$  فضای متریک راهی نیست.

### ۳-۴. از طول قوس تا متر

حال آماده‌ایم ثابت کنیم که  $\mathcal{H}$  یک فضای متریک راهی است. اثبات این واقعیت این بخش را به خود اختصاص می‌دهد.

به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $\mathcal{H}$  مجموعه مسیره‌های به طور قطع‌های  $C'$  (که از این پس مسیر می‌نامیم)  $\mathcal{H}: [a, b] \rightarrow f$  با شرط  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$  را با  $\Gamma[x, y]$  نمایش می‌دهیم.

<sup>۱</sup> Path metric space

از آنجاییکه پاره خط هذلولوی واصل  $x$  به  $y$  را می‌توانیم به صورت یک مسیر پارامتری کنیم، بنابراین  $\Gamma[x, y]$  ناتهی است. همچنین بنابر قضیه ۳-۱۳ هر مسیر  $f$  در  $\Gamma[x, y]$  دارای طول هذلولوی متناهی  $l_{\mathbb{H}}(f)$  است.

تابع  $d_{\mathbb{H}}: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{l_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\}$$

با توجه به اینکه در قضیه ۳-۱۶ ثابت خواهیم کرد  $d_{\mathbb{H}}$  یک متر روی  $\mathbb{H}$  تعریف می‌کند،  $d_{\mathbb{H}}(x, y)$  را فاصله هذلولوی بین  $x$  و  $y$  می‌نامیم.

### قضیه ۳-۱۶.

$(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  یک فضای متریک راهی است. به علاوه آن مسیری در  $\Gamma[x, y]$  که فاصله را محقق می‌سازد، یک پارامتری‌سازی پاره خط هذلولوی واصل  $x$  به  $y$  است. اثبات. از آنجاییکه طول هذلولوی یک مسیر تحت عمل  $Möb(\mathbb{H})$  ناورداست، حکم مفید زیر را داریم:

### گزاره ۳-۱۷.

به ازای هر  $\gamma \in Möb(\mathbb{H})$  و هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $\mathbb{H}$  داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$$

اثبات. ابتدا مشاهده می‌شود که  $\{\gamma \circ f \mid f \in \Gamma[x, y]\} \subseteq \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$ . برای اثبات این مطلب یک مسیر دلخواه  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}$  با شرط  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$  در  $\Gamma[x, y]$  را در نظر می‌گیریم. چون  $\gamma \circ f(a) = \gamma(x)$  و  $\gamma \circ f(b) = \gamma(y)$  و لذا  $\gamma \circ f$  عضو  $\Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$  است.

چون  $l_{\mathbb{H}}(f)$  تحت عمل  $Möb(\mathbb{H})$  ناورداست، به ازای هر  $f \in \Gamma[x, y]$  داریم:

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) = l_{\mathbb{H}}(f)$$

و لذا

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)) &= \inf\{l_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \\ &= d_{\mathbb{H}}(x, y). \end{aligned}$$

چون  $\gamma$  وارون‌پذیر است و  $\gamma^{-1}$  نیز یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  است، با تکرار استدلال بالا نتیجه می‌شود که:

$$\{\gamma^{-1} \circ g \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \subseteq \Gamma[x, y]$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(x, y) &= \inf\{l_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ g) \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf\{l_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &= d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)). \end{aligned}$$

بنابراین  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$  و بدین ترتیب اثبات گزاره ۳-۱۷ تمام است.

### فهرست مطالب

برای اینکه نشان دهیم  $d_{\mathbb{H}}$  واقعاً یک متر تعریف می‌کند، باید نشان دهیم که در سه شرط ارائه شده در تعریف ۳-۱۴ صدق می‌کند.

فرض کنیم  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  یک مسیر در  $\Gamma[x, y]$  باشد، تعریف  $l_{\mathbb{H}}(f)$  را یادآوری می‌کنیم:

$$l_{\mathbb{H}}(f) = \int_a^b \frac{1}{|\operatorname{Im}(f(t))|} |f'(t)| dt$$

چون تابع زیر انتگرال، همواره نامنفی است، بنابراین حاصل انتگرال نیز نامنفی است و چون  $l_{\mathbb{H}}(f)$  به ازای هر مسیر  $f$  در  $\Gamma[x, y]$  نامنفی است، اینفیموم این انتگرال‌ها، یعنی  $d_{\mathbb{H}}(x, y)$  نیز نامنفی است.

بنابراین قسمت اول شرط (۱) تعریف متر برقرار است و به دلایلی که بعداً معلوم خواهد شد، اثبات قسمت دوم شرط (۱) را به بعد موکول می‌کنیم.

حال شرط (۲) تعریف متر را اثبات می‌کنیم. باید طول مسیرهای در  $\Gamma[x, y]$  و  $\Gamma[y, x]$  را با هم مقایسه کنیم. فرض کنیم  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  یک مسیر در  $\Gamma[x, y]$  باشد، ترکیب  $f$  را با تابع  $h: [b, a] \rightarrow [a, b]$  با ضابطه  $h(t) = a + b - t$  در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که  $h'(t) = -1$ .

بدیهی است که  $f \circ h$  متعلق به  $\Gamma[y, x]$  است، زیرا  $f \circ h(a) = f(b) = y$  و  $f \circ h(b) = f(a) = x$  و علاوه با یک محاسبه سر راست داریم:

$$\begin{aligned}
 l_{\mathbb{H}}(f \circ h) &= \int_{f \circ h} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| \\
 &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f \circ h(t))} |(f \circ h)'(t)| dt \\
 &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(h(t)))} |f'(h(t))| |h'(t)| dt \\
 &= - \int_b^a \frac{1}{\text{Im}(f(s))} |f'(s)| ds \\
 &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(s))} |f'(s)| ds \\
 &= l_{\mathbb{H}}(f)
 \end{aligned}$$

لذا هر مسیر در  $\Gamma[x, y]$  منجر به یک مسیر در  $\Gamma[y, x]$  با طول برابر با ترکیب با  $h$  مناسب می‌شود. به همین ترتیب هر مسیر در  $\Gamma[y, x]$  منجر به یک مسیر در  $\Gamma[x, y]$  با طول برابر می‌شود.

به ویژه، دو مجموعه زیر متشکل از طول‌های هذلولوی با یکدیگر مساوی هستند:

$$\{l_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[y, x]\} \text{ و } \{l_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\}$$

بنابراین این دو مجموعه دارای اینفیموم مساوی نیز خواهند بود، و لذا  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(y, x)$ . بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود، یعنی  $d_{\mathbb{H}}$  شرط دوم تعریف متر را برآورده می‌کند.

حال شرط سوم تعریف متر، یعنی نامساوی مثلثی را بررسی می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید  $x, y$  و  $z$  سه نقطه دلخواه  $\mathbb{H}$  باشند.

به لحاظ مفهومی، آسان‌ترین راه اثبات، عبارت خواهد بود از انتخاب یک مسیر  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  در  $\Gamma[x, y]$  با شرط، همچنین انتخاب یک مسیر  $g: [b, c] \rightarrow \mathbb{H}$  در  $\Gamma[y, z]$  با شرط  $l_{\mathbb{H}}(g) = d(y, z)$ . در این صورت اگر مسیر  $h: [a, c] \rightarrow \mathbb{H}$  را که آن را الحاق<sup>۱</sup> مسیره‌های  $f$  و  $g$  می‌نامیم، با ضابطه زیر تعریف کنیم:

<sup>۱</sup> Concatenation

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & a \leq t \leq b \\ g(t) & b \leq t \leq c \end{cases}$$

در این صورت  $h$  متعلق به  $\Gamma[x, z]$  است و بعلاوه داریم:

$$d_H(x, z) \leq l_H(h) = l_H(f) + l_H(g) = d_H(x, y) + d_H(y, z).$$

توجه کنید که الحاق مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C$  مجدداً یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C'$  است. در حالیکه الحاق مسیرهای  $C$  مجدداً یک مسیر  $C'$  نمی‌باشد. این یکی از دلایل در نظر گرفتن مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C'$  به جای مسیرهای  $C$  است.

متأسفانه، هنوز نشان نداده‌ایم که همواره یک مسیر وجود دارد که فاصله هندلولوی را محقق می‌کند. به این مسئله در ادامه بخش خواهیم پرداخت. برای اینکه نشان دهیم  $d_H$  در شرط سوم متر صدق می‌کند، از روشی غیر مستقیم یعنی برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم شرط (۳) در مورد  $d_H$  برقرار نباشد؛ یعنی فرض کنیم  $x$ ،  $y$  و  $z$  سه نقطه متمایز  $IH$  باشند به طوری‌که:

$$d_H(x, z) > d_H(x, y) + d_H(y, z)$$

قرار می‌دهیم:

$$\varepsilon = d_H(x, z) - (d_H(x, y) + d_H(y, z))$$

چون  $f: [a, b] \rightarrow IH$  بنابرین  $d_H(x, y) = \inf\{l_H(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\}$  در  $\Gamma[x, y]$  چنان موجود است که:

$$l_H(f) - d_H(x, y) < \frac{1}{4}\varepsilon$$

به همین ترتیب یک مسیر  $g: [b, c] \rightarrow IH$  در  $\Gamma[y, z]$  چنان موجود است که:

$$l_H(g) - d_H(y, z) < \frac{1}{4}\varepsilon$$

به یاد داشته باشید که با توجه به مبحث تجدید پارامترسازی در بخش ۳-۱، همواره می‌توانیم دامنه تعریف مسیرهای  $f$  و  $g$  را به صورت مذکور در نظر بگیریم.<sup>۱</sup> حال فرض می‌کنیم  $h: [a, c] \rightarrow IH$  الحاق مسیرهای  $f$  و  $g$  باشد. از آنجائیکه الحاق مسیرهای به طور قطعه‌ای مشتق‌پذیر مجدداً یک مسیر به طور قطعه‌ای مشتق‌پذیر است. بنابرین  $h$  متعلق به  $\Gamma[x, z]$  است، بعلاوه داریم:

$$l_H(h) = l_H(f) + l_H(g) < d_H(x, y) + d_H(y, z) + \varepsilon$$

<sup>۱</sup> یعنی انتهای دامنه تعریف  $f$ ، ابتدای دامنه تعریف  $g$  باشد.

از آنجاییکه بنا به تعریف  $d_{\mathbb{H}}$  داریم  $d_{\mathbb{H}}(x, z) \leq l_{\mathbb{H}}(h)$  نتیجه می‌شود که:

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) + \varepsilon$$

که با تعریف  $\varepsilon$  در تناقض است<sup>۱</sup>. بدین ترتیب اثبات برقراری شرط سوم تعریف متر برای  $d_{\mathbb{H}}$  تکمیل می‌شود.

قبل از اینکه بتوانیم نتیجه بگیریم  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  یک فضای متریک راهی است، باید دو نکته دیگر را بررسی کنیم. باید نشان دهیم  $d_{\mathbb{H}}$  در قسمت دوم شرط اول تعریف متر صدق می‌کند و همچنین باید نشان دهیم به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $\mathbb{H}$  یک مسیر وجود دارد که فاصله هذلولوی  $d_{\mathbb{H}}(x, y)$  را محقق می‌سازد.

رویکردی که برای اثبات نکته اول اتخاذ می‌کنیم، بر اساس این حقیقت شکل می‌گیرد که اگر به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $\mathbb{H}$  یک مسیر وجود داشته باشد که فاصله هذلولوی  $d_{\mathbb{H}}(x, y)$  را محقق سازد، آنگاه با شرط  $x \neq y$

خواهیم داشت  $d_{\mathbb{H}}(x, y) > 0$  زیرا طول مسیرهای غیر ثابت، مثبت است. بدین ترتیب برقراری قسمت دوم شرط (۱) نیز نتیجه‌ای فرعی خواهد بود.

فرض کنیم  $x$  و  $y$  دو نقطه متمایز در  $\mathbb{H}$  بوده و  $l$  خط هذلولوی باشد که از  $x$  و  $y$  عبور می‌کند. ابتدا سعی می‌کنیم که وضعیت را ساده کنیم. با توجه به نتایج بخش ۲-۹، به ویژه تمرین ۲-۴۰، می‌دانیم که  $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  چنان وجود دارد که  $\gamma(l)$  قسمت مثبت محور موهومی باشد.

می‌نویسیم  $\mu i$  و  $\lambda i$  و  $\gamma(x) = \mu i$  و  $\gamma(y) = \lambda i$ . می‌توانیم فرض کنیم  $\mu < \lambda$  زیرا در غیر این صورت کافی است به جای  $\gamma$ ، تبدیل  $\gamma \circ K$  را در نظر بگیریم. بنا بر گزاره ۳-۱۷ داریم  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$ . در نتیجه کافی است نشان دهیم که یک مسیر واصل  $\mu i$  و  $\lambda i$  با طول فاصله بین آنها وجود دارد که  $\mu < \lambda$ .

این محاسبه را ابتدا با محاسبه طول هذلولوی یک مسیر خاص، یعنی  $\mathbb{H} \rightarrow [\mu, \lambda]: f$  با ضابطه  $f(t) = ti$  شروع می‌کنیم. تصویر  $f$  پاره خط هذلولوی واصل  $\mu i$  و  $\lambda i$  است. از آنجاییکه انتظار داریم کوتاه‌ترین فاصله هذلولوی بین دو نقطه در امتداد یک خط هذلولوی واقع گردد، بنابراین به نظر می‌رسد که این مسیر، انتخاب معقولی برای کوتاه‌ترین مسیر در  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  باشد.

<sup>۱</sup> در واقع به تناقض  $\varepsilon < \varepsilon$  می‌رسیم.



برای محاسبه طول  $f$  مشاهده می‌کنیم که  $\text{Im}(f(t)) = t$  و  $|f'(t)| = 1$ ، بنابراین داریم:

$$l_H(f) = \int_{\mu}^{\lambda} \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

حال، فرض کنیم  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  یک مسیر دلخواه در  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  باشد. برای تکمیل شدن اثبات  $l_H(f) = d_H(\mu i, \lambda i)$  نشان می‌دهیم که  $l_H(f) \leq l_H(f)$ . این امر را در چندین مرحله انجام خواهیم داد، در هر مرحله  $f$  را اصلاح<sup>۱</sup> می‌کنیم به طوری که طول هذلولوی آن کاهش یابد. سپس نشان می‌دهیم در این اصلاح  $f$ ، طول هذلولوی حاصل از طول هذلولوی  $f$  کوچکتر نمی‌شود.

می‌نویسیم  $f(t) = x(t) + y(t)i$ . اولین اصلاح  $f$ ، صرف نظر کردن از قسمت حقیقی آن است. یعنی مسیر  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(t) = \text{Im}(f(t))i = y(t)i.$$

از آنجایی که  $g(a) = f(a) = \mu i$  و  $g(b) = f(b) = \lambda i$  بنابراین  $g$  عضو  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  است.

با توجه به اینکه به ازای هر  $t$  داریم  $(x'(t))' \geq 0$  و  $\text{Im}(g(t)) = \text{Im}(f(t)) = y(t)$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} l_H(g) &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(g(t))} |g'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(y'(t))^2} dt \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt = l_H(f). \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر مسیر  $f$  در  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  یک مسیر  $g$  در  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  با ضابطه  $g(t) = \text{Im}(f(t))i$  می‌توان ساخت بطوریکه طول آن کمتر از طول  $f$  است. بنابراین کافی

<sup>۱</sup> modify

است نشان دهیم اگر  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  یک مسیر دلخواه در  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  به فرم  $g(t) = y(t)i$  باشد، آنگاه

$$l_{\mathbb{H}}(f) \leq l_{\mathbb{H}}(g).$$

این مطلب نیز نتیجه مستقیم گزاره ۲-۳ است. تصویر  $[a, b]$  تحت  $g$ ، پاره‌خط هذلولوی است که  $\alpha i$  و  $\beta i$  را به هم وصل می‌کند که  $\alpha \leq \mu \leq \lambda \leq \beta$ . حال  $f_1: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  را با ضابطه  $f_1(t) = it$  تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$l_{\mathbb{H}}(f) = \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \leq \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = l_{\mathbb{H}}(f_1).$$

می‌نویسیم  $g = f_1 \circ (f_1^{-1} \circ g)$  که در آن  $f_1^{-1} \circ g: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  با توجه به نحوه ساختن  $f_1$ ، یک تابع پوشا است. با توجه به گزاره ۲-۳ داریم:

$$l_{\mathbb{H}}(f) \leq l_{\mathbb{H}}(g).$$

بدین ترتیب ثابت شد که به ازای هر مسیر دلخواه  $f$  در  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  داریم:

$$l_{\mathbb{H}}(f) \leq l_{\mathbb{H}}(f)$$

یعنی نشان داده‌ایم:

$$d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = l_{\mathbb{H}}(f) = \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

توجه داشته باشید که  $g(t) = y(t)i$  و چون  $f_1(t) = it$  بنابراین  $(f_1^{-1} \circ g)(t) = y(t)$ . لذا داریم:

$$l_{\mathbb{H}}(g) = l_{\mathbb{H}}(f_1)$$

اگر فقط به ازای هر  $t \in [a, b]$  داشته باشیم  $y'(t) \geq 0$  و یا به ازای هر  $t \in [a, b]$  داشته باشیم  $y'(t) \leq 0$ . بنابراین تنها مسیرهایی که در  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  فاصله هذلولوی را محقق می‌سازند عبارتند از مسیرهایی که پارامتری‌سازی شده پاره‌خط هذلولوی واصل  $\mu i$  و  $\lambda i$  باشند.

### تمرین ۳-۹.

مسیر  $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$g(t) = (t^2 + 1)i.$$

تصویر این مسیر را در  $\mathbb{H}$  معین کرده و طول هذلولوی آن را محاسبه کنید.

متعدی بودن عمل  $Möb(IH)$  روی مجموعه خطوط هذلولوی در  $IH$  و همچنین ناوردا بودن هر دوی طول هذلولوی مسیره‌های در  $IH$  و فاصله هذلولوی بین هر دو نقطه در  $IH$  تحت عمل  $Möb(IH)$  با یکدیگر نتیجه می‌دهند که به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $IH$  یک مسیر، یعنی پارامتری‌سازی پاره‌خط هذلولوی واصل  $x$  و  $y$  وجود دارد که فاصله هذلولوی  $d_H(x, y)$  را محقق می‌سازد.

یعنی، فرض کنیم  $\ell$  خط هذلولوی گذرنده از  $x$  و  $y$  باشد، و فرض کنیم  $\gamma \in Möb(IH)$  چنان باشد که خط  $\ell$  را به روی قسمت مثبت محور موهومی تصویر می‌کند. می‌نویسیم  $\gamma(x) = \mu i$  و  $\gamma(y) = \lambda i$ . توجه داشته باشید که می‌توانیم  $\gamma$  را چنان انتخاب کنیم که  $\mu < \lambda$ ، زیرا در غیر این صورت کافی است  $\gamma$  را با  $K \circ \gamma$  جایگزین کنیم که در آن  $K(z) = -\frac{1}{z}$ .

دیدیم که مسیر  $f: [\mu, \lambda] \rightarrow IH$  با ضابطه  $f(t) = ti$  متعلق به  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$  است. از آنجاییکه  $Möb(IH)$  طول هذلولوی مسیره‌ها را حفظ می‌کند، بنابراین داریم:

$$l_H(\gamma^{-1} \circ f) = l_H(f).$$

از آنجاییکه  $Möb(IH)$  فاصله هذلولوی را حفظ می‌کند، بنابراین داریم:

$$d_H(x, y) = d_H(\gamma^{-1}(\mu i), \gamma^{-1}(\lambda i)) = d_H(\mu i, \lambda i) = l_H(f).$$

با ترکیب این دو مطلب، نتیجه می‌شود که:

$$l_H(\gamma^{-1} \circ f) = d_H(x, y)$$

و لذا  $\gamma^{-1} \circ f$  عضوی از  $\Gamma[x, y]$  است که فاصله هذلولوی بین  $x$  و  $y$  را محقق می‌سازد.

همان طوریکه در ابتدای این بخش اشاره شد، این نکته همچنین ثابت می‌کند که  $d_H$  در قسمت دوم شرط اول تعریف متر صدق می‌کند. بنابراین  $(IH, d_H)$  یک فضای متریک راهی است. بدین ترتیب اثبات قضیه ۳-۱۶ نیز کامل می‌شود.

فهر المطلوب

تمرین ۳-۱۰.

فرض کنید  $K$  پاره‌خط هذلولوی واصل  $2i$  و  $10i$  باشد. به ازای هر  $n \geq 2$  نقاطی از  $K$  را بیابید به طوریکه آن را به  $n$  قسمت با طول مساوی تقسیم کنند.

از آنجاییکه  $d_{\mathbb{H}}(x, y)$  یک متر روی  $I\mathbb{H}$  می‌باشد، با توجه به تبصره ۳-۱۵، حال می‌توانیم از مفاهیم زیرمجموعه‌های باز و بسته در  $I\mathbb{H}$ ، دنباله‌های همگرا از نقاط  $I\mathbb{H}$ ، و پیوستگی توابعی با دامنه و برد در  $I\mathbb{H}$  صحبت کنیم.

این بخش را با توضیح این مطلب که چرا مرز در بی‌نهایت  $I\mathbb{H}$ ، یعنی  $\bar{I\mathbb{R}} = \partial I\mathbb{H}$ ، مرز در بی‌نهایت نامیده می‌شود، به اتمام می‌رسانیم. یک نقطه  $z$  را روی  $\bar{I\mathbb{R}}$  انتخاب کنید، مثلاً  $z = \infty$  و فرض کنید شعاع هذلولوی  $l$  توسط  $i$  و  $z = \infty$  معین گردد.

از آنجاییکه  $l$  را می‌توان به عنوان تصویر مسیر  $I\mathbb{H} \rightarrow f: [1, \infty)$  با ضابطه  $f(t) = ti$  بیان نمود، بنابراین طول هذلولوی  $l$  و  $z = \infty$  برابر است با طول  $f$ ، یعنی انتگرال ناسره زیر:

$$l_{\mathbb{H}}(f) = \int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt$$

که نامتناهی است.

به ویژه، هرگاه  $I\mathbb{H}$  را به عنوان یک قرص در  $\bar{\mathbb{C}}$  در نظر بگیریم، آنگاه  $\bar{I\mathbb{R}}$  مرز توپولوژیکی  $I\mathbb{H}$  می‌باشد، در حالی‌که نقاط در  $\bar{I\mathbb{R}}$  در فاصله نامتناهی از نقاط در  $I\mathbb{H}$  نسبت به متر هذلولوی قرار دارند.

### ۳-۵. فرمول فاصله هذلولوی در $I\mathbb{H}$

اثبات قضیه ۳-۱۶ روشی، دست کم از لحاظ نظری، برای محاسبه طول هذلولوی نقاط در  $I\mathbb{H}$  ارائه می‌دهد.

به ازای دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $I\mathbb{H}$  تبدیلی مانند  $\gamma \in \text{Möb}(I\mathbb{H})$  را پیدا کنید و یا بسازید به طوری‌که  $\gamma(x) = \mu i$  و  $\gamma(y) = \lambda i$  هر دو روی قسمت مثبت محور موهومی قرار داشته باشند. سپس مقادیر  $\mu$  و  $\lambda$  را تعیین کنید. در این صورت داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = \left| \ln \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) \right|.$$

مثلاً دو نقطه  $x = 2 + i$  و  $y = -3 + i$  را در نظر می‌گیریم. با توجه به تمرین ۱-۳،

خط هذلولوی  $l$  که از  $x$  و  $y$  می‌گذرد، روی دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $-\frac{1}{4}$  و شعاع

اقلیدسی  $\frac{\sqrt{29}}{2}$  قرار دارد. به ویژه، نقاط انتهایی در بی‌نهایت خط  $l$  عبارتند از:

$$q = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} \text{ و } p = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}.$$

قرار می‌دهیم  $\gamma(z) = \frac{z-p}{z-q}$ . دترمینان  $\gamma$  برابر است با  $p-q > 0$ ، و لذا  $\gamma$  عضوی از  $Möb^+(IH)$  است. با توجه به نحوه ساختن  $\gamma$  نقاط انتهایی در بی‌نهایت خط  $\ell$  را به نقاط انتهایی در بی‌نهایت قسمت مثبت محور موهومی، یعنی  $0$  و  $\infty$  تصویر می‌کند. بنابراین  $\gamma$  خط  $\ell$  را به روی قسمت مثبت محور موهومی تصویر می‌کند. با محاسبه داریم:

$$\gamma(r+i) = \frac{r+i-p}{r+i-q} = \frac{p-q}{(r-q)^r + 1} i$$

و

$$\gamma(-r+i) = \frac{-r+i-p}{-r+i-q} = \frac{p-q}{(r+q)^r + 1} i.$$

به ویژه، داریم:

$$\begin{aligned} d_{IH}(r+i, -r+i) &= d_{IH}(\gamma(r+i), \gamma(-r+i)) = \ln \left( \frac{(r-q)^r + 1}{(r+q)^r + 1} \right) \\ &= \ln \left( \frac{58 + 1\sqrt{29}}{58 - 1\sqrt{29}} \right) \end{aligned}$$

همانطوریکه در این مثال مشخص است، محاسبه فاصله هذلولوی بر اساس این فرآیند می‌تواند بسیار خسته‌کننده و طولانی باشد. داشتن یک فرمول صریح و کلی برای محاسبه فاصله هذلولوی مناسب و مطلوب خواهد بود. یکی از راه‌های به دست آوردن چنین فرمولی، این است که فرآیند بالا را برای دو نقطه دلخواه  $z_1$  و  $z_2$  تکرار کنیم.

### تمرین ۳-۱۱.

فرض کنید  $z_1 = x_1 + y_1 i$  و  $z_2 = x_2 + y_2 i$  دو نقطه در  $IH$  باشند به طوری که  $x_1 \neq x_2$ . با ساختن عضوی از  $Möb(IH)$  مانند  $\gamma$  که  $z_1$  و  $z_2$  را به قسمت مثبت محور موهومی می‌برد، فرمولی برای  $d_{IH}(z_1, z_2)$  بر حسب  $x_1, y_1, x_2, y_2$  بیابید.

### تمرین ۳-۱۲.

فاصله هذلولوی هر زوج از نقاط  $A = i$ ،  $B = 1 + 2i$ ،  $C = -1 + 2i$  و  $D = 7i$  را

بیابید.

برای یافتن فرمولی برای فاصله هذلولوی بین دو نقطه  $z_1$  و  $z_2$ ، یعنی  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$  بر حسب قسمت‌های حقیقی و موهومی آنها، می‌توانیم از این واقعیت استفاده کنیم که خطوط هذلولوی عبارتند از دایره‌های اقلیدسی و خطوط اقلیدسی که بر  $\overline{IR}$  عمود هستند. مانند بالا، می‌نویسیم  $z_1 = x_1 + y_1 i$  و  $z_2 = x_2 + y_2 i$ .

می‌توانیم فرض کنیم که  $x_1 \neq x_2$ ، زیرا برای حالت  $x_1 = x_2$ ، دیدیم که:

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \left| \ln \left( \frac{y_2}{y_1} \right) \right|.$$

فرض کنیم  $c$  مرکز اقلیدسی و  $r$  شعاع اقلیدسی دایره اقلیدسی باشد که شامل نقاط  $z_1$  و  $z_2$  است. فرض کنیم  $x_2 > x_1$  و  $\theta_k$  آرگومان  $z_k$  باشد که در بازه  $[0, \pi)$  واقع است و طبق معمول در جهت مثبت مثلثاتی و از قسمت مثبت محور حقیقی اندازه گرفته می‌شود.

مسیر  $f: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $f(t) = c + re^{it}$  را در نظر می‌گیریم.

تصویر  $f$ ، پاره‌خط هذلولوی واصل  $z_1$  و  $z_2$  است و لذا  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = l_{\mathbb{H}}(f)$ .

از آنجاییکه  $\text{Im}(f(t)) = r \sin(t)$  و  $|f'(t)| = rie^{it} = r$ ، بنابراین داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = l_{\mathbb{H}}(f) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin(t)} dt = \ln \left| \frac{\csc(\theta_2) - \cot(\theta_2)}{\csc(\theta_1) - \cot(\theta_1)} \right|$$

برای بیان این فرمول بر حسب  $x_1, y_1, x_2, y_2$  اگرچه ممکن است، ولی ضروری نیست که  $\theta_k$  را بر حسب آنها بنویسیم. کافی است که  $\csc(\theta_k)$  و  $\cot(\theta_k)$  را بر حسب  $x_k$  و  $y_k$  و  $c$  و  $r$  بنویسیم.

توجه داشته باشید که  $\theta_k$  زاویه یک مثلث قائم‌الزاویه با ضلع مقابل  $y_k$  و ضلع مجاور  $x_k - c$  و وتر  $r$  می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\cot(\theta_k) = \frac{x_k - c}{y_k} \quad \text{و} \quad \csc(\theta_k) = \frac{r}{y_k}.$$

در نتیجه داریم:

$$\left| \csc(\theta_k) - \cot(\theta_k) \right| = \left| \frac{r + c - x_k}{y_k} \right|$$

بنابراین:

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = l_{\mathbb{H}}(f) = \ln \left| \frac{\csc(\theta_2) - \cot(\theta_2)}{\csc(\theta_1) - \cot(\theta_1)} \right| = \ln \left| \frac{(x_2 - c - r)y_1}{(x_1 - c - r)y_2} \right|.$$

توجه داشته باشید که اگر فرض کنیم  $x_r < x_l$ ، در این صورت نتیجه محاسبه بالا عبارت خواهد بود از:

$$d_H(z_l, z_r) = l_H(f) = \ln \left| \frac{\csc(\theta_l) - \cot(\theta_l)}{\csc(\theta_r) - \cot(\theta_r)} \right| = \ln \left| \frac{(x_r - c - r)y_l}{(x_l - c - r)y_r} \right|,$$

که تفاوت آن با  $\ln \left| \frac{(x_l - c - r)y_r}{(x_r - c - r)y_l} \right|$  در یک علامت منها می باشد.

بنابراین اگر هیچ فرضی روی  $x_l$  و  $x_r$  در نظر نگیریم، آنگاه فرمول زیر برای فاصله هذلولوی بین  $z_l$  و  $z_r$  به دست می آید:

$$d_H(z_l, z_r) = \left| \ln \left| \frac{(x_l - c - r)y_r}{(x_r - c - r)y_l} \right| \right|$$

اگر بخواهیم این فرمول را فقط برحسب  $x_k$  و  $y_k$  بیان کنیم، باید نتیجه تمرین ۱-۳ را به یاد داشته باشیم که در آن  $c$  و  $r$  برحسب  $x_k$  و  $y_k$  بیان شده است. متأسفانه فرمول حاصل از این جایگزینی را نمی توان ساده نمود، لذا از آوردن آن صرف نظر می کنیم. گاهی می توانیم از این فرمول به طور صریح استفاده کنیم. به طور مثال، می توانیم تعیین کنیم که آیا عدد حقیقی مثبت  $s$  وجود دارد به طوریکه داشته باشیم:

$$d_H(-s+i, i) = d_H(i, s+i) = d_H(-s+i, s+i).$$

از آنجاییکه  $-s+i$  و  $s+i$  روی دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $c=0$  و شعاع اقلیدسی  $r = \sqrt{1+s^2}$  قرار دارد، بنابراین داریم:

$$d_H(-s+i, s+i) = \ln \left( \frac{\sqrt{s^2+1}+s}{\sqrt{s^2+1}-s} \right)$$

از آنجاییکه  $s+i$  و  $i$  روی دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $c = \frac{s}{\sqrt{4+s^2}}$  و شعاع اقلیدسی  $r = \frac{1}{\sqrt{4+s^2}}$  قرار دارد، بنابراین داریم:

$$d_H(s+i, i) = \ln \left( \frac{\sqrt{s^2+4}+s}{\sqrt{s^2+4}-s} \right)$$

از آنجاییکه هیچ مقداری برای  $s$  وجود ندارد به طوریکه داشته باشیم:

$$\ln\left(\frac{\sqrt{s^2+1}+s}{\sqrt{s^2+1}-s}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+4}+s}{\sqrt{s^2+4}-s}\right)$$

بنابراین پاسخ سوال بالا منفی است.

حال که فاصله هذلولوی را فهمیدیم و به ویژه می دانیم که فاصله هذلولوی تحت عمل  $Möb(\mathbb{H})$  ناورداست، حال قادریم عامل مانع متعدی عمل کردن  $Möb(\mathbb{H})$  روی زوج های متشکل از نقاط متمایز  $\mathbb{H}$  را ببینیم.

### تمرین ۳-۱۱.

به ازای دو زوج  $(z_1, z_2)$  و  $(w_1, w_2)$  از نقاط متمایز  $\mathbb{H}$  ثابت کنید یک  $q$  متعلق به  $Möb(\mathbb{H})$  موجود است به طوری که یکی از زوج ها را به دیگری تصویر کند اگر فقط اگر  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$ .

از بخش ۲-۱۰ به یاد داریم که اگر  $m$  یک تبدیل مویبوس با زاویه ثابت در  $Möb^+(\mathbb{H})$  باشد که نقاط  $x$  و  $y$  در  $\overline{\mathbb{R}}$  را ثابت نگه می دارد، و اگر  $A$  دایره ای باشد که از نقاط  $x$  و  $y$  می گذرد، آنگاه  $m$  مجموعه  $A \cap \mathbb{H}$  را به خودش می برد. حال که فاصله هذلولوی را فهمیدیم و می توانیم فاصله هذلولوی را در  $\mathbb{H}$  محاسبه کنیم، می توانیم ببینیم  $m$  چگونه روی  $A \cap \mathbb{H}$  عمل می کند.

### تعریف ۳-۱۸.

فاصله انتقالی<sup>۱</sup>  $m$  در امتداد  $A \cap \mathbb{H}$  عبارت است از  $d_{\mathbb{H}}(a, m(a))$  که در آن  $a$  یک نقطه  $A \cap \mathbb{H}$  است.

در حالتیکه  $A \cap \mathbb{H}$  محور  $m$  باشد، که اگر  $A$  بر  $\overline{\mathbb{R}}$  عمود باشد اتفاق می افتد، در واقع فاصله انتقالی  $m$  در امتداد  $A \cap \mathbb{H}$  را محاسبه کرده ایم:

$$d_{\mathbb{H}}(\mu i, m(\mu i)) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda \mu i) = \ln\left[\frac{\lambda \mu}{\mu}\right] = \ln(\lambda)$$

که در آن  $m(z) = \lambda z$  با  $q(z) = \lambda z$  مزدوج است.

<sup>۱</sup> Translation distance



### ۳-۶. طولی‌ها

در حالت کلی، یک طولی<sup>۱</sup> در یک فضای متری  $(X, d)$  عبارت است از یک همسانی  $X$  که فاصله را حفظ کند. یعنی یک طولی‌ای  $(X, d)$  یک همسانی  $X$  مانند  $f$  است بطوریکه به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $X$  داشته باشیم:

$$d(x, y) = d(f(x), f(y))$$

در واقع همانطوریکه در تمرین بعد بیان می‌شود، این تعریف از طولی‌ها نسبتاً زیادی است.

#### تمرین ۳-۱۴.

فرض کنید  $f: X \rightarrow X$  یک تابع حافظ فاصله باشد. ثابت کنید  $f$  یک به یک و پیوسته است.

در حالت کلی، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که یک تابع حافظ فاصله یک همسانی است. برای روشن ساختن این مطلب که گاهی به اشتباه درست تصور می‌شود، تابع  $e: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$e(m, n) = \begin{cases} 0 & m = n \\ 1 & m \neq n \end{cases}$$

این تابع یک متر روی مجموعه اعداد صحیح،  $\mathbb{Z}$  تعریف می‌کند که بسیار متفاوت از متر معمولی روی  $\mathbb{Z}$  است. تابع  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  با ضابطه  $f(m) = 2m$  حافظ فاصله است، اما پوشا نیست و در نتیجه همسانی نیست.

البته یک تابع حافظ فاصله  $f: X \rightarrow X$  را می‌توان یک همسانی روی بردش یعنی  $f(X)$  در نظر گرفت، زیرا  $f$  یک دوسوئی است، اگر به عنوان تابع  $f: X \rightarrow f(X)$  در نظر گرفته شود. به ازای هر دو نقطه  $z$  و  $w$  در  $f(X)$  داریم:

$$d(z, w) = d(f(f^{-1}(z)), f(f^{-1}(w))) = d(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$$

بنابراین  $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$  نیز حافظ فاصله است و بنا بر تمرین ۳-۱۴ پیوسته است.

<sup>1</sup> Isometry

تمرین ۳-۱۵.

ثابت کنید تابع  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  با ضابطه  $f(z) = az$  یک طولپای  $(\mathbb{C}, n)$  است اگر و فقط اگر  $|a|=1$ . اینجا مانند بخش ۳-۳ داریم  $n(z, w) = |z - w|$ . از آنجاییکه تابع همانی هر فضای متریکی، یک همسانی حافظ فاصله است و از آنجاییکه معکوس یک همسانی حافظ فاصله معکوس‌پذیر نیز لزوماً یک همسانی حافظ فاصله است، و همچنین ترکیب دو همسانی حافظ فاصله نیز مجدداً همسانی حافظ فاصله است، بنابراین مجموعه تمام طولپاهای یک فضای متریک تشکیل یک گروه می‌دهد. تنها فضای متریکی که با جزئیات آن را مطالعه کرده‌ایم همان مدل نیم‌صفحه بالایی  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  از صفحه هذلولوی است. یک طولپای  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  را یک طولپای هذلولوی<sup>۱</sup> می‌نامیم. در این بخش طولپاهای هذلولوی را شناسایی خواهیم کرد. فرض کنیم  $Isom(\mathbb{H})$  نشان دهنده گروه طولپاهای  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  باشد.

قضیه ۳-۱۹.

$$Isom(\mathbb{H}) = Möb(\mathbb{H})$$

اثبات. با توجه به روند ساختن متر هذلولوی  $d_{\mathbb{H}}$  روی  $\mathbb{H}$ ، به ویژه بنا بر گزاره ۳-۱۷ نتیجه می‌شود که هر عضو  $Möb(\mathbb{H})$  یک طولپای هذلولوی می‌باشد، و لذا  $Möb(\mathbb{H}) \subseteq Isom(\mathbb{H})$ .

اثبات رابطه شمول برعکس را با مشاهده اینکه پاره‌خط‌های هذلولوی قابل طبقه‌بندی بر حسب فاصله هذلولوی هستند، شروع می‌کنیم.

گزاره ۳-۲۰.

فرض کنیم  $x, y$  و  $z$  نقاط متمایزی از  $\mathbb{H}$  باشند. در این صورت:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z)$$

اگر و فقط اگر  $y$  روی پاره‌خط هذلولوی  $\ell_{xz}$  که  $x$  را به  $z$  وصل می‌کند، قرار داشته باشد.

<sup>1</sup> Hyperbolic isometry

**اثبات.** با توجه به تمرین ۲-۴۴ عضوی از  $Möb(IH)$  مانند  $m$  وجود دارد که در شرط  $m(x) = i$  و  $m(y) = ai$  به ازای یک  $\alpha > 1$  صدق کند. می‌نویسیم  $m(y) = a + bi$ . در این صورت حالت‌های متفاوتی وجود دارد که باید بررسی کنیم. فرض کنیم  $\gamma$  روی پاره‌خط هذلولوی  $\ell_{xz}$  که  $x$  را به  $z$  وصل می‌کند، قرار داشته باشد. در این صورت  $m(y)$  روی پاره‌خط هذلولوی که  $m(x) = i$  را به  $m(z) = ai$  وصل می‌کند، قرار دارد. به ویژه،  $a = 0$  و  $1 < b \leq \alpha$ . در نتیجه:

$$d_H(x, y) = d_H(i, bi) = \ln(b)$$

و

$$d_H(y, z) = d_H(bi, ai) = \ln\left(\frac{\alpha}{b}\right) = d_H(x, z) - \ln(b).$$

$$\text{بنابراین } d_H(x, y) + d_H(y, z) = d_H(x, z)$$

حال فرض کنیم  $\gamma$  روی پاره‌خط هذلولوی  $\ell_{xz}$  که  $x$  را به  $z$  وصل می‌کند، قرار نداشته باشد. دو حالت وجود دارد، یعنی اینکه  $m(y)$  روی قسمت مثبت محور موهومی واقع باشد که نتیجه می‌دهد  $a = 0$  و یا نباشد، و در نتیجه  $a \neq 0$ . اگر  $a = 0$ ، آنگاه  $m(y) = bi$  که در آن  $1 < b < \alpha$  یا  $\alpha < b$ . اگر  $1 < b < \alpha$ ، آنگاه داریم:

$$d_H(y, z) = \ln\left(\frac{\alpha}{b}\right) = d_H(x, z) - \ln(b) \quad \text{و} \quad d_H(x, y) = -\ln(b).$$

از آنجاییکه  $\ln(b) < 0$ ، بنابراین داریم:

$$d_H(x, y) + d_H(y, z) = d_H(x, z) - \ln(b) > d_H(x, z).$$

اگر  $\alpha < b$ ، آنگاه

$$d_H(y, z) = \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right) = \ln(b) - d_H(x, z) \quad \text{و} \quad d_H(x, y) = \ln(b)$$

از آنجاییکه  $\ln(b) > d_H(x, z)$ ، بنابراین داریم:

$$d_H(x, y) + d_H(y, z) = \ln(b) - d_H(x, z) > d_H(x, z)$$

اگر  $a \neq 0$ ، آنگاه با توجه به نتایج بخش ۳-۴ مشاهده می‌کنیم که:

$$d_H(i, bi) < d_H(i, a + bi) = d_H(x, y)$$

به ویژه، فرض کنیم  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow IH$  مسیری باشد که فاصله هذلولوی بین  $i = f(\alpha)$  و  $a + bi = f(\beta)$  را محقق می‌سازد. توجه داشته باشید که مسیر

$g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $g(t) = \text{Im}(f(t))i$  در شرط  $g(\alpha) = i$  و  $g(\beta) = bi$  صدق می‌کند و بعلاوه  $l_{\mathbb{H}}(g) < l_{\mathbb{H}}(f)$ .  
به طور مشابه داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(a + bi, \alpha i) = d_{\mathbb{H}}(y, z)$$

اگر  $1 \leq b \leq \alpha$ ، آنگاه داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(i, \alpha i) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

اگر  $b$  متعلق به بازه  $[1, \alpha]$  نباشد، مجدداً دو حالت داریم، یعنی  $0 < b < 1$  و  $\alpha < b$ .  
با استفاده از محاسباتی که در چند پاراگراف قبل صورت گرفت، در حالت  $0 < b < 1$  داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) < d_{\mathbb{H}}(x, z) - \nu \ln(b) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$$

و در حالت  $\alpha < b$  داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) < \nu \ln(b) - d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \alpha i) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$$

بدین ترتیب اثبات گزاره ۳-۲۰ کامل می‌شود.

### فهرست مطالب

#### تمرین ۳-۱۶.

ثابت کنید هر طولی‌ای هذلولوی  $\mathbb{H}$  خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی تصویر می‌کند.

فرض کنیم  $f$  یک طولی‌ای هذلولوی باشد، به یاد آورید که داریم ثابت می‌کنیم  $f$  عضوی از  $Möb(\mathbb{H})$  است. به ازای هر دو نقطه  $p$  و  $q$  در  $\mathbb{H}$  فرض کنیم  $\ell_{pq}$  پاره‌خط هذلولوی واصل  $p$  به  $q$  باشد. با این نمادگذاری، گزاره ۳-۲۰ را می‌توانیم به صورت

$$\ell_{f(p)f(q)} = f(\ell_{pq})$$

بازنویسی کنیم.

فرض کنیم  $\ell$  عمود منصف پاره‌خط هذلولوی  $\ell_{pq}$  باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ell = \{z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(p, z) = d_{\mathbb{H}}(q, z)\}.$$

از آنجاییکه  $\ell$  بر اساس فاصله هذلولوی تعریف شده است، بنابراین  $f(\ell)$  عمود منصف  $f(\ell_{pq}) = \ell_{f(p)f(q)}$  خواهد بود.

حال، طولیای  $f$  را نرمال<sup>۱</sup> می‌کنیم. زوج نقاط  $x$  و  $y$  را روی قسمت مثبت محور موهومی، یعنی  $I$  انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم  $H$  یکی از دو نیم‌صفحه در  $\mathbb{H}$  باشد که توسط  $I$  معین می‌گردد.

با توجه به تمرین ۳-۱۳، یک عضو  $Möb(\mathbb{H})$  مانند  $\gamma$  موجود است به طوری که  $\gamma(f(x)) = x$  و  $\gamma(f(y)) = y$ ، زیرا  $d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) = d_{\mathbb{H}}(x, y)$ . به ویژه، مشاهده می‌کنیم که  $\gamma \circ f$  هر دوی  $x$  و  $y$  را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین  $\gamma \circ f$  باید  $I$  را نیز ثابت نگه دارد. در صورت نیاز  $\gamma$  را می‌توان با  $B \circ \gamma$  جایگزین نمود که در آن  $B(z) = -\bar{z}$  انعکاس نسبت به  $I$  است، به طوری که عضوی مانند  $\gamma$  از  $Möb(\mathbb{H})$  به دست آوریم که  $\gamma \circ f$  هم  $I$  و هم  $H$  را ثابت نگه دارد.

فرض کنیم  $z$  یک نقطه دلخواه روی  $I$  باشد. از آنجایی که  $z$  به طور یکتایی به کمک دو فاصله هذلولوی  $d_{\mathbb{H}}(x, z)$  و  $d_{\mathbb{H}}(y, z)$  مشخص می‌گردد، و چون  $\gamma \circ f$  هر دوی این فاصله‌های هذلولوی را ثابت نگاه می‌دارد، نتیجه می‌شود که  $\gamma \circ f$  هر نقطه  $z$  روی  $I$  را نیز ثابت نگه می‌دارد.

### تمرین ۳-۱۷.

فرض کنید  $x = \lambda i$  و  $z = \mu i$  دو نقطه متمایز روی قسمت مثبت محور موهومی باشند. فرض کنید  $y$  یک نقطه دلخواه روی  $I$  باشد. نشان دهید که  $y$  به طور یکتایی به کمک دو فاصله هذلولوی  $d_{\mathbb{H}}(x, z)$  و  $d_{\mathbb{H}}(y, z)$  مشخص می‌گردد.

حال، فرض کنید  $w$  یک نقطه دلخواه  $\mathbb{H}$  باشد که روی  $I$  واقع نیست و فرض کنید  $l$  خط هذلولوی باشد که از  $w$  عبور می‌کند و بر  $I$  عمود است. به طور صریح، می‌توانیم  $l$  را به صورت خط هذلولوی که بخشی از دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $0$  و به شعاع اقلیدسی  $|w|$  بیان کنیم. فرض کنید  $z$  محل برخورد  $l$  و  $I$  باشد.

تا اینجا چندین مطلب در مورد  $l$  می‌دانیم. از آنجایی که  $l$  عمود منصف یک پاره‌خط هذلولوی واقع بر  $I$  می‌باشد و چون  $\gamma \circ f$  هر نقطه روی  $I$  را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین داریم  $f \circ \gamma(l) = l = \gamma \circ f(l)$ .

از آنجایی که  $\gamma \circ f$   $z$  را ثابت نگه می‌دارد و چون داریم

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(z), \gamma \circ f(w)) = d_{\mathbb{H}}(z, \gamma \circ f(w))$$

<sup>۱</sup>normalize

و همچنین  $f \circ \gamma$  دو نیم‌صفحه تعیین شده توسط  $I$  را حفظ می‌کند، بنابراین نتیجه می‌گردد که  $f \circ \gamma$ ،  $w$  را نیز ثابت نگه می‌دارد. از آنجاییکه  $f \circ \gamma$  هر نقطه  $\mathbb{H}$  را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین  $f \circ \gamma$  تابع همانی است. به ویژه، داریم  $f = \gamma^{-1}$  و در نتیجه  $f$  عضوی از  $Möb(\mathbb{H})$  است. به این ترتیب اثبات قضیه ۳-۱۹ کامل می‌گردد.

### فهوم‌المطلوب

توجه داشته باشید که در روند اثبات قضیه ۳-۱۹ یک دستگاه مختصات جدید روی  $\mathbb{H}$  تعریف شده است که از دستگاه مختصات استاندارد برگرفته از  $\mathbb{C}$  متفاوت است. این دستگاه مختصات جدید برگرفته از موقعیت نقاط  $\mathbb{H}$  نسبت به قسمت مثبت محور موهومی، یعنی  $I$  و تمام خطوط هذلولوی عمود بر  $I$  است.

به طور صریح، فرض کنیم  $w$  یک نقطه دلخواه  $\mathbb{H}$  باشد. ابتدا توجه داریم که  $w$  روی دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $\cdot$  و به شعاع اقلیدسی  $|w|$  واقع است. این دایره اقلیدسی شامل خط هذلولوی  $l_w$  است که از  $w$  می‌گذرد و بر  $I$  عمود است. فرض کنیم  $Z(w)$  نقطه برخورد  $I$  و  $l_w$  را نمایش دهد.

حال می‌توانیم مکان  $w$  را روی  $l_w$  به طور یکتایی با در نظر گرفتن فاصله هذلولوی علامت‌دار<sup>۱</sup> آن از قسمت مثبت محور موهومی که عبارت است از:

$$\text{sign}(w)d_{\mathbb{H}}(Z(w), w)$$

تعیین کنیم، که در آن اگر  $\text{Re}(w) > 0$  آنگاه  $\text{sign}(w) = 1$  و اگر  $\text{Re}(w) < 0$  آنگاه  $\text{sign}(w) = -1$  و اگر  $\text{Re}(w) = 0$  آنگاه  $\text{sign}(w) = 0$ .

بنابراین به  $w$  می‌توانیم مختصات زیر را وابسته کنیم:

$$(\log(|w|), \text{sign}(w)d_{\mathbb{H}}(z(w), w)).$$

به طور مثال  $z = 1 + 2i$  را در نظر بگیرید. خط هذلولوی  $l_z$  که از  $z$  عبور می‌کند و بر  $I$  عمود است، روی دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $\cdot$  و به شعاع اقلیدسی  $\sqrt{5}$  می‌باشد. نقطه برخورد  $I$  و  $l_z$  عبارت است از  $Z(z) = \sqrt{5}i$ . بنابراین فاصله هذلولوی علامت‌دار  $z$  تا  $I$  برابر است با:

<sup>۱</sup> signed hyperbolic distance

$$d_H(\sqrt{5}i, 1+2i) = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

زیرا  $sign(z) = 1$ . در این دستگاه مختصات جدید، نقطه  $z = 1+2i$  متناظر با نقطه زیر می‌باشد:

$$\left(\log(\sqrt{5}), \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right).$$

### ۷-۳. خواص متریک $(\mathbb{H}, d_H)$

در این بخش برخی خواص متریک متر هذلولوی روی  $\mathbb{H}$  را بررسی می‌کنیم. همان طوریکه فاصله هذلولوی بین یک زوج از نقاط را تعریف نمودیم، با یک روند بسیار مشابه می‌توانیم فاصله هذلولوی یک زوج از زیرمجموعه‌های  $\mathbb{H}$  مانند  $X$  و  $Y$  را تعریف کنیم، یعنی:

$$d_H(X, Y) = \inf\{d_H(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

در ادامه این بخش خواهیم دید که زیرمجموعه‌های مجزای  $X$  و  $Y$  از  $\mathbb{H}$  موجودند به طوریکه  $d_H(X, Y) = 0$ ، و لذا این تعریف یک متر روی زیرمجموعه‌های  $\mathbb{H}$  نمی‌سازد. در حالت کلی، محاسبه این اینفیموم می‌تواند بسیار مشکل شود. قسمت‌هایی از این بخش را به بررسی با جزئیات حالتیکه هر دوی  $X$  و  $Y$  یا یکی از آنها خط هذلولوی است، اختصاص می‌دهیم. یک حقیقت کلی در مورد این فاصله بین مجموعه‌ها وجود دارد که ثابت خواهد شد بسیار مفید است. ابتدا یک تعریف ارائه می‌دهیم.

#### تعریف ۲۱-۳.

زیرمجموعه  $X$  از  $\mathbb{H}$  کراندار نامیده می‌شود هرگاه  $C > 0$  موجود باشد به طوریکه  $X$  مشمول در یک قرص هذلولوی زیر باشد:

$$U_C(i) = \{z \in \mathbb{H} \mid d_H(z, i) < C\}.$$

زیرمجموعه  $X$  از  $\mathbb{H}$  را فشرده می‌نامیم هرگاه کراندار و بسته باشد.

یک مثال ساده از زیرمجموعه‌های فشرده  $\mathbb{H}$  عبارت است از هر زیر مجموعه متناهی

مانند  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . به ازای هر  $z$  در  $X - \mathbb{H}$  قرار می‌دهیم:

$$\varepsilon = \inf\{d_{I\mathbb{H}}(z, x_1), \dots, d_{I\mathbb{H}}(z, x_n)\}.$$

در این صورت  $\varepsilon > 0$  و  $U_\varepsilon(z)$  مشمول در  $I\mathbb{H} - X$  است، بنابراین  $I\mathbb{H} - X$  باز است و در نتیجه  $X$  بسته است. همچنین اگر قرار دهیم:

$$C = \sup\{d_{I\mathbb{H}}(i, x_1), \dots, d_{I\mathbb{H}}(i, x_n)\},$$

در این صورت  $X$  مشمول در  $U_{2C}(i)$  است، بنابراین  $X$  کراندار است.

اگرچه در اینجا اثبات نخواهیم کرد، یک خاصیت اساسی زیرمجموعه‌های فشرده این است که اگر  $X$  یک زیرمجموعه فشرده  $I\mathbb{H}$  باشد و  $\{x_n\}$  یک دنباله از نقاط  $X$  باشد، در این صورت یک زیر دنباله  $\{x_{n_k}\}$  از دنباله  $\{x_n\}$  موجود است به طوری که به یک نقطه  $x$  از  $X$  همگرا است. به عبارت دیگر، هر دنباله از نقاط یک مجموعه فشرده  $X$ ، شامل یک زیر دنباله همگرا است.

### تمرین ۳-۱۸.

فرض کنیم  $X$  یک زیرمجموعه فشرده  $I\mathbb{H}$  و  $Y$  یک زیر مجموعه دلخواه  $I\mathbb{H}$  باشد. ثابت کنید  $d_{I\mathbb{H}}(X, Y) > 0$  اگر و فقط اگر بستارهای  $X$  و  $Y$  مجزا باشند.

اگرچه این مفهوم فاصله هذلولوی بین مجموعه‌ها یک متر روی مجموعه‌های  $I\mathbb{H}$  تعریف نمی‌کند، یکی از راه‌های اندازه‌گیری میزان نزدیک بودن دو زیر مجموعه  $I\mathbb{H}$  می‌باشد. یکی از کاربردهای جالب این مفهوم در مورد خطوط و شعاع‌های هذلولوی می‌باشد.

به یاد آورید که دو نوع موازی بودن برای دو خط هذلولوی داریم. خطوط هذلولوی موجودند که در  $I\mathbb{H}$  مجزا می‌باشند، اما دایره‌هایی در  $\bar{C}$  که شامل آنها می‌باشند، مجزا نیستند. همچنین خطوط هذلولوی موجودند که در  $I\mathbb{H}$  مجزا می‌باشند، و دایره‌هایی در  $\bar{C}$  که شامل آنها می‌باشند، نیز مجزا هستند. در حالت اول آن دو خط را موازی<sup>۱</sup> و در حالت دوم آن دو خط را فراموازی<sup>۲</sup> می‌نامیم.

در بخش ۳-۱ دیدیم که این دو حالت را می‌توانیم از نقاط انتهایی در بی‌نهایت آن دو خط هذلولوی تمییز و تشخیص دهیم. حال که یک ابزاری برای اندازه‌گیری فاصله هذلولوی داریم، می‌توانیم این دو حالت را به طور ذاتی بر حسب خود آن دو خط نیز تمییز و تشخیص دهیم.



فرض کنیم  $l$  و  $l_1$  دو خط هذلولوی موازی باشند که یک نقطه انتهایی در بی نهایت مشترک در  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  دارند. فرض کنید  $y_k$  نقطه انتهایی در بی نهایت دیگر خط  $l_k$  باشد. با توجه به گزاره ۲-۳۰،  $Möb(IH)$  روی  $\overline{\mathbb{R}}$  به صورت سه گانه متعددی عمل می کند. بنابراین می توانیم فرض کنیم که  $x = \infty$ ،  $y_1 = 1$  و  $y_2 = 0$ .

حال به محاسبه می پردازیم. هر نقطه روی  $l$  به ازای یک  $\lambda > 0$  به شکل  $\lambda i$  است و هر نقطه روی  $l_1$  به ازای یک  $\lambda > 0$  به شکل  $1 + \lambda i$  است.

مسیر  $f: [0, 1] \rightarrow IH$  با ضابطه  $f(t) = t + \lambda i$  پاره خط افقی اقلیدسی واصل  $\lambda i$  و  $1 + \lambda i$  را پارامتری می کند. بنابراین به ازای هر  $\lambda > 0$  داریم:

$$d_H(l, l_1) \leq d_H(\lambda i, 1 + \lambda i) \leq l_H(f) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} dt = \frac{1}{\lambda}$$

اگر  $\lambda$  به سمت  $\infty$  میل کند، آنگاه مشاهده می کنیم که برای دو خط هذلولوی موازی  $l$  و  $l_1$  که یک نقطه انتهایی در بی نهایت مشترک دارند، داریم:

$$d_H(l, l_1) = 0.$$

حال فرض کنیم  $l$  و  $l_1$  دو خط هذلولوی فراموازی باشند.

### گزاره ۳-۲۲.

فرض کنیم  $l$  و  $l_1$  دو خط هذلولوی فراموازی در  $IH$  باشند، در این صورت  $d_H(l, l_1) > 0$ .

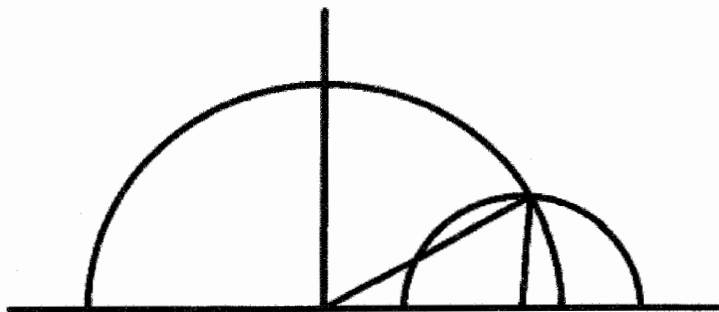
مجدداً با استفاده از به طور سه گانه متعددی عمل کردن  $Möb(IH)$  روی  $\overline{\mathbb{R}}$ ، می توانیم فرض کنیم که نقاط انتهایی در بی نهایت خط  $l$  عبارت باشند از  $0$  و  $\infty$  و همچنین نقاط انتهایی در بی نهایت خط  $l_1$  عبارت باشند از  $1$  و  $x > 1$ . می خواهیم فاصله هذلولوی دو خط  $l$  و  $l_1$ ، یعنی  $d_H(l, l_1)$  را محاسبه کنیم. برای این منظور از حقیقت زیر استفاده می کنیم.

### تمرین ۳-۱۹.

فرض کنید  $l$  یک خط هذلولوی و  $p$  یک نقطه  $IH$  باشد که روی  $l$  قرار ندارد. ثابت کنید نقطه منحصر به فرد  $z$  روی خط  $l$  وجود دارد که پاره خط هذلولوی گذرنده از  $z$  و  $p$  بر  $l$  عمود باشد و  $d_H(p, l) = d_H(p, z)$ .

به ازای هر  $x > r > 1$ ، فرض کنیم  $C_r$  خط هذلولوی مشمول در دایره اقلیدسی به مرکز  $\cdot$  و به شعاع اقلیدسی  $r$  باشد و همچنین  $C_r$  به ازای هر  $r$  بر  $l$  عمود باشد. توجه داشته باشید که  $C_r$  را به ازای هر  $r > 0$  می‌توانستیم تعریف کنیم، اما فقط به ازای  $1 < r < x$  با  $l_1$  تقاطع دارد. نقطه تقاطع  $C_r$  و  $l_1$  را به صورت  $re^{i\theta}$  می‌نویسیم که در آن  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  می‌باشد.

با در نظر گرفتن مثلث اقلیدسی با رئوس  $0, \frac{1}{4}(x+1)$  (مرکز اقلیدسی دایره اقلیدسی شامل  $l_1$ ) و  $re^{i\theta}$  می‌توانیم مقدار  $\theta$  را تعیین کنیم. به شکل ۱-۳ مراجعه کنید.



مثلث اقلیدسی در  $IH$  با رئوس  $0, \frac{1}{4}(x+1)$  و  $re^{i\theta}$

طول اقلیدسی آن دو ضلعی از این مثلث اقلیدسی که به راس  $\cdot$  متصل هستند و زاویه  $\theta$  را می‌سازند، عبارتند از  $r$  و  $\frac{1}{4}(x+1)$ . همچنین طول ضلع مقابل برابر است با  $\frac{1}{4}(x-1)$ . با یک محاسبه و با توجه به قانون کسینوس‌ها، مشاهده می‌کنیم که:

$$\left[\frac{1}{4}(x-1)\right]^2 = \left[\frac{1}{4}(x+1)\right]^2 + r^2 - 2r\left[\frac{1}{4}(x+1)\right]\cos(\theta)$$

با ساده کردن تساوی بالا، نتیجه می‌شود که این تساوی معادل است با:

$$x + r^2 = r(x+1)\cos(\theta)$$

بنابراین  $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \frac{\sqrt{(r^2-1)(x^2-r^2)}}{r(x+1)}$  و  $\cos(\theta) = \frac{x+r^2}{r(x+1)}$

فاصله هذلولوی بین  $ri$  و  $re^{i\theta}$  به ازای این مقدار  $\theta$  برابر با طول پاره‌خط هذلولوی واصل  $ri$  و  $re^{i\theta}$  است. برای محاسبه طول این پاره‌خط هذلولوی، آن را به صورت  $f(t) = re^{it}$  که  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \theta$  پارامتری می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$i_H(f) = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)} dt = -\ln |\csc(\theta) - \cot(\theta)| = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(r+1)(x+r)}{(r-1)(x-r)} \right].$$

چون  $C_r$  بر  $l$  عمود است، از تمرین ۳-۱۸ می‌دانیم که:

$$d_H(re^{i\theta}, ri) = d_H(re^{i\theta}, l).$$

به ویژه، فاصله هذلولوی بین دو خط  $l$  و  $l_1$  برابر است با مینیموم فاصله هذلولوی بین  $ri$  و  $re^{i\theta}$  وقتی که  $r$  در بازه  $(1, x)$  تغییر کند. فاصله هذلولوی بین  $ri$  و  $re^{i\theta}$  مینیموم می‌شود، هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{d}{dr} \ln \left[ \frac{(r+1)(x+r)}{(r-1)(x-r)} \right] = \frac{2(r^2 - x)(x+1)}{(r+1)(x+r)(r-1)(x-r)} = 0.$$

چون  $r > 0$ ، بنابراین تساوی بالا فقط در  $r = \sqrt{x}$  برقرار است.

در نتیجه، فاصله هذلولوی بین دو خط  $l$  و  $l_1$  برابر است با:

$$d_H(l, l_1) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x})} \right] = \ln \left[ \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right]$$

که مثبت است، زیرا  $x > 1$ . بدین ترتیب اثبات گزاره ۳-۲۲ تکمیل می‌شود.

### فهوم‌المطلوب

یکی از نتایج اثبات گزاره ۳-۲۲، نشان دادن این نکته است که هر دو خط هذلولوی فراموازی دارای یک عمود مشترک یکتا می‌باشند.

### گزاره ۳-۲۳.

فرض کنیم  $l$  و  $l_1$  دو خط هذلولوی فراموازی باشند. در این صورت یک خط منحصر به فرد  $l$  وجود دارد به طوریکه بر هر دوی  $l$  و  $l_1$  عمود است. در ادامه از نمادها و نرمال‌سازی‌های گزاره ۳-۲۲ استفاده می‌کنیم. با توجه به نحوه ساختن  $C_r$ ، می‌دانیم که به ازای هر مقدار  $r$ ،  $C_r$  بر  $l$  عمود است.

برای تعیین مقادیری از  $r$  که  $c_r$  بر  $l_1$  عمود باشد، قضیه فیثاغورث را در مورد مثلث اقلیدسی با رئوس  $0$ ،  $\frac{1}{\sqrt{r}}(x+1)$  و  $re^{i\theta}$  به کار می‌بریم. زاویه بین  $c_r$  و  $l_1$  برابر با  $\frac{\pi}{2}$  است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{r}}(x+1)\right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{r}}(x-1)\right]^2 + r^2$$

و فقط زمانی برقرار است که  $r = \sqrt{x}$ . این مطلب، اثبات گزاره ۳-۲۳ را تکمیل می‌کند.

### فهوم‌المطلوب

#### تمرین ۳-۲۰.

فرض کنید  $I$  قسمت مثبت محور موهومی در  $\mathbb{H}$  باشد. به ازای هر عدد حقیقی مثبت  $\varepsilon > 0$ ، فرض کنید  $W_\varepsilon$  مجموعه تمام نقاطی از  $\mathbb{H}$  باشد که فاصله هذلولوی آنها از  $I$  برابر با  $\varepsilon$  باشد. ثابت کنید  $W_\varepsilon$  اجتماع دو شعاع اقلیدسی با راس  $0$  می‌باشد که با  $I$  زاویه  $\theta$  می‌سازند. ارتباط  $\theta$  و  $\varepsilon$  را بیابید.

#### تمرین ۳-۲۱.

ثابت کنید اگر دو خط هذلولوی  $l$  و  $l_1$  یک نقطه انتهای در بی‌نهایت مشترک داشته باشند، آنگاه خط هذلولوی وجود ندارد که بر هر دوی  $l$  و  $l_1$  عمود باشد.

#### تمرین ۳-۲۲.

فرض کنید  $l$  و  $l_1$  دو خط هذلولوی موازی در  $\mathbb{H}$  باشند. نقاط انتهایی در بی‌نهایت  $l$  را با  $z_1$  و  $z_2$  و نقاط انتهایی در بی‌نهایت  $l_1$  را با  $w_1$  و  $w_2$  نمایش دهید؛ به طوریکه ترتیب  $w_1, z_1, w_2, z_2$  در  $\overline{\mathbb{R}}$  پادساعت‌گرد باشد. ثابت کنید:

$$\tanh^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{r}} d_{\mathbb{H}}(l, l_1) \right] = \frac{1}{1 - [z_2, w_2; w_1, z_1]}$$

اگرچه با جزئیات این مبحث را روشن نخواهیم کرد، به کمک این مفهوم فاصله بین مجموعه‌ها می‌توان یک توصیف ذاتی از مرز در بی‌نهایت  $\mathbb{H}$  ارائه داد به طوریکه فقط به ذات خود  $\mathbb{H}$  وابسته بوده و از نحوه نشانده شدن  $\mathbb{H}$  در  $\overline{\mathbb{C}}$  مستقل است.

فرض کنیم  $\mathcal{R}$  مجموعه تمام شعاع‌های هذلولوی در  $\mathbb{H}$  باشد. به ازای هر شعاع  $R$  در  $\mathcal{R}$  قرار می‌دهیم  $sub(R)$  مجموعه تمام زیرشعاع‌های  $R$ ، یعنی شعاع‌های هذلولوی

مشمول در  $R$ ، باشد. به ازای دو شعاع  $R_1$  و  $R_2$  در  $\mathfrak{R}$  می‌گوییم  $R_1 \sim R_2$  اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\sup\{d_H(R'_1, R'_2) \mid R'_1 \in \text{sub}(R_1), R'_2 \in \text{sub}(R_2)\} = 0.$$

توجه داشته باشید که اگر دو شعاع هذلولوی متمایز  $R_1$  و  $R_2$  دارای نقطه آغازین یکسانی در  $\mathbb{H}$  باشند، آنگاه این سوپریم نامتناهی است و در نتیجه  $R_1 \not\sim R_2$ . در واقع به ازای هر دو شعاع هذلولوی، این سوپریم یا صفر است و یا نامتناهی است. این سوپریم برابر صفر است اگر و فقط اگر دو شعاع دارای نقطه انتهایی در بی‌نهایت یکسانی باشند.

