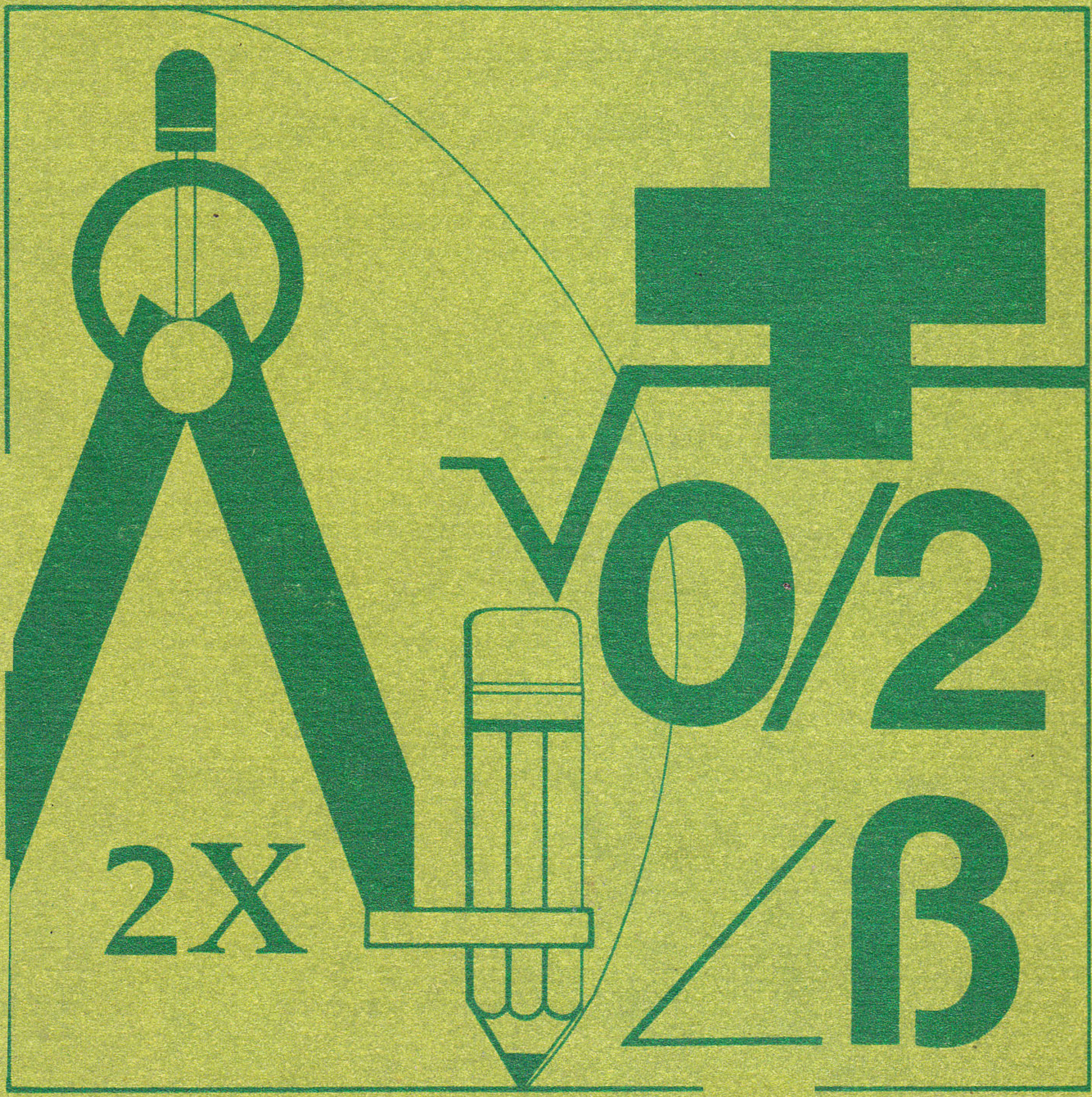
آ. کوستوفسکی

هندسهٔ پرگاری

ساختمان‌های هندسی با پرگار تنها

ترجمهٔ ابراهیم دارابی



هندسه پرگاری

ساختمانهای هندسی بوسیله پرگار تنها

آ. کوستوفسکی

ترجمه: ابراهیم دارابی

اثر: آ. کوستوفسکی
ترجمهٔ: ابراهیم دارابی
چاپ: اول ۱۳۶۶
تیراژ: ۵۰۰۰
چاپخانه: حیدری
پخش از: (گوتنبرگ)

در باره کتاب

ساختمانهای هندسی از بخش‌های مهم آموزش ریاضیات لست که پژوهشهای هندسی را به‌عنوان یک ابزار قوی به‌نمایش می‌گذارند.

سابقه محدودیت ابزار ساختمانهای هندسی به خطکش و پرگار، به‌زمانهای عهد عتیق بر می‌گردد. و هندسه معروف اقلیدسی (قرن سوم پیش از میلاد) برپایه هندسی بوسیله پرگار و خطکش پایه‌گذاری شده است. در زمانهای قدیم، خطکش‌وپرگاربه‌عنوان ابزار و معادل به‌کار می‌رفتند. مهم نبود که ساختمان هندسی به‌کمک پرگار تنها یا خط‌ـ کش تنها و یا خطکش و پرگار انجام گیرد.

مدتها پیش پرگار را وسیله دقیق‌تر از خطکش تشخیص دادند. ساختمانهای ویژه‌ای به‌کمک پرگار تنها انجام گرفت. برای مثال محیط دایره به شش جزء مساوی تقسیم گردید و قرینه نقطه‌ای نسبت به خط راست مفروض تعیین گردید ... (قابل توجه است که در حکاکی صفحات نازک فلزی برای نشانه‌دار کردن آن و در ابزارهای نجومی از پرگار استفاده می‌شود.)

در سال ۱۷۹۷ ریاضیدان ایتالیایی به نام لورنزو ماسچرونی ـ استاد دانشگاه پاوما مقاله‌ای جامع به‌نام "هندسه پرگاری" منتشر کرد. که بعدها به زبانهای فرانسه و آلمانی هم ترجمه گردید. در این مقاله، او ثابت می‌کند که: " تمام مسائل ساختمانی که قابل حل با خطکش و پرگار باشند، می‌توانند به‌کمک پرگار تنها هم حل شوند. "

این موضوع در سال ۱۸۹۰ به‌وسیله آدلر به‌عنوان یک روش بنیادی در انعکاس به‌کار گرفته شد و پیشنهاد یک راه حل عمومی در ساختمانهای هندسی به‌کمک پرگار تنها را ارائه گردید.

در سال ۱۹۲۸ ریاضیدان دانمارکی بنام هلمسلف (Hjelmslev) متوجه شد که در یکی از مغازه‌های کتابفروشی، کتابی از ج مهر باعنوان "اقلیدس دانمارک" درسال ۱۶۷۲ منتشر شده است.

قسمت‌های اول کتاب حاوی حل کامل مائل ماسچرونی بود. به‌این ترتیب ملاحظه می‌شود که مدتها قبل از ماسچرونی تمام مسائل ساختمانهای هندسی که به‌کمک خط کش و پرگار انجام پذیر است، با پرگار تنها هم انجام می‌پذیرفته. شاخه‌ای از هندسه که با ساختمانهای هندسی سرو کار دارد و با استفاده از پرگار تنها انجام می‌پذیرد، " هندسه پرگاری" نام دارد.

در سال ۱۸۳۳ هندسه دان سوئیسی یاکوب استنیر کتابی با نام " ساختمانهای هندسی به‌کمک یک خط راست و یک دایره ثابت" منتشر کرد، که در آن موفق شده بود ساختمانهای هندسی را به‌وسیله یک خطکش تنها انجام دهد. نتایج اولیه او چنین بود:

تمام مسائل قابل حل به‌وسیله پرگار و خَط کش، با استفاده از یک خط کش و دایره ثابتی که مرکز و شعاع آن در داخل صفحه داده‌شده باشد، قابل حل هستند. "

به‌این ترتیب برای اینکه از خط کش، ابزاری معادل پرگار داشته باشیم، کافیست که در اول کار یکبار از پرگار استفاده کنیم.

لوباچیوسکی ریاضیدان روسی در اوایل قرن نوزدهم هندسه جدیدی بنا نهاد که بعدها بنام "هندسه غیر اقلیدسی" یا "هندسه لوباچیوسکی" مشهور گردید. اخیرا هم به لطف تلاش گروه زیادی از محققین، بخصوص محققین شوروی، تئوری ساختمانهای هندسی مسطحه لوباچیوسکی با سرعت زیادی پیشرفت کرده است. آ.س.اسموگورزسکی ، و.ف.روچنکو، ک.ک.موکرچیو. در زمینه ساختمانهای هندسه مسطحه لوباچیوسکی بدون استفاده از خط کش و اینکه آیا اجرای ساختمانهای هندسی نظیر آنچه‌که‌ماسچرونی در هندسه اقلیدسی انجام داده امکان‌پذیر است، به تحقیق پرداخته‌اند.

در حال حاضر دانشمندان شوروی موفق شده‌اند کاملا تئوری ساختمانهای هندسه مسطحه لوباچیوسکی را فرموله کنند و آنرا در حد تئوری ساختمانهای هندسی مسطحه اقلیدسی ارائه دهند.

پیش گفتار

مولف کتاب بارها سخنرانیهایی در مورد قضایای هندسه ساختمانی کرده که اغلب در مسابقات المپیادهای ریاضی مورد استفاده قرار گرفته و از سال ۱۹۴۷ به این طرف هر سال برای استفاده دانش آموزان مدارس متوسطه در شهر لـووف تنظیم گشته است. فصل اول این کتاب بر اساس همین سخنرانیها نوشته شده است. فصل دوم کتاب توضیح بررسی‌های نویسنده در باره ارتباط هندسه ساختمانی با تجاربی که بوسیله‌پرگار تنها با فاصله محدود شاخه‌های آن صورت گرفته می‌باشد.

کتاب برای استفاده گروه وسیعی از خوانندگان تنظیم شده است و می‌تواند معلمین دانش آموزان ممتاز کلاسهای مدارس متوسطه را که مایل به آشنایی بیشتر با جزئیات ساختمانهای هندسی به کمک پرگار تنها هستند، یاری رساند. همچنین می‌تواند بعنوان یک کتاب کمک آموزشی در مدارس متوسطه مورد استفاده قرار گیرد. و بالاخره میتوان از آن به عنوان وسیله‌ای برای تعمیق معلومات دانشجویان رشته‌های فیزیک و ریاضی دانشکده‌ها و کالج‌ها و معلمین و مربیان سود برد.

مولف مایل است سپاس صمیمانه خود را نسبت به پروفسور آ.ن کـووانکـو، دستیاران پروفسور و. ف. روکاچکو و، ای. ف. کسسلنکو و معلم کارشناس: و.گ. اوراچ بخاطر ملاحظه پیش نویس و راهنمایی‌های گرانقدر ابراز دارد.

فصل اول
ساختمانهای هندسی به کمک پرگار تنها
بخش اول

بررسی امکان حل مسائل ساختمانهای هندسی به کمک پرگار تنها

قضایای اساسی

در این بخش اثبات قضایای اساسی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در ساختمان های هندسی به کمک پرگار تنها، مورد استفاده قرار می‌گیرند. واضح است که به‌کمک‌پرگار نمی‌توان خط راستی رسم کرد. اما در آینده نشان خواهیم داد که می‌توان یک و یا دو و یا چند نقطه متناهی را روی آن و یا در امتداد آن مشخص کرد. به عبارت‌دیگر قضیه‌مهر ماسچرونی رسم کامل یک خط‌راست را در بر نمی‌گیرد. در هندسه پرگاری، یک‌خط‌راست ویاپاره‌خط‌با دو نقطه آن تعریف می‌شوندو رسم آن امکان پذیر نیست (رسم آن‌باخط‌کش) گوئیم خط راست مشخص شده است اگر دو نقطه از آن داده‌شده باشد. اکنون توجه خوانندگان را به نکات زیر جلب می‌کنیم:

خط‌راستی که از نقاط A و B می‌گذرند، بانماد (AB) نشان داده می‌شود.

۲) پاره خط AB را با نماد $[AB]$ نشان میدهیم.

۳) فاصله بین نقاط A و B به صورت $|AB|$ نشان داده می‌شود.

۴) کمانی از دایره و یا خود دایره به‌مرکز o و شعاع r را به صورت $(o;r)$ نشان میدهند.

۵) کمان و یا دایره‌ای به مرکز A و شعاع $r = |BC|$ را با نماد $(A ، |BC|)$ نشان میدهند.

همچنین:

عبارت: "به‌مرکز o و شعاع r دایره (کمان) رسم می‌کنیم را در قالب عبارت:

"دایره$(o ، r)$ را رسم و یا تعریف می‌کنیم" و یا گاهی "خلاصه‌تر به صورت: ،

"دایره $(a ، r)$ را رسم می‌کنیم" بیان می‌کنیم. بالاخره:

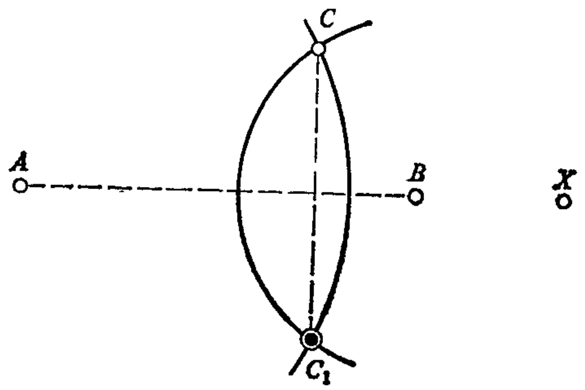
"پاره‌خط AB را که در آن $|AB| = a$ می‌باشد، معادل" پاره خط a " و $|AB| = n|CD|$ را به جای عبارت: " پاره خط CD ، n برابر AB است" در نظر می‌گیریم. وسایر علائم و نمادهای به کار رفته دز این کتاب در ضمیمه(۱) آخر کتاب درج گردیده است.

ز نظر علمی، پایه و اساسی وجود ندارد که با داشتن چند نقطه از یک خط راست بتوان آن را به کمک پرگار رسم کرد.

▶ مسئله ۱) قرینه نقطه C را نسبت به خط راست AB پیدا کنید.

حل: خط (AB) و نقطه C مفروض است. می‌خواهیم $C_1 = S_{(AB)}\ (C)$* را بسازیم

دایره‌های ($|AC|$ ، A) و ($|BC|$ ، B) یکدیگر را در نقطه C_1 قطع می‌کند شکل (۱)



1

نقطه C_1 نقطه مطلوبست. اگر نقطه C روی خط AB قرار داشته باشد، درآن‌صورت قرینه C نسبت به آن خود نقطه C خواهد بود:

$$[\text{i.e. } C = S_{(AB)}\ (C)].$$

نکته: برای اینکه بررسی کنیم آیا سه نقطه مفروض A ، B ، X روی یک خط راست قرار دارند یا خیر لازم است که نقطه دلخواه C را در خارج AB در نظر بگیریم وقرینه آن C_1 را نسبت به AB پیدا کنیم واضح است که نقطه X روی AB خواهد بود اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$|CX| = |C_1X|.$$

▶ مسئله ۲)

می‌خواهیم پاره خطی رسم کنیم که ۲، ۳، ۴، . . . یا به طور کلی n بار بزرگتر از پاره خط مفروض AA_1 باشد. (n عدد صحیح و طبیعی است. $n \in N$).

حل : پاره خط $r = |AA_1|$ مفروض است . می‌خواهیم :

$$[AA_n],\ |AA_n| = n\,|AA_1|,$$

را رسم کنیم که در آن $n \in N$.

طریقه اول : پرگار را به اندازه r باز می‌کنیم . دایره (A_1 , r) را رسم می‌کنیم . سپس نقطه A_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که سردیگر قطر منتهی به نقطه A باشد . برای این منظور دایره‌های (A , r) و (B , r) و (C , r) رارسم می‌کنیم . محل تقاطع آنهابا دایره (A_1 , r) نقاط B، C، A_2 را مشخص خواهد کرد . داریم :

$|AA_2| = 2r$

شکل (۲)

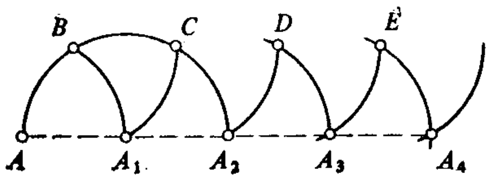


Fig. 2

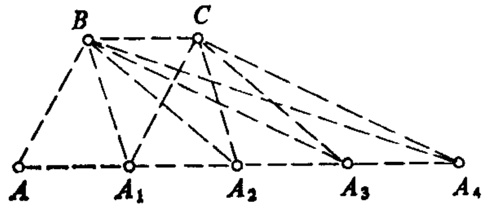


Fig. 3

اکنون‌دایره (A_2 , r) را رسم و محل برخورد آنرا با دایره (C , r) نقطه D می‌نامیم محل برخورددایره‌های (A_2 , r) و (D , r) نقطه A_3 خواهد بود و خواهیم داشت : $|AA_3| = 3r$ و ....

با تکرار ترسیمات به تعداد n مرتبه می‌توان پاره‌خط $|AA_n| = nr$ رابدست آورد صحت نتایج فوق از آنجا ناشی می‌شود که اگر پرگار را باندازه شعاع یک دایره باز کنیم و با آن محیط دایره‌راقسمت‌می‌کنیم به‌تمامی ۶باردرآن‌می‌گنجد

طریقه دوم : نقطه دلخواهی مانند B در خارج خط راست AA_1 را در نظر می‌گیریم و دایره $(A_1 , |AB|)$ و (B , r) را رسم کنیم تا در نقطه C یکدیگر را قطع کنند .

شکل (۳) اگر دایره‌های (A_1 ، r) و ($C, |A_1B|$) رسم شوند همدیگر را پایین ــ نقطه A_2 قطع خواهند کرد . و داریم : $|AA_2| = 2r$
دایره‌های (A_2 ، r) و (C ، $|A_2B|$) را رسم کرده و نقاط تقاطع آنها را به A_3 نشان میدهیم . داریم : $|AA_3| = 3r$
و به همین طریق . . . .

صحت این نتایج از آنجا نتیجه می‌شود که شکلهای $ABCA_1$ ، A_1BCA_2 ، و A_2BCA_3 . . . . . . متوازی‌الاضلاع هستند .

نکته: باسانی دیده می‌شود که می‌توان پاره خطی رسم کرد که $2, 4, 8, 16,$ و . . . 2^k ، برابر پاره‌خط مفروض AA_1 باشد .

برای این کار دایره (A_1 ، r) رارسم می‌کنیم و نقطه A_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که A_2 سر دیگر قطر منتهی به A گردد .

$$(|AA_2| = 2r)$$

دایره (A_2 ، $2r$) را رسم و نقطه A_4 را هم طوری انتخاب می‌کنیم که سر دیگر قطر منتهی به A گردد .

$$(|AA_4| = 4r).$$

نقطه A_8 را روی دایره (A_4 ، $4r$) طوری انتخاب می‌کنیم که سر دیگر قطر منتهی به نقطه A باشد :

$$|AA_8| = 8r,$$

و بــاین کار ادامه می‌دهیم ، پس از k مرحله خواهیم داشت :

$$|AA_{2^k}| = 2^k r^*.$$

---

* باسانی می‌توان پاره خطی رسم کرد m ، m^2 ، m^3 ، . . . . m^k ، برابر پاره خط مفروض باشد . $m = 3, 4, 5, \ldots.$

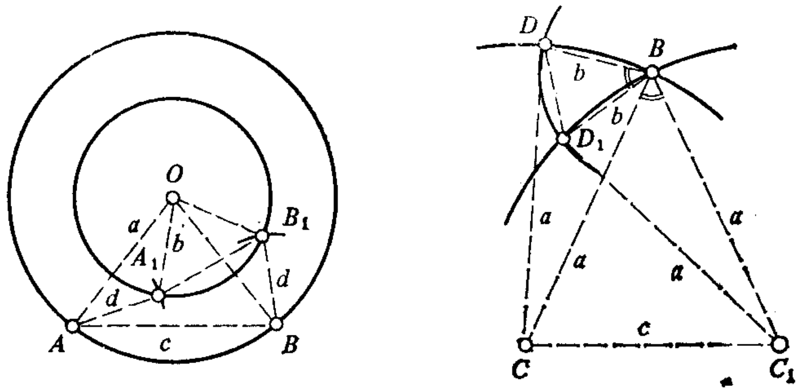
برای مثال بازاء $m=5$ پاره خط $\|AA_5\| = 5\,|AA_1|$ رارسم می‌کنیم (مسئله۲)

با معلوم شدن AA_5 پاره خط: $|AA_{25}| = 5\,|AA_5| = 5^2\,|AA_1|$ رسم می‌شود . (مسئله۲)

سپس پاره خط $|AA_{125}| = 5\,|AA_{25}| = 5^3\,|AA_1|,$ ساخته می‌شود . و . . . . .

مسئله۳: مطلوبست رسم پاره خط x جزء چهارم تناسب $\frac{c}{x}=\frac{a}{b}$ که در آن c , b , a طولهای معلومی هستند :

طریقه اول: نقطه دلخواه o را در نظر گرفته دایره‌های (O, b) و (O, a) را رسم می‌کنیم نقطه دلخواه A را روی دایره (O, a) مرکز قرار داده دایره $(A، C)$ را هم رسم می‌کنیم و محل برخورد دو دایره را B می‌نامیم. حال اگر دو دایره $(A، d)$ و (B, d) را به‌شعاع دلخواه $d > |a-b|,$ رسم کنیم تا دایره (O, b) را در نقاط A_1 ، B_1 قطع کند، $x = |A_1B_1|$ پاره خط مطلوب یا جواب مسئله است. شکل $(4$ ، $a)$.



a　　b

4

اثبات:

$$\triangle AOA_1 \cong \triangle BOB_1$$

(در حالت سه ضلع) بنا بر این خواهیم داشت:

$$\widehat{AOA_1} = \widehat{BOB_1} \text{ and } \widehat{AOB} = \widehat{A_1OB_1}.$$

مثلث‌های متساوالساقین AOB ، A_1OB_1 متشابه‌اند پس:

$$a/b = c/|A_1B_1|.$$

شرط امکان مسئله این است که: $c < 2a$

اگر $c \geqslant 2a$ ، $b < 2a$ باشد در آن صورت پاره خطی رسم می‌کنیم که جزءچهارم $a/c = b/x$ باشد. در حالت $c \geqslant 2a$ ، $b \geqslant 2a$ پاره خط na (مسئله۲) را رسم می‌کنیم و n را طوری اختیار می‌کنیم که $c < 2na$ (یا $b < 2an$) باشد پس پاره خط y را طوری رسم می‌کنیم که جزء چهارم تناسب $na/b = c/y$ باشد. اکنون اگر پاره خط

$$x = ny$$

را رسم کنیم (مسئله۲) در آن صورت پاره‌خطی خواهیم داشت که چهارم جزء تناسب با عضوهای a ، b ، c خواهد بود. زیرا:

$$na/b = c/y \quad \text{یا} \quad a/b = c/ny.$$

طریقه دوم :

دوایر $(C ، a)$ و $(C_1 ، a)$ را که در آن C ، C_1 انتهای پاره‌خط c. می‌باشند رسم می‌کنیم محل برخورد آنها را نقطه B می‌نامیم. دایره $(B ، b)$ دوایر $(C ، a)$ و $(C_1 ، a)$ را در نقاط D ، D_1 قطع می‌کند. پاره خط DD_1 پاره خط مطلوب است.

(شکل 4,b .).

اثبات: مثلث‌های متساوی‌الساقین BCD ، C_1BD_1 هم ارزند (قابل‌انطباق) بنا براین

$$\widehat{CBD} = \widehat{C_1BD_1}.$$

چون

$$\widehat{CBC_1} = \widehat{DBD_1}.$$

پس: مثلث‌های متساوی‌الساقین CBC_1 و DBD_1 متشابه‌اند و داریم:

$$a/b = c/|DD_1|.$$

برای حالت $c \geqslant 2a$ ، $b \geqslant 2a$ مانند حالت اول ابتدا پاره‌خط na را طوری رسم می‌کنیم که $2na > c$ و $2na > b$ باشدسپس‌پاره خط y را که عضوی از طرفین تناسب $\frac{c}{y} = {}^{na}/_{b}$ می‌باشد رسم می‌کنیم . پاره‌خط ny ، پاره‌خط مطلوب خواهد بود .