بدین ترتیب یک راه برای یکی گرفتن مرز در بی‌نهایت  $\mathbb{H}$  یعنی  $\overline{IR}$  با مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی رابطه  $\sim$  روی  $\mathfrak{R}$  به وجود می‌آید. بعلاوه از آنجاییکه  $Möb(\mathbb{H})$  شعاع‌های هذلولوی را به شعاع‌های هذلولوی تصویر می‌کند و همچنین فاصله هذلولوی را حفظ می‌کند، مشاهده می‌کنیم که  $Möb(\mathbb{H})$  این کلاس‌های هم‌ارزی را حفظ می‌کند و لذا یک عمل  $Möb(\mathbb{H})$  روی  $\mathfrak{R}/\sim$  به دست می‌آید.

لذا، نقطه  $x$  را در  $\mathbb{H}$  ثابت در نظر می‌گیریم و گردایه تمام شعاع‌های هذلولوی با نقطه شروع  $x$  را در نظر می‌گیریم. چون هیچ دو تا از این شعاع‌های هذلولوی با هم معادل نیستند (همانطوریکه در بالا اشاره شد) و چون هر نقطه در مرز بی‌نهایت  $\overline{IR}$  از  $\mathbb{H}$  یک نقطه در بی‌نهایت یک شعاع با نقطه شروع  $x$  است، بنابراین می‌توانیم  $\overline{IR}$  را با گردایه تمام شعاع‌های هذلولوی با نقطه شروع  $x$  یکی بگیریم. گردایه تمام شعاع‌های هذلولوی با نقطه شروع  $x$  را می‌توان با دایره واحد  $S^1$  به طریق زیر پارامتری نمود: شعاع هذلولوی  $r$  با نقطه شروع  $x$  را ثابت در نظر می‌گیریم. به ازای هر شعاع هذلولوی دیگر  $r'$  با نقطه شروع  $x$ ، فرض کنیم  $\theta_r$  زاویه بین  $r$  و  $r'$  است که در جهت پادساعت‌گرد اندازه‌گیری می‌شود، سپس شعاع هذلولوی  $r$  را با نقطه  $e^{i\theta_r}$  روی  $S^1$  یکی می‌گیریم. توجه داریم که اگر از شعاع هذلولوی دیگری مانند  $r'$  به عنوان پایه استفاده کنیم، آنگاه اختلاف پارامتری‌سازی نسبت به این دو شعاع هذلولوی پایه‌ای عبارت است از یک دوران  $S^1$  به اندازه زاویه بین  $r$  و  $r'$ .

این ساختار، روشی برای تعیین اندازه یک مجموعه  $X$  در  $\overline{IR} \cup \mathbb{H}$  و قتیکه از  $x$  به آن نگاه شود، در اختیار ما قرار می‌دهد. بدین ترتیب که قسمتی از شعاع‌های هذلولوی با نقطه شروع  $x$  را در نظر بگیریم که از  $X$  می‌گذرند یا نقاط انتهایی در بی‌نهایت آنها در  $X$  واقع

است. به این اندازه با اصطلاح *اندازه بصری*<sup>۱</sup>  $X$  از نقطه  $x$  اشاره می‌کنیم. معمولا اندازه بصری یک مجموعه  $X$  از نقاط مختلف مقادیری متفاوت است.

بعنوان مثال، بازه  $X = [0, 1]$  در  $\overline{IR}$  را در نظر می‌گیریم. اندازه بصری  $X$  و قتیکه از نقطه

$x = i$  ملاحظه شود برابر با  $\frac{1}{4}$  است: شعاع‌های هذلولوی از  $i$  به مبدا و به  $1$  بطور عمود از  $i$  می‌گذرند و شعاع‌های هذلولوی با نقطه شروع  $i$  که یک نقطه انتهایی در بی‌نهایت آنها در  $X$  واقع است مابین این دو شعاع هذلولوی قرار دارند. از طرف دیگر، اندازه بصری  $X$  و قتیکه از نقطه  $x = 1+i$  ملاحظه شود برابر با  $0.311$  است.

این امر را به ترتیب زیر می‌توانیم ببینیم. معادله دایره اقلیدسی  $A$  گذرنده از  $1$  و  $1+i$  که عمود بر محور حقیقی  $IR$  باشد عبارت است از:

$$\left(x + \frac{99}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{101}{2}\right)^2$$

با توجه به نحوه ساختن، نقطه اشتراک  $A$  با قسمت مثبت محور موهومی  $I$  در  $IH$  همان

$1+i$  است. شیب خط مماس بر  $A$  در نقطه اشتراک  $1+i$  برابر  $-\frac{99}{2}$  است (که با مشتق‌گیری ضمنی از معادله  $A$  به دست می‌آید)، و لذا زاویه بین  $A$  و  $I$  (همانطوریکه در بخش ۲-۷ بحث شد) برابر است با:

$$\arctan\left(-\frac{99}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -2.9422 = 0.1993 \pmod{\pi}$$

بنابراین اندازه بصری بازه  $[0, 1]$  از نقطه  $1+i$  برابر است با  $0.311 = \frac{0.1993}{2\pi}$ . همانطوریکه

از شکل انتظار داریم اندازه بصری بصری بازه  $[0, 1]$  از نقطه  $1+i$  کوچک است.

برای نقطه دلخواه  $\lambda i$ ، معادله دایره اقلیدسی  $A_\lambda$  گذرنده از  $1$  و  $\lambda i$  که عمود بر محور

حقیقی  $IR$  باشد عبارت است از:

$$\left(x + \left(\frac{1-\lambda^2}{2}\right)\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^2$$

شیب خط مماس بر  $A_\lambda$  در نقطه  $\lambda i$  برابر  $\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$  است، و در نتیجه زاویه بین  $A$  و  $I$

برابر است با:

<sup>1</sup> Visual measure

$$\arctan\left(\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\right) - \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

(زمانیکه  $\lambda = 1$ ، این نتیجه با محاسبات قبلی ما تطابق دارد).

### تمرین ۳-۲۳.

فرض کنید  $\ell$  یک خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  باشد، و  $p$  یک نقطه در  $\mathbb{H}$  باشد که روی  $\ell$  واقع نیست. سهم<sup>۱</sup> شعاع هذلولوی با نقطه آغازین  $p$  و متقاطع با  $\ell$  را بیابید؛ یعنی اندازه بصری  $\ell$  را از نقطه  $p$  را بیابید.

<sup>1</sup>Proportion

## مدل‌های دیگر صفحه هذلولوی

تا کنون، منحصراً روی مدل نیم‌صفحه بالایی صفحه هذلولوی، یعنی  $I\mathbb{H}$  متمرکز بوده‌ایم، اما مدل‌های مفید بسیاری وجود دارند. در این فصل با استفاده از مدل نیم‌صفحه بالایی، مدل خاص دوم صفحه هذلولوی، موسوم به *مدل قرص پوانکاره*<sup>۱</sup> که با  $ID$  نمایش می‌دهیم را تشریح می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که روش به کار گرفته شده در ساختن مدل قرص پوانکاره، تنها یک نمونه از یک روش ساختن عمومی مدل‌های مسطح صفحه هذلولوی است.

### ۴-۱. مدل قرص پوانکاره

تا کنون، مطالعه خود را روی گسترش و بررسی خواص مدل نیم‌صفحه بالایی صفحه هذلولوی، یعنی  $I\mathbb{H}$  منحصر کرده‌ایم. مدل‌های دیگری برای صفحه هذلولوی وجود دارند. یکی دیگر از مدل‌های بسیار مفید در میان این مدل‌ها، حداقل با توجه به هدف ما در این کتاب، *مدل قرص پوانکاره*  $ID$  است.

چندین روش برای گسترش این مدل و دیگر مدل‌های صفحه هذلولوی وجود دارند. یک روش نا کارآمد، عبارت است از بازآفرینی تمام مراحل به کار گرفته شده در گسترش مدل نیم‌صفحه بالایی. راه دیگر این است که از آنچه تا کنون برای گسترش مدل نیم‌صفحه

<sup>1</sup> Poincare disc model



بالایی انجام داده‌ایم، استفاده کنیم و راهی برای انتقال این اطلاعات به مدل‌های دیگر صفحه هذلولوی به دست آوریم. در اینجا رویکرد دوم را اتخاذ می‌کنیم.

فضای زمینه به کار گرفته شده در مدل قرص پوانکاره، قرص باز

$$ID = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

در صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  است. از آنجاییکه  $ID$  و  $IH$  هر دو در کره ریمان، یعنی  $\bar{\mathbb{C}}$  قرص می‌باشند، با توجه به قضیه ۲-۱۱ می‌دانیم که یک عضو  $Möb$  مانند  $m$  وجود دارد به طوری که  $ID$  را به  $IH$  می‌برد. در واقع، در تمرین ۲-۱۰ ضابطه صریح عضوی از  $Möb$  که  $ID$  را به  $IH$  می‌برد را پیدا کرده‌اید. حال با استفاده از  $m$  هندسه هذلولوی را از  $IH$  به  $ID$  منتقل می‌کنیم.

برای شروع، یک خط هذلولوی در  $ID$  را به صورت تصویر یک خط هذلولوی در  $IH$  تحت تابع  $m^{-1}$  تعریف می‌کنیم. می‌دانیم که هر خط هذلولوی در  $IH$  مشمول در یک دایره در  $\bar{\mathbb{C}}$  است که بر  $\bar{R}$  عمود است، همچنین هر عضو  $Möb$  دایره‌های در  $\bar{\mathbb{C}}$  را به دایره‌های در  $\bar{\mathbb{C}}$  می‌برد، همچنین هر عضو  $Möb$  زاویه بین دایره‌های در  $\bar{\mathbb{C}}$  را حفظ می‌کند. بنابراین هر خط هذلولوی در  $ID$  عبارت است از اشتراک یک دایره در  $\bar{\mathbb{C}}$  که بر مرز  $ID$  یعنی دایره  $S^1$  عمود می‌باشد، و هر چنین اشتراکی یک خط هذلولوی در  $ID$  است. توجه کنید که این تعریف از خط هذلولوی در  $ID$  مستقل از انتخاب عضو  $Möb$  است که  $ID$  را به  $IH$  می‌برد. (این بحث را به عهده خواننده مشتاق وا می‌گذاریم.)

این امر را می‌توانیم بطور عملی مشاهده کنیم. عضو زیر را از  $Möb$  در نظر می‌گیریم که  $ID$  را به  $IH$  می‌برد:

$$\xi(z) = \frac{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{i}{\sqrt{2}}}$$

یک خط هذلولوی در  $ID$ ، تعریف شده توسط تصویر یک خط هذلولوی در  $IH$  تحت  $\xi^{-1}$  دارای یکی از دو معادله ممکن است. اگر خط هذلولوی  $\ell$  در  $IH$  دارای معادله  $\ell = \{z \in IH \mid \operatorname{Re}(z) = c\}$  به ازای  $c \in \mathbb{R}$  باشد، آنگاه معادله  $\xi^{-1}(\ell)$  عبارت است از  $\ell_c = \{z \in ID \mid \operatorname{Re}(\xi(z)) = c\}$  که می‌توانیم آن را محاسبه کنیم، یعنی،

$$\operatorname{Re}(\xi(z)) = \frac{-\operatorname{Re}(z)}{\frac{1}{2}z\bar{z} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}(\bar{z} - z)}$$

به ازای  $c = 0$ ، خط هذلولوی  $\ell_c$  در  $\mathbb{D}$  عبارت است از

$$\ell_c = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$$

به ازای  $c \neq 0$ ، خط هذلولوی  $\ell_c$  در  $\mathbb{D}$  عبارت است از

$$\ell_c = \left\{z \in \mathbb{D} \mid \left|z - \left(-\frac{1}{c} - i\right)\right| = \frac{1}{c}\right\}$$

با استفاده از تمرین ۱-۲، به سادگی ملاحظه می‌گردد که دایره اقلیدسی شامل  $\ell_c$  دایره واحد  $\mathbb{D}^1$  را بطور عمود قطع می‌کند.

اگر خط هذلولوی  $\ell$  در  $\mathbb{H}$  دارای معادله  $\ell = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - c|^2 = r^2\}$  به ازای

$c \in \mathbb{R}$  و  $r > 0$  باشد، آنگاه معادله  $\xi^{-1}(\ell)$  عبارت است از  $\ell_{c,r} = \{z \in \mathbb{D} \mid |\xi(z) - c|^2 = r^2\}$  که می‌توانیم آن را محاسبه کنیم، با ساده سازی، می‌بینیم که معادله  $|\xi(z) - c|^2 = r^2$  تبدیل می‌شود به معادله زیر:

$$\left|z - \left(\frac{-rc + i(1+r^2 - c^2)}{1+c^2 - r^2}\right)\right|^2 = \frac{4r^2}{(1+c^2 - r^2)}$$

مجدداً با استفاده از تمرین ۱-۲، بررسی اینکه دایره اقلیدسی به معادله  $|\xi(z) - c|^2 = r^2$

دایره واحد  $\mathbb{D}^1$  را بطور عمود قطع می‌کند، مشکل نیست، اگرچه طولانی است. اگر محاسبات بالا را با یک انتخاب دیگر برای  $\xi(z)$  تکرار کنیم، ظاهراً معادلات دیگری به دست می‌آوریم، اما با تغییر پارامترهای  $c$  و  $r$  در دامنه تغییراتشان دو مجموعه معادلات در واقع یک مجموعه از خطوط هذلولوی را معین می‌کنند.

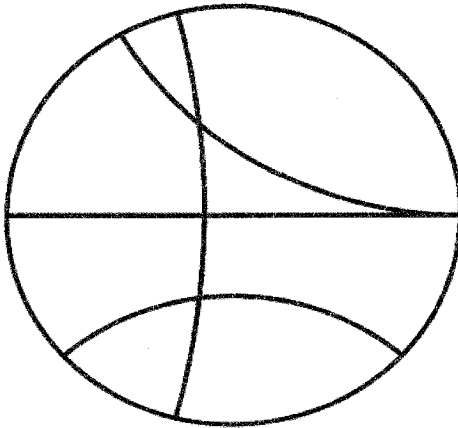
نمودار برخی از خطوط هذلولوی در  $\mathbb{D}$  در شکل ۴-۱ ارائه شده است. توجه داشته

باشید که این دیاگرام از صفحه هذلولوی به طور مبهمی در برخی از نقاشی‌های م.سی. اش<sup>۱</sup> دیده می‌شود. خوانندگان علاقه‌مند را برای اطلاعات بیشتر در مورد کارهای اش<sup>۱</sup> به مطالعه کتاب‌های شاتشنايدر<sup>۲</sup> [30] و لوخر<sup>۳</sup> [25] توصیه می‌کنیم.

<sup>1</sup>M.C. Escher

<sup>2</sup>Schattschneider

<sup>3</sup>Locher



شکل ۴- ابرخی از خطوط هذلولوی در  $ID$

فرض کنیم  $m$  عضو  $Möb$  باشد  $ID$  را به  $IH$  می‌برد، هر عضو  $Möb(ID)$  مانند  $q$  به فرم  $q = m^{-1} \circ p \circ m$  است که در آن  $p$  عضوی از  $Möb(IH)$  می‌باشد. به ویژه، عمل  $Möb(ID)$  روی  $ID$  تمام ویژگی‌های متعددی بودن که عمل  $Möb(IH)$  روی  $IH$  دارد را به ارث می‌برد.

در واقع، در تمرین ۲-۳۹ دیدیم که به طور صریح هر عضو  $Möb(ID)$  به ازای  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  با شرط  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$  یا به فرم

$$p(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta \bar{z} + \bar{\alpha}}$$

و یا به فرم

$$p(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$$

است. تبدیلات موبیوسی که  $ID$  را به  $ID$  می‌برند، عبارتند از اعضای

$$Möb^+(ID) = Möb^+ \cap Möb(ID)$$

که اعضای  $Möb(ID)$  و به فرم زیر می‌باشند:

$$p(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta \bar{z} + \bar{\alpha}}$$

برای انتقال عنصر طول قوس هذلولوی روی  $\mathbb{H}$  به  $\mathbb{D}$  نیاز به یک عضو صریح  $\xi$  از  $Möb$  داریم که  $\mathbb{D}$  را به  $\mathbb{H}$  ببرد. عضوی که در اینجا استفاده می‌کنیم عبارت است از:

$$\xi(z) = \frac{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{i}{\sqrt{2}}}$$

عنصر طول قوس هذلولوی روی  $\mathbb{H}$  را با مشاهده نکته بعدی به  $\mathbb{D}$  منتقل خواهیم کرد. به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C' \rightarrow \mathbb{D}$  از  $f: [a, b] \rightarrow C'$  ترکیب کرد. به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $n \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C'$  در  $\mathbb{H}$  است. می‌دانیم که چگونه طول هذلولوی  $f \circ \xi$  را محاسبه کنیم، یعنی با انتگرال‌گیری از عنصر طول قوس  $\frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$  روی  $\mathbb{H}$  در امتداد  $f \circ \xi$ . بنابراین طول هذلولوی  $f$  را در  $\mathbb{D}$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l_{\mathbb{D}}(f) = l_{\mathbb{H}}(\xi \circ f).$$

#### قضیه ۴-۱.

طول هذلولوی یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C' \rightarrow \mathbb{D}$  از  $f: [a, b] \rightarrow C'$  با انتگرال زیر داده می‌شود:

$$l_{\mathbb{D}}(f) = \int_a^b \frac{1}{1-|z|^2} dz.$$

اثبات. اثبات قضیه ۴-۱ از چندین مرحله تشکیل می‌شود. با به دست آوردن شکل عنصر طول قوس هذلولوی روی  $\mathbb{D}$  کار را شروع می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم این عنصر طول قوس هذلولوی مستقل از انتخاب عضوی از  $Möb$  است که  $\mathbb{D}$  را به  $\mathbb{H}$  می‌برد. می‌دانیم که طول هذلولوی یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C' \rightarrow \mathbb{D}$  از  $f: [a, b] \rightarrow C'$  با ضابطه زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{D}}(f) &= l_{\mathbb{H}}(\xi \circ f) = \int_{n \circ f} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| \\ &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}((\xi \circ f)(t))} |(\xi \circ f)'(t)| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \frac{1}{\operatorname{Im}((\xi \circ f)(t))} |\xi'(f(t))| |f'(t)| dt \\
 &= \int_f \frac{1}{\operatorname{Im}(\xi(z))} |\xi'(z)| |dz|
 \end{aligned}$$

با محاسبه، خواهیم دید که:

$$\operatorname{Im}(\xi(z)) = \operatorname{Im} \left( \frac{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{i}{\sqrt{2}}} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|-z - i|^2}$$

و

$$|\xi'(z)| = \frac{2}{|z + i|^2}$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{\operatorname{Im}(\xi(z))} |\xi'(z)| = \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

حال باید نشان دهیم که این عنصر طول قوس هذلولوی  $|dz|$  روی  $ID$ ،

مستقل از انتخاب  $\xi$  است. بنابراین فرض می‌کنیم  $f: [a, b] \rightarrow ID$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  و  $p$  یک عضو دلخواه  $Möb$  است که  $ID$  را به  $I\mathbb{H}$  می‌برد. از آنجاییکه  $\xi^{-1} \circ p$  فضای  $I\mathbb{H}$  را به  $I\mathbb{H}$  می‌برد، اگر قرار دهیم  $q = p \circ \xi^{-1}$ ، در نتیجه  $q$  عضوی از  $Möb(I\mathbb{H})$  خواهد بود.

چون  $f \circ \xi$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  روی  $I\mathbb{H}$  است، ناوردا بودن عنصر طول

قوس هذلولوی  $|dz|$  تحت عمل  $Möb(I\mathbb{H})$  روی  $I\mathbb{H}$  بی‌درنگ نتیجه می‌دهد که:

$$l_{I\mathbb{H}}(\xi \circ f) = l_{I\mathbb{H}}(q \circ \xi \circ f) = l_{I\mathbb{H}}(p \circ f).$$

تساوی آخر از این نتیجه می‌شود که  $q \circ \xi = p \circ \xi^{-1} \circ \xi = p$ . بنابراین  $l_{ID}(f)$

خوش‌تعریف است و اثبات کامل می‌گردد.

### فهوم‌المطلوب

به عنوان یک مثال محاسباتی، فرض کنید  $0 < r < 1$  و مسیر به طور

قطعه‌ای  $C^1$   $f: [-r, r] \rightarrow ID$  را با ضابطه  $f(t) = t$  در نظر بگیرید. در این صورت:

$$\begin{aligned}
 l_D(f) &= \int_f \frac{r}{1-|z|^2} |dz| \\
 &= \int_0^r \frac{r}{1-t^2} dt \\
 &= \int_0^r \left[ \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right] dt \\
 &= \ln \left[ \frac{1+r}{1-r} \right].
 \end{aligned}$$

## تمرین ۴-۱.

فرض کنید  $m$  یک عضو  $Möb$  است که  $ID$  را به  $I\mathbb{H}$  می‌برد و فرض کنید

$$l_D(m \circ f) = l_{I\mathbb{H}}(f) \text{ نشان دهید. } C^1 \text{ باشد.}$$

حال طول هذلولوی مسیره‌های در  $ID$  را برای تعریف نمودن فاصله هذلولوی در  $ID$  به کار می‌بریم. به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $ID$  فرض می‌کنیم  $\Theta[x, y]$  مجموعه تمام مسیره‌های به طور قطعه‌ای  $C^1$   $f: [a, b] \rightarrow ID$  با شرط  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$  باشد و تعریف می‌کنیم:

$$d_D(x, y) = \inf \{ l_D(f) \mid f \in \Theta[x, y] \}.$$

## گزاره ۴-۲.

$(D, d_D)$  یک فضای متریک است. بعلاوه یک مسیر بین دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $ID$

که فاصله بین آنها را محقق می‌سازد، عبارت است از یک پارامتری‌سازی پاره‌خط هذلولوی واصل  $x$  به  $y$ .

اثبات. فرض می‌کنیم  $m$  یک عضو  $Möb$  است که  $ID$  را به  $I\mathbb{H}$  می‌برد. قدم اول اثبات

گزاره ۴-۲ عبارت است از نشان دادن اینکه  $m$  فاصله را حفظ می‌کند.

مانند بخش ۳-۴، فرض می‌کنیم  $\Gamma[z, w]$  مجموعه تمام مسیره‌های به طور

قطعه‌ای  $C^1$   $f: [a, b] \rightarrow I\mathbb{H}$  با شرط  $f(a) = z$  و  $f(b) = w$  باشد. برای هر زوج نقاط  $z$  و  $w$  در  $I\mathbb{H}$  داریم:

$$\begin{aligned}
 d_H(z, w) &= \inf \{ l_H(f) \mid f \in \Gamma[z, w] \} \\
 &= \inf \{ l_D(m \circ f) \mid f \in \Gamma[z, w] \}
 \end{aligned}$$

$$\leq \inf\{l_D(g) \mid g \in \Theta[m(z), m(w)]\} \\ \leq d_D(m(z), m(w)).$$

به طور مشابه، اگر  $x$  و  $y$  دو نقطه در  $ID$  باشند، می‌نویسیم  $x = m(z)$  و  $y = m(w)$  که در آن  $z$  و  $w$  در  $IH$  می‌باشند. با محاسبه، می‌بینیم که:

$$d_D(m(z), m(w)) = d_D(x, y) = \inf\{l_D(f) \mid f \in \Theta[x, y]\} \\ = \inf\{l_H(m^{-1} \circ f) \mid f \in \Theta[x, y]\} \\ \leq \inf\{l_H(g) \mid g \in \Gamma[z, w]\} \\ \leq d_H(z, w).$$

چون به ازای هر  $z, w \in IH$  داریم  $d_H(z, w) = d_D(m(z), m(w))$  و  $d_H$  یک متر روی  $IH$  است و لذا  $d_D$  یک متر روی  $ID$  می‌باشد. بعلاوه این بحث نشان می‌دهد که  $m$  یک همسانی حافظ فاصله بین  $(IH, d_H)$  و  $(ID, d_D)$  می‌باشد برای تکمیل شدن اثبات گزاره ۴-۲، فرض می‌کنیم  $x$  و  $y$  دو نقطه در  $ID$ ؛  $z = m^{-1}(x)$  و  $w = m^{-1}(y)$ ؛  $f: [a, b] \rightarrow IH$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  با شرط  $f(a) = z$  و  $f(b) = w$  باشند به طوری که  $l_H(f) = d_H(z, w)$ . توجه داریم که بنا به قضیه ۳-۱۶،  $f$  یک پارامتری‌سازی تقریباً ساده از پاره‌خط هذلولوی  $w$  و  $z$  اصل  $w$  است.

چون  $m$  یک همسانی حافظ فاصله بین  $IH$  و  $ID$  می‌باشد، بنابراین ضرورتاً یک مسیر در  $\Theta[x, y]$ ، یعنی  $m \circ f$  وجود دارد که فاصله هذلولوی  $d_D(x, y)$  را محقق می‌سازد. بعلاوه چون  $f$  یک پارامتری‌سازی تقریباً ساده پاره‌خط هذلولوی در  $IH$  است که نقاط  $z$  و  $w$  را به هم وصل می‌کند، و چون  $m$  خطوط هذلولوی در  $IH$  را به خطوط هذلولوی در  $ID$  تصویر می‌کند، بنابراین  $m \circ f$  یک پارامتری‌سازی تقریباً ساده پاره‌خط هذلولوی  $w$  و  $z$  اصل  $x$  در  $ID$  می‌باشد.

برعکس، اگر  $g: [c, d] \rightarrow ID$  مسیری باشد که فاصله بین  $x$  و  $y$  را محقق سازد، آنگاه  $m^{-1} \circ g: [c, d] \rightarrow IH$  مسیری است که فاصله بین  $z$  و  $w$  را محقق می‌سازد، و در نتیجه یک یک پارامتری‌سازی تقریباً ساده پاره‌خط هذلولوی  $w$  و  $z$  اصل  $w$  است. بنابراین،  $g = m \circ (m^{-1} \circ g)$  یک پارامتری‌سازی تقریباً ساده پاره‌خط هذلولوی  $w$  و  $z$  اصل  $x$

به  $\mathcal{H}$  است. یعنی در  $\mathcal{D}$  نیز مانند  $\mathcal{H}$  مسیرهایی که فاصله هذلولوی بین نقاط را محقق می‌سازند، عبارتند از پارامتری‌سازی‌های تقریباً ساده پاره‌خط‌های هذلولوی واصل بین آن نقاط.

این حقیقت که  $Möb(\mathcal{D})$  دقیقاً گروه ایزومتري‌های  $(\mathcal{D}, d_{\mathcal{D}})$  است، از این حقیقت نتیجه می‌شود که بنا به قضیه ۳-۱۹،  $Möb(\mathcal{H})$  دقیقاً گروه ایزومتري‌های  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  است و اینکه عضو  $m$  از  $Möb$  که  $\mathcal{H}$  را به  $\mathcal{D}$  می‌برد، یک همسانی حافظ فاصله و در نتیجه یک ایزومتري است.

به بیان دقیق‌تر، اگر  $g$  یک ایزومتري  $(\mathcal{D}, d_{\mathcal{D}})$  است، آنگاه  $m^{-1} \circ g \circ m$  یک ایزومتري  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  است. بنا به قضیه ۳-۱۹،  $m^{-1} \circ g \circ m$  عضو  $Möb(\mathcal{H})$  است و در نتیجه  $g$  عضو  $Möb(\mathcal{D})$  است. برعکس، اگر  $g$  عضو  $Möb(\mathcal{D})$  باشد، آنگاه  $m^{-1} \circ g \circ m$  عضو  $Möb(\mathcal{H})$  خواهد بود، و در نتیجه یک ایزومتري  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  است. چون  $m$  و  $m^{-1}$  هر دو حافظ فاصله هستند، لذا  $g$  یک ایزومتري  $(\mathcal{D}, d_{\mathcal{D}})$  است. بدین ترتیب اثبات گزاره ۴-۲ تکمیل می‌شود.

### فهوم‌المطلوب

#### تمرین ۴-۲.

به ازای  $0 < r < 1$  نشان دهید:

$$d_{\mathcal{D}}(\cdot, r) = \ln \left[ \frac{1+r}{1-r} \right],$$

و در نتیجه داریم:

$$r = \tanh \left[ \frac{1}{2} d_{\mathcal{D}}(\cdot, r) \right].$$

خاطر نشان می‌کنیم که به طور مشابه با نیم‌صفحه بالایی  $\mathcal{H}$ ، مرز در بی‌نهایت قرص پوانکاره عبارت است از دایره  $S^1$  در  $\mathcal{C}$  که دایره‌ای در  $\bar{\mathcal{C}}$  است که  $\mathcal{D}$  را معین می‌کند. مانند مرز در بی‌نهایت  $\mathcal{H}$  یعنی  $\bar{\mathcal{R}}$ ؛ فاصله هذلولوی یک نقطه  $S^1$  و یک نقطه  $\mathcal{D}$  نامتناهی است.

یکی از مشکلات مدل نیم‌صفحه بالایی صفحه هذلولوی  $\mathcal{H}$ ، این است که رابطه‌ای ساده بین فاصله اقلیدسی  $|z-w|$  و فاصله هذلولوی  $d_{\mathcal{H}}(z, w)$  قابل بیان نیست. یکی از



مظاهر مفید مدل قرص پوانکاره  $ID$ ، این است که رابطه ساده‌ای بین فاصله اقلیدسی و فاصله هذلولوی بین زوج نقاط  $ID$  وجود دارد.

این رابطه را با در نظر گرفتن توابعی روی  $ID$  که تحت  $Möb^+(ID)$  ناوردا هستند، به دست می‌آوریم. این بحث خیلی شبیه به بحث بخش ۲-۳ است. یک تابع از  $ID \times ID$  به  $IR$  را تحت عمل  $Möb^+(ID)$  ناوردا می‌نامیم، هرگاه به ازای هر نقطه  $(x, y)$  در  $ID \times ID$  و هر عضو  $p$  در  $Möb^+(ID)$  داشته باشیم  $g(x, y) = g(p(x), p(y))$ .

فعلاً یک نمونه از چنین توابعی را می‌شناسیم، یعنی فاصله هذلولوی  $d_H$ . در واقع  $d_H$  تحت عمل گروه بزرگتر  $Möb(ID)$  نیز ناوردا است. به راحتی می‌توان دید به ازای هر تابع  $IR \rightarrow [0, \infty)$ ،  $h$ ، ترکیب  $\varphi = h \circ d_D$  نیز تحت عمل  $Möb(ID)$  ناوردا است. ببینیم یک مثال صریح می‌توانیم بیابیم.

برای شروع، از ناوردایی طول هذلولوی مسیرهای در  $ID$  تحت عمل  $Möb^+(ID)$

داریم:

$$\begin{aligned} \int_f \frac{2}{1-|z|^2} |dz| &= \int_a^b \frac{2}{1-|f(t)|^2} |f'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{2}{1-|(p \circ f)(t)|^2} |(p \circ f)'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{2}{1-|p(f(t))|^2} |p'(f(t))| |f'(t)| dt \\ &= \int_f \frac{2}{1-|p(z)|^2} |p'(z)| |dz| \\ &= \int_{p \circ f} \frac{2}{1-|z|^2} |dz| \end{aligned}$$

که در آن  $f: [a, b] \rightarrow ID$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  و  $p$  یک عضو دلخواه  $Möb^+(ID)$  می‌باشند. (چون خود را به عضو  $p(z)$  از  $Möb^+(ID)$  محدود کرده-ایم، لذا نیاز داریم که مشتق آن  $p'(z)$  را محاسبه کنیم.)

چون این تساوی برای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$   $f: [a, b] \rightarrow ID$  برقرار است، می‌توانیم لم ۳-۱۰ را استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که برای هر عضو  $p$  در  $Möb^+(ID)$  داریم:

$$\frac{2}{1-|z|^2} = \frac{2|p'(z)|}{1-|p(z)|^2}$$

حال نتیجه می گیریم که برای هر عضو  $p$  در  $Möb^+(ID)$  و هر زوج  $x$  و  $y$  از نقاط  $ID$  داریم:

$$(p(x) - p(y))^r = p'(x)p'(y)(x - y)^r$$

یعنی، می نویسیم:

$$p(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$$

که در آن  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  و  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ . در این صورت داریم:

$$p(z) - p(w) = \frac{z - w}{(\beta z + \bar{\alpha})(\beta w + \bar{\alpha})}$$

و

$$p'(z) = \frac{1}{(\beta z + \bar{\alpha})^2}$$

با ترکیب این دو محاسبه، می توانیم ببینیم که:

$$\begin{aligned} \frac{|x - y|^r}{(1 - |x|^r)(1 - |y|^r)} &= |x - y|^r \left( \frac{|p'(x)|}{1 - |p(x)|^r} \right) \left( \frac{|p'(y)|}{1 - |p(y)|^r} \right) \\ &= \frac{|p(x) - p(y)|^r}{(1 - |p(x)|^r)(1 - |p(y)|^r)} \end{aligned}$$

در نتیجه، تابع  $\varphi: ID \times ID \longrightarrow IR$  با ضابطه زیر تحت عمل  $Mob^+(ID)$  ناوردا

است:

$$\varphi(x, y) = \frac{|x - y|^r}{(1 - |x|^r)(1 - |y|^r)}$$

توجه کنید که  $\varphi$  همچنین تحت عمل مزدوج گیری مختلط ناوردا است، زیرا

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|^r}{(1 - |\bar{x}|^r)(1 - |\bar{y}|^r)} = \frac{|x - y|^r}{(1 - |x|^r)(1 - |y|^r)} = \varphi(x, y)$$

کاربرد اصلی ناوردا بودن  $\varphi$  تحت عمل  $Möb^+(ID)$  این است که یک رابطه بین

فاصله اقلیدسی و هذلولوی بین نقاط  $ID$  ایجاد می کند.

## گزاره ۳-۴

به ازای هر زوج نقاط  $x$  و  $y$  در  $ID$  داریم:

$$\varphi(x, y) = \sinh^2 \left( \frac{1}{2} d_D(x, y) \right) = \frac{1}{4} (\cosh(d_D(x, y)) - 1).$$

**اثبات.** اثبات گزاره ۳-۴ با یک محاسبه مستقیم انجام می‌شود. فرض می‌کنیم  $x$  و  $y$  دو

نقطه در  $ID$  باشند. عضو  $p(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \alpha}$  از  $Möb^+(ID)$  (با شرط  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  و

$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ ) را چنان انتخاب می‌کنیم که  $p(x) = 0$  و  $p(y)$  حقیقی و مثبت باشد.

یک راه برای انجام این کار، عبارت است از قرار دادن  $\beta = -\alpha x$ . در نتیجه

$$p(z) = \frac{\alpha(z-x)}{\alpha(-\bar{x}z+1)}$$

که در آن  $|\alpha|^2(1-|x|^2) = 1$ . حال آرگومان  $\alpha$  را چنان انتخاب می‌کنیم که

$p(y) = r$  یک عدد حقیقی مثبت باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} &= \varphi(x, y) \\ &= \varphi(p(x), p(y)) \\ &= \varphi(\cdot, r) = \frac{r^2}{1-r^2} \end{aligned}$$

بنا به تمرین ۲-۴، چون داریم  $r = \tanh \left[ \frac{1}{2} d_D(\cdot, r) \right]$ ، بنابراین می‌بینیم که:

$$\varphi(x, y) = \frac{r^2}{1-r^2} = \sinh^2 \left( \frac{1}{2} d_D(x, y) \right) = \frac{1}{4} (\cosh(d_D(x, y)) - 1)$$

همانطوریکه می‌خواستیم. بدین ترتیب اثبات گزاره ۳-۴ تکمیل می‌شود.

## فهرالمطلوب

## تمرین ۳-۴

فرض کنید  $\ell_1$  و  $\ell_2$  دو خط هذلولوی متقاطع در  $ID$  باشند، و نقاط انتهایی در

بی‌نهایت  $\ell_1$  عبارت باشند از  $z_1$  و  $z_2$  و نقاط انتهایی در بی‌نهایت  $\ell_2$  عبارت باشند از  $w_1$

و  $w_p$  به طوریکه ترتیب نقاط  $z_1, w_1, z_p, w_p$  بر خلاف جهت ساعت گرد حول  $S^1$  باشد. ثابت کنید که زاویه  $\theta$  بین دو خط  $\ell_1$  و  $\ell_p$  در معادله زیر صدق می کند:

$$[z_1, w_1; z_p, w_p] \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -1$$

این بخش را با بحثی در مورد دایره های هذلولوی به اتمام می رسانیم.

#### تعریف ۴-۴.

یک دایره هذلولوی<sup>۱</sup> در  $ID$ ، یک زیرمجموعه  $ID$  به صورت زیر است:

$$C = \{y \in ID \mid d_{ID}(x, y) = s\},$$

که در آن  $x \in ID$  و  $s > 0$  ثابت می باشند.  $x$  را مرکز هذلولوی<sup>۲</sup>  $C$  و  $s$  را شعاع هذلولوی<sup>۳</sup>  $C$  می نامیم.

قادریم به طور کامل دایره های هذلولوی در  $ID$  را شناسایی کنیم.

#### گزاره ۴-۵.

یک دایره هذلولوی در  $ID$ ، یک دایره اقلیدسی در  $ID$  است و برعکس، اگرچه مراکز هذلولوی و اقلیدسی و همچنین شعاع های هذلولوی و اقلیدسی در حالت کلی متفاوت خواهند بود.

**اثبات.** با یک دسته خاصی از دایره های هذلولوی در  $ID$  کار را شروع می کنیم، یعنی

دایره هایی که مرکز آنها در  $0$  است. به ازای  $s > 0$  قرار می دهیم  $r = \tanh\left(\frac{1}{2}s\right)$ ، بنابراین داریم  $d_{ID}(0, r) = s$ . چون  $Möb(ID)$  شامل  $e(z) = e^{i\theta}z$  است، می بینیم که  $e$  یک طولپای  $(ID, d_{ID})$  است و هر نقطه  $re^{i\theta}$  در  $ID$  نیز در شرط  $d_{ID}(0, re^{i\theta}) = s$  صدق می کند. بنابراین، دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی مبدا و شعاع اقلیدسی  $r$  با دایره هذلولوی با مرکز هذلولوی  $0$  و شعاع هذلولوی  $s$  یکی می باشند که در آن  $s$  و  $r$  با فرمول  $r = \tanh\left(\frac{1}{2}s\right)$  به هم مرتبطند.

<sup>1</sup> Hyperbolic circle

<sup>2</sup> Hyperbolic centre

<sup>3</sup> Hyperbolic radius

فرض می‌کنیم  $C$  دایره هذلولوی در  $ID$  با مرکز هذلولوی  $c$  و شعاع هذلولوی  $s$  باشد. فرض می‌کنیم  $m$  عضوی از  $Möb(ID)$  باشد که  $c$  را به مبدا تصویر می‌کند. پس  $m(C)$  یک دایره هذلولوی در  $ID$  با مرکز هذلولوی مبدا و شعاع هذلولوی  $s$  است. به ویژه،  $m(C)$  نیز یک دایره اقلیدسی است. چون اعضای  $Möb(ID)$  دایره‌های در  $\bar{C}$  را به دایره‌هایی در  $\bar{C}$  تصویر می‌کنند، مشاهده می‌کنیم که  $C$  نیز یک دایره در  $\bar{C}$  است. از آنجاییکه هیچ یک از اعضای  $Möb(ID)$  نقطه‌ای از  $ID$  را به  $\infty$  نمی‌برند، می‌بینیم که  $C = m^{-1} \circ m(C)$  الزماً یک دایره اقلیدسی در  $ID$  است.

برعکس، فرض کنیم  $C$  یک دایره اقلیدسی در  $ID$  است. می‌توانیم فرض کنیم که مرکز اقلیدسی  $C$  مبدا نیست، زیرا در غیر این صورت، با توجه بحث پاراگراف اول،  $C$  یک دایره هذلولوی خواهد بود. فرض کنیم  $L$  خط اقلیدسی گذرنده از مبدا و مرکز اقلیدسی  $C$  باشد، و توجه داریم که  $L$  و  $C$  همدیگر را به صورت متعامد قطع می‌کنند. همچنین توجه داریم که  $L$  نیز یک خط هذلولوی در  $ID$  است. فرض کنیم  $c$  نقطه وسط هذلولوی دو نقطه روی  $L \cap C$  واقع بر  $L$  است. عضوی از  $Möb(ID)$  مانند  $m$  را چنان انتخاب کنیم که  $c$  را به مبدا و  $L$  را به  $IR$  ببرد؛ چون دو نقطه واقع در  $L \cap C$  از  $L$  به یک فاصله‌اند و روی  $L$  قرار دارند،  $m$  آن‌ها را به دو نقطه  $s$  و  $-s$  به ازای یک  $s \in IR$  می‌برد. در نتیجه  $m(C)$  یک دایره اقلیدسی در  $ID$  و عمود بر  $IR$  خواهد بود که از دو نقطه  $s$  و  $-s$  می‌گذرد. به ویژه،  $m(C)$  یک دایره اقلیدسی در  $ID$  با مرکز اقلیدسی مبدا تصویر می‌باشد و در نتیجه  $C$  نیز یک دایره هذلولوی در  $ID$  است.

بدین ترتیب اثبات گزاره ۴-۵ تمام است.

### فهوم‌المطلوب

#### تمرین ۴-۴.

به ازای  $s > 0$  داده شده، فرض کنید  $S_s$  دایره هذلولوی در  $ID$  با مرکز هذلولوی  $o$  و شعاع هذلولوی  $s$  باشد. نشان دهید طول هذلولوی  $S_s$  برابر است با:

$$l_D(S_s) = 2\pi \sinh(s).$$

در هندسه اقلیدسی  $\mathcal{C}$ ، ما می‌توانیم به مرکز هر نقطه‌ای و به هر شعاعی یک دایره رسم کنیم و بعلاوه هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره را معین می‌کنند. در هندسه هذلولوی، تمرین ۴-۴ و اثبات گزاره ۴-۵ نشان می‌دهد که ما می‌توانیم به هر مرکزی در  $ID$  و هر شعاعی یک دایره هذلولوی در  $ID$  بیابیم.

اگرچه، سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست لزوماً یک دایره را معین نمی کنند. بعنوان یک مثال عینی از این امر، سه نقطه  $z_1 = \frac{1}{2}$ ،  $z_2 = 0$  و  $z_3 = -\frac{1}{2} + i\epsilon \in \mathcal{D}$  را در نظر می - گیریم که در آن  $\epsilon$  به قدر کافی کوچک انتخاب شده است. می دانیم دایره هذلولوی گذرنده از  $z_1$ ،  $z_2$  و  $z_3$ ، در صورت وجود، یک دایره اقلیدسی نیز می باشد. اگرچه برای  $\epsilon$  به قدر کافی کوچک شعاع این دایره اقلیدسی بسیار بزرگ است و در نتیجه خودش در خارج قرص پوانکاره خواهد بود.

با استفاده از یک عضو  $p$  متعلق به  $Möb$  که  $\mathcal{D}$  را به  $I\mathcal{H}$  می برد، هندسه هذلولوی را از نیم صفحه بالایی  $I\mathcal{H}$  به قرص پوانکاره  $\mathcal{D}$  منتقل کردیم. دیدیم که دایره های هذلولوی و دایره های اقلیدسی در قرص پوانکاره  $\mathcal{D}$  یکسان می باشند، و لذا با استفاده از  $p$ ، می بینیم که دایره های هذلولوی و دایره های اقلیدسی در نیم صفحه بالایی  $I\mathcal{H}$  نیز یکسان می باشند.

#### تمرین ۴-۵.

فرض کنیم  $A$  دایره اقلیدسی در قرص پوانکاره  $\mathcal{D}$  به مرکز اقلیدسی  $\frac{1}{5} - \frac{1}{4}i$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{1}{10}$  است. مرکز هذلولوی و شعاع هذلولوی  $A$  را بیابید.

#### تمرین ۴-۶.

فرض کنیم  $A$  دایره اقلیدسی در نیم صفحه بالایی  $I\mathcal{H}$  به مرکز اقلیدسی  $1 + 3i$  و شعاع اقلیدسی ۱ است. مرکز هذلولوی و شعاع هذلولوی  $A$  را بیابید.

#### تمرین ۴-۷.

فرض کنیم  $A$  دایره اقلیدسی در نیم صفحه بالایی  $I\mathcal{H}$  به مرکز اقلیدسی  $a + bi$  و شعاع اقلیدسی  $r$  است. نشان دهید مرکز هذلولوی عبارت است از  $a + i\sqrt{b^2 - r^2}$  و شعاع هذلولوی  $R$  در رابطه  $r = b \tanh(R)$  صدق می کند.

### ۴-۲. یک روش ساختن عمومی

روش ساختن مطرح شده در بخش ۴-۱، برای انتقال هندسه هذلولوی از نیم صفحه بالایی  $I\mathcal{H}$  به دسیک یک  $\mathcal{D}$ ، در واقع یک نمونه از یک روش ساختن عمومی مدل های صفحه هذلولوی از روی مدل نیم صفحه بالایی  $I\mathcal{H}$  و با استفاده از ابزارهای آنالیز مختلط

است. هدف این بخش این است که این ارتباط آنالیز مختلط و مدل‌های مسطح هندسه هذلولوی را با جزئیات آشکار سازد.

به نوعی با یک چهارچوب محدودی کار می‌کنیم. فرض کنیم  $X$  یک زیر مجموعه  $\mathcal{C}$  باشد که با  $\mathbb{H}$  هم‌ارز تحلیلی<sup>۱</sup> است؛ یعنی یک همسانی  $\xi: X \rightarrow \mathbb{H}$  چنان موجود است که هر دوی  $\xi$  و  $\xi^{-1}$  به عنوان تابعی بر حسب  $z$  مشتق‌پذیر باشند، همانطوریکه در تبصره ۳-۹ گفته شد. به چنین تابع  $\xi$  یک وابریختی می‌گوییم. (مبحث اینکه چه زیر مجموعه‌های بازی از  $\mathcal{C}$  با  $\mathbb{H}$  هم‌ارز تحلیلی هستند را به بعد موکول می‌کنیم).

یک مثال از چنین توابعی که در بخش ۴-۱ دیده‌ایم، با فرض کردن  $X = \mathbb{D}$  و در نظر گرفتن تابع زیر به دست می‌آید:

$$\xi(z) = \frac{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{i}{\sqrt{2}}} = \frac{iz + 1}{-z - i}$$

در یک روش خام، ممکن است از  $\xi$  برای انتقال هندسه هذلولوی از  $\mathbb{H}$  به  $X$  استفاده کنیم و بدین ترتیب یک مدلی برای صفحه هذلولوی به دست آوریم که فضای زمینه آن  $X$  باشد. به‌ویژه، خط هذلولوی در  $X$  را تصویر یک خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  تحت  $\xi^{-1}$  تعریف کنیم. بنابراین، یک خط هذلولوی در  $X$  یا به فرم  $\{z \in X \mid \operatorname{Re}(\xi(z)) = c\}$  به ازای یک  $c \in \mathbb{R}$  است، یا به فرم  $\{z \in X \mid |\xi(z) - c|^2 = r^2\}$  است که در آن  $c \in \mathbb{R}$  و  $r > 0$  هستند.

بعنوان یک مثال خاص، فرض کنیم  $X$  ربع اول است

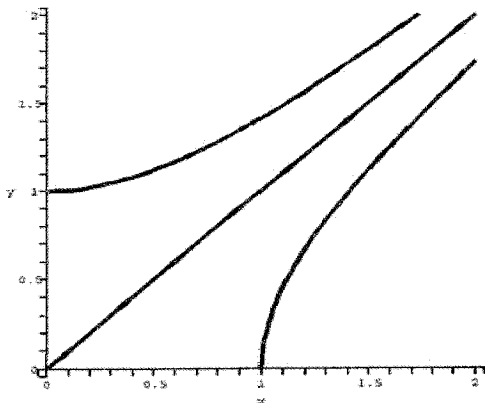
$$X = \{z \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

و وابریختی  $\xi: X \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $\xi(z) = z^2$  را در نظر می‌گیریم.

خطوط هذلولوی در این مدل  $X$  را می‌توانیم بطور صریح توصیف کنیم. اگر فرض کنیم  $w = u + iv$  مختصات  $X$  و  $z$  مختصات  $\mathbb{H}$  باشد، آنگاه داریم  $\xi(w) = z = u^2 - v^2 + 2iuv$  خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  دو گونه‌اند، آنهایی که مشمول در یک خط اقلیدسی هستند:  $L_c = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = c\}$  و آنهایی که مشمول در یک دایره اقلیدسی هستند:  $A_{c,r} = \{z \in \mathbb{H} \mid (\operatorname{Re}(z) - c)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = r^2\}$ .

<sup>1</sup> Holomorphically equivalent

تصویر  $L_c$  تحت  $\xi^{-1}$  منحنی  $\{w \in X \mid u^x - v^x = c\}$  در  $X$  است. به ازای  $c = 0$ ، این منحنی عبارت است از شعاع اقلیدسی  $K$  با راس مبدا که با قسمت مثبت محور حقیقی زاویه  $\frac{\pi}{4}$  می‌سازد، درحالی‌که برای  $c \neq 0$ ، این منحنی مجانب هذلولوی به  $K$  است. نمودار ۴-۲ را ملاحظه کنید.



شکل ۴-۲ برخی از خطوط به فرم  $L_c$  در ربع اول

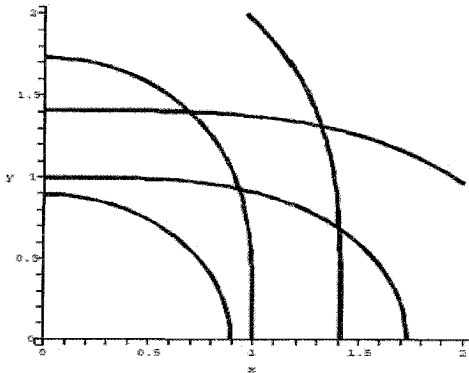
تصویر  $A_{c,r}$  تحت  $\xi^{-1}$  منحنی معروف به برگ کاسینی<sup>۱</sup> است که با معادله زیر داده می‌شود:

$$(u^x + v^x)^2 - 2c(u^x - v^x) + c^2 = r^2$$

برای مشاهده چند برگ کاسینی به ازای مقادیر گوناگون  $c \in \mathbb{R}$  و  $r > 0$ ، نمودار ۴-۳ را ملاحظه کنید. یک برگ کاسینی به نوعی یک بیضی تغییر یافته است. فرض کنیم  $w_1$  و  $w$  دو نقطه ثابت در  $\mathcal{C}$  هستند. در حالیکه یک بیضی عبارت است از مجموعه نقاطی در  $\mathcal{C}$  که مجموع فاصله‌های (اقلیدسی) یعنی  $|w - w_1| + |w - w_2|$  مقدار ثابت است، یک برگ کاسینی مجموعه نقاطی در  $\mathcal{C}$  است که حاصل ضرب فاصله‌های (اقلیدسی) یعنی  $|w - w_1| \cdot |w - w_2|$  مقدار ثابت است. برخلاف بیضی‌ها که همه آن‌ها شکل یکسانی دارند، با تغییر این مقدار ثابت شکل بیضیوارهای کاسینی تغییر می‌کند.

<sup>۱</sup> Oval of Cassini





شکل ۴-۳ نمودار برخی از خطوط به فرم  $A_{0,r}$  در ربع اول  $X$

در حالیکه داشتن یک توصیفی از خطوط هذلولوی در  $X$  مناسب است، در حالت کلی کار کردن با آنها آسان نیست. استفاده بیشتر از  $\xi$  عبارت خواهد بود از انتقال عنصر طول قوس هذلولوی  $\frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$  روی  $\mathbb{H}$  به یک عنصر طول قوس هذلولوی روی  $X$ ، به طوریکه امکان انجام محاسبه در این مدل جدید صفحه هذلولوی با فضای زمینه  $X$  فراهم شود. این انتقال عنصر طول قوس هذلولوی از  $\mathbb{H}$  به  $X$  را دقیقاً همانند انتقال طول قوس هذلولوی از  $\mathbb{H}$  به  $\mathbb{D}$  انجام می‌دهیم، اما این بار از وابریختی  $X \rightarrow \mathbb{H} : \xi$  استفاده می‌کنیم. یعنی، عنصر طول قوس هذلولوی  $ds_X$  روی  $X$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l_X(f) = \int_f ds_X = \int_{\xi \circ f} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| = l_{\mathbb{H}}(\xi \circ f)$$

که در آن  $f : [a, b] \rightarrow X$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  دلخواه است.

به این روش ساختن عنصر طول قوس  $ds_X$  روی  $X$  با استفاده از وابریختی  $X \rightarrow \mathbb{H} : \xi$ ، تحت عنوان تعریف نمودن  $ds_X$  به صورت برگشت<sup>۱</sup> عنصر طول قوس روی  $\mathbb{H}$  تحت  $\xi$  یاد می‌کنیم.

<sup>۱</sup> pullback

قضیه ۴-۶.

فرض کنیم  $X$  یک زیرمجموعه باز صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  و  $\xi: X \rightarrow \mathbb{H}$  یک وابرریختی باشد که نسبت به  $z$  مشتق پذیر است. برگشت  $ds_X$  از عنصر طول قوس

هذلولوی  $\frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$  روی  $\mathbb{H}$  به صورت زیر است:

$$ds_X = \frac{1}{\text{Im}(\xi(z))} |\xi'(z)| |dz|.$$

اثبات. اثبات قضیه ۴-۶ یک محاسبه مستقیم است. با توجه به نمادهای بالا، فرض

می‌کنیم  $f: [a, b] \rightarrow X$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  باشد. طول هذلولوی  $f$  با ضابطه زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} l_X(f) &= \int_f ds_X = \int_{\xi \circ f} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| \\ &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(\xi(f(t)))} |\xi'(f(t))| |f'(t)| dt \\ &= \int_f \frac{1}{\text{Im}(\xi(z))} |\xi'(z)| |dz|. \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۳-۱۰ اثبات کامل می‌شود.

فهرالمطلوب

دقیقاً با همان روشی که متر هذلولوی را روی  $\mathbb{H}$  تعریف نمودیم و گروه طولپاهای آن را تعیین کردیم، این روش ساختن، امکان تعریف متر هذلولوی روی  $X$  و تعیین گروه طولپاهای آن را فراهم می‌کند.

به بیان دقیق، فرض کنیم  $X$  یک زیرمجموعه باز  $\mathbb{C}$  است که برای آن وابرریختی  $\xi: X \rightarrow \mathbb{H}$  موجود است. فرض کنیم  $ds_X$  برگشت عنصر طول قوس

هذلولوی  $\frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$  روی  $\mathbb{H}$  تحت  $\xi$  است. در این صورت می‌توانیم با استفاده

از  $ds_X$  یک متر هذلولوی  $d_X$  روی  $X$  تعریف کنیم بدین ترتیب که روی طول هذلولوی مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C^1$  در  $X$  اینفیموم بگیریم.

با استفاده از اثبات‌های مشابه در بخش ۴-۱ برای قرص پوانکاره، می‌بینیم که  $(X, d_X)$  یک فضای متری مسیری است که در آن مسیرهای محقق کننده فاصله دقیقاً

پارامتری‌سازی‌های تقریباً ساده پاره‌خط‌های هذلولوی در  $X$  می‌باشند. همچنین، گروه طولپاهای  $(X, d_X)$  عبارت است از:

$$\text{Isom}(X, d_X) = \{\xi^{-1} \circ m \circ \xi \mid m \in \text{Möb}(\mathbb{H})\}$$

یک ساختار هذلولوی<sup>۱</sup> روی  $X$  را به صورت تمام داده‌های هذلولوی برخاسته از ساختار بالا که شامل خطوط هذلولوی در  $X$ ، عنصر طول قوس هذلولوی  $ds_X$  و متر حاصل از آن روی  $X$  و گروه طولپاهای آن است، تعریف می‌کنیم. مثال بالا را ادامه می‌دهیم، که در آن

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0\}$$

و ابرریختی  $X \rightarrow \mathbb{H} : \xi$  با ضابطه  $\xi(z) = z^2$  را در نظر می‌گیریم. چون

$$\text{Im}(\xi(z)) = \text{Im}(z^2) = 2 \text{Re}(z) \text{Im}(z)$$

و

$$|\xi'(z)| = |2z| = 2|z|$$

بنابراین می‌بینیم که برگشت  $\frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$  تحت  $\xi$  عبارت است از:

$$ds_X = \frac{1}{\text{Im}(\xi(z))} |\xi'(z)| |dz| = \frac{|z|}{\text{Re}(z) \text{Im}(z)} |dz|.$$

خاطر نشان می‌کنیم که اگر از یک ابرریختی دیگر مانند  $\mu : X \rightarrow \mathbb{H}$  استفاده کنیم، هنوز هم تحت برگشت عنصر طول قوس، به عنصر طول قوس یکسانی روی  $X$  دست می‌-

یابیم. برای دیدن این امر،  $\mu(z) = \frac{z^2 + 5}{z^2 + 2}$  را در نظر می‌گیریم. برای اینکه بینیم  $\mu$  واقعا

یک ابرریختی است، توجه کنید که  $\mu$  به صورت ترکیب  $\mu(z) = m \circ \xi(z)$  است که در

آن  $m(z) = \frac{z^2 + 5}{z + 2} \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$  است، و در نتیجه یک ابرریختی  $\mathbb{H}$  است.

با محاسبه برگشت  $\frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$  تحت  $\mu$  داریم:

<sup>1</sup> Hyperbolic structure

$$\text{Im}(\mu(z)) = \text{Im}\left(\frac{rz' + s}{z' + r}\right) = \frac{r \text{Re}(z) \text{Im}(z)}{|z' + r|^2}$$

و با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم:

$$|\mu'(z)| = |m'(\xi(z))| |\xi'(z)| = \frac{r|z|}{|z' + r|^2}$$

در نتیجه برگشت  $|dz|$  تحت  $\mu$  عبارت است از:

$$\frac{1}{\text{Im}(\mu(z))} |\mu'(z)| |dz| = \frac{|z' + r|^2}{\text{Re}(z) \text{Im}(z)} \frac{r|z|}{|z' + r|^2} = \frac{|z|}{\text{Re}(z) \text{Im}(z)} |dz|$$

همانطوریکه می خواستیم.

#### تمرین ۴-۸

فرض کنیم  $Y = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$  و وابر ریختی  $\xi: Y \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $\xi(z) = iz$

را در نظر می گیریم. عنصر طول قوس هذلولوی برگشت  $|dz|$  تحت  $\xi$  را بیابید.

#### تمرین ۴-۹

فرض کنیم  $X = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im}(z) < \pi\}$  و وابر ریختی  $\xi: Y \rightarrow \mathbb{H}$  با

ضابطه  $\xi(z) = e^z$  را در نظر می گیریم. عنصر طول قوس هذلولوی برگشت  $|dz|$  تحت  $\xi$  را بیابید.

خاطر نشان می کنیم که ممکن است شکل مناسبی برای  $ds_X$  به دست نیاید. برای مثال،

فرض می کنیم  $X = \mathbb{C}$  و تابع  $\xi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$  را با ضابطه زیر در نظر می گیریم:

$$\xi(z) = \text{Re}(z) + \exp(\text{Im}(z))i.$$

فرض می کنیم  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  یک مسیر به طور قطعه ای  $C^1$  باشد و

می نویسیم  $f(t) = x(t) + iy(t)$ . با محاسبه، مشاهده می کنیم:

$$\xi \circ f(t) = x(t) + \exp(y(t))i.$$

در نتیجه داریم:

$$\text{Im}((\xi \circ f)(t)) = \exp(y(t))$$

و

$$|(\xi \circ f)'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \exp(y(t))$$

و در نتیجه داریم:

$$l_X(f) = \int_f ds_X = \int \frac{1}{\exp(y(t))} \sqrt{(x'(t))^2 + \exp(2y(t))} dt.$$

حتی اگر میسر خاص  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{C}$  با ضابطه  $f(t) = s \exp(it)$  را در نظر بگیریم، یعنی  $y(t) = s \sin(t)$ ،  $x(t) = s \cos(t)$  خواهیم داشت:

$$l_X(f) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\exp(s \sin(t))} \sqrt{s^2 \sin^2(t) + s^2 \cos^2(t) \exp(2s \sin(t))} dt$$

یا بعنوان مثال دیگر، مستطیل  $R(\ell) = (-\ell, \ell) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  را در  $\mathcal{C}$  در نظر می‌گیریم. به ازای هر  $\ell > 0$  این مستطیل  $R(\ell)$  با  $IH$  هم‌ارز تحلیلی است. تا به امروز، فرمول بسته‌ای برای عنصر طول قوس روی  $R(\ell)$  به دست نیامده است. خواننده علاقه‌مند را به دو مقاله جدید بردون [8] و [9] ارجاع می‌دهیم که در آن‌ها برخی از خواص عنصر طول قوس و متر حاصل از آن روی  $R(\ell)$  بحث شده‌است. بنابراین، در حالت کلی، این روش ساختن عمومی برای ساختن مدل‌هایی برای صفحه هذلولوی، زمانی که عنصر طول قوس بیان ساده‌ای نداشته باشد، کارآمد به نظر نمی‌رسد.

این ساختار، کلی است و روی هر زیرمجموعه باز  $\mathcal{C}$  که هم‌ارز تحلیلی با  $IH$  باشد، قابل اجرا است. می‌توانیم چنین مجموعه‌هایی را طبقه‌بندی کنیم. همچنین مایلیم نشان دهیم این ساختار مستقل از انتخاب و ابرریختی بین  $X$  و  $IH$  است. برای انجام این کارها، نیاز به مطالبی داریم که از افق این کتاب فراتر می‌باشند؛ لذا برای خواننده علاقه‌مند لیستی از مراجع فراهم می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $X$  یک زیرمجموعه باز همبند و همبند ساده  $\mathcal{C}$  است. قطع نظر از جزئیات، یک مجموعه همبند، مجموعه‌ای است که یک تکه می‌باشد.

#### تعریف ۴-۷.

یک زیرمجموعه باز  $X$  در  $\mathcal{C}$  همبند است هرگاه به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $X$ ، یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$

مانند  $f: [a, b] \rightarrow X$  موجود باشد بطوریکه  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$ .

قطع نظر از جزئیات، یک مجموعه همبند ساده، مجموعه‌ای است که دارای هیچ حفره-ای نباشد. قبل از تعریف نمودن همبند ساده، نیاز داریم که منحنی جردن<sup>۱</sup> را بشناسیم.

#### تعریف ۴-۸.

مجموعه  $C$  یک منحنی جردن است هرگاه تابع پیوسته  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  موجود باشد بطوریکه  $f(0) = f(2\pi)$  و  $f$  روی  $[0, 2\pi]$  یک به یک بوده و  $f([0, 2\pi]) = C$ . دایره واحد<sup>۲</sup>  $S^1$  در  $\mathbb{C}$  یک مثال از منحنی جردن است.

قضیه منحنی جردن بیان می‌کند که متمم یک منحنی جردن  $C$  در  $\mathbb{C}$  دارای دقیقاً دو مولفه است، یکی کراندار و دیگری بی‌کران. به مولفه کراندار  $C - \mathcal{C}$  قرص کراندار<sup>۳</sup> شده با  $C$  می‌گوییم. خاطر نشان می‌کنیم که منحنی‌های جردن را می‌توان با مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C^1$  پارامتری نمود. یک بحث عالی در مورد منحنی‌های جردن را می‌توان در گیلمن<sup>۴</sup> و پولاک<sup>۵</sup> [18] یافت.

#### تعریف ۴-۹.

مجموعه باز همبند  $X$  در  $\mathbb{C}$  همبند ساده است، هرگاه به ازای هر منحنی جردن  $C$  در  $X$ ، قرص کراندار شده با  $C$  نیز در  $X$  باشد.

هر دوی نیم‌صفحه بالایی  $IH$  و قرص واحد  $ID$  همبند و همبند ساده هستند. صفحه سفته  $\mathbb{C} - \{0\}$  همبند است ولی همبند ساده نیست، زیرا دایره واحد  $S^1$  در  $\mathbb{C} - \{0\}$  است ولی قرص کراندار شده با  $S^1$ ، یعنی قرص واحد  $ID$  مشمول در  $\mathbb{C} - \{0\}$  نیست.

#### تعریف ۴-۱۰.

یک قرص تحلیلی<sup>۶</sup> عبارت است از یک زیر مجموعه باز  $X$  در  $\mathbb{C}$  بطوریکه همبند و همبند ساده باشد ولی کل  $\mathbb{C}$  نباشد.

قضیه کلاسیک یکنواخت‌سازی نتیجه می‌دهد که فقط دو امکان برای یک زیر مجموعه باز همبند و همبند ساده و ناتهی  $X$  در  $\mathbb{C}$  وجود دارد. یک امکان  $X = \mathbb{C}$  است. امکان دیگر

<sup>1</sup> Jordan curve  
<sup>2</sup> Disc bounded by C  
<sup>3</sup> Guillemin  
<sup>4</sup> Pollack  
<sup>5</sup> Holomorphic disc

این است که  $X$  یک قرص تحلیلی باشد و بعلاوه در این حالت یک ابرریختی  $X \rightarrow \mathbb{H}$ :  $\mathbb{C}$  وجود دارد. بنابراین در حالتیکه  $X$  یک قرص تحلیلی است، این امکان وجود دارد که یک ساختار هذلولوی روی  $X$  قرار دارد و در نتیجه روی آن هندسه هذلولوی را جاری ساخت. همانطوریکه به اختصار خواهیم دید، نمی‌توان عنصر طول قوس هذلولوی روی کل  $\mathbb{C}$  قرار داد.

بیان دقیق و اثبات قضیه کلاسیک یکنواخت‌سازی فراتر از افق و چهارچوب این کتاب می‌باشد. یک شرح عالی از آن را می‌توان در مقاله آبیکوف<sup>۱</sup> [2] و منابع مذکور در آن یافت. مایلیم در مورد استقلال ساختار هذلولوی روی قرص تحلیلی از انتخاب ابرریختی بحث کنیم. برای این بحث، نیاز به نتیجه دیگری داریم که آن نیز فراتر از افق این کتاب می‌باشد. در واقع آن نتیجه مذکور، یک نسخه‌ای از لم کلاسیک شوارتز<sup>۲</sup> است. اثباتی برای آن را می‌توان در غالب کتاب‌های آنالیز مختلط مانند آلفرس<sup>۳</sup> [3] و هیله<sup>۴</sup> [21] یافت. خواننده علاقه‌مند می‌تواند از آلفرس [4] نیز بهره ببرد.

ابتدا با بیان لم شوارتز شروع می‌کنیم که معمولاً بر حسب توابع تحلیلی از  $ID$  به  $ID$  بیان می‌گردد.

#### قضیه ۴-۱۱.

فرض کنیم  $f: ID \rightarrow ID$  تحلیلی است و  $f(0) = 0$ . در این صورت یا به ازای هر  $\{z \in ID - \{0\} \mid |f(z)| < |z|\}$ ، یا به ازای یک  $\alpha \in \mathbb{R}$   $f(z) = e^{i\alpha} z$ .

بعنوان نتیجه‌ای از قضیه ۴-۱۱، می‌توانیم نشان دهیم که هر ابرریختی  $ID$  عضو  $Möb^+(ID)$  است.

#### نتیجه ۴-۱۲.

فرض کنید  $f: ID \rightarrow ID$  یک ابرریختی  $ID$  است. آنگاه  $f \in Möb^+(ID)$ .

اثبات. ابتدا، عضو  $m \in Möb^+(ID)$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $m \circ f(0) = 0$  و قرار می‌دهیم  $F = m \circ f$ . در این صورت  $F = m \circ f$ . حال  $F$  یک ابرریختی  $ID$  است که شرایط قضیه ۴-۱۱ را برآورده می‌سازد. چون  $F$  یک ابرریختی  $ID$  است، لذا معکوس آن  $G = F^{-1}$  نیز یک ابرریختی  $ID$  است و بعلاوه داریم  $G(0) = 0$ .