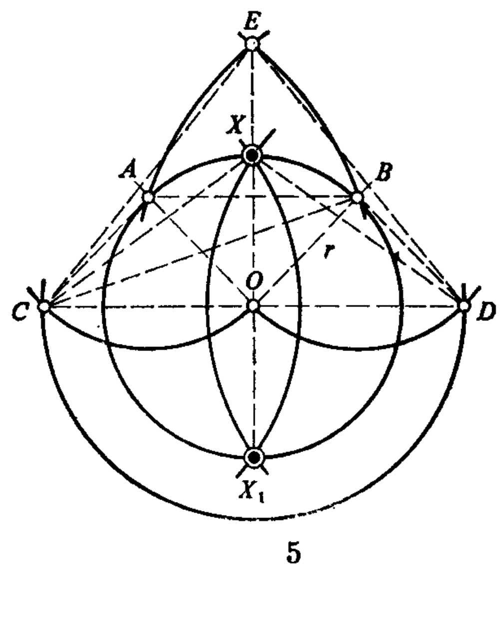
◀ مسئله ۴ :

کمان AB از دایره (O, r). را نصف کنید .

می‌توانیم فرض کنیم که مرکز دایره یعنی نقطه O معلوم است . بعدا یعنی در مسئله (۱۳) نشان خواهیم داد که چگونه به کمک پرگار می‌توان مرکز دایره را پیدا کرد .

حل : $a = |AB|$ را انتخاب و دایره‌های (o , a) و (A , r) و (B , r) را رسم‌کنیم

و محل برخورد آنها را نقاط C و D می‌نامیم . (شکل ۵) محل برخورد دوایر $(C , |CB|)$ $(D , |AD|)$ را هم نقطه E می‌نامیم . اکنون اگر دوایر $(C , |oE|)$ و $(D , |oE|)$ را رسم کنیم . نقاط برخورد آنها X ، X_1 خواهد بود . نقطه X کمان AB را نصف کرده است . نقطه X_1 هم کمانی رانصف‌می‌کندکه‌تواماباکمان‌اول‌محیط‌دایره‌رابوجودآورد .
(در حالتی که دایره (O , r) به تمامی رسم شده باشد می‌توانیم تنها یک دایره (یا $(C_1 \; |oE|)$ و یا $(D, |oE|)$) را رسم کنیم تا با قطع دایره (o , r) نقاط X، X_1 مشخص شود .)



5

اثبات :

شکلهای $ABOC$ ، $ABDO$ متوازی‌الاضلاع می‌باشند . بنا بر این نقاط C ، O ، D در یک امتداد قرار دارند :

$$([CO] \parallel [AB], \ \ [OD] \parallel [AB]).$$

از متساوی‌الساقین بودن مثلثهای CED و CXD نتیجه می‌شود که :

$$\widehat{COE} = \widehat{COX} = 90°.$$

پس پاره‌خط OX بروتر AB عمود است . در نتیجه‌برای اینکه نشان دهیم نقطه X ، کمان AB را نصف کرده است کافیست که نشان دهیم $|OX| = r$ چون $ABOC$ ، متوازی‌الاضلاع است پس داریم :

$$|AO|^2 + |BC|^2 = 2|OB|^2 + 2|AB|^2$$

$$r^2 + |BC|^2 = 2r^2 + 2a^2,$$

پس :

$$|BC|^2 = 2a^2 + r^2.$$

چون مثلث COE **قائم‌الزوایه است** از آنجا :

$$|CE|^2 = |BC|^2 = |OC|^2 + |OE|^2,$$

$$2a^2 + r^2 = a^2 + |OE|^2$$

$$|OE|^2 = a^2 + r^2.$$

بالاخره با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه COX داریم :

$$|OX| = \sqrt{|CX|^2 - |OC|^2} = \sqrt{|OE|^2 - |OC|^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + r^2 - a^2} = r.$$

این راه حل همچنین برای حالتی که کمان AB نیمدایره باشد($AB = 180$) صادق است. در اینجا نقاط A , B روی خط CD قرار می‌گیرند. و دایره(A , r)و (B , r) به‌ترتیب در نقاط C و D, بر دایره (O, a) مماس می‌شوند.

از آنجا که وسیله رسم (پرگار) ناقص است. مشخص کردن جای دقیق نقاط C , D مشکل است. در این حالت $(\overset{\frown}{AB} = 180°)$ لازم است که کمان A_1B_1 $(\overset{\frown}{A_1B_1} \neq 180°)$ را که در آن $\overset{\frown}{AA_1} = \overset{\frown}{BB_1} > 0$ و

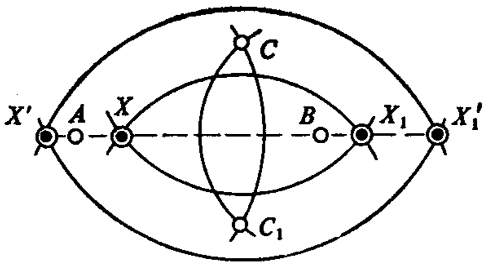
$$\overset{\frown}{AA_1} + \overset{\frown}{A_1B_1} + \overset{\frown}{B_1B} = \overset{\frown}{AB}.$$

را نصف کنیم. در این صورت وسط $\overset{\frown}{A_1B_1}$ همان وسط $\overset{\frown}{AB}$ خواهد بود. همانطور که قبلا مشاهده کردیم در هندسی پرگاری خط مستقیم با دو نقطه آن تعریف می‌شود. درمباحث آینده (مسائل ۲۲، ۲۳، ۲۴، ......) به کمک پرگار یک دو ویا چندنقطه را روی امتداد خط مشخص خواهیم کرد. این کار به طریق زیر امکان پذیر خواهد بود.

▶ مسئله ۵:

یک و یا چند نقطه در روی خط راست معلومی که با دو نقطه A ، B از آن تعریف شده مشخص کنید.

(AB) مفروض است. منظور ساختن $X \in (AB),\ X_1 \in (AB), \ldots$ می‌باشد



6

حل: طریقه رسم: نقطه دلخواهی مانند C را در خارج خط راست AB انتخاب می‌کنیم (شکل۶). نقطه C_1 قرینه C را نسبت به AB بدست می‌آوریم. (مسئله۱). دوایر (C , r)

و (C_1, r) را بشعاع دلخواه r رسم می‌کنیم . محل برخورد آنها نقاط مورد نظر X ، X_1 خواهد بود که روی خط راست AB قرار دارند . با تغییر r می‌توان نقاط دیگری مانند X' ، X_1' را روی خط بدست آورد .

اثبات : نقطه C_1 قرینه C است بنابر این خط راست AB عمود منصف CC_1 خواهد بود پس خط راست AB مجموعه نقاطی است که از نقاط C و C_1. به یک فاصله‌اند درحقیقت داریم :

$$|CX| = |C_1X| = r$$
$$|CX_1| = |C_1X_1| = r,$$

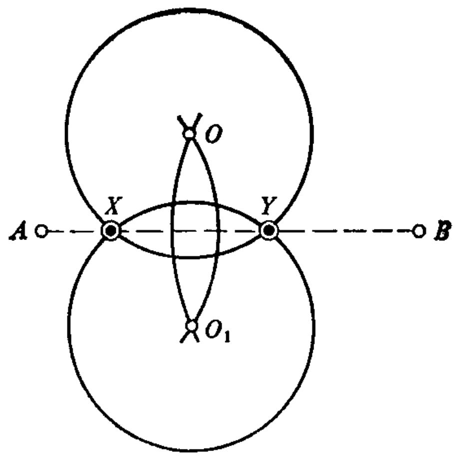
پس: $X \in (AB)$ و $X_1 \in (AB)$.

▶ مسئله ۶

طرز پیدا کردن نقاط برخورد یک دایره مانند (O , r) با خط راستی که به کمک A , B، دو نقطه از آن تعریف شده است .

حل : دایره (O , r) و خط (AB) مفروض است . منظور ساختن :

$$\{X;\ Y\} = (O,\ r) \cap (AB).$$



7

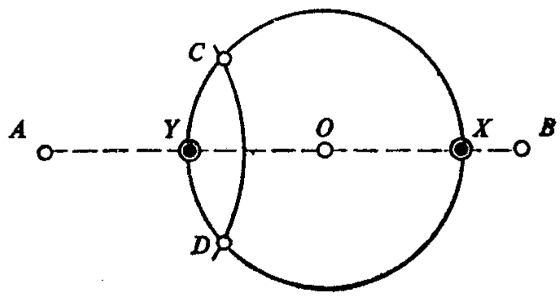
فرض بر این است که نقطه O مرکز دایره روی خط AB* قرار ندارد . شکل (۷) نقطه O_1 قرینه O مرکز دایره را نسبت به (AB) بدست می‌آوریم . (مسئله ۱)

دایره(O_1 ، r) که دایره مفروض را قطع کند نقاط مطلوب X ، Y را مشخص خواهد کرد .

اثبات : درمسائل گذشته نشان دادیم که نقاط X ، Y روی خط AB قرار دارند . این نقاط همچنین به دایره(O, r)هم تعلق دارند پس:

$$\{X;\ Y\} = (O,\ r) \cap (\underline{A}B).$$

مسئله در حالتی که نقطه O مرکز دایره روی خط(AB) باشد در شکل (۸)نشان داده شده‌است :



8

دایره و(A ، d)را بشعاع دلخواه d رسم می‌کنیم نقاط برخورد آن با دایره مفروض نقاط C ، D، خواهد بود . کمان CD از دایره (O ، r) را نصف می‌کنیم (مسئله۴) نقاط X ، Y نقاط مطلوب هستند .

نکته : پاره‌خطهای a ، r مفروضند به قسمی که $|AO| = a$ دایره (O ، r) را رسم می‌کنیم و عملیات بالا را تکرار می‌کنیم درنتیجه‌ما به مجموع‌وتفاضل دو پاره خط دست‌رسی‌خواهیم داشت :

$$|AX| = |AO| + |OX| = a + r \qquad |AY| = |AO| - |OX| = a - r.$$

---

* به کمک پرگار تنها به آسانی می‌توان تعیین کرد که آیا سه نقطه مفروض روی یک خط راست قرار دارند یا خیر . (به مسئله۱ مراجعه شود .)

▶ مسئله۷ :

نقاط تلاقی دو خط راست AB، و CD را پیدا کنید که هر یک از آنها با دو نقطه تعریف شده‌اند .

حل : خطوط (AB) و (CD) مفروضند منظور پیدا کردن نقطه X است به قسمی که داشته باشیم :

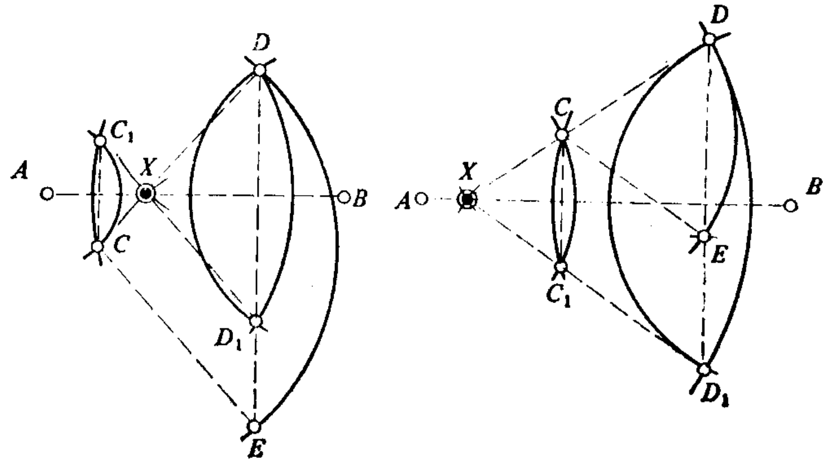
$$X = (AB) \cap (CD).$$

طریقه رسم : ابتداء C_1 ، D_1 قرینه‌های C ، D را نسبت به خط راست AB پیدا می‌کنیم . (شکل ۹) .

دایره‌های (D_1 ، $|CC_1|$) و (C_1 $|CD|$) را رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آنها را E می‌نامیم . پاره‌خط x را طوری می‌سازیم که یکی از عضوهای طرفین تناسب $|DE|/|DD_1| = |CD|/x$ باشد . (مسئله۳) محل برخورد دایره‌های (D ، x) و (D_1 ، x) نقطه مطلوب X را مشخص می‌کند .

اثبات : چون نقطه C_1 قرینه C و نقطه D_1 قرینه D می‌باشند ، اگر محل برخورد خطوط CD ، C_1D_1 را پیدا کنیم براحتی محل برخورد دو خط مفروض را پیدا خواهیم کرد

شکل CC_1D_1E متوازی‌الاضلاع خواهد بود در نتیجه نقاط D ، D_1، E روی یک خط راست قرار خواهند داشت . زیرا :



9

$$(DE) \parallel (CC_1)$$
$$(DD_1) \parallel (CC_1)).$$

مثلث‌های CDE و XDD_1 متشابه‌اند پس:

$$|DE|/|DD_1| = |CE|/|D_1X|,$$

اما :

$$|CE| = |CD| = |C_1D_1|.$$

پاره خط $|D_1X| = x$ عضوی از طرفین متناسب $|DE|/|DD_1| = |CD|/x$ ، است .