<sup>1</sup> Abikoff

<sup>2</sup> Schwarz

<sup>3</sup> Ahlfors

<sup>4</sup> Hille

اگر حالت دوم حکم قضیه ۴-۱۱ برای  $F$  یا  $G$  برقرار باشد، آنگاه برای هر دوی آنها برقرار خواهد بود و به طور مستقیم نتیجه می شود  $F$  و  $G$  عضو  $Möb^+(\mathbb{D})$  می باشند. بنابراین، کافی است فرض کنیم حالت اول حکم قضیه ۴-۱۱ برای  $F$  و  $G$  برقرار است، یعنی به ازای هر  $z \in \mathbb{D} - \{0\}$   $|F(z)| < |z|$  و  $|G(z)| < |z|$ . لذا با دو بار به کار بردن قضیه ۴-۱۱ به ازای هر  $z \in \mathbb{D} - \{0\}$  خواهیم داشت:

$$|z| = |G \circ F(z)| < |F(z)| < |z|$$

که نمی تواند اتفاق بیفتد. در نتیجه، باید به ازای یک  $\alpha \in \mathbb{R}$   $F(z) = e^{i\alpha} z$  پس  $F \in Möb^+(\mathbb{D})$ . بنابراین،  $f = m^{-1} \circ F \in Möb^+(\mathbb{D})$ ، همانطوریکه می خواستیم.

### فهرالمطلوب

از آنجاییکه ساختارهای هذلولوی را با بکارگیری و ابرریختی های  $\mathbb{H}$  به  $\mathbb{D}$ ،  $\mathbb{H}$  و نه به  $\mathbb{D}$ ، تعریف کرده ایم، به نتیجه فوری زیر از قضیه ۴-۱۱ نیاز داریم.

### نتیجه ۴-۱۳.

فرض کنید  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  یک و ابرریختی  $\mathbb{H}$  است. آنگاه  $f \in Möb^+(\mathbb{H})$ . حال آماده ایم تا نشان دهیم ساختار هذلولوی بنا شده روی یک قرص تحلیلی به انتخاب و ابرریختی  $\mathbb{H} \rightarrow X$  وابسته نیست.

### قضیه ۴-۱۴.

فرض کنیم  $X$  یک قرص تحلیلی است. در این صورت خطوط هذلولوی در  $X$  و عنصر طول قوس  $ds_X$  روی  $X$  مستقل از انتخاب و ابرریختی  $\mathbb{H} \rightarrow X$  است.

اثبات. فرض کنیم  $\mathbb{H} \rightarrow X$  و  $\mathbb{H} \rightarrow X$  دو و ابرریختی باشند. آنگاه  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : v^{-1} \circ \xi$  یک و ابرریختی است. با توجه به نتیجه ۴-۱۳ داریم  $p \in Möb^+(\mathbb{H}) = v^{-1} \circ \xi$ . می نویسیم  $p = v \circ \xi$ . به ویژه، فرض کنیم  $\ell$  یک خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  است. آنگاه چون  $p^{-1}$  خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  را به خطوط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  می برد، لذا  $v^{-1}(p^{-1}(\ell)) = \xi^{-1}(\ell)$  یک خط هذلولوی در  $X$  است اگر و فقط اگر  $v^{-1}(\ell)$  یک خط هذلولوی در  $X$  باشد.



بعلاوه، چون به ازای هر  $z \in \mathbb{H}$  داریم:

$$\frac{1}{\text{Im}(p(z))} |p'(z)| = \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

لذا به ازای هر  $w \in X$  خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\text{Im}(\xi(w))} |\xi'(w)| = \frac{1}{\text{Im}(p(v(w)))} |p'(v(w))| |v'(w)| = \frac{1}{\text{Im}(v(w))} |v'(w)|$$

در نتیجه عنصر طول قوس  $ds_X$  روی  $X$  مستقل از انتخاب وابرریختی بین  $X$  و  $\mathbb{H}$

است.

### فهرالمطلوب

دقیقا به همان روش به کار رفته در بخش ۳-۷، می‌توانیم با در نظر گرفتن گردایه تمام شعاع‌های هذلولوی در  $X$  و با قرار دادن رابطه هم‌ارزی مشابه بخش ۳-۷ مرز در بی‌نهایت قرص تحلیلی  $X$  را تعریف کنیم. برای نیم‌صفحه بالایی  $\mathbb{H}$  (به ترتیب برای قرص پوانکاره  $\mathbb{D}$ ) مرز در بی‌نهایت ساخته شده با کلاس‌های هم‌ارزی شعاع‌های هذلولوی همان دایره‌ای در  $\overline{\mathbb{C}}$  است که  $\mathbb{H}$  (به ترتیب  $\mathbb{D}$ ) را در  $\overline{\mathbb{C}}$  احاطه کرده است. مشکل اصلی این است که برخلاف  $\mathbb{H}$  یا  $\mathbb{D}$  برای یک قرص تحلیلی دلخواه این مرز در بی‌نهایت ذاتی که با شعاع‌های هذلولوی ساخته می‌شود با مرز توپولوژیکی  $X$  در  $\overline{\mathbb{C}}$  یعنی  $\partial X$  یکی نیست. در حقیقت، حتی لزومی ندارد یک تابع پیوسته از مرز در بی‌نهایت  $X$  به  $\partial X$  موجود باشد. طبقه‌بندی توپولوژیکی قرص‌های تحلیلی که برای آن‌ها مرز در بی‌نهایت و مرز توپولوژیکی در ارتباطند مناسب ولی فراتر از زمینه مورد بحث می‌باشد.

تا کنون، بر توصیف هندسه هذلولوی روی یک قرص تحلیلی در صفحه مختلط بسنده کرده‌ایم. زمینه‌های متفاوتی وجود دارند که می‌توانیم بحث خود را گسترش دهیم. یک جهت، در نظر گرفتن زیرمجموعه‌های باز  $\mathcal{C}$  است که همبند ساده نباشند. در حالیکه این موضوع بسیار جالب و پر بار برای پی‌گیری است، ولی ابزارهای لازم برای انجام آن را نداریم.

در عوض، روی ارتباط ساختارهای هذلولوی روی دو قرص تحلیلی با یکدیگر بسنده می‌کنیم. یعنی، به جای بررسی مجموعه‌هایی فراتر از قرص‌های تحلیلی، به طور همزمان چندین قرص تحلیلی را مطالعه می‌کنیم. با قرص‌های تو در تو کار را شروع می‌کنیم. برای اثباتی از قضیه بعدی، خواننده علاقه‌مند را به آفرس [4] ارجاع می‌دهیم.

## قضیه ۴-۱۵.

فرض کنیم  $X_1$  و  $X_r$  دو قرص تحلیلی در  $\mathcal{C}$  با شرط  $X_1 \subseteq X_r$  باشند. به ازای  $k=1,2$  عنصر طول قوس هذلولوی روی  $X_k$  را به صورت  $|\lambda_k(z)| dz$  نمایش می دهیم. در این صورت به ازای هر  $z \in X_1$  داریم:  $\lambda_1(z) \geq \lambda_r(z)$ .  
در حالت های خاص که قادریم عنصرهای طول قوس هذلولوی وابسته را محاسبه کنیم، می توانیم رابطه بالا را بررسی کنیم.

## تمرین ۴-۱۰.

فرض کنیم  $D_{a,r}$  قرص باز اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $a \in \mathbb{D}$  و شعاع اقلیدسی  $r > 0$  است که در آن  $|a| + r < 1$  (در نتیجه  $D_{a,r} \subseteq \mathbb{D}$ ). عنصر طول قوس هذلولوی روی  $D_{a,r}$  را با  $|\lambda_{a,r}(z)| dz$  نمایش دهید و نشان دهید به ازای هر  $z \in \mathbb{D}$  داریم

$$\lambda_{a,r}(z) \geq \frac{2}{1-|z|^2}$$

برای یک زوج قرص تحلیلی دلخواه تو در تو، مشکل اصلی در بررسی بالا این است که غالباً نمی توانیم فرمول صریحی برای عنصر طول قوس هذلولوی بیابیم. اگرچه، می توانیم قضیه ۴-۱۵ را برای تخمین زدن عنصر طول قوس هذلولوی روی هر قرص هذلولوی به کار ببریم.

برای یک تخمین اولیه، فرض کنیم  $X$  یک قرص تحلیلی در  $\mathcal{C}$  است و عنصر طول قوس هذلولوی روی  $X$  را با  $|\lambda(z)| dz$  نمایش می دهیم. تابع  $\delta: X \rightarrow (0, \infty)$  را به ترتیب زیر تعریف می کنیم:

$$\delta(z) = \inf\{|z-x| \mid x \in \partial X\}$$

که کوتاهترین فاصله (اقلیدسی)  $z$  را تا مرز توپولوژیکی  $X$ ، یعنی  $\partial X$  نشان می دهد. فرض کنیم  $w \in X$  یک نقطه دلخواه است. در این صورت قرص (اقلیدسی)  $D = D_{w, \delta(w)}$  (با مرکز (اقلیدسی)  $w$  و شعاع (اقلیدسی)  $\delta(w)$ ) کاملاً مشمول در  $X$  است و بزرگترین قرص (اقلیدسی) به مرکز (اقلیدسی)  $w$  است که مشمول در  $X$  است. بنا به تمرین ۴-۱۰ عنصر طول قوس هذلولوی روی  $D$  به فرم  $|\lambda_w(z)| dz$  است که در آن داریم:

$$\lambda_w(z) = \frac{2\delta(w)}{\delta^2(w) - |z-w|^2}$$

با توجه به قضیه ۴-۱۵، مشاهده می کنیم که:

$$\lambda(w) \leq \lambda_w(w) = \frac{2}{\delta(w)}$$

خاطر نشان می‌کنیم که یک کران پایین هم برای  $\lambda(w)$  وجود دارد، یعنی:

$$\frac{1}{2\delta(w)} \leq \lambda(w)$$

اما اثبات این امر فراتر از اهداف بحث حاضر است. مجدداً خواننده مشتاق را به آفرث [4] ارجاع می‌دهیم.

به ویژه، این تخمین‌ها نشان می‌دهد روی قرص تحلیلی  $X$ ، انحراف همدیس  $\lambda(z)$  در عنصر طول قوس هذلولوی  $|dz| \lambda(z)$  از عنصر طول قوس اقلیدسی در  $z \in X$  به نوعی با عکس فاصله اقلیدسی  $z$  تا  $\partial X$  متناسب است. برای قرص پوانکاره  $ID$  این رابطه را به طور صریح می‌توانیم مشاهده کنیم. انحراف همدیس عنصر طول قوس هذلولوی روی  $ID$  عبارت است از:

$$\lambda(z) = \frac{2}{1-|z|^2} = \frac{2}{(1-|z|)(1+|z|)}$$

فاصله اقلیدسی  $z \in ID$  تا  $\partial ID = S^1$ ، یعنی  $\delta(z)$  عبارت است از  $1-|z|$ ، بعلاوه به ازای هر  $z \in ID$  داریم:

$$1 \leq \frac{2}{1+|z|} \leq 2$$

در نتیجه، روی  $ID$ ، تخمین زیر را داریم:

$$\frac{1}{2\delta(z)} < \lambda(z) \leq \frac{2}{\delta(z)}$$

که کمی بهتر از تخمین قبلی به دست آمده است.

همچنین می‌توانیم از این تخمین‌های به دست آمده برای انحراف‌های همدیس در اثبات عدم وجود عنصر طول قوس هذلولوی روی کل  $\mathcal{C}$  استفاده کنیم. بر فرض خلف، اگر عنصر طول قوس هذلولوی  $|dz| \rho(z)$  روی  $\mathcal{C}$  موجود باشد که در آن  $\rho$  روی کل  $\mathcal{C}$  تعریف شده است و به ازای هر  $z \in \mathcal{C}$ ،  $\rho(z) \geq 0$ . به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  قرص (اقلیدسی)  $D_{,n} = \{z \in \mathcal{C} \mid |z| < n\}$  مشمول در  $\mathcal{C}$  است. عنصر طول قوس هذلولوی روی  $D_{,n}$  را با  $|dz| \lambda_n(z)$  نمایش می‌دهیم. با توجه به تمرین ۴-۱۰ و قضیه ۴-۱۵، به ازای هر  $z \in D_{,n}$  و هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:  $\rho(z) \leq \lambda_n(z)$ .

نقطه  $z \in \mathcal{C}$  را ثابت در نظر می گیریم. وجود دارد  $n \in \mathbb{N}$  بطوریکه  $z \in D_{1/n}$  و لذا به ازای هر  $n > n$ :

$$\rho(z) \leq \lambda_n(z)$$

با بکارگیری فرمول  $\lambda_n(z)$  خواهیم داشت:

$$\rho(z) \leq \frac{2n}{n^2 - |z|^2}$$

چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 - |z|^2} = 0$ ، لذا  $\rho(z) = 0$ . از آنجاییکه  $z$  دلخواه است، نتیجه می-

گردد به ازای هر  $z \in \mathcal{C}$  که در تناقض با فرض عنصر طول قوس هذلولوی بودن  $\rho(z) |dz|$  روی  $\mathcal{C}$  است.

حال دو قرص تحلیلی  $X_1$  و  $X_2$  و تابع تحلیلی  $f: X_1 \rightarrow X_2$  را در نظر می گیریم. فرض می کنیم  $\xi_k: X_k \rightarrow \mathbb{H}$  و ابرریختی دلخواهی باشد. به یاد داریم که ساختار هذلولوی روی  $X_k$  با برگشت ساختار هذلولوی روی  $\mathbb{H}$  تحت  $\xi_k$  ساخته می شود و بنا به قضیه ۴-۱۴، اختلاف ابرریختی های بین  $X_k$  و  $\mathbb{H}$  از  $\xi_k$  عبارت است از ترکیب با یک عضو  $Möb^+(\mathbb{H})$ .

اگر  $f$  نیز یک همسانی باشد، آنگاه  $f$  یک طولپای بین ساختار هذلولوی روی  $X_1$  و ساختار هذلولوی روی  $X_2$  است. برای دیدن این امر، توجه داشته باشید که هر دوی  $\xi_2 \circ f$  و  $\xi_1$  و ابرریختی از  $X_1$  به  $\mathbb{H}$  هستند، لذا عضو  $m$  از  $Möb^+(\mathbb{H})$  وجود دارد بطوریکه  $\xi_2 \circ f = m \circ \xi_1$ . به ویژه، این نحوه ساختن نتیجه می دهد که  $\xi_2 \circ f = \xi_2^{-1} \circ m \circ \xi_1$ . چون هر یک از  $\xi_2^{-1}$ ،  $m$  و  $\xi_1$  طولپا هستند، در نتیجه  $f$  نیز یک طولپا است.

حالتی که  $f$  همسانی نیست، جالبتر است. در این حالت با یک فرمول بندی معادل نتیجه ۴-۱۳ متناسب به پیک<sup>۱</sup> شروع می کنیم.

#### قضیه ۴-۱۶.

فرض کنیم  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  تحلیلی است. اگر  $f$  همسانی باشد، آنگاه  $f \in Möb^+(\mathbb{H})$ . اگر  $f$  همسانی نباشد، آنگاه به ازای هر دو نقطه متمایز  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$

$$d_{\mathbb{H}}(f(z_1), f(z_2)) < d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$$

برای اثبات قضیه ۴-۱۶، ابتدا تابع تحلیلی  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  با شرط  $f(0) = 0$  را در نظر می گیریم. با فرض اینکه  $f$  همسانی نیست، بنا به قضیه ۴-۱۱ نتیجه می شود که به ازای

<sup>۱</sup>Pick

هر  $z \in \mathbb{D} - \{0\}$  |  $|f(z)| < |z|$  چون تابع  $h: (0,1) \rightarrow [0,\infty)$  با ضابطه  $h(t) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$  صعودی است (زیرا به ازای هر  $0 < t < 1$  داریم  $h'(t) > 0$ )، مشاهده می‌کنیم که به ازای هر  $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ :

$$d_{\mathbb{D}}(0, f(z)) = \ln\left(\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|}\right) < \ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right) = d_{\mathbb{D}}(0, z)$$

اثبات برای تابع تحلیلی دلخواه  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  با ترکیب اعضای مناسبی از  $Möb^+(\mathbb{D})$  از چپ و راست نتیجه می‌گردد.

اثبات برای  $\mathbb{H}$  و یک قرص تحلیلی دلخواه  $X$  با روش استدلالی مشابه آنچه که تا کنون در انتقال ساختار هذلولوی  $\mathbb{H}$  به یک قرص تحلیلی چندین بار به کار برده‌ایم، نتیجه می‌شود. فرض کنیم  $f: X_1 \rightarrow X_2$  یک تابع تحلیلی است که همسانی نیست، و به ازای  $k=1,2$  فرض کنیم  $\xi_k: X_k \rightarrow \mathbb{H}$  و ابرریختی است. در این صورت  $\xi_2 \circ f \circ \xi_1^{-1}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  تحلیلی است ولی همسانی نیست. قضیه ۴-۱۶ را روی  $\xi_2 \circ f \circ \xi_1^{-1}$  به کار می‌بریم تا ببینیم که  $\xi_2 \circ f \circ \xi_1^{-1}$  فاصله هذلولوی را کاهش می‌دهد. چون هر دوی  $\xi_1^{-1}$  و  $\xi_2$  طولپا می‌باشند، نتیجه می‌گردد که  $f$  باید فاصله هذلولوی را کاهش دهد.

این حقیقت که توابع تحلیلی روی فاصله هذلولوی غیر صعودی هستند، قابل بازنویسی بر حسب عناصر طول قوس‌های هذلولوی متناظر است.

### گزاره ۴-۱۷.

فرض کنیم  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  تحلیلی است. در این صورت به ازای هر  $z \in \mathbb{H}$  داریم:

$$\frac{|f'(z)|}{\text{Im}(f(z))} \leq \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

اثبات. اگر  $f$  تابع ثابت باشد، آنگاه به ازای هر  $z \in \mathbb{H}$   $f'(z) = 0$  و نامساوی نتیجه می‌گردد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم  $f$  تابع غیرثابت است. حال نیاز داریم که از یک خاصیت توابع تحلیلی غیرثابت استفاده کنیم: اگر  $f$  تابع تحلیلی غیرثابت روی  $\mathbb{H}$  باشد، آنگاه  $f(\mathbb{H})$  باز است. لذا اگر  $z$  و  $w$  در  $\mathbb{H}$  به قدر کافی نزدیک باشند، پاره‌خط هذلولوی  $l$  واصل  $f(z)$  و  $f(w)$  در  $f(\mathbb{H})$  قرار دارد. مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$   $\mathbb{H} \rightarrow [0, L]$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $f \circ c$  یک پارامتری‌سازی تقریباً ساده این پاره‌خط هذلولوی  $l$  باشد.

با محاسبه داریم:

$$d_H(f(z), f(w)) = \int_{f \circ c} \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| = \int_c \frac{|f'(z)|}{\text{Im}(f(z))} |dz|$$

و اینکه:

$$d_H(z, w) \leq \int_c \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$$

چون بنا به قضیه ۴-۱۶ داریم  $d_H(f(z), f(w)) < d_H(z, w)$  لذا نتیجه می شود:

$$\int_c \frac{|f'(z)|}{\text{Im}(f(z))} |dz| < \int_c \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz|$$

چون  $z$  و  $w$  دلخواهند (با شرط اینکه به قدر کافی به هم نزدیکند)، نامساوی بالا کافی

است برای نتیجه گیری اینکه

$$\frac{|f'(z)|}{\text{Im}(f(z))} < \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

همانطوریکه می خواستیم.

## فهرهالمطلوب

### تمرین ۴-۱۱.

تابع  $f: ID \rightarrow ID$  با ضابطه  $f(z) = z^2$  را در نظر می گیریم. نشان دهید  $f$  نسبت به فاصله هذلولوی غیرصعودی است، یعنی اگر برگشت عنصر طول قوس هذلولوی روی  $ID$

$$\text{تحت } f \text{ را با } |dz| \lambda(z) \text{ نمایش دهیم، آنگاه } \lambda(z) \leq \frac{2}{1-|z|^2}$$

این بخش را با معرفی کردن مفهوم انحنای<sup>۱</sup> به پایان می رسانیم. فرض می کنیم  $X$  یک زیرمجموعه باز  $\mathcal{C}$  و  $ds_X = \alpha(z) |dz|$  یک عنصر طول قوس روی  $X$  باشد، که در آن  $\alpha$  یک تابع حقیقی-مقدار مثبت و مشتق پذیر روی  $X$  می باشد. با همان روش ساختن که تا کنون چندین بار مشاهده کرده ایم، این عنصر طول قوس یک متر روی  $X$  القا می کند که در آن فاصله بین دو نقطه عبارت است از اینفیموم طول مسیرهای به طور قطعه ای  $C^1$  که آن دو نقطه را به یکدیگر وصل می کنند و طول مسیرهای به طور قطعه ای  $C^1$  نیز نسبت به این عنصر طول قوس هذلولوی محاسبه می شوند.

یک کمیت عددی وابسته به متر وجود دارد که از روی این عنصر طول قوس هذلولوی ساخته می شود و *انحنای متر* نامیده می شود. مطالعه مترها و خواص آنها از قبیل انحنای

<sup>۱</sup> Curvature

موضوع هندسه دیفرانسیل است، اما در اینجا چند نکته‌ای را در این مورد اشاره می‌کنیم. انحنای متر القا شده توسط عنصر طول قوس  $|dz| = \alpha(z) ds_X$  خود یک تابع  $curv: X \rightarrow \mathbb{R}$  است که به طور صریح با فرمول زیر داده می‌شود:

$$curv(z) = -\left[\frac{2}{\alpha(z)}\right]^2 \partial \bar{\partial} \log(\alpha(z))$$

اینجا، اگر بنویسیم  $z = x + iy$  و  $\beta(z) = f(x, y) + ig(x, y)$ ، آنگاه قرار می‌دهیم:

$$\partial \beta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \beta - i \frac{\partial}{\partial y} \beta \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + i \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]$$

و

$$\bar{\partial} \beta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \beta + i \frac{\partial}{\partial y} \beta \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} + i \left( \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]$$

تمرین ۴-۱۲.

$$\partial \bar{\partial} \beta = \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right] \quad \text{بررسی کنید که:}$$

به ویژه، توجه داشته باشید که برای متر استاندارد اقلیدسی روی  $\mathcal{C}$  داریم  $\alpha \equiv 1$ ، بنابراین انحنای متر اقلیدسی روی  $\mathcal{C}$  در تمام نقاط برابر صفر است.

برای نیم صفحه بالایی  $IH$  عنصر طول قوس هذلولوی  $|dz| = \frac{1}{\text{Im}(z)}$  می‌باشد، و لذا تابع

انحنا عبارت است از:

$$curv(z) = -4(\text{Im}(z))^2 \partial \bar{\partial} \log\left(\frac{1}{\text{Im}(z)}\right) = -1$$

توجه داشته باشید که اگر عنصر طول قوس هذلولوی کمی کلی‌تر  $|dz| = \frac{c}{\text{Im}(z)}$  را

روی  $IH$  در نظر بگیریم، آنگاه انحنا برابر خواهد بود با  $-\frac{1}{c^2}$ .

تمرین ۴-۱۳.

انحنای متر هذلولوی روی  $ID$  القا شده از عنصر طول قوس هذلولوی  $|dz| = \frac{2}{1-|z|^2}$  را

محاسبه کنید.

تمرین ۴-۱۴.

انحنای متر روی  $\mathcal{C}$  القا شده از عنصر طول قوس  $|dz| = \frac{1}{1+|z|^2}$  را محاسبه کنید.

## تحدب، مساحت و مثلثات

در این فصل، زوایای بهتری از هندسه هذلولوی را کشف می‌کنیم. ابتدا مفهوم تحدب<sup>۱</sup> را توضیح می‌دهیم و مجموعه‌های محدب<sup>۲</sup> که شامل چند ضلعی‌های هذلولوی<sup>۳</sup> می‌باشند را بیان می‌کنیم. با معطوف کردن توجه خود به چند ضلعی‌های هذلولوی بحث را ادامه داده و مساحت هذلولوی را مطالعه می‌کنیم که شامل فرمول گاوس-بونه<sup>۴</sup> می‌شود که به نوبه خود این فرمول مساحت هذلولوی یک چند ضلعی هذلولوی را برحسب زاویه‌های آن بیان می‌کند. با استفاده از فرمول گاوس-بونه نشان می‌دهیم که تبدیل آفین غیر بدیهی در صفحه هذلولوی وجود ندارد. این فصل را با بحث در مورد قوانین مثلثات در صفحه هذلولوی به پایان می‌رسانیم.

### ۱-۵ تحدب.

حال اطلاعات خوبی درباره هندسه صفحه هذلولوی داریم. چندین مدل برای کار کردن در اختیار داریم و یک توصیف نسبتاً صریح از طول هذلولوی و فاصله هذلولوی در این مدل‌ها داریم. حال شروع می‌کنیم به کشف و بیان جنبه‌های بهتری از هندسه هذلولوی.

<sup>1</sup> Convexity

<sup>2</sup> Convex sets

<sup>3</sup> Hyperbolic polygons

<sup>4</sup> Gauss-Bonnet formula



در این بخش، مفهوم تحدب را مطالعه می‌کنیم. به یاد داشته باشید که برای یک زیرمجموعه  $Z$  از  $\mathcal{C}$  می‌دانیم تحدب به چه معناست؛ یعنی برای هر زوج نقاط  $z_1$  و  $z_2$  در  $Z$ ، پاره‌خط اقلیدسی واصل  $z_1$  و  $z_2$  نیز در  $Z$  واقع باشد. در  $\mathcal{C}$ ، این موضوع را می‌توان به این صورت فرمولی نیز بیان نمود:  $Z$  همبنداست، هرگاه، به ازای هر زوج نقاط  $z_1$  و  $z_2$  در  $Z$  تمام نقاط  $z_t = (1-t)z_1 + tz_2$  که  $0 \leq t \leq 1$  نیز در  $Z$  واقع باشد. همین تعریف را در صفحه هذلولوی نیز می‌توانیم در نظر بگیریم.

### تعریف ۵-۱.

زیرمجموعه  $X$  در صفحه هذلولوی را محدب می‌نامیم، هرگاه به ازای هر زوج نقاط  $x$  و  $y$  در  $X$ ، پاره‌خط بسته و واصل  $x$  و  $y$  یعنی  $l_{xy}$  نیز مشمول در  $X$  باشد. بر خلاف صفحه مختلط، در مدل‌های صفحه هذلولوی که تاکنون مطرح کرده‌ایم، در حالت کلی یک پارامتری‌سازی مناسبی برای پاره‌خط هذلولوی واصل دو نقطه دلخواه وجود ندارد.

توجه داشته باشید، چون تحدب برحسب پاره‌خط‌های هذلولوی تعریف شده است، نتیجه فوری این تعریف این است که تحدب تحت طول‌های هذلولوی حفظ می‌گردد. یعنی اگر  $X$  یک مجموعه محدب در صفحه هذلولوی بوده و  $\gamma$  یک طول‌پای صفحه هذلولوی باشد، آنگاه  $\gamma(X)$  نیز محدب است.

یک مثال ساده از یک مجموعه محدب در صفحه هذلولوی خط هذلولوی است.

### گزاره ۵-۲.

خطوط هذلولوی، شعاع‌های هذلولوی و پاره‌خط‌های هذلولوی محدب می‌باشند.

**اثبات.** فرض کنیم  $l$  یک خط هذلولوی و  $x$  و  $y$  دو نقطه  $l$  باشند. با توجه به گزاره ۱-۲،  $x$  و  $y$  یک خط هذلولوی یکتا یعنی  $l$  را مشخص می‌کنند و در نتیجه پاره‌خط بسته واصل  $x$  و  $y$  یعنی  $l_{xy}$  ضرورتاً مشمول در  $l$  است. بنابراین  $l$  محدب است. یک استدلال مشابه، همچنین نتیجه می‌دهد که شعاع‌های هذلولوی و پاره‌خط‌های هذلولوی محدب هستند. بدین ترتیب اثبات گزاره ۲-۵ تکمیل می‌شود.

### فهرده‌المطلوب

تحدب نسبت به اشتراک‌گیری خوش رفتار است.

## تمرین ۵-۱.

فرض کنید  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  یک خانواده از زیرمجموعه‌های محدب صفحه هذلولوی باشد. ثابت کنید اشتراک آنها  $X = \bigcap X_\alpha$  نیز محدب است.

مثال دیگر برای مجموعه محدب و به نوعی مهم‌ترین مثال، در صفحه هذلولوی عبارت است از نیم‌صفحه که در بخش ۱-۲ بحث شد. برای یادآوری تعریف آن، به ازای خط هذلولوی  $l$  در صفحه هذلولوی، متمم  $l$  در صفحه هذلولوی دارای دو مؤلفه است که دو نیم‌صفحه باز معین شده با  $l$  می‌باشند.

یک نیم‌صفحه بسته معین شده با  $l$  عبارت است از اجتماع یکی از دو نیم‌صفحه باز معین شده با  $l$  با خود  $l$ . گاهی  $l$  را خط مرزی هر یک از دو نیم‌صفحه معین شده با  $l$  می‌نامیم. اینکه چرا نیم‌صفحه‌ها را می‌توانیم به عنوان زیرمجموعه‌های محدب پایه‌ای در نظر بگیریم را در بخش ۵-۲ بیان می‌کنیم. حال نشان می‌دهیم نیم‌صفحه‌ها محدب می‌باشند.

## گزاره ۵-۳.

نیم‌صفحه‌های باز و نیم‌صفحه‌های بسته در صفحه هذلولوی محدب می‌باشند. اثبات. در مدل نیم‌صفحه بالایی  $\mathbb{H}$  کار می‌کنیم و با یک نیم‌صفحه خاص کار را شروع می‌کنیم. فرض کنیم  $I$  قسمت مثبت محور موهومی در  $\mathbb{H}$  باشد و نیم‌صفحه باز زیر را که با  $I$  معین می‌شود را در نظر می‌گیریم:

$$U = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

فرض کنیم  $x$  و  $y$  دو نقطه در  $U$  باشند. اگر  $\operatorname{Re}(x) = \operatorname{Re}(y)$  آنگاه پاره‌خط هذلولوی  $l_{xy}$  واصل  $x$  و  $y$  مشمول در خط اقلیدسی  $L = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x)\}$  می‌باشد و چون  $L$  موازی  $I$  است، می‌بینیم که از  $I$  مجزا می‌باشد و لذا  $l_{xy}$  مشمول در  $U$  می‌باشد.

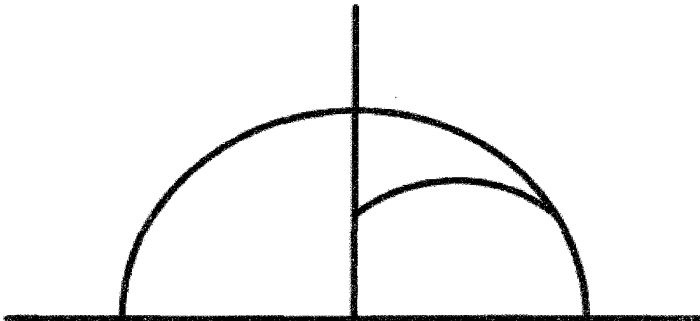
اگر  $\operatorname{Re}(x) \neq \operatorname{Re}(y)$  آنگاه پاره‌خط‌های هذلولوی  $l_{xy}$  واصل  $x$  به  $y$  مشمول در یک دایره اقلیدسی  $C$  با مرکزی روی محور حقیقی می‌باشد. چون تقاطع  $C$  و  $I$  حداکثر شامل یک نقطه است و چون هر دوی  $x$  و  $y$  در  $U$  می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که  $l_{xy}$  نیز مشمول در  $U$  است. بنابراین  $U$  محدب است.

ترکیب کردن این استدلال و این نکته که  $Möb(IH)$  بنا به تمرین ۲-۴۳ روی مجموعه‌های نیم‌صفحه‌های  $IH$  به طور متعددی عمل می‌کند و این نکته که  $Möb(IH)$  محدب را حفظ می‌کند، نتیجه می‌گیریم که هر نیم‌صفحه باز در  $IH$  محدب است. می‌توانیم همین استدلال را بدون تغییری در آن برای نیم‌صفحه‌های بسته نیز تکرار کنیم و نتیجه بگیریم که نیم‌صفحه‌های بسته نیز محدب می‌باشند. این مطلب اثبات گزاره ۳-۵ را تکمیل می‌کند.

فهوالمطلوب.

### تمرین ۵-۲.

ثابت کنید قرص باز هذلولوی  $D_s$  در قرص پوانکاره  $ID$  با مرکز  $o$  و شعاع هذلولوی  $s > 0$  محدب است. نتیجه بگیرید تمام قرص‌های هذلولوی محدب می‌باشند. از طرف دیگر، محدب نسبت به اجتماع‌گیری خوش رفتار نیست. برای مثال، فرض کنید  $l_1$  و  $l_2$  دو خط هذلولوی متمایز که لزوماً مجزا نیستند، باشند. نقاط  $z_1$  روی  $l_1$  و  $z_2$  روی  $l_2$  را چنان انتخاب کنید که هیچ نقطه اشتراک  $l_1$  و  $l_2$  یعنی  $l_1 \cap l_2$  نباشند. در این صورت پاره‌خط هذلولوی  $l_{12}$  که  $z_1$  را به  $z_2$  متصل می‌کند در  $l_1 \cup l_2$  واقع نیست و در نتیجه  $l_1 \cup l_2$  محدب نیست. برای روشن شدن این مبحث دو خط هذلولوی را به ترتیب قسمت مثبت محور موهمی و دایره واحد در نظر بگیرید. شکل ۵-۱ را ملاحظه کنید.



شکل ۵-۱- اجتماع دو خط هذلولوی یک محدب نیست.

اضافه کردن فرض تحدب، به ما این اجازه را می‌دهد که برخی از نتایج بخش ۳-۷ در مورد متریک هذلولوی و فاصله هذلولوی بین مجموعه‌ها را بهبود بخشیم. به عنوان مثال، تعمیم تمرین ۳-۱۹ را در زیر ملاحظه کنید.

#### گزاره ۵-۴.

فرض کنید  $X$  یک زیرمجموعه بسته و محدب  $\mathbb{H}$  و  $z$  نقطه‌ای از  $\mathbb{H}$  باشد که در  $X$  نیست. در این صورت نقطه یکتای  $x \in X$  موجود است به طوریکه  $d_H(z, x) = d_H(z, X)$ .

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که نقطه  $x \in X$  موجود است به طوریکه  $d_H(z, x) = d_H(z, X)$  از آنجائیکه  $d_H(z, X) = \inf\{d_H(z, x) \mid x \in X\}$  بنابراین دنباله  $\{x_n\}$  از نقاط  $X$  چنان موجود است که  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(z, x_n) = d_H(z, X)$  به ویژه بنا به تعریف همگرایی وجود دارد  $N > 0$  به طوریکه برای هر  $n > N$   $d_H(z, x_n) \leq d_H(z, X) + 1$ . حال قرار می‌دهیم  $C = d_H(z, X) + 1$  و فرض کنیم  $V_C(z) = \{w \in \mathbb{H} \mid d_H(z, w) \leq C\}$  نمایش دهنده قرص هذلولوی بسته به مرکز هذلولوی  $z$  و به شعاع هذلولوی  $C$  باشد.

زیرمجموعه  $X \cap V_C(z)$  در  $\mathbb{H}$  بسته و کراندار است و در نتیجه فشرده است. چون  $\{x_n \mid n \geq N\}$  یک دنباله در زیرمجموعه فشرده  $X \cap V_C(z)$  از  $\mathbb{H}$  می‌باشد، بنابراین وجود دارد یک زیر دنباله  $\{x_{n_k}\}$  از دنباله  $\{x_n\}$  که همگرا به یک نقطه  $x \in \mathbb{H}$  می‌باشد. چون  $x_{n_k} \in X$  می‌باشد و  $X$  بسته است، بنابراین  $x \in X$ . از آنجائیکه

$$d_H(x, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_H(z, x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_H(z, x_n)$$

$$d_H(z, x) = d_H(z, X)$$

حال باید نشان دهیم این نقطه  $x$  یکتاست. بنابراین فرض کنیم دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  چنان باشند که

$$d_H(z, X) = d_H(z, x_1) = d_H(z, x_2)$$

فرض کنیم  $l_{1,2}$  پاره‌خط هذلولوی واصل  $x_1$  به  $x_2$  باشد و فرض کنیم  $l$  خط هذلولوی شامل  $l_{1,2}$  باشد. بنا به تمرین ۳-۱۹ نقطه یکتای  $x$  روی  $l$  چنان موجود است که  $d_H(z, X) = d_H(z, x)$ . بعلاوه، با نگاه کردن به جواب تمرین ۳-۱۹ فاصله هذلولوی  $z$

تا نقطه  $y$  از خط  $\ell$  به طور یکنوا به عنوان تابعی از فاصله هذلولوی بین  $x$  و  $y$  یعنی  $d_H(x, y)$  افزایش می‌یابد.

به ویژه، چون  $d_H(z, x_1) = d_H(z, x_2)$ ، بنابراین نقطه  $x$  از خط  $\ell$  که فاصله هذلولوی  $d_H(z, \ell)$  را محقق می‌سازد، باید بین  $x_1$  و  $x_2$  واقع باشد. یعنی  $x$  باید روی  $\ell_{12}$  واقع باشد.

از آنجائیکه  $x_1$  و  $x_2$  هر دو در  $X$  می‌باشند، محدب بودن  $X$  نتیجه می‌دهد که  $\ell_{12}$  مشمول در  $X$  است و در نتیجه  $x$  نیز نقطه‌ای از  $X$  است. اما اگر  $x_1 \neq x_2$  آنگاه  $d_H(z, x) < d_H(z, x_1) = d_H(z, X)$  که تناقض است. بدین ترتیب اثبات گزاره ۵-۴ کامل می‌شود.

### فهوم المطلوب.

توجه داشته باشید که زیرمجموعه‌های محدب باز ویژگی مذکور در گزاره ۵-۴ برای زیرمجموعه‌های محدب بسته را ندارند. به عنوان مثال، فرض کنید  $U$  یک نیم‌صفحه باز باشد که با خط هذلولوی  $\ell$  معین شده است. در این صورت به ازای هر نقطه  $z \in \ell$  داریم  $d_H(z, U) = 0$  ولی هیچ نقطه‌ای مانند  $z \in U$  وجود ندارد به طوریکه  $d_H(x, z) = 0$ .

تمام مثال‌هایی که از مجموعه‌های محدب تاکنون ارائه شد یا زیرمجموعه بسته و یا زیرمجموعه باز صفحه هذلولوی بوده‌اند. زیرمجموعه‌های محدبی از صفحه هذلولوی وجود دارند که نه باز و نه بسته‌اند.

برای ارائه یک مثال فرض کنید  $U$  یک نیم‌صفحه باز باشد که با خط  $\ell$  معین شده است و فرض کنید  $x$  و  $y$  دو نقطه روی  $\ell$  باشند و  $\ell_{xy}$  پاره‌خط هذلولوی بسته واصل  $x$  و  $y$  باشد. در این صورت  $U \cup \ell_{xy}$  محدب است، اما نه باز است و نه بسته.

یک روش عمومی برای ساختن زیرمجموعه‌های محدب در صفحه هذلولوی وجود دارد، یعنی گرفتن پوش محدب. به ازای یک زیرمجموعه  $Y$  از صفحه هذلولوی، پوش محدب  $Y$  یعنی  $Conv(Y)$  عبارت است از اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب صفحه هذلولوی که شامل  $Y$  می‌باشند.

به عنوان مثال، برای مجموعه  $Y = \{x, y\}$  که شامل دو نقطه متمایز  $x$  و  $y$  می‌باشد، پوش محدب  $Conv(Y)$  برابر با پاره‌خط هذلولوی بسته واصل  $x$  و  $y$  می‌باشد. برای مشاهده این مطلب، ابتدا به یاد آوریم که بنا به گزاره ۵-۲، می‌دانیم که  $\ell_{xy}$  محدب است.

بنابراین، کافی است فقط نشان دهیم که هیچ مجموعه محدبی که شامل  $x$  و  $y$  باشد، وجود ندارد به طوری که زیرمجموعه سره  $l_{xy}$  باشد. اما با توجه به تعریف محدب بودن، هر مجموعه محدب که شامل  $x$  و  $y$  باشد، باید شامل پاره خط هذلولوی  $l_{xy}$  نیز باشد، در نتیجه  $Conv(Y) = l_{xy}$ .

طبیعی است که انتظار داشته باشیم پوش محدب یک مجموعه محدب خود آن مجموعه محدب را مجدداً به ما بدهد و در واقع همین طور هم می‌باشد.

### تمرین ۵-۳.

فرض کنید  $X$  یک مجموعه محدب صفحه هذلولوی باشد. ثابت کنید  $Conv(X) = X$ .

در بالا دیدیم که پوش محدب یک زوج از نقاط در صفحه هذلولوی عبارت است از پاره خط هذلولوی بسته واصل آن دو نقطه، در نتیجه پوش محدب یک مجموعه غیر محدب می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از آن مجموعه باشد.

### تمرین ۵-۴.

فرض کنید  $l_1$  و  $l_2$  دو خط هذلولوی باشند. پوش محدب اجتماع آنها یعنی  $Conv(l_1 \cup l_2)$  را مشخص کنید.

دلیل اینکه قبلاً در این بخش گفتیم نیم‌صفحه‌های باز مهم‌ترین مجموعه‌های محدب در صفحه هذلولوی می‌باشند، این است که مجموعه‌های محدب در صفحه هذلولوی به طور کلی مجموعه‌هایی هستند که قابل بیان بر حسب اشتراک خانواده‌ای از نیم‌صفحه‌های باز می‌باشند.

برای اینکه یک درکی از مسئله‌ای که در نظر گرفته‌ایم، پیدا کنیم، ابتدا با یک مثال خاص، یعنی قسمت مثبت محور موهومی  $I$  در  $\mathbb{H}$  شروع می‌کنیم. چون  $I$  یک خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  می‌باشد، بنابراین از گزاره ۵-۲ می‌دانیم که  $I$  محدب است.

برای بیان  $I$  به عنوان اشتراک یک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌ها، دو نیم‌صفحه  $A$  و  $B$  را که با  $I$  مشخص می‌شوند را در نظر می‌گیریم:

$$A = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0\}, \quad B = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$$

$$A \cap B = I = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} \quad \text{در این صورت داریم:}$$

همچنین می‌توانیم  $I$  را به صورت اشتراک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌های باز نیز بنویسیم. بدین ترتیب که هر یک از نیم‌صفحه‌های بالا را به صورت اشتراک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌های باز بنویسیم. به طور خاص، برای هر  $\varepsilon > 0$  قرار می‌دهیم:

$$A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) > -\varepsilon\}, \quad B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) < \varepsilon\}$$

در این صورت  $A$  را می‌توانیم به عنوان اشتراک  $A = \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$  و  $B$  را به عنوان اشتراک  $B = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon$  بیان کنیم. و لذا  $I$  را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم:

$$I = \bigcap_{\varepsilon > 0} (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)$$

از آنجائیکه  $Mob(\mathbb{H})$  به طور متعددی روی مجموعه خطوط هذلولوی  $\mathbb{H}$  عمل می‌کند، استدلال بالا نشان می‌دهد که هر خط هذلولوی قابل بیان برحسب هم اشتراک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌های بسته و هم اشتراک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌های باز می‌باشد.

### تمرین ۵-۵.

شعاع هذلولوی بسته و پاره‌خط هذلولوی بسته را بر حسب اشتراک خانواده‌ای از نیم‌صفحه‌های باز و برحسب اشتراک خانواده‌ای از نیم‌صفحه‌های بسته بیان کنید.

### قضیه ۵-۵.

زیرمجموعه  $X$  از صفحه هذلولوی محدب است اگر و فقط اگر قابل بیان برحسب اشتراک یک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌ها باشد.

**اثبات.** در واقع یک جهت قضیه ۵-۵ را اثبات کرده‌ایم. از گزاره ۵-۳ می‌دانیم که نیم‌صفحه‌ها محدب می‌باشند و از تمرین ۵-۱ می‌دانیم که اشتراک دسته‌ای از مجموعه‌های محدب، محدب است. بنابراین اشتراک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌ها محدب است.

حال فرض می‌کنیم  $X$  یک مجموعه محدب در صفحه هذلولوی باشد. باقی می‌ماند که نشان دهیم  $X$  قابل بیان بر حسب اشتراک یک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌ها می‌باشد. در ادامه این بخش، در مدل نیم‌صفحه بالایی صفحه هذلولوی  $\mathbb{H}$  کار می‌کنیم.

در حالت کلی، اثبات اینکه هر مجموعه محدبی قابل بیان برحسب اشتراک دسته‌ای از نیم‌صفحه‌هاست، دارای چهار چوب استدلالی مشابه با اثباتی است که برای قابل بیان بودن هر خط هذلولوی برحسب اشتراک دسته‌ای از نیم‌صفحه ارائه شد.

اگر چه، ساختن این خانواده نیم صفحه‌ها برای یک مجموعه محدب دلخواه، پیچیدگی‌های فنی دراد که برخی از آنها از اینکه یک مجموعه محدب لزوماً بسته و یا باز نمی‌باشد، ناشی می‌شوند، در نتیجه ما اثبات را برای حالت خاص یک زیرمجموعه محدب بسته  $X$  کامل می‌کنیم. خواننده علاقمند را توصیه می‌کنیم که اثبات را برای حالت کلی بیابد. فرض می‌کنیم  $X$  یک زیرمجموعه محدب بسته  $IH$  باشد و  $z$  یک نقطه دلخواه  $IH$  باشد که عضو  $X$  نیست. بنا به گزاره ۵-۴ وجود دارد یک نقطه یکتای  $x_z \in X$  به طوریکه

$$d_{IH}(z, x_z) = d_{IH}(z, IH)$$

فرض کنیم  $M_z$  پاره‌خط هذلولوی واصل  $x_z$  به  $z$  و فرض کنیم  $L_z$  خط هذلولوی عمود بر  $M_z$  و گذرنده از  $x_z$  باشد و خط هذلولوی  $L_z$  خط مرزی دو نیم‌صفحه‌ها می‌باشد، نیم‌صفحه باز  $A_z$  که شامل  $z$  است و نیم‌صفحه بسته  $B_z$  که شامل  $z$  نیست. حال نشان می‌دهیم  $X$  مشمول در  $B_z$  است. فرض کنیم چنین نباشد. چون  $A_z$  و  $B_z$  نیم‌صفحه‌های مجزایی می‌باشند که اجتماع آنها  $IH$  می‌باشد، بنابراین نقطه  $P_z$  در  $X \cap A_z$  موجود است. فرض کنیم  $l_z$  پاره‌خط هذلولوی واصل  $x_z$  به  $P_z$  باشد و  $l$  خط هذلولوی شامل  $l_z$  باشد.

چون  $M_z$  بر  $L_z$  عمود است و چون  $M_z$  و  $L_z$  همدیگر را در  $x_z$  قطع می‌کنند، بنا به گزاره ۵-۴ داریم:

$$d_{IH}(z, y) \geq d_{IH}(z, x_z)$$

برای هر نقطه  $y$  در  $L_z$  و تساوی زمانی رخ می‌دهد که  $y = x_z$ . همچنین برای هر نقطه  $y$  در  $B_z$  که روی  $L_z$  واقع نیست، پاره‌خط هذلولوی واصل  $y$  به  $z$  را قطع می‌کند و لذا همچنین داریم:

$$d_{IH}(z, y) > d_{IH}(L_z, z) = d_{IH}(x_z, z)$$

یعنی داریم:

$$d_{IH}(z, y) \geq d_{IH}(x_z, z)$$

برای هر نقطه  $y$  در نیم‌صفحه بسته  $B_z$  و تساوی زمانی رخ می‌دهد که  $y = x_z$ .



حال گزاره ۵-۴ را مورد نقطه  $z$  و خط هذلولوی  $l$  به کار می‌بریم. تنها خط هذلولوی گذرنده از  $x_z$  که  $M_z$  را به طور عمود قطع کند عبارت است از  $L_z$ . چون  $P_z$  در  $A_z$  است و چون  $A_z$  و  $L_z$  مجزا می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که  $l \neq L_z$  و همچنین اینکه  $l$  و  $M_z$  نمی‌توانند همدیگر را به طور عمودی قطع کنند.

از آنجائیکه  $l$  و  $M_z$  همدیگر را به طور عمودی قطع نمی‌کنند، راه حل تمرین ۳-۱۹ نتیجه می‌دهد که وجود دارد نقطه  $a$  روی  $l$  به طوریکه:

$$d_H(a, z) < d_H(x_z, z)$$

با استدلالی که ارائه شد، نقطه  $a$  نمی‌تواند در  $B_z$  واقع باشد و در نتیجه نقطه  $a$  در  $l \cap A_z$  وجود دارد به طوریکه:

$$d_H(a, z) < d_H(x_z, z)$$

فرض کنیم  $a_\ell$  نقطه‌ای از  $l$  باشد که در راه حل تمرین ۳-۱۹ بدست می‌آید و شرط زیر را برآورده می‌کند:

$$d_H(z, a_\ell) \leq d_H(z, a)$$

برای هر نقطه  $a$  روی  $l$ . چون  $d_H(a, z)$  به عنوان تابعی از  $d_H(a, a_\ell)$  به طور یکنوا افزایش می‌یابد، نتیجه می‌گیریم که  $a_\ell$  نیز عضو  $A_z$  است. به ویژه، صرف نظر از اینکه  $a_\ell$  روی  $l_z$  باشد یا نه، نقطه  $b_z$  روی  $l_z$  موجود است به طوریکه:

$$d_H(z, b_z) < d_H(z, x_z)$$

امّا، چون  $X$  محدب است و چون هر دوی نقاط انتهایی  $l_z$  یعنی  $P_z$  و  $x_z$  عضو  $X$  می‌باشند نتیجه می‌گیریم که  $l_z$  مشمول در  $X$  است. اینجا از محدب بودن  $X$  استفاده کرده‌ایم.

بنابراین نقطه  $b_z$  از  $X$  را چنان ساخته ایم که  $d_H(z, b_z) < d_H(z, x_z)$  و این با نحوه انتخاب  $x_z$  در تناقض است. این تناقض اثبات اینکه  $X$  مشمول در نیم‌صفحه بسته  $B_z$  است را کامل می‌کند.

برای کامل کردن اثبات قضیه ۵-۶ توجه داشته باشید که  $X$  را می‌توانیم به صورت اشتراک زیر بنویسیم:

$$X = \bigcap \{B_z \mid z \in \mathbb{H}, z \notin X\}$$

فهرالمطلوب.

یکی از مزایای رویکرد ما در تعریف مجموعه‌های محدب و نتایج قضیه ۵-۵، این است که می‌توانیم افق تعریف خود را گسترش دهیم. یعنی می‌توانیم محدب بودن یک زیرمجموعه اجتماع صفحه هذلولوی و دایره در بی نهایت آن را تعریف کنیم، بدون اینکه نیاز باشد تعریف خود را به طور اساسی تغییر دهیم. برای تشریح این مطالب، در مدل نیم‌صفحه بالایی  $IH$  که دایره در بی نهایت آن  $\overline{IR}$  است، کار می‌کنیم.

هر خط هذلولوی  $l$  در  $IH$  یک زوج از نقاط  $\overline{IR}$  را مشخص می‌کند، یعنی نقاط در بی نهایت آن، و هر نیم‌صفحه مشخصی شده با  $l$  به طور طبیعی وابسته به یکی از این دو قوس  $\overline{IR}$  مشخص شده با این زوج از نقاط است. بنابراین با یک اغماض می‌توانیم صحبت از نیم‌صفحه‌های  $IH$  که شامل نقطه‌ای از  $\overline{IR}$  می‌باشند، کنیم.

به ویژه برای یک زیرمجموعه  $X$  از  $IH \cup \overline{IR}$ ، پوش محدب  $X$  یعنی  $Conv(X)$  را در  $IH$  به صورت اشتراک تمام نیم صفحه‌های  $IH$  که شامل  $X$  می‌باشند، تعریف می‌کنیم.

به عنوان مثال، اگر  $x$  و  $y$  دو نقطه متمایز  $\overline{IR}$  باشند، در این صورت پوش محدب  $Y = \{x, y\}$  یعنی  $Conv(Y)$  عبارت است از خط هذلولوی مشخص شده با  $x$  و  $y$ . به طور مشابه، اگر  $z$  نقطه‌ای از  $IH$  باشد و  $x$  نقطه‌ای از  $\overline{IR}$  باشد، در این صورت پوش محدب  $Z = \{z, x\}$  یعنی  $Conv(Z)$  عبارت است از شعاع هذلولوی مشخص شده با  $z$  و  $x$ .

## ۲-۵. چند ضلعی‌های هذلولوی

مانند هندسه اقلیدسی، چند ضلعی یکی از اشیاء اساسی در هندسه هذلولوی می‌باشد. در هندسه اقلیدسی، یک چند ضلعی یک مجموعه محدب بسته است که محدود به پاره‌خط‌های اقلیدسی است. می‌خواهیم این تعریف را تا حد ممکن در صفحه هذلولوی متصور سازیم.

با شروع از تعریف تحدب توصیف شده در بخش ۵-۱ و طبقه‌بندی آن، یعنی یک مجموعه محدب عبارت است از اشتراک دسته‌ای از نیم صفحه‌ها، نیاز است که یک شرطی روی این دسته اعمال کنیم. شرطی که اعمال خواهیم کرد، موضعاً متناهی<sup>۱</sup> بودن است.

<sup>۱</sup> Locally finiteness

## تعریف ۵-۶.

فرض کنید  $H = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$  یک خانواده از نیم صفحه‌های صفحه هذلولوی باشد و به ازای هر  $\alpha \in A$  فرض کنید  $l_\alpha$  خط مرزی  $H_\alpha$  باشد. خانواده  $H$  موضعاً متناهی است هرگاه به ازای هر نقطه  $z$  در صفحه هذلولوی  $\varepsilon > 0$  موجود باشد به طوریکه فقط تعداد متناهی خط مرزی  $l_\alpha$  قرص هذلولوی باز  $U_\varepsilon(z)$  به مرکز هذلولوی  $z$  و به شعاع هذلولوی  $\varepsilon$  را قطع کند.

به یک بیان، اگر چه خانواده  $\{H_\alpha\}$  ممکن است نامتناهی باشد، نزدیک به هر نقطه یک خانواده متناهی به نظر می‌رسد هرگاه در یک قرص هذلولوی به شعاع  $\varepsilon$  تلقی شود. توجه داشته باشید که مقدار  $\varepsilon$  در حالت کلی تابعی برحسب  $z$  می‌باشد.

به سادگی ملاحظه می‌شود که هر خانواده متناهی  $H = \{H_k\}_{1 \leq k \leq n}$  از نیم صفحه‌ها موضعاً متناهی است، زیرا هر قرص باز  $U_\varepsilon(z)$  در صفحه هذلولوی حداکثر  $n$  خط مرزی را قطع می‌کند، زیرا فقط  $n$  نیم صفحه در این خانواده وجود دارد. خانواده ناشمارایی از نیم صفحه‌ها وجود ندارد به طوریکه موضعاً متناهی باشد.

## تمرین ۵-۶.

ثابت کنید یک خانواده ناشمارا از نیم صفحه‌های مجزا در صفحه هذلولوی نمی‌تواند موضعاً متناهی باشد.

یک مثال از یک خانواده نامتناهی از نیم صفحه‌ها که موضعاً متناهی است، خانواده  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  در  $\mathbb{H}$  است که در آن خط مرزی  $H_n$  یعنی  $l_n$  مشمول در دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $n$  و شعاع اقلیدسی ۱ می‌باشد و  $H_n$  نیم صفحه بسته مشخص شده با  $l_n$  است که شامل نقطه  $2i$  است. بخشی از این خانواده خطوط مرزی در شکل ۵-۲ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۵-۲ چندین خط مرزی

برای ملاحظه موضعاً متناهی بودن  $\{H_n\}$ ، نقطه  $x \in \mathbb{H}$  را در نظر بگیرید. به ازای هر  $\varepsilon > 0$  قرص باز هذلولوی  $U_\varepsilon(x)$  به مرکز هذلولوی  $x$  و به شعاع هذلولوی  $\varepsilon$  را در

نظر بگیرید. فاصله هذلولوی بین  $x$  و خط هذلولوی  $\ell_\mu$  که مشمول در خط اقلیدسی  $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x) + \mu\}$  با شرط

$$d_{\mathbb{H}}(x, \ell_\mu) < \frac{\mu}{\operatorname{Im}(x)}$$

باشد، چون سمت راست طول هذلولوی پاره خط اقلیدسی واصل  $x$  به  $x + \mu$  می باشد.

به ویژه، قرص هذلولوی  $U_\varepsilon(x)$  مشمول در نوار زیر می باشد:

$$\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(x) - \varepsilon \operatorname{Im}(x) < \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(x) + \varepsilon \operatorname{Im}(x)\}$$

چون به ازای هر  $\varepsilon > 0$  این نوار فقط تعداد متناهی خط  $\ell_n$  را قطع می کند، می بینیم که خانواده  $\{H_n\}$  موضعاً متناهی است.

اگر چه، شمارا بودن یک خانواده از نیم صفحه ها نتیجه نمی دهد که آن خانواده موضعاً متناهی است. به عنوان مثال، خانواده  $H = \{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  از نیم صفحه های بسته صفحه هذلولوی  $\mathbb{H}$  را که در آن خط مرزی  $H_n$  یعنی  $\ell_n$  در صفحه هذلولوی  $\mathbb{H}$  مشمول در دایره اقلیدسی به شعاع اقلیدسی ۱ و مرکز اقلیدسی  $\frac{1}{n}$  می باشد و  $H_n$  نیم صفحه بسته مشخص شده با  $\ell_n$  است که شامل  $2i$  است.

برای ملاحظه موضعاً متناهی نبودن، مشاهده می کنیم که به ازای هر  $\varepsilon > 0$  قرص باز  $U_\varepsilon(i)$  تعداد نامتناهی خط  $\ell_n$  را قطع می کند که آنهایی می باشند که فاصله هذلولوی

$$d_{\mathbb{H}}(i, \frac{1}{n} + i) < \varepsilon$$

در شرط  $d_{\mathbb{H}}(i, \frac{1}{n} + i) < \varepsilon$  صدق می کنند.

### تعریف ۵-۷.

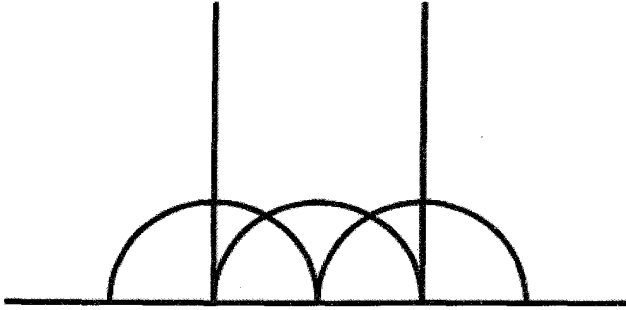
یک چند ضلعی هذلولوی عبارت است از یک مجموعه محدب بسته در صفحه هذلولوی که قابل بیان برحسب اشتراک خانواده ای موضعاً متناهی از نیم صفحه های بسته باشد.

نکته ای که باید در مورد این تعریف توجه داشت این است که برای یک چند ضلعی هذلولوی  $P$ ، همیشه خانواده های موضعاً متناهی متفاوتی از نیم صفحه های بسته وجود دارند که اشتراک آنها برابر  $P$  باشد. همچنین، در تعریف از نیم صفحه های بسته استفاده کرده ایم،

زیرا یک زیرمجموعه بسته  $\mathbb{H}$  را نمی‌توانیم به صورت اشتراک یک خانواده موضعاً متناهی از نیم‌صفحه‌های باز بنویسیم.

هم‌اکنون یک مثال از چند ضلعی هذلولوی در  $\mathbb{H}$  دیده‌ایم، یعنی  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_n$  که در آن  $H_n$  نیم‌صفحه بسته مشخص شده با خط هذلولوی  $l_n$  مشمول در دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $n \in \mathbb{Z}$  و به شعاع اقلیدسی ۱ می‌باشد.

یک مثال دیگری از چند ضلعی هذلولوی در  $\mathbb{H}$  در شکل ۳-۵ رسم شده است که اشتراک پنج نیم‌صفحه بسته  $H_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ ،  $H_2 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \geq -1\}$ ،  $H_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z+1| \geq 1\}$  و  $H_4 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z-1| \geq 1\}$ ،  $H_5 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1\}$  می‌باشد.



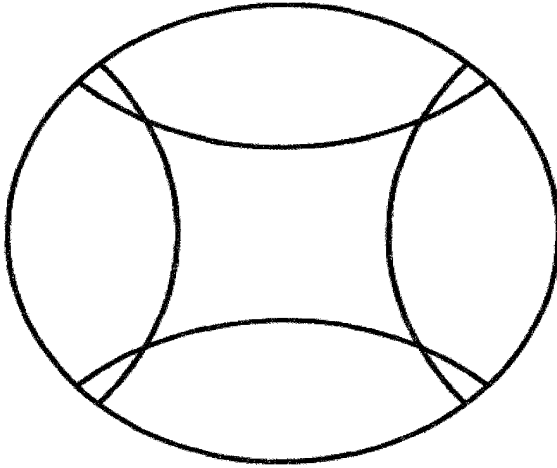
شکل ۳-۵ یک چند ضلعی هذلولوی در  $\mathbb{H}$

علاوه بر چند ضلعی‌های هذلولوی می‌توانیم خانواده‌ای از چند ضلعی‌های هذلولوی را در نظر بگیریم. برای مثال در مدل قرص پوانکاره  $\mathbb{D}$  کار می‌کنیم. برای  $r > 1$  چند ضلعی هذلولوی  $P_r$  را در نظر بگیرید که اشتراک چهار نیم‌صفحه بسته

$$H_k = \{z \in \mathbb{D} \mid |z - ri^k| \geq \sqrt{r^2 - 1}\}$$

$k = 0, 1, 2, 3$  می‌باشد. برای روشن شدن چنین چند ضلعی هذلولوی به ازای  $r = 1.5$

شکل ۴-۵ را ملاحظه کنید.



شکل ۵-۴ یک چند ضلعی هذلولوی در  $ID$

تاکنون، هیچ یک از تعاریف ما، استفاده‌ای از یک خاصیت ذاتی یک مدل خاص از صفحه هذلولوی نکرده‌اند. در واقع، هر آنچه که گفته‌ایم در هر مدلی معنادار است و بنابراین آزادیم که این تعاریف را در هر مدلی که راحت‌تر و مناسب‌تر است به کار ببریم.

توجه داشته باشید که بنا به تعریفی که برای چند ضلعی هذلولوی انتخاب کرده‌ایم. برخی از زیرمجموعه‌های صفحه هذلولوی وجود دارند که شرایط این تعریف از چند ضلعی هذلولوی را دارند، اما ما نمی‌خواهیم آنها را به عنوان چند ضلعی هذلولوی در نظر بگیریم.

به عنوان مثال، یک خط هذلولوی  $l$  یک چند ضلعی هذلولوی است، زیرا که یک مجموعه محدب بسته در صفحه هذلولوی است که قابل بیان برحسب اشتراک خانواده  $\{A_\ell, B_\ell\}$  از نیم‌صفحه‌های بسته می‌باشد که در آن  $A_\ell$  و  $B_\ell$  دو نیم‌صفحه بسته مشخص شده با  $l$  می‌باشند.

کمی ناراحت کننده است که خط هذلولوی را یک چند ضلعی هذلولوی به حساب آوریم. یک راه پرهیز از این امر، اضافه کردن شرط دیگری به تعریف چند ضلعی هذلولوی است. به یاد آورید که درون یک مجموعه  $X$  در صفحه هذلولوی بزرگترین زیرمجموعه باز مشمول در  $X$  می‌باشد. درون یک خط هذلولوی تهی است زیرا که خط هذلولوی شامل هیچ زیرمجموعه بازی از صفحه هذلولوی نمی‌باشد.

## تعریف ۸-۵

می‌گوییم چند ضلعی هذلولوی *تاب‌هایده*<sup>۱</sup> است هرگاه درون آن ناتهی باشد و می‌گوییم *تاب‌هایده*<sup>۲</sup> است اگر درون آن تهی باشد.

فرض می‌کنیم که تمام چند ضلعی‌های هذلولوی *تاب‌هایده‌اند*، مگر اینکه خلاف آن تصریح شود. برای مثال، تمام چند ضلعی‌های هذلولوی که در بالا ارائه شدند، *تاب‌هایده* هستند. همانطوری‌که بیان شد، درک چند ضلعی‌های هذلولوی *تاب‌هایده* ساده و آسان است.

## تمرین ۷-۵

ثابت کنید یک چند ضلعی *تاب‌هایده* یا یک خط هذلولوی است و یا یک شعاع هذلولوی بسته است و یا یک پاره‌خط هذلولوی بسته است.

فرض کنید  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی در صفحه هذلولوی باشد. مرز  $P$  یعنی  $\partial P$  یک تجزیه بسیار مناسبی دارد. برای دیدن این تجزیه، فرض کنید  $l$  یک خط هذلولوی باشد که  $P$  را قطع می‌کند. ممکن است  $l$  درون  $P$  را نیز قطع کند. در این حالت، اشتراک  $P \cap l$  یک زیرمجموعه بسته و محدب خط  $l$  می‌باشد که فقط یک نقطه نیست، در نتیجه یا یک پاره‌خط هذلولوی بسته در  $l$  و یا یک شعاع هذلولوی بسته در  $l$  یا کل  $l$  می‌باشد.

از طرف دیگر ممکن است  $l$  از درون  $P$  عبور نکند. در این حالت  $P$  مشمول در یکی از دو نیم‌صفحه بسته مشخص شده با  $l$  می‌باشد. اثبات این موضوع بسیار شبیه تحلیلی است که با جزئیات در بخش ۵-۲ ارائه شد. اشتراک  $P \cap l$  مجدداً یک زیرمجموعه بسته و محدب  $l$  است. و بنابراین یا یک نقطه  $l$ ، یا یک پاره‌خط هذلولوی بسته در  $l$  یا یک شعاع هذلولوی بسته در  $l$  و یا کل  $l$  می‌باشد. تمام چهار حالت بالا می‌تواند اتفاق بیفتد، همانطوری‌که در شکل ۵-۵ نمایش داده شده است، که در آن چند ضلعی هذلولوی  $P$  اشتراک چهار نیم‌صفحه بسته یعنی

$$H_{\neq} = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \geq -1\}, H_{\leq} = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$$

$$\text{و } H_{\neq} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1\}$$

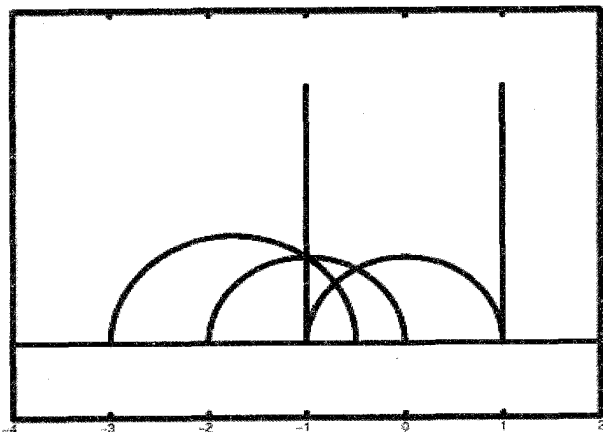
هذلولوی، یک شعاع هذلولوی بسته، یک شعاع هذلولوی بسته و یک خط  $H_{\neq} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z+1| \geq 1\}$  می‌باشد. خطوط مرزی  $P$  به ترتیب  $P$  را در یک خط

هذلولوی، یک شعاع هذلولوی بسته، یک شعاع هذلولوی بسته و یک پاره‌خط هذلولوی

<sup>1</sup> Nongenerate

<sup>2</sup> Degenerate

بسته قطع می‌کنند. خط هذلولوی  $l$  را با نقاط انتهایی در بی نهایت  $-3$  و  $-\frac{1}{2}$ ،  $P$  را در یک تک نقطه‌ای قطع می‌کند.



شکل ۵-۵ تقاطع خط‌های هذلولوی با یک چند ضلعی هذلولوی

در حالت کلی، فرض کنید  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی باشد و  $l$  یک خط هذلولوی باشد به طوری که  $P$  خط  $l$  را قطع کند و در نتیجه  $P$  مشمول در یکی از نیم صفحه‌های بسته مشخص شده با  $l$  باشد. اگر اشتراک  $P \cap l$  یک تک نقطه‌ای باشد، می‌گوییم آن نقطه یک رأس  $P$  می‌باشد. در حالات دیگر، یعنی اشتراک  $P \cap l$  یا یک پاره‌خط هذلولوی بسته و یا یک شعاع هذلولوی بسته و یا کل  $l$  است، می‌گوییم آن اشتراک یک ضلع  $P$  است. ضلع‌ها و رأس‌های یک چند ضلعی هذلولوی ارتباط بسیار نزدیکی با یکدیگر دارند.

#### لم ۵-۹.

فرض کنید  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی باشد. رأس‌های  $P$  نقاط انتهایی ضلع‌های  $P$  می‌باشند.

اثبات. لم ۵-۹ یک نتیجه نسبتاً مستقیم تعریف ما از چند ضلعی هذلولوی به عنوان اشتراک خانواده‌ای موضعاً متناهی از نیم صفحه‌های بسته صفحه هذلولوی می‌باشد.



برای آغاز اثبات لم ۵-۹، ابتدا  $P$  را برحسب اشتراک یک خانواده موضعاً متناهی  $H$  از نیم صفحه‌های هذلولوی متمایز بیان می‌کنیم. می‌نویسیم  $\mathcal{H} = \{H_n\}_{n \in A}$  که در آن  $A$  یک مجموعه (ضرورتاً) شمارش پذیر است و  $l_n$  خط مرزی  $H_n$  می‌باشد.

فرض کنیم  $p$  یک نقطه  $\partial P$  باشد. موضعاً متناهی بودن  $\mathcal{H}$  نتیجه می‌دهد که وجود دارد  $\varepsilon > 0$  به طوریکه تعداد متناهی  $l_n$  قرص هذلولوی باز  $U_\varepsilon(p)$  را قطع می‌کنند.

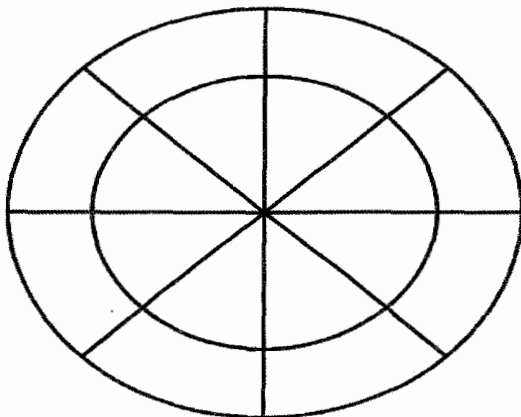
به ازای هر  $\delta < \varepsilon$ ، تعداد خطوط مرزی که  $U_\delta(p)$  را قطع می‌کنند، از بالا با تعداد خطوط مرزی که  $U_\varepsilon(p)$  را قطع می‌کنند، کراندار شده است. به ویژه هرگاه  $\delta \rightarrow 0$  تعداد خطوط مرزی که  $U_\delta(p)$  را قطع می‌کند یا ثابت می‌ماند و یا کاهش می‌یابد.

از آنجائیکه فقط تعداد متناهی خط مرزی  $U_\varepsilon(p)$  را قطع می‌کنند، وجود دارد  $\varepsilon < \varepsilon'$  به طوریکه تمام خطوط مرزی که  $U_{\varepsilon'}(p)$  را قطع می‌کنند در واقع از  $p$  می‌گذرند. این نقطه اساسی و حیاتی است که در آن از موضعاً متناهی بودن  $H$  استفاده کرده‌ایم.

فرض کنید  $H_1, \dots, H_n$  نیم صفحه‌های بسته‌ای در  $\mathcal{H}$  باشند که خطوط مرزی آنها شامل  $p$  است و اشتراک آنها را در نظر بگیرید. از آنجائیکه  $P$  ناتباهیده است،  $P$  مشمول در هیچ خط هذلولوی نمی‌باشد، بنابراین هیچ دوتایی از این نیم صفحه‌های بسته نمی‌توانند دارای یک خط مرزی یکسان باشند.

این  $n$  خط مرزی، قرص هذلولوی  $U_\delta(p)$  را به  $2n$  ناحیه گوه‌ای شکل می‌شکند.

اشتراک  $\bigcap_{k=1}^n H_k$  یکی از این نواحی گوه‌ای شکل می‌باشد. یک بیان روشن از این پدیده در مدل قرص پوانکاره با رأس  $p = 0$  در شکل ۵-۶ رسم شده است.



شکل ۵-۶ برش‌هایی از قرص واحد

توجه داشته باشید که ضرورتاً باید دو نیم‌صفحه بسته  $H_j$  و  $H_m$  در خانواده  $H$

$$\bigcap_{k=1}^n H_k = H_j \cap H_m \text{ موجود باشند به طوریکه}$$

به ویژه، رأس  $p$  نقطه اشتراک دو خط مرزی  $l_j$  و  $l_m$  می‌باشد و دو ضلعی از  $P$  که شامل  $p$  می‌باشند عبارتند از دو ضلعی از  $P$  که مشمول در  $l_j$  و  $l_m$  می‌باشند. بدین ترتیب اثبات تمام است.

### فهرالمطلوب.

اثبات لم ۵-۹ نشان می‌دهد که یک تصویر موضعی بسیار خوبی از ساختار مرز یک چند ضلعی هذلولوی  $P$  وجود دارد. در واقع، به ازای یک چند ضلعی هذلولوی داده شده، می‌توانیم این اثبات را به کار ببریم و یک خانواده موضعیاً متناهی طبیعی از نیم‌صفحه‌های بسته  $\mathcal{H}$  بسازیم که اشتراک آن  $P$  باشد.

یعنی فرض کنیم  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی در صفحه هذلولوی باشد. خانواده  $\mathcal{H}$  از نیم‌صفحه‌های بسته را به ترتیب زیر می‌سازیم. اضلاع  $P$  را به صورت  $s_1, \dots, s_k, \dots$  شماره گذاری می‌کنیم. به ازای هر  $s_k$  فرض کنیم  $l_k$  خط هذلولوی شامل  $s_k$  باشد و فرض کنیم  $H_k$  نیم‌صفحه بسته مشخص شده با  $l_k$  باشد که شامل  $P$  است. در این صورت  $\mathcal{H} = \{H_k\}$  یک خانواده موضعیاً متناهی از نیم‌صفحه‌های بسته است و  $P = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ .

یکی از نتایج این تحلیل این است که هر رأس  $v$  از چند ضلعی هذلولوی  $P$  اشتراک دو ضلع  $P$  می‌باشد. به ویژه، می‌توانیم زاویه داخلی<sup>۱</sup>  $P$  را در  $v$  اندازه‌گیری کنیم. **تعریف ۵-۱۰.**

فرض کنیم  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی و  $v$  یک رأس  $P$  باشد که اشتراک دو ضلع  $s_1$  و  $s_2$  از  $P$  می‌باشد. فرض کنیم  $l_k$  خط هذلولوی شامل  $s_k$  باشد. اجتماع  $l_1 \cup l_2$  صفحه هذلولوی را به چهار مؤلفه تقسیم می‌کند که یکی از آنها شامل  $P$  است. زاویه داخلی<sup>۱</sup>  $P$  در  $v$  عبارت است از زاویه بین  $l_1$  و  $l_2$  که در مؤلفه‌ای از مکمل  $l_1 \cup l_2$  اندازه‌گیری می‌شود که شامل  $P$  است.

فرض کنیم  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی است. با تعریفی که از رأس ارائه نمودیم، یک رأس  $P$  نمی‌تواند داخل یک ضلع  $P$  قرار داشته باشد، بنابراین هر زاویه داخلی  $P$  در بازه  $(0, \pi)$  قرار دارد.

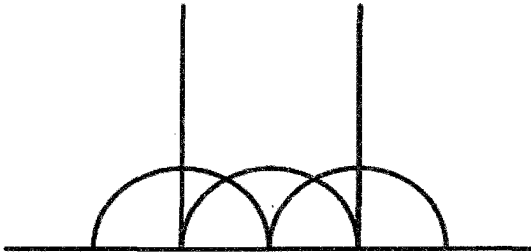
<sup>۱</sup> Interior angle

تعریف رأس را کمی می‌توانیم ساده‌تر کنیم.

### تعریف ۵-۱۱.

می‌گوییم چند ضلعی هذلولوی  $P$  در  $I\mathbb{H}$  دارای یک رأس ایده‌آل<sup>۱</sup>  $v \in \overline{\mathbb{R}}$  است، هرگاه دو ضلع  $P$  موجود باشند به طوری‌که یا شعاع هذلولوی بسته باشند و یا خطوط هذلولوی باشند به طوری‌که  $v$  را به عنوان نقطه انتهایی در بی‌نهایت سهیم باشند.

فرض کنیم  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی و دارای یک رأس ایده‌آل است. در این صورت زاویه داخلی در این رأس ایده‌آل برابر صفر است. مشاهده این امر ساده است، هرگاه نیم‌صفحه بالایی  $I\mathbb{H}$  را ملاحظه کنیم. اگر  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی در  $I\mathbb{H}$  و  $v$  یک رأس ایده‌آل آن باشد و  $s_1$  و  $s_2$  اضلاع  $P$  باشند که  $v$  را به عنوان نقطه انتهایی در بی‌نهایت سهیم هستند، آنگاه دایره‌های در  $\overline{\mathbb{C}}$  که شامل  $s_1$  و  $s_2$  می‌باشند، در  $v$  مماس هستند، و در نتیجه زاویه بین آنها صفر می‌باشد. شکل ۵-۷ را برای ملاحظه یک چند ضلعی هذلولوی در  $I\mathbb{H}$  با رأس ایده‌آلی در  $\infty$  ببینید.



شکل ۵-۷ یک چند ضلعی هذلولوی با یک رأس ایده‌آل در  $\infty$

این بخش را با بحث در مورد برخی از انواع چند ضلعی‌های هذلولوی به پایان می‌بریم. ابتدا با تعریف زیر شروع می‌کنیم که چند ضلعی‌های هذلولوی مورد مطالعه را به این رده از چند ضلعی‌های هذلولوی محدود خواهیم کرد.

### تعریف ۵-۱۲.

یک چند ضلعی  $P$  با تعداد اضلاع متناهی در صفحه هذلولوی را معقول<sup>۲</sup> می‌نامیم هرگاه  $P$  شامل هیچ نیم‌صفحه باز نباشد.

<sup>1</sup> Ideal vertex

<sup>2</sup> Reasonable

توجه داشته باشید که اگر  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی معقول در صفحه هذلولوی با رأس‌های  $s_1, \dots, s_m$  باشد که رأس‌های آن پاد ساعت‌گرد نامگذاری شده‌اند، در این صورت هر دو رأس متوالی  $s_j$  و  $s_{j+1}$  (که در آن فرض می‌کنیم  $s_{m+1} = s_1$ ) یا در یک رأس یا در یک رأس ایده‌آل سهیم هستند. به ویژه، مجموع تعداد رأس‌های  $P$  و تعداد رأس‌های ایده‌آل  $P$  برابر است با تعداد اضلاع  $P$ .

برای یک یک چند ضلعی با تعداد اضلاع متناهی دلخواه در صفحه هذلولوی مانند  $Q$ ، بهترین چیزی که می‌توان گفت این است که مجموع تعداد رأس‌های  $Q$  و تعداد رأس‌های ایده‌آل  $Q$  کوچکتر یا مساوی با تعداد اضلاع  $Q$  می‌باشد، چونکه نقطه در بی‌نهایت یک ضلع یک چند ضلعی لزوماً یک رأس ایده‌آل نمی‌باشد. به عنوان مثال یک نیم‌صفحه هذلولوی بسته را در خاطر داشته باشید که دارای یک ضلع است ولی دارای هیچ رأس و یا رأس ایده‌آلی نمی‌باشد.

حال، چند ضلعی‌های هذلولوی فشرده را در نظر می‌گیریم. چون چند ضلعی هذلولوی فشرده  $P$  ضرورتاً کراندار است (با توجه به تعریف فشرده‌گی) و چون  $P$  ضرورتاً تعداد متناهی ضلع دارد (با توجه به موضعاً متناهی بودن خانواده‌ای از نیم‌صفحه‌های بسته که اشتراک آن برابر  $P$  است) و چون شعاع‌های هذلولوی و خطوط هذلولوی کراندار نیستند، نتیجه می‌گردد که تمام ضلع‌های  $P$  پاره‌خط‌های هذلولوی بسته می‌باشند. به ویژه، یک چند ضلعی هذلولوی فشرده دارای هیچ رأس ایده‌آلی نمی‌باشد و تعداد رأس‌های آن برابر است با تعداد اضلاعش. بنابراین یک چند ضلعی هذلولوی فشرده ضرورتاً یک چند ضلعی معقول می‌باشد. در واقع کمی بیشتر از این نیز درست است.

### تمرین ۵-۸

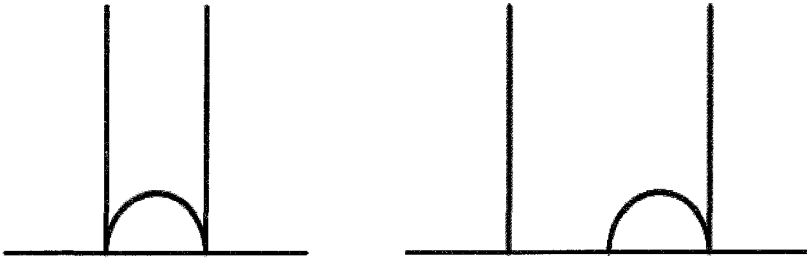
فرض کنید  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی فشرده باشد. ثابت کنید  $P$  پوش محدب رأس‌های خودش می‌باشد.

هر چند که تمرکز خود را به چند ضلعی‌های هذلولوی فشرده معطوف کرده‌ایم، چند ضلعی هذلولوی نا فشرده معقول در بخش‌های بعدی این فصل نقش مهمی را در بخش‌های بعدی این فصل ایفاء خواهند کرد.

به طور کلی یک  $n$ -ضلعی هذلولوی عبارت است از یک چند ضلعی هذلولوی معقول با  $n$  ضلع. یک  $n$ -ضلعی هذلولوی فشرده را منتظم می‌نامیم هرگاه طول تمام ضلع‌های آن با هم برابر باشند و تمام زاویه‌های داخلی آن با هم برابر باشند. به ازای عدد طبیعی  $n \geq 3$ ,

یک  $n$ -ضلعی ایده‌آل عبارت است از یک چند ضلعی هذلولوی که دارای  $n$  ضلع و  $n$  رأس ایده‌آل باشد.

همانند صفحه اقلیدسی، تعدادی از چند ضلعی‌های هذلولوی نیز دارای نام‌های خاص می‌باشند. یک مثلث هذلولوی عبارت است از یک چند ضلعی هذلولوی معقول با سه ضلع. در شکل ۵-۸ یک مثلث هذلولوی ایده‌آل و یک چند ضلعی هذلولوی با سه ضلع نمایش داده می‌شود که مثلث هذلولوی نیست. یک چهار ضلعی هذلولوی عبارت است از یک چند ضلعی هذلولوی معقول با چهار ضلع و یک لوزی هذلولوی عبارت است از یک چهار ضلعی هذلولوی که ضلع‌های آن دارای طول برابرند.



شکل ۵-۸ یک مثلث هذلولوی ایده‌آل و یک سه ضلعی هذلولوی

یک متوازی الاضلاع هذلولوی عبارت است از یک چهار ضلعی هذلولوی که ضلع‌های مقابل آن مشمول در خطوط موازی و یا خطوط فراموازی باشند. توجه داشته باشید که چون توازی شرایطی کاملاً متفاوت در صفحه هذلولوی در مقایسه با صفحه اقلیدسی دارد بنابراین گستره ممکن برای متوازی الاضلاع‌های هذلولوی بسیار وسیعتر از گستره ممکن برای متوازی الاضلاع‌های اقلیدسی می‌باشد.

همچنین، برخلاف حالت اقلیدسی، اگر  $P$  یک چهار ضلعی هذلولوی باشد؛ ممکن است تعیین متوازی الاضلاع بودن  $P$  بسیار مشکل باشد.

به عنوان مثال، چهار ضلعی هذلولوی  $Q$  در  $\mathbb{H}$  را با رأس‌های  $x_1 = i-1$  و  $x_2 = 2i-1$  و  $x_3 = i+1$  و  $x_4 = 2i+1$  در نظر بگیرید. تصویری از  $Q$  در شکل ۵-۷ رسم شده است. فرض کنید  $s_{jk}$  نشان دهنده ضلعی از  $Q$  باشد که رأس‌های  $x_j$  و  $x_k$  را به هم متصل می‌کند و فرض کنید  $\ell_{jk}$  خط هذلولوی شامل  $s_{jk}$  باشد.

از آنجائیکه  $l_{13}$  و  $l_{33}$  به ترتیب مشمول در خط‌های اقلیدسی  $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = -1\}$  و  $\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) = 1\}$  می‌باشند، می‌بینیم که  $s_{13}$  و  $s_{33}$  مشمول در خطوط هذلولوی موازی می‌باشند.

از آنجائیکه  $l_{13}$  و  $l_{33}$  به ترتیب مشمول در دایره‌های اقلیدسی  $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = \sqrt{2}\}$  و  $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = \sqrt{5}\}$  می‌باشند، می‌بینیم که  $s_{13}$  و  $s_{33}$  مشمول در خطوط هذلولوی موازی می‌باشند. بنابراین  $Q$  یک متوازی الاضلاع هذلولوی می‌باشد.

### تمرین ۵-۹.

به ازای  $s > 2$  قرار دهید  $Q_s$  چهار ضلعی هذلولوی در  $\mathbb{H}$  با رأس‌های  $x_1 = i - 1$  و  $x_2 = i + 1$  و  $x_3 = 2i - 1$  و  $x_4 = si + 1$  باشد. معین کنید به ازای چه مقادیری از  $s$ ،  $Q_s$  یک متوازی الاضلاع هذلولوی است.

### تمرین ۵-۱۰.

فرض کنید  $P$  یک چند ضلعی ایده‌آل و فرض کنید  $\{P_1, \dots, P_k\}$  رأس‌های ایده‌آل آن باشند. ثابت کنید.  $P = \operatorname{Conv}(\{P_1, \dots, P_k\})$ .

### تمرین ۵-۱۱.

فرض کنید  $T$  یک مثلث هذلولوی در  $\mathbb{H}$  با اضلاع  $A$  و  $B$  و  $C$  باشد. به ازای هر نقطه  $x \in A$  ثابت کنید که

$$d_{\mathbb{H}}(x, B \cup C) \leq \ln(1 + \sqrt{2})$$

### تمرین ۵-۱۲.

فرض کنید  $A$  یک دایره هذلولوی در قرص پوانکاره  $\mathbb{D}$  با این خاصیت است که یک مثلث هذلولوی ایده‌آل مانند  $T$  وجود دارد بطوریکه بر  $A$  محیط است. نشان دهید به ازای هر  $z \in \mathbb{D}^1$  یک مثلث هذلولوی ایده‌آل مانند  $T_z$  موجود است بطوریکه بر  $A$  محیط باشد و  $z$  یک رأس ایده‌آل آن است.

## ۳-۵. تعریف مساحت هذلولوی

علاوه بر تمام ویژگی‌هایی که تاکنون اشاره کرده‌ایم، یکی از ویژگی‌های خوب مجموعه‌های محدب هذلولوی در حالت کلی و چند ضلعی‌های هذلولوی در حالت خاص

عبارت است از اینکه محاسبه مساحت هذلولوی آنها ساده است. البته باید مساحت هذلولوی را تعریف کنیم. حال روی مدل نیم صفحه بالای  $\mathbb{H}$  کار می‌کنیم.

به یاد آورید که در  $\mathbb{H}$ ، طول هذلولوی یک مسیر به طور قطعه‌ای مشتق پذیر و با توجه به آن فاصله هذلولوی بین دو نقطه با انتگرال‌گیری از عنصر طول قوس هذلولوی  $\frac{1}{\text{Im}(z)}|dz|$  در امتداد مسیر محاسبه می‌شود. مساحت هذلولوی یک زیرمجموعه  $X$  با انتگرال‌گیری از مجذور عنصر طول قوس هذلولوی روی آن مجموعه تعریف می‌شود.

### تعریف ۵-۱۳.

مساحت هذلولوی مجموعه  $X$  در  $\mathbb{H}$  که با  $\text{area}_{\mathbb{H}}(X)$  نمایش می‌دهیم، با انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$\text{area}_{\mathbb{H}}(X) = \int_X \frac{1}{\text{Im}(z)^2} dx dy = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy$$

که در آن  $z = x + iy$ .

به عنوان مثال، ناحیه  $X$  در  $\mathbb{H}$  را که به سه خط اقلیدسی  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) = -1\}$ ،  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) = 1\}$  و  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) = 1\}$  محدود شده است را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید چون  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) = 1\}$  مشمول در یک خط هذلولوی نمی‌باشد، ناحیه  $X$  یک چند ضلعی هذلولوی نیست اما محدب است. مساحت هذلولوی  $X$  عبارت است از

$$\text{area}_{\mathbb{H}}(X) = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \int_{-1}^1 dx = 2$$

### تمرین ۵-۱۳.

به ازای هر  $s > 0$  فرض کنید  $X_s$  ناحیه‌ای در  $\mathbb{H}$  محدود شده به سه خط اقلیدسی  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) = -1\}$  و  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(z) = 1\}$  و  $\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) = s\}$  باشد. مساحت هذلولوی  $X_s$  یعنی  $\text{area}(X_s)$  را محاسبه کنید.

در بحثی که در مورد طول هذلولوی مسیرهای به طور قطعه‌ای مشتق پذیر ارائه دادیم، در واقع عنصر طول قوس هذلولوی را با فرض اینکه تحت عمل  $Mob(\mathbb{H})$  ناوردا باشد، استخراج نمودیم. بلافاصله نتیجه شد که طول هذلولوی به طور طبیعی تحت عمل  $Mob(\mathbb{H})$  ناوردا است.

اگر چه، همانطوریکه در تمرین ۵-۱۵ خواهیم دید، نمی‌توانیم فرمولی برای مساحت هذلولوی با فرض ناوردا بودن آن تحت عمل  $Mob(IH)$  استخراج کنیم. زیرا گروه تبدیلاتی از  $IH$  که مساحت هذلولوی را حفظ می‌کنند بسیار بزرگتر از  $Mob(IH)$  می‌باشد. بنابراین ادامه این بخش را به ارائه اثبات مستقیمی برای ناوردا بودن مساحت هذلولوی تحت عمل  $Mob(IH) = Isom(IH)$  اختصاص می‌دهیم.

## قضیه ۵-۱۴.

مساحت هذلولوی در  $IH$  تحت عمل  $Mob(IH)$  ناوردا است. یعنی اگر  $X$  یک مجموعه در  $IH$  با مساحت هذلولوی  $area_H(X)$  باشد و اگر  $A$  عضوی از  $Mob(IH)$  باشد، آنگاه  $area_H(X) = area_H(A(X))$ .

اثبات. اثبات قضیه ۵-۱۴ یک کاربردی از قضیه تغییر متغیر توابع چند متغیره می‌باشد که در اینجا یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  یک تابع مشتق پذیر باشد و بنویسیم  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  و مشتق آن  $DF$  را به صورت ماتریس زیر در نظر می‌گیریم:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

قضیه تغییر متغیر بیان می‌کند که تحت شرایط نسبتاً ضعیفی روی  $X$  در  $\mathbb{R}^2$  و تابع  $h$  روی  $X$  داریم:

$$\int_{F(X)} h(x, y) dx dy = \int_X h \circ F(x, y) |\det(DF)| dx dy$$

شرایط کلی برای برقراری قضیه تغییر متغیر را ارائه نمی‌کنیم. برای هدفی که داریم، کافی است توجه کنیم که قضیه تغییر متغیر برای مجموعه محدب  $X$  و تابع پیوسته  $h$  برقرار است.

با به کار بردن قضیه تغییر متغیر برای یک عضو  $A$  از  $Mob^+(IH)$  کار را شروع می‌کنیم. ابتدا  $A$  را برحسب  $x$  و  $y$  می‌نویسیم:

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b(c\bar{z} + d)}{(cz + d)(c\bar{z} + d)} = \frac{acx^2 + acy^2 + bd + bcx + adx + iy}{(cx + d)^2 + c^2y^2}$$

که در آن  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  و  $c.d - bc = 1$ .



بنابراین تابع  $A: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$A(x, y) = \left( \frac{acx^r + acy^r + bd + bcx + adx}{(cx+d)^r + c^r y^r}, \frac{y}{(cx+d)^r + c^r y^r} \right)$$

با محاسبه می‌بینیم که:

$$DA(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{(cx+d)^r - c^r y^r}{((cx+d)^r + c^r y^r)^2} & \frac{rcy(cx+d)}{((cx+d)^r + c^r y^r)^2} \\ \frac{-rcy(cx+d)}{((cx+d)^r + c^r y^r)^2} & \frac{(cx+d)^r - c^r y^r}{((cx+d)^r + c^r y^r)^2} \end{pmatrix}$$

به ویژه داریم:

$$\det(DA(x, y)) = \frac{1}{((cx+d)^r + c^r y^r)^2}$$

برای محاسبه مساحت هذلولوی در  $\mathbb{H}$ ، از تابع  $h(x, y) = \frac{1}{y^r}$  انتگرال می‌گیریم،

بنابراین نیاز داریم که ترکیب زیر را محاسبه کنیم:

$$h \circ A(x, y) = \frac{((cx+d)^r + c^r y^r)^r}{y^r}$$

بنابراین قضیه تغییر متغیر نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} \text{area}_{\mathbb{H}}(A(X)) &= \int_{A(X)} \frac{1}{y^r} dx dy = \int_X h \circ A(x, y) |\det(DA)| dx dy \\ &= \int_X \frac{((cx+d)^r + c^r y^r)^r}{y^r} \frac{1}{((cx+d)^r + c^r y^r)^2} dx dy \\ &= \int_X \frac{1}{y^r} dx dy = \text{area}_{\mathbb{H}}(X) \end{aligned}$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

به منظور تکمیل کردن اثبات قضیه ۵-۱۴ فقط باید نشان دهیم که مساحت هذلولوی

تحت  $B(z) = -\bar{z}$  ناوردا است که محتوای تمرین بعدی می‌باشد.

تمرین ۵-۱۴.

با استفاده از قضیه تغییر متغیر ثابت کنید مساحت هذلولوی در  $\mathbb{H}$  تحت  $B(z) = -\bar{z}$

ناوردا است.

بدین ترتیب اثبات قضیه ۵-۱۴ تکمیل می‌شود.

### فهرست‌المطلوب

همانطوریکه قبلاً در این بخش اشاره شد، برخلاف حالت طول هذلولوی که در  $Mob(\mathbb{H})$  دقیقاً گروهی از تبدیلات  $\mathbb{H}$  بود که طول هذلولوی را حفظ می‌کرد، تبدیلاتی از  $\mathbb{H}$  موجودند که مساحت هذلولوی را حفظ می‌کنند که عضو  $Mob(\mathbb{H})$  نمی‌باشند.

#### تمرین ۵-۱۵.

همسانی  $f$  از  $\mathbb{H}$  با ضابطه  $f(z) = z + \text{Im}(z)$  را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه تغییر متغیر، ثابت کنید  $f$  مساحت هذلولوی را حفظ می‌کند. بعلاوه نشان دهید  $f$  عضو  $Mob(\mathbb{H})$  نیست.

#### تمرین ۵-۱۶.

فرض کنید  $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  به فرم  $F(x, y) = (x, g(x, y))$  است. شرایطی روی  $g(x, y)$  بیابید که  $F$  مساحت هذلولوی را حفظ کند. سپس یک تعبیر هندسی برای محاسبات خودتان ارائه دهید.

اگر چه اثبات نخواهیم کرد، توجه داریم که تعریف مساحت هذلولوی برای هر مجموعه محدب در  $\mathbb{H}$  با معنا می‌باشد و همچنین برای بسیاری از زیرمجموعه‌های غیر محدب، در اینجا به اینکه برای کدام یک از زیرمجموعه‌های  $\mathbb{H}$  تعریف مساحت هذلولوی با معناست نخواهیم پرداخت.

مشابه با روشی که عنصر مساحت هذلولوی را در  $\mathbb{H}$  تعریف کردیم، می‌توانیم کل بحث را به هر یک از مدل‌های صفحه هذلولوی از قبیل قرص پوانکاره  $\mathbb{ID}$  منتقل کنیم. در قرص پوانکاره  $\mathbb{ID}$ ، دو دستگاه مختصات طبیعی وجود دارد، یعنی دستگاه مختصات استاندارد دکارتی و دستگاه مختصات قطبی که هر دو از این حقیقت ناشی می‌شوند که  $\mathbb{ID}$  زیر مجموعه‌ای از  $\mathbb{C}$  است. در دستگاه مختصات دکارتی  $x$  و  $y$ ، مساحت هذلولوی یک زیر مجموعه  $X$  در  $\mathbb{ID}$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{area}_{\mathbb{D}}(X) = \int_X \frac{4}{(1-|z|^2)^2} dx dy = \int_X \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} dx dy$$

در دستگاه مختصات قطبی، با تغییر مختصات استاندارد  $x = r \cos(\theta)$  و  $y = r \sin(\theta)$  از دکارتی به قطبی، انتگرال بالا به انتگرال زیر تبدیل می‌شود:

$$area_D(X) = \int_X \frac{r}{(1-r^2)^2} dr d\theta$$

تمرین ۵-۱۷.

به ازای  $s > 0$ ، فرض کنید  $D_s$  قرص هذلولوی باز در  $ID$  با مرکز هذلولوی مبدأ و شعاع هذلولوی  $s$  است. نشان دهید مساحت هذلولوی  $D_s$  عبارت است از

$$area_D(D_s) = 4\pi \sinh^2\left(\frac{1}{2}s\right).$$

تمرین ۵-۱۸.

فرض کنید  $D_s$  همانند تمرین ۵-۱۷ است. رفتار کمیت زیر را توصیف کنید

$$q_D(s) = \frac{I_D(S_s)}{area_D(D_s)}$$

رفتار  $q_D(s)$  را با رفتار  $q_C(s)$  مقایسه کنید که در آن از قرص اقلیدسی و دایره اقلیدسی استفاده می‌شود.

این بخش را با ذکر نکته بعدی پایان می‌دهیم. اگرچه اثباتی ارائه نمی‌دهیم، یک فرمول کلی وجود دارد که طول هذلولوی یک منحنی ساده بسته مانند  $C$  در  $ID$  را به مساحت هذلولوی ناحیه کراندار شده به  $C$  که با  $D$  نمایش می‌دهیم، ارتباط می‌دهد. به طور خاص داریم:

$$I_D(C)^2 - 4\pi area_D(D) - area_D(D)^2 \geq 0.$$

توجه داشته باشید که در  $ID$ ، بنا به تمرینات ۴-۴ و ۵-۱۷ نتیجه می‌شود که هرگاه  $C$  یک دایره اقلیدسی و  $D$  قرص هذلولوی کراندار شده با  $C$  باشد، آنگاه مقدار مینیموم صفر رخ می‌دهد. اگر چه، تنها مبنی بر این محاسبات نمی‌توان نتیجه گرفت که اگر مقدار مینیموم صفر رخ دهد، آنگاه  $C$  لزوماً یک دایره اقلیدسی و  $D$  قرص هذلولوی کراندار شده با  $C$  می‌باشد.

چنین نامساوی‌هایی یک نامساوی هم‌پیرامونی<sup>۱</sup> نامیده می‌شود، چونکه توصیف کننده این سوال است که در میان ناحیه‌هایی که محدود به یک منحنی بسته ساده با یک طول مشخص و ثابت، کدام یک دارای بیشترین مساحت می‌باشد. این نوع نامساوی اختصاص به صفحه هذلولوی ندارد، نمونه‌هایی از آنها در فضاهای گوناگون وجود دارند. برای اطلاعات بیشتر در مورد نامساوی‌های هم‌پیرامونی به کار جامع براگو<sup>۲</sup> و زالگالر<sup>۳</sup> و مراجع مذکور در آن مراجعه کنید [۱۳].

## ۴-۵. مساحت و فرمول گاوس - بونه

حال که نشان دادیم مساحت هذلولوی در  $IH$  تحت عمل  $Mob(IH)$  ناوردا است، مساحت هذلولوی زیرمجموعه‌های نسبتاً ساده در صفحه هذلولوی مانند چند ضلعی‌های هذلولوی را می‌توانیم ساده‌تر محاسبه کنیم. با محاسبه مساحت مثلث‌های هذلولوی شروع می‌کنیم.

یک رویکرد برای ادامه کار محاسبه مستقیم است. یعنی، برای مثلث هذلولوی  $P$ ، ضابطه صریح خطوط اقلیدسی و دایره‌های اقلیدسی که شامل اضلاع  $P$  می‌باشند را بنویسیم و سپس با استفاده از آنها حدود انتگرال مربوط به محاسبه مساحت هذلولوی  $P$  را تعیین کنیم. حتی برای یک مثلث هذلولوی خاص، این رویکرد خیلی مؤثر نیست، بنابراین بدست آوردن فرمولی برای مساحت یک مثلث هذلولوی دلخواه، با این رویکرد خیلی از عملی بودن دور است.

رویکرد دیگر این است که سعی کنیم مثلث هذلولوی داده شده را به نوعی برحسب مثلث‌های هذلولوی بنویسیم که از لحاظ عمل محاسبه مساحت هذلولوی آنها ساده‌تر باشد. این رویکرد را پی می‌گیریم.

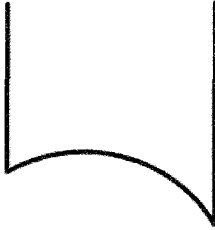
با یک مثال ساده کار را شروع می‌کنیم. مثلث هذلولوی  $P$  را در نظر بگیرید به طوری که رأس  $v_1$  آن یک رأس ایده‌ال و دو رأس دیگر آن  $v_2$  و  $v_3$  دلخواه باشند یعنی می‌توانند ایده‌ال باشند و یا نباشند. فرض کنیم  $l_{jk}$  خط هذلولوی باشد که با  $v_j$  و  $v_k$  مشخص می‌شود. حال از متعدی عمل نمودن گروه  $Mob(IH)$  همانطوری که در بخش ۲-۹ توصیف شد، استفاده می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم  $\gamma$  یک عنصر  $Mob(IH)$  باشد به طوری که  $v_1$  را به

<sup>1</sup> Isoperimetric inequality

<sup>2</sup> Burago

<sup>3</sup> Zalgaller

روی  $\infty$  و  $\ell_{23}$  را به خط هذلولوی مشمول در دایره واحد تصویر کند بعلاوه  $v_r = e^{i\varphi}$  و  $v_r = e^{i\theta}$  که در آن  $0 \leq \theta < \varphi \leq \pi$ ، (حالت های  $\theta = 0$  و  $\varphi = \pi$  را مجاز می‌شماریم زیرا ممکن است  $v_r$  و  $v_r$  رأس ایده‌آل باشند). شکل ۵-۹ را ملاحظه کنید.



شکل ۵-۹ مثالی با یک رأس ایده‌آل

از آنجائیکه مساحت هذلولوی تحت عمل  $Mob(IH)$  ناورد است، می‌توانیم فرض کنیم که  $P$  مثلث هذلولوی با یک رأس ایده‌آل در  $\infty$  دو رأس  $e^{i\varphi}$  و  $e^{i\theta}$  می‌باشد که  $0 \leq \theta < \varphi \leq \pi$ ، از آنجائیکه  $P$  دارای حداقل یک رأس ایده‌آل است بنابراین فشرده نیست، اما با این حال می‌توانیم مساحت هذلولوی آن را به سادگی محاسبه کنیم. با محاسبه می‌بینیم که:

$$area_{\mathbb{H}}(P) = \int_P \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{\cos(\varphi)}^{\cos(\theta)} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \int_{\cos(\varphi)}^{\cos(\theta)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

حال با تغییر متغیر  $x = \cos(w)$  و در نتیجه  $dx = -\sin(w)dw$  خواهیم داشت:

$$\int_{\cos(\varphi)}^{\cos(\theta)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\varphi}^{\theta} -dw = \varphi - \theta$$

در این لحظه، با الهام از آنچه که بعداً خواهد آمد، مشاهده می‌کنیم که زاویه داخلی  $P$  در رأس ایده‌آل  $v_r = \infty$  برابر است با  $\alpha_r = 0$  و زاویه داخلی در رأس  $v_r = e^{i\theta}$  برابر است با  $\alpha_r = \theta$  و زاویه داخلی در رأس  $v_r = e^{i\varphi}$  برابر است با  $\alpha_r = \pi - \varphi$  بنابراین گزاره زیر را اثبات کرده‌ایم.

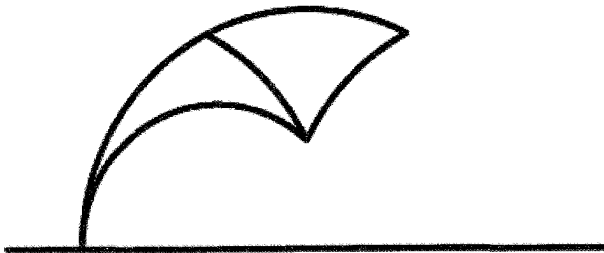
گزاره ۵-۱۵.

فرض کنید  $P$  یک مثلث هذلولوی با یک رأس ایده‌ال باشد و فرض کنیم  $\alpha_p$  و  $\alpha_r$  زاویه‌های درونی در دو رأس دیگر باشند که می‌توانند ایده‌ال باشند و یا نباشند. در این صورت:

$$area_{IH}(P) = \pi - (\alpha_p + \alpha_r)$$

یک نتیجه گزاره ۵-۱۵ این است که مساحت هذلولوی یک مثلث ایده‌ال در  $IH$  برابر با  $\pi$  است. این مطلب از این نکته نتیجه می‌شود که زاویه داخلی در هر رأس ایده‌ال یک مثلث ایده‌ال برابر صفر است.

حال فرض کنیم  $P$  یک مثلث هذلولوی فشرده با رأس‌های  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  باشد. فرض کنیم  $\alpha_k$  زاویه داخلی  $P$  در  $v_k$  باشد فرض کنیم  $l$  شعاع هذلولوی با نقطه آغازی  $v_1$  باشد که از  $v_2$  نیز می‌گذرد و فرض کنیم  $x$  نقطه انتهایی در بی‌نهایت  $l$  باشد. شکل ۵-۱۰ را ملاحظه کنید.



شکل ۵-۱۰ مثالی بدون رأس ایده‌آل

مثلث هذلولوی  $T$  با رأس‌های  $v_1$ ،  $v_2$  و  $x$  دارای یک رأس ایده‌ال  $x$  و دو رأس غیر ایده‌ال  $v_1$ ،  $v_2$  می‌باشد. زاویه داخلی  $T$  در  $v_1$  برابر  $\alpha_1$  و زاویه داخلی  $T$  در  $v_2$  برابر  $\alpha_2 < \delta$  است. بنابراین بنا به گزاره ۵-۱۵ مساحت هذلولوی  $T$  برابر است با:

$$area_{IH}(T) = \pi - (\alpha_1 + \delta)$$

مثلث هذلولوی  $T'$  با رأس‌های  $v_1$ ،  $v_2$  و  $x$  دارای یک رأس ایده‌ال  $x$  و دو رأس غیر ایده‌ال  $v_1$ ،  $v_2$  می‌باشد. زاویه داخلی  $T'$  در  $v_1$  برابر  $\pi - \alpha_1$  و زاویه داخلی  $T'$  در  $v_2$  برابر با  $\delta - \alpha_2$  است. بنابراین مساحت هذلولوی  $T'$  برابر است با:

$$area_{IH}(T') = \pi - (\pi - \alpha_1 + \delta - \alpha_2)$$

از آنجائیکه  $T$  اجتماع  $T'$  و  $P$  می‌باشد و چون  $T'$  و  $P$  همدیگر را فقط در طول یک ضلع قطع می‌کنند داریم:

$$area_{\mathbb{H}}(T) = area_{\mathbb{H}}(T') + area_{\mathbb{H}}(P)$$

با کم کردن و محاسبه انجام شده در دو پاراگراف قبل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} area_{\mathbb{H}}(P) &= area_{\mathbb{H}}(T) - area_{\mathbb{H}}(T') \\ &= \pi - (\alpha_1 + \delta) - (\pi - (\pi - \alpha_r + \delta - \alpha_r)) \\ &= \pi - (\alpha_1 + \alpha_r + \alpha_r) \end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات قضیه زیر به اتمام می‌رسد.

#### قضیه ۵-۱۶.

فرض کنیم  $P$  یک مثلث هذلولوی با زاویه‌های داخلی  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  باشد. در این صورت داریم:

$$area_{\mathbb{H}}(P) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

قضیه ۵-۱۶ به عنوان فرمول گاوس-بونه مشهور است. با بررسی محاسباتی که برای محاسبه مساحت مثلث هذلولوی با رأس‌های ایده‌ال انجام دادیم، چون زاویه داخلی در یک رأس ایده‌ال برابر صفر است، مشاهده می‌کنیم که این فرمول برای مثلث‌های هذلولوی با رأس‌های ایده‌ال نیز برقرار است و نه فقط برای مثلث‌های هذلولوی فشرده.

#### تمرین ۵-۱۹.

مثلث هذلولوی  $P$  در  $\mathbb{H}$  را که در تمرین ۵-۱۶ معرفی شد و با رأس‌های  $i$ ،  $4+i$ ،  $2+2i$  است را در نظر بگیرید. مساحت هذلولوی  $P$  را با محاسبه زاویه‌های داخلی  $P$  به دست آورید.

قضیه ۵-۱۵ را می‌توانیم به حالت کلی‌تر چند ضلعی‌های هذلولوی معقول تعمیم دهیم.

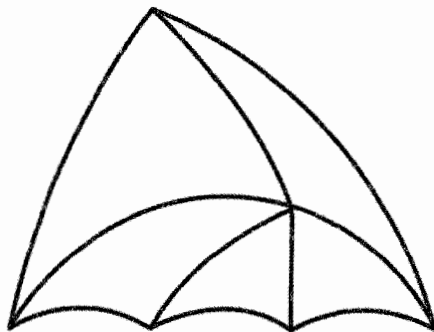
#### قضیه ۵-۱۷.

فرض کنید  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی معقول با تعداد اضلاع متناهی و با رأس‌ها و رأس‌های ایده‌ال  $v_1$ ،  $v_2$ ،  $\dots$ ،  $v_n$  باشد. فرض کنید  $\alpha_k$  زاویه داخلی در  $v_k$  باشد. در این صورت داریم:

$$\text{area}_{\mathbb{H}}(P) = (n-2)\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

اثبات. قضیه ۵-۱۷ را با تجزیه  $P$  به تعدادی مثلث هذلولوی و سپس محاسبه مساحت هر یک از این مثلث‌های هذلولوی در این تجزیه براساس قضیه ۵-۱۶ و در نهایت جمع کردن این مساحت‌ها برای بدست آوردن مساحت  $P$  به اثبات می‌رسانیم.

نقطه  $x$  را در درون  $P$  انتخاب می‌کنیم. چون  $P$  محدب است، بنابراین  $l_k$  پاره‌خط هذلولوی (یا شعاع هذلولوی در حالتیکه  $v_k$  یک رأس ایده‌آل باشد) که  $x$  را به  $v_k$  متصل می‌کند مشمول در  $P$  می‌باشد. خطوط هذلولوی  $l_1, \dots, l_n$ ،  $P$  را به  $n$  مثلث هذلولوی  $T_1, \dots, T_n$  می‌شکنند. شکل ۵-۱۱ را ملاحظه کنید.



شکل ۵-۱۱ تجزیه یک پنج ضلعی به مثلث‌های هذلولوی

این مثلث‌های هذلولوی را چنان نامگذاری می‌کنیم که  $T_k$  دارای رأس‌های  $x$ ،  $v_k$ ،  $v_{k+1}$  باشد به ازای  $1 \leq k \leq n$  که در آن با کمی اغماض در نمادگذاری می‌نویسیم  $v_{n+1} = v_1$  و  $T_{n+1} = T_1$ . حال فرض کنیم  $\mu_k$  زاویه داخلی  $T_k$  در  $x$  باشد و توجه داریم که

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = 2\pi$$

فرض کنیم  $\beta_k$  زاویه داخلی  $T_k$  در  $v_k$  باشد و فرض کنیم  $\delta_k$  زاویه داخلی  $T_k$  در  $v_{k+1}$  باشد. از آنجائیکه  $T_k$  و  $T_{k+1}$  دارای یک رأس در  $v_{k+1}$  می‌باشند. بنابراین

$$\alpha_{k+1} = \delta_k + \beta_{k+1}$$

حال با به کار بردن قضیه ۵-۱۵ در مورد  $T_k$  نتیجه می‌گیریم که

$$\text{area}_{\mathbb{H}}(T_k) = \pi - (\mu_k + \beta_{k+1} + \delta_k)$$



از آنجاییکه اجتماع  $T_1 \cup \dots \cup T_n$  برابر  $P$  است و چون مثلث‌های هذلولوی  $T_1, \dots, T_n$  فقط در طول یک ضلع با هم اشتراک دارند، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{area}_H(P) &= \sum_{k=1}^n \text{area}_H(T_k) = \sum_{k=1}^n [\pi - (\mu_k + \beta_{k+1} + \delta_k)] \\ &= n\pi - \left[ \sum_{k=1}^n \mu_k + \sum_{k=1}^n \beta_{k+1} + \sum_{k=1}^n \delta_k \right] \end{aligned}$$

چون برای هر  $k$  داریم  $\alpha_{k+1} = \delta_k + \beta_{k+1}$ ، بنابراین داریم:

$$\sum_{k=1}^n \beta_{k+1} + \sum_{k=1}^n \delta_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

بنابراین

$$\text{area}_H(P) = \sum_{k=1}^n \text{area}_H(T_k) = (n-2)\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

بدین ترتیب اثبات قضیه ۵-۱۷ تکمیل می‌گردد.

### فهوم‌المطلوب

توجه داشته باشید که نقطه  $x$  که برای تجزیه  $P$  استفاده کردیم را می‌توانستیم نقطه‌ای روی یک ضلع  $P$  یا یک رأس  $P$  نیز انتخاب کنیم. در هر حالت، برخی محاسبات کمی متفاوت می‌بودند، اما در هر حال در پایان به اثباتی برای قضیه ۵-۱۷ می‌رسیم. در حالت اول،  $P$  را به  $n-1$  مثلث هذلولوی تجزیه می‌کنیم و مجموع زاویه‌های داخلی مثلث‌های هذلولوی در  $x$  برابر با  $\pi$  می‌بود. در حالت دوم،  $P$  را به  $n-2$  مثلث هذلولوی تجزیه می‌کنیم و مجموع زاویه‌های مثلث‌های هذلولوی در  $x$  برابر با زاویه داخلی  $P$  در رأس  $x$  می‌بود.

با همان روشی که عنصر حجم هذلولوی را در  $IH$  تعریف کردیم، تمام مباحث را می‌توانیم به هریک از مدل‌های صفحه هذلولوی منتقل کنیم، مانند مدل قرص پوانکاره  $ID$ . به ویژه، قضیه ۵-۱۷ در هر مدلی از صفحه هذلولوی نیز برقرار است.

## ۵-۵. کاربردهای فرمول گوس - بونه

در این بخش، دو کاربرد قضیه ۵-۱۷ را در صفحه هذلولوی بیان می‌کنیم. یکی مثبت پاست و در آن وجود یک تعداد زیاد و گسترده‌ای از چند ضلعی‌های هذلولوی فشرده منتظم

ثابت می‌شود. دیگری منفی است و در آن عدم وجود نوع خاصی از تبدیلات صفحه هذلولوی به اثبات می‌رسد.

با یک حقیقتی در مورد صفحه اقلیدس  $\mathcal{C}$  کار را شروع می‌کنیم، یعنی به ازای هر عدد صحیح  $n \geq 3$  فقط یک  $n$ -ضلعی اقلیدس منتظم تا حد دوران، انتقال و تبدیل آفین وجود دارد.

در اینجا یک روش ساختن  $n$ -ضلعی منتظم اقلیدسی  $P_n$  در  $\mathcal{C}$  را ارائه می‌دهیم. یک نقطه پایه  $x$  را در  $\mathcal{C}$  انتخاب می‌کنیم. و فرض می‌کنیم  $\ell_1, \dots, \ell_n$  شعاع اقلیدس با نقطه شروع  $x$  باشند که زاویه بین هر دو شعاع متوالی برابر  $\frac{2\pi}{n}$  است. حال یک  $r > 0$  را انتخاب می‌کنیم و به ازای هر  $k$  نقطه  $y_k$  را روی  $\ell_k$  در نظر می‌گیریم که فاصله اقلیدس آن تا  $x$  برابر  $r$  است. در این صورت این نقاط  $y_1, \dots, y_n$  رأس‌های یک  $n$ -ضلعی اقلیدسی منتظم  $P_n$  می‌باشند.

برای دیدن اینکه  $P_n$  تا حد دوران، انتقال و تبدیل آفین یکتا است، ساختن بالا را تکرار می‌کنیم. یعنی نقطه پایه دیگری مانند  $x'$  در  $\mathcal{C}$  انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $\ell'_1, \dots, \ell'_n$  شعاع اقلیدسی با نقطه شروع  $x'$  باشند، به طوری که زاویه بین هر دو شعاع متوالی برابر  $\frac{2\pi}{n}$  باشد. حال  $r' > 0$  را انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم  $y'_k$  نقطه‌ای روی  $\ell'_k$  باشد که فاصله اقلیدس آن تا  $x'$  برابر  $r'$  باشد. در این صورت این نقاط  $y'_1, \dots, y'_n$  رأس‌های یک  $n$ -ضلعی اقلیدس منتظم  $P'_n$  می‌باشند.

حال یک تبدیل  $\mathcal{C}$  را چنان می‌سازیم که  $P_n$  را به  $P'_n$  تصویر کند. فرض می‌کنیم  $\theta$  زاویه بین خط  $\ell_1$  و قسمت مثبت محور حقیقی و  $\theta'$  زاویه بین خط  $\ell'_1$  و قسمت مثبت محور حقیقی باشد. در این صورت همسانی  $B$  از  $\mathcal{C}$  با ضابطه زیر:

$$B(z) = e^{i(\theta' - \theta)} \frac{r'}{r} (z - x + x')$$

ترکیبی از یک دوران و تبدیل آفین و انتقال  $\mathcal{C}$  می‌باشد که در شرط  $B(P_n) = P'_n$  صدق می‌کند.

به ویژه، زاویه‌های داخلی  $P_n$  را رأس‌هایش فقط به تعداد رأس‌ها  $n$  بستگی دارند و به انتخاب نقطه پایه  $x$  و شعاع‌های اقلیدسی  $\ell_k$  و فاصله اقلیدسی رأس‌های  $P_n$  تا  $x$

یعنی  $r$  بستگی ندارند. در واقع، زاویه داخلی در هر رأس  $P_n$  برابر با  $\frac{n-2}{n}\pi$  است.

در صفحه هذلولوی، وضعیت به طور قابل ملاحظه‌ای متفاوت است.

## گزاره ۵-۱۸.

به ازای هر  $n \geq 3$  و به ازای هر  $\alpha$  در بازه  $\left(0, \frac{n-2}{n}\pi\right)$  یک  $n$ -ضلعی هذلولوی منتظم با زاویه داخلی  $\alpha$  وجود دارد.

اثبات. در قرص پوانکاره  $ID$  با ساختن مشابه آنچه که هم اکنون برای ساختن  $n$ -ضلعی‌های منتظم در  $\mathbb{C}$  ارائه کردیم، کار را شروع می‌کنیم. به ازای  $n \geq 3$  داده شده، شعاع‌های هذلولوی  $l, \dots, l_{n-1}$  را با نقطه شروع  $\cdot$  در نظر می‌گیریم که در آن شعاع هذلولوی  $l_k$  با  $0$  و  $P_k = \exp\left(\frac{\gamma \pi i}{n} k\right)$  مشخص می‌گردد.

به ازای هر  $0 < r < 1$ ،  $rp_k = r \exp\left(\frac{\gamma \pi i}{n} k\right)$ ،  $\dots$ ،  $rp_{n-1} = r \exp\left(\frac{\gamma \pi i}{n} (n-1)\right)$  در  $ID$  رأس‌های  $n$  ضلعی منتظم  $P_n(r)$  می‌باشند.

ابتدا نشان می‌دهیم که  $P_n(r)$  یک چند ضلعی هذلولوی است. این امر را با بیان  $P_n(r)$  بر حسب اشتراک یک خانواده موضعاً متناهی از نیم صفحه‌های بسته انجام می‌دهیم. به ازای  $0 \leq k \leq n-1$  فرض می‌کنیم  $l_k$  خط هذلولوی گذرانده از  $P_k$  و  $P_{k+1}$  باشد که در اینجا نیز با اغماض و کمی سوء استفاده از نمادگذاری قرار می‌دهیم:  $P_n = P$ .

فرض می‌کنیم  $H_k$  نیم صفحه بسته مشخص شده با  $l_k$  باشد که شامل  $0$  است. این حقیقت که  $P_n(r)$  یک چند ضلعی هذلولوی است از این نکته نتیجه می‌شود که مشاهده کنیم

$$P_n(r) = \bigcap_{k=0}^{n-1} H_k$$

برای منتظم بودن  $P_n(r)$ ، می‌توانیم از تبدیل موبیوس بیضوی زیر

$$m(z) = \exp\left(\frac{\gamma \pi i}{n}\right) z$$

که عضوی از  $Mob(ID)$  است، استفاده کنیم. به ازای  $1 \leq k \leq n-1$  داریم  $m^k(rp_k) = rp_k$  و اینکه  $m^k(l_k) = l_k$ . اضلاعی از  $P_n(r)$  که در  $rp_k$  متقاطعند روی دو خط هذلولوی  $l_{n-1}$  و  $l$  قرار دارند. از آنجائیکه  $m^k(l_k) = l_k$  و  $m^k(l_{n-1}) = l_{k-1}$  همچنین نتیجه می‌شود که  $m^k$  دو ضلع  $P_n(r)$  که در  $rp_k$  متقاطعند را به دو ضلع  $P_n(r)$  تصویر می‌کند که در  $rp_k$  متقاطعند.

به ویژه، زاویه داخلی  $P_n(r)$  در هر دو رأس دلخواه با هم مساوی اند و طول هذلولوی هر دو ضلع  $P_n(r)$  با هم برابرند.

به ازای  $0 < r < 1$  فرض کنیم  $\alpha(r)$  زاویه داخلی  $P_n(r)$  در  $r = rp$  را نشان دهد. حال رفتار  $\alpha(r)$  را وقتی که  $r$  تغییر می‌کند، تحلیل می‌کنیم. توجه داریم که بنا به محاسبات تمرین ۵-۲۰،  $\alpha(r)$  یک تابع پیوسته بر حسب  $r$  می‌باشد.

## تمرین ۵-۲۰.

زاویه داخلی  $P_n(r)$  در  $r = rp$  را بر حسب  $n$  و  $r$  بیان کنید. نتیجه بگیرید که  $\alpha(r)$  یک تابع پیوسته بر حسب  $r$  می‌باشد.

قضیه ۵-۱۷ نتیجه می‌دهد که مساحت هذلولوی  $P_n(r)$  عبارت است از:

$$\text{area}_D(P_n(r)) = (n-2)\pi - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(r) = (n-2)\pi - n\alpha(r)$$

به ازای هر مقدار  $0 < r < 1$  چند ضلعی هذلولوی  $P_n(r)$  مشمول در قرص هذلولوی  $D_r$  در  $ID$  به مرکز هذلولوی  $O$  و شعاع اقلیدسی  $r$  می‌باشد. (توجه داشته باشید که این امر، فشردگی  $P_n(r)$  را نتیجه می‌دهد.) مساحت هذلولوی  $D_r$  عبارت است از:

$$\text{area}_D(D_r) = \frac{2\pi r^2}{1-r^2}$$

از آنجائی که  $P_n(r)$  مشمول در  $D_r$  می‌باشد، بنابراین داریم

$$\text{area}_D(P_n(r)) \leq \text{area}_D(D_r)$$

و در نتیجه:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \text{area}_D(P_n(r)) \leq \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2\pi r^2}{1-r^2} = 0.$$

با جایگذاری فرمول  $\text{area}_D(P_n(r))$ ، مشاهده می‌کنیم که:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} [(n-2)\pi - n\alpha(r)] = 0.$$

بنابراین

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \alpha(r) = \frac{n-2}{n} \pi$$

بنابراین هرگاه  $r \rightarrow 0^+$ ، آنگاه زاویه داخلی  $P_n(r)$  به زاویه داخلی  $n$ -ضلعی منتظم اقلیدسی میل می‌کند.

هرگاه  $r$  افزایش یابد، دو مطلب را مشاهده می‌کنیم که هر دو را می‌توانیم یا از تمرین ۵-۲۰ و یا با یک محاسبه مستقیم بدست آوریم.

ابتدا، به ازای  $0 < s < r < 1$ ، رأس‌های  $P_n(s)$  در درون  $P_n(r)$  قرار دارند. تحذب  $P_n(r)$  نتیجه می‌دهد که  $P_n(s)$  نیز مشمول در  $P_n(r)$  باشد و در نتیجه به ازای  $0 < s < r < 1$  داریم:

$$area_{\mathcal{D}}(P_n(s)) \leq area_{\mathcal{D}}(P_n(r))$$

به عبارت دیگر، مساحت هذلولوی  $P_n(r)$  یک تابع صعودی بر حسب  $r$  می‌باشد.

چون

$$area_{\mathcal{D}}(P_n(r)) = (n-2)\pi - n\alpha(r)$$

بنابراین زاویه داخلی  $\alpha(r)$  یک تابع نزولی بر حسب  $r$  می‌باشد.

ثانیاً، هرگاه  $r \rightarrow 1^-$  چند ضلعی فشرده  $P_n(r)$  هر چه بیشتر و بیشتر شبیه  $n$ -ضلعی

هذلولوی  $P_n^\infty$  با رأس‌های ایده‌آل در  $p_i = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ ،  $p_0 = 1$ ، ... و

$$p_{n-1} = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(n-1)\right)$$

به ویژه، داریم:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} area_{\mathcal{D}}(P_n(r)) = area_{\mathcal{D}}(P_n^\infty)$$

با بیان  $area_{\mathcal{D}}(P_n(r))$  و  $area_{\mathcal{D}}(P_n^\infty)$  بر حسب زاویه‌های داخلی  $P_n(r)$  و  $P_n^\infty$ ،

به ترتیب داریم:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} [(n-2)\pi - n\alpha(r)] = (n-2)\pi$$

در نتیجه:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \alpha(r) = 0$$

با ترکیب این دو مشاهده، به ازای  $n \geq 3$  می‌بینیم که زاویه داخلی  $n$ -ضلعی منتظم

هذلولوی فشرده  $P_n(r)$  یعنی  $\alpha(r)$  در بازه  $\left(0, \frac{n-2}{n}\pi\right)$  قرار دارد. بعلاوه یکنوایی و

پیوستگی  $\alpha$  نتیجه می‌دهد که هر عدد در این بازه زاویه داخلی یک و فقط یک چند ضلعی

هذلولوی  $P_n(r)$  می‌باشد. بدین ترتیب اثبات گزاره ۵-۱۸ کامل می‌شود.

فهوم‌المطلوب

یک مورد خاص که در آن رفتار چند ضلعی‌های هذلولوی با رفتار چند ضلعی‌های اقلیدسی بسیار متفاوت است این است که در صفحه اقلیدسی یک و فقط یک  $n$ -ضلعی منتظم با زاویه‌های قائمه وجود دارد یعنی مربع.

اگرچه، در صفحه هذلولوی، نه تنها مربع‌های هذلولوی وجود ندارند، بلکه به ازای هر  $n \geq 5$  یک  $n$ -ضلعی منتظم هذلولوی فشرده وجود دارد به طوری که تمام زاویه‌های آن قائمه باشد. برای دیدن اینکه مربع هذلولوی وجود ندارد، گزاره ۵-۱۸ را در حالت  $n=4$  به کار می‌بریم. بازه ممکن برای زاویه‌های داخلی یک ۴-ضلعی منتظم هذلولوی فشرده عبارت است از بازه  $\left(0, \frac{1}{4}\pi\right)$ . به ویژه هیچ ۴-ضلعی هذلولوی که تمام زاویه‌های آن قائمه باشند، وجود ندارد.

اثبات اینکه به ازای هر  $n \geq 5$  یک  $n$ -ضلعی منتظم هذلولوی فشرده وجود دارد که تمام زاویه‌های آن قائمه باشند را به عنوان تمرین وا می‌گذاریم.

#### تمرین ۵-۲۱.

به ازای هر  $n \geq 5$  ثابت کنید یک  $n$ -ضلعی منتظم هذلولوی فشرده وجود دارد که تمام زاویه‌های داخلی آن قائمه باشند.

علاوه بر اینکه  $\alpha(r)$  زاویه داخلی  $n$ -ضلعی منتظم هذلولوی فشرده  $P_n(r)$  بر حسب  $r$  یک تابع پیوسته است، همچنین طول هذلولوی یک ضلع  $P_n(r)$  نیز بر حسب  $r$  یک تابع پیوسته است.

#### تمرین ۵-۲۲.

به ازای  $0 < r < 1$  داده شده، طول هذلولوی یک ضلع  $P_n(r)$  را به طور صریح بر حسب  $n$  و  $r$  بیان کنید.

به ازای هر  $n \geq 5$ ، تمرین ۵-۲۱ یک  $n$ -ضلعی هذلولوی فشرده با زاویه‌های قائمه ارائه می‌دهد، یعنی یک  $n$ -ضلعی منتظم هذلولوی فشرده با زاویه‌های قائمه. در واقع به ازای هر  $n \geq 5$  تعداد زیادی  $n$ -ضلعی هذلولوی فشرده غیر منتظم وجود دارند که تمامی زاویه‌های آنها قائمه می‌باشد، اگرچه این مطلب را اینجا ثابت نمی‌کنیم.

همچنین، امکان ساخت چند ضلعی‌های هذلولوی با زاویه داخلی از قبل تعیین شده که الزاماً قائمه هم نباشد، وجود دارد. در واقع، تنها محدودیت روی زاویه‌های داخلی ممکن

عبارت است از اینکه مساحت هذلولوی داده شده با فرمول گاوس - بونه باید مثبت باشد. مجدداً این مطلب را نیز اینجا ثابت نمی‌کنیم. خوانندگان علاقه‌مند را به مرجع بیردون<sup>۱</sup> [2] برای اثبات قضیه ۵-۱۹ ارجاع می‌دهیم.

### قضیه ۵-۱۹

فرض کنید  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  یک خانواده از  $n$  عدد در بازه  $(0, \pi)$  باشند. در این صورت یک چند ضلعی هذلولوی در صفحه هذلولوی با زاویه‌های داخلی  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  موجود است اگر و فقط اگر

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n < (n-2)\pi$$

کاربرد دیگری از قضیه ۵-۱۷ موجود است که اینجا آن را بیان می‌کنیم. به یاد آورید که در ساختن یک  $n$ -ضلعی منتظم اقلیدسی در ابتدای این بخش، اگرچه  $n$ -ضلعی‌های منتظم با مساحت‌های متفاوت می‌باشند، هر دو  $n$ -ضلعی اقلیدس منتظم با یک همسانی  $\mathcal{C}$  که ترکیبی از یک ایزومتري  $\mathcal{C}$  و یک تبدیل آفین  $\mathcal{C}$  است، به هم مرتبطند. یک تبدیل آفین  $\mathcal{C}$  عبارت است از یک همسانی همدیس  $\mathcal{C}$  که خطوط اقلیدسی را به خطوط اقلیدس تصویر می‌کند. تبدیل آفین‌ها ایزومتري نمی‌باشند چونکه فاصله و مساحت اقلیدس را حفظ نمی‌کنند. در واقع هر تبدیل آفین  $\mathcal{C}$  به صورت  $f(z) = az + b$  می‌باشد که  $a \in \mathcal{C} - \{0\}$  و  $b \in \mathcal{C}$ . تابع  $f$  یک ایزومتري است اگر و فقط اگر  $|a| = 1$ ، واقعیتی که در راه حل ۳-۱۵ اساساً بیان شده است.

### تعریف ۵-۲۰.

یک تبدیل مستوی هذلولوی، یک همسانی همدیس صفحه هذلولوی است که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی تصویر می‌کند. مانند حالت  $\mathcal{C}$ ، هر طولبای صفحه هذلولوی یک تبدیل مستوی هذلولوی است. اگرچه، برخلاف حالت  $\mathcal{C}$ ، هیچ تبدیل مستوی هذلولوی به غیر از طولبای هذلولوی وجود ندارد.

<sup>1</sup> Beardon

مطلب کلیدی برای اثبات این واقعیت، در گزاره ۵-۲۱ بیان می‌شود و عبارت است از اینکه چون یک تبدیل مستوی هذلولوی، همدیس است بنابراین زاویه‌ها را حفظ می‌کند، در نتیجه قضیه ۵-۱۷ بلافاصله نتیجه می‌دهد که تبدیل‌های مستوی هذلولوی مساحت هذلولوی یک چند ضلعی هذلولوی را حفظ می‌کنند. به ویژه اگر  $g$  یک تبدیل مستوی صفحه هذلولوی و  $P$  یک چند ضلعی هذلولوی باشد، در این صورت مساحت هذلولوی  $P$  و  $g(P)$  برابرند.

### گزاره ۵-۲۱.

فرض کنید  $f$  یک تبدیل مستوی هذلولوی صفحه هذلولوی باشد. در این صورت  $f$  یک طولبای هذلولوی است.

**اثبات.** ماهیت اثبات گزاره ۵-۲۱ بسیار مشابه قضیه ۳-۱۹ می‌باشد. ابزار فنی اصلی مورد استفاده در اثبات گزاره ۵-۲۱ عبارت است از قضیه ۵-۱۷.

در مدل قرص پوانکاره  $ID$  برای صفحه هذلولوی کار می‌کنیم. فرض کنیم  $f$  یک تبدیل مستوی هذلولوی  $ID$  باشد بنابراین بنا به تعریف،  $f$  یک همسانی  $ID$  است که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی تصویر می‌کند و زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

با نرمال کردن  $f$  به کمک متعدی عمل نمودن  $Mob(ID)$  کار را شروع می‌کنیم. ابتدا  $f$  را با عضو  $m$  از  $Mob(ID)$  ترکیب می‌کنیم به طوری که  $f(0)$  را به  $0$  می‌برد. بنا به تعریف، هر عضو  $Mob(ID)$  یک طولبای هذلولوی است، بنابراین یک تبدیل مستوی هذلولوی است. در نتیجه ترکیب  $m \circ f$  یک تبدیل مستوی  $ID$  است که  $0$  را ثابت نگه می‌دارد.

تبدیل مستوی هذلولوی  $m \circ f$  از  $ID$  شعاع‌های هذلولوی با نقطه شروع  $0$  را به شعاع‌های هذلولوی با نقطه شروع  $0$  تصویر می‌کند و زاویه بین شعاع‌های هذلولوی را حفظ می‌کند. بنابراین عضو  $n$  از  $Mob(ID)$  چنان موجود است که  $0$  را ثابت نگه دارد و ترکیب  $n \circ m \circ f$  یک تبدیل مستوی هذلولوی  $ID$  باشد که  $0$  را ثابت نگه دارد و هر شعاع هذلولوی با نقطه شروع  $0$  را به روی خودش تصویر کند. (این عضو  $n$  یا یک تبدیل موبیوس بیضوی ثابت نگه دارنده  $0$  می‌باشد و یا ترکیب یک تبدیل موبیوس بیضوی ثابت نگه دارنده  $0$  با  $c(z) = \bar{z}$  می‌باشد).

قرار می‌دهیم  $g = n \circ m \circ f$ . برای اثبات اینکه  $f$  عضوی از  $Mob(ID)$  است، نشان می‌دهیم که  $g$  تبدیل همانی است.