نکته : خطوط AB و CD موازی خواهند بود اگر و تنها اگر داشته باشیم :

$$|CC_1| = |DD_1|,$$

که در آن نقاط C_1 ، D_1 قرینه C و D نسبت به خط راست AB هستند .

* * *

بخش دوم

اکنون صحت قضیه اصلی هندسه پرگاری (مهر ـ ماسچرونی) را نشان میدهیم. هر مسئله قابل ترسیم به کمک خطکش و پرگار در صفحه اقلیدسی، همواره، تبدیل به مسائل بسیار ساده و قضایای اساسی می‌شوند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم:

۱) رسم کردن خط راست که دو نقطه از آن داده شده است.

۲) رسم دایره با مرکز و شعاع معلوم.

۳) پیدا کردن نقاط تقاطع دو دایره.

۴) پیدا کردن نقاط تقاطع دایره و خط راستی که دو نقطه از آن معلوم است.

۵) پیدا کردن نقطه تلاقی دو خط راست که هر یک از آنها با دو نقطه مشخص شده‌اند.

برای اینکه نشان دهیم هر مسئله قابل ترسیم به کمک پرگار و خط کش را می‌توان به کمک پرگار تنها هم‌حل (ترسیم) کرد ثابت می‌کنیم عملیات پنجگانه اصلی را که در بالا به آنها اشاره شد می‌توان به کمک پرگار تنها به انجام رساند. عمل دوم و سوم از عملیات‌فوق به کمک پرگار تنهاقابل ترسیم هستند. حل یا رسم بقیه آنها در مسائل ۷ـ۵ نشان داده شده است.

فرض می‌کنیم که مسئله مشخصی که به کمک خطکش و پرگار قابل حل می باشد، باید به کمک پرگار تنها حل‌شود. تصور کنیم که این مسئله را به‌کمک خطکش و پرگار حل شده باشد. در نتیجه حل مسئله به انجام‌یک رشته از عملیات پنجگانه فوق منجر خواهد شد. عملی شدن هر یک از این عملیات به کمک پرگار تنها، ما را به حل مسئله

اصلی قادر خواهد ساخت .

بــا مشــاهده حــل مسائــل هندســه به کمک پرگار تنـها به این نتیجه می‌رسیم که این راه حل به عنوان یک روش فوق‌العاده بغرنج ، طولانی و متکی به مهارتهای فوق‌العاده می‌باشد از این رو چاره‌ساز نیست .

در صورتیکه از نظر تئوری به ما امکان میدهد تا به صحت قضیه اصلی زیر واقف شویم :

▶ قضیهٔ اصلی : تمام مسائل ترسیمی قابل حل به کمک خطکش و پرگار ، قابل حل به کمک پرگار تنـها هم هستند .

حل مسائل ترسیمی هندسه به کمک پرگار تنـها

در این بخش در مورد حل مسائل هندسه جالبی که مهر ــ ماسچرونی همچنین آدلر به کمک پرگار روی آنـها کار اساسی انجام داده‌اند ، و حل بعضی از آنـها در اینجا آورده شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد .

▶ مسئله ۸

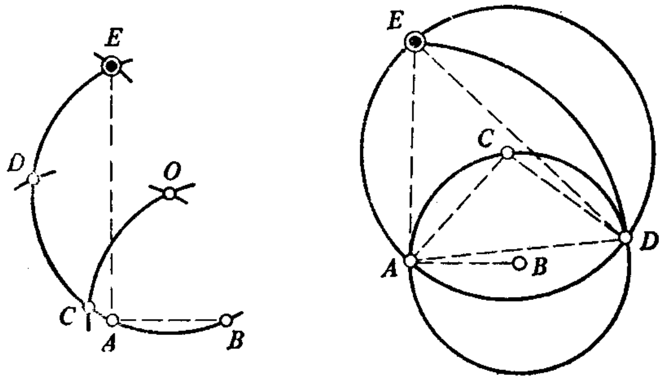
خط راستی رسم کنید که بر خط مفروض AB عمود بوده و از یکی از نقاط پایانی آن بگذرد .

حل : $[AB]$ داده شده است می‌خواهیم $(AE) \perp [AB]$. را رسم کنیم .

طریقه رسم اول : پرگار را به اندازه r که مقدار دلخواهی انتخاب شده بازکرده و دایره‌های $(A ، r)$ و $(B ، r)$ را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O. قطع کنند (یکی از نقاط تقاطع در نظر گرفته شده)

دایره (O, r) رارسم می‌کنیم و نقطه E را طوری انتخاب می‌کنیم که سر دیگر قطر

منتهی به $\tilde{B}$ گردد (مسئله ۲ را نگاه کنید) خط راست AE جواب مسئله خواهد بود.
(شکل ۱۰)



10 11.

یعنی :

$$(AE) \perp [AB].$$

زیرا زاویه BAE در دایره $(O ، r)$ محاط و روبروی قطر است.

طریقه دوم: دایره $(B , |AB|)$ را رسم کرده (شکل ۱۱) و نقطه دلخواه C را روی آن انتخاب می‌کنیم. دایره $(C ، |AC|)$ را هم رسم کرده و محل تلاقی آنها را D می‌نامیم. اکنون سومین دایره یعنی $(A ، |AD|)$ را رسم و محل برخورد آنها را با دایره $(C ، |AC|)$ با E نشان میدهیم (AE) بر $[AB]$ عمود خواهد بود. پس (AE) جواب مسئله است.

اثبات: پاره خط AC مرکزهای دوایر $(A ، |AD|)$ و $(C ، |AC|)$ را به هم وصل می‌کند و DE وتر مشترک آنهاست پس (AC) بر $[DE]$ عمود است و:

$$\widehat{CAD} = \widehat{CAE}$$

(مثلث ADE متساوی‌الساقین است) از طرفی

$$\widehat{CAD} = \widehat{ADC} = 0.5\ \overset{\frown}{AC}.$$

از تساوی آخر نتیجه می‌شود :

$$\widehat{CAE} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AC}.$$

پس خط راست AE در نقطه A مماس بر دایره $(\,|AB|\,،\,B)$ خواهد بود بنابراین (AE) بر $[AB]$ عمود است .

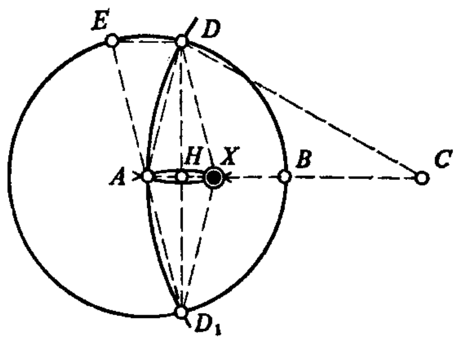
▶ مسئله ۹ :

پاره خطی رسم کنید که n بار کوچکتر از پاره خط AB باشد . (پاره خط AB را به n جزء مساوی تقسیم کنید که در آن $(n = 2, 3, \ldots)$ $|AB| = a$

حل : $[AB]$ ، $n \in N$ مفروضند . منظور رسم : $[AX]$ می‌باشد که در آن

$$|AX| = \frac{1}{n}\,|AB|.$$

طریقه اول : پاره خط $|AC| = n.|AB|$ را رسم کنیم (مسئله ۲) دایره $(\,|CA|\,،\,C)$ را هم رسم می‌کنیم تا دایره $(A\,،\,a)$ را در نقاط D ، D_1 قطع کند اکنون اگر دوایر $(D\,،\,a)$ و $(D_1 ، a)$ را رسم کنیم و محل برخورد آنها را X بنامیم AX ، پاره خط مطلوب خواهد بود . شکل (۱۲)



12

نقطه X روی خط راست AB قرار دارد و با افزایش AX ۲ ، ۳ و ۰۰۰۰ ـ ۱ n ـ مرتبه (مسئله ۲) نقاطی را بدست می‌آوریم که پاره خط AB را به n جزء مساوی تقسیم می‌کنند

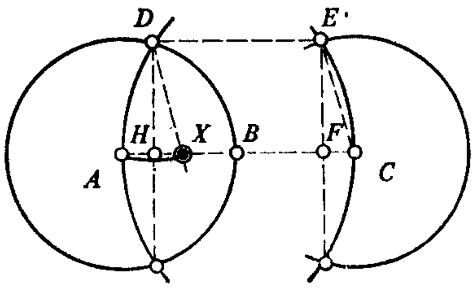
از تشابه مثلث‌های متشابه متساوی‌الساقین ACD و ADX (A در هر دو مشترک است) نتیجه می‌شود: یا:

$$|AC|/|AD| = |AD|/|AX|$$

$$|AD|^2 = a^2 = |AC|\cdot|AX| = na\cdot|AX|.$$

$$|AX| = \frac{1}{n}|AB| = \frac{1}{n}a.$$

نکته: برای مقادیر بزرگ n نقطه X با دقت تعریف نمی‌شود. زیرا دوایر (D , a) و (D_1 , a) یکدیگر را در نقطه X با زاویه خیلی کوچک قطع می‌کنند. دراین‌حالت برای اینکه نقطه X را با دقت پیدا کنیم بجای دایره (D_1 , a) دایره $(A, |DE|)$ رارسم می‌کنیم که در آن E یک سر قطر دایره (A , a) می‌باشدکه‌سردیگرآن D_1 می‌باشد.



13

طریقه دوم: پاره خط $|AC| = n . |AB|$ را رسم می‌کنیم. (مسئله۲) سپس دوایر $(A , |AC|)$ و $(C , |AC|)$ و (C , a) را هم رسم می‌کنیم تا در نقاط D و E یکدیگر را قطع کنند. اکنون اگر دوایر (D , a) و $(C , |DE|)$ رارسم کرده و محل برخورد آنها را X بنامیم داریم: شکل (۱۳)

$$|AX| = \frac{1}{n}|AB|$$

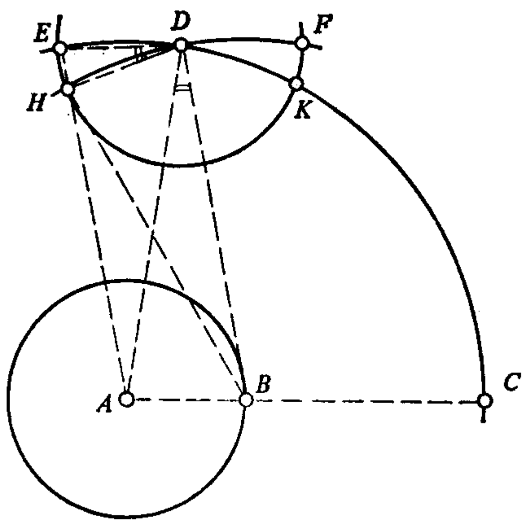
اثبات: نقطه X روی خط راست AB قرار دارد زیرا $[AC]$ موازی $[DE]$ و $[XC]$، موازی $[DE]$ است. (شکل $CEDX$ متوازی‌الاضلاع است)

برای تعریف زاویه بین دو کمان به فصل ۸ ، مراجعه کنید .
از تشابه مثلثهای متشابه متساوی‌الساقین ACD ، AXD داریم :

$$|AX| = \frac{1}{n}\,|AB|.$$

اکنون طریقه دیگری برای این منظور از آ ،س اسموگورزوسگی ارائه می‌دهیم . این طریق با طروق قبلی فرق دارد . در اینجا n امین جزء پاره خط AB روی آن پاره خط قرار ندارند :

طریقه سوم : $|AC| = n.\,|AB|$ را رسم می‌کنیم . (مسئله۲) و سپس دایره‌های $(A ، |AC|)$ و $(B ، |AC|)$ را رسم می‌کنیم . و محل برخورد آنها را D ، می‌نامیم . و دایره $(D, |AB|)$ را هم‌رسم می‌کنیم تا دوایر قبلی را در نقاط E و H قطع کند پاره خط EH جواب مسئله است . شکل (۱۴) .