فرض می‌کنیم  $z$  یک نقطه  $\{ID - \}$  باشد. فرض کنیم  $l$  شعاع هذلولوی با نقطه شروع  $o$  و گذرنده از  $z$  باشد. فرض کنیم  $l_1$  شعاع هذلولوی با نقطه شروع  $o$  باشد که با  $l$  زاویه  $\frac{2\pi}{3}$  می‌سازد و  $l_2$  شعاع هذلولوی با نقطه شروع  $o$  باشد که با  $l$  زاویه  $\frac{4\pi}{3}$  می‌سازد.

فرض می‌کنیم  $T$  مثلث هذلولوی با رأس‌های  $z, v_1, v_2$  و  $v_1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)z$  و

$v_2 = \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)z$  باشد. فرض کنیم  $s_{jk}$  ضلعی از  $T$  باشد که  $v_j$  را به  $v_k$  وصل می‌کند. حال تصویر  $T$  تحت  $g$  یعنی  $g(T)$  را در نظر می‌گیریم.

قرار می‌دهیم  $r = |z|$  و  $s = |g(z)|$  بنابراین  $g(z) = \frac{s}{r}z$ . ابتدا نشان می‌دهیم که  $g(v_1) = \frac{s}{r} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)z$  و  $g(v_2) = \frac{s}{r} \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)z$ . باتوجه به مفروضاتی که روی  $g$  قرار داده‌ایم، نتیجه می‌شود که  $v_k$  و در نتیجه  $g(v_k)$  روی شعاع هذلولوی  $l_k$  قرار دارند، زیرا  $g$  هر شعاع هذلولوی با نقطه شروع  $o$  را به روی خودش تصویر می‌کند. بنابراین  $g(v_k)$  یک مضرب حقیقی مثبت  $v_k$  می‌باشد.

چون زاویه تقاطع  $s_k$  و  $l$  برابر با زاویه تقاطع  $s_k$  و  $l_k$  می‌باشد، بنابراین زاویه تقاطع  $g(s_k)$  با  $g(l) = l$  برابر است با زاویه تقاطع  $g(s_k)$  با  $g(l_k) = l_k$ . به ویژه، نقطه تقاطع  $g(s_k)$  با  $l$  و نقطه تقاطع  $g(s_k)$  با  $l_k$  در فاصله اقلیدس یکسانی از مبدأ قرار دارند. چون نقطه تقاطع  $g(s_k)$  با  $l$  عبارت است از  $g(v_1) = \frac{s}{r}z$  در نتیجه به ازای  $k = 1, 2$  داریم  $g(v_k) = \frac{s}{r} \exp\left(\frac{2k\pi i}{3}\right)z$ . همانطوریکه می‌خواستیم.

بنابراین تصویر  $T$  تحت  $g$  یعنی  $g(T)$ ، مثلث هذلولوی با رأس‌های  $g(v_1) = \frac{s}{r}z$  و  $g(v_2) = \frac{s}{r} \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)z$  و  $g(v_3) = \frac{s}{r} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)z$  می‌باشد. چون  $g$  یک تبدیل آفین است، بنابراین  $g$  زاویه بین خطوط هذلولوی را حفظ می‌کند. بنابراین زاویه‌های داخلی  $g(T)$  برابر زاویه‌های داخلی  $T$  می‌باشند. بنابه قضیه ۵-۱۶ خواهیم داشت:

$$area_D(T) = area_D(g(T))$$

اما اگر  $r = |z| > s = |g(z_o)|$  آنگاه  $T$  به طور سره مشمول در  $g(T)$  می‌باشد و در نتیجه  $area_D(T) < area_D(g(T))$  که یک تناقض است. اگر  $r = |z| > s = |g(z_o)|$

آنگاه  $g(T)$  به طور سره مشمول در  $T$  می‌باشد و در نتیجه  $area_{\mathbb{D}}(g(T)) < area_{\mathbb{D}}(T)$  که مجدداً یک تناقض است.

بنابراین  $g(z) = z$  به ازای هر  $z \in \mathbb{D}$  و لذا  $g$  تابع همانی است و این مطلب اثبات گزاره ۵-۲۱ را کامل می‌کند.

### فهردهوالمطلوب

## ۵-۶. مثلثات در صفحه هذلولوی

فرض کنیم  $T$  یک مثلث هذلولوی فشرده در صفحه هذلولوی باشد. مانند حالت مثلث اقلیدسی، قوانین مثلثاتی در صفحه هذلولوی در ارتباط با زاویه‌های داخلی  $T$  و طول اضلاع  $T$  وجود دارند.

روشی که قوانین مثلثاتی را در صفحه هذلولوی استخراج خواهیم کرد عبارت است از ارتباط دادن فاصله‌های هذلولوی و اقلیدسی بین یک زوج از نقاط از آنجایی که اندازه‌گیری زاویه‌های  $T$  در صفحه اقلیدسی و هذلولوی یکسان است، بنابراین می‌توانیم بعد از آن، از قوانین مثلثات اقلیدسی استفاده کنیم.

همانطوریکه در تمرین ۴-۲ ملاحظه کردیم، رابطه بین طول هذلولوی و اقلیدسی بر اساس توابع مثلثاتی هذلولوی بیان می‌شود. قبل از اینکه بحث را ادامه دهیم، برخی از اتحادهای مربوط به توابع مثلثاتی هذلولوی که در جریان این بخش ظاهر می‌شوند را به عنوان تمرین وا می‌گذاریم.

### تمرین ۵-۲۳.

صحت اتحادهای زیر را بررسی کنید.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (\text{الف})$$

$$r \sinh x \cosh x = \sinh(rx) \quad (\text{ب})$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2} \cosh(2x) - \frac{1}{2} \quad (\text{ج})$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2} \cosh(2x) + \frac{1}{2} \quad (\text{د})$$

$$\sinh^2 x \cosh^2 y + \cosh^2 x \sinh^2 y = \frac{1}{4} (\cosh(2x) \cosh(2y) - 1) \quad (\text{ه})$$

در مدل قرص پوانکاره  $ID$  کار می‌کنیم. فرض کنیم  $T$  یک مثلث هذلولوی فشرده با رأس‌های  $v_1, v_2, v_3$  باشد. فرض کنیم  $a, b$  و  $c$  طول هذلولوی ضلع‌های آن و  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  زاویه‌های داخلی  $T$  باشند که در آن  $\alpha$  زاویه داخلی در رأس  $v_1$  و مقابل به ضلع با طول هذلولوی  $a$  باشد و  $\beta$  زاویه داخلی در رأس  $v_2$  و مقابل به ضلع با طول هذلولوی  $b$  و  $\gamma$  زاویه داخلی در رأس  $v_3$  و مقابل به ضلع با طول هذلولوی  $c$  باشند.

از آنجائیکه زاویه‌های داخلی  $T$  در رأس‌های آن و طول هذلولوی اضلاع  $T$  تحت عمل  $Mob(ID)$  ناوردا می‌باشند، بنابراین می‌توانیم با استفاده از متعدی عمل نمودن  $Mob(ID)$  فرض کنیم  $v_1 = 0$  و  $v_2 = r > 0$  روی قسمت مثبت محور حقیقی قرار دارد و  $v_3 = se^{i\alpha}$  که  $0 < \alpha < \pi$ . بنا به تمرین ۴-۲ داریم:

$$r = \tanh\left(\frac{1}{\rho}c\right) \text{ و } s = \tanh\left(\frac{1}{\rho}b\right)$$

از طرف دیگر، می‌توانیم قانون کسینوس‌های اقلیدسی را روی مثلث اقلیدسی با رأس‌ها  $v_1, v_2, v_3$  اعمال کنیم و ببینیم که:

$$\begin{aligned} |v_2 - v_3|^2 &= r^2 + s^2 - 2rs \cos(\alpha) \\ &= \tanh^2\left(\frac{1}{\rho}c\right) + \tanh^2\left(\frac{1}{\rho}b\right) - 2 \tanh\left(\frac{1}{\rho}c\right) \cdot \tanh\left(\frac{1}{\rho}b\right) \cos \alpha \end{aligned}$$

از طرف دیگر، بنا به گزاره ۴-۳ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{(v_2 - v_3)^2}{(1 - |v_2|^2)(1 - |v_3|^2)} &= \frac{|v_2 - v_3|^2}{(1 - r^2)(1 - s^2)} \\ &= \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}d_D(v_2, v_3)\right) = \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}a\right) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} (v_2 - v_3)^2 &= (1 - r^2)(1 - s^2) \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}a\right) \\ &= \sec^2 h^2\left(\frac{1}{\rho}c\right) \cdot \sec^2 h^2\left(\frac{1}{\rho}b\right) \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}a\right) \end{aligned}$$

با حل دو عبارت بالا بر حسب  $|v_2 - v_3|^2$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sec^2 h^2\left(\frac{1}{\rho}c\right) \cdot \sec^2 h^2\left(\frac{1}{\rho}b\right) \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}a\right) &= \tanh^2\left(\frac{1}{\rho}c\right) + \tanh^2\left(\frac{1}{\rho}b\right) \\ &\quad - 2 \tanh\left(\frac{1}{\rho}c\right) \cdot \tanh\left(\frac{1}{\rho}b\right) \cos \alpha \end{aligned}$$

حال رابطه بالا را ساده می‌کنیم. با ضرب کردن در  $\cosh^2\left(\frac{1}{\rho}c\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{1}{\rho}b\right)$  خواهیم

داشت:

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}a\right) &= \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}c\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{1}{\rho}b\right) + \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}b\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{1}{\rho}c\right) \\ &\quad - 2 \sinh\left(\frac{1}{\rho}c\right) \sinh\left(\frac{1}{\rho}b\right) \cosh\left(\frac{1}{\rho}c\right) \cosh\left(\frac{1}{\rho}b\right) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

با استفاده از اتحادهای تمرین ۵-۲۳، تساوی بالا تبدیل می‌شود به:

$$\frac{1}{\rho^2} \cosh^2(a) - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} \cosh^2(b) \cosh^2(c) - \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \sinh(c) \cdot \sinh(b) \cos(\alpha)$$

در نتیجه قانون کسینوس‌های هذلولوی ۱ را بدست می‌آوریم:

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(c) \cdot \sinh(b) \cdot \cos(\alpha)$$

بر خلاف صفحه اقلیدسی، سه قانون مثلثاتی اساسی در صفحه هذلولوی وجود دارند. یکی عبارت است از قانون کسینوس‌های هذلولوی ۱ که هم اکنون استخراج کردیم. دو تای دیگر عبارتند از قانون سینوس‌های هذلولوی و قانون کسینوس‌های هذلولوی ۲ که در زیر بیان می‌شوند:

قانون سینوس‌ها:

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$$

قانون کسینوس‌های ۲:

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cosh(c)$$

قانون کسینوس‌های هذلولوی ۱ و قانون سینوس‌های هذلولوی، مشابه مستقیم قانون کسینوس‌های اقلیدسی و قانون سینوس‌های اقلیدسی می‌باشند. در واقع همانطوریکه ملاحظه کردیم، اثبات قضیه کسینوس‌های هذلولوی ۱، نسبتاً سریع از قانون کسینوس‌های اقلیدسی و به کمک برخی محاسبات جبری بدست می‌آید.

با یک روش مشابه با روش بدست آوردن قانون سینوس‌های اقلیدسی از روی قانون کسینوس‌های اقلیدسی و برخی محاسبات جبری، قانون سینوس‌های هذلولوی و قانون کسینوس‌های هذلولوی ۲ را نیز می‌توانیم از قانون کسینوس‌های هذلولوی ۱ بدست آوریم.

#### تمرین ۵-۲۴.

قانون کسینوس‌های هذلولوی ۲ و قانون سینوس‌های هذلولوی از قانون کسینوس‌های ۱ استخراج کنید.

#### تمرین ۵-۲۵.

قضیه فیثاغورث هذلولوی را در مورد ارتباط طول‌های هذلولوی اضلاع یک مثلث هذلولوی قائم الزاویه بیان و اثبات کنید.

#### تمرین ۵-۲۶.

به ازای هر  $\lambda > 1$  تبدیل با زاویه ثابت  $m(z) = \lambda z$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $A$  یک شعاع اقلیدسی در  $HH$  با نقطه شروع  $o$  است که با قسمت مثبت محور حقیقی زاویه  $\theta$  می‌سازد. فاصله انتقالی  $m$  را در امتداد  $A$  را بر حسب  $\lambda$  و  $\theta$  بیان کنید.

#### تمرین ۵-۲۷.

فرض کنید  $0 < r < 1$ . به ازای هر  $s > 0$  مجموعه زیر را در نظر بگیرید

$$C_r(s) = \{z \in \mathbb{D} \mid \cosh(d_{\mathbb{D}}(z, r)) + \cosh(d_{\mathbb{D}}(z, -r)) = s\}$$

را توصیف کنید.

شگفت‌انگیزترین قانون مثلثات هذلولوی عبارت است از قانون کسینوس‌های هذلولوی ۲ که می‌گوید طول هذلولوی یک ضلع یک مثلث هذلولوی با زاویه‌های داخلی مثلث تعیین می‌شود. به ویژه، این مطلب نتیجه می‌دهد که یک واحد استاندارد طول برای طول هذلولوی وجود دارد که خیلی متفاوت از طول در صفحه اقلیدسی است.

برای مثال، مثلث هذلولوی فشرده  $T$  را به زاویه‌های داخلی  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ،  $\beta = \frac{1}{3}\pi$  و  $\gamma = \frac{1}{4}\pi$  در نظر بگیرید. فرض کنید  $a$  طول هذلولوی ضلع  $T$  باشد که مقابل به رأس با زاویه  $\alpha$  و  $b$  طول هذلولوی ضلع  $T$  باشد که مقابل به رأس با زاویه  $\beta$  و  $c$  طول هذلولوی  $T$  باشد که مقابل به رأس با زاویه  $\gamma$  باشند.

با توجه به قانون کسینوس‌های ۲ طول هذلولوی سه ضلع  $T$  در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\cosh(a) = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\gamma)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)} = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1.019639$$

$$\cosh(b) = \frac{\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\gamma)} = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1.01521$$

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\csc\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 1.00437$$

یک مکشی روی اینکه واقعاً طول هذلولوی را چگونه باید به دست بیاوریم، می‌کنیم. برای حل کردن

$$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = x$$

یک معادله درجه ۲ که  $e^a$  در آن صدق می‌کند به دست می‌آوریم:

$$e^a = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

بنابراین یا  $a = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$  و یا  $a = \log(x - \sqrt{x^2 - 1})$

اگر چه، چون داریم

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

چون طول هذلولوی مثبت است، بنابراین داریم

$$a = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

قانون کسینوس‌های هذلولوی ۲ هیچ مشابه اقلیدسی ندارد و در واقع در هندسه اقلیدسی غلط می‌باشد. بعلاوه، یک دلیل اینکه زاویه‌های داخلی یک مثلث اقلیدسی نمی‌توانند طول اضلاع را تعیین کنند این است که در هندسه اقلیدسی تبدیل‌های آفین وجود دارند. از آنجائیکه هندسه هذلولوی تبدیل‌های آفین را همانطوریکه قبلاً در بخش ۵-۵

دیدیم، نمی پذیرد، اینکه انتظار داشته باشیم نتیجه‌ای شبیه قانون کسینوس‌های هذلولوی ۲ در صفحه هذلولوی برقرار باشد، غیر معقول نیست.

اگر چه این رویکرد را ما پی نمی گیریم، در اینجا اشاره می کنیم که یک اثبات یکسانی برای هر سه قانون مثلثات هذلولوی وجود دارد همانطوری که با توجه به شباهت صورت قوانین کسینوس‌های هذلولوی ۱ و ۲ می توانیم چنین پیشنهادی را بدهیم. خواننده علاقمند را به ترستن<sup>۱</sup> برای بررسی این رویکرد ارجاع می دهیم [۳۵].

همانطوری که در چندین جا از جمله در استخراج قانون کسینوس‌های هذلولوی ۱ دیدیم، محاسبه فاصله هذلولوی بین نقاط  $ID$  نسبتاً آسان است. اگر چه، همچنین در چندین جا از جمله تمرین ۵-۲۰ دیدیم که محاسبه زاویه‌ها در  $ID$  در حالت کلی بسیار خسته کننده و طولانی است.

یکی از کاربردهای قوانین مثلثات هذلولوی این است که این محاسبه زاویه‌ها را قابل پی گیری کند، برای نمونه، تمرین‌های ۵-۲۲ و ۵-۲۰ را می توانیم مجدداً با کمک قوانین کسینوس‌های هذلولوی حل کنیم.

به ازای  $n \geq 3$  و  $r > 0$ ،  $-n$  ضلعی منتظم هذلولوی فشرده  $P_n(r)$  را در قرص پوانکاره  $ID$  با رأس‌های  $p_k = r \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right)$  به ازای  $0 \leq k \leq n-1$  مانند بخش ۵-۵ در نظر بگیرد.

فرض کنید  $T$  مثلث هذلولوی با رأس‌های  $0$ ،  $p_1 = r$  و  $p_2 = r \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$  باشد.

زاویه داخلی  $T$  در  $0$  برابر  $\frac{2\pi}{n}$  است. همچنین طول هذلولوی دو ضلع که به  $0$  وصل می‌باشند برابر فاصله هذلولوی  $0$  تا  $p_1 = r$  می‌باشند که برابر است با

$$b = d_D(0, p_1) = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

به ویژه

$$\cosh(b) = \frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad \sinh(b) = \frac{2r}{1-r^2}$$

با استفاده از قانون کسینوس‌های هذلولوی ۱، طول هذلولوی  $a$  مربوط به ضلع مقابل

به  $0$  در  $T$  در شرط زیر صدق می‌کند:

<sup>1</sup> Thurston

$$\cosh(a) = \cosh^r(b) - \sinh^r(b) \cos\left(\frac{r\pi}{n}\right) = \frac{(1+r^r)^r - r^r \cos\left(\frac{r\pi}{n}\right)}{(1-r^r)^r}$$

حال که یک فرمول صریح برای طول هذلولوی  $a$  مربوط به ضلع مقابل به  $0$  در  $T$  داریم، می‌توانیم قانون سینوس‌های هذلولوی را برای تعیین زاویه داخلی  $\beta$  از  $T$  در رأس  $p$  استفاده کنیم، یعنی:

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(b) \sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)}{\sinh(a)}$$

سپس زاویه داخلی  $P_n(r)$  در  $p$  عبارت است از  $r\beta$ .

#### تمرین ۵-۲۸.

فرض کنید  $T$  یک مثلث هذلولوی فشرده باشد که تمام اضلاع آن دارای طول هذلولوی  $a$  می‌باشند. ثابت کنید که سه زاویه داخلی  $T$  با هم برابرند. بعلاوه اگر فرض کنیم  $\alpha$  زاویه داخلی  $T$  در یک رأس باشد، ثابت کنید.

$$r \cosh\left(\frac{1}{r} a\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{r} \alpha\right) = 1$$

#### تمرین ۵-۲۹.

فرض کنید  $T$  یک مثلث هذلولوی فشرده است. نشان دهید سه نیم‌ساز  $T$  همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (نیم‌ساز یعنی آن شعاع هذلولوی که از یک رأس مثلث شروع می‌شود و زاویه آن رأس را نصف می‌کند).

#### تمرین ۵-۳۰.

فرض کنید  $R$  یک چهار ضلعی هذلولوی با زاویه‌های  $\frac{\pi}{2}$ ،  $\frac{\pi}{2}$ ،  $\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{\pi}{2}$  است. با شروع از رأس با زاویه  $\varphi$  و حرکت در جهت پاد ساعت‌گرد رأس‌های  $R$  را به ترتیب  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  بنامید. نشان دهید

$$\sinh(C) \sinh(B) = \cos(\varphi)$$

و

$$\cosh(C) = \cosh(A) \sin(\varphi)$$



## مدل‌های نامسطح<sup>۱</sup>

در این فصل پایانی، دو مدل فضای هندسه هذلولوی را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. اولین آن‌ها مدل هذلولیگون<sup>۲</sup> صفحه هذلولوی است، مدلی از صفحه هذلولوی که به طور طبیعی در  $\mathbb{R}^2$  می‌نشیند و بر حسب مفاهیم جبرخطی تعریف می‌شود. در این مورد توضیحاتی خواهیم داد. مدل دیگر، به جهتی در مورد تعمیم مدل‌های هندسه هذلولوی قبلی به ابعاد بالاتر است. این بخش آخر کمی با بقیه کتاب تفاوت دارد و فقط به منظور آشنایی با مطالبی است که این کتاب گنجایش بحث آن‌ها را به تفصیل ندارد و لذا به صورت توصیفی است.

### ۱-۶ مدل هذلولیگون صفحه هذلولوی

تا کنون فقط مدل‌هایی از صفحه هذلولوی را مورد ملاحظه قرار دادیم که فضای زمینه آن‌ها یک قرص تحلیلی در صفحه مختلط  $\mathcal{C}$  بود و عنصر طول قوس هذلولوی آن‌ها تغییری همدیس به صورت  $\lambda(z)|dz|$  از متر اقلیدسی استاندارد روی  $\mathcal{C}$  است. هدف این بخش

<sup>1</sup> Nonplaner models

<sup>2</sup> Hyperboloid model

توضیح مدل متفاوتی از صفحه هذلولوی یعنی مدل هذلولیگون است که به صورت زیر مجموعه‌ای در  $\mathbb{R}^2$  می‌نشیند. مدل‌های مسطح صفحه هذلولوی که بررسی کردیم خیلی به آنالیز مختلط گره خورده‌اند، در حالیکه مدل‌های هذلولیگون خیلی به جبرخطی وابسته‌اند. در مورد مفاهیم پایه‌ای جبرخطی، خواننده مشتاق را به هر کتاب جبرخطی دوره کارشناسی مثل انتون<sup>۱</sup> [۶] و استرانگ<sup>۲</sup> [۳۴] رجوع می‌دهیم.

خواص پایه‌ای مدل هذلولیگون را به ترتیبی متفاوت از آنچه قبلاً در این کتاب آمده توسعه می‌دهیم. وقتی مدل نیم‌صفحه بالایی  $HH$  را توسعه می‌دادیم، از تعریف خط هذلولوی شروع کردیم، سپس گروهی از همسانریختی‌های  $HH$  را تعیین کردیم که خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی می‌برند و سپس عنصر طول قوس هذلولوی را با این فرض که تحت عمل این گروه ناوردا می‌ماند، به دست آوردیم. در مورد مدل هذلولیگون  $U$ ، با تعریف طول هذلولوی مسیره‌های به طور قطعه‌ای  $C^1$  شروع می‌کنیم و سپس یک گروه طبیعی از همسانریختی‌های  $U$  به دست می‌آوریم که این طول هذلولوی را حفظ می‌کند و خطوط هذلولوی را بعد از آن تعریف می‌کنیم.

در بقیه این فصل اعضای  $\mathbb{R}^2$  را به صورت بردارهای ستونی به مختصات  $x = [x_1, x_2, x_3]^T$  در نظر می‌گیریم. (هر چند که این علامت کمی درد سر دارد، به سایر انتخاب‌ها وقتی که ماتریس‌ها و بردارها را با مختصات بیان می‌کنیم، رجحان دارد.) لذا باید فضای پایه مدل هذلولیگون را توضیح دهیم و طول هذلولوی یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  را تعریف کنیم. از توضیح روشی (غیر دقیق) برای اندازه‌گیری اندازه یک بردار در  $\mathbb{R}^2$  شروع می‌کنیم.

### تعریف ۶-۱.

یک فرم مربعی روی  $\mathbb{R}^2$  عبارت است از یک تابع  $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  به شکل  $q(X) = X^T B X$  است که در آن  $B$  یک ماتریس متقارن  $3 \times 3$  (با درایه‌های حقیقی) است. اگر ماتریس متقارن  $B$  در دست باشد، آنگاه به سادگی و به طور مستقیم فرم مربعی  $q(X) = X^T B X$  محاسبه می‌شود. به عکس، چنانچه چنین فرم مربعی  $q(X)$  در دست باشد، آنگاه با توجه به تساوی زیر:

<sup>1</sup> Anton

<sup>2</sup> Strang

$$X^T \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \mu \\ \gamma & \mu & \eta \end{pmatrix} X = \alpha x_1^2 + \delta x_2^2 + \eta x_3^2 + 2\beta x_1 x_2 + 2\gamma x_1 x_3 + 2\mu x_2 x_3$$

و برابر قرار دادن ضرایب جملات متناظر در  $q(X)$  و  $X^T B X$ ، می‌توانیم ماتریس متقارن یکتای  $B$  را تعیین کنیم به طوریکه  $q(X) = X^T B X$ .

می‌توانیم یک دسته‌بندی نادقیق از فرم‌های مربعی روی  $\mathbb{R}^3$  برحسب مقادیر ویژه ماتریس‌های متقارن مربوطه ارائه دهیم. (با کمی سهل‌انگاری گاهی اوقات مقادیر ویژه ماتریس متقارن  $B$  را مقادیر ویژه فرم مربعی  $q(X) = X^T B X$  در نظر می‌گیریم.)

### تعریف ۶-۲.

فرض کنیم  $q(X) = X^T B X$  یک فرم مربعی روی  $\mathbb{R}^n$  باشد که  $B$  یک ماتریس متقارن  $3 \times 3$  است.

۱- اگر همه مقادیر ویژه  $B$  مثبت باشند، گوئیم  $q$  مثبت‌معین<sup>۱</sup> است. در این حالت به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$  و  $X \neq 0$  داریم  $q(X) > 0$ .

۲- اگر همه مقادیر ویژه  $B$  منفی باشند، گوئیم  $q$  منفی‌معین<sup>۲</sup> است. در این حالت به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$  و  $X \neq 0$  داریم  $q(X) < 0$ .

۳- اگر  $B$  دارای مقدار ویژه صفر باشد یا  $B$  هم مقدار ویژه مثبت و هم مقدار ویژه منفی داشته باشد، گوئیم  $q$  نامعین<sup>۳</sup> است. در این حالت  $X \in \mathbb{R}^3$  ناصفر موجود است به طوریکه  $q(X) = 0$ .

### تمرین ۶-۱.

مقادیر ویژه فرم مربعی زیر را پیدا کنید.

$$q(X) = -4x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 14x_1x_2 - 2x_2x_3 - 16x_1x_3$$

### تمرین ۶-۲.

به ازای هر ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  تابع  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  را با ضابطه  $f(X) = X^T A X$  در نظر می‌گیریم. به ازای یک ماتریس  $3 \times 3$  متقارن  $B$  می‌نویسیم  $f(X) = X^T B X$ . رابطه بین ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را توضیح دهید.

<sup>1</sup> Positive definite

<sup>2</sup> Negative definite

<sup>3</sup> Indefinite

ضرب در یک ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  یک نگاشت خطی  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  به دست می‌دهد. می‌توانیم این نگاشت خطی را با فرم مربعی  $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ترکیب کرده و فرم مربعی جدید  $q \circ A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  را به دست آوریم. در اینجا یک سوال طبیعی به ذهن می‌رسد که ماتریس‌هایی مانند  $A$  را پیدا کنیم که  $q$  و  $q \circ A$  برابر باشند. این ماتریس‌ها در ساختن مدل هذلولیگون ما برای صفحه هذلولوی مهم هستند.

### تعریف ۳-۶.

به ازای یک فرم مربعی  $q$  روی  $\mathbb{R}^3$  فرض کنیم  $O(q)$  گردایه ماتریس‌های  $3 \times 3$  باشد که  $q$  را ناوردانگه می‌دارند. یعنی:  $A \in O(q)$  اگر و فقط اگر به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$ ،  
 $q(X) = q(AX)$

به برخی از خواص  $O(q)$  اشاره می‌کنیم. اول، بدون توجه به فرم مربعی  $q$ ، ماتریس همانی  $I_3$ ،  $3 \times 3$  یک عضو  $O(q)$  است. همچنین بدون توجه به فرم مربعی  $q$ ، اگر  $A, B \in O(q)$ ، آنگاه  $AB \in O(q)$ . این مطلب از آنجا به دست می‌آید که به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$  داریم:

$$q(ABX) = q(A(BX)) = q(BX) = q(X)$$

که تساوی دوم از  $A \in O(q)$  و تساوی سوم از  $B \in O(q)$  نتیجه می‌شود. با استفاده از استدلال مشابه این بحث، می‌بینیم که به ازای اعضای وارون‌پذیر  $O(q)$ ، وارون این اعضا نیز مشمول  $O(q)$  هستند.

### تمرین ۳-۶.

فرض کنیم یک فرم مربعی  $q$  روی  $\mathbb{R}^3$  باشد و  $A$  یک عضو وارون‌پذیر  $O(q)$  باشد. نشان دهید:  $A^{-1} \in O(q)$ .

در اینجا باید توجه داشت که فرم‌های مربعی مانند  $q$  وجود دارد که  $O(q)$  شامل یک عضو وارون‌ناپذیر است و لذا  $O(q)$  یک زیرگروه  $GL_3(\mathbb{R})$ ، گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر  $3 \times 3$  نیست. مثلاً اگر قرار دهیم:

$$q(X) = 2x_1^2 + 3x_2^2 = X^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X$$

در این صورت  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in O(q)$ . البته شرطی وجود دارد که می‌توان آن را روی

فرم مربعی  $q$  روی  $\mathbb{R}^3$  اعمال کرد تا تضمین کند که  $O(q)$ ، ماتریس‌هایی که فرم  $q$  را حفظ می‌کنند، یک زیرگروه  $GL_3(\mathbb{R})$  باشد.

#### تعریف ۶-۴.

فرم مربعی  $q(X) = X^T B X$  با ماتریس  $3 \times 3$  و متقارن  $B$  ناتبهگن است، اگر  $B$  وارون‌پذیر باشد و در غیر این صورت تبهگن است.

فرم مربعی  $q(X) = 2x_1^2 + 3x_2^2$  تبهگن است، زیرا ماتریس متقارن مربوط به آن دارای مقدار ویژه صفر است و لذا وارون‌پذیر نیست. بنا به تعریف، فرم‌های مربعی مثبت‌معین و منفی‌معین، ناتبهگن هستند و لذا هر فرم مربعی تبهگنی، نامعین است. ولی همانطوریکه خواهیم دید همه فرم‌های مربعی نامعین، تبهگن نیستند. یک دلیل برای در نظر گرفتن فرم‌های مربعی ناتبهگن گزاره زیر است.

#### گزاره ۶-۵.

فرض کنیم  $q$  یک فرم مربعی ناتبهگن روی  $\mathbb{R}^3$  باشد، در این صورت هر عضو  $O(q)$  وارون‌پذیر است. بنابراین  $O(q)$  یک زیرگروه  $GL_3(\mathbb{R})$  است.

اثبات. همانطوریکه دیدیم  $O(q)$  شامل ماتریس همانی  $3 \times 3$ ،  $I_3$  بوده و تحت عمل ترکیب بسته است، تنها چیزی که باید بدانیم برای اینکه نشان دهیم  $O(q)$  یک گروه است، این است که تحت عمل وارون گرفتن بسته است.

فرض کنیم  $q$  یک فرم مربعی ناتبهگن روی  $\mathbb{R}^3$  باشد، می‌نویسیم  $q(X) = X^T B X$  که در آن  $B$  یک ماتریس متقارن  $3 \times 3$  است. فرض کنیم  $A$  یک عضو  $O(q)$  باشد. از آنجائیکه به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$ ،  $q(AX) = q(X)$ ، به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$  داریم:

$$X^T B X = q(X) = q(AX) = (AX)^T B A X = X^T (A^T B A) X$$

چون  $A^T B A$  متقارن است، از یکتایی ماتریس متقارن تعیین کننده فرم مربعی نتیجه می‌شود که  $B = A^T B A$ . به ویژه اگر یک بردار غیر صفر  $v$  وجود داشته باشد که  $Av = 0$ ، آنگاه همچنین  $A^T B Av = Bv = 0$  که با فرض وارون‌پذیر بودن  $B$  متناقض

است. بنابراین  $\ker(A) = \{0\}$  و لذا  $A$  وارون‌پذیر است. بنا بر تمرین ۶-۳،  $A^{-1} \in O(q)$ . چون هر عضو  $O(q)$  وارون‌پذیر است،  $O(q)$  زیر گروهی از  $GL_r(\mathbb{R})$  است.

فهرالمطلوب

### تمرین ۶-۴.

فرض کنیم  $q$  یک فرم مربعی تبهگن باشد. نشان دهید  $O(q)$  شامل یک عضو وارون ناپذیر است و لذا نمی‌تواند زیر گروهی از  $GL_r(\mathbb{R})$  باشد.

حال از حساب توابع چند متغیره استفاده می‌کنیم. مثل هر تابع با مقادیر حقیقی روی  $\mathbb{R}^r$ ، یک فرم مربعی روی  $\mathbb{R}^r$  به طور طبیعی گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های  $\mathbb{R}^r$  را مشخص می‌کند. به ازای  $c \in \mathbb{R}$  مجموعه تراز<sup>۱</sup>  $q$  در  $\mathbb{R}^r$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S_c = \{x \in \mathbb{R}^r \mid q(x) = c\}$$

هر چند که هنوز از ترکیب  $O(q)$  بی اطلاع هستیم ولی به ازای هر  $A \in O(q)$  و هر  $c \in \mathbb{R}$  داریم  $A(S_c) \subseteq S_c$ . این نتیجه از اینجا ناشی می‌شود که اگر  $X \in S_c$  آنگاه بنا به تعریف  $q(X) = c$  و به ازای یک عضو  $A \in O(q)$  داریم  $q(AX) = q(X) = c$  و لذا  $AX \in S_c$ .

اگر  $q$  ناتبهگن باشد، آنگاه بیش از این می‌توان گفت به عبارت دیگر چون هر عضو  $O(q)$  وارون‌پذیر است به ازای هر  $A \in O(q)$  و هر  $c \in \mathbb{R}$  همچنین داریم  $A^{-1}(S_c) \subseteq S_c$ . با ضرب در  $A$  داریم  $S_c \subseteq AS_c$ . با ترکیب این مشاهده و مشاهده قبلی که به ازای هر  $A \in O(q)$  و هر  $c \in \mathbb{R}$ ،  $A(S_c) \subseteq S_c$  می‌بینیم که به ازای هر  $A \in O(q)$  و هر  $c \in \mathbb{R}$  داریم:  $AS_c = S_c$ .

فرم مربعی که بیش از هر فرم مربعی در این فصل مورد توجه ما است، فرم مربعی نامعین ناتبهگن زیر است:

$$Q(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = X^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

به ویژه اینکه  $O(q)$  یک زیر گروه همه ماتریس‌های  $3 \times 3$  یعنی  $GL_3(\mathbb{R})$  است. تحلیلی که خواهد آمد می‌تواند در مورد هر فرم مربعی بکار رود، هر چند که خصوصیات هر فرم مربعی خاص که انتخاب می‌کنیم ممکن است فرق کند.

در اینجا یک مجموعه تراز خاص وجود دارد که مورد توجه ما است، یعنی:

$$S_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) = -1\}$$

مجموعه تراز  $S_{-1}$  از صفحه  $x_1 x_2$  مجزا می‌باشد، چون  $Q([0, x_1, x_2]^T) = -1$  نتیجه می‌دهد که  $-1 = x_1^2 + x_2^2$  و این معادله هیچ جوابی برای اعداد حقیقی  $x_1$  و  $x_2$  ندارد. توجه داشته باشید که  $[1, 0, 0]^T \in S_{-1}$ ، چون  $Q([1, 0, 0]^T) = -1^2 + 0^2 + 0^2 = -1$  و هر مجموعه تراز تحت تقارن نسبت به صفحه  $x_1 x_2$  ناوردا است، چون

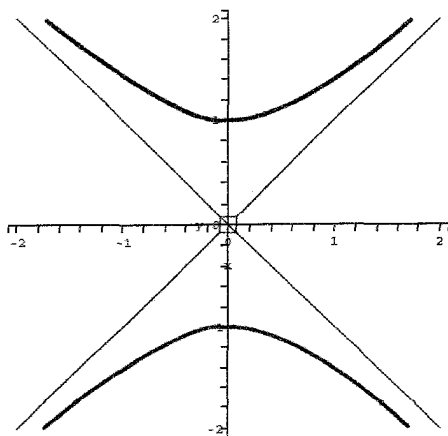
$$Q([x_1, x_2, x_3]^T) = Q([-x_1, x_2, x_3]^T) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

به ویژه مجموعه تراز  $S_{-1}$  دو مؤلفه دارد:

$$U = \{X = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) = -1, x_3 > 0\} \quad \text{پارچه بالایی:}$$

$$L = \{X = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) = -1, x_3 < 0\} \quad \text{و پارچه پایینی:}$$

$U$  پارچه بالایی  $S_{-1}$  فضای پایه مدل هذلولیگون صفحه هذلولوی است. برای یک دید جنبی شکل ۱-۶ را ببینید.



شکل ۱-۶ دید جنبی هذلولیگون و مخروط محور قائم  $x_3$ .

فرض کنیم  $O^+(Q)$  زیر گروه  $O(Q)$  باشد که پارچه بالایی  $U$  از  $S_{-1}$  را حفظ می‌کند.  $O^+(Q)$  را می‌توان به صورت گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر  $3 \times 3$  مانند  $A$  در

نظر گرفت که به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$ ،  $Q(X) = Q(AX)$  و برای آن‌ها مختص  $x$ ،  $A[1, 0, 0]^T$  مثبت است. توجه کنید که  $O^+(Q)$  یک زیرگروه  $O(Q)$  با اندیس ۲ است. کاری که پیش رویمان قرار دارد این است که تعیین کنیم کدام ماتریس‌ها در  $O^+(Q)$  قرار دارند و عمل آن‌ها را روی  $\mathcal{U}$  تحلیل کنیم. اگر چه قبل از انجام این کار، نشان می‌دهیم که امکان دارد بدون داشتن شرح صریحی برای اعضای  $O^+(Q)$ ، طول هذلولوی یک مسیر به طور قطعی  $C^1$  را که تحت عمل  $O^+(Q)$  ناوردا است، تعریف کنیم. از تجزیه بردارهای مماس بر  $\mathcal{U}$  شروع می‌کنیم.

### گزاره ۶-۶.

فرض کنیم  $u$  یک نقطه  $\mathcal{U}$  است، و  $t$  یک بردار مماس ناصفر بر  $\mathcal{U}$  در  $u$  باشد. در این صورت  $Q(t) > 0$ .

اثبات. بدو توجه داریم که مجموعه تراز  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x) = 0\}$  عبارت است از مخروط قائم:

$$C = \{ [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 \}$$

ناحیه  $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) < 0\}$ ، ناحیه ناهمبندی شامل محور  $x$  (بجز مبدا) است، در حالیکه ناحیه  $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) > 0\}$ ، ناحیه همبندی شامل صفحه  $x_3 = 0$  (بجز مبدا) است. اگر  $\mathbb{R}^3$  را طوری رسم کنیم که محور  $x$  قائم باشد، آنگاه ناحیه (ناهمبند)  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x) < 0\}$  بالا و پایین مخروط  $C$  قرار دارد، در حالیکه ناحیه (همبند)  $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) > 0\}$  بین قسمت‌های بالایی و پایینی مخروط  $C$  قرار دارد. دوباره شکل ۶-۱ را برای یک دید جانبی مشاهده کنید.

از آنجائیکه  $\mathcal{U}$  مشمول مجموعه تراز  $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) = -1\}$  است، هر بردار قائم بر  $\mathcal{U}$  در نقطه  $u = [u_1, u_2, u_3]^T \in \mathcal{U}$  مضرپی از گرایان

$$\nabla Q(u) = \begin{bmatrix} -2u_1 \\ 2u_2 \\ 2u_3 \end{bmatrix}$$

است که در نقطه  $u$  محاسبه می‌شود. لذا یک بردار ناصفر قائم  $n$  بر  $\mathcal{U}$  در نقطه  $u$  به

ازای یک  $c \in \mathbb{R}$  که  $c \neq 0$  به صورت زیر است:



$$n = c \begin{bmatrix} -2u_x \\ 2u_y \\ 2u_z \end{bmatrix}$$

و لذا در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$Q(n) = Q \left( \begin{bmatrix} -2u_x \\ 2u_y \\ 2u_z \end{bmatrix} \right) = 4c^2 (-u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = -4c^2 < 0.$$

(چون  $u \in \mathcal{U}$  داریم  $-u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = -1$ ). بنابراین چون هر بردار مماس ناصفر  $t$  بر  $\mathcal{U}$  در نقطه  $u$ ، بر بردار قائم  $n$  بر  $\mathcal{U}$  در نقطه  $u$ ، عمود است، و اینکه بردارهای قائم ناصفر در ناحیه  $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) < 0\}$  قرار دارند و مخروط  $C$  مخروط قائم است، مشاهده می‌کنیم که بردارهای مماس ناصفر بر  $\mathcal{U}$  در ناحیه  $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid Q(X) > 0\}$  قرار دارند بنابراین داریم  $Q(t) > 0$ .

### فهره المطلبوب

در نتیجه، فرض کنیم  $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  باشد. چون  $Q(f'(t)) > 0$ ، زیرا  $f'(t)$  در نقطه  $f(t)$  بر  $\mathcal{U}$  مماس است، این امر ما را ترغیب می‌کند که طول هذلولوی  $f$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\ell_U(f) = \int_a^b \sqrt{Q(f'(t))} dt.$$

برای اینکه این تعریف معقول باشد، باید نشان دهیم که این تعریف مفروض برای طول هذلولوی تحت عمل  $O^+(Q)$  ناوردا است.

### گزاره ۶-۷.

به ازای هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$ ،  $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  و به ازای هر  $A \in O^+(Q)$  داریم:

$$\ell_U(f) = \ell_U(A \circ f).$$

اثبات. از آنجائیکه

$$\ell_U(A \circ f) = \int_a^b \sqrt{Q((A \circ f)'(t))} dt$$

لازم است  $Q((A \circ f)'(t))$  را مورد بررسی قرار دهیم. با در نظر گرفتن  $A$  به صورت یک نگاشت خطی  $A: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  ملاحظه می‌کنیم که  $(A \circ f)'(t) = A \circ f'(t)$ . این تساوی را می‌توان یا با استفاده از تعریف مشتق یک نگاشت خطی از  $\mathbb{R}^r$  به  $\mathbb{R}^r$  و یا با نوشتن  $f(t)$  و  $A$  بر حسب مختصات و محاسبه مستقیم  $(A \circ f)'(t)$  و  $A \circ f'(t)$  و مقایسه نتایج بررسی کرد. ما راه دوم را انتخاب می‌کنیم، لذا می‌نویسیم:

$$f(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}$$

و

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

در این صورت

$$(A \circ f)'(t) = \left( \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix} \right)'$$

$$= \begin{bmatrix} ax_1(t) + bx_2(t) + cx_r(t) \\ dx_1(t) + ex_2(t) + fx_r(t) \\ gx_1(t) + hx_2(t) + kx_r(t) \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} ax'_1(t) + bx'_2(t) + cx'_r(t) \\ dx'_1(t) + ex'_2(t) + fx'_r(t) \\ gx'_1(t) + hx'_2(t) + kx'_r(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_r(t) \end{bmatrix} = A \circ f'(t)$$

و این همان تساوی مطلوب است.

بنابراین با استفاده از اینکه  $A \in O^+(Q)$  داریم:

$$Q((A \circ f)'(t)) = Q(A \circ f'(t)) = Q(f'(t))$$

و لذا

$$\ell_U(A \circ f) = \int_a^b \sqrt{Q((A \circ f)'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{Q(f'(t))} dt = \ell_U(f)$$

همانطوریکه خواستیم.

### فهردها المطلوب

بعنوان مثال مجموعه  $T_r$  را که اشتراک  $U$  با صفحه اقلیدسی  $P_r = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x = r\}$  به ازای  $r > 1$  است، در نظر می‌گیریم. اگر  $[r, s, t]^T \in T_r$ ، آنگاه  $s^2 + t^2 = r^2 - 1$  و  $s = \sqrt{r^2 - 1} \cos \alpha$  و  $t = \sqrt{r^2 - 1} \sin \alpha$  به ازای یک  $\alpha \in \mathbb{R}$  نوشت. وقتی که  $\alpha$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  تغییر کند، تمام  $T_r$  پوشانده می‌شود. به ویژه، مشاهده می‌کنیم که  $T_r$  یک دایره اقلیدسی در صفحه  $P_r$  در  $\mathbb{R}^3$  است. بعلاوه شعاع (اقلیدسی)  $T_r$  برابر  $\sqrt{r^2 - 1}$  است و لذا طول (اقلیدسی)  $T_r$  برابر  $2\pi\sqrt{r^2 - 1}$  است.

برای محاسبه طول هذلولوی  $T_r$ ، ابتدا آن را با مسیر  $f: [0, 2\pi] \rightarrow U$  با ضابطه زیر پارامتری می‌کنیم:

$$f(t) = \begin{bmatrix} r \\ \sqrt{r^2 - 1} \cos t \\ \sqrt{r^2 - 1} \sin t \end{bmatrix}$$

برای این انتخاب  $f$  داریم:

$$f'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{r^2 - 1} \sin t \\ \sqrt{r^2 - 1} \cos t \end{bmatrix}$$

بنابراین  $Q(f'(t)) = r^2 - 1$  لذا

$$\ell_U(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - 1} dt = 2\pi\sqrt{r^2 - 1}$$

که برابر طول اقلیدسی  $T_r$  است، وقتی که  $T_r$  را به صورت یک دایره در  $P_r$  مشاهده کنیم.

از آنجاییکه می‌توانیم طول هذلولوی یک مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  در  $U$  را تعریف کنیم، متر هذلولوی  $d_U$  را نیز می‌توانیم روی  $U$  همانطوریکه قبلاً در مورد نیم صفحه

بالایی  $III$  انجام دادیم، تعریف کنیم. باین ترتیب که فاصله هذلولوی  $d_U(u, v)$  بین نقاط  $u$  و  $v$  در  $U$  را برابر اینفیموم طول مسیرهای به طور قطعه‌ای  $C^1$   $U \rightarrow [a, b]$ :  $f$  که  $f(a) = u$  و  $f(b) = v$  تعریف کنیم. مثل قبل، با استفاده از استدلالی مشابه ارائه شده در اثبات گزاره ۳، ناوردایی طول هذلولوی  $l_U$  تحت عمل  $O^+(Q)$ ، ناوردایی فاصله هذلولوی  $d_U$  را تحت عمل  $O^+(Q)$  نتیجه می‌دهد.

اینک آماده‌ایم که اعضا  $O^+(Q)$  را تعیین کنیم.

## گزاره ۶-۸

گروه  $O^+(Q)$  توسط خانواده ماتریس‌های زیر تولید می‌شود:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \cdot & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

و

$$B_\mu = \begin{bmatrix} \cosh \mu & \cdot & \sinh \mu \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \sinh \mu & \cdot & \cosh \mu \end{bmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

و ماتریس

$$C_\nu = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

اثبات. می‌توانیم کار را با این نکته که در اثبات گزاره ۶-۵ بحث شد که  $O(Q)$  متشکل است از همه ماتریس‌های وارون‌پذیر  $3 \times 3$  مانند  $A$  با شرط  $B = A^T B A$ ، ولی این محاسبات بسرعت بی‌نظم و بزرگ می‌شوند. لذا در چند مرحله اثبات می‌کنیم.

ابتدا زیر گروهی از  $O^+(Q)$  را تعیین می‌کنیم که نقطه  $^T[1, 0, 0]$  را ثابت نگه می‌دارد. لذا فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

عضوی از  $O^+(Q)$  باشد که  $A[\cdot, \cdot, \cdot]^T = [\cdot, \cdot, \cdot]^T$  چون

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}$$

بنابراین  $a = 1$  و  $d = g = 0$ .

حال از اینکه به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$  داریم  $Q(X) = Q(AX)$  استفاده می‌کنیم. با

محاسبه، داریم:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ \cdot & e & f \\ \cdot & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + bx_2 + cx_3 \\ ex_2 + fx_3 \\ hx_2 + kx_3 \end{bmatrix}$$

و لذا

$$Q(AX) = -x_1^2 + (-b^2 + e^2 + h^2)x_2^2 + (-c^2 + f^2 + k^2)x_3^2 - 2bx_1x_2 - 2cx_1x_3 + 2(-bc + ef + hk)x_2x_3$$

با مساوی قرار دادن ضرایب جملات متناظر  $Q(X) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  و  $Q(AX)$

می‌بینیم که

$$b = c = 0$$

و

$$e^2 + h^2 = 1 \quad \text{و} \quad f^2 + k^2 = 1 \quad \text{و} \quad ef + hk = 0$$

به ویژه، اعداد حقیقی  $\alpha$  و  $\beta$  وجود دارند که

$$e = \cos \alpha \quad \text{و} \quad h = \sin \alpha$$

$$f = \cos \beta \quad \text{و} \quad k = \sin \beta$$

لذا  $A$  به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & f \\ \cdot & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cdot & \sin \alpha & \sin \beta \end{bmatrix}$$

در این صورت معادله  $ef + hk = 0$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

و لذا  $\cos(\alpha - \beta) = 0$ . بنابراین  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$  که  $k \in \mathbb{Z}$ . دو حالت برای بررسی وجود دارد.

اگر  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  که  $k \in \mathbb{Z}$ . آنگاه  $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} - 2k\pi$  در این حالت می بینیم که  $\sin \beta = -\cos \alpha$  و  $\cos \beta = \sin \alpha$  لذا داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & f \\ \cdot & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cdot & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

که  $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  که  $k \in \mathbb{Z}$ . آنگاه  $\beta = \alpha - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi$  در این حالت می بینیم که  $\sin \beta = -\cos \alpha$  و  $\cos \beta = \sin \alpha$  لذا داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & f \\ \cdot & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \cdot & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

توجه داریم که

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cdot & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \cdot & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

و لذا زیر گروه  $O^+(Q)$  که  $[1, 0, 0]^T$  را ثابت نگه می دارد، توسط خانواده

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \cdot & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

و ماتریس تکی

$$C_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

تولید می شود.

فرار می دهیم

$$C_1 = A_{\frac{\pi}{2}} C_2 A_{\frac{\pi}{2}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

از لحاظ هندسی، هر  $A_\alpha$  یک دوران در  $U$  حول محور  $x$  است. تبدلات  $C_1$  و  $C_2$  انعکاس می‌باشند، که در آن  $C_1$  انعکاس در صفحه  $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$  یعنی صفحه  $x_1 x_2$  و  $C_2$  انعکاس در صفحه  $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$  یعنی صفحه  $x_1 x_3$  است. به طور کلی، اگر  $S_\alpha$  صفحه اقلیدسی باشد که شامل محور  $x$  است و با صفحه  $x_1 x_2$  زاویه  $\alpha$  بسازد، آنگاه  $A_\alpha C_1 A_\alpha^{-1}$  انعکاسی در صفحه  $S_\alpha$  است.

برای مرحله بعدی بحث، فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

عضوی از  $O^+(Q)$  باشد که صفحه  $x_1 x_2$  را پایا نگه می‌دارد. هر عضو صفحه  $x_1 x_2$  به

شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} * \\ \cdot \\ * \end{bmatrix}$$

که در آن \* نشان دهنده هر عدد حقیقی است. چون

$$A \begin{bmatrix} * \\ \cdot \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ \cdot \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ \cdot \\ * \end{bmatrix}$$

می‌بینیم که  $A$  به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \cdot & e & \cdot \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

اینک مثل قبل، از اینکه به ازای هر  $X \in \mathbb{R}^3$  داریم  $Q(X) = Q(AX)$  استفاده می‌کنیم.

با محاسبه داریم:

$$AX = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \cdot & e & \cdot \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ ex_2 \\ gx_1 + hx_2 + kx_3 \end{bmatrix}$$

و لذا

$$Q(AX) = (-a^2 + g^2)x_1^2 + (-b^2 + e^2 + h^2)x_2^2 + (-c^2 + k^2)x_3^2 + 2(-ab + gh)x_1x_2 + 2(-ac + gk)x_1x_3 + 2(-bc + hk)x_2x_3$$

با مساوی قرار دادن ضرائب جملات متناظر  $Q(AX)$  و  $Q(X) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

می‌بینیم که

$$a^2 - g^2 = 1 \quad \text{و} \quad k^2 - c^2 = 1 \quad \text{و} \quad -b^2 + e^2 + h^2 = 1$$

$$ab - gh = ac - gk = bc - hk = 0$$

به ویژه، اعداد حقیقی  $\mu$  و  $\eta$  وجود دارند به طوری که

$$a = \pm \cosh \mu \quad \text{و} \quad g = \pm \sinh \mu$$

$$k = \pm \cosh \eta \quad \text{و} \quad c = \pm \sinh \eta$$

با توجه به اینکه

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \cdot & e & \cdot \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \cdot \\ g \end{bmatrix} \in U$$

لذا  $a > 0$ ، بنابراین  $a = \cosh \mu$ . توجه داریم که  $\cosh \mu = \cosh(-\mu)$

و  $-\sinh \mu = \cosh(-\mu)$ . این اتحادها بسادگی با بیان  $\cosh x$  و  $\sinh x$  برحسب  $e^x$  به

دست می‌آید<sup>۱</sup>. بنابراین در صورت لزوم، با جایگزینی  $\mu$  با  $-\mu$ ، می‌توان فرض کرد

$$g = \sinh \mu$$

بنابراین داریم:

$$A = \begin{bmatrix} \cosh \mu & b & c \\ \cdot & e & \cdot \\ \sinh \mu & h & k \end{bmatrix}$$

و لذا

<sup>۱</sup> در متن کتاب بجای  $-\mu$ ،  $\mu^{-1}$  نوشته است که منظور همان قرینه  $\mu$  بوده است.



$$AC_{\eta} = \begin{bmatrix} \cosh \mu & b & c \\ \cdot & e & \cdot \\ \sinh \mu & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \mu & b & -c \\ \cdot & e & \cdot \\ \sinh \mu & h & -k \end{bmatrix}$$

اگر  $k < 0$ ، آنگاه  $A$  را با  $AC_{\eta}$  جایگزین می‌کنیم، تا مطمئناً داشته باشیم  $k = \cosh \eta > 0$ . سپس، چنانچه  $k < 0$ ، آنگاه  $-\eta$  را جانشین  $\eta$  می‌کنیم، تا داشته باشیم  $c = \sinh \eta$ . لذا احیاناً بعد از جانشینی  $-\mu$  بجای  $\mu$ ، جانشینی  $AC_{\eta}$  بجای  $A$  و جانشینی  $-\eta$  بجای  $\eta$  می‌بینیم که  $A$  بشکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} \cosh \mu & b & \sinh \eta \\ \cdot & e & \cdot \\ \sinh \mu & h & \cosh \eta \end{bmatrix}$$

در این صورت معادله  $ac - gk = 0$  به صورت معادله زیر در می‌آید:

$$\cosh \mu \sinh \eta - \cosh \eta \sinh \mu = 0$$

این معادله را به صورت  $\tanh \mu = \tanh \eta$  بازنویسی می‌کنیم. چون  $\tanh t$  یک تابع صعودی از  $t$  است، می‌بینیم که  $\mu = \eta$ .

لذا  $A$  بشکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} \cosh \mu & b & \sinh \mu \\ \cdot & e & \cdot \\ \sinh \mu & h & \cosh \mu \end{bmatrix}$$

معادله  $ab = gh$  به صورت  $b \cosh \mu = h \sinh \mu$  در می‌آید و معادله  $bc = hk$  به صورت  $b \sinh \mu = h \cosh \mu$  در می‌آید. بنابراین

$$b = \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu} h = \left( \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu} \right)^2 b$$

دو امکان وجود دارد. امکان اول اینکه  $b = 0$  و در این صورت  $h = 0$ . لذا  $A$  به شکل

$$A = \begin{bmatrix} \cosh \mu & \cdot & \sinh \mu \\ \cdot & e & \cdot \\ \sinh \mu & \cdot & \cosh \mu \end{bmatrix}$$

در می‌آید که در آن  $e' = 1$ . بنابراین، اگر  $e = 1$ ، آنگاه  $A = B_\mu$  و اگر  $e = -1$  آنگاه  $A = C_1 B_\mu$ .

امکان دیگر این است که  $\sinh \mu = 0$  که نتیجه می‌دهد  $\mu = 0$ . لذا  $A$  به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & \cdot \\ \cdot & e & \cdot \\ \cdot & h & 1 \end{bmatrix}$$

در این حالت برای اینکه ببینیم  $[1, 0, 0]^T = A[1, 0, 0]^T$  محاسبه می‌کنیم. از آنجایی که  $A$  در زیر گروهی از  $O^+(Q)$  قرار دارد که  $[1, 0, 0]^T$  را ثابت نگه می‌دارد، با استفاده از کارهای قبلی داریم  $b = 0$ ،  $h = 0$  و  $e = \pm 1$ . اگر  $e = 1$  آنگاه  $A = I_3$  ماتریس همانی از مرتبه ۳ می‌باشد و اگر  $e = -1$  آنگاه  $A = C_1$ .

به طور خلاصه، زیرگروهی از  $O^+(Q)$  که صفحه  $x_1 x_2$  را حفظ می‌کند توسط خانواده ماتریس‌های

$$B_\mu = \begin{bmatrix} \cosh \mu & \cdot & \sinh \mu \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \sinh \mu & \cdot & \cosh \mu \end{bmatrix}$$

و ماتریس‌های تکی

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \text{ و } C_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

تولید می‌شود.

توجه داریم که  $C_1$  انعکاس نسبت به صفحه  $x_1 x_2$  است و لذا صفحه  $x_1 x_2$  را به طور نقطه‌ای ثابت نگه می‌دارد.  $C_2$  انعکاس نسبت به صفحه  $x_1 x_3$  که بر صفحه  $x_1 x_2$  عمود است، می‌باشد و لذا  $C_2$  صفحه  $x_1 x_2$  را به خودش می‌برد و به صورت انعکاس در صفحه  $x_1 x_2$  نسبت به محور  $x_3$  عمل می‌کند. ارائه تعبیر هندسی  $B_\mu$  را تا وقتی که مفهوم خط هذلولوی را در  $\mathcal{U}$  تعریف کنیم، به تعویق می‌اندازیم.

برای اینکه اثبات را تمام کنیم، فرض کنیم  $A$  یک عضو  $O^+(Q)$  باشد. نشان می‌دهیم که  $A$  را می‌توان با تعقیب تصویر یک نقطه تکی، به صورت ترکیبی از یک  $A_\alpha$  برای

یک  $\alpha \in \mathbb{R}$ ، یک  $B_\mu$  به ازای یک  $\mu \in \mathbb{R}$  و  $C_\nu$  نوشت. لذا نقطه  $A([\cdot, \cdot, \cdot]^T) = [r, s, t]^T$  را در نظر می‌گیریم. عضوی از  $O^+(Q)$  می‌سازیم که  $[r, s, t]^T$  را به  $[\cdot, \cdot, \cdot]^T$  برد.

از آنجاییکه  $[r, s, t]^T \in U$  داریم  $-r^2 + s^2 + t^2 = -1$  و  $r \geq 1$ . اگر  $r = 1$ ، آنگاه  $s = t = 0$  و لذا  $[r, s, t]^T = [\cdot, \cdot, \cdot]^T$ . در این حالت تحلیل ما از اعضاء  $O^+(Q)$  که  $[\cdot, \cdot, \cdot]^T$  را ثابت نگه می‌دارند، نتیجه می‌دهد که  $A = A_\alpha C_\nu^\epsilon$  به ازای یک  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $\epsilon = 0$  یا  $\epsilon = 1$ .

بنابراین فرض می‌کنیم  $r > 1$ . ابتدا می‌خواهیم یک  $\alpha$  پیدا کنیم که  $A_\alpha([r, s, t]^T)$  در صفحه  $x_1 x_2$  قرار داشته باشد. (از نظر هندسی، واضح است که می‌توانیم  $U$  را حول محور  $x_3$  بچرخانیم تا اینکه تصویر  $[r, s, t]^T$  با این دوران در صفحه  $x_1 x_2$  قرار گیرد. ولی از این موقعیت برای این استفاده می‌کنیم که ببینیم چگونه می‌توان مقدار خاصی برای  $\alpha$  پیدا کرد که این نتیجه حاصل شود). با محاسبه داریم:

$$A_\alpha \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \cos \alpha - t \sin \alpha \\ s \sin \alpha + t \cos \alpha \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه  $r^2 + t^2 = r^2 - 1 > 0$ ، به ازای یک  $\beta \in \mathbb{R}$  می‌توان نوشت

$$s = \sqrt{r^2 - 1} \cos \beta \quad \text{و} \quad t = \sqrt{r^2 - 1} \sin \beta \quad \text{لذا}$$

$$\begin{aligned} s \cos \alpha - t \sin \alpha &= \sqrt{r^2 - 1} (\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha) \\ &= \sqrt{r^2 - 1} \cos(\beta + \alpha) \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ ، آنگاه  $s \cos \alpha - t \sin \alpha = 0$ . لذا مقداری برای  $\alpha$  پیدا

کردیم که به ازای یک  $T$

$$A_\alpha A \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = A_\alpha \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \cdot \\ T \end{bmatrix}$$

توجه داریم که چون بنا به فرض  $r > 1$ ، داریم  $T \neq 0$ . برای تمام کردن بحث مقداری

برای  $\mu$  پیدا می‌کنیم که

$$B_\mu A_\alpha A \begin{bmatrix} \backslash \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = B_\mu \begin{bmatrix} r \\ \cdot \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \backslash \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

با محاسبه داریم

$$B_\mu \begin{bmatrix} r \\ \cdot \\ T \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \mu & \cdot & \sinh \mu \\ \cdot & \backslash & \cdot \\ \sinh \mu & \cdot & \cosh \mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \cdot \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cosh \mu + T \sinh \mu \\ \cdot \\ r \sinh \mu + T \cosh \mu \end{bmatrix}$$

بنابراین باید یک  $\mu$  پیدا کنیم که

$$r \cosh \mu + T \sinh \mu = \backslash$$

$$r \sinh \mu + T \cosh \mu = \cdot$$

از معادله دوم نتیجه می‌شود که  $T = -r \tanh \mu$  و لذا

$$r \cosh \mu + T \sinh \mu = r(\cosh \mu - \tanh \mu \sinh \mu) = \frac{r}{\cosh \mu}$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که  $r \cosh \mu + T \sinh \mu = \backslash$  اگر و فقط اگر  $r = \cosh \mu$

لذا به ازای یک  $r$  مفروض فقط باید یک  $\mu$  پیدا کنیم که  $\cosh \mu = r$  چون  $r > 1$  همواره امکان پذیر است.

حال بحث را با استفاده از قسمت اول اثبات، تمام می‌کنیم. چون به ازای مقادیری از  $\alpha$  و  $\mu$  که پیدا کردیم  $B_\mu A_\alpha A$ ، نقطه  $[1, 0, 0]^T$  را ثابت نگه می‌دارد یک  $\theta \in \mathbb{R}$  وجود دارد به طوری که  $B_\mu A_\alpha A = A_\theta C_r^\varepsilon$  که در آن  $\varepsilon = 0$  یا  $\varepsilon = 1$ . بنابراین داریم  $A = A_\alpha^{-1} B_\mu^{-1} A_\theta C_r^\varepsilon$

### فهوالمطلوب

یک نتیجه از اثبات گزاره ۶-۸ این است که اگر  $A \in O^+(Q)$ ، آنگاه  $\det A = \pm 1$ . زیرا هر یک از ماتریس‌های مولد  $O^+(Q)$ ؛ یعنی  $A_\alpha$ ،  $B_\mu$  و  $C_r$  دارای دترمینان  $\pm 1$  هستند. نمادهایی که ما در اینجا انتخاب کردیم قدری غیر استاندارد هستند. نماد معمول برای گروه ماتریس‌هایی که فرم مربعی  $Q(X) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  را حفظ می‌کنند  $O(2,1)$  است. فرض کنیم  $SO(2,1)$ ، زیر گروه  $O(2,1)$  باشد که از اعضای  $O(2,1)$  تشکیل شده که

دترمینان آن‌ها برابر ۱ است. توجه داریم که  $SO(2,1)$  توسط  $A_\alpha$  که  $\alpha \in \mathbb{R}$  و  $B_\mu$  که  $\mu \in \mathbb{R}$  تولید می‌شود.

خط هذلولوی در  $U$  را با اشتراک  $U$  و صفحه اقلیدسی در  $\mathbb{R}^3$  مار بر مبداء  $o$  تعریف می‌کنیم. با این تعریف بالبداهه واضح است که هر دو نقطه متمایز  $U$  یک خط هذلولوی یکتا در  $U$  مشخص می‌کند، زیرا دو نقطه متمایز در  $\mathbb{R}^3$  و مبداء  $o$  (که در  $U$  نیست) یک صفحه یکتا در  $\mathbb{R}^3$  مشخص می‌کنند. همچنین چون هر عضو  $O^+(Q)$  وقتیکه به صورت یک نگاشت خطی از  $\mathbb{R}^3$  به  $\mathbb{R}^3$  در نظر گرفته شود، صفحات اقلیدسی مار بر  $o$  را به صفحات اقلیدسی مار بر  $o$  می‌برد. بالبداهه می‌بینیم که هر عضو  $O^+(Q)$ ، خطوط هذلولوی در  $U$  را به خطوط هذلولوی در  $U$  می‌برد. اثبات اینکه مسیرهایی که فاصله در  $U$  را محقق می‌کنند، پارامتر سازی تقریباً ساده از پاره خط‌های هذلولوی در  $U$  است. در اصل، مشابه اثباتی است که در مورد نیم صفحه بالایی  $IH$  ارائه شده است. دنبال کردن توضیحات بیشتر را به خواننده علاقه‌مند واگذار می‌کنیم.

اینک می‌توانیم یک تعبیر هندسی برای عناصر  $B_\mu$  در  $O^+(Q)$  ارائه دهیم. اشتراک صفحه  $x_1, x_2$  با  $U$  یک خط هذلولوی  $l$  است و  $B_\mu$  به صورت یک انتقال در طول  $l$  عمل می‌کند. انعکاس  $C_1$  نسبت به صفحه  $x_1, x_2$ ،  $l$  را به خودش می‌برد ولی چون  $C_1$  جهت حرکت در طول  $l$  را عوض می‌کند،  $B_\mu$  را به  $B_\mu^{-1}$  تبدیل می‌سازد. در اصل،  $C_1$ ، نقطه  $[1, 0, 0]^T$  را ثابت نگه می‌دارد و دو نیم خط هذلولوی در  $l$  از  $[1, 0, 0]^T$  را جابجا می‌کند. انعکاس  $C_1$  نسبت به صفحه  $x_1, x_2$ ،  $l$  را به طور نقطه‌ای ثابت نگه می‌دارد و لذا  $B_\mu$  را به  $B_\mu$  تبدیل می‌سازد.

اثبات گزاره ۶-۸ وسیله‌ای برای ترتیب دادن خواص متعدی عمل  $O^+(Q)$  روی  $U$  به دست می‌دهد. همه خواص متعدی که ما در مورد مدل نیم صفحه بالائی به دست آوردیم، در اینجا نیز صادقند. اثبات دو نمونه از مهم‌ترین‌ها را ارائه می‌دهیم و بقیه خواص را به خواننده علاقه‌مند واگذار می‌کنیم.

### گزاره ۶-۹.

اولاً،  $O^+(Q)$  روی  $U$  به طور متعدی عمل می‌کند. ثانیاً،  $O^+(Q)$  روی زوج‌های  $(u, l)$  به طور متعدی عمل می‌کند که در آن  $u$  یک نقطه در  $U$  و  $l$  یک خط هذلولوی مار بر  $u$  است.

اثبات. ابتدا عمل  $O^+(Q)$  را زوی  $U$  مورد بررسی قرار می‌دهیم. در قسمت سوم اثبات قضیه 8-6 دیدیم که اگر  $u$  یک نقطه  $U$  باشد، آنگاه عضو  $E$  در  $O^+(Q)$  هست که  $Eu = [1, 0, 0]^T$ . با بکارگیری لم ۲-۸، به طور متعدی عمل نمودن  $O^+(Q)$  روی نقاط  $U$  نتیجه می‌شود.