14

اثبات : مثلث‌های ADE و BDH قابل انطباق هستند . (سه ضلع مساوی دارند)
از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین ADB ، EDH نتیجه می‌شود :

$$|EH|/|ED| = |AB|/|AD|,$$

$$|EH|/a = a/na.$$

$$|EH| = \frac{1}{n}\,a = \frac{1}{n}\,|AB|.$$

ملاحظه می‌شود که:

$$|EK| = \frac{\sqrt{4n^2-1}}{n}\,|AB|,$$

$$|HK| = \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)|AB|.$$

▶مسئله ۱۰:

پاره‌خطی 2^n بار کوچکتر از پاره‌خط مفروض AB رسم کنید. (پاره‌خط AB را به 2^n جزء مساوی تقسیم کنید که در آن. $n = 1, 2, 3,$)

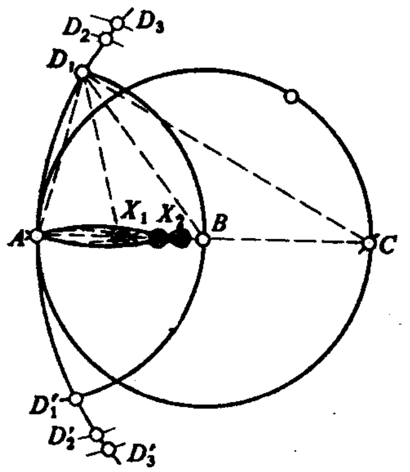
حل: $[AB]$ و $n \in N$ داده شده‌اند منظور ساختن $[BX_n]$ است که در آن:

$$|BX_n| = (1/2^n)\,|AB|,$$

در ضمن $|AB| = a$ می‌باشد.

طریقه رسم: روش اول– پاره‌خط $|AC| = 2|AB|$ را رسم می‌کنیم (مسئله ۲) دایره $(C, |AC|)$ را هم رسم کرده و محل برخورد آنها را با دایره (A, a)، D_1 و D'_1 می‌نامیم. حال اگر دایره‌های $(D_1, |AD_1|)$ و $(D'_1, |AD'_1|)$ را رسم کنیم محل برخود آنها X_1 را مشخص خواهد کرد. پاره‌خط BX_1 یکی از جوابهای مطلوب مسئله است

$$(|BX_1| = (1/2)\,|AB|)$$



شکل (۱۵) اکنون دایره ($|BD_1|$ ، A) را رسم و نقاط
تقاطع آن را بادایره ($|AC|$ ، C) و D_2 و D'_2 مــی‌نامیــم . دایـــره‌های
($|AD_2|$ ، D_2) و ($|AD'_2|$ ، D'_2) راهم رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در
نقطه X_2 قطع کنند . پاره خط BX_2 پاره‌خط مطلوب است .

$$(|BX_2| = (1/2^2)\ |AB|).$$

اگر باز هم دایره‌های:

($|BD_2|$ ، A) و ($|AD_3|$ ، D_3) و ($|AD'_3|$ ، D'_3) را رسم کنیم
نقطه X_3 حاصل خواهد شد . پاره خط BX_3 پاره‌خطی است که مورد نظر ماست :

$$(|BX_3| = (1/2^3)\ |AB|)$$

به همین ترتیب این کا را می‌توان ادامه داد . . . .

اثبات : از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین ACD_1 ، AD_1X_1 نتیجه می‌شود که :

$$|AD_1|/|AC| = |AX_1|/|AD_1|$$

$$a/2a = |AX_1|/a.$$

بنابراین :

$$|AX_1| = \frac{1}{2}\, a = \frac{1}{2}\, |AB| = |BX_1|.$$

همچنین با استفاده از نماد :

$$|BD_k| = m_k, k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

که در آن BD_1 میانه‌مثلث ACD_1 ، می‌باشد داریم :

$$4\,|BD_1|^2 = 2\,|AD_1|^2 + 2\,|CD_1|^2 - |AC|^2,$$

به عبارت دیگر :

$$\begin{aligned} 4m_1^2 &= 2a^2 + 2\,|AC|^2 - |AC|^2 \\ &= 2a^2 + |AC|^2 = 2a^2 + 4a^2, \end{aligned}$$

و این بدان معنی است که

$$m_1^2 = |BD_1|^2 = \frac{1+2}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2.$$

از تشابه مثلث‌های متساوی الساقین ACD_2 AD_2X_2 داریم:

$$|AD_2|/|AC| = |AX_2|/|AD_2|$$

با توجه به اینکه:

$$|AD_2| = |BD_1| = m_1$$

$$|AC| = 2a,$$

پس:

$$|AX_2| = \frac{3}{4}a \quad \text{or} \quad |BX_2| = \frac{1}{4}a = \frac{1}{2^2}|AB|.$$

یا:

بطریق مشابه داریم: $m_2^2 = \dfrac{1+2+2^2}{2^2}a^2$ and $|BX_3| = \dfrac{1}{2^3}|AB|,$

و بلاخره به طور کلی داریم:

$$m_{k-1}^2 = \frac{1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}}{2^{k-1}}a^2 \text{ and } |BX_k| = \frac{1}{2^k}|AB|.$$

نقطه X_n روی پاره خط AB قرار دارد. برای اینکه AB را به 2^n جزء مساوی تقسیم کنیم لازم است عملیات را برای پاره‌خط BX_n ، $2, 3, \ldots, 2^n-1$ بار تعمیم دهیم. (مسئله۲).

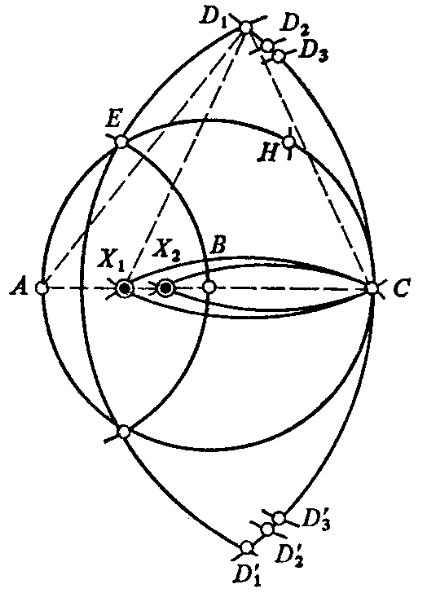
نقاط حاصل پاره‌خط AB را به 2^n جزء مساوی تقسیم خواهیم کرد.

طریقه دوم: پاره‌خط $|AC| = 2|AB|$ را رسم می‌کنیم (مسئله۲) برای این منظور نقطه C را روی دایره (B ، a) طوری انتخاب می‌کنیم که سر دیگر قطر منتهی به نقطه A، گردد. $(|AE| = |EH| = |HC| = a).$

دایره‌های (A ، $|AC|$) و (C ، $|CE|$) را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط D_1 ، D'_1 قطع کنند (شکل۱۶) نقطه مطلوب X_1 ازتقاطع دایره‌های (D_1 ، $|CD_1|$) و (D'_1 ، $|CD'_1|$) بدست می‌آید واضح است که:

$$|BX_1| = (1/2)|AB|.$$

دایره(C ، $|BD_1|$) را رسم



16

می‌کنیم تا دایره(A ، $|AC|$) را در نقاط D_2 ، D'_2 قطع کنند . اگــر دایــره‌هــای (D_2 ، $|CD_2|$) و (D'_2 ، $|CD'_2|$) را هم رسم کنیــم ، محــل برخورد آنها نقطه مطلوب X_2 خواهد بود . پاره‌خط BX_2 پاره‌خط مطلوب مسئله‌است .

$$(|BX_2| = (1/2^2)\ |AB|).$$

به طریق مشابه :

دایره‌های (C, $|BD_2|$) و (D_3 ، $|CD_3|$) و (D'_3 ، $|CD'_3|$)رسم می‌شوند و نقطه X_3 حاصل می‌شود در نتیجه پاره‌خط BX_3 پاره‌خط مطلوب مسئله می‌گردد :

$$(|BX_3| = (1/2^3)\ |AB|)$$

همین ترتیب کار ادامه پیدا می‌کند .

اثبات : از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین ACD_1 و CD_1X_1 داریم :

$$|CX_1|/|CD_1| = |CD_1|/|AC|.$$

و چون :

$$|CD_1| = |CE| = \sqrt{3}a,$$

پس:

$$|CX_1| = 3a/2,$$

و از آنجا :

$$|BX_1| = (1/2)\,|AB|.$$

اکنون بطور کلی $|BD_k| = m_k,$ را مشخص می‌کنیم که در آن $K = ۱، ۲ \ldots \ldots$ پاره‌خط BD_1 ، میانه مثلث ACD_1 است بنا بر این داریم :

$$\begin{aligned} 4\,|BD_1|^2 = 4m_1^2 &= 2\,|AD_1|^2 + 2\,|CD_1|^2 - |AC|^2 \\ &= 2\,|AC|^2 + 2\,|CE|^2 - |AC|^2 \\ &= 4a^2 + 2\cdot 3a^2 \end{aligned}$$

$$m_1^2 = \left(1 + \frac{3}{2}\right) a^2.$$

از مثلث‌های ACD_2 و AD_2X_2 داریم :

$$|CX_2|/|CD_2| = |CD_2|/|AC|.$$

با توجه به اینکه :

$$|CD_2| = |BD_1| = m_1$$

$$|AC| = 2\,|AB| = 2a,$$

داریم :

$$|CX_2| = \frac{|CD_2|^2}{|AC|} = \frac{m_1^2}{2a} = \frac{5}{2^2}\,a.$$

از آنجا :

$$|BX_2| = \frac{1}{2^2}\,|AB|.$$

به طریق مشابه ثابت می‌کنیم :

$$m_2^2 = |BD_2|^2 = \frac{9}{4}\,a^2, \quad |CX_3| = \frac{9}{8}\,a,$$

$$|BX_3| = \frac{1}{2^3}\,|AB|,$$

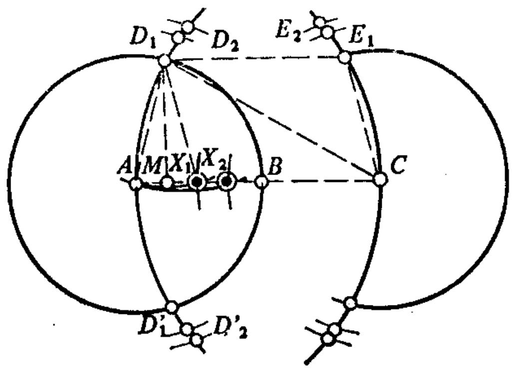
یا به طور کلی :

$$m_{k-1}^2 = |BD_{k-1}|^2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{3}{2^{k-1}}\right) a^2$$

$$|BX_k| = \frac{1}{2^k}\,a = \frac{1}{2^k}\,|AB|.$$

اگر طریقه اول را برای مقادیر بزرگ k $(k \leqslant n)$ بکار ببریم نقطه X_k بطور دقیق مشخص نمی‌شود. (کمانهایی‌از دایره که نقطه را مشخص می‌کنند تقریبا بر هم منطبقند) در این صورت مسئله را به طریق زیر می‌توان حل کرد:

طریقه سوم: پاره خط $|AC| = 2|AB|$ را رسم می‌کنیم (مسئله۲) دایره‌های $(A ، |AC|)$ و $(C ، |AC|)$ و $(C ، a)$ را هم رسم می‌کنیم نقاط تقاطع را مطابق شکل (۱۷) D_1 و E_1 می‌نامیم. نقاط تقاطع دایره های $(D_1 ، |AD_1|)$ و $(E_1 ، |D_1E_1|)$ نقطه مطلوب X_1 خواهد بود.



17

پار خط BX_1 پاره خط مطلوب است. یعنی:

$$(|BX_1| = (1/2)\,|AB|).$$

همچنین با رسم دایره‌های $(A ، |BD_1|)$ و $(C ، |BD_1|)$ پاره‌خطهای

$$[AD_2] \cong [E_2C] \cong [BD_1]$$

را بدست می‌آوریم و دایره‌های $(D_2 ، |AD_2|)$ و $(C ، |D_2E_2|)$ رارسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه X_2 قطع کنند. پاره‌خط BX_2 پاره‌خط مطلوب مسئله است و به همین ترتیب به کار خود ادامه می‌دهیم.

اثبات: فرض می‌کنیم که $|BD_k| = m$، باشد که در آن $k = 1, 2, \ldots, n.$

نقطه X_1 روی خط راست AC قرار دارد چون $[AC]$ موازی $[D_1E_1]$ است. (شکل AD_1E_1C، ذوذنقه است) همچنین $[CX_1]$ موازی با $[D_1E_1]$ می‌باشد. (شکل $X_1D_1E_1C$ متوازی‌الاضلاع است) بنا بر این $[X_1C]$ موازی $[AC]$، خواهد بود.

به طریق مشابه ثابت می‌شود که نقاط ..... X_2، X_3 روی پاره خط AC قراردارند
شکل $A D_1 E_1 C$ ذوذنقه متساوی‌الساقین است ($|CE_1| = |AD_1|$) بنابر این
می‌توان‌نوشت : $|MX_1| = |AM|$ که در آن $[MD_1] \perp [AC]$
پس‌داریم : $|D_1 E_1| = |X_1 C|$

$$|AD_1| = |D_1X_1| = [AD_1'] = |D_1'X_1| = a.$$

به طریق مشابه و به آسانی اثبات می‌شود که :

$$|AD_2| = |D_2X_2| = |AD_2'| = |D_2'X_2| = m_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|AD_k| = |D_kX_k| = |AD_k'| = |D_k'X_k| = m_{k-1}.$$

اکنون اگر استدلال را عینا کلمه به کلمه در مورد مسئله به طریق اول تکرار کنیم خواهیم داشت :

$$|BX_1| = \frac{1}{2}|AB|, \quad |BX_2| = \frac{1}{2^2}|AB|,$$
$$\ldots, |BX_k| = \frac{1}{2^k}|AB|, \ldots$$

▶ مسئله ۱۱ :

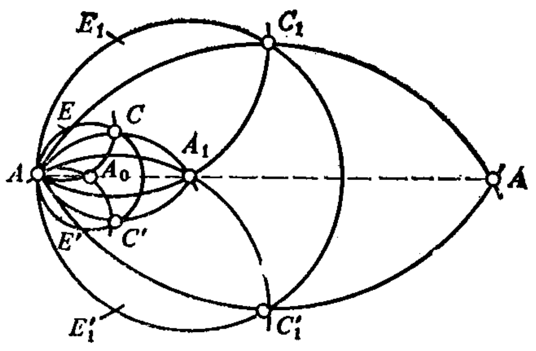
پاره‌خطی رسم کنید که 3^n برابر پاره‌خط AA_0 باشد. $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

حل : $[AA_0]$ و $n \varepsilon N$ داده شده‌اند می‌خواهیم $[AA_n]$ رارسم‌کنیم که در آن :

$$|AA_n| = 3^n |AA_0|.$$

طریقه رسم : دایره‌های ($A.$ ، $|AA.|$) و (A ، $|AA.|$)رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آنها را E، E' می‌نامیم . شکل (۱۸) حال اگر دایره‌های (E, $|AA_0|$) و (E' ، $|AA.|$) را رسم کنیم تا دایره ($A.$ ، $|AA.|$) را در نقاط C ، C' قطع کنند ، محل برخورد دایره‌های (C ، $|AC|$) و (C' ، $|AC'|$) را هم A_1 بنامیم , پاره‌خط AA_1 پاره‌خط مطلوب خواهد بود :

$$(|AA_1| = 3|AA_0|).$$



18

طریقه رسم در مورد پاره‌خط AA_0 را می‌توان برای AA_1 هم به کاربرد. درنتیجه پاره‌خط AA_2 رسم می‌شود که در آن $|AA_2| = 3^2\ |AA_0|$ است و همینطور می‌توان تقسیمات دیگر را انجام داد . . . .

اثبات : در مثلث متساوی‌الاضلاع ACC' داریم :

$$|AC| = |AC'| = |CC'| = \sqrt{3}\ |AA_0|,$$

$$h_{\triangle ACC'} = (\sqrt{3}/2)\ |AC| = (3/2)\ |AA_0|.$$

به آسانی دیده می‌شود :

$$|AA_1| = 2h_{\triangle ACC'} = 3\ |AA_0|.$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود :

$$|AA_2| = 3^2\ |AA_0|,$$

▶مسئله ۱۲ :

پاره‌خط AB را به سه جزء مساوی تقسیم کنید .

حل : $[AB]$ داده شده است منظور پیدا کردن :

$$[AX] \cong [XY] \cong [YB],\ X \in [AB],\ Y \in [AB].$$

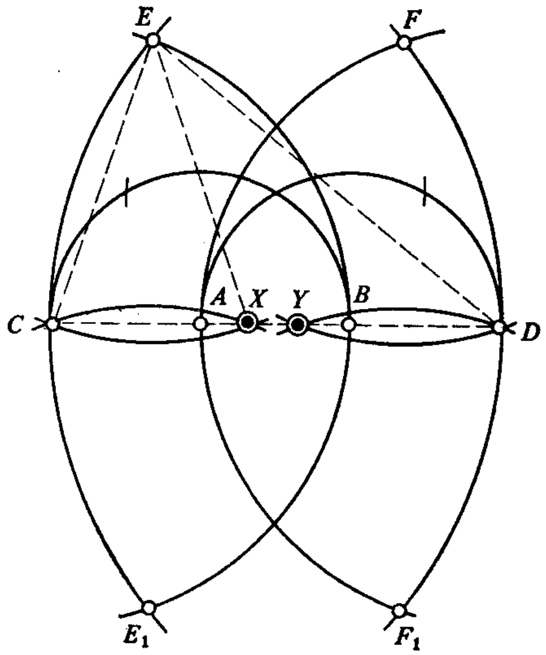
در این موردطریقه ظریفی را که‌توسط ل. ماسچرونی بکار رفته مورد مطالعه قرار می‌دهیم :

طریقه رسم :

نقاط D،C را روی پاره‌خط AB طوری تعیین می‌کنیم که داشته باشیم :

$$|CA| = |AB| = |BD|$$

(مسئله۲) اکنون دایره‌های $(C, |CB|)$ و $(C, |CD|)$ و $(D, |AD|)$ و $(D, |CD|)$ را رسم می‌کنیم . نقاط تقاطع را E، E_1، F، F_1 می‌نامیم شکل (۱۹) محل تقاطع دایره‌های $(E, |CE|)$ و $(E_1, |CE_1|)$ و همچنین دایره‌های $(F, |DF|)$ و $(F_1, |DF_1|)$ نقاط مطلوب XوY خواهند بود که پاره‌خط AB را به سه جزء مساوی تقسیم کرده‌اند .



19

اثبات : از تشابه دو مثلث متساوی‌الساقین CEX،CDE داریم :

$$|CX|/|CE| = |CE|/|DC|.$$

با توجه به اینکه :

$$|CE| = 2|AB|$$

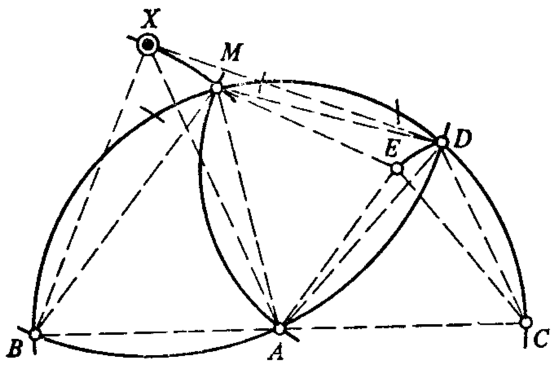
$$|CD| = 3\,|AB|,$$

پس:

$$|CX| = (4/3)\,|AB|,$$

بنا بر این:

$$|AX| = \frac{1}{3}\,|AB|.$$



20

▶مسئله۱۳:

مطلوبست مرکز دایره مفروض.

طریقه رسم: روی پیرامون دایره مفروض نقطه دلخواهی مانند A را انتخاب و دایره (A ، d) را به شعاع دلخواه d رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی را B ، D می‌نامیم. روی پیرامون دایره (A ، d) نقطه C را طوری تعیین می‌کنیم که یک سر دیگر قطر BC باشد. اکنون دایره‌های (A ، $|CD|$) و (C ، $|CD|$) را رسم کرده نقطه E محل برخورد آنها را بدست می‌آوریم. سرانجام دایره (E ، $|CD|$) را رسم می‌کنیم تا دایره (A ، d) را در نقطه M قطع کند. پاره‌خط BM برابر شعاع دایره اول است که دایره‌های (B ، $|MB|$) و (A ، $|BM|$) مرکز آن را مشخص می‌کنند شکل (۲۰)

اثبات:

مثلث‌های متساوی‌الساقین ACE و AEM قابل انطباق هستند پس:

$$\widehat{EAM} = \widehat{ACE}.$$

از طرف دیگر:

$$\widehat{BAE} = \widehat{ACE} + \widehat{AEC} \quad (\angle BAE$$

(BAE یکی از زوایای خارجی مثلث ACE است.)

و همچنین داریم:

$$\widehat{BAE} = \widehat{BAM} + \widehat{EAM}. \quad \text{:چون} \quad \widehat{BAM} = \widehat{AEC}.$$

به این ترتیب مثلث‌های متساوی‌الساقین ABM و ACE متشابه‌اند و داریم:

$$|BM|/|AB| = |AC|/|CE|$$

$$|BX|/|AB| = |AC|/|CD|.$$

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که مثلث‌های متساوی‌الساقین ABX و ACD متشابه‌اند

پس:

$$\widehat{BAX} = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{BAD} = \widehat{DAX};$$

چون

$$\widehat{BAD} = \widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 2\widehat{ACD} = 2\widehat{BAX}.$$

از تساوی زوایای BAX و DAX نتیجه می‌گیریم مثلث‌های متساوی‌الساقین ABX و ADX، با هم برابرند. در نتیجه:

$$|BX| = |AX| = |DX|.$$

نقطه X نقطه مطلوب یعنی مرکز دایره است.

نکته: به آسانی دیده می‌شود که پاره‌خط $d = |AB|$ بزرگتر از نصف شعاع دایره مفروض خواهد بود. به دیگر سخن دایره‌های $(C، |CD|)$ و $(A، |CD|)$ متقاطع نیستند. به این ترتیب در این فصل بدون اثبات، راه حل یکی از مسائل ماسچرونی را ارائه دادیم.

▶ مسئله ۱۴:

پاره‌خطی رسم کنید که $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ برابر پاره‌خط AB باشد.

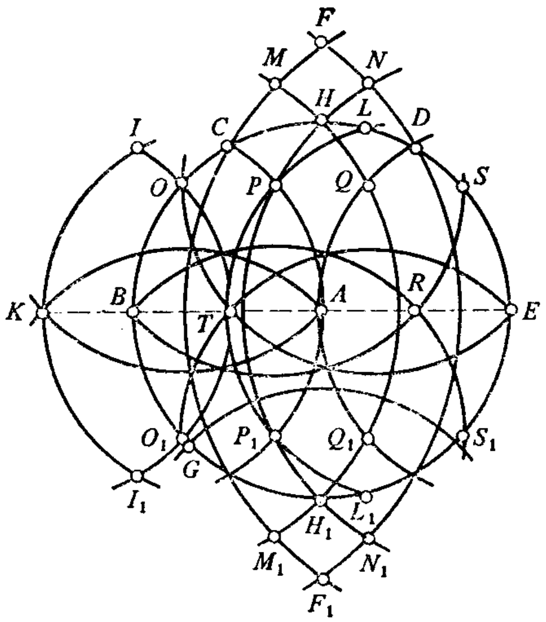
در صورتیکه $|AB| = 1,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 25.$

$[AB]$. داده شده است منظور رسم $\frac{1}{2}\sqrt{n}\,|AB|,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 25.$ می‌باشد.