در مورد ادعای دوم، فرض کنیم  $l_1$  و  $l_2$  دو خط هذلولوی دلخواه و  $u_k$  یک نقطه روی  $l_k$  به ازای  $k=1, 2$  باشد. مجدداً با استفاده از قسمت سوم اثبات قضیه 8-6، اعضای  $E_1$  و  $E_2$  در  $O^+(Q)$  وجود دارند که  $E_k u_k = [1, 0, 0]^T$ . چون که  $E_1 l_1$  و  $E_2 l_2$  دو خط هذلولوی مار بر  $[1, 0, 0]^T$  هستند، قسمت اول اثبات قضیه 8-6 نشان می‌دهد که یک  $\alpha \in \mathbb{R}$  وجود دارد که  $A_\alpha$  عضو  $O^+(Q)$  بوده و  $[1, 0, 0]^T$  را ثابت نگه می‌دارد و در رابطه  $A_\alpha(E_1 l_1) = E_1 l_2$  صدق می‌کند. بنابراین می‌بینیم که  $E_2^{-1} A_\alpha E_1 u_1 = u_2$  و  $E_2^{-1} A_\alpha E_1 l_1 = l_2$ .

### فهوم المطلوب

به طور صوری، باید بررسی کنیم که  $U$  با این تعریف از خطوط هذلولوی در شرط توازی که انتظار داریم صفحه هذلولوی در آن صدق می‌کند، چون تاکنون نشان ندادیم که  $U$  با این تعریف از خطوط هذلولوی یک مدل برای صفحه هذلولوی است. به ویژه، آن را به هیچ یک از مدل‌های دیگر صفحه هذلولوی مورد بحث ما در این کتاب مربوط نکرده‌ایم. لذا فرض کنیم که  $l$  یک خط هذلولوی در  $U$  و  $u$  یک نقطه  $U$  غیر واقع بر  $l$  باشد.

با استفاده از خواص متعدی عمل  $O^+(Q)$  روی  $U$ ، می‌توان فرض کرد که  $l$  اشتراک  $U$  با  $x_1 x_2$ -صفحه  $P_{11}$  است. فرض کنیم  $L$  خط اقلیدسی در  $\mathbb{R}^3$  ماربر مبدا و  $u$  باشد. هر صفحه اقلیدسی ماربر مبدا و  $u$  باید شامل  $L$  باشد. یک چنین صفحه اقلیدسی عبارت است از صفحه اقلیدسی  $P$  که شامل  $L$  و محور  $x_1$ -ها است.

اشتراک این صفحه اقلیدسی  $P$  و  $x_1 x_2$ -صفحه  $P_{11}$ ، محور  $x_1$ -ها است که از  $U$  مجزا است و لذا  $P \cap U$  یک خط هذلولوی در  $U$  و موازی با  $P_{11} \cap U = l$  است. در واقع اگر  $P'$  یک صفحه اقلیدسی در  $\mathbb{R}^3$  باشد که اشتراک آن با  $x_1 x_2$ -صفحه  $P_{11}$  از  $U$  مجزا باشد، آنگاه  $P' \cap U$  یک خط هذلولوی در  $U$  و موازی با  $l$  است. (این مطلب از آنجا ناشی می‌شود که مشاهده می‌کنیم که هر نقطه در اشتراک  $(P' \cap U) \cap (P_{11} \cap U)$  یعنی اشتراک این دو خط هذلولوی یک نقطه در  $P' \cap P_{11}$  است که فرض کرده‌ایم تهی است.)

فرض کنیم  $P''$  یک صفحه اقلیدسی شامل باشد که زاویه آن با خیلی کوچک است. اشتراک  $P''$  با  $x_1, x_2$  - صفحه  $P_1$  خیلی نزدیک به محور  $x_1$  -ها خواهد بود و لذا آن نیز از  $U$  مجزا است. بنابراین اشتراک چنین صفحه اقلیدسی  $P''$  با  $U$  منجر به یک خط هذلولوی ماربر  $U$  و موازی با  $l$  می‌شود. از آنجایی که از چنین صفحات اقلیدسی تعداد نامتناهی وجود دارد، لذا به تعداد نامتناهی خط هذلولوی ماربر  $U$  و موازی با  $l$  وجود دارد.

نتیجه دیگری از اثبات قضیه ۶-۸ این است که مشاهده می‌کنیم که  $(U, d_U)$  عبارت است از:

$$Isom(U, d_U) = O^+(Q)$$

اثبات این مطلب دارای همان ساختار اثبات قضیه ۳-۱۹ است که بیان می‌کند  $Isom(\mathbb{H}, d_H) = Möb(\mathbb{H})$ . به عبارت دیگر، به ازای هر طولپای مفروض  $f$  از  $(U, d_U)$ ، از خواص تعدی عمل  $O^+(Q)$  روی  $U$  استفاده کرده و  $f$  را با پیدا کردن یک عضو  $A$  در  $O^+(Q)$  نرمال می‌کنیم به طوری که  $A \circ f$  یک نقطه در  $U$  را ثابت نگه دارد، بنابراین  $A \circ f$  به طور نقطه‌ای یک خط هذلولوی در  $U$  مار بر این نقطه را ثابت نگه می‌دارد و لذا  $A \circ f$  دو نیم‌صفحه معین شده توسط این خط هذلولوی در  $U$  را جابجا نمی‌کند. سپس نشان می‌دهیم که طولپای نرمال شده  $A \circ f$  همانی است و لذا  $f = A^{-1} \in O^+(Q)$ . هم اکنون این بحث را به تفصیل در مورد  $(\mathbb{H}, d_H)$  ارائه داده‌ایم و لذا در آنجایی که توضیحات اساسی یکی است در مورد  $(U, d_U)$  آن را تکرار نمی‌کنیم.

این بخش را با برگشت به دایره اقلیدسی  $T_r$  که قبلاً تعریف شده به پایان می‌بریم. با این بحث شروع می‌کنیم که  $T_r$  یک دایره هذلولوی نیز هست. این مطلب از این حقیقت ناشی می‌شود که  $T_r$  تحت عمل زیر گروه  $\langle A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \rangle$  از  $O^+(Q)$  که  $[1, 0, 0]^T$  را ثابت نگه می‌دارد، ناوردا است، و هر  $A_\alpha$  یک طولپای هذلولوی و همچنین یک طولپای اقلیدسی است. لذا مرکز هذلولوی  $T_r$  نقطه  $[1, 0, 0]^T$  است.

اینک به محاسبه شعاع هذلولوی  $T_r$  می‌پردازیم. فاصله هذلولوی بین  $[1, 0, 0]^T$  و  $[r, \sqrt{r^2 - 1}, 0]^T$  برابر طول پاره خط هذلولوی است که  $[1, 0, 0]^T$  را به  $[r, \sqrt{r^2 - 1}, 0]^T$  وصل می‌کند که به نوبه خود آن را می‌توان با مسیر ساده  $g: [1, r] \rightarrow U$  با ضابطه  $g(t) = [t, \sqrt{t^2 - 1}, 0]^T$  پارامتری کرد. در این صورت طول هذلولوی  $g$  چنین است:

$$\begin{aligned} \ell_U(g) &= \int_1^r \sqrt{Q\left(1, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\right)^T} dt \\ &= \int_1^r \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt = \ln(r + \sqrt{r^2-1}). \end{aligned}$$

برای اینکه بینیم طول هذلولوی را به طور مناسب تعریف کرده‌ایم، توجه کنید که طول هذلولوی  $T_r$  را برابر  $2\pi\sqrt{r^2-1}$  و شعاع هذلولوی  $T_r$  را برابر  $\ln(r + \sqrt{r^2-1})$  محاسبه کردیم. با بررسی رابطه مذکور در تمرین ۴-۴ داریم:

$$\begin{aligned} 2\pi \sinh(t_r) &= 2\pi \sinh(\ln(r + \sqrt{r^2-1})) \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \left( r + \sqrt{r^2-1} - \left( \frac{1}{r + \sqrt{r^2-1}} \right) \right) \\ &= \pi \left( r + \sqrt{r^2-1} - (r - \sqrt{r^2-1}) \right) \\ &= 2\pi\sqrt{r^2-1} = \ell_U(T_r) \end{aligned}$$

که در آن  $t_r$  شعاع هذلولوی  $T_r$  است و این همان چیزی است که می‌خواستیم. برای یک ارائه قدری متفاوت برای مدل هذلولوی که شامل اثبات یکسانی از رابطه کسینوس ها است، خواننده علاقمند را به کتاب ترستون<sup>۱</sup> [35] ارجاع می‌دهیم.

## ۶-۲ فضاهای هذلولوی با ابعاد بالا

تاکنون، مدل‌هایی از صفحه هذلولوی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. هدف ما در این آخرین بخش کوتاه این است که بحث کنیم که چگونه هر مدل را به یک مدل فضای هذلولوی از بعد بالاتر توسعه دهیم. همه خصوصیات را به تفصیل اثبات نمی‌کنیم، بلکه در عوض تلاش می‌کنیم که خواص مشابه ساختار معادل دو بعدی هر مدل را گوشزد کنیم. از این بحث شروع می‌کنیم که منظور ما از عبارت (فضای هذلولوی از بعد بالاتر) چیست؟ جهات مختلفی وجود دارد که می‌توانیم تلاش کنیم هندسه هذلولوی دو بعدی که در این کتاب مطالعه کرده‌ایم را توسعه دهیم. یک راه این است که مفهوم هذلولوی را تعمیم دهیم و راه دیگر این که همان مدل‌هایی که بررسی کرده‌ایم را در نظر بگیریم فقط با فضای پایه‌ای از بعد بالاتر.

<sup>1</sup> Thurston



یک تعمیم ممکن برای مفهوم هذلولوی که اول دفعه توسط گروموف پیشنهاد شد و از آن پس بوسیله ریاضیدانان بسیاری مورد کاوش قرار گرفته است، از نتیجه تمرین ۵-۱۱ سرچشمه می‌گیرد. این تمرین می‌گوید که مثلث‌های هذلولوی در صفحه هذلولوی به طور یکسان نازک هستند: اگر  $T$  یک مثلث هذلولوی در نیم‌صفحه بالایی  $I\mathbb{H}$  مثلاً با اضلاع  $A, B, C$  و  $x \in A$  یک نقطه دلخواه باشد، آنگاه

$$d_{IH}(x, B \cup C) \leq \ln(\sqrt{2} + 1).$$

فرض کنیم  $(X, d_X)$  یک فضای متری مسیری باشد. (برای اینکه آسان‌تر نشان داده شود، ما فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن  $X$  همبند ساده است). می‌توانیم یک مثلث  $T$  را در  $X$  به صورت زیر تعریف کنیم:

سه نقطه  $x_1, x_2, x_3$  در  $X$  را در نظر می‌گیریم و به ازای هر  $1 \leq j \neq k \leq 3$  فرض کنیم  $s_{jk}$  منحنی در  $X$  باشد که تصویر یک مسیری که فاصله را محقق کرده و  $x_j$  را به  $x_k$  هم وصل می‌کند. حال  $s_{jk}$ ها را اضلاع مثلث می‌نامیم. به ازای یک عدد حقیقی  $\delta > 0$ ، گوئیم  $T$  به نازکی  $\delta^1$  است، چنانچه هر نقطه روی یک ضلع  $T$  به فاصله حداکثر  $\delta$  تا اجتماع دو ضلع دیگر باشد. به طور مشخص باید داشته باشیم:

$$d_X(x, s_{12} \cup s_{13}) \leq \delta \quad x \in s_{23}$$

$$d_X(x, s_{12} \cup s_{23}) \leq \delta \quad x \in s_{13}$$

$$d_X(x, s_{13} \cup s_{23}) \leq \delta \quad x \in s_{12}$$

در این صورت یک فضای متری مسیری (همبند ساده)  $(X, d_X)$  را  $\delta$ -هذلولوی نامند، چنانچه یک  $\delta > 0$  وجود داشته باشد به طوری که همه مثلث‌های در  $X$  به نازکی  $\delta$  باشند. تمرین ۵-۱۱ نشان می‌دهد که صفحه هذلولوی به نازکی  $\ln(\sqrt{2} + 1)$  است، چون همه مثلث-ها در صفحه هذلولوی به نازکی  $\delta$  هستند که  $\delta = \ln(\sqrt{2} + 1)$ .

خواننده علاقمند دعوت می‌شود تا بررسی کند که صفحه مختلط  $\mathcal{C}$  با متر اقلیدسی معمولی  $n(z, w) = |z - w|$  به ازای هیچ  $\delta > 0$  به نازکی  $\delta$  نیست و یک درخت یک  $\delta$ -هذلولوی است. در اینجا جای آن نیست که در مورد این تعمیم با تفصیل بیشتر بحث کنیم ولی خواننده علاقمند و جسور را به مقاله اصلی گروموف [17]<sup>2</sup> و همچنین مقاله بوویج<sup>3</sup> [12] رجوع می‌دهیم.

<sup>1</sup>  $\delta$ -thin

<sup>2</sup> Gromov

<sup>3</sup> Bowditch

در عوض، مدل‌هایی از هندسه هذلولوی را انتخاب می‌کنیم که تعمیم مستقیم مدل‌های دو بعدی است که توسعه داده‌ایم. این مدل‌ها در برخی از خواص پایه‌ای مشترک هستند. اول اینکه فضای پایه آن‌ها یک زیر مجموعه  $n$ -بعدی از فضای اقلیدسی است که در آن یک تعریف معقول از خط هذلولوی داریم. دوم اینکه توازی مثل توازی در صفحه هذلولوی عمل می‌کند، یعنی به ازای هر خط هذلولوی  $l$  و هر نقطه  $p$  که روی  $l$  نیست، حداقل دو خط هذلولوی وجود دارد که از  $p$  گذشته و موازی با  $l$  است (و در واقع بینهایت خط هذلولوی وجود دارد که از  $p$  گذشته و موازی با  $l$  است). و بالاخره اینکه مدل هندسه هذلولوی در تمام جهات یک‌طور بنظر می‌رسد به طوری که اگر  $p$  یک نقطه دلخواه و  $r_1$  و  $r_2$  دو نیم خط دلخواه از  $p$  باشند، آنگاه یک طولیابی از این فضای هذلولوی وجود دارد که  $p$  را ثابت نگه داشته و  $r_1$  را به  $r_2$  می‌برد.

با مدل هذلولیگون شروع می‌کنیم. همانطوریکه در بخش ۶-۱ دیدیم، ساختار مدل هذلولیگون  $U$  با فرم مربعی

$$Q(X) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$$

روی  $\mathbb{R}^3$  شروع شد. از این فرم مربعی، گروهی از تبدیلات معقول به دست آوردیم، یعنی ماتریس‌هایی در  $O^+(Q) = O(2,1)$  که این فرم مربعی را حفظ می‌کند. تعریف طول هذلولوی و تعریف خط هذلولوی هر دو به طور مستقیم ارائه شدند و نشان داده شد که تحت عمل  $O^+(Q)$  ناورد هستند.

این ساختار را به طور مستقیم می‌توان تعمیم داد. برای ساختن فضای مدل هذلولیگون  $U^n$  فضای هذلولوی  $n$ -بعدی، فرم مربعی زیر را روی  $\mathbb{R}^{n+1}$  در نظر می‌گیریم:

$$Q_n(X) = -x_0^2 + \sum_{j=1}^n x_j^2$$

در این صورت فضای مدل  $U^n$ ، پارچه بالایی هذلولیگون  $\{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Q_n(X) = -1\}$

است، یعنی مجموعه

$$U^n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Q_n(X) = -1, x_0 > 0\}$$

با استفاده از همان روند بحثی که در مورد  $U$  به کار بردیم، می‌توانیم گروه زیر از

ماتریس‌های  $(n+1) \times (n+1)$  وارون‌پذیر را تعیین کنیم:

$$O(Q_n) = \{A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid Q_n(X) = Q_n(AX) \quad \forall X \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

که این فرم مربعی را ناوردانگه می‌دارند و همچنین گروه زیر از ماتریس‌های  $(n+1) \times (n+1)$  وارون‌پذیر را تعیین کنیم:

$$O^+(Q_n) = O(n,1) = \{A \in O(Q_n) \mid A(W^n) = W^n\}$$

که این فرم مربعی را ناوردانگه داشته و پارچه بالایی  $W^n$  را حفظ می‌کند. خواص تعدی عمل  $O^+(Q)$  روی  $W$  نیز به خواص تعدی عمل  $O^+(Q_n)$  روی  $W^n$  تعمیم داده می‌شود. به ویژه اثبات قضیه ۶-۸ هر چند که خیلی پیچیده‌تر می‌شود، بالبداهه تعمیم پیدا می‌کند. یک مجموعه مولد از ماتریس‌ها برای  $O^+(Q_n)$  از همان سه نوع ماتریس اساسی تشکیل شده که در مورد  $O^+(Q)$  داشتیم:

- دوران در  $x_j x_k$ -صفحه با ثابت نگهداشتنی محور  $x$ -ها که در آن  $1 \leq j, k \leq n$ .  
دوران به اندازه  $\alpha \in \mathbb{R}$  در  $x_j x_k$ -صفحه به صورت ماتریس زیر داده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \cos \alpha & -\sin \alpha & (0) \\ & \sin \alpha & \cos \alpha & (0) \\ (0) & (0) & (0) & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

که در آن  $I_{n-2}$  ماتریس همانی  $(n-2) \times (n-2)$  است و  $(0)$  نماینده ماتریس صفر با اندازه مناسب است. دوران در  $x_j x_k$ -صفحه از جایگشت به طور مناسب مختصات  $x_1, \dots, x_n$  به دست می‌آید.

- انتقال در  $x_j x_j$ -صفحه که در آن  $1 \leq j \leq n$ . انتقال به اندازه  $\mu \in \mathbb{R}$  در  $x_j x_j$ -صفحه به صورت ماتریس زیر داده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\mu) & \sinh(\mu) & & (0) \\ \sinh(\mu) & \cosh(\mu) & & (0) \\ & & 1 & (0) \\ (0) & (0) & (0) & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

که در آن  $I_{n-1}$  ماتریس همانی  $(n-1) \times (n-1)$  است و  $(0)$  نماینده ماتریس صفر با اندازه مناسب است. انتقال در  $x_j x_j$ -صفحه با جایگشت مختصات  $x_1$  با  $x_j$  در ماتریس بالا به دست می‌آید.

- انعکاس نسبت به صفحه  $\{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_j = 0\}$  که در آن  $1 \leq j \leq n$ . انعکاس نسبت به صفحه  $\{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 = 0\}$  با ماتریس زیر داده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (0) \\ 0 & -1 & (0) \\ (0) & (0) & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

که در آن  $I_{n-1}$  ماتریس همانی  $(n-1) \times (n-1)$  است و  $(0)$  نماینده ماتریس صفر با اندازه مناسب است. انعکاس نسبت به صفحه  $\{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_j = 0\}$ ، با جایگشت مختصات  $x_i$  با  $x_j$  در ماتریس بالا به دست می‌آید.

نظیر  $U$ ، یک بردار مماس غیر صفر  $t$  بر  $W^n$  در شرط  $Q_n(t) > 0$  صدق می‌کند و لذا طول هذلولوی مسیر به طور قطعی  $C^1$  مانند  $f: [a, b] \rightarrow W^n$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$\ell_{U^n}(f) = \int_a^b \sqrt{Q_n(f'(t))} dt$$

در این صورت فاصله هذلولوی بین نقاط  $u$  و  $v$  از  $W^n$ ، یعنی  $d_{U^n}(u, v)$  به صورت اینفیموم طول‌های هذلولوی همه مسیرهای به طور قطعی  $C^1$  مانند  $f: [a, b] \rightarrow W^n$  با شرط  $f(a) = u$  و  $f(b) = v$  تعریف می‌شود. گروه طولپاهای فضای متری  $(U^n, d_{U^n})$  عبارت خواهد بود از:

$$\text{Isom}(U^n, d_{U^n}) = O^+(Q_n)$$

مجدداً، یک خط هذلولوی به صورت اشتراک یک زیر فضای اقلیدسی دو بعدی از  $\mathbb{R}^{n+1}$  مار بر مبداء با  $W^n$  تعریف می‌شود. توازی در  $W^n$  مانند توازی در  $W^n$  رفتار می‌کند، به طوری که با در دست داشتن یک خط هذلولوی مفروض  $\ell$  در  $W^n$  و یک نقطه  $p \in U^n$  که روی  $\ell$  نیست، حداقل دو خط هذلولوی در  $W^n$  وجود دارد که از  $p$  گذشته و موازی با  $\ell$  می‌باشند. استدلالی که این نتیجه را در  $W^n$  اثبات می‌کند، اساساً همان استدلالی است که در مورد مطلب مشابه در  $W$  ارائه شده است. همچنین مسیرهایی در  $W^n$  که فاصله را محقق می‌کنند، نمایش‌های پارامتری تقریباً ساده‌ای از پاره خط‌های هذلولوی می‌باشند.

باید توجه داشت که این ساختمان مدل  $W^n$  برای فضای هذلولوی  $n$ -بعدی، همچنین نتیجه می‌دهد که یک زنجیره‌ای از فضاهای هذلولوی در  $W^n$  با ابعاد صعودی (یا نزولی)، وابسته به نقطه نظر ما) وجود دارد. ما به این نکته، زمانیکه مدل‌های صفحه هذلولوی را بسط می‌دادیم، توجه نکردیم، چون که ما هیچگاه یک خط هذلولوی را به صورت مدلی از فضای هذلولوی یک بعدی توصیف نکردیم.

لذا زیر فضای  $n$ -بعدی  $Y_n$  از  $\mathbb{R}^{n+1}$  را با شرط زیر در نظر می‌گیریم:

$$Y_n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n = 0\}$$

از آنجایی که  $Y_n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ، می‌توانیم  $Y_n$  را با فضای اقلیدسی  $n$ -بعدی  $\mathbb{R}^n$  با مختصات  $x, \dots, x_{n-1}$  یکی بگیریم. تحدید فرم مربعی  $Q_n$  به عبارت  $Y_n$  است از فرم مربعی  $Q_{n-1}(X) = -x_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2$  روی  $\mathbb{R}^n$ ، و اشتراک  $Y_n \cap U^n$  مجموعه زیر است:

$$Y_n \cap U^n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n = 0, x_i > 0, Q_n(X) = -1\}$$

که با فراموش کردن مختص  $x_n$  برابر است با مجموعه زیر:

$$U^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_i > 0, Q_{n-1}(X) = -1\}$$

(که ما آزادانه از یکی گرفتن  $Y_n$  با  $\mathbb{R}^n$  استفاده می‌کنیم). بنابراین مجموعه  $Y_n \cap U^n$  درست مدل هذلولیگون  $U^{n-1}$  برای فضای هذلولوی  $(n-1)$ -بعدی است. در واقع، اگر  $P$  یک زیر فضای  $n$ -بعدی  $\mathbb{R}^{n+1}$  باشد که اشتراک آن با  $U^n$  ناتهی باشد، آنگاه یک عضو  $O^+(Q_n)$  وجود دارد که  $P$  را به  $Y_n$  می‌برد و لذا  $P \cap U^n$  نیز یک نسخه از مدل هذلولیگون  $U^{n-1}$  است که مشمول در  $U^n$  است.

این روند را می‌توانیم ادامه دهیم، با در نظر گرفتن اشتراک زیر فضای  $(n-1)$ -بعدی

زیر:

$$Y_{n-1,n} = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n = 0, x_{n-1} = 0\}$$

از  $\mathbb{R}^{n+1}$  با  $U^n$  به نسخه  $Y_{n-1,n} \cap U^n$  از مدل هذلولیگون  $U^{n-2}$  می‌رسیم که مشمول در نسخه  $Y_n \cap U^n$  از مدل هذلولیگون  $U^{n-1}$  است که خود نیز مشمول در  $U^n$  می‌باشد. یک مزیت مدل هذلولیگون  $n$ -فضای هذلولوی آن است که گروه طولپاهای  $n$ -فضای هذلولوی بالبداهه به صورت یک گروه از ماتریس‌ها محقق می‌شوند، زیرا که گروه طولپاهای متر هذلولوی روی  $U^n$  دقیقاً  $O^+(Q_n)$  است. بدون وارد شدن به جزئیات، یادآور می‌شویم که این خطی بودن گروه طولپاهای نتایج قوی در بردارد.

به عنوان آخرین نکته در مورد مدل هذلولیگون، فرض کنیم  $G$  زیر گروه  $O^+(Q_n)$  باشد که نقطه  $[1, 0, \dots, 0]^T$  در  $U^n$  را ثابت نگه می‌دارد. به ازای هر  $r \geq 1$ ، عمل  $G$  زیر فضای مستوی  $(n-1)$ -بعدی  $P_r = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = r\}$  و بنابراین زیر مجموعه  $Z_r = \{u \in U^n \mid u_i = r\}$  از  $U^n$  را حفظ می‌کند که یک کره اقلیدسی (و هذلولوی)

$(n-1)$ -بعدی است. تحدید فرم مربعی  $Q_n$  به  $P_r$  مضربی از متر اقلیدسی متعارف روی  $\{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n = r\}$  به دست می‌دهد و دقیقاً گروه طولپاهای اقلیدسی این کره  $(n-1)$ -بعدی با متر تحدید یافته است. یعنی، درون هندسه هذلولوی  $n$ -بعدی یک نسخه از هندسه کروی  $(n-1)$ -بعدی داریم.

همچنین می‌توان مدل نیم‌صفحه بالایی و قرص پوانکاره صفحه هذلولوی را به مدل‌های  $n$ -فضاهای هذلولوی تعمیم داد. زمانی که مدل‌های نیم‌صفحه بالایی و قرص پوانکاره برای صفحه هذلولوی را می‌ساختیم، در صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  کار کردیم و توانستیم از بسیاری از روش‌های آنالیز مختلط استفاده کنیم که محتوای فصل ۴ بود. ولی در حالت کلی این ساختار مختلط با نتایج مفید و جالب در دسترس نیست.

به همان روش که مدل‌های نیم‌صفحه بالایی و قرص پوانکاره برای صفحه هذلولوی دو نمونه آشکار یک ساختار کلی بودند، مدل‌های نیم‌فضای بالایی و گوی پوانکاره برای  $n$ -فضای هذلولوی نیز نمونه‌های آشکار یک ساختمان کلی هستند. ما در  $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  فشرده‌سازی تک نقطه‌ای  $\mathbb{R}^n$  کار می‌کنیم که در آن  $x_1, \dots, x_n$  مختصات  $\mathbb{R}^n$  هستند. همانطور که در  $\overline{\mathbb{C}}$  داشتیم، کره در  $\overline{\mathbb{R}^n}$  را به صورت یک کره  $(n-1)$ -بعدی اقلیدسی یا اجتماع یک زیر فضای مستوی  $(n-1)$ -بعدی در  $\mathbb{R}^n$  با  $\{\infty\}$  تعریف می‌کنیم. مثل گذشته می‌توانیم انعکاس نسبت به یک کره در  $\overline{\mathbb{R}^n}$  را تعریف کنیم. فرمول‌های صریحی برای انعکاس نسبت به یک کره در  $\overline{\mathbb{R}^n}$  مشابه فرمول‌های انعکاس نسبت به دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  وجود دارد که چون از آن‌ها صریحاً استفاده نمی‌کنیم، متذکر آن‌ها نمی‌شویم.

گروه موبیوس عام  $Möb_n$  وابسته به  $\overline{\mathbb{R}^n}$  بوسیله انعکاس‌های نسبت به کره‌ها در  $\overline{\mathbb{R}^n}$  تولید می‌شود. یک تبدیل موبیوس  $\mathbb{R}^n$  ترکیب تعداد زوجی از انعکاس‌های نسبت به کره‌ها در  $\overline{\mathbb{R}^n}$  می‌باشد. گروه تبدیلات موبیوس  $Möb_n^+$  دارای اندیس ۲ در گروه موبیوس عام  $Möb_n$  است.

گروه  $Möb_n^+$ ، گروه تبدیلات موبیوس  $\overline{\mathbb{R}^n}$  دارای بسیاری از خواص اساسی گروه  $Möb^+ = Möb_n^+$ ، گروه تبدیلات موبیوس  $\overline{\mathbb{C}}$  است. یعنی،  $Möb_n^+$  روی  $\overline{\mathbb{R}^n}$  به طور همدیس عمل می‌کند، لذا زوایا حفظ می‌شوند. بعلاوه  $Möb_n^+$  روی  $\overline{\mathbb{R}^n}$  به طور متعدی عمل می‌کند و روی گردایه تمام کره‌های  $(n-1)$ -بعدی در  $\overline{\mathbb{R}^n}$  و روی گردایه تمام گوی‌های  $n$ -بعدی در  $\overline{\mathbb{R}^n}$  به طور متعدی عمل می‌کند.

فضای پایه مدل نیم‌فضای بالایی  $\mathbb{H}^n$  برای  $n$ -فضای هذلولوی عبارت است از نیم-صفحه بالایی  $\mathbb{R}^n$ ، یعنی

$$\mathbb{H}^n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

با مرز در بینهایت

$$(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}^{n-1}}$$

فضای پایه مدل گوی پوانکاره  $\mathbb{D}^n$  برای  $n$ -فضای هذلولوی گوی یک در  $\mathbb{R}^n$  است،

یعنی

$$\mathbb{D}^n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X| < 1\}$$

با مرز در بینهایت

$$S^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X| = 1\}$$

باید توجه داشت که بنا بر تعدی عمل  $Möb_n^+$  روی گردایه همه گوی‌های  $n$ -بعدی در  $\mathbb{R}^n$ ، عضو  $m$  از  $Möb_n^+$  هست که  $\mathbb{H}^n$  را به  $\mathbb{D}^n$  می‌برد. بنابراین ابتدا با  $\mathbb{R}^n$  کار می‌کنیم، با درک اینکه احکام مشابهی در مورد  $\mathbb{D}^n$  نیز برقرار است.

به ازای هر  $1 \leq k \leq n-1$ ، یک کره  $k$ -بعدی در  $\mathbb{R}^n$  به صورت یک کره اقلیدسی  $k$ -بعدی در  $\mathbb{R}^n$  یا اجتماع یک زیر فضای مستوی  $k$ -بعدی  $\mathbb{R}^n$  با  $\{\infty\}$  تعریف می‌کنیم. بنابراین یک کره یک بعدی در  $\mathbb{R}^n$  یا یک دایره اقلیدسی در  $\mathbb{R}^n$  است و یا اجتماع یک خط اقلیدسی در  $\mathbb{R}^n$  با  $\{\infty\}$  است، در حالی که یک کره  $(n-1)$ -بعدی در  $\mathbb{R}^n$  همان کره در  $\mathbb{R}^n$  است که در بالا تعریف شد. به همین ترتیب در مورد مدل نیم‌صفحه بالایی صفحه هذلولوی، خط هذلولوی در  $\mathbb{H}^n$  را به صورت اشتراک  $\mathbb{H}^n$  با یک کره یک بعدی در  $\mathbb{R}^n$  تعریف می‌کنیم که بر  $\overline{\mathbb{R}^{n-1}}$  مرز در بینهایت  $\mathbb{H}^n$  عمود است بنابراین یک خط هذلولوی در  $\mathbb{H}^n$  یا یک خط اقلیدسی قائم است و یا نیم‌دایره بالایی یک دایره اقلیدسی با مرکزی روی  $\overline{\mathbb{R}^{n-1}}$  و عمود بر  $\overline{\mathbb{R}^{n-1}}$  است.

عنصر هذلولوی طول قوس روی  $\mathbb{H}^n$  به صورت  $\frac{1}{x_n} |dx|$  است، به طوری که طول هذلولوی مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  مانند  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$  با ضابطه  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$  به صورت زیر است:

$$l_{\mathbb{H}^n}(f) = \int_f \frac{1}{x_n} |dx| = \int_a^b \frac{1}{f_n(t)} |f'(t)| dt$$

از آنجایی که وسیله‌ای برای اندازه گیری طول هذلولوی مسیره‌های به طور قطعه‌ای  $C^1$  در  $\mathbb{H}^n$  داریم، متر هذلولوی  $d_{\mathbb{H}^n}$  را روی  $\mathbb{H}^n$  تعریف می‌کنیم، باین ترتیب که فاصله هذلولوی  $d_{\mathbb{H}^n}(x, y)$  بین نقاط  $x$  و  $y$  در  $\mathbb{H}^n$  را برابر اینفیموم طول‌های هذلولوی مسیره‌های به طور قطعه‌ای  $C^1$  مانند  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$  با شرط  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$  تعریف می‌کنیم. این مفهوم طول هذلولوی و در نتیجه فاصله هذلولوی روی  $\mathbb{H}^n$  تحت عمل زیرگروه  $Möb_n(\mathbb{H}^n)$  از  $Möb_n$  که  $\mathbb{H}^n$  را حفظ می‌کند، ناوردا است. گروه طولپاهای فضای متری  $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$  چنین است:

$$Isom(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n}) = Möb_n(\mathbb{H}^n)$$

به ازای  $r > 0$ ، فرض کنیم  $H_r$  زیرفضای مستوی  $(n-1)$ -بعدی زیر:

$$H_r = \{X \in \mathbb{H}^n \mid x_n = r\}$$

از  $\mathbb{R}^n$  مشمول در  $\mathbb{R}^n$  باشد. تحدید متر هذلولوی  $d_{\mathbb{H}^n}$  به  $H_r$  مضربی از متر اقلیدسی معمولی روی  $\mathbb{R}^{n-1}$  است. بعلاوه زیرگروه  $G$  از  $Möb_n$  که مثلاً  $H_1$  را ناوردا نگه می‌دارد، زیر گروهی از زیر گروه  $Möb_n$  است که  $\{\infty\}$  را ثابت نگه می‌دارد. باید توجه داشت که  $G$  به ازای هر  $r > 0$  را  $H_r$  ناوردا نگه می‌دارد و  $G$  روی  $H_r$  به صورت گروه تمام طولپاهای متر اقلیدسی عمل می‌کند. بنابراین هندسه هذلولوی  $n$ -بعدی شامل یک نسخه از هندسه اقلیدسی  $(n-1)$ -بعدی است. این نتیجه در کنار یادداشت قبلی که هندسه هذلولوی  $n$ -بعدی شامل یک نسخه  $(n-1)$ -بعدی از هندسه کروی است، این باور را ایجاد می‌کند که ادعا کنیم که هندسه هذلولوی به نوعی جهانی است.

این بخش را با ذکر این مطلب به پایان می‌بریم که متأسفانه در حالت کلی شکل مناسبی برای بیان تبدیلات موبیوس  $\overline{\mathbb{R}^n}$  وجود ندارد. دیدیم که برای  $\overline{\mathbb{R}^2} = \overline{\mathbb{C}}$  تبدیلات موبیوس را به صورت خارج قسمت چند جمله‌ای‌های خطی نسبت به مختص  $z$  در  $\mathbb{C}$  بیان کنیم، البته با تعبیر مناسبی از حساب با  $\{\infty\}$ ، ولی چنین نمایشی برای ابعاد بالاتر وجود ندارد. مرجع خوبی در مورد تبدیلات موبیوس در ابعاد بالا آفرس<sup>۱</sup> [5] است. مقاله‌ای از آبیکوف<sup>۲</sup> [1] نیز وجود دارد که روش دیگری برای تحقق مدل نیم‌صفحه بالایی فضای هذلولوی سه بعدی  $\mathbb{H}^3$  و گروه طولپاهای آن ارائه می‌دهد.

<sup>1</sup> Ahlfors

<sup>2</sup> Abikoff



## پاسخ به تمرینات

### فصل اول

۱-۱. می نویسیم:  $x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  و  $y = \operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})$ . لذا داریم:

$$ax + by + c = a\frac{1}{2}(z + \bar{z}) - \frac{b}{2}i(z - \bar{z}) + c = \frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + bi)\bar{z} + c = .$$

توجه داشته باشید که شیب این خط برابر  $-\frac{a}{b}$  است که برابر خارج قسمت قسمت های موهومی و حقیقی ضریب  $z$  است.

با در دست داشتن دایره  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  قرار می دهیم  $z = h + ik$  و معادله دایره را به صورت زیر می نویسیم:

$$|z - z_0|^2 = z\bar{z} - \bar{z}_0z - z\bar{z}_0 + |z_0|^2 = r^2$$

۲-۱.  $A$  و  $S^1$  متعامدند اگر و فقط اگر خطوط مماس بر آنها در نقطه تقاطع متعامد باشند. فرض کنیم  $x$  یک نقطه  $A \cap S^1$  باشد و مثلث اقلیدسی  $T$  با رئوس مبدا و  $re^{i\theta}$  و  $x$  را در نظر می گیریم. اضلاع  $T$  که  $x$  را به دو راس دیگر وصل می کنند شعاع  $A$  و  $S^1$  هستند و لذا  $A$  و  $S^1$  بر هم عمودند اگر و فقط اگر زاویه داخلی  $T$  در  $x$  برابر  $\frac{1}{2}\pi$  باشد و این فقط و فقط وقتی اتفاق می افتد که قضیه فیثاغورس برقرار باشد و این به نوبه خود وقتی برقرار است که  $s^2 + 1^2 = r^2$ .

۳-۱. فرض کنیم  $L_{pq}$  پاره خط اقلیدسی متصل کننده  $p$  به  $q$  باشد.  $\frac{1}{2}(p+q)$  نقطه

وسط  $L_{pq}$  است و شیب برابر  $L_{pq}$   $m = \frac{\operatorname{Im}(q) - \operatorname{Im}(p)}{\operatorname{Re}(q) - \operatorname{Re}(p)}$  است.  $K$  عمود منصف  $L_{pq}$

از نقطه  $\frac{1}{2}(p+q)$  گذشته و دارای شیب  $-\frac{1}{m} = \frac{\operatorname{Re}(p) - \operatorname{Re}(q)}{\operatorname{Im}(q) - \operatorname{Im}(p)}$  است و لذا  $K$  دارای

معادله زیر است:

$$y - \frac{1}{2}(\operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)) = \left[ \frac{\operatorname{Re}(p) - \operatorname{Re}(q)}{\operatorname{Im}(q) - \operatorname{Im}(p)} \right] \left( x - \frac{1}{2}(\operatorname{Re}(p) + \operatorname{Re}(q)) \right)$$

$c$  مرکز اقلیدسی  $A$  محل برخورد  $K$  با محور  $x$  -ها است که به صورت زیر است:

$$c = \left[ -\frac{1}{2}(\operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)) \right] \left[ \frac{\operatorname{Im}(q) - \operatorname{Im}(p)}{\operatorname{Re}(p) - \operatorname{Re}(q)} \right] + \frac{1}{2}(\operatorname{Re}(p) + \operatorname{Re}(q))$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\operatorname{Im}(p))' - (\operatorname{Im}(q))' + (\operatorname{Re}(p))' - (\operatorname{Re}(q))'}{\operatorname{Re}(p) - \operatorname{Re}(q)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{|p|^2 - |q|^2}{\operatorname{Re}(p) - \operatorname{Re}(q)} \right]$$

شعاع اقلیدسی به صورت زیر است:

$$r = |c - p| = \left| \frac{1}{2} \left[ \frac{|p|^2 - |q|^2}{\operatorname{Re}(p) - \operatorname{Re}(q)} \right] - p \right|$$

۴-۱. یک خط هذلولوی که از  $i$  گذشته و موازی  $\ell$  باشد، محور موهومی مثبت  $I = IH \cap \{\operatorname{Re}(z) = 0\}$  است. برای پیدا کردن خط هذلولوی دومی که از  $i$  گذشته و موازی  $\ell$  باشد نقطه ای مانند  $x$  روی  $R$  بین  $0$  و  $3$  مثل  $x = 2$  و دایره اقلیدسی  $A$  با مرکز روی  $R$  در نظر می‌گیریم که از  $2$  و  $i$  بگذرد.

بنا بر تمرین ۱-۳، مرکز اقلیدسی  $A$  به صورت  $c = \frac{3}{4}$  است و شعاع اقلیدسی  $A$  برابر  $r = \frac{5}{4}$  است. از آنجایی که قسمت حقیقی هر نقطه روی  $A$  حداکثر  $2$  است، خط هذلولوی  $IH \cap A$  خطی هذلولوی است که از  $i$  گذشته و موازی  $\ell$  است.

۵-۱. دایره اقلیدسی  $D$  مار بر  $i$  و هم‌مرکز با  $A$  دارای مرکز اقلیدسی  $-2$  و شعاع اقلیدسی  $\sqrt{5} = |i - (-2)|$  است و لذا یک خط هذلولوی مار بر  $i$  و موازی  $A$  به صورت  $IH \cap A$  است.

برای ساختن خط هذلولوی دومی از  $i$  و موازی  $\ell$  از یک نقطه  $x$  روی  $R$  بین  $A$  و  $D$  شروع می‌کنیم، مثل  $x = -4$ . فرض کنیم دایره اقلیدسی با مرکز روی  $R$  و مار بر  $-4$  و  $i$  باشد. بنا بر تمرین ۱-۳ مرکز اقلیدسی  $E$  به صورت  $c = -\frac{15}{8}$  بوده و شعاع اقلیدسی آن  $r = \frac{17}{8}$  است.

یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که دایره  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2| = 1\}$  و  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + \frac{15}{8}| = \frac{17}{8}\}$  از هم جدا هستند و لذا خط هذلولوی  $H \cap E$  یک خط هذلولوی مار بر  $i$  است که موازی  $\ell$  می‌باشد.

۶-۱. اگر  $c=0$ ، آنگاه خط اقلیدسی  $L_c$  مار بر  $i$  و مبدأ،  $S'$  را در  $\pm i$  قطع می کند و لذا  $\xi^{-1}(0) = -i$ .

به ازای یک نقطه مفروض  $c \neq 0$  در  $\mathbb{R}$ ، معادله خط  $L_c$  مار بر  $c$  و  $i$  به صورت زیر است:

$$y = -\frac{1}{c}(x-c) = -\frac{1}{c}x + 1$$

برای پیدا کردن محل تلاقی  $L_c$  و  $S'$  مقادیری برای  $x$  پیدا می کنیم که:

$$|x+iy| = |x+i(-\frac{1}{c}x+1)| = 1$$

که به صورت زیر ساده می شود:

$$x \left[ \left(1 + \frac{1}{c^2}\right)x - \frac{2}{c} \right] = 0$$

از آنجایی که  $x=0$  مربوط به  $i$  می شود، داریم:

$$x = \frac{2c}{c^2+1}$$

لذا

$$\xi^{-1}(c) = \frac{2c}{c^2+1} + i \frac{c^2-1}{c^2+1}$$

۷-۱. با محاسبه داریم:

$$\xi(1) = 1 \text{ و } \xi\left(\exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}-2}, \quad \xi\left(\exp\left(\frac{4\pi}{3}i\right)\right) = -\frac{-1}{\sqrt{3}+2}$$

۸-۱. فرض کنیم  $z$  یک نقطه  $\mathbb{H}$  باشد. فاصله اقلیدسی  $z$  تا  $\mathbb{R}$  برابر  $\text{Im}(z)$  است. لذا  $U_{\text{Im}(z)}(z)$  مشمول در  $\mathbb{H}$  است، ولی  $U_\varepsilon(z)$  به ازای هر  $\varepsilon > \text{Im}(z)$  مشمول  $\mathbb{H}$  نیست.

۹-۱. یادآوری می کنیم که  $K$  کران دار است اگر و فقط اگر یک  $M > 0$  وجود داشته باشد به طوری که  $K$  مشمول  $U_M(0)$  باشد. به ویژه  $U_M(\infty)$  مشمول  $X$  خواهد بود. به ازای هر  $z \in \mathbb{C} - K$  فاصله اقلیدسی  $\delta(z)$  از  $z$  تا  $K$  مثبت است، چون  $K$  بسته است و لذا به ازای هر  $0 < \varepsilon < \delta(z)$ ،  $U_\varepsilon(z)$  مشمول  $X$  است. بنابراین  $X$  متمم  $K$  در  $\overline{\mathbb{C}}$  باز است.

فرض کنیم  $W$  یک زیر مجموعه باز  $\bar{C}$  باشد. اگر  $W \not\subseteq \infty$  آنگاه  $W$  مشمول  $C$  بوده و بنا به تعریف  $U_\varepsilon(z)$  در  $C$  باز است.

اگر  $\infty \in W$ ، آنگاه  $U_\varepsilon(\infty)$  به ازای یک  $\varepsilon > 0$  مشمول  $W$  است. برای همین انتخاب  $\varepsilon$  نتیجه می شود که  $Y = \bar{C} - W$  مشتمل  $U_\varepsilon(\cdot)$  است و لذا  $Y$  کران دار است. بسته بودن  $Y$  بالبداهه از این حقیقت که متمم آن  $\bar{C} - Y = W$  در  $\bar{C}$  باز است، نتیجه می شود.

۱-۱۰. به ازای  $\varepsilon > 0$  باید یک  $N > 0$  پیدا کنیم که به ازای  $n > N$  داشته باشیم  $z_n = \frac{1}{n} \in U_\varepsilon(\cdot)$ . قرار می دهیم  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ . در این صورت به ازای  $n > N$  همان طور که می خواستیم داریم  $z_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

به ازای  $\varepsilon > 0$  باید  $N > 0$  را پیدا کنیم بطوری که به ازای  $n > N$  داشته باشیم  $w_n = n \in U_\varepsilon(\infty)$ . قرار می دهیم  $N = \lceil \varepsilon \rceil$ . در این صورت به ازای  $n > N$  داریم  $w_n = n > \varepsilon$  و لذا همان طور که می خواستیم  $w_n \in U_\varepsilon(\infty)$ .

۱-۱۱. توجه داشته باشید که چون به ازای هر  $n > \varepsilon$ ،  $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(\cdot) \cap X$ ، لذا مبدا در  $\bar{X}$  قرار دارد. اگرچه، اگرچه  $\bar{X}$  غیر از مبدا و نقاط  $X$ ، نقاط دیگری ندارد. اگر  $z \in C$  نقطه ای باشد که  $\text{Im}(z) \neq 0$ ، در این صورت  $U_{\text{Im}(z)}(z) \cap X = \emptyset$ . همچنین چون به ازای هر  $x \in X$  داریم  $|x| \leq 1$ ، مشاهده می کنیم که  $U_1(\infty) \cap X = \emptyset$ . اگر  $z \in \mathbb{R}$  نقطه ای باشد

که  $\text{Re}(z) \neq 0$  و به ازای هر  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$   $\text{Re}(z) \neq \frac{1}{n}$ . در این صورت یا  $z$  بین  $\frac{1}{m}$  و  $\frac{1}{n}$  به ازای یک  $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  قرار دارد و یا در غیر این صورت در یکی از بازه های  $(0, \infty)$

یا  $(-\infty, -1)$  قرار دارد. در حالت اول قرار می دهیم  $\varepsilon = \min\left(|z - \frac{1}{m}|, |z - \frac{1}{n}|\right)$  و لذا  $U_\varepsilon(z) \cap X = \emptyset$ . در حالت دوم قرار می دهیم  $\varepsilon = |z - 1|$  وقتی که  $z \in (1, \infty)$  و یا  $\varepsilon = |z + 1|$  وقتی که  $z \in (-\infty, -1)$ . در این صورت  $U_\varepsilon(z) \cap X = \emptyset$ . بنابراین  $\bar{X} = X \cup \{0\}$ . در مورد  $Y$ ، نقطه دلخواهی مانند  $z = x + iy \in C$  را در نظر می گیریم. به ازای  $\varepsilon > 0$

مفروض، اعداد گویای  $a$  و  $b$  وجود دارند بطوری که  $|x - a| < \frac{1}{4}\varepsilon$  و  $|y - b| < \frac{1}{4}\varepsilon$ . زیرا  $\mathcal{Q}$  در  $\mathbb{R}$  چگال است و این مطلب را نیز با در نظر گرفتن بسط های اعشاری اعداد حقیقی می توان اثبات کرد.

در این صورت  $\varepsilon > 0$ ، چون به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک نقطه‌ای در  $U_\varepsilon(z) \cap Y$  می‌توانیم پیدا کنیم، نتیجه می‌شود که هر نقطه  $C$  در  $\bar{Y}$  قرار دارد. از آنجایی که به ازای هر  $\varepsilon > 0$  و به ازای هر عدد صحیح  $n$  که  $n > \varepsilon$  داریم  $n \in U_\varepsilon(\infty)$  و همچنین داریم  $\infty \in \bar{Y}$  بنابراین  $\bar{Y} = \bar{C}$ .

۱-۱۲. برای اینکه نشان دهیم  $\bar{C}$  در  $\bar{X}$  بسته است، نشان می‌دهیم  $\bar{C} - \bar{X}$  در  $\bar{C}$  باز است. یک نقطه  $z \in \bar{C} - \bar{X}$  را انتخاب می‌کنیم.

فرض کنیم به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $U_\varepsilon(z) \cap X \neq \emptyset$ ، به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  یک  $z_n \in U_{\frac{1}{n}}(z) \cap \bar{X}$  انتخاب می‌کنیم. چون  $z_n \in \bar{X}$  لذا یک  $x_n \in X$  وجود دارد بطوریکه  $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(z) \cap X$ .

با ترکیب این محاسبات نتیجه می‌شود که  $\frac{2}{n} > |z_n - z| + |x_n - z_n| \geq |x_n - z|$ . بنابراین به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم  $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(z) \cap X$  که از آن نتیجه می‌شود  $z \in \bar{X}$ . این نتیجه با انتخاب اولیه ما از  $z$  متناقض است.

۱-۱۳. خط اقلیدسی  $L_p$  را به صورت پارامتری به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$N + t(P - N) = (tp_1, tp_2, tp_3 + 1 - t)$$

که در آن  $t \in \mathbb{R}$ ،  $L_p$  صفحه  $x_1, x_2$  را وقتی که  $tp_3 + 1 - t = 0$  قطع می‌کند، یعنی وقتی

$$t = \frac{1}{1 - p_3} \quad \text{که بنابراین} \quad \xi(P) = \frac{p_1}{1 - p_3} + i \frac{p_2}{1 - p_3}$$

برای محاسبه  $\xi^{-1}$ ، فرض کنید  $z = x + iy$  یک نقطه  $C$  باشد و توجه کنید که  $z$  به

نقطه  $Z = (x, y, 0)$  در  $\mathbb{R}^3$  متناظر می‌شود. فرض کنیم  $L$  خط اقلیدسی بین  $N$  و

باشد و توجه داشته باشید  $L$  به صورت پارامتری به شکل زیر داده می‌شود:

$$N + t(Z - N) = (tx, ty, 1 - t)$$

که در آن  $t \in \mathbb{R}$ . برای اینکه محل تلاقی  $L$  با  $S^2$  را پیدا کنیم، نقطه‌ای روی  $L$  پیدا می‌

کنیم که فاصله آن از مبدا یک باشد که منجر به حل معادله زیر به ازای  $t \in \mathbb{R}$  می‌شود:

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2 = t^2 |z|^2 + t^2 - 2t + 1 = 1$$

دو جواب وجود دارد.  $t=0$  که مربوط به  $N$  است و  $t = \frac{2}{1+|z|^2}$ . از این مقدار  $t$  نتیجه می‌شود:

$$\xi^{-1}(z) = \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$

۱۴-۱. به ازای  $n \geq 1$  با شرط  $a_n \neq 0$  قرار می‌دهیم:

$$g(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a.$$

باید این مطلب را که اگر  $|z|$  بزرگ باشد، آنگاه  $|g(z)|$  بزرگ باشد، کمی کنیم. اگر بخواهیم دقیق باشیم به صورت زیر می‌توانیم عمل کنیم. بنا بر نامساوی مثلث داریم:

$$|g(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a|$$

لذا قرار می‌دهیم:  $A = \max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a|\}$ . به ازای  $|z| > 1$  داریم:

$$|a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a| \leq A(|z|^{n-1} + \dots + |z|) \leq nA|z|^{n-1}$$

لذا به ازای  $\varepsilon > 0$  مفروض،  $\delta > 0$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $\delta > 1$  و بطوریکه  $|a_n| \delta^n - nA \delta^{n-1} > \varepsilon$  در این صورت به ازای  $|z| > \delta$  داریم:

$$|g(z)| \geq |a_n| |z|^n - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a|$$

$$\geq |a_n| |z|^n - nA |z|^{n-1}$$

$$\geq \delta^{n-1} (|a_n| \delta - nA) > \varepsilon$$

و این همان است که می‌خواستیم.

۱۵-۱. اگر  $d = \operatorname{degree}(g) \geq 2$ ، آنگاه  $f$  یک دو سویی نیست. در واقع از قضیه اساسی

جبر نتیجه می‌شود که یک نقطه  $c$  در  $\overline{\mathcal{C}}$  وجود دارد بطوریکه حداقل دو جواب متمایز برای  $g(z) = c$  وجود دارد. اگر  $g(z)$  دارای تجزیه ای به صورت  $g(z) = (z-a)^d$  نباشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $c \neq 0$ .

اگر  $g(z) = (z-a)^d$ ، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $c=1$ . لذا جوابهای  $g(z)=1$  به صورت زیر هستند:

$$\left\{ z = a + \exp\left(\frac{2k\pi}{d}i\right) \mid 0 \leq k \leq d-1 \right\}$$

اگر  $d = \operatorname{degree}(g) = 0$ ، آنگاه  $f$  یک تابع ثابت است که یک تابع پیوسته و غیر دوسویی نیست. اگر  $d = \operatorname{degree}(g) = 1$ ، آنگاه  $g(z) = az + b$  که در آن  $a \neq 0$ . از تمرین ۱۴-۱

می دانیم که  $f$  پیوسته است. برای اینکه ببینیم  $f$  دوسویی است و  $f^{-1}$  پیوسته است،  $f^{-1}$  را به صورت عبارتی صریح می نویسیم، یعنی:

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{a}(z-b) \quad z \in C, \quad f^{-1}(\infty) = \infty$$

۱۶-۱. یک  $z \in \bar{C}$  انتخاب می کنیم. چون  $X$  در  $\bar{C}$  چگال است، یک دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  وجود دارد که به  $z$  همگرا است. چون  $f$  پیوسته است می دانیم که  $\{f(x_n)\}$  همگرا به  $f(z)$  است. چون  $f(x_n) = x_n$  از این نتیجه می شود که  $\{x_n\}$  همگرا به  $z$  و  $f(z)$  هر دو است. لذا  $z = f(z)$ .

۱۷-۱. فرض کنیم  $C_k$  دایره ای در  $\bar{C}$  باشد که شامل  $l_k$  است. حالات چندی وجود دارد که باید مورد ملاحظه قرار گیرد، برحسب این که  $C_1$  و  $C_2$  هر دو دایره اقلیدسی باشند یا اینکه هر دو خطوط اقلیدسی باشند و یا اینکه یکی خط اقلیدسی و یکی دایره اقلیدسی باشد.

حالتی را که  $C_1$  و  $C_2$  دایره اقلیدسی باشند کاملا حل می کنیم و دو حالت دیگر با بحث مشابهی نتیجه می شوند. در اصل ما این حقیقت را دوباره اثبات می کنیم که اگر  $C_1$  و  $C_2$  دایره اقلیدسی در  $\bar{C}$  باشند، آنگاه دایره ای عمود بر هر دوی  $C_1$  و  $C_2$  وجود دارد اگر و فقط اگر  $C_1$  و  $C_2$  مجزا باشند.

فرض کنیم  $c_k$  مرکز اقلیدسی اقلیدسی  $C_k$  و  $r_k$  شعاع اقلیدسی آن باشد. فرض کنیم یک خط هذلولوی  $l$  وجود داشته باشد که بر  $l_1$  و  $l_2$  عمود باشد. فرض کنیم  $A$  دایره ای در  $\bar{C}$  و شامل  $l$  باشد.

ممکن است  $A$  یک خط هذلولوی باشد، که در این حالت،  $C_1$  و  $C_2$  هم مرکزند و لذا فرا موازیند. چون مرز در بینهایت ناحیه بسته در  $IH$  محصور به  $l_1$  و  $l_2$  و اجتماع دو قوس بسته در  $\bar{R}$  است.

در غیر این صورت  $A$  یک دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی  $c$  و شعاع اقلیدسی  $r$  است. در این صورت  $A$  هر دو دایره  $C_1$  و  $C_2$  بطور عمود قطع می کند و لذا بنابر قضیه فیثاغورث به ازای  $k=1,2$  داریم:  $|c-c_k|^2 = r^2 + r_k^2$ . به ویژه  $|c-c_k| > r_k$ . بنابراین مرز در بینهایت ناحیه بسته در  $IH$  محصور به  $l_1$  و  $l_2$ ، از دو قوس بسته تشکیل شده است که یکی شامل  $c$  و دیگری شامل  $\infty$  است.

بالعکس فرض کنیم  $l_1$  و  $l_2$  فرا موازی باشند و  $H$  ناحیه بسته ای در  $\mathbb{H}$  باشد که توسط آنها محصور شده است و فرض کنیم  $a$  قوس بسته در مرز در بینهایت  $H$  باشد که شامل  $\infty$  نیست.

فرض کنیم  $C_k$  دایره اقلیدسی شامل  $l_k$  و مرکز اقلیدسی  $c_k$  و شعاع  $r_k$  اقلیدسی  $C_k$  باشد. به ازای هر  $x \in a$  دایره اقلیدسی  $A$  با مرکز اقلیدسی  $x$  و شعاع اقلیدسی  $r$  در نظر می‌گیریم. برای اینکه  $A$  بر  $C_k$  عمود باشد باید به ازای  $k=1,2$  داشته باشیم  $(c_k - x)^2 = r^2 + r_k^2$ .

با حل کردن نسبت به  $x$  داریم:

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + c_1^2 - c_2^2}{2(c_1 - c_2)}$$

چون  $C_1$  و  $C_2$  دو دایره اقلیدسی جدا از هم هستند، داریم  $r_1 + r_2 > c_1 - c_2$ . بنابراین:

$$x = \sqrt{(x - c_1)^2 - r_1^2} = \sqrt{(x - c_2)^2 - r_2^2}$$

و لذا خط هذلولوی مشمول  $A$  عمود بر هر دو خط  $l_1$  و  $l_2$  است.

۱-۱۸. فرض کنیم  $q = \infty$ . در این صورت خط هذلولوی مشمول خط اقلیدسی  $\{Re(z) = Re(p)\}$  خط هذلولوی یکتایی است که نقاط انتهایی آن در بینهایت  $p$  و  $q$  هستند. اگر  $p = \infty$ ، آنگاه بحث مشابهی صادق است.

فرض کنیم  $p \neq \infty$  و  $q \neq \infty$ . در این صورت دوباره می‌توانیم از ساختار اثبات قضیه ۱-۲ در مورد عمود منصف پاره خط اقلیدسی اصل  $p$  و  $q$  بهره برده و دایره اقلیدسی یکتایی به مرکز روی محور حقیقی  $\mathbb{R}$  پیدا کنیم که از  $p$  و  $q$  می‌گذرد. این دایره را با  $\mathbb{H}$  قطع می‌دهیم تا خط هذلولوی یکتایی که توسط  $p$  و  $q$  مشخص می‌شود، بدست آید.

## فصل ۲

۲-۱. تابع را که  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  به صورت زیر تعریف شده در نظر می‌گیریم:

$$f(z) = \begin{cases} z & Re(z) \leq 0 \\ z + iRe(z) & Re(z) \geq 0 \\ \infty & z = \infty \end{cases}$$



واضح است که  $f$  پیوسته است. چون حاصل جمع دو تابع پیوسته است. برای اینکه نشان دهیم  $f$  یک دوسویی و  $f^{-1}$  پیوسته است. فرمول صریحی برای  $f^{-1}$  ارائه می‌دهیم، یعنی:

$$f(z) = \begin{cases} z & \operatorname{Re}(z) \leq 0 \\ z - i\operatorname{Re}(z) & \operatorname{Re}(z) \geq 0 \\ \infty & z = \infty \end{cases}$$

بنابراین داریم  $f \in \operatorname{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ . ولی تصویر  $\overline{\mathbb{R}}$  تحت  $f$  یک دایره در  $\overline{\mathbb{C}}$  نیست، لذا  $f \notin \operatorname{Homeo}^{\circ}(\overline{\mathbb{C}})$ .

۲-۲. بحثی که در اثبات قضیه  $I-2$  آمده را تعقیب می‌کنیم. قرار می‌دهیم  $w = az + b$  لذا  $z = \frac{1}{a}(w - b)$  با جانشین کردن این در معادله یک دایره اقلیدسی یعنی:

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma &= \alpha \frac{1}{a}(w - b) \overline{\frac{1}{a}(w - b)} + \beta \frac{1}{a}(w - b) + \bar{\beta} \frac{1}{a}(w - b) + \gamma \\ &= \frac{\alpha}{|\alpha|} \left| w + \bar{\beta} \frac{a}{\alpha} - b \right|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

که معادله یک دایره اقلیدسی در  $\mathbb{C}$  است.

۳-۲. دایره اقلیدسی  $A$  که توسط معادله  $\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$  داده می‌شود دارای مرکز اقلیدسی  $-\frac{\bar{\beta}}{\alpha}$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{1}{|\alpha|} \sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}$  است. همانطور که در حل تمرین ۲-۲ دیدیم تصویر  $A$  تحت  $f$ ، یک دایره اقلیدسی است که با معادله زیر داده می‌شود:

$$\frac{\alpha}{|a|^2} \left| w + \bar{\beta} \frac{a}{\alpha} - b \right|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha} = 0.$$

که دارای مرکز اقلیدسی  $f(-\frac{\bar{\beta}}{\alpha})$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{1}{|\alpha|} \sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}$  است.

۲-۴ معادله  $A$  به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$|z - z| \cdot |z - z| - z\bar{z} - \bar{z}z - z\bar{z} + |z| \cdot |z| - r^2 = 0.$$

معادله دایره  $J(A)$  به صورت زیر است:

$$(|z| \cdot |z| - r^2) |w| \cdot |w| - z\bar{w} - \bar{z}w + 1 = 0.$$

که خط اقلیدسی است اگر و فقط اگر  $|z| - r^2 = 0$  یعنی اگر و فقط اگر  $|z| = r$  لذا  $A$  از مبدا می‌گذرد.

۲-۵. وارون  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  به صورت  $m^{-1} = \frac{dz - b}{-cz + a}$  است.

۲-۶. اگر ضرایب  $p$  صفر باشد، آنگاه  $p$  تعریف نشده است، لذا می‌نویسیم

$p(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  و فرض می‌کنیم  $ad - bc = 0$  و سپس  $ad = bc$ . فرض می‌کنیم  $a \neq 0$ . اثبات در حالتی که یک (یا چند) ضریب دیگر غیر صفر باشد به صورت مشابه است.

صورت و مخرج  $p$  را در  $a$  ضرب کرده و ساده می‌کنیم داریم:

$$p(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(az + b)}{a(cz + d)} = \frac{a(az + b)}{acz + bc} = \frac{a(az + b)}{c(az + b)} = \frac{a}{c}$$

و لذا  $p$  یک تابع ثابت است.

۲-۷.

۱. چون  $m(\infty) = \frac{2}{3} \neq \infty$  نقاط ثابت در  $\mathbb{C}$  بوده و ریشه‌های معادله  $3z^2 - 3z - 5 = 0$

می‌باشند که عبارتند از  $\frac{1}{6}[3 \pm \sqrt{69}]$ .

۲. تک نقطه ثابت  $z = \infty$  است. نقطه ثابت دیگر در  $\mathcal{C}$  بوده و جواب  $z = 7z + 6$  می‌باشد که عبارت است از  $z = -1$ .

۳. چون  $J(\infty) = 0 \neq \infty$  نقاط ثابت در  $\mathcal{C}$  قرار دارند و ریشه های  $z^2 = 1$  بوده و عبارتند از  $z = \pm 1$ .

۴. چون  $m(\infty) = 1 \neq \infty$ ، نقاط ثابت در  $\mathcal{C}$  قرار دارند و ریشه های  $z^2 = 0$  هستند. بویژه  $m$  فقط یک نقطه ثابت در  $z = 0$  دارد.

۲-۸ شکل کلی تبدیل مویبوس  $m$  که سه تایی  $(\infty, z_r, z_p)$  را به سه تایی  $(0, 1, \infty)$  می‌برد به صورت زیر است:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{z_r - z_p}{z - z_p}$$

۲-۹. شش تبدیل وجود دارد، چون شش جایگشت برای  $T$  وجود دارد:

$a(z) = z$  که  $(0, 1, \infty)$  را به  $(0, 1, \infty)$  می‌برد؛  $b(z) = -(z-1)$  که  $(0, 1, \infty)$  را به  $(1, 0, \infty)$  می‌برد؛  $c(z) = \frac{z}{z-1}$  که  $(0, 1, \infty)$  را به  $(0, \infty, 1)$  می‌برد؛  $d(z) = \frac{1}{z}$  که  $(0, 1, \infty)$  را به  $(\infty, 1, 0)$  می‌برد؛  $e(z) = \frac{-1}{z-1}$  که  $(0, 1, \infty)$  را به  $(1, \infty, 0)$  می‌برد و  $f(z) = \frac{z-1}{z}$  که  $(0, 1, \infty)$  را به  $(\infty, 0, 1)$  می‌برد.

۲-۱۰. تبدیلات زیادی اینچینی وجود دارد. یکی تبدیل مویبوس  $m$  است که سه تایی  $(i, -1, 1)$  از نقاط متمایز روی  $S^1 = \partial D$  را به سه تایی  $(0, 1, \infty)$  از نقاط متمایز روی  $\bar{R} = \partial \bar{H}$  می‌برد. به طور صریح داریم:

$$m(z) = \frac{z-i}{z-1} \frac{-2}{-1-i}$$

هنوز باید بررسی کنیم که  $m$ ،  $D$  را به  $\bar{H}$  می‌برد که این کار را مثلاً با بررسی کردن اینکه قسمت موهومی  $m(0)$  مثبت است انجام می‌دهیم:

$$\operatorname{Im}(m(\cdot)) = \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}i}{1+i}\right) = \operatorname{Im}(1+i) > 0.$$

۱۱-۲.  $f(z) = z^r$  تحت  $Möb^+$  ناورداست اگر و فقط اگر به ازای هر  $z \in \mathcal{C}$  و هر

$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  در  $Möb^+$  داشته باشیم  $f(m(z)) = f(z)$  یعنی باید داشته باشیم:

$$f(m(z)) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^r = z^r$$

و لذا به ازای هر  $z$  در  $\bar{\mathcal{C}}$  باید:

$$c^r z^r + rcdz^{r-1} + (d^r - a^r)z^r - rabz - b^r = 0.$$

بویژه داریم  $c = b = 0$  و  $a^r = d^r$ . لذا  $f$  تحت  $Möb^+$  ناوردا نیست، چون

$$ad - bc = ad = 1 \quad \text{یا} \quad a = -d = i \quad \text{یا} \quad a = d = \pm 1$$

در حالت اول  $m$  تبدیل موبیوس همانی است. در حالت دوم  $m(z) = z$ . بنابراین تنها زیر گروه  $Möb^+$  که تحت آن  $f$  ناورداست عبارت است از زیر گروه  $\langle e(z) = z, m(z) = -z \rangle$ .

۱۲-۲. با محاسبه مستقیم پیش می‌رویم. فرض کنیم  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  که در آن  $a, b, c$  و

$d$  در  $\mathcal{C}$  هستند و  $ad - bc = 1$ ، بنابراین

$$[m(z_1), m(z_2); m(z_3), m(z_4)] = \left[ \frac{az_1+b}{cz_1+d}, \frac{az_2+b}{cz_2+d}, \frac{az_3+b}{cz_3+d}, \frac{az_4+b}{cz_4+d} \right]$$

$$= \left[ \frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}, \frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d} \right] \left[ \frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}, \frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_1 + d)}{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_1 + d)} \right] \\
 &\times \left[ \frac{(az_2 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_2 + d)}{(az_2 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_2 + d)} \right] \\
 &= \left[ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2} \right] \left[ \frac{z_2 - z_2}{z_2 - z_2} \right] \\
 &= [z_1, z_2; z_2, z_2]
 \end{aligned}$$

۲-۱۳: اگر یک توسیع پیوسته  $F: \overline{C}^+ \rightarrow \overline{C}$  برای نسبت ناهمساز  $[z_1, z_2; z_2, z_2]$  وجود داشته باشد، آنگاه به ازای هر دو دنباله  $\{z_n\}$  و  $\{w_n\}$  از نقاط متمایز ناصفر  $\overline{C}$  که  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$  داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\infty, \cdot, w_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\infty, \cdot, z_n, w_n)$$

چون  $\infty, z_n, w_n$  متمایز هستند این معادله به صورت زیر در می آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\infty, \cdot, w_n, z_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\infty, \cdot, z_n, w_n]$$

و لذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{w_n - z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z_n - w_n}$$

مثلا اگر  $z_n = \frac{2}{n}$  و  $w_n = \frac{1}{n}$  آنگاه  $2 = 1 - 1$  که یک تناقض است.