طریقه رسم: دایره $(A,\ |AB|)$ را رسم کرده و نقطه B را روی آن مشخص می‌کنیم. نقطه E را طوری انتخاب می‌کنیم که E و B در سر قطر همین دایره باشند.

$$(|BC| = |CD| = |DE| = 1).$$

اکنون دایره‌های:



21

$(B,\ |BD|)$ و $(E,\ |EC|)$ را رسم و نقاط تقاطع آنها را F، F_1 می‌نامیم. دایره‌های $(B,\ |AF|)$ و $(E,\ |AF|)$ را هم رسم می‌کنیم تا دایره $(A,\ |AB|)$ را در نقاط H، H_1 و دایره $(B,\ |BD|)$ را درنقاط N و N_1 و دایره $(E,\ |EC|)$ را در نقاط M، M_1، قطع کند. اکنون دایره‌های $(E,\ |AE|)$ و $(B,\ |AB|)$ را رسم کرده و نقاط P و P_1 و Q و Q_1 را به ترتیب نقاط برخورد این دوایر با دایره‌های $(B,\ |AF|)$ و $(E,\ |AF|)$ در نظر می‌گیریم. شکل (۲۱) دایره‌های $(P,\ |BP|)$ و $(P_1,\ |BP_1|)$ یکدیگر را درنقطه R و دایره $(A,\ |AB|)$ را در نقاط S و S_1 قطع می‌کند. به همین طریق دایره‌های $(Q,\ |EQ|)$ و $(Q_1,\ |EQ_1|)$ یکدیگر را در نقطه T و دایره $(A,\ |AB|)$ را در نقاط

O و O_1 قطع خواهد کرد. حال دایره‌های $(|AB|، R)$ و $(|AB|، F_1)$ را رسم می‌کنیم محل برخورد آنها را با دایره $(|AB|، A)$ نقاط L و L_1 و G می‌نامیم. باز دایره‌های $(|OA|، O)$ و $(|OA_1|، O_1)$ را رسم محل برخوردشان را k می‌نامیم. سرانجام دایره‌های $(|AB|، k)$ و $(|AB|، T)$ را رسم و محل برخوردشان را با I، I_1 نشان میدهیم پس:

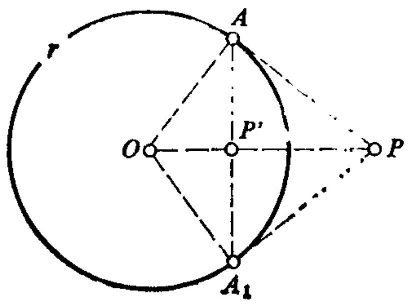
$$|AT|=\frac{1}{2}\sqrt{1},\quad |PT|=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad |DR|=\frac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{4},\quad |HT|=\frac{1}{2}\sqrt{5},\quad |AM|=\frac{1}{2}\sqrt{6},$$
$$|QQ_1|=\frac{1}{2}\sqrt{7},\quad |AF|=\frac{1}{2}\sqrt{8},\quad |BR|=\frac{1}{2}\sqrt{9},$$
$$|BL|=\frac{1}{2}\sqrt{10},\quad |PS_1|=\frac{1}{2}\sqrt{11},\quad |BD|=\frac{1}{2}\sqrt{12},$$
$$|HK|=\frac{1}{2}\sqrt{13},\quad |BS|=\frac{1}{2}\sqrt{14},\quad |LL_1|=\frac{1}{2}\sqrt{15},$$
$$|BE|=\frac{1}{2}\sqrt{16},\quad |FK|=\frac{1}{2}\sqrt{17},\quad |KN|=\frac{1}{2}\sqrt{18},$$
$$|KD|=\frac{1}{2}\sqrt{19},\quad |FG|=\frac{1}{2}\sqrt{20},\quad |I_1D|=\frac{1}{2}\sqrt{21},$$
$$|KS|=\frac{1}{2}\sqrt{22},\quad |MM_1|=\frac{1}{2}\sqrt{23},\quad |MN_1|=\frac{1}{2}\sqrt{24},$$
$$|KE|=\frac{1}{2}\sqrt{25}=\frac{1}{2}\sqrt{25}\,|AB|.$$

بخش سوم

انعکاس و ویژگیهای اساسی‌آن

در اواخر قرن۱۹، آ ـ آدلر اصول انعکاس‌را در هندسه ترسیمی به کمک تنها پرگار معین کرد .

در این فصل انعکاس را تعریف کرده و منحصرا به ویژگیهای اساسی آن تاکید می‌کنیم که در اینجا مورد بحث ما است . فرض می‌کنیم دایره(O ، r)و نقطه P متمایزاز نقطه O در صفحه موجود باشد . شکل (۲۲) روی نیم خط OP ، نقطه P' را طوری انتخاب می‌کنیم که:



22

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2. \qquad (1)$$

نقطه P' منعکس نقطه P نسبت به دایره $(O\,،\,r)$ نامیده می‌شود. دایره $(O\,،\,r)$ دایـره انعکاس و نقطه O مرکز انعکاس و مقدار r^2 را تـوان انعکاس می‌نامند. اگرنقطه P' منعکس P باشد، واضح است که P هم منعکس P' خواهد بود. تنـاظر بین نقاط انعکاس و یـا بـه سخن دیگر تبدیل آنها به یکدیگر به قسمی که بازاء هر نقطه P از شکلی نقطه دیگری مانند P' را داشته باشیم انعکاس* نامیده می‌شود. از تعریف انعکاس معلوم می‌شود کـه بازاءهر نقطه P از صفحه یک نقطه‌منحصر به فرد از همان صفحه‌مانند P' وجود دارد اگر $|OP| > r$ باشد در آن صورت $|OP'| < r$ خواهد بود. در این مورد نقطه O مرکز تقارن مستثنی است. اما نقطه‌ای از صفحه می‌تواند منعکس O باشد و این مستقیما از (1)** نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم که (AP) و (A_1P) مماس بر دایره انعکاس $(O\,،\,r)$ از نقطه P در خارج‌باشند شکل (۲۲) در آن صورت نقطه P' محل برخورد دو خط AA_1 و OP منعکس P خواهد بود. در واقع در مثلث قائم‌الزاویه OAP (AP' ارتفاع است) داریم:

$$|OP|\cdot|OP'| = |OA|^2 = r^2.$$

اگر نقطه P روی کمانی مانند L حرکت کند در آن صورت منعکس آن P' هم‌روی کمانی مانند L' حرکت خواهد کرد. در اینصورت کمانهای $L\,،\,L'$ را منعکس متقابل (دو به دو) می‌نامند.

---

* فرض می‌کنیم $|OA| = r = 1$ و $|OP| = R$ و $|OP'| = R'$ باشد دراین‌صورت رابطه (۱) به‌صورت $R = 1/R'$ نوشته خواهد شد، درنتیجه فاصله‌نقاط انعکاس P و P' از نقطه O مرکز انعکاس نسبت معکوس خواهد داشت.

inversio به معنای واگذار کردن‌و یا جا عوض کردن است. *inversion* را همچنین تبدیل شعاع به طور معکوس هم معنی کرده‌اند.

** از نظر تئوری درنگاشت تصویری، نقطه O بیک نقطه در بی‌نهایت دور وابسته می‌شود. زیرا اگر $|OP'| \to 0$ در آن‌صورت $|OP| \to \infty$ بطور کلی انعکاس، نقاط داخل دایره $(O\,،\,r)$ را به نقاط خارج آن تبدیل می‌کند و برعکس.

▶ لم : اگر نقاط Q',P' منعکس نقاط P ، Q نسبت به دایره ($O،r$) باشنددرآن صورت

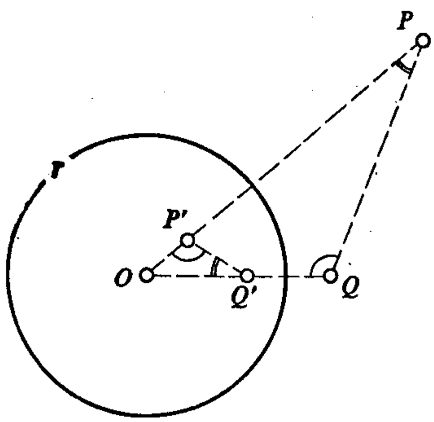
$$\angle OP'Q' \cong \angle OQP \quad \text{و} \quad \angle OQ'P' \cong \angle OPQ.$$

اثبات : از تساوی :

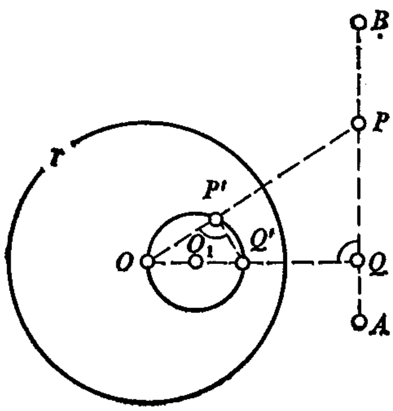
$$|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \times |OQ'| = r^2$$
$$|OP| / |OQ| = |OQ'| / |OP'|$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که مثلث‌های $OQ'P'$ ، OQP با هم متشابه‌اند .

شکل (۲۳) و این "لم" به اثبات می‌رسد .



23



. 24

▶ قضیه : اگر دو خط خمیده (منحنی) یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع کنند ، در آن صورت منحنی منعکس آنها هم یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P' قطع خواهندکرد به قسمی که P ، P' منعکس یکدیگر باشند .

▶ قضیه۲ : منعکس هر هر خط راستی که از مرکز انعکاس بگذرد بر خودش منطبق است .

▶ قضیه۳ : اگر یک منحنی منعکس خط راستی مانند AB باشد که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد در آن صورت منحنی دایره‌ای مانند (O_1، $|OO_1|$) خواهد بود که از مرکز O انعکاس می‌گذرد و همواره (OO_1) بر (AB) عمود است .

اثبات : فرض می‌کنیم Q پای عمودی باشد که از نقطه O مرکز انعکاس بر خط مفروض فرود آمده است . منعکس نقطه Q را Q' می‌نامیم . نقطه دلخواهی مانند P روی خط راست مفروض انتخاب و منعکس آن را هم با P' نشان میدهیم . شکل (۲۴) بنا بر لـم

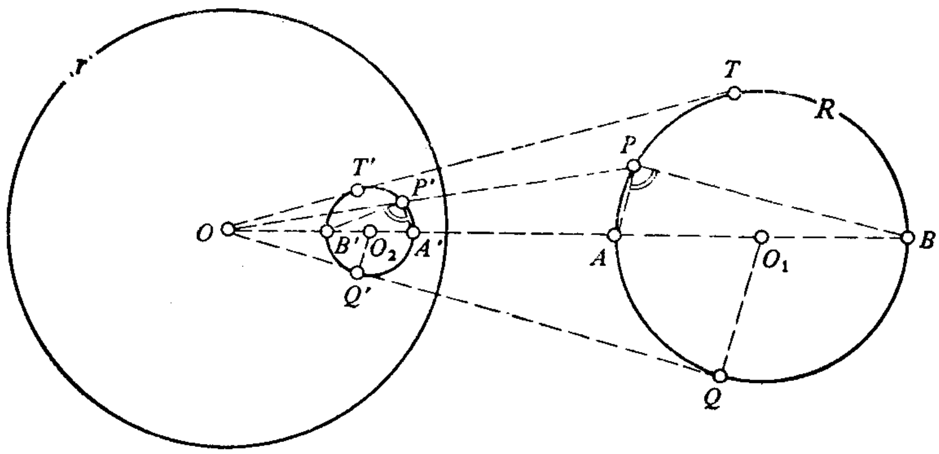
قبلی داریم :

$$\widehat{OP'Q'}=\widehat{OQP}=90°.$$

در نتیجه وقتی نقطه P سرتاسر خط AB را طی مـی‌کند ، منعکس آن P' دایره‌ای را طی خواهد کردکه پاره‌خط OQ' قطر آن است . چون دایره ($|OO_1|$ ، O_1) و خط راست مفروض AB منعکس متقابل‌اند پس عکس قضیه هم درست است . یعنی دایره‌ای‌که از مرکز انعکاس بگذرد ، منعکس یک خط راست است .

▶ قضیه۴ : هر منحنی که منعکس دایره (O_1 ، r) بوده و از مرکز انعکاس نگذرد یـک دایره است در این حالت مرکز انعکاس مر کز تشابه این دو دایره خواهد بود .

اثبات : OO_1 را خط‌المرکزین دوایر (O ، r) و (O_1 ، R) در نظر می‌گیریم که دایره دوم را در نقاط A ، B قطع کرده است . منعکس A و B را A' و B' فرض می‌کنیم . نقطه دلخواهی مانند P روی دایره (O_1 ، R) انتخاب و منعکس آن را هم با P' نشان میدهیم . شکل (۲۵) مطابق "لم" داریم :



25

$$\angle OA'P' \cong \angle OPA \text{ and } \angle OB'P' \cong \angle OPB,$$

$$\widehat{OB'P'}-\widehat{OA'P'}=\widehat{OPB}-\widehat{OPA}.$$

در مثلث‌های $A'P'B'$ و APB داریم :

$$\widehat{AP'B'}=\widehat{OB'P'}-\widehat{OA'P'} \text{ and } \widehat{APB}=\widehat{OPB}-\widehat{OPA}=90°.$$

با توجه به تساوی‌های قبلی خواهیم داشت :

$$\widehat{A'P'B'} = \widehat{APB} = 90^\circ.$$

اکنون اگر نقطه P روی دایره $(O_1 ، R)$ تغییر نشان دهد در آن صورت منعکس آن یعنی نقطه P' هم دایره $(O_2 ، |O_2P'|)$ را رسم خواهد کرد که پاره‌خط $A'B'$ قطر آن می‌باشد ، قضیه ثابت شده است . اگر QQ' و TT' مماسهای مشترک خارجی دایـــره $(O_1 ، R)$ و $(O_2 ، |O_2P'|)$ منعکس آن باشند در آن صورت نقاط تماس Q و Q' ، T و T' همواره منعکس متقابل (دوبدو) خواهند بود . خط عمود در نقطه Q' بر مماس QQ' ، خط‌المرکزین OO_1 را در نقطه Q_2 که مرکز دایره منعکس دایره مفروض است قطع خواهد کرد . از مثلث‌های قائم‌الزاویه OO_1Q ، OO_2Q' نتیجه می‌شود :

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{|OQ|}{|OQ'|} = k,$$

که در آن k نسبت تجانس دایره‌های $(O_2 ، |O_2P'|)$ و $(O_1 ، R)$ نامیده می‌شود :

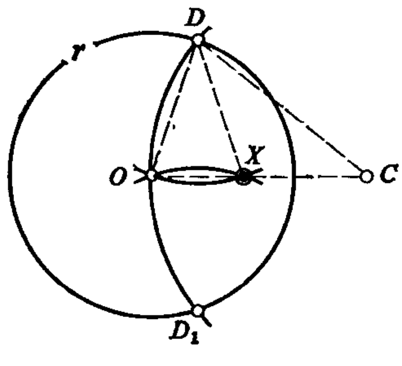
$$\mathbf{H}_O^k(\smile Q'B'T') = \smile QAT \qquad \mathbf{H}_O^k(\smile Q'A'T') = \smile QBT,$$

که در آن $\mathbf{H}_O^k$ نماد تجانس یا تبدیل با مرکز تجانس O و نسبت k می‌باشد . باید توجه داشت که $\smile Q'B'T'$ منعکس $\smile QBT$ و $\smile Q'A'T'$ منعکس $\smile QAT$ است .