۲-۱۴. با محاسبه در می یابیم که

$$[2 + 3i, -2i; 1 - i, 4] = \left[ \frac{2 + 3i - 4}{2 + 3i + 2i} \right] \left[ \frac{1 - i + 2i}{1 - i - 4} \right]$$

$$= \left[ \frac{-2+3i}{2+5i} \right] \left[ \frac{1+i}{-3-i} \right]$$

$$= \left[ \frac{11+16i}{29} \right] \left[ \frac{-4-2i}{10} \right] = \frac{-12-86i}{290}$$

که حقیقی نیست و لذا  $1-i, 2+3i$  و  $4$  روی یک دایره در  $\bar{C}$  قرار ندارند.

۲-۱۵. ما محاسبه مشاهده می‌کنیم که

$$[2+3i, -2i; 1-i, s] = \left[ \frac{2+3i-s}{2+3i+2i} \right] \left[ \frac{1-i+2i}{1-i-4} \right]$$

$$= \left[ \frac{2-s+3i}{2+5i} \right] \left[ \frac{1+i}{1-s-i} \right]$$

$$= \left[ \frac{19-2s+(5s-4)i}{29} \right] \left[ \frac{-s+(2-s)i}{(s-1)^2+1} \right]$$

$$= \frac{(7s^2-33s+8)+(3s^2-19s+38)i}{29((s-1)^2+1)}$$

که حقیقی است اگر و فقط اگر

$$s = \frac{1}{6}[-19 \pm \sqrt{817}]$$

بنابراین دقیقاً دو مقدار حقیقی برای  $s$  وجود دارد که در مورد آنها  $1-i, -2i, 2+3i$  و  $s$  روی یک دایره در  $\bar{C}$  قرار دارد.

۲-۱۶. با محاسبه مشاهده می‌کنیم که

$$[z_1, z_2; z_3, z_4]_r = \frac{1}{[z_1, z_2; z_3, z_4]}$$

$$[z_1, z_2; z_3, z_4]_r = \frac{1}{1 - [z_1, z_2; z_3, z_4]}$$

۱۷-۲. اگر  $n$  یک نقطه  $x$  در  $\bar{C}$  را ثابت نگه دارد، آنگاه  $m = p \circ n \circ p^{-1}$  نقطه  $p(x)$  را ثابت نگه می‌دارد، چون

$$m(p(x)) = (p \circ n \circ p^{-1})(p(x)) = p(n(x)) = p(x)$$

چون  $n = p^{-1} \circ m \circ p$ ، بالعکس مشاهده می‌کنیم که اگر  $m$  یک نقطه  $y$  از  $\bar{C}$  را ثابت نگه دارد، آنگاه  $n$  نقطه  $p^{-1}(y)$  را ثابت نگه می‌دارد. بویژه  $m$  و  $n$  دارای یک تعداد نقطه ثابت هستند.

۱۸-۲. چون  $n_r \circ n_r^{-1}(0) = 0$  و  $n_r \circ n_r^{-1}(\infty) = \infty$  می‌توان نوشت  $n_r \circ n_r^{-1}(z) = p(z) = cz$  که  $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ . بنابراین  $n_r = p \circ n_k$  می‌نویسیم.  $n_k \circ m \circ n_k^{-1}(z) = a_k z$  و توجه داریم که

$$\begin{aligned} a_r z &= n_r \circ m \circ n_r^{-1}(z) = p \circ n_k \circ m \circ n_k^{-1} \circ p^{-1}(z) \\ &= p \circ (n_k \circ m \circ n_k^{-1})\left(\frac{1}{c}z\right) = p\left(\frac{a_k}{c}z\right) = a_r z \end{aligned}$$

و لذا  $a_r = a_k$

۱۹-۲. هر تبدیل مویبوسی که  $x$  را به  $\infty$  و  $y$  را به  $0$  می‌برد به صورت  $s = J \circ q$  نوشته می‌شود که در آن  $J(z) = \frac{1}{z}$  و  $q$  تبدیل مویبوسی است که  $x$  را به  $0$  و  $y$  را به  $\infty$  می‌برد. با محاسبه می‌بینیم که:

$$s \circ m \circ s^{-1}(z) = J \circ (q \circ m \circ q^{-1}) \circ J(z) = \frac{1}{a}z$$

چون بنا بر تمرین ۱۸-۲ ضریب  $q \circ m \circ q^{-1}$  مستقل از انتخاب  $q$  مشروط به اینکه  $x, q$  را به  $0$  و  $y$  را به  $\infty$  بفرستد، می‌باشد ضریب  $s \circ m \circ s^{-1}$  مستقل از انتخاب  $s$  می‌باشد مشروط به اینکه  $s, x$  را به  $\infty$  و  $y$  را به مبدا ببرد.

۲۰-۲.

۱. نقاط ثابت  $m(z) = \frac{2z+5}{3z-1}$  عبارتند از  $z = \frac{1}{6}[3 \pm \sqrt{69}]$  قرار می‌دهیم:

$$q(z) = \frac{z - \frac{1}{6}[3 + \sqrt{69}]}{z - \frac{1}{6}[3 - \sqrt{69}]}$$

و محاسبه می‌کنیم:

$$q \circ m \circ q^{-1}(1) = q \circ m(\infty) = q\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}[3 + \sqrt{69}]}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}[3 - \sqrt{69}]}$$

و لذا  $m$  با زاویه ثابت است.

۲. نقاط ثابت  $m(z) = 7z + 6$  عبارت است از  $z = \infty$  و  $z = -1$  لذا  $m$  یا بیضوی یا با زاویه ثابت است. قرار می‌دهیم  $q(z) = z + 1$  و محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$qm \circ q^{-1}(1) = q \circ m(0) = q(6) = 7$$

لذا  $m$  با زاویه ثابت است.

۳.  $J(z) = \frac{1}{z}$  دارای نقاط ثابت در  $\pm 1$  است و لذا یا بیضوی است و یا؟؟. بجای مزدوج گیری از  $J$  بوسیله یک مویوس که نقاط ثابت آن  $0$  و  $\infty$  باشد، توجه کنید که  $J^2(z) = z$  و لذا  $m$  باید بیضوی باشد.

۴. نقاط ثابت  $m(z) = \frac{z}{z+1}$  عبارت است  $z = 0$  از لذا  $m$  سهموی است.

۲۱-۲. ۱. ۳۴-؛ ۲. ۱-؛ ۳. ۲؛ ۴. ۴-؛ ۵.  $i$ ؛ ۶. ۴-.



۲۲-۲

$$۲.m(z) = \frac{i}{iz}; \quad ۳.m(z) = \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}z - \frac{۳}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}};$$

$$۱.m(z) = \frac{\frac{-۲i}{\sqrt{۳۴}}z - \frac{۴i}{\sqrt{۳۴}}}{\frac{-۵i}{\sqrt{۳۴}}z + \frac{۷i}{\sqrt{۳۴}}};$$

$$۵.m(z) = \frac{\frac{i\sqrt{2}}{1+i}z + \frac{\sqrt{2}}{1+i}}{\frac{\sqrt{2}}{1+i}}; \quad ۶.m(z) = \frac{\frac{i}{2}z}{\frac{-i}{2}z - ۲i}$$

$$۴.m(z) = \frac{\frac{1}{2}z - \frac{i}{2}}{\frac{-i}{2}z + \frac{۳}{2}};$$

۲۳-۲: قرار می‌دهیم  $n(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  و  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  در این صورت:

$$n \circ m(z) = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d}$$

و

$$m \circ n(z) = \frac{(\alpha a + b\gamma)z + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)z + c\beta + d\delta}$$

بنابراین

$$\tau(n \circ m) = (\alpha a + \beta c + \gamma b + \delta d)^{\tau} = \tau(m \circ n)$$

۲۴-۲: با استفاده از تمرین ۲۳-۲ می‌بینیم که:

$$\tau((p \circ m) \circ p^{-1}) = \tau(p^{-1} \circ p(p \circ m)) = \tau(m)$$

۲۵-۲: با محاسبه داریم که  $f'(\rho) = ۲\rho - ۲\rho^{-\tau} = ۲\rho(1 - \rho^{-\tau})$  و لذا  $f'(\rho) = 0$  اگر و

فقط اگر  $\rho = 1$ . چون:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho) = \infty = \lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho)$$

می‌بینیم که  $\rho = 1$  یک مینیموم سرتاسری است. چون  $f(1) = 2$  نتیجه حاصل است.

۲۶-۲.

۱.  $\tau(m) = \frac{-25}{34}$  و لذا  $m$  با زاویه ثابت و با ضریب  $[-93 - \sqrt{4.25}]$  است.  $\frac{1}{68}$

۲.  $\tau(m) = 0$  و لذا  $m$  بیضوی با ضریب  $-1$  است.

۳.  $\tau(m) = 0$  و لذا  $m$  بیضوی با ضریب  $-1$  است.

۴.  $j(m) = 4$  و لذا  $m$  سهموی است.

۵.  $\tau(m) = 2$  و لذا  $m$  بیضوی با ضریب  $i$  است.

۶.  $\tau(m) = \frac{-9}{4}$  و لذا  $m$  با زاویه ثابت و با ضریب  $-4$  است.

۲۷-۲. بجای محاسبه، با این نکته شروع می‌کنیم که می‌توانیم  $m$  را به صورت

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

بنویسیم که در آن  $ad - bc = 1$  و  $a + d = 2$  و  $p$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $a = 1 + px$  و  $d = 1 - px$  و این  $p$  را به طور یکتا معین می‌کند. چون

$$ad - bc = 1 \quad \text{داریم} \quad bc = -p^2 x^2$$

نقاط ثابت  $m$  در معادله  $(1 + px)z + b = z(cz + (1 - px))$  صدق می‌کند و لذا

$$cz^2 - 2pxz - b = 0 \quad \text{که به صورت مربع} \quad \left(z - \frac{px}{c}\right)^2 = 0 \quad \text{در می‌آید. چون} \quad z = x \quad \text{یک}$$

جواب و  $m$  سهموی است می‌بینیم که  $\frac{px}{c} = x$  و لذا  $c = p$ . چون  $bc = -p^2 x^2$  نتیجه

$$b = -px^2 \quad \text{می‌شود که}$$

۲-۲۸. فرض کنیم  $n(z) = az$  و  $p(z)$  تبدیل موبیوسی باشد که  $x$  را به  $0$  و  $y$  را به  $\infty$

می‌برد. مثلاً می‌توان  $p(z) = \frac{z-x}{z-y}$  را در نظر گرفت. دترمینان  $p$  عبارت است از

$\beta^x = x - y$  و لذا با نرمال کردن داریم:

$$p(z) = \frac{\frac{1}{\beta}z - \frac{x}{\beta}}{\frac{1}{\beta}z - \frac{y}{\beta}}$$

چون  $m, x$  و  $y$  را ثابت نگه می‌دارد و دارای ضریب  $a$  است داریم:  $p \circ m \circ p^{-1} = n$  و

لذا  $m = p^{-1} \circ n \circ p$  با محاسبه می‌بینیم که:

$$p^{-1} \circ n \circ p(z) = \frac{1}{\beta^x} \left[ \frac{(x-ay)z + xy(a-1)}{(1-a)z + ax - y} \right] = \frac{\left(\frac{x-ya}{x-y}\right)z + \frac{xy(a-1)}{x-y}}{\left(\frac{1-a}{x-y}\right)z + \frac{xa-y}{x-y}}$$

۲-۲۹. واضح است که هر عضو  $k = \lambda I$  از  $K$  در  $\ker(\mu)$  است. چون  $\mu(k)$  تبدیل

موبیوس  $m(z) = \frac{\lambda z}{\lambda} = z$  است.

فرض کنیم  $m$  یک عضو  $GL_1(\mathbb{C})$  است و لذا:

$$\mu \left( M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left( m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

تبدیل موبیوس همانی است. چون  $m(0) = 0$  داریم که  $b = 0$ ؛ چون  $m(\infty) = \infty$  داریم که

$c = 0$ ؛ چون  $m(1) = \frac{a}{d} = 1$  داریم که  $a = d$  و لذا

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aI$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

این نتیجه که  $Möb^+$  و  $PGL_4(C)$  یکرینخت هستند بالبداهه از قضیه یکرینختی اول در نظریه گروهها نتیجه می‌شود.

۳۰-۲. بنا به تعریف  $C(z) = \bar{z}$  هر نقطه  $\bar{R}$  را ثابت نگه می‌دارد و بویژه  $0$ ،  $1$  و  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارد. ولی چون  $C(i) = -i \neq i$  می‌بینیم که  $C(z)$  همانی نیست و لذا نمی‌تواند عضوی از  $Möb^+$  باشد.

۳۱-۲. فرض کنیم  $A$  دایره  $\bar{C}$  در باشد که با معادله  $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$  داده می‌شود. قرار می‌دهیم  $w = C(z) = \bar{z}$  لذا  $z = \bar{w}$  و در این صورت  $w$  در  $\alpha w\bar{w} + \bar{\beta}w + \beta\bar{w} + \gamma = 0$  صدق می‌کند که معادله یک دایره در  $\bar{C}$  است.

۳۲-۲. بررسی می‌کنیم که همه ترکیب‌های ممکن از زوجها دوباره یکی از دو شکل مطلوب را دارد. تاکنون نشان دادیم که ترکیب دو تبدیل موبیوس دوباره یک تبدیل موبیوس است. با این مطلب شروع می‌کنیم که ترکیب  $m \circ C$  که در آن به  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  به صورت زیر است:

$$(m \circ C)(z) = m(\bar{z}) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

ترکیب  $m \circ n$  که در آن  $n(\bar{z}) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$  به صورت زیر است:

$$m \circ n(z) = \frac{(\alpha\alpha + b\gamma)\bar{z} + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)\bar{z} + c\beta + d\delta}$$

و لذا شکل مطلوب را دارد. به همین ترتیب، ترکیب  $n \circ m$  دارای شکل مطلوب است.

ترکیب  $p \circ n$  که در آن  $p(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  به صورت زیر است:

$$(p \circ n)(z) = \frac{(a\bar{\alpha} + b\bar{\gamma})z + a\bar{\beta} + b\bar{\delta}}{(c\bar{\alpha} + d\bar{\gamma})z + c\bar{\beta} + d\bar{\delta}}$$

و لذا شکل مطلوب را دارد.

۲-۳۳. یکی به صورت زیر است:

$$p(z) = m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{i}{\sqrt{2}}}{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

که در مورد آن هم اکنون دیدیم که  $p \circ c \circ p^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

همچنین تبدیل مویوس  $n$  را در نظر می‌گیریم که  $(0, 1, \infty)$  را به  $(i, 1, -1)$  می‌برد. یعنی:

$$n(z) = \frac{\frac{1-i}{2}z + i}{-\frac{1+i}{2}z + 1}$$

و لذا

$$(n \circ c \circ n^{-1})(z) = n \left( \frac{\bar{z} + i}{\frac{1+i}{2}\bar{z} + \frac{1+i}{2}} \right) = \frac{1}{\bar{z}}$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

۲-۳۴. چون  $f(z) = az + b$  ترکیب  $L(z) = az$  و  $P(z) = z + b$  است، کافی است

بررسی کنیم که گزاره ۲-۲۰ در مورد تبدیلات  $L$  و  $P$  برقرار است.

$$S_k = \frac{\operatorname{Im}(\bar{z}_k - \bar{z}_j)}{\operatorname{Re}(\bar{z}_k - \bar{z}_j)} = -\frac{\operatorname{Im}(z_k - z_j)}{\operatorname{Re}(z_k - z_j)} = -s_k$$

در این صورت  $\angle(C(X_1), C(X_2))$  اندازه زاویه بین  $C(X_1)$  و  $C(X_2)$  به صورت زیر است:

$$\angle(C(X_1), C(X_2)) = \arctan(S_2) - \arctan(S_1) = -\arctan(s_2) + \arctan(s_1) = -\angle(X_2, X_1)$$

بنابراین  $C$  هم‌مدیس است، چون قدر مطلق اندازه زاویه بین خطوط اقلیدسی را حفظ می‌کند.

۲-۳۶. در حالتی که در آن  $a = 0$  از شرط  $ad - bc = 1$  نتیجه می‌شود که  $c \neq 0$ . دو نقطه

$$m(\lambda) = \frac{b}{c + d} \quad \text{و} \quad -$$

۲-۳۷. با گرفتن یک عضو  $p$  از  $Möb$  که  $\bar{R}$  را به  $S^1$  می برد شروع می کنیم،

$$\text{مثل } p(z) = \frac{z-i}{-iz+1} \text{ و قرار می دهیم } m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ و محاسبه می کنیم، داریم:}$$

$$p \circ m \circ p^{-1}(z) = \frac{(a+d+(b-c)i)z+b+c+(a-d)i}{(b+c-(a-d)i)z+a+d-(b-c)i}$$

قرار می دهیم  $\alpha = a+d-(b-c)i$  و  $\beta = b+c+(a-d)i$

اگر  $a, b$  و  $d$  همه حقیقی باشند، آنگاه با  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت فوق می توانیم  $p \circ m \circ p^{-1}$  را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$p \circ m \circ p^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$$

اگر  $a, b, c$  و  $d$  همه موهومی محض باشند، آنگاه با  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت فوق می توانیم  $p \circ m \circ p^{-1}$  را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$p \circ m \circ p^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{-\beta z - \bar{\alpha}}$$

اگر  $n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ، آنگاه:

$$p \circ m \circ p^{-1}(z) = \frac{(a-d-(b+c)i)\bar{z}+b-c-(a+d)i}{(-b+c-(a+d)i)\bar{z}-a+d-(b+c)i}$$

قرار می دهیم:  $\delta = a-d-(b+c)i$  و  $\gamma = b-c-(a+d)i$

اگر  $a, b, c$  و  $d$  همه حقیقی باشند، آنگاه با  $\delta$  و  $\gamma$  به صورت فوق می توانیم  $p \circ m \circ p^{-1}$  را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$p \circ m \circ p^{-1}(z) = \frac{\delta \bar{z} + \gamma}{-\gamma \bar{z} - \bar{\delta}}$$

اگر  $a, b, c, d$  همه موهومی محض باشند، آنگاه با  $\delta$  و  $\gamma$  به صورت فوق می‌توانیم  $p \circ m \circ p^{-1}$  را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$p \circ m \circ p^{-1}(z) = \frac{\delta \bar{z} + \gamma}{\bar{\gamma} z + \delta}$$

۳۸-۲. این مشابه اثبات قضیه اصلی 4-2 است. ابتدا توجه کنید که اعضای که به عنوان

مولد در نظر گرفته ایم همه عضو  $Möb(IH)$  است. عضو  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  از  $Möb(IH)$  را در نظر می‌گیریم که در آن  $a, b, c, d \in IH$  و  $ad - bc = 1$ .

اگر  $c = 0$  آنگاه  $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . چون  $1 = ad - bc = ad$  داریم  $\frac{a}{d} = a' > 0$ .

اگر  $c \neq 0$  آنگاه  $m(z) = f(K(g(z)))$  که در آن  $g(z) = c'z + cd$  و  $f(z) = z + \frac{a}{c}$ .

در مورد  $n(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  که در  $a, b, c, d$  آن موهومی محض هستند و  $ad - bc = 1$

، توجه کنید که  $B \circ n = m$  در آن  $m(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  یک عضو  $Möb(IH)$  است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$n = B^{-1} \circ m = B \circ m$$

۳۹-۲. از قضیه اصلی ۲.۲۶ می‌دانیم که هر عضو  $Möb(IH)$  یا به صورت

$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  است که در آن  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  و  $ad - bc = 1$  و یا دارای شکل

$n(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  است که در آن  $a, b, c, d$  موهومی محض هستند و  $ad - bc = 1$ .

تبدیل مویوس  $p(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$  را به  $\mathcal{S}^1$  می‌برد و  $IH$  را به  $ID$  می‌برد چون  $p(i) = 0$ .

برای  $m$  با محاسبه داریم:



$$p \circ m \circ p^{-1}(z) = \frac{(a+d+(b-c)i)z + b+c + (a-d)i}{(b+c-(a-d)i)z + a+d-(b-c)i} = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}},$$

که در آن  $\beta = b+c+(a-d)i$  و  $\alpha = a+d+(b-c)i$

برای  $n$  با محاسبه داریم:

$$p \circ n \circ p^{-1}(z) = \frac{(a-d-(b+c)i)\bar{z} + b-c-(a+d)i}{(-b+c-(a+d)i)\bar{z} - a+d-(b+c)i} = \frac{\delta \bar{z} + \gamma}{\gamma \bar{z} + \delta},$$

که در آن  $\gamma = b-c-(a+d)i$  و  $\delta = a-d-(b+c)i$

۲-۴۰. فرض کنیم  $\ell$  یک خط هذلولوی در  $\mathbb{H}$  باشد. با استفاده از لم ۲-۸ کافی است عضوی از  $Möb(\mathbb{H})$  بسازیم که  $\ell$  را به محور موهومی مثبت  $I$  در  $\mathbb{H}$  ببرد. یک روش این است که عضوی در  $Möb(\mathbb{H})$  بسازیم که نقاط انتهایی در بینهایت  $\ell$  را به  $0$  و  $\infty$  ببرد، همانطور که در حل تمرین ۲-۴۱ انجام شد. روش دیگری را در انتها بکار می‌گیریم.

یک نقطه  $z$  روی  $\ell$  انتخاب می‌کنیم. بنابر قضیه ۲-۲۸ یک عضو  $m$  از  $Möb(\mathbb{H})$  وجود دارد که  $m(z) = i$ . فرض کنیم  $\varphi$  زاویه بین خطوط هذلولوی  $I$  و  $m(\ell)$  باشد که از  $I$  تا  $m(\ell)$  اندازه گرفته شده است.

به ازای هر  $\theta$  تبدیل موبیوس

$$n_{\theta}(z) = \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$$

در  $Möb(\mathbb{H})$  قرار دارد و  $i$  را ثابت نگه می‌دارد. همچنین زاویه بین  $I$  و  $n_{\theta}(I)$  در  $i$  که از  $I$  تا  $n_{\theta}(I)$  اندازه گرفته شده، برابر  $\theta$  است.

لذا اگر قرار دهیم  $\theta = \frac{1}{\varphi}$  آنگاه  $n_{\theta}(I)$  و  $m(\ell)$  هر دو خطوط هذلولوی مار بر  $i$  هستند که با  $I$  زاویه  $\phi$  می‌سازند. بنابراین  $m(\ell) = n_{\theta}(I)$  و لذا  $I = n_{\theta}^{-1} \circ m(\ell)$

۴۱-۲. به ازای هر دو نقطه  $y < x$  در  $\mathbb{R}$  تبدیل مویوس  $m(z) = \frac{z-x}{z-y}$  در  $m(x) = 0$  و  $m(y) = \infty$  صدق می‌کند. همچنین دترمینان  $m$  برابر  $x-y > 0$  و لذا  $m$  در  $Möb(\mathbb{H})$  قرار دارد.

به ازای  $x=1$  و  $y=-2$  داریم که  $m(z) = \frac{z-1}{z+2}$  به عنوان یک عضو  $Möb^+(\mathbb{H})$ ،  $\ell$  را به  $I$  می‌برد.

۴۲-۲. فرض کنیم  $I$  محور موهومی مثبت باشد و  $r_1$  نیم خط هذلولوی بسته شامل قسمتی از  $I$  بالای  $i$  و شامل آن باشد. با استفاده از لم ۲-۸ کافی است نشان دهیم که عضوی مانند  $m$  از  $Möb^+(\mathbb{H})$  وجود دارد که هر عضو  $(\ell, r, z)$  در  $X$  را به  $(I, r_1, i)$  می‌برد.

با یک عضو  $n$  از  $Möb^+(\mathbb{H})$  شروع می‌کنیم که نقاط انتهایی در بینهایت  $\ell$  را به  $0$  و  $\infty$  نقاط انتهایی در بینهایت  $I$  ببرد. (اگر نقاط انتهایی در بینهایت  $\ell$  را  $p$  و  $q$  بنامیم که در  $\mathbb{R}$  قرار داشته باشد و  $p < q$  آنگاه  $n(z) = \frac{z-q}{z-p}$  حالتی که یکی از  $p$  یا  $q$  بینهایت باشد را به خواننده واگذار می‌کنیم.) به ازای یک  $\lambda > 0$  داریم  $n(z) = \lambda i$ . فرض کنیم  $s(z) = \frac{1}{\lambda} z$  در این صورت  $s \circ n$  در  $son(\ell) = I$  و  $son(r) = i$  اگر  $son(r) = r_1$  آنگاه قرار می‌دهیم  $m = s \circ n$ . اگر  $s \circ n(r) \neq r_1$  آنگاه قرار می‌دهیم  $m = k \circ s \circ n$  که در آن  $K(z) = -\frac{1}{z}$ . چون همه  $n$ ،  $s$  و  $K$  عضو  $Möb^+(\mathbb{H})$  هستند، داریم که  $m \in Möb^+(\mathbb{H})$ .

۴۳-۲. فرض کنیم  $H$  نیم صفحه باز  $H = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$  باشد که با محور موهومی مثبت  $I$  مشخص می‌شود. دوباره با استفاده از لم ۲-۸ به ازای هر نیم صفحه باز مفروض  $L$  در  $\mathbb{H}$  کافی است عضوی از  $Möb^+(H)$  بسازیم که  $L$  را به  $H$  ببرد.

فرض کنیم  $\ell$  خط محصور کننده  $L$  باشد. بنا بر تمرین ۲-۴۰ یک عضو  $m$  از  $Möb^+(H)$  هست که در  $m(\ell) = I$  صدق می‌کند. بویژه  $m$  دو نیم صفحه باز تعیین شده توسط  $\ell$  را به دو نیم صفحه باز مشخص شده با  $I$  می‌برد.

اگر  $m(L) = H$  حکم ثابت است. اگر  $m(L) \neq H$ ، آنگاه  $B \circ m(L) = H$  که در آن  $B(z) = -\bar{z}$  انعکاس نسبت به  $I$  است و حکم ثابت است.

۴۴-۲. چون خط هذلولوی  $l$  که با  $\sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2}$  معین می‌شود، در دایره اقلیدسی با مرکز مبدا و شعاع  $\sqrt{2}$  قرار دارد، انعکاس نسبت به  $l$  با  $r(z) = \frac{2}{z}$  داده می‌شود.

با ترکیب تبدیلات داریم:

$$r \circ q(z) = \frac{2z+2}{z+2} = \frac{\sqrt{2}z + \sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \sqrt{2}} = m(z)$$

که با زاویه ثابت است که  $-\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  را ثابت نگه می‌دارد.

چون  $r(z) = r^{-1}(z)$  در این صورت داریم  $q(z) = r \circ m(z)$ .

۴۵-۲. با قراردادن  $q(z) = z$  داریم  $z = -\bar{z} + 1$  که آن را می‌توان به صورت  $Re(z) = \frac{1}{2}$  نوشت. بنابراین نقاط ثابت  $q$  دقیقاً نقاطی روی خط هذلولوی در  $H$  است که مشمول در خط هذلولوی  $\{Re(z) = \frac{1}{2}\}$  است.

۴۶-۲. نقاط ثابت  $q(z) = \frac{2i\bar{z} - i}{2i\bar{z} - 2i}$  در  $\bar{C}$  جواب های  $q(z) = z$  در  $\bar{C}$  هستند که نقاطی در  $\bar{C}$  هستند که در

$$2i|z|^2 - 2i(z + \bar{z}) + i = 0.$$

صدق می‌کنند. با نوشتن  $z = x + iy$  مشاهده می‌شود که نقاط ثابت  $q$  در  $\bar{C}$  نقاطی روی

دایره اقلیدسی  $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + y^2 = 0$  قرار دارند که دایره اقلیدسی  $(x - \frac{2}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{9}$  است.

بنابراین نقاط ثابت  $q$  دقیقاً نقاطی روی خط هذلولوی در  $H$  هستند که مشمول در دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی  $\frac{2}{3}$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{1}{3}$  است.

۲-۴۷. دو حالت وجود دارد. فرض کنید  $n$  انعکاس نسبت به خط  $\{x=a\}$  است. با توجه به نتایج بخش ۲-۶، می توان نوشت  $n(z) = -\bar{z} + 2a$ . با محاسبه داریم:

$$p \circ n(z) = p(-\bar{z} + 2a) = -\bar{z} + 1 - 2a$$

در واقع،  $p \circ n$  هر نقطه مانند  $z$  در  $H$  که در شرط  $2\operatorname{Re}(z) = 1 - 2a$  صدق کند را ثابت نگه می دارد. بنابراین  $p \circ n$  انعکاس نسبت به خط هذلولوی  $\{x = \frac{1}{2}(1 - 2a)\}$  در  $H$  است.

حال فرض کنید  $n$  انعکاس نسبت به خطی مشمول در دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی  $c$  و شعاع اقلیدسی  $r$  است. با توجه به نتایج بخش ۲-۶، می توان نوشت  $n(z) = c + \frac{r^2}{\bar{z} - c}$ . با محاسبه داریم:

$$p \circ n(z) = c + 1 + \frac{r^2}{\bar{z} - c} = \frac{(c+1)\bar{z} + r^2 - c(c+1)}{\bar{z} - c}$$

با قرار دادن  $p \circ n(z) = z$ ، مشاهده می کنیم که نقاط ثابت  $p \circ n$  آن دسته از نقاط در  $\bar{C}$  است که در شرط زیر صدق می کنند:

$$x^2 - (2c+1)x + y^2 + c(c+1) - r^2 + iy = 0.$$

با مساوی قرار دادن قسمت های موهومی، نتیجه می گردد  $y = 0$ . به ویژه، هیچ نقطه

ثابتی در  $H$  ندارد و نقاط ثابت در  $\bar{R}$  نیز عبارتند از دو جواب  $\left(x - \frac{1}{2}(2c+1)\right)^2 = r^2 + \frac{1}{4}$

فصل سوم

۱-۳. چون فاصله اقلیدسی  $z$  تا  $S^1$  برابر است با  $1 - |z|$ ، بنابراین داریم  $\delta(z) = \frac{1}{1 - |z|}$ . حال  $C_r$  را با مسیر  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{D}$  با ضابطه  $f(t) = re^{it}$  پارامتری سازی می کنیم. بنابراین  $|f(t)| = r$  و  $|f'(t)| = |ire^{it}| = r$ . با محاسبه داریم:

$$\begin{aligned} \ell(C_r) &= \ell(f) = \int_r \frac{1}{1 - |z|} |dz| \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - |f(t)|} |f'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{1 - r} dt = \frac{2\pi r}{1 - r} \end{aligned}$$

۲-۳. روی بازه  $[0, 1]$  داریم  $|f(t)| = |t + ti| = \sqrt{2}t$  و  $|f'(t)| = \sqrt{2}$  در حالیکه روی بازه  $[-1, 0]$  داریم  $|f(t)| = |t - ti| = -\sqrt{2}t$  و  $|f'(t)| = \sqrt{2}$ . لذا خواهیم داشت:

$$\ell(f) = \int_f \frac{1}{1 + |z|^2} |dz| = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + 2t^2} \sqrt{2} dt = 2 \arctan(\sqrt{2})$$

۳-۳. منحنی  $A_\lambda$  را با مسیر  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $f(t) = t + i\lambda$  پارامتری سازی کنید. چون  $Im(f(t)) = \lambda$  و  $|f'(t)| = 1$ ، بنابراین داریم:

$$\ell(f) = \int_{-1}^1 \frac{c}{\lambda} dt = \frac{2c}{\lambda}$$

منحنی  $B_\lambda$  روی دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی در مبدأ و شعاع اقلیدسی  $\sqrt{1 + \lambda^2}$  قرار دارد. پاره خط اقلیدسی بین مبدأ و  $1 + i\lambda$  با قسمت مثبت محور حقیقی زاویه  $\theta$  می سازد

که در آن  $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$ . لذا می توانیم  $B_\lambda$  را با مسیر  $g: [\theta, \pi - \theta] \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $g(t) = \sqrt{1 + \lambda^2} e^{it}$  پارامتری سازی کنیم. چون  $Im(g(t)) = \sqrt{1 + \lambda^2} \sin t$  و  $|g'(t)| = \sqrt{1 + \lambda^2}$  داریم:

$$\ell(g) = \int_0^{\pi-\theta} c \csc(t) dt = c \ln \left[ \frac{\sqrt{1+\lambda^\pi+1}}{\sqrt{1+\lambda^\pi-1}} \right].$$

۴-۳. چون  $K'(z) = \frac{1}{z^2}$ ، شرط قرار داده شده روی  $\rho(z)$  عبارتست از:

$$0 = \mu_K(z) = \rho(z) - \rho(K(z)) |K'(z)| = \rho(z) - \rho\left(-\frac{1}{z}\right) \frac{1}{|z|^2}.$$

با جایگذاری  $\rho(z) = \frac{c}{\text{Im}(z)}$  و استفاده از اینکه داریم

$$\rho\left(-\frac{1}{z}\right) = \rho\left(\frac{-\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{c |z|^2}{\text{Im}(-\bar{z})} = \frac{c |z|^2}{\text{Im}(z)},$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$\rho(z) - \rho\left(-\frac{1}{z}\right) \frac{1}{|z|^2} = \frac{c}{\text{Im}(z)} - \frac{c |z|^2}{\text{Im}(z) |z|^2} = \frac{c}{\text{Im}(z)} - \frac{c}{\text{Im}(z)} = 0.$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

برای مسیر به‌طور قطعه‌ای  $C^1$  مانند  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $f(t) = x(t) + iy(t)$  داریم:

$$\text{Im}(B \circ f(t)) = y(t) = \text{Im}(f(t)) \quad \text{و} \quad |(B \circ f)'(t)| = |f'(t)|.$$

و لذا داریم:

$$\begin{aligned} \ell(B \circ f) &= \int_a^b \frac{c}{\text{Im}((B \circ f)(t))} |(B \circ f)'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{c}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt = \ell(f), \end{aligned}$$

همانطور که می‌خواستیم.

۵-۳. چون  $\sqrt{1+n^2 t^{2n-2}} = |1 + int^{n-1}|$  و  $|f'_n(t)| = |1 + int^{n-1}|$  و چون  $\text{Im}(f'_n(t)) = t^n + 1$  داریم:

$$\ell_H(f_n) = \int_{f_n} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} |dz| = \int \frac{\sqrt{1+n^2} t^{n-2}}{1+t^n} dt.$$

برای  $n=1$ ، نتیجه می‌شود که

$$\ell_H(f_1) = \int \frac{\sqrt{2}}{1+t} dt = \sqrt{2} \ln(2).$$

به ازای  $n \geq 2$ ، انتگرال بالا پیچیده‌تر از آن است که به طور صریح بیان شود.

۳-۶. هرگاه  $n \rightarrow \infty$ ، منحنی‌های  $\gamma_n = f_n([0,1])$  به نظر می‌رسد به منحنی  $\gamma$  میل می‌کند که اجتماع خط اقلیدسی افقی  $\ell_1$  که واصل  $i$  و  $1+i$  است با خط اقلیدسی عمودی  $\ell_2$  واصل  $1+i$  و  $1+2i$  است، می‌باشد. در نتیجه به نظر می‌رسد که هرگاه  $n \rightarrow \infty$  آنگاه  $\ell(\gamma_n) \rightarrow \ell(\gamma)$ .

با پارامتری‌سازی  $\ell_1$  با  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $f(t) = t+i$  می‌بینیم که:

$$\ell(\ell_1) = \ell(f) = 1$$

با پارامتری‌سازی  $\ell_2$  با  $g: [1,2] \rightarrow \mathbb{H}$  با ضابطه  $g(t) = 1+ti$  می‌بینیم که:

$$\ell_H(\ell_2) = \ell(g) = \ln(2)$$

بنابراین انتظار داریم که  $\ell_H(\gamma) = 1 + \ln(2)$

۳-۷. فرض کنیم  $G = \{p_b(z) = z+b \mid b \in \mathbb{H}\}$  زیرگروه  $Möb^+$  باشد که توسط تبدیلات موبیوس سهموی تولید شود که  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارند. توجه داشته باشید که هر عضو  $G$  یا سهموی است یا همانی. عنصر طول قوس  $|\lambda(z)| dz|$  روی  $\mathcal{C}$  تحت  $G$  ناورداست، بنابراین:

$$\int_f |\lambda(z)| dz| = \int_{p \circ f} |\lambda(z)| dz| = \int_f |\lambda(p(z))| |p'(z)| dz|$$

به ازای هر  $p \in G$  و هر مسیر به طور قطعه‌ای  $C^1$  مانند  $f: [a, b] \rightarrow C$  و لذا بنابه لم ۳-۱۰ می‌بینیم که:

$$\lambda(z) = \lambda(p(z)) |p'(z)|$$

به ازای هر  $z \in C$  و هر  $p \in G$ . اگر  $p(z) = p_b(z) = z + b$  به ازای یک  $b \in C$ ، آنگاه داریم:  $\lambda(p(z)) = \lambda(z + b)$  و  $|p'(z)| = 1$ . بنابراین اگر  $|\lambda(z)| dz$  تحت  $G$  ناوردا باشد، آنگاه به ازای هر  $z \in C$  و هر  $b \in C$  داریم  $\lambda(z + b) = \lambda(z)$ . با قرار دادن  $z = 0$ ، می‌بینیم که  $\lambda(0) = \lambda(b)$  به ازای هر  $b \in C$  و در نتیجه  $\lambda(z)$  ثابت است.

۳-۸ فرض کنیم  $H = \{m \in \text{Möb}^+ \mid m(\infty) = \infty\}$  زیرگروه  $\text{Möb}^+$  متشکل از تمام تبدیلات مویبوس است که  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارند. توجه داشته باشید که  $H$  شامل  $G$  است. چون ناوردایی  $|\lambda(z)| dz$  تحت  $H$  ناوردایی تحت  $G$  را نتیجه می‌دهد، بنا به تمرین ۳-۷ ملاحظه می‌کنیم که  $\lambda(z)$  ثابت است. همچنین  $|\lambda(z)| dz$  تحت زیرگروه  $\{m_a(z) = az \mid a \in C, a \neq 0\}$  از  $H$  نیز ناورداست، بنابراین:

$$\lambda(z) |dz| = \lambda(m_a(z)) |m'_a(z)| |dz| = |a| |\lambda(az)| |dz|$$

به ازای هر  $z \in C$  و هر  $a \in C$  که  $a \neq 0$ . مجدداً بنابه لم ۳-۱۰ به ازای هر  $z \in C$  و هر  $a \in C$  که  $a \neq 0$  داریم:  $\lambda(z) = a \lambda(az)$ . با قرار دادن  $z = 1$ ، می‌بینیم که  $\lambda(a) = \frac{1}{|a|} \lambda(1)$  در نتیجه به ازای هر  $a \in C$  که  $a \neq 0$  داریم  $\lambda(a) = \frac{1}{|a|} \lambda(1)$ . چون  $\lambda(z)$  ثابت است، با فرض  $a \rightarrow \infty$  می‌بینیم که  $\lambda(a) = 0$ .

۳-۹. چون  $g(-1) = g(1) = 2i$  و چون  $g$  به مینیموم خود در  $t = 0$  می‌رسد، تصویر  $[-1, 1]$  تحت  $g$  عبارت است از پاره خط هذلولوی واصل  $i$  به  $2i$ ، که دو بار طی شود.

طول هذلولوی  $g$  برابر است با

$$\ell_H(g) = \int_g \frac{1}{|Im(z)|} |dz| = \int_{-1}^1 \frac{|2t|}{t^2 + 1} dt = 2 \ln(2).$$



۳-۱۰. به ازای  $n \geq 2$  اعداد  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = 1$  را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_H(\lambda_k i, \lambda_{k+1} i) = \frac{1}{n} d_H(\lambda_i, \lambda_{i+1})$$

به ازای  $0 \leq k \leq n-1$ . چون

$$d_H(\lambda_k i, \lambda_{k+1} i) = \ln\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right),$$

مشاهده می‌کنیم که:

$$d_H(\lambda_i, \lambda_k i) = \ln\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) = \frac{k}{n} d_H(\lambda_i, \lambda_{i+1}).$$

بنابراین:

$$\ln(\lambda_k) = \frac{k}{n} \ln(\delta) + \ln(\lambda_i)$$

و لذا

$$\lambda_k = \lambda_i \times \delta^{\frac{k}{n}}$$

به طور مثال، برای  $n=2$ ، نتیجه می‌گیریم که نقطه وسط پاره‌خط هذلولوی واصل  $\lambda_i$  و  $\lambda_{i+1}$  عبارتست از  $\lambda_i \sqrt{\delta}$ .

۳-۱۱. بنابه تمرین ۱-۳ مرکز اقلیدسی شامل خط هذلولوی  $\ell$  که از  $z_1$  و  $z_2$  می‌گذرد عبارت است از:

$$c = \frac{1}{2} \left[ \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{\operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(z_2)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{x_1 - x_2} \right]$$

با قرار دادن شعاع اقلیدسی دایره اقلیدسی به صورت  $r = |z_1 - c|$ ، آنگاه نقاط انتهایی در بی‌نهایت  $\ell$  عبارتند از  $c+r$  و  $c-r$ .

قرار می‌دهیم  $m(z) = \frac{z - (c+r)}{z - (c-r)}$ . چون دترمینان  $m$  برابر است با  $c+r - (c-r) = 2r > 0$ . بنابراین  $m$  عضو  $Möb^+(\mathbb{H})$  است. با محاسبه می‌بینیم که

$$m(z_1) = \frac{z_1 - (c+r)}{z_1 - (c-r)} \quad \text{و} \quad m(z_2) = \frac{z_2 - (c+r)}{z_2 - (c-r)}$$

هر دوی آنها، با توجه به نحوه ساختن آنها، روی قسمت مثبت محور موهمومی قرار دارند.

بنابراین

$$d_H(z_1, z_2) = d_H(m(z_1), m(z_2)) = \left| \ln \left[ \frac{m(z_2)}{m(z_1)} \right] \right|$$

$$= \left| \ln \left[ \frac{(z_2 - (c+r))(z_1 - (c+r))}{(z_2 - (c-r))(z_1 - (c+r))} \right] \right|.$$

۱۲-۳. از نمادها و فرمول‌های تمرین ۳-۱۱ استفاده می‌کنیم. به ازای  $A = i$  و  $B = 1 + 2i$  داریم  $c = 2$  و  $r = \sqrt{5}$  و لذا

$$d_H(A, B) = \ln \left[ \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} \right].$$

به ازای  $A = i$  و  $C = -1 + 2i$  داریم  $c = -2$  و  $r = \sqrt{5}$  و لذا

$$d_H(A, C) = \ln \left[ \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} \right].$$

توجه داشته باشید که نتیجه بالا دور از انتظار نیست، چون  $A = K(A)$  و  $C = K(B)$  که  $k(z) = -\bar{z}$  عضو  $Möb(IH)$  است و در نتیجه فاصله هذلولوی را حفظ می‌کند.

به ازای  $A = i$  و  $D = vi$  داریم  $d_H(A, D) = \ln(V)$

به ازای  $B = 1 + 2i$  و  $C = -1 + 2i$  داریم  $c = 0$  و  $r = \sqrt{5}$  و لذا

$$d_H(B, C) = \ln \left[ \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} \right].$$

به ازای  $B = 1 + 2i$  و  $D = vi$  داریم  $c = -22$  و  $r = \sqrt{5}23$  و لذا

$$d_H(B, D) = \ln \left[ \frac{41 + \sqrt{5}23}{41 - \sqrt{5}23} \right]$$

چون  $C = K(B)$  و  $D = K(D)$  که  $K(z) = -\bar{z}$ ، بنابراین داریم

$$d_H(C, D) = d_H(K(B), K(D))$$

$$= d_H(B, D)$$

$$= \ln \left[ \frac{41 + \sqrt{533}}{41 - \sqrt{533}} \right].$$

۳-۱۳. اگر عضوی مانند  $q$  از  $Möb(\mathbb{H})$  موجود باشد بطوریکه  $(z_i, z_r)$  را به  $(w_i, w_r)$  ببرد، آنگاه

$$d_H(w_i, w_r) = d_H(q(z_i), q(z_r)) = d_H(z_i, z_r).$$

اگر از طرف دیگر داشته باشیم  $d_H(w_i, w_r) = d_H(z_i, z_r)$ ، آنگاه به روش زیر پیش می‌رویم. عضوی مانند  $m$  از  $Möb(\mathbb{H})$  موجود است که  $z_i$  را به  $i$  و  $z_r$  را به  $i e^{d_H(z_i, z_r)}$  ببرد. همچنین عضوی مانند  $n$  از  $Möb(\mathbb{H})$  موجود است بطوریکه  $w_i$  را به  $i$  و  $w_r$  را به  $e^{d_H(w_i, w_r)}$  می‌نگارد. توجه داشته باشید که  $m(z_i) = n(w_i) = i$ . چون  $d_H(w_i, w_r) = d_H(z_i, z_r)$  بنابراین  $d_H(w_i, w_r) = d_H(z_i, z_r)$  بنابراین  $q = n^{-1} \circ m$  زوج  $(z_i, z_r)$  را به زوج  $(w_i, w_r)$  می‌برد.

۳-۱۴. اگر  $f(x) = f(y)$ ، آنگاه  $d(f(x), f(y)) = 0$ . بنابراین  $d(x, y) = 0$  و لذا  $x = y$  بنا به شرط اول از سه شرط تعریف کننده متر. بنابراین  $f$  یک به یک است. برای نشان دادن اینکه  $f$  در  $x$  پیوسته است،  $\varepsilon > 0$  را در نظر بگیرید. باید  $\delta > 0$  را چنان بیابیم که  $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$ . اگر چه چون  $d(x, y) = d(f(x), f(y))$  می‌بینیم که اگر  $y \in U_\delta(x)$  آنگاه  $d(x, y) < \delta$  در نتیجه  $d(f(x), f(y)) < \delta$  و لذا  $f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$  بنابراین کافی است  $\delta = \varepsilon$  اختیار گردد.

۳-۱۵. به نتایج بخش ۱-۲ می‌دانیم که به ازای هر  $a \in \mathbb{C} - \{1, 0\}$ ،  $f(z) = az$  یک همسانریختی  $\mathbb{C}$  است. چون

$$|f(z) - f(w)| = |az - aw| = |a| |z - w|$$

مشاهده می‌کنیم که  $f$  یک طولپای است اگر و فقط اگر  $|a| = 1$ .

۱۶-۳. این تمرین از گزاره ۳-۲۰ نتیجه می‌شود. فرض کنید که  $\gamma$  روی پاره‌خط هذلولوی  $\ell_{xz}$  که واصل  $x$  به  $z$  است، قرار دارد. در اینصورت

$$d_H(x, y) + d_H(y, z) = d_H(x, z)$$

چون  $f$  یک طولپای هذلولوی است، فاصله هذلولوی را حفظ می‌کند، در نتیجه

$$d_H(f(x), f(y)) + d_H(f(y), f(z)) = d_H(f(x), f(z)).$$

به ویژه، روی پاره‌خط هذلولوی  $\ell_{f(x)f(z)}$  واصل  $f(x)$  به  $f(z)$  است، قرار دارد. در نتیجه

$$f(\ell_{xz}) = \ell_{f(x)f(z)}$$

چون یک خط هذلولوی را می‌توانیم به صورت اجتماع یک خانواده تو در تو پاره‌خط‌های هذلولوی بیان نمود، نتیجه می‌گیریم که طولپاهای هذلولوی خطوط هذلولوی را به خطوط هذلولوی تصویر می‌کنند.

۱۷-۳. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم  $\lambda < \mu$ . بنویسید  $\xi = \gamma$  و توجه داشته باشید که  $d_H(x, y) = |In(\lambda) - In(\xi)|$  به عنوان تابعی بر حسب  $\xi$ ،  $g(\xi) = In(\lambda) - In(\xi)$  اکیداً نزولی است، زیرا  $g'(\xi) = -\frac{1}{\xi}$ . بنابراین به ازای هر عدد  $c$ ، معادله  $g(\xi) = c$  حداکثر یک جواب دارد.

بنابراین به ازای هر  $c > 0$ ، معادله  $d_H(x, y) = c$  دارای دو جواب است. یکی  $y = e^{\ln(\lambda) - c} i$  و دیگری  $y = e^{\ln(\lambda) + c} i$  می‌باشند. به لحاظ هندسی، یکی بالای  $x = \lambda i$  روی  $I$  و دیگری زیر آن قرار دارد.

بطور مشابه، معادله  $d_H(y, z) = c'$  بر حسب  $\gamma$  دارای دو جواب است، یکی بالای  $z$  روی  $I$  و دیگری زیر آن. بنابراین فقط یک جواب برای دو معادله  $d_H(x, z) = c$  و  $d_H(y, z) = c'$  می‌تواند وجود داشته باشد.

۳-۱۸. اگر  $X$  و  $Y$  دارای بستر مجزا نباشند، آنگاه نقطه  $x$  در  $\bar{X} \cap \bar{Y}$  وجود دارد. چون  $x \in \bar{X}$ ، لذا دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  موجود است بطوریکه به  $x$  همگراست. چون  $d_H$  پیوسته است، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x_n, y_n) = d_H(x, x) = 0.$$

چون به ازای هر  $n$ ،  $d_H(X, Y) \leq d_H(x_n, y_n)$ ، بنابراین نشان داده‌ایم که  $d_H(X, Y) = 0$  حال فرض کنیم  $d_H(X, Y) = 0$  چون

$$d_H(X, Y) = \inf \{d_H(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

بنابراین دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  و دنباله  $\{y_n\}$  در  $Y$  موجودند بطوریکه  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(z_n, y_n) = 0$ .

چون  $X$  فشرده است، یک زیر دنباله  $\{x_{n_k}\}$  از دنباله  $\{x_n\}$  موجود است بطوریکه به نقطه‌ای مانند  $x$  در  $X$  همگراست. بنابراین  $x$  در  $\bar{X} \cap \bar{Y}$  واقع است، در نتیجه  $X$  و  $Y$  دارای بسترهای مجزا نمی‌باشند.

۳-۱۹. با به کار بردن عضوی از  $Möb(H)$  که  $\ell$  را به دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی  $0$  و شعاع اقلیدسی  $1$  کار را شروع می‌کنیم بطوریکه  $P = \lambda i$  به ازای یک  $\lambda > 1$  در این حالت، خط هذلولوی یکتای گذرنده از  $p$  که بر  $\ell$  عمود است، عبارتست از قسمت مثبت محور موهومی  $I$  که  $\ell$  را در  $i$  قطع می‌کند.

با استفاده از فرمول ارائه شده در بخش ۳-۵ برای  $d_H(z_1, z_2)$  و انجام محاسبات جبری زیاد، نتیجه می‌گیریم که فاصله هذلولوی عبارتست از:

$$d_H(e^{i\theta}, \lambda i) = \ln \left[ \cosh(\ln(\lambda)) \csc(\theta) + \sqrt{\cosh^2(\ln(\lambda)) \csc^2(\theta) - 1} \right]$$

مشتق این تابع به ازای  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$  منفی است، لذا  $d_H(e^{i\theta}, \lambda i)$  مقدار مینیموم یکتای خود

را در  $\theta = \frac{\pi}{4}$  اختیار می‌کند.

به ویژه توجه داشته باشید که این نتیجه مطلب بعدی را نشان می‌دهد. فرض کنیم  $l$  یک خط هذلولوی است، فرض کنیم  $p$  یک نقطه  $IH$  باشد که روی  $l$  قرار ندارد و فرض کنیم  $a$  نقطه‌ای روی  $l$  باشد که در شرط  $d_H(p, a) \leq d_H(p, l)$  صدق می‌کند. در نتیجه، برای نقطه  $z$  روی  $l$  فاصله هذلولوی  $d_H(p, z)$  بطور یکنواخت به عنوان تابعی بر حسب  $d_H(a, z)$  صعودی است.

۳-۲. فاصله نقطه  $\rho e^{i\varphi}$  تا قسمت مثبت محور موهومی  $I$  برابر است با طول هذلولوی پاره‌خط هذلولوی واصل  $\rho e^{i\varphi}$  به  $I$  است که  $I$  را بطور متعامد قطع می‌کند که در واقع پاره‌خط هذلولوی واصل  $\rho e^{i\varphi}$  به نام  $\rho i$  است.

برای محاسبه  $d_H(\rho e^{i\varphi}, \rho i)$  می‌توانیم برای مثال از تمرین ۳-۱۱ استفاده کنیم. خط هذلولوی گذرنده از  $\rho e^{i\varphi}$  و  $\rho i$  روی دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی مبدا و شعاع اقلیدسی  $\rho$  قرار دارد، بنابراین

$$d_H(\rho e^{i\varphi}, \rho i) = \left| \ln \left[ \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \right] \right|.$$

روی بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  داریم  $1 + \cos(\varphi) \geq 1$  و  $\sin(\varphi) \leq 1$ . بنابراین

$$d_H(\rho e^{i\varphi}, \rho i) = \ln \left[ \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right].$$

در نتیجه  $W_\varepsilon$  برابر است با مجموع نقاطی از  $IH$  که برای آنها  $d_H(\rho e^{i\varphi}, \rho i) = \varepsilon$  ثابت است، بنابراین  $\varphi$  ثابت است. این مجموع، شعاع اقلیدسی با نقطه شروع مبدا است که در آن  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  را در نظر می‌گیریم.

چون  $d_H(\rho e^{i\varphi}, \rho i) = d_H(\rho e^{i(\pi-\varphi)}, \rho i)$  می‌بینیم که  $W_\varepsilon$  دارای یک مولفه دومی است، یعنی، شعاع اقلیدسی با نقطه شروع مبدا است که با قسمت مثبت حقیقی زاویه  $\frac{\pi}{2} + \theta = \pi - \varphi$  می‌سازد.

۳-۲۱. با استفاده از به طور سه گانه متعدی عمل نمودن  $Möb(IH)$  روی  $\bar{IR}$  فرض می کنیم که نقاط انتهایی در بی نهایت  $l$  عبارتند از مبدا و  $\infty$  و اینکه نقاط انتهایی در بی نهایت  $l_1$  عبارتند از ۱ و  $\infty$ .

برای هر  $r > 1$ ، فرض کنید  $c_r$  خط هذلولوی مشمول در دایره اقلیدسی به مرکز اقلیدسی مبدا و شعاع اقلیدسی  $r$  و توجه داشته باشد که  $c_r$  خط هذلولوی یکتای گذرنده از  $r_1$  است که بر  $l$  عمود است. بنابراین اگر یک خط هذلولوی موجود باشد بطوریکه بر هر دوی  $l$  و  $l_1$  عمود باشد، آنگاه یکی از  $c_r$  ها خواهد بود.

نقطه تقاطع  $c_r$  با  $l_1$  را به صورت  $re^{i\theta}$  بنویسید و توجه داشته باشید که  $\cos \theta = \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r}$  به ازای هر  $r > 1$  ناصفر است. اگر چه،  $\theta$  زاویه بین  $l_1$  و  $c_r$  نیز می باشد که از  $l_1$  به  $c_r$  اندازه گرفته می شود و لذا هیچ یک از  $c_r$  ها  $l_1$  را به طور متعامد قطع نمی کند.

۳-۲۲. با مرتب کردن نقاط  $\bar{IR}$ ، یک عضو  $Möb(IH)$  موجود است بطوریکه  $z$  را به مبدا و  $z_1$  را به  $\infty$  می برد و  $w$  را به ۱ و  $w_1$  را به  $x > 1$  می برد.

با توجه به نتایج بخش ۲-۳ می دانیم که

$$[z, w; w_1, z_1] = [0, 1; x, \infty] = \frac{x-1}{-1} = 1-x,$$

و بنابراین

$$1 - [z, w; w_1, z_1] = x$$

با محاسبه می بینیم که

$$\tan h^y \left[ \frac{1}{2} d_H(l, l_1) \right] = \tan h^y \left[ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \right] \right] = \frac{1}{x},$$

همانطوریکه می خواستیم.

۳-۲۳. این سهم را با تعیین سهم خطوط هذلولوی گذرنده از  $p$  که  $l$  را قطع می‌کنند، بر حسب زاویه خطوط مماس بر آنها در  $p$  محاسبه می‌کنیم.

عضوی از  $Möb(IH)$  را به کار می‌بریم بطوریکه  $l$  روی دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی مبدأ و شعاع اقلیدسی ۱ قرار بگیرد و بطوریکه  $p = \lambda i$  به ازای یک  $\lambda > 1$  باشد. فرض کنید  $l$  شعاع هذلولوی از  $p$  به ۱ باشد و فرض کنید  $\varphi$  زاویه بین  $l$  و قسمت مثبت محور موهومی  $I$  است.

می‌توانیم  $\varphi$  را به ترتیب زیر محاسبه کنیم. توجه داشته باشید که  $l$  روی دایره اقلیدسی  $A$ ، با مرکز اقلیدسی  $c = \frac{1}{2}(1 - \lambda^2)$  و شعاع اقلیدسی  $r = |c - 1|$  قرار می‌گیرد و لذا معادله  $A$  در  $\mathbb{C}$  عبارتست از  $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ . با مشتق‌گیری ضمنی بر حسب  $x$  بدست می‌آید که:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + c}{y}$$

بنابراین در  $\lambda i = (0, \lambda)$  نتیجه می‌گیریم که شیب خط مماس بر  $A$  در  $(0, \lambda)$  برابر است با:

$$\frac{dy}{dx}(0, \lambda) = \frac{c}{\lambda} = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda}$$

بنابراین

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}$$

بنابراین سهم شعاع‌های هذلولوی با نقطه شروع  $P = \lambda i$  که  $l$  را قطع می‌کنند برابر است با:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}$$

## فصل چهارم

۴-۱. چون  $m^{-1}$  مجموعه  $ID$  را به  $IH$  می‌برد، داریم:

$$\ell_{ID}(m \circ f) = \ell_{IH}(m^{-1} \circ m \circ f) = \ell_{IH}(f)$$

همانطوریکه که می‌خواستیم.



۲-۴. پاره‌خط هذلولوی بین مبدأ و  $r$  را با مسیر  $f: [0, r] \rightarrow \mathbb{D}$  با ضابطه  $f(t) = t$  پارامتری‌سازی می‌کنیم. چون تصویر  $f$  پاره‌خط هذلولوی در  $\mathbb{D}$  واصل مبدأ و  $r$  می‌باشد، داریم  $d_{\mathbb{D}}(0, r) = \ell_{\mathbb{D}}(f)$ . هم اکنون محاسبه کرده‌ایم که:

$$d_{\mathbb{D}}(0, r) = \ell_{\mathbb{D}}(f) = \ln \left[ \frac{1+r}{1-r} \right].$$

با حل کردن نسبت به  $r$  به عنوان تابعی بر حسب  $d_{\mathbb{D}}(0, r)$  بدست می‌آوریم:

$$r = \tanh \left[ \frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(0, r) \right].$$

۳-۴. با به کار بردن عضوی از  $(\text{Möb}(\mathbb{H}))$ ، فرض می‌کنیم  $\ell_1$  روی محور حقیقی قرار می‌گیرد، بطوریکه نقطه برخورد  $\ell_1$  و  $\ell_2$  نقطه مبدأ باشد. نقاط انتهایی در بی‌نهایت  $\ell_1$  عبارتند از  $z_1 = 1$  و  $z_2 = -1$  و نقاط انتهایی در بی‌نهایت  $\ell_2$  عبارتند از  $w_1 = e^{i\theta}$  و  $w_2 = -e^{i\theta}$  که در آن  $\theta$  زاویه بین  $\ell_1$  و  $\ell_2$  است. بنابراین:

$$[z_1, w_1; z_2, w_2] = [1, e^{i\theta}; -1, -e^{i\theta}] = \frac{-\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} = -\cot^2 \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

و در نتیجه:

$$[z_1, w_1; z_2, w_2] \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = -1$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

۴-۴. چون شعاع هذلولوی  $S_s$  برابر است با  $S$ ، لذا بنا به تمرین ۲-۴ شعاع اقلیدسی  $S_s$  برابر است با  $r = \tanh \left( \frac{1}{2} s \right)$ . با  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{D}$  با ضابطه  $f(t) = r \exp(it)$  را پارامتری کنید. آنگاه داریم:

$$\ell(f) = \int_f \frac{2}{1-|z|^2} |dz| = \int_0^{2\pi} \frac{2}{1-r^2} r dt = \frac{2\pi r}{1-r^2} = 2\pi \sin h(s).$$

۵-۴. توجه داشته باشید که  $0 < r < s < 1$ ، بنابراین داریم:

$$d_{\mathbb{D}}(re^{i\theta}, se^{i\theta}) = d_{\mathbb{D}}(0, se^{i\theta}) - d_{\mathbb{D}}(0, re^{i\theta}) = \ln \left( \frac{(1+s)(1-r)}{(1-s)(1+r)} \right).$$

با نوشتن مرکز اقلیدسی  $A$  به صورت  $c = \frac{1}{5} - \frac{1}{4}i = \frac{\sqrt{41}}{20} e^{i\theta}$  و توجه کردن به  $|c| > \frac{1}{10}$  می‌بینیم که شعاع هذلولوی  $R = \{w \in \mathbb{D} \mid \arg(w) = \theta\}$  را در دو نقطه قطع می‌کند. چون انعکاس نسبت به  $R$ ،  $A$  را به خودش می‌برد و یک طولی‌ای هذلولوی است، می‌بینیم که مرکز هذلولوی  $A$  نیز روی  $R$  قرار دارد. دو نقطه اشتراک  $A$  با  $R$  عبارتند

$$\begin{aligned} & \text{از } \frac{\sqrt{41}-2}{20} e^{i\theta} \text{ و } \frac{\sqrt{41}+2}{20} e^{i\theta}. \text{ فاصله هذلولوی بین این دو نقطه عبارتست از:} \\ d_D\left(\frac{\sqrt{41}-2}{20} e^{i\theta}, \frac{\sqrt{41}+2}{20} e^{i\theta}\right) &= d_D\left(0, \frac{\sqrt{41}+2}{20} e^{i\theta}\right) - d_D\left(0, \frac{\sqrt{41}-2}{20} e^{i\theta}\right) \\ &= \ln \left( \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{41}+2}{20}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{41}-2}{20}\right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{41}+2}{20}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{41}-2}{20}\right)} \right) \\ &= \ln \left( \frac{22 + \sqrt{41}}{18 - \sqrt{41}} \cdot \frac{22 - \sqrt{41}}{18 + \sqrt{41}} \right) \\ &= \ln \left( \frac{443}{283} \right) = Z. \end{aligned}$$

بنابراین شعاع هذلولوی  $A$  برابر است با  $\frac{1}{2}Z$ .

مرکز هذلولوی  $A$  نقطه  $ae^{i\theta}$  است که برای آن داریم  $\frac{\sqrt{41}-2}{20} < \alpha < \frac{\sqrt{41}+2}{20}$  و

$$d_D\left(\frac{\sqrt{41}-2}{20} e^{i\theta}, ae^{i\theta}\right) = d_D\left(ae^{i\theta}, \frac{\sqrt{41}+2}{20} e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}Z$$

چون

$$d_D\left(\frac{\sqrt{41}-2}{20} e^{i\theta}, ae^{i\theta}\right) = \ln \left( \frac{1 + \alpha \cdot \frac{22 - \sqrt{41}}{18 + \sqrt{41}}}{1 - \alpha \cdot \frac{22 - \sqrt{41}}{18 + \sqrt{41}}} \right)$$

و

$$d_D\left(\frac{\sqrt{41}+2}{2}, e^{i\theta}, \alpha e^{i\theta}\right) = \ln\left(\frac{22+\sqrt{41}}{18-\sqrt{41}} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$$

لذا می توانیم قرار دهیم

$$\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{22-\sqrt{41}}{18+\sqrt{41}}\right) = \ln\left(\frac{22+\sqrt{41}}{18-\sqrt{41}} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) = K$$

و سپس بر حسب  $\alpha$  آن را حل کنیم و در نتیجه مرکز هذلولوی  $\alpha e^{i\theta}$  را به دست آوریم.

۶-۴. چون خطوط اقلیدسی عمودی در  $I\mathbb{H}$  هم خط اقلیدسی و هم خط هذلولوی می باشند، و چون انعکاس نسبت به خط  $\ell = \{Re(z) = 1\}$  را به خودش می برد، لذا مرکز هذلولوی  $A$  روی  $\ell$  قرار دارد. چون  $A \cap \ell = \{1+2i, 1+4i\}$  شعاع هذلولوی  $A$  برابر است با:

$$\frac{1}{4}d_{\mathbb{H}}(1+2i, 1+4i) = \frac{1}{4}d_{\mathbb{H}}(2i, 4i) = \frac{1}{4}\ln(2).$$

مرکز هذلولوی عبارت است از نقطه  $1+si$  که در آن داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(1+2i, 1+si) = d_{\mathbb{H}}(1+si, 1+4i).$$

و لذا  $s$  در شرط  $\ln\left(\frac{s}{4}\right) = \ln\left(\frac{4}{s}\right)$  صدق می کند. بنابراین  $s^2 = 8$  و لذا  $s = 2\sqrt{2}$ .

۷-۴. مانند راه حل تمرین ۶-۴ پیش می رویم. شعاع هذلولوی برابر است با:

$$R = \frac{1}{4}d_{\mathbb{H}}(a+(b+2)i, a+(b-r)i) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{b+r}{b-r}\right).$$

با یک محاسبه می بینیم که  $\tan h(R) = \frac{r}{b}$  و لذا  $\tan h(R) = r$ .

مرکز هذلولوی عبارتست از نقطه  $a + si$  که در آن داریم:

$$d_H(a + si, a + (b + \gamma)i) = d_H(a + si, a + (b - r)i).$$

بنابراین

$$\ln\left(\frac{b+r}{s}\right) = \ln\left(\frac{s}{b-r}\right)$$

در نتیجه  $s^\gamma = b^\gamma - r^\gamma$  یعنی مرکز هذلولوی عبارتست از  $a + i\sqrt{b^\gamma - r^\gamma}$ .

۸-۴ چون  $Im(\xi(z)) = Im(iz) = Re(z)$  و  $| \xi'(z) | = | i | = 1$  مشاهده می‌کنیم که

$$ds_X = \frac{1}{Im(z)} | \xi'(z) | | dz | = \frac{1}{Re(z)} | dt |.$$

۹-۴ ابتدا توجه کنید که تصویر خط اقلیدسی افقی  $\{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) = c\}$  در  $X$  تحت

$\xi$  عبارتست از شعاع اقلیدسی  $\{z \in \mathbb{H} \mid \arg(w) = c\}$  و لذا  $\xi$  به درستی یک همسان‌ریختی تحلیلی بین  $X$  و  $\mathbb{H}$  می‌باشد. فرض کنید  $z = x + iy$ . در این صورت

برگشت  $\frac{1}{Im(z)} | dz |$  تحت  $\xi$  عبارتست از:

$$ds_X = \frac{1}{Im(\xi(z))} | \xi'(z) | | dz | = \frac{1}{e^x \sin(y)} | e^z | | dz | = \frac{1}{\sin(y)} | dz |.$$

۱۰-۴. مبحث برگشت را برای توابع تحلیلی  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{H}$  را به یاد می‌آوریم. تابع

$\varphi_{a,r}: D_{a,r} \rightarrow D$  با ضابطه  $\varphi_{a,r}(z) = \frac{1}{r}(z - a)$  را در نظر بگیرید. با محاسبه طول هذلولوی یک مسیر  $f: [0, 1] \rightarrow D_{a,r}$  می‌بینیم که:

$$\begin{aligned} \int_f \lambda_{a,r}(z) | dz | &= \int_{\varphi_{a,r} \circ f} \frac{\gamma}{1 - |z|^\gamma} | dz | \\ &= \int \frac{\gamma}{1 - |\varphi_{a,r} \circ f(t)|^\gamma} | (\varphi_{a,r} \circ f)'(t) | dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{r^2}{1 - |\varphi_{a,r}(f(t))|^2} |\varphi'_{a,r}(f(t))| |f'(t)| dt \\
 &= \int_f \frac{r^2}{1 - |\varphi_{a,r}(z)|^2} |\varphi'_{a,r}(z)| |dz|
 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\lambda_{a,r}(z) = \frac{r^2}{1 - |\varphi_{a,r}(z)|^2} |\varphi'_{a,r}(z)| = \frac{r^2}{r^2 - |z - a|^2}.$$

توجه کنید که  $\lambda_{a,r}(z) \geq \lambda(z)$  اگر و فقط اگر

$$\frac{r^2}{r^2 - |z - a|^2} \geq \frac{r^2}{1 - |z|^2}$$

اگر و فقط اگر

$$r(1 - |z|^2) \geq r^2 - |z - a|^2$$

که با ضرب نمودن، مرتب کردن و مجدداً فاکتورگیری نمودن، اگر و فقط اگر

$$\left| z - \frac{a}{1-r} \right|^2 + \frac{r((1-r)^2 - |a|^2)}{(1-r)^2} = \left| z - \frac{a}{1-r} \right|^2 + \frac{r(1-r-|a|)(1-r+|a|)}{(1-r)^2} \geq 0.$$

چون  $0 < r < 1 - |a|$  می‌بینیم که  $1 - r - |a| > 0$  و اینکه  $1 - r + |a| > 0$ . چون نامعادلات بالا همواره برقرارند (و سمت چپ برابر صفر است اگر و فقط اگر  $z = a$  و  $r = 0$  باشد) مشاهده می‌کنیم که به ازای هر  $z \in D_{a,r}$  داریم  $\lambda_{a,r}(z) \geq \lambda(z)$ . همانطوری که می‌خواستیم.

۴-۱۱. با به کار بردن استدلال مشابه استدلال به کار رفته در مورد همسازنریختی‌های

تحلیلی، برگشت  $|dz| = \frac{r^2}{1 - |z|^2} dz$  تحت  $f(z) = z^r$  عبارت است از:

$$\frac{r^2 |f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} |dz| = \frac{r^2 |z|}{1 - |z|^2} |dz|.$$

سپس:

$$\frac{2|z|}{1-|z|^2} \leq \frac{2}{1-|z|^2}$$

اگر و فقط اگر

$$2|z|(1-|z|^2) \leq 1-|z|^2$$

که برقرار است اگر و فقط اگر

$$0 \leq 1-|z|^2 - 2|z|(1-|z|^2) = (1+|z|^2)(1-|z|^2) - 2|z|(1-|z|^2) = (1-|z|^2)(1-|z|^2),$$

و این نامساوی همواره برای  $|z| < 1$  برقرار است.

۴-۱۳. با محاسبه می‌بینیم که انحناء برابر است با ۱-.

۴-۱۴. با محاسبه می‌بینیم که انحنا در  $z \in \mathbb{C}$  برابر است با ۱۶.

## فصل پنجم

۵-۱. فرض کنید  $z$  و  $z_1$  دو نقطه از  $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$  باشند و  $\ell_{z, z_1}$  پاره‌خط هذلولوی واصل  $z$  به  $z_1$  است. چون هر یک از  $X_\alpha$  ها محدب است، می‌بینیم که  $\ell_{z, z_1}$  مشمول در هر یک از  $X_\alpha$  ها می‌باشند، و در نتیجه  $\ell_{z, z_1}$  در اشتراک آنها یعنی  $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$  قرار دارد.

۵-۲. شعاع اقلیدسی  $D_s$  برابر است با  $r = \tan h\left(\frac{1}{4}s\right)$ . برای هر  $\theta$ ، فرض کنید  $\ell_\theta$  خط هذلولوی مشمول در دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی واقع بر خط اقلیدسی  $\{te^{i\theta} \mid t > 0\}$  است که از نقطه  $re^{i\theta}$  می‌گذرد. فرض کنید  $H_\theta$  نیم‌صفحه بسته مشخص شده با  $\ell_\theta$  است که شامل مبدأ است. چون می‌توانیم  $D_s$  را به عنوان اشتراک  $D_s = \bigcap_{\theta} H_\theta$  بیان کنیم و چون هر یک از  $H_\theta$  ها محدب است می‌بینیم که  $D_s$  نیز محدب است.

چون هر دیسک هذلولوی باز را می‌توان با یک عضوی از  $Möb(D)$  به یک  $D_s$  به ازای یک  $s > 0$  تصویر نمود، و چون  $Möb(D)$  تحذب را حفظ می‌کند، می‌بینیم که تمام دیسک‌های هذلولوی باز محدب می‌باشند.

با جایگزینی یک دیسک هذلولوی بسته و نیم صفحه‌های بسته  $H_\theta$  در بحث بالا، می‌بینیم که تمام دیسک‌های هذلولوی بسته نیز محدب می‌باشند.

۳-۵. بنا به تعریف،  $X \subset Conv(X)$ . بر عکس، چون  $X$  در صفحه هذلولوی، محدب و شامل  $X$  است، و لذا  $Conv(X)$  اشتراک  $X$ ، با مجموعه‌هایی دیگر است، بنابراین  $X \subset Conv(X)$  در نتیجه  $X = Conv(X)$ .

۴-۵. فرض کنید  $l_1$  و  $l_2$  دو خط هذلولوی باشند و فرض کنید نقاط انتهایی  $l_k$  عبارت باشند از  $x_k$  و  $y_k$ . قرار دهید  $Z = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ . در حالتیکه در آن  $x_1$  و  $y_1$  و  $x_2$  و  $y_2$  نقاط متمایزی هستند، پوشش محدب  $Conv(l_1 \cup l_2)$  از اجتماع  $l_1 \cup l_2$  مساوی است با پوشش محدب  $Conv(Z)$  از  $Z$ . این ناحیه‌ای در صفحه هذلولوی است که با چهار تا از شش خط هذلولوی مشخص شده با این چهار نقطه کراندار شده است.

توجه کنید که در حالت تباهیده، یعنی  $l_1$  و  $l_2$  دارای یک نقطه انتهایی در بی‌نهایت مشترک می‌باشند، پوشش محدب  $Conv(l_1 \cup l_2)$  مساوی است با ناحیه‌ای که با سه خط مشخص شده با این سه نقطه در  $Z$  کراندار شده است.

۵-۵. فرض کنید  $I_{xy}$  پاره‌خط هذلولوی بسته واصل  $x$  به  $y$  باشد و فرض کنید  $l$  خط هذلولوی شامل  $l_{xy}$  است. می‌توانیم  $l$  را به عنوان اشتراک  $l = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$  از گزرایه  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$  (دو) نیم‌صفحه‌های هذلولوی بسته نوشت.

حال فرض کنید  $l_x$  یکی از خطوط هذلولوی گذرنده از  $x$  به غیر از  $l$  است و فرض کنید  $H_x$  نیم صفحه بسته مشخص شده با  $l_x$  باشد که شامل  $l_{xy}$  است. به طور مشابه،  $l_y$  را خطی هذلولوی به غیر از  $l$  در نظر بگیرید، که از  $y$  می‌گذرد و فرض کنید  $H_y$  نیم صفحه بسته مشخص شده با  $l_y$  باشد که شامل  $l_{xy}$  است. در این صورت، می‌توانیم  $l_{xy}$  را به عنوان اشتراک زیر از نیم‌صفحه‌های بسته بنویسیم:

$$\ell_{xy} = H_x \cap H_y \cap \ell = H_x \cap H_y \cap \left( \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha \right)$$

چون هر نیم صفحه بسته قابل بیان بر حسب اشتراک گردایه‌ای از نیم صفحه‌های باز است،  $\ell_{xy}$  نیز قابل بیان بر حسب اشتراک گردایه‌ای از نیم صفحه‌های باز است.

حال فرض کنید شعاع هذلولوی مشخص شده با  $x \in \mathbb{H}$  و  $z \in \overline{\mathbb{R}}$  است. فرض کنید  $\ell$  و  $\ell_x$  مانند بالا تعریف شده‌اند و توجه کنید که

$$\ell_{xz} = H_x \cap \ell = H_x \cap \left( \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha \right).$$

مجدداً چون هر نیم صفحه بسته قابل بیان بر حسب اشتراک یک خانوار از نیم صفحه‌های باز است، می‌توانیم  $\ell_{xy}$  را به عنوان اشتراک یک خانوار از نیم صفحه‌های باز بیان کنیم.

۵-۶. فرض کنید  $H = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$  یک خانواده ناشمارا از نیم صفحه‌ها می‌باشد. فرض کنید  $\ell_\alpha$  خط مرزی  $H_\alpha$  است. برای اینکه در یک مثال عینی کار کرده باشیم روی نیم صفحه بالایی  $\mathbb{H}$  کار می‌کنیم. فرض کنید  $\mathcal{Q}^+ = \mathcal{Q} \cap (0, \infty)$  نشان‌دهنده مجموعه اعداد گویای مثبت است.

به ازای هر  $q \in \mathcal{Q}^+$  دیسک هذلولوی  $U_q(i)$  با مرکز  $i$  و شعاع هذلولوی  $q$  را در نظر بگیرید. چون اجتماع  $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}^+} U_q(i)$  برابر  $\mathbb{H}$  می‌باشد، لذا وجود دارد  $q \in \mathcal{Q}^+$  بطوریکه  $U = U_q(i)$  تعداد نامتناهی خط مرزی  $\ell_\alpha$  را قطع می‌کند.

به ویژه، یک دنباله  $\{\ell_{\alpha_n}\}$  از خطوط مرزی وجود دارد بطوریکه هر یک از آن  $U$  را قطع می‌کند. به ازای هر  $n$ ، یک نقطه  $x_n \in U \cap \ell_{\alpha_n}$  را انتخاب کنید. چون بستار  $U$  یعنی  $\overline{U}$  بسته و کراندار است، لذا فشرده است، بنابراین یک زیر دنباله از  $\{x_n\}$  وجود دارد که به نقطه‌ای مانند  $x \in U$  همگراست. برای پرهیز از اندیس گذاری پیچیده، این زیر دنباله را نیز با  $\{x_n\}$  نمایش می‌دهیم.

بنا به تعریف همگرایی، به ازای هر  $\varepsilon > 0$  دیسک هذلولوی  $U_\varepsilon(x)$  شامل تعداد نامتناهی از  $x_n$  ها می‌باشد. بنابراین به ازای هر  $\varepsilon > 0$  دیسک هذلولوی  $U_\varepsilon(x)$  تعداد متناهی خط مرزی  $\ell_\alpha$  را قطع می‌کند، لذا  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$  موضعاً متناهی نیست.



۷-۵. فرض کنید  $P$  یک چندضلعی هذلولوی است و فرض کنید  $P$  شامل سه نقطه  $x, y, z$  است که روی یک خط هذلولوی قرار ندارند. به ازای دو نقطه مفروض  $p$  و  $q$  در صفحه هذلولوی، فرض کنید  $l_{pq}$  پاره‌خط هذلولوی بسته واصل آنها است. در این صورت مجموعه

$$X = \cup \{l_{xp} \mid p \in l_{xy}\}$$

دارای درون ناتهی است.

در واقع، فرض کنید  $p$  نقطه وسط  $l_{xy}$ ، و  $q$  نقطه وسط  $l_{xp}$  است. آنگاه سه عدد  $d_H(q, l_{yz})$ ،  $d_H(q, l_{xz})$ ،  $d_H(q, l_{xy})$  مثبت هستند. اگر قرار دهیم:

$$\varepsilon = \min\{d_H(q, l_{xy}), d_H(q, l_{xz}), d_H(q, l_{yz})\}$$

آنگاه  $U_\varepsilon(q)$  مشمول در  $X$  است.

بنابراین، تنها چندضلعی هذلولوی تباهیده عبارتند از زیرمجموعه‌های محدب بسته از خطوط هذلولوی که دقیقاً عبارتند از خطوط هذلولوی، شعاع‌های بسته، پاره‌خط‌های هذلولوی بسته و نقاط.

۸-۵ چون  $P$  دارای تعداد متناهی ضلع است و چون هر ضلع دقیقاً دارای دو رأس می‌باشد، زیرا یک پاره‌خط هذلولوی بسته است، می‌بینیم که  $P$  دقیقاً به تعداد ضلع‌هایش دارای رأس می‌باشد. فرض کنید  $v_1, \dots, v_n$  رئوس  $P$  می‌باشند و  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

بنا به تعریف،  $P$  یک مجموعه محدب شامل  $V$  است، لذا  $Conv(V) \subset P$ .

برعکس، توجه داشته باشید که چون  $Conv(V)$  شامل رئوس  $P$  می‌باشد، لذا  $Conv(V)$  شامل تمام اضلاع  $P$  نیز می‌باشد، زیرا هر ضلع  $P$  یک پاره‌خط هذلولوی بسته واصل دو رأس  $P$  است. یعنی نشان داده‌ایم که  $\partial P$  مشمول در  $Conv(V)$  است.

حال فرض کنید  $x$  یک نقطه دلخواه درون  $P$  است و فرض کنید  $l$  یک خط هذلولوی دلخواه گذرنده از  $x$  باشد. اشتراک  $P$  با خط  $l$  عبارت است از پاره‌خط هذلولوی  $z$  در  $l$  بطوریکه نقاط انتهایی آن در  $\partial P$  قرار دارند.

بنابراین، چون  $Conv(V)$  محدب و شامل نقاط انتهایی  $l$  می‌باشد، لذا  $Conv(V)$  شامل  $l$  است. به‌ویژه،  $x$  نقطه‌ای در  $Conv(V)$  است، در نتیجه  $P \subset Conv(V)$ . بنابراین  $Conv(V) = P$ .

۹-۵. برای راحتی در نمادگذاری، فرض کنید  $l_{jk}$  خط هذلولوی گذرنده از  $x_k$  و  $x_j$  است. توجه کنید که بدون توجه به مقدار  $s$  خطوط هذلولوی  $l_{12}$  و  $l_{34}$  موازی هستند، زیرا آنها مشمول در خطوط اقلیدسی موازی می‌باشند.

خط هذلولوی  $l_{13}$  مشمول در دایره اقلیدسی  $C_{13}$  با مرکز اقلیدسی مبدأ و شعاع اقلیدسی  $\sqrt{2}$  است، در حالیکه خط هذلولوی  $l_{24}$  مشمول در دایره اقلیدسی  $C_{24}$  با مرکز اقلیدسی  $1 - \frac{1}{4}s^2$  و شعاع  $\frac{1}{4}\sqrt{s^2 + 64}$  است. توجه کنید که  $C_{13}$  و  $C_{24}$  همدیگر را در یک نقطه از  $\mathbb{R}^2$  قطع می‌کنند، دقیقاً وقتی که  $\pm\sqrt{2}$  روی  $C_{24}$  واقع باشد.

با یک محاسبه، می‌بینیم که  $-\sqrt{2}$  روی  $C_{24}$  واقع است، هرگاه

$$\left| \left( \frac{1}{4}s^2 - 1 \right) + \sqrt{2} \right| = \frac{1}{4}\sqrt{s^2 + 64}$$

یعنی

$$s = \sqrt{10 + 6\sqrt{2}}$$

بطور مشابه،  $\sqrt{2}$  روی  $C_{24}$  واقع است، هرگاه

$$\left| \left( \frac{1}{4}s^2 - 1 \right) - \sqrt{2} \right| = \frac{1}{4}\sqrt{s^2 + 64},$$

یعنی

$$s = \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$$

بنابراین  $Q_s$  یک متوازی‌اضلاع هذلولوی است اگر و فقط اگر

$$\sqrt{10 - 6\sqrt{2}} \leq s \leq \sqrt{10 + 6\sqrt{2}}$$

۵-۱۱. ابتدا توجه داریم که هر مثلث هذلولوی مشمول در یک مثلث هذلولوی ایده‌آل است. زیرا برای دیدن این مطلب، فرض کنید  $T$  یک مثلث هذلولوی با رئوس  $v_1, v_2$  و  $v_3$  است و فرض کنید  $x$  یک نقطه درونی  $T$  است.

فرض کنید  $y_k$  نقطه انتهایی در بی‌نهایت شعاع هذلولوی مشخص شده با  $x$  و  $v_k$  باشد و فرض کنید  $P$  مثلث ایده‌آلی با رئوس ایده‌آل  $y_1, y_2$  و  $y_3$  است. بنابراین  $P$  شامل  $T$  است. لذا کافی است حالتی را در نظر بگیریم که  $T$  یک مثلث ایده‌آل است.

برای ساده‌تر نمودن محاسبات، فرض کنیم  $m$  عضوی از  $Möb(H)$  است که  $T$  را به یک مثلث ایده‌آل به رئوس  $y_1 = 0$  و  $y_2 = 1$  و  $y_3 = \infty$  ببرد. فرض کنید  $l_{jk}$  خط هذلولوی مشخص شده با  $y_j$  و  $y_k$  است.

به ازای هر  $r > 0$  فرض کنید  $C_r$  دایره اقلیدسی با مرکز اقلیدسی مبدأ و شعاع اقلیدسی  $r$  است. توجه داشته باشید که  $C_r$  خط  $l_{12}$  را در نقطه  $re^{i\theta}$  قطع می‌کند که در آن  $r = \cos(\theta)$ . (این رابطه بین  $r$  و  $\theta$  با توجه به اینکه  $re^{i\theta}$  همچنین روی دایره اقلیدسی

$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  که شامل خط هذلولوی  $l_{12}$  است، قرار دارد بدست می‌آید.) به ازای هر  $ri$  روی  $l_{12}$  فاصله هذلولوی بین  $ri$  و  $l_{12}$  برابر است با فاصله هذلولوی بین  $ri$  و  $re^{i\theta}$ .

با توجه به حل تمرین ۳-۲۰، فاصله هذلولوی بین  $ri$  و  $re^{i\theta}$  برابر است با

$$d_H(re^{i\theta}, ri) = \ln \left[ \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right]$$

با توجه به تقارن، فقط نیاز داریم حالتی را که  $\theta$  در بازه  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  قرار دارد، در نظر بگیریم.

روی  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  تابع  $\ln \left[ \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right]$  نزولی است و در نتیجه  $d_H(re^{i\theta}, ri)$  در  $\theta = \frac{\pi}{4}$  به ماکزیمم خود می‌رسد. بنابراین

$$d_H(x, l_{12}) \leq \ln \left[ \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right] = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

۱۲-۵. فرض کنید  $z$  مرکز هذلولوی  $A$  است و  $H$  گروه تمام تبدیلات موبیوس بیضوی در  $Möb^+(\mathbb{D})$  است که  $z$  را ثابت نگه می‌دارند و توجه داشته باشید که به ازای هر عضو  $h \in H$  داریم  $h(A) = A$ . بعلاوه توجه داشته باشید که  $H$  بطور متعدی روی  $\mathcal{S}^1$  عمل می‌کند. (درستی هر دوی این ادعاها به راحتی با در نظر گرفتن  $A$  به مرکز اقلیدسی مبدأ به اثبات می‌رسد که در این حالت  $H$  گروه تمام درونهای ثابت نگه‌دارنده مبدأ می‌شود.) همچنین توجه داشته باشید که به ازای هر  $h \in H$ ،  $h(T)$  نیز یک مثلث هذلولوی ایده‌آل است که بر  $h(A) = A$  محیط است. (اگر  $\ell$  یک خط هذلولوی یعنی یک ضلع  $T$  باشد، آنگاه چون  $T$  محیط بر  $A$  است،  $\ell$  بر  $A$  در نقطه‌ای مانند  $\xi$  مماس است و لذا  $h(\ell)$  یک خط هذلولوی است که بر  $h(A) = A$  در نقطه  $h(\xi)$  مماس است.) فرض کنید  $w$  یکی از رئوس  $T$  است. چون  $H$  بطور متعدی روی  $\mathcal{S}^1$  عمل می‌کند، اگر  $z \in \mathcal{S}^1$  مفروض باشد، آنگاه  $h_z \in H$  موجود است بطوریکه  $h_z(w) = z$  و لذا  $h_z(T)$  یک مثلث هذلولوی ایده‌آل است که بر  $A$  محیط است و یک رأس آن  $z$  است. همانطوریکه می‌خواستیم.

۱۳-۵. مساحت هذلولوی  $X_s$  برابر است با

$$\text{area}_{\mathbb{H}}(X_s) = \int_{X_s} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \frac{2}{s}.$$

۱۴-۵. با بازنویسی بر حسب  $x$  و  $y$ ، مشاهده می‌کنیم که  $B(x, y) = (-x, y)$ . بنابراین

$$DB(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\det(DB(x, y)) = -1.$$

چون

$$h \circ B(x, y) = \frac{1}{y^2}$$

با قضیه تغییر متغیر نتیجه می‌شود که:

$$\text{area}_{\mathbb{H}}(B(X)) = \int_{B(X)} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = \text{area}_{\mathbb{H}}(X)$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

۱۵-۵. با بازنویسی بر حسب  $x$  و  $y$ ، مشاهده می‌کنیم که  $f(x, y) = (x + y, y)$ . بنابراین

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

در نتیجه

$$Df(x, y) = 1.$$

چون

$$h \circ f(x, y) = \frac{1}{y^2}$$

قضیه تغییر متغیر نتیجه می‌دهد که

$$\text{area}_{\mathbb{H}}(f(X)) = \int_{f(X)} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_X \frac{1}{y^2} dx dy = \text{area}_{\mathbb{H}}(X).$$

این مطلب اثبات این را که  $f$  مساحت هذلولوی را حفظ می‌کند، کامل می‌کند.

برای دیدن اینکه  $f$  عضوی از  $Möb(\mathbb{H})$  نیست، توجه کنید که  $f$  خط اقلیدسی  $\{Re(z) = 1\}$  که شامل یک خط هذلولوی است را به خط اقلیدسی  $\{Re(z) = 1 + Im(z)\}$  می‌برد که  $\mathbb{R}$  را بطور متعامد قطع نمی‌کند و در نتیجه شامل هیچ خط هذلولوی نیست.

۱۶-۵. با استفاده از قضیه تغییر متغیر و یک بازنویسی مناسب لم ۳-۱۰، کافی است معادله زیر را در نظر بگیریم:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{g(x, y)^2} \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|$$

ابتدا توجه کنید که چون سمت چپ این معادله هیچگاه روی  $\mathbb{H}$  صفر نمی‌شود (زیرا برای هر نقطه  $(x, y) \in \mathbb{H}$ ،  $y > 0$  است) و اینکه  $g(x, y)$  نیز هرگز صفر نمی‌گردد (به

دلیل مشابه، بنابراین  $\left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|$  نیز هرگز صفر نمی‌گردد. بنابراین دو حالت برای بررسی وجود دارد.

ابتدا فرض کنیم روی  $H$ ،  $\frac{\partial g}{\partial y} > 0$ . معادله بالا تبدیل می‌شود به:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{g(x, y)^2} \frac{\partial g}{\partial y}$$

و با انتگرال‌گیری نسبت به  $y$  داریم:

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{g(x, y)} + f(x)$$

که در آن  $f(x)$  تابعی بر حسب  $x$  است. با حل آن نسبت به  $g(x, y)$  می‌بینیم که:

$$g(x, y) = \frac{y}{1 + yf(x)}.$$

حال ببینیم چه شرایطی روی  $f(x)$  اعمال می‌شود: چون هر دوی  $y > 0$  و  $g(x, y) > 0$ ،

ملاحظه می‌کنیم که  $1 + yf(x) > 0$  به ازای هر  $(x, y) \in IH$  و لذا  $-\frac{1}{y} > -f(x)$  به ازای هر

$(x, y) \in IR$ . یعنی به ازای هر  $x \in IR$  و هر  $y > 0$ ،  $f(x) > -\frac{1}{y}$  و در نتیجه  $f(x) \geq 0$  به

ازای هر  $x \in IR$ . به عنوان یک مثال خاص  $f(x) = x^2$  شرایط مذکور را دارد.

حال فرض کنیم روی  $IH$ ،  $\left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| < 0$ . معادله بالا تبدیل می‌شود به:

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{g(x, y)^2} \frac{\partial g}{\partial y}$$

و با انتگرال‌گیری نسبت به  $y$  می‌بینیم که:

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{g(x, y)} + f(x)$$

که در آن  $f(x)$  تابعی بر حسب  $x$  است. با حل آن نسبت به  $g(x, y)$  ملاحظه می‌کنیم که

$$g(x, y) = -\frac{y}{1 + yf(x)}.$$

حال ببینیم که چه شرایطی روی  $f(x)$  اعمال می‌شود: چون هر دوی  $y > 0$  و

$g(x, y) > 0$  به ازای هر  $(x, y) \in IH$  داریم  $1 + yf(x) < 0$  و لذا به ازای هر  $(x, y) \in IH$

$-\frac{1}{y} < -f(x)$ . یعنی به ازای هر  $x \in IR$  و هر  $y > 0$  داریم  $f(x) < -\frac{1}{y}$  و لذا به ازای هر

$x \in IR$  و  $f(x) \leq 0$ . به عنوان یک مثال خاص  $f(x) = -x^2$  شرایط مذکور را دارد.

به لحاظ هندسی، این تابع هر خط اقلیدسی (یا هذلولوی) عمودی در  $IH$  را حفظ می‌کند و چنین خطوطی را بطور عمودی به اندازه  $g(x)$  منتقل می‌کند.

۱۷-۵. شعاع هذلولوی  $D_s$  یعنی  $s$  به شعاع اقلیدسی آن  $R$  با رابطه  $R = \tan h\left(\frac{1}{\rho}s\right)$  مرتبط است و مساحت هذلولوی  $D_s$  عبارت است از

$$\begin{aligned} \text{area}_{\mathcal{D}}(D_s) &= \int_{D_s} \frac{\rho r}{(1-r^2)^2} dr d\theta \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho r}{(1-r^2)^2} dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R \frac{\rho r}{(1-r^2)^2} dr d\theta = \frac{2\pi R^2}{1-R^2} = 2\pi \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}s\right). \end{aligned}$$

۱۸-۵. چون  $\ell_{\mathcal{D}}(S_s) = 2\pi \sinh(s)$  و  $\text{area}_{\mathcal{D}}(D_s) = 2\pi \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}s\right)$  داریم:

$$q_{\mathcal{D}}(s) = \frac{\ell_{\mathcal{D}}(S_s)}{\text{area}_{\mathcal{D}}(D_s)} = \frac{2\pi \sinh(s)}{2\pi \sinh^2\left(\frac{1}{\rho}s\right)} = \coth\left(\frac{1}{\rho}s\right).$$

به ویژه، توجه کنید که هرگاه  $s \rightarrow \infty$ ، آنگاه  $q_{\mathcal{D}}(s) \rightarrow 1$  و هرگاه  $s \rightarrow 0$ ، آنگاه  $q_{\mathcal{D}}(s) \rightarrow \infty$ .

تناظر کمیت اقلیدسی  $q_{\mathcal{C}}(r) = \frac{\rho}{r}$  بطور بسیار متفاوتی رفتار می‌کند، هرگاه دایره اقلیدسی و دیسک اقلیدسی بزرگ می‌شوند یعنی هرگاه  $r \rightarrow \infty$ ،  $q_{\mathcal{C}}(r) \rightarrow 0$  و در حالیکه مجدداً داریم هرگاه  $r \rightarrow 0$ ، آنگاه  $q_{\mathcal{C}}(r) \rightarrow \infty$ .

۱۹-۵. با این نکته شروع می‌کنیم که  $C_1$  و  $C_r$  دایره اقلیدسی متقاطع هستند، که در آن  $C_k$  دارای مرکز اقلیدسی  $c_k$  و شعاع اقلیدسی  $r_k$  می‌باشد، سپس با استفاده از قانون کسینوس‌ها، زاویه بین  $C_1$  و  $C_r$  یعنی  $\theta$  در شرط زیر صدق می‌کند:

$$|c_1 - c_r|^2 = r_1^2 + r_r^2 - 2r_1r_r \cos(\theta)$$

و در نتیجه

$$\cos(\theta) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - |c_1 - c_2|^2}{2r_1 r_2}$$

قرار می‌دهیم  $v_1 = i$ ،  $v_2 = 2 + 2i$  و  $v_3 = 2 + i$ . فرض کنید  $s_{jk}$  ضلعی از  $P$  باشد که  $v_j$  را به  $v_k$  وصل می‌کند و فرض کنید  $l_{jk}$  خط هذلولوی باشد که شامل  $s_{jk}$  است و فرض کنید  $C_{jk}$  دایره اقلیدسی شامل  $l_{jk}$  است. با محاسبه می‌بینیم که  $C_{12}$  دارای مرکز اقلیدسی  $\frac{7}{4}$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{\sqrt{65}}{4}$  می‌باشد و اینکه  $C_{23}$  دارای مرکز اقلیدسی  $\frac{9}{4}$  و شعاع اقلیدسی  $\frac{\sqrt{65}}{4}$  است و اینکه  $C_{13}$  دارای مرکز اقلیدسی  $2$  و شعاع اقلیدسی  $\sqrt{5}$  است.

زاویه بین  $C_{12}$  و  $C_{13}$  یعنی  $\alpha$  عبارت است از:

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{65}{16} + 5 - \left| \frac{7}{4} - 2 \right|^2}{2 \frac{\sqrt{65}}{4} \sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{325}},$$

یعنی

$$\alpha \approx 0.555.$$

زاویه بین  $C_{12}$  و  $C_{23}$  یعنی  $\beta$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\cos(\beta) = \frac{\frac{65}{16} + 5 - \left| \frac{9}{4} - 2 \right|^2}{2 \frac{\sqrt{65}}{4} \sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{325}},$$

یعنی

$$\beta \approx 0.555.$$



زاویه بین  $C_{12}$  و  $C_{13}$  یعنی  $\gamma$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\cos(\gamma) = \frac{\frac{65}{16} + \frac{65}{16} - \left| \frac{\sqrt{65}}{4} - \frac{9}{4} \right|^2}{\frac{\sqrt{65}}{4} \frac{\sqrt{65}}{4}} = \frac{126}{130}$$

یعنی:

$$\gamma \approx 0.2487.$$

بنابراین با توجه به قضیه ۱۶-۵ داریم

$$\text{area}_{\mathbb{H}}(P) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \approx 2.7819.$$

۲۰-۵. فرض کنید  $C$  دایره اقلیدسی  $\mathcal{C}$  شامل خط هذلولوی  $\ell$  گذرنده از  $rp_1 = r$  و  $rp_2 = r \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$  است. مرکز اقلیدسی  $C$  به فرم  $s \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)$  به ازای یک  $s > 1$  است. چون  $C$  باید  $\mathcal{S}^1$  را بطور متعامد قطع کند، از تمرین ۱-۲ نتیجه می‌گیریم که شعاع اقلیدسی  $C$  برابر است با  $\sqrt{s^2 - 1}$ .

برای اینکه  $C$  از  $r$  بگذرد باید داشته باشیم:

$$\left| s \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right) - r \right| = \sqrt{s^2 - 1},$$

و لذا

$$s = \frac{r^2 + 1}{2r \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

به ویژه، مرکز اقلیدسی  $C$  عبارت است از:

$$s \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right) = \frac{r^{\nu} + 1}{\sqrt{r} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right),$$

و شعاع اقلیدسی  $C$  عبارت است از:

$$\sqrt{s^{\nu} - 1} = \sqrt{\frac{(r^{\nu} + 1)^{\nu}}{\sqrt{r}^{\nu} \cos^{\nu}\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1}.$$

می‌توانیم محاسبات بالا را برای دایره اقلیدسی  $C_{n-1}$  که شامل خط هذلولوی  $l_{n-1}$  گذشته

از  $rp. = r$  و  $rP_{n-1} = r \exp\left(\frac{\nu\pi(n-1)i}{n}\right)$  مرکز اقلیدسی  $C_{n-1}$  عبارت است از:

$$s \exp\left(\frac{-\pi i}{n}\right) = \frac{r^{\nu} + 1}{\sqrt{r} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \exp\left(\frac{-\pi i}{n}\right),$$

و شعاع اقلیدسی  $C_{n-1}$  عبارت است از:

$$\sqrt{s^{\nu} - 1} = \sqrt{\frac{(r^{\nu} + 1)^{\nu}}{\sqrt{r}^{\nu} \cos^{\nu}\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1}.$$

زاویه درونی  $P_n(r)$  در  $r = rp.$  یعنی  $\alpha(r)$  برابر است با زاویه بین  $C$  و  $C_{n-1}$  بنابراین

در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha(r)) &= \frac{\nu(s^{\nu} - 1) - |s \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right) - s \exp\left(\frac{-\pi i}{n}\right)|^{\nu}}{\nu(s^{\nu} - 1)} \\ &= \frac{\nu(s^{\nu} - 1) - \nu s^{\nu} \sin^{\nu}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\nu(s^{\nu} - 1)} \\ &= 1 - \frac{\nu(r^{\nu} + 1)^{\nu} \sin^{\nu}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{(r^{\nu} + 1)^{\nu} - \nu r^{\nu} \cos^{\nu}\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

چون  $0 < r < 1$ ، لذا مخرج به ازای  $(r+1)^{\nu} - \nu r^{\nu} \cos^{\nu}\left(\frac{\pi}{n}\right) = (r^{\nu} - 1)^{\nu} + \nu r^{\nu} \sin^{\nu}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

هرگز صفر نمی‌گردد. حال پیوستگی  $\alpha(r)$  بلافاصله از پیوستگی سمت راست این عبارت و

پیوستگی آرک‌کسینوس نتیجه می‌شود.

۲۱-۵. برای  $n \geq 5$ ، بازه زاویه‌های ممکن برای یک  $n$  - ضلعی منتظم عبارت است از  $(0, \frac{n-2}{n}\pi)$ . چون برای  $n \geq 5$  داریم  $\frac{1}{4} > \frac{n-2}{n}$ ، لذا این بازه شامل  $\frac{1}{4}\pi$  است. در نتیجه یک  $n$  - ضلعی منتظم وجود دارد که هر زاویه آن قائمه است.

۲۲-۵. طول هذلولوی ضلع  $P_n(r)$  که  $rp_1 = r$  و  $rp_n = r \exp(\frac{2\pi i}{n})$  را به هم وصل می‌کند، برابر است با  $d_{\mathbb{D}}(r, r \exp(\frac{2\pi i}{n}))$ .

قرار می‌دهیم  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ . برای محاسبه  $d_{\mathbb{D}}(r, r e^{i\theta})$ ، ابتدا  $m$ ، عضوی از  $Möb(\mathbb{D})$  را که واجد شرط  $m(r) = 0$  است، انتخاب می‌کنیم. می‌نویسیم  $m(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \alpha}$  که در آن  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ .

چون  $m(r) = \frac{\alpha r + \beta}{\beta r + \alpha} = 0$  داریم  $\beta = -\alpha r$  و لذا

$$m(z) = \frac{\alpha z - \alpha r}{-\alpha r z + \alpha} = \frac{\alpha(z-1)}{\alpha(-rz+1)}.$$

بنابراین

$$m(re^{i\theta}) = \frac{\alpha r(e^{i\theta} - 1)}{\alpha(-r^2 e^{i\theta} + 1)}$$

و

$$|m(re^{i\theta})| = \left| \frac{\alpha r(e^{i\theta} - 1)}{\alpha(-r^2 e^{i\theta} + 1)} \right| = \left| \frac{r(e^{i\theta} - 1)}{-r^2 e^{i\theta} + 1} \right|.$$

بنابراین

$$d_{\mathbb{D}}(r, r e^{i\theta}) = d_{\mathbb{D}}(m(r), m(re^{i\theta}))$$

$$\begin{aligned}
 &= d_D(\cdot, m(re^{i\theta})) \\
 &= \ln \left[ \frac{1 + |m(re^{i\theta})|}{1 - |m(re^{i\theta})|} \right] \\
 &= \ln \left[ \frac{-r^\nu e^{i\theta} + 1 + |r(e^{i\theta} - 1)|}{-r^\nu e^{i\theta} + 1 - |r(e^{i\theta} - 1)|} \right] \\
 &= \ln \left[ \frac{(\nu + r^\nu)^\nu - 2r^\nu \cos(\theta) + 2r \sqrt{2(1 - 2r^\nu \cos(\theta) + r^\nu)(1 - \cos(\theta))}}{(1 - r^\nu)^\nu} \right].
 \end{aligned}$$

۲۳-۵. با کمی اعمال جبری و تعاریف  $\cosh(x)$  و  $\sinh(x)$  بر حسب  $e^x$ ، یعنی

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{و} \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

بطور مستقیم حکم بدست می‌آید.

۲۴-۵. چون هر دوی  $\sinh(c)$  و  $\sin(\gamma)$  مثبت هستند، در عوض کمیت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\sinh^\nu(c)}{\sin^\nu \gamma}$$

بنویسید  $A = \cosh(a)$ ،  $B = \cosh(b)$  و  $C = \cosh(c)$ . با استفاده از قانون اول کسینوس‌ها داریم:

$$\sin^\nu(\gamma) = 1 - \cos^\nu(\gamma) = 1 - \left( \frac{AB - C}{\sinh(a)\sinh(b)} \right)^\nu.$$

با ضرب نمودن بدست می‌آوریم که

$$\sin^\nu(\gamma) \sinh^\nu(a) \sinh^\nu(b) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sinh^{\gamma}(a)\sinh^{\gamma}(b) - (AB - C)^{\gamma} \\
 &= \sinh^{\gamma}(a)\sinh^{\gamma}(b) - A^{\gamma}B^{\gamma} - C^{\gamma} + 2ABC \\
 &= (A^{\gamma} - 1)(B^{\gamma} - 1) - A^{\gamma}B^{\gamma} - C^{\gamma} + 2ABC \\
 &= A^{\gamma}B^{\gamma} - A^{\gamma} - B^{\gamma} + 1 - A^{\gamma}B^{\gamma} - C^{\gamma} + 2ABC \\
 &= 1 - A^{\gamma} - B^{\gamma} - C^{\gamma} + 2ABC.
 \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\frac{\sin^{\gamma}(\gamma)}{\sinh^{\gamma}(c)} = \frac{1 - A^{\gamma} - B^{\gamma} - C^{\gamma} + 2ABC}{\sinh^{\gamma}(a)\sinh^{\gamma}(b)\sinh^{\gamma}(c)}.$$

چون سمت راست تحت تبدیل دوری  $a$ ،  $b$  و  $c$  و بطور همزمان تحت تبدیل دوری  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  تغییر نمی‌کند، لذا سمت چپ نیز باید بدون تغییر باقی بماند. در نتیجه ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{\sinh^{\gamma}(c)}{\sin^{\gamma}(\gamma)} = \frac{\sinh^{\gamma}(b)}{\sin^{\gamma}(\beta)} = \frac{\sinh^{\gamma}(a)}{\sin^{\gamma}(\alpha)}.$$

با جذرگیری، قانون سینوس‌ها را بدست می‌آوریم.

برای قانون دوم کسینوس‌ها، با قانون اول کسینوس‌ها شروع کنید که نتیجه می‌دهد

$$\cos(\gamma) = \frac{AB - C}{\sinh(a)\sinh(b)} = \frac{AB - C}{\sqrt{(A^{\gamma} - 1)(B^{\gamma} - 1)}}.$$

با بکار بردن قانون اول کسینوس‌ها روی دو رأس دیگر داریم:

$$\cos(\alpha) = \frac{BC - A}{\sqrt{(B^{\gamma} - 1)(C^{\gamma} - 1)}} \quad \text{و} \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{1 + 2ABC - A^{\gamma} - B^{\gamma} - C^{\gamma}}}{\sqrt{(B^{\gamma} - 1)(C^{\gamma} - 1)}},$$

$$\cos(\beta) = \frac{AC - B}{\sqrt{(A^2 - 1)(C^2 - 1)}} \quad \text{و} \quad \sin(\beta) = \frac{\sqrt{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}}{\sqrt{(A^2 - 1)(C^2 - 1)}}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} &= \frac{(BC - A)(AC - B) + (AB - C)(C^2 - 1)}{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2} \\ &= C = \cosh(c) \end{aligned}$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

۲۵-۵. قانون اول کسینوس‌های هذلولوی را به ازای  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  در نظر بگیرید. فرض کنید  $a$  طول هذلولوی ضلع  $T$  است که مقابل رأس با زاویه  $\alpha$  و فرض کنید  $b$  و  $c$  طول‌های هذلولوی اضلاع  $T$  باشند که آن رأس را می‌سازند. آنگاه

$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c).$$

۲۶-۵. هر نقطه  $a$  روی  $A$  به فرم  $a = \alpha e^{i\theta}$  است. بنابراین  $m(a) = \lambda a = \lambda \alpha e^{i\theta}$  با محاسبه می‌بینیم که

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\alpha e^{i\theta}, \lambda \alpha e^{i\theta}) &= d_{\mathbb{H}}(e^{i\theta}, \lambda e^{i\theta}) \\ &= d_{\mathbb{H}}(e^{i\theta} - \cos(\theta), \lambda e^{i\theta} - \cos(\theta)) \\ &= d_{\mathbb{H}}(i \sin \theta, (\lambda - 1) \cos \theta + i \lambda \sin \theta) \\ &= d_{\mathbb{H}}(i, (\lambda - 1) \cot \theta + i \lambda) \\ &\quad \text{بنویسید } (\lambda - 1) \cot \theta + i \lambda = \rho e^{i\varphi} \text{ با محاسبه می‌بینیم که} \\ \rho &= \sqrt{(\lambda - 1)^2 \cot^2 \theta + \lambda^2} \end{aligned}$$

و

$$\csc(\varphi) = \frac{\rho}{\lambda}.$$

با استفاده از تمرین ۲۵-۵ نتیجه می‌گردد که  $d_{\mathbb{H}}(i, (\lambda - 1) \cot(\theta) + i \lambda)$  در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\cosh(d_H(i, (\lambda - 1)\cot(\theta) + \lambda i)) = \cosh(d_H(i, \rho i)) \cosh(d_H(\rho i, \rho e^{i\phi}))$$

بنا به راه حل تمرین ۲۰-۳ داریم:

$$d_H(\rho i, \rho e^{i\phi}) = \ln \left[ \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \phi} \right]$$

و لذا

$$\cosh(d_H(\rho i, \rho e^{i\phi})) = \csc(\phi).$$

بنابراین

$$\cosh(d_H(\alpha e^{i\theta}, \lambda \alpha e^{i\theta})) = \cosh(\ln(\rho)) \csc(\phi)$$

$$= \frac{1}{2\lambda}(\rho^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} \cot^2(\theta) + \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \right)$$

$$= (\cosh(\ln(\lambda)) - 1) \cot^2 \theta + \cosh(\ln(\lambda)).$$

۲۷-۵. بنویسید  $z = t \exp(i\theta)$ . فرض کنید  $T_1$  مثلث هذلولوی در  $ID$  با رئوس مبدأ،  $r$

و  $z$  است. توجه کنید که

$$\cosh(d_D(\cdot, r)) = \cosh\left(\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right) = \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

و

$$\sinh(d_D(\cdot, r)) = \sinh\left(\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right) = \frac{2r}{1-r^2}.$$

با بکار بردن قانون اول کسینوس‌ها روی  $T_1$  می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \cosh(d_{\mathbb{D}}(z, r)) &= \cosh(d_{\mathbb{D}}(\cdot, r)) \cosh(d_{\mathbb{D}}(\cdot, z)) \\ &\quad - \sinh(d_{\mathbb{D}}(\cdot, r)) \sinh(d_{\mathbb{D}}(\cdot, z)) \cos(\theta) \\ &= \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right) \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) - \left(\frac{2r}{1-r^2}\right) \left(\frac{2t}{1-t^2}\right) \cos(\theta) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \cosh(d_{\mathbb{D}}(z, -r)) &= \cosh(d_{\mathbb{D}}(\cdot, -r)) \cosh(d_{\mathbb{D}}(\cdot, z)) \\ &\quad - \sinh(d_{\mathbb{D}}(\cdot, -r)) \sinh(d_{\mathbb{D}}(\cdot, z)) \cos(\pi - \theta) \\ &= \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right) \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) - \left(\frac{2r}{1-r^2}\right) \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \cos(\pi - \theta) \\ &= \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right) \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) + \left(\frac{2r}{1-r^2}\right) \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \cos(\theta). \end{aligned}$$

با جمع دو رابطه بالا داریم

$$\cosh(d_{\mathbb{D}}(z, r)) + \cosh(d_{\mathbb{D}}(z, -r)) = 2 \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right) \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right).$$

به یاد داشته باشید که  $r$  ثابت است و می‌خواهیم  $\cosh(d_{\mathbb{D}}(z, r)) + \cosh(d_{\mathbb{D}}(z, -r))$  ثابت باشد، که با توجه به معادله بالا نتیجه می‌دهد  $t$  باید ثابت باشد. چون این معادله مستقل از  $\theta$  است، لذا مجموعه تمام نقاطی که برای آنها  $\cosh(d_{\mathbb{D}}(\text{texp}(i\theta), r)) + \cosh(d_{\mathbb{D}}(\text{texp}(i\theta), -r))$  ثابت است، یک دایره اقلیدسی (یا هذلولوی) با مرکز در مبدأ است، یعنی نقاطی که فرم  $\text{texp}(i\theta)$  که  $t$  ثابت و  $\theta$  دلخواه است.

۴۸-۵. این مطلب که سه زاویه داخلی مساوی هستند، بلافاصله از قانون اول کسینوس‌ها

نتیجه می‌گردد یعنی



$$\cos(\alpha) = \frac{\cosh^{\vee}(a) - \cosh(a)}{\sinh^{\vee}(a)}.$$

مثلث هذلولوی  $T'$  را در نظر بگیرید که از نیم‌سازهای زاویه‌های هذلولوی  $T$  ساخته شده است، بنابراین  $T'$  دارای زاویه‌های  $\alpha$ ،  $\frac{1}{4}\pi$  و  $\frac{1}{4}\pi$  است و دارای طول هذلولوی متناظر اضلاع مقابل  $b$ ،  $\frac{1}{4}a$  و  $a$  است که در آن  $b$  هنوز نامعین است.

با به‌کارگیری قانون اول کسینوس‌ها روی  $T'$  داریم

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{4}\alpha\right) &= -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos(\alpha) + \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin(\alpha)\cosh\left(\frac{1}{4}a\right) \\ &= \sin(\alpha)\cosh\left(\frac{1}{4}a\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cosh\left(\frac{a}{4}\right). \end{aligned}$$

با تقسیم کردن بر  $\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)$  بدست می‌آوریم

$$1 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cosh\left(\frac{a}{4}\right)$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

۲۹-۵. در  $III$  کار می‌کنیم. فرض کنید  $v_\alpha$ ،  $v_\beta$  و  $v_\gamma$  رئوس مثلث هذلولوی  $T$  با زوایای داخلی  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  است. چون هر زاویه داخلی مثبت است، یک شعاع هذلولوی یکتایی وجود دارد که از یک رأس  $T$  می‌گذرد و درون  $T$  می‌رود و زاویه آن رأس را نصف می‌کند. این شعاع هذلولوی نیمساز زاویه است. نیمسازهای  $v_\alpha$  و  $v_\beta$  را رسم کنید؛ اینها همدیگر را در یک نقطه  $p$  داخل  $T$  قطع می‌کنند. فرض کنید  $v = d_H(v_\alpha, p)$  و  $w = d_H(v_\beta, p)$ . پاره‌خط هذلولوی واصل  $p$  به  $v_\gamma$  را رسم کنید و فرض کنید  $m = d_H(v_\gamma, p)$ .

این پاره‌خط هذلولوی زاویه  $\gamma$  در  $v_\gamma$  را به دو زیر زاویه  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  تقسیم می‌کند. توجه کنید که  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . می‌خواهیم نشان دهیم  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

این پاره‌خط‌های هذلولوی از رئوس  $T$  به نقطه  $p$ ، مثلث  $T$  را به سه مثلث هذلولوی کوچکتر تقسیم می‌کند. قانون سینوس‌های هذلولوی را روی این مثلث‌های هذلولوی اعمال می‌کنیم.

برای مثلث هذلولوی با رئوس  $v_\alpha$  و  $v_\gamma$  و  $p$  داریم:

$$\frac{\sinh(m)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sinh(v)}{\sin(\gamma_2)}$$

برای مثلث هذلولوی با رئوس  $v_\beta$  و  $v_\gamma$  و  $p$  داریم:

$$\frac{\sinh(m)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sinh(w)}{\sin(\gamma_1)}$$

برای مثلث هذلولوی با رئوس  $v_\alpha$  و  $v_\beta$  و  $p$  داریم:

$$\frac{\sinh(w)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sinh(v)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

لذا

$$\frac{\sinh(m)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sinh(v)}{\sin(\gamma_2)}$$

$$= \frac{1}{\sin(\gamma_2)} \frac{\sinh(w)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (\text{با استفاده از معادله سوم})$$

$$= \frac{\sin(\frac{\beta}{2}) \sin(\gamma_1)}{\sin(\gamma_2) \sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})} \quad (\text{با استفاده از معادله دوم})$$

$$= \frac{\sin(\gamma_1) \sinh(m)}{\sin(\gamma_2) \sin(\frac{\alpha}{2})}$$

لذا  $(\frac{\sin(\gamma_1)}{\sin(\gamma_2)}) = 1$  (زیرا  $\sinh(m) \neq 0$ ). بنابراین  $\sin(\gamma_1) = \sin(\gamma_2)$ . چون  $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \pi$ ، لذا یا  $\gamma_1 = \gamma_2$  یا  $\gamma_1 = \pi - \gamma_2$ . حالت دوم با توجه به فرمول گوس-بونه حذف می‌گردد، در نتیجه  $\gamma_1 = \gamma_2$  همانطوریکه می‌خواستیم.

۳۰-۵. فرض کنید  $v$  رأسی باشد که اضلاع (با طول)  $A$  و  $B$  در آن همدیگر را قطع می‌کنند و فرض کنید  $w$  رأسی باشد که اضلاع (با طول)  $C$  و  $D$  در آن همدیگر را قطع می‌کنند. (این قانون نمادگذاری را به کار می‌بریم که به ضلع  $R$  و به طول آن ضلع با یک حرف ارجاع می‌دهیم.) پاره‌خط هذلولوی  $c$  بین  $v$  و  $w$  را رسم کنید. این پاره‌خط هذلولوی  $R$  را به دو مثلث هذلولوی تجزیه می‌کند: یکی از مثلث‌ها،  $T_1$ ، دارای زاویه‌های  $\delta_1$  در  $v$  و  $\varphi$  و  $\gamma_1$  در  $w$  است، در حالیکه مثلث هذلولوی دیگر،  $T_2$ ، دارای زاویه‌های

$$\delta_2 \text{ در } v, \frac{\pi}{2} \text{ و } \gamma_2 \text{ در } w \text{ است. توجه کنید که } \delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{چون } \delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi}{2} = \gamma_1 + \gamma_2 \text{ داریم:}$$

$$\cosh(\delta_1) = \cos(\frac{\pi}{2} - \delta_2) = \sin(\delta_2)$$

$$\sin(\delta_1) = \sin(\frac{\pi}{2} - \delta_2) = \cos(\delta_2)$$

$$\cos(\gamma_1) = \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_2) = \sin(\gamma_2)$$

$$\sin(\gamma_1) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma_1\right) = \cos(\gamma_1).$$

با بکارگیری قانون سینوس‌ها روی  $T_1$  داریم:

$$\frac{\sin(\gamma_1)}{\sinh(C)} = \frac{1}{\sinh(c)} = \frac{\sin(\gamma_1)}{\sinh(B)}.$$

با بکارگیری قانون دوم کسینوس‌ها روی  $T_1$  داریم:

$$\cos(\delta_1) = \sin(\gamma_1) \cosh(C)$$

و

$$\cos(\gamma_1) = \sin(\delta_1) \cosh(B).$$

سرانجام، با بکارگیری قضیه فیثاغورث هذلولوی روی  $T_1$  داریم

$$\cosh(c) = \cosh(C) \cosh(B).$$

با بکارگیری قانون دوم کسینوس‌ها روی  $T_1$  و با استفاده از روابط بدست آمده در بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= -\cos(\delta_1) \cos(\gamma_1) + \sin(\delta_1) \sin(\gamma_1) \cosh(c) \\ &= -\sin(\delta_1) \sin(\gamma_1) + \cos(\delta_1) \cos(\gamma_1) \cosh(c) \\ &= -\frac{\sinh(C) \sinh(B)}{\sinh^2(c)} + \sin(\gamma_1) \cosh(C) \sin(\delta_1) \cosh(B) \cosh(c) \\ &= -\frac{\sinh(C) \sinh(B)}{\sinh^2(c)} + \frac{\sinh(B) \cosh(C) \sinh(C) \cosh(B) \cosh(c)}{\sinh^2(c)} \\ &= \frac{-\sinh(C) \sinh(B) + \sinh(B) \sinh(C) \cosh^2(c)}{\sinh^2(c)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1 + \cosh^2(c)) \sinh(C) \sinh(B)}{\sinh^2(c)} = \sinh(C) \sinh(B)$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

برای اتحاد دوم، قانون دوم کسینوس‌ها را روی  $T_1$  اعمال می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\cos(\gamma_1) = -\cos(\varphi) \cos(\delta_1) + \sin(\varphi) \sin(\delta_1) \cosh(A).$$

با استفاده از روابط بدست آمده در بالا و ساده کردن آنها داریم:

$$\begin{aligned} \cosh(A) \sin(\varphi) &= \frac{\cos(\gamma_1) + \cos(\varphi) \cos(\delta_1)}{\sin(\delta_1)} \\ &= \frac{\sin(\gamma_1) + \sinh(C) \sinh(B) \sin(\delta_1)}{\cos(\delta_1)} \\ &= \frac{\sinh(B) + \sinh^2(C) \sinh(B)}{\sinh(c) \cos(\delta_1)} \\ &= \frac{\sinh(B) \cosh^2(C)}{\sinh(c) \cos(\delta_1)} \\ &= \frac{\sinh(B) \cosh^2(C)}{\sinh(c) \cosh(C) \sin(\gamma_1)} = \cosh(C), \end{aligned}$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

## فصل ۶

۶-۱. می‌توان نوشت  $q(X) = X^T B X$  که در آن

$$B = \begin{pmatrix} -۴ & ۷ & -۱ \\ ۷ & ۲ & -۸ \\ -۱ & -۸ & ۱۰ \end{pmatrix}.$$

مقادیر ویژه  $B$  و در نتیجه  $q$  (بطور تقریبی) عبارتند از:

$$۱۶.۰۵۳۷, -۹.۴۰۴۹, ۱.۳۵۱۱$$

۶-۲. توجه کنید که چون  $X^T A X$  ماتریسی  $۱ \times ۱$  است، لذا متقارن است و لذا

$$X^T A X = (X^T A X)^T = X^T A^T X$$

بنابراین

$$f(X) = X^T A X = \frac{1}{2} \{X^T A X + X^T A^T X\} = X^T \left( \frac{1}{2} (A + A^T) \right) X.$$

چون  $\frac{1}{2}(A + A^T)$  متقارن است داریم:  $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$

۶-۳. فرض کنیم  $x \in \mathbb{R}^2$  دلخواه باشد. چون  $AA^{-1} = I_2$  داریم:

$$q(X) = q(I_2 X) = q(AA^{-1} X) = q(A^{-1} X),$$

که در آن تساوی سوم از  $A \in O(q)$  نتیجه می گردد.

۶-۴. می نویسیم  $q(X) = X^T B X$  که در آن  $B$  یک ماتریس متقارن  $۳ \times ۳$  است. چون  $q$

بنا به فرض همگن است، می دانیم که  $B$  وارون پذیر نیست. بنابراین صفر یک مقدار ویژه  $B$  است. فرض کنیم  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  مقدار ویژه دیگر  $B$  باشد.

چون  $B$  متقارن است، قطری پذیر است و لذا یک ماتریس  $C$  وجود دارد بطوریکه:

$$C^{-1} B C = E = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

$C$  را ماتریسی انتخاب می‌کنیم که ستون‌های آن بردارهای ویژه  $B$  باشد که نرمال شده تا طول واحد داشته باشد لذا  $C^{-1} = C^T$ . در این صورت  $B = CEC^T$ . بنابراین  $q$  را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$q(X) = X^T BX = X^T CEC^T X = (C^T X)EC^T X.$$

برای

$$X = C \begin{bmatrix} \lambda \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

می‌بینیم که

$$q(X) = (C^T X)^T EC^T X = X^T CE \begin{bmatrix} \lambda \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = (\cdot)$$

$$= X^T CE \begin{bmatrix} \lambda \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = (\cdot)$$

همانطوریکه می‌خواستیم.

- [1] W. Abikoff, the bounded model for hyperbolic 3-space and a quaternionic uniformization theorem, *Math.Scand.***54**(1984),5-16.
- [2] W. Abikoff, The uniformization theorem, *Amer. Math.Monthly* **88** (1981),574-592 .
- [3] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1979.
- [4] L.V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, McGraw Hill, New York, 1974.
- [5] L. V. Ahlfors, *Mobius Transformation in Several Dimensions*, Ordway Professorship Lectures in Mathematics, University of Minesota, School of Mathematics, Minneapolis, Minn., 1981.
- [6] H.Anton and R. C. Busy, *Contemporary Linear Algebra*, John Wiley and sons, Inc., 2003.
- [7] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] A. F. Beardon, The hyperbolic metric of a rectangle, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **26** (2001), 401-407
- [9] A. F. Beardon, The hyperbolic metric in a rectangle II, *Ann. Acad. Sci.* **28** (2003), 143-152.
- [10] A. F. Beardon, An introduction to hyperbolic geometry, in *Ergodic Theory, Symbolics Dynamics, and Hyperbolic Spaces*, edited by T. Bedford, M. Keane, and C. Series, Oxford University Press, Oxford, 1991, 1-34.
- [11]R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publication Inc., New York, 1955.
- [12] B. H. Bowditch, Notes of Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces, in *Group Theory from a Geometrical Viopoint* (Proceedings of the workshop held in Trieste, March 26-April 6, 1990),



edited by E. Ghys, A. Haefliger, and A. Verjovsky, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, J, 1991, 64-167.

[13] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities 2*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 285, Springer-Verlag, New York, 1988.

[14] H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry*, Mathematical Exposition 2, University of Toronto Press, Toronto, 1978.

[15] W. Fenchel, *Elementary Geometry in hyperbolic Space*, de Gruyter Studies in Mathematics 11, Walter de Gruyter, New York, 1989.

[16] M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, W. H. Freeman and Co., New York, 1993.

[17] M. Grom, *Hyperbolic groups*, in *Essays in Group Theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer, New York, 1987, 75-263.

[18] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[19] H. von Helmholtz, *On the origin and significance of the geometrical of the axioms, in the world of Mathematics*, volume 1, edited by J. R. Newman, Simon and Schuster, New York, 1956, 647-668.

[20] I. N. Herstein, *Abstract Algebra*, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.

[21] E. Hill, *Analytic Function Theory*, Chelsea, New York, 1977.

[22] B. Iversen, *Hyperbolic geometry*, London Mathematical Society Student Texts 25, Cambridge, 1992.

[23] G. A. Jones and D. Singerman, *Complex Function, an Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[24] P. J. Kelly and G. Matthews, *The Non-Euclidean, Hyperbolic Plane*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1981.

[25] J. L. Locher, editor, M. C. Escher, *His Life and Complete Graphic Work*, Abradale Press, New York, 1992.

- [26] J. Munkres, *Topology, a First Course*, Prentice-Hall, Inc., Enlewood Cliffs, NJ, 1975.
- [27] D. Pedoe, *Geometry – a Comprehensive Course*, Dover Publications, New York, 1988.
- [28] L. Redei, *Fouction of Euclidean and Non-Euclidean Geometries According to F. Klein*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics 97, Pergamon Press, Oxford, 1968.
- [29] B. A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [30] D. Schattschneider, *Visions of Symmetry*, W. H. Freeman and Company, New York, 1990.
- [31] S. Stahl, *The Poincare Half-Plane*, Jones and Bartlett, Boston, 1993.
- [32] J. Stillwell, *Poincare, geometry and topology*, in *Henri Poincare: Science et Philosophie*, AkademieVerlag, Berlin, 1996, 231-240.
- [33] J. Stillwell, *Sources of Hyperbolic Geometry*, History of Mathematics, volum 10, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [34] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [35] W. P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [36] R. J. Trudeau, *The Non-Euclidean Revelation*, Birkhauser, Boston, MA, 1987.
- [37] C. R. Wylie, Jr., *Foundations of Geometry*, McGraw-Hill Book Co. New York, 1964.

## نمایه

Action of a group on a set	۳۲	عمل یک گروه روی یک مجموعه
Almost simple path	۸۴	مسیر تقریباً ساده
Almost simple parametrization	۸۴	پرمایش تقریباً ساده
Boundary of infinity	۲۰	مرز در بی‌نهایت
Boundary line	۶۷	خط مرزی
$IH$ Bounded set in	۱۱۸	مجموعه کراندار در $IH$
Concentric	۷	هم‌مرکز
Compactification	۱۲	فشرده‌سازی
Closure	۱۳	بست
$\bar{C}$ Circle in	۱۳	دایره در $\bar{C}$
Continuous	۱۶	پیوسته
Cross ratio	۳۷	نسبت همساز
Conjugate (Möbius transformation)	۴۰	مزدوج (یک تبدیل موبیوس)
Conformal	۵۶	هم‌مدیس
path $C^1$ –	۷۸	مسیر $C^1$
Curve	۷۸	منحنی
Conformal distortion	۸۰	انحراف هم‌مدیس
$IH$ Compact set in	۱۱۸	مجموعه فشرده در $IH$
Curvature	۱۵۸	انحنا
Convexity	۱۵۹	تحدب
Convex set	۱۵۹	مجموعه محدب
Convex hull	۱۶۴	پوش محدب
Complex conjugate	۵۰	مزدوج مختلط
Concatenation	۱۰۱	الحاق
$\bar{C}$ Disc in	۱۹	قرص در $\bar{C}$
Dilation	۴۳	تجانس
Distance realizing path	۹۷	مسیر برآورنده طول
Dense	۱۹	چگال
$C$ Disc bounded by	۱۴۹	قرص کراندار شده با $C$
Degenerate hyperbolic polygon	۱۷۴	چندضلعی هذلولوی تباهیده
Degenerate	۲۱۳	تباهیده

thin $\delta$ –	۲۳۳	$\delta$ - نازک
Equidistance	۵	هم‌فاصله
Euclidean disc	۱۱	قرص اقلیدسی
Elliptic	۴۳	بیضوی
Element of arc length	۷۷	عنصر طول قوس
Euclidean length (of a path)	۷۸	طول اقلیدسی (یک مسیر)
Element of arc length in plane	۷۸	عنصر طول قوس در صفحه
$\mathcal{C}$ Element of arc length in	۷۸	عنصر طول قوس در $\mathcal{C}$
Fixed point	۲۹	نقطه ثابت
Glide reflection	۷۲	لغزه
Gauss-Bonnet	۱۸۷	گاوس-بونه
Hyperbolic line	۲	خط هذلولوی
Homeomorphism	۱۸	همسان‌ریختی
Hyperbolic ray	۲۲	شعاع هذلولوی
Horocircle	۷۰	دایره زمانی
Horodisc	۷۰	قرص زمانی
Hyperbolic length	۹۲	طول هذلولوی
Hyperbolic distance	۹۹	فاصله هذلولوی
Hyperbolic isometry	۱۱۳	طولپای هذلولوی
Hyperbolic circle	۱۳۹	دایره هذلولوی
$ID$ Hyperbolic distance in	۱۳۳	$ID$ فاصله هذلولوی در
$X$ Hyperbolic distance in	۱۴۵	$X$ فاصله هذلولوی در
Hyperbolic structure	۱۴۶	ساختار هذلولوی
Hyperbolic disc	۱۴۹	قرص هذلولوی
Hyperbolic polygon	۱۵۹	چندضلعی هذلولوی
gon $n$ – Hyperbolic	۱۷۹	$n$ -ضلعی هذلولوی
Hyperbolic triangle	۱۸۰	مثلث هذلولوی
Hyperbolic quadrilateral	۱۸۰	چهارضلعی هذلولوی
Hyperbolic rhombus	۱۸۰	لوزی هذلولوی
Hyperbolic parallelogram	۱۸۰	متوازی‌الضلاع هذلولوی
Hyperbolic area	۱۸۲	مساحت هذلولوی
Hyperbolic affine transformation	۱۹۸	تبدیل مستوی هذلولوی
Hyperbolic cosine law	۲۰۳	قانون کسینوس هذلولوی
Hyperbolic sine law	۲۰۳	قانون سینوس هذلولوی
Hyperboloid model	۲۰۹	مدل هذلولوی
$IU$ Hyperbolic line in	۲۲۹	$IU$ خط هذلولوی در
Invariant function	۳۷	تابع ناورداد

Invariant element of arc-length	۷۷	عصر طول قوس ناورد
Isometry	۱۱۲	طولیا
Interior angle of a polygon	۱۷۷	زاویه داخلی یک چندضلعی
Ideal vertex of a polygon	۱۷۸	راس ایده‌آل یک چند ضلعی
gon $n$ – Ideal	۱۸۰	$n$ -ضلعی ایده‌آل
Isoperimetric inequality	۱۸۷	نامساوی هم‌پیرامونی
Indefinite	۲۱۱	نامعین
Jordan curve theorem	۱۴۹	قضیه منحنی جردن
Luxodromic	۴۳	با زاویه ثابت
Luxodrome	۴۳	منحنی با زاویه ثابت
Locally finite	۱۷۰	موضعیاً متناهی
Level set	۲۱۴	مجموعه تراز
Lower sheet	۲۱۵	پارچه پایینی
Multiplier	۴۲	ضریب
Metric space	۹۵	فضای متری
Mobius transformation	۲۷	تبدیل موبیوس
Non-degenerate	۱۷۴	ناتباهیده
Poincare disc model	۱۲۷	مدل قرص پوانکاره
Path metric space	۹۸	فضای متری مسیری
Parametrization	۸۲	پرمایش
Parallel	۵	موازی
Playfair	۸	پلیفر
$IH$ Points at infinity of	۲۰	نقاط در بی‌نهایت
Parabolic Mobius transformation	۴۱	تبدیل موبیوس سهموی
Path	۷۸	مسیر
path $C^1$ – Piecewise	۸۱	مسیر بطور قطعه‌ای هموار
One-point compactification	۱۲	فشرده‌سازی تک نقطه‌ای
Positive definite	۲۱۱	(فرم درجه دوم) مثبت-معین
Negative definite	۲۱۱	(فرم درجه دوم) منفی-معین
Non-planar model	۲۰۹	مدل غیر مسطح
Reparametrization	۸۲	بازپرمایش
Riemann sphere	۹	کره ریمان
Reasonable polygon	۱۷۸	چندضلعی معقول
Normalizing	۴۵	نرمال کردن
gon $n$ – Regular hyperbolic	۱۷۹	$n$ -ضلعی منتظم هذلولوی
$IH$ Open half-plane in	۶۶	$IH$ نیم‌صفحه باز در

Side of a polygon	۱۷۵	ضلع یک چند ضلعی
Signed hyperbolic distance	۱۱۷	فاصله هذلولوی علامت‌دار
Stereographic projection	۹	تصویر کنج‌نگاری
Simple path	۸۳	مسیر ساده
Simple parametrization	۸۳	پرمایش ساده
Simple closed curve	۸۴	منحنی ساده بسته
Transitive action	۳۳	عمل متعدی
Trace	۴۴	رد
Translation distance	۱۱۱	فاصله انتقالی
Quadratic form	۲۱۰	فرم درجه دوم
Uppr half-plane	۱	نیم‌صفحه بالایی
Ultraparallel	۲۱	فرا موازی
Uniquely transitive action	۳۳	عمل متعدی یکتا
Vertex of a polygon	۱۷۵	راس یک چند ضلعی
Visual measure	۱۲۵	اندازه بصری
Upper Sheet	۲۱۵	پارچه بالایی
Upper half-space	۲۳۹	نیم‌فضای بالایی
Hyperbolic center	۱۳۹	مرکز هذلولوی
Hyperbolic radius	۱۳۹	شعاع هذلولوی
Holomorphically equivalent	۱۴۲	هم‌ارز تحلیلی
Oval of Cassini	۱۴۳	برگ کاسینی
Pullback	۱۴۴	برگشت
Inversion	۵۱	انعکاس