بخش چهارم

کاربرد اصول انعکاس در هندسه پرگاری.

کاربرد اصول انعکاس در حل مسائل ترسیمی بوسیله پرگار تنها، بنوعی تمایل همگانی برای حل مسائل در هندسه پرگاری‌بوجودآورده است. ساختمانهای هندسی (ترسیمات هندسی) "مهر"، و"ماسچرونی"گر چه فوق العاده ظریف و گیرا هستند، معهذا در اکثر موارد انجام چنین‌عملیات ساختگی این سئوال را پیش‌می‌آورد که چگونه آنها باین نتایج رسیده‌اند.



26

▶مسئله ۱۵:

مطلوبست تعیین نقطه X منعکس نقطه مفروض C نسبت به دایره انعکاس (O,r)

حل: دایره (O ، r) و نقطه C مفروضند. منظور پیدا کردن نقطه‌ای مانند X است به قسمی که:

$$X \in [OC), \qquad |OX| \cdot |OC| = r^2.$$

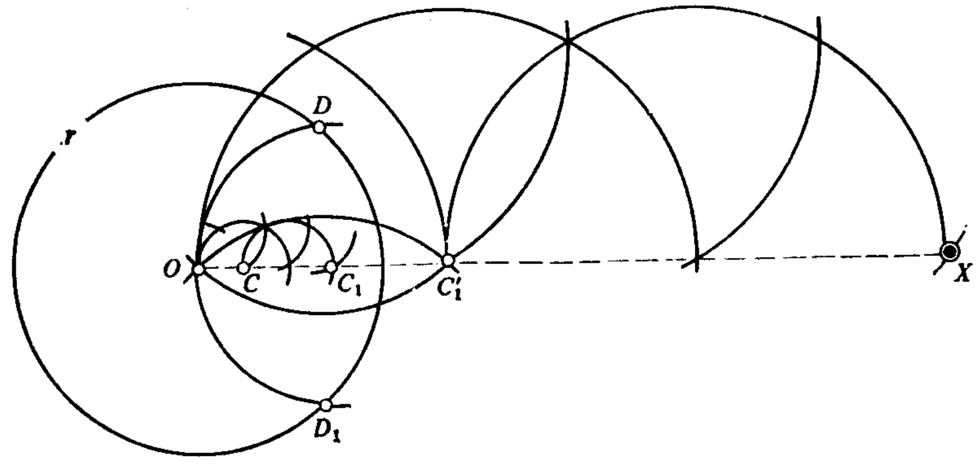
طریقه رسم: اگر: $|OC| > r/2$ باشد شکل (۲۶) در آن صورت دایره ($|OC|$ ، C) را رسم و محل برخورد آنها را با دایره انعکاس (O ، r) نقاط D ، D_1 می‌نامیم. حال اگر دایره‌های ($|OD|$ ، D) و ($|OD_1|$ ، D_1) را رسم کنیم محل برخورد آنها نقطه X را مشخص خواهد کرد.

اثبات: از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین CDO و DOX داریم:

$$|OC|/|OD| = |OD|/|OX|,$$

$$|OC| \cdot |OX| = |OD|^2 = r^2.$$

نکته: به‌آسانی دیده می‌شود که این راه حل منطبق به راه حل طریقه اول در مسئله ۹ می‌باشد به شرطی که نقطه C را نقطه‌ای در نظر بگیریم که در ساختن پاره‌خط $|AC| = n|AB|$. منظور شده است. ضمن حل مسئله ۱۵ می‌توان به حل مسئله ۹ از طریق اول مراجعه نمود. همچنین دیده می‌شود در اینجا از طریقه دوم حل مسئله ۹ هم می‌توان استفاده کرد. (در این صورت پاره‌خط ($|AC| = n|AB|$) ساخته نخواهد شد.)



27

طریقه رسم : اگر $|OC| \leqslant r/2$ باشد (شکل۲۷) در آن صورت دایره ($|OC|$ ، C)
دایره انعکاس را قطع نخواهد کرد . بنا بر این پاره‌خط ($|OC_1| = n\,|OC|$)
را می‌سازیم و عدد طبیعی n را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم
$|OC_1| > \frac{r}{2}$ (مسئله۲) نقطه C_1' منعکس نقطه C_1 را (طریقه اول رسم)
بدست می‌آوریم و پاره‌خط $|OX| = n\,|OC_1'|$ را می‌سازیم . پس نقطه X ،
منعکس نقطه C خواهد بود .

اثبات : با تعویض $|OC_1| = n\,|OC|$ و $|OC_1'| = |OX|/n$ در تساوی

$$|OC_1|\cdot|OC_1'| = r^2,$$

نتیجه می‌شود :

$$|OC_1|\cdot|OC_1'| = n\,|OC|\cdot\frac{|OX|}{n} = |OC|\cdot|OX| = r^2.$$

نکته : شرط امکان ترسیمات فوق آن است که نقطه C مرکز انعکاس نباشد .

▶مسئله۱۶ :
(O ، r) دایره انعکاس و خط راست AB که از مرکز انعکاس نگذشته مفروض است .
مطلوبست دایره انعکاس خط مفروض.

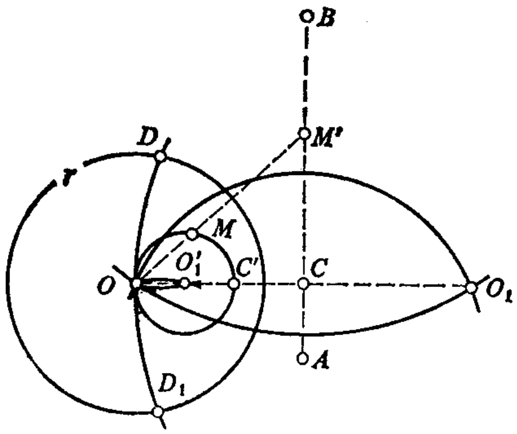
حل : دایره (O ، r) و (AB) داده شده‌اند . (O بروی خط AB قرار ندارد) می‌خواهیم
دایره ($|OO_1'|$ ، O_1') منعکس AB را رسم کنیم .

طریقه رسم : نقطه O_1 قرینه نقطه O مرکز انعکاس را نسبت به خط AB بدست می‌آوریم
(مسئله۱) . نقطه O_1' منعکس نقطه O_1 را هم پیدا می‌کنیم . (مسئله۱۵) دایره
$|OO_1'|$ ، O_1' منعکس خط مفروض AB خواهد بود شکل (۲۸)

اثبات : C', C را به ترتیب نقاط برخورد خط راست OO_1 با خط راست AB و دایره
($|OO_1'|$ ، O_1') در نظر می‌گیریم . از ترسیمات مفروض نتیجه می‌شود

$$|OO_1|\cdot|OO_1'| = r^2,\ |OO_1| = 2\,|OC|,$$
$$|OC'| = 2\,|OO_1'|,\ (OC) \perp (AB).$$

$$|OO_1|\cdot|OO_1'| = 2\,|OC|\cdot\frac{|OC'|}{2} = |OC|\cdot|OC'| = r^2.$$

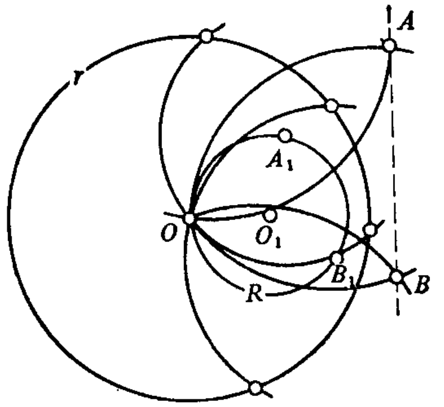


28

بنا بر قضیه (۳) دایره $(O_1' , |O O_1'|)$ منعکس خط راست $A B$ خواهد بود .
نکته : اگر خط راست از مرکز انعکاس بگذرد ، در آن صورت منعکس آن برخودش منطبق خواهد شد (قضیه۲) .

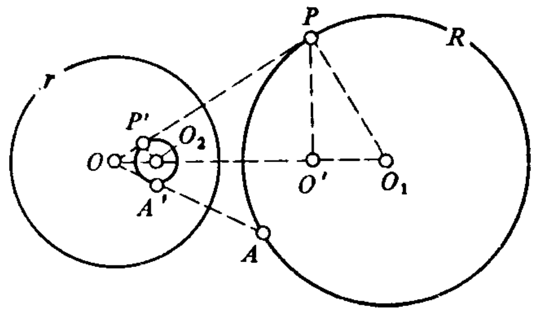
▶مسئله ۱۷ :

مطلوبست رسم خط راست $A B$ منعکس دایره مفروض (O_1,R) که از نقطه O، مرکز انعکاس گذشته است .



29

طریقه رسم : اگر دایره مفــروض دایره انعکاس را در نقاط A , B قطع کرده باشد ،درآن صورت خط راست $A B$ منعکس این دایره خواهد بود . در غیر این صورت نقاط A_1 ،



30

B_1 را روی دایره مفروض اختیار می‌کنیم شکل (۲۹) و منعکس آنها را بدست می‌آوریم (مسئله ۱۵) خط راست AB منعکس دایره مفروض (O_1, R) خواهد بود.
با تغییر دادن نقاط B_1, A_1 در روی دایره مفروض، (یا بکار بردن مسئله ۵) می‌توان چند نقطه دیگر از این خط مطلوب را بدست آورد. درستی این ترسیمات از قضیه (۳) نتیجه می‌شود.

▶ مسئله ۱۸:

دایره (O_1, R) از نقطه O مرکز انعکاس نگذشته است. مطلوبست دایره‌ای که منعکس دایره مفروض باشد.

طریقه رسم: دایره (O_1, R) را به عنوان دایره انعکاس در نظر گرفته و نقطه O' منعکس O را نسبت به آن پیدا می‌کنیم. (مسئله ۱۵) اکنون نقطه O_2 منعکس O' را نسبت به دایره انعکاس (O, r) پیدا می‌کنیم. نقطه O_2 مرکز دایره مطلوب خواهد بود. (شکل ۳۰)
حال اگر نقطه دلخواهی مانند A روی دایره (O_1, R) انتخاب کنیم نقطه A' منعکس آن را بدست آوریم، دایره $(O_2, |O_2A'|)$ منعکس دایره مفروض (O_1, R) خواهد بود.
اثبات: PP' را مماس مشترک خارجی دایره‌های (O_1, R) و $(O_2, |O_2A'|)$ در نظر می‌گیریم. (PO') عمود بر (OO_1) خواهد بود. از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه OPO' و $OP'O_2$ داریم:

$$|OO_2|/|OP'| = |OP|/|OO'|$$

$$|OO_2|\cdot|OO'| = |OP|\cdot|OP'| = r^2,$$

P', P منعکس متقابل هستند . از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که نقاط O_2 و O' هم منعکس هم نسبت به دایره انعکاس (O, r) می‌باشند . در مثلث‌های قائم‌الزاویه $O O_1 P$ پاره‌خط $O'P$ ارتفاع مثلث محسوب می‌شود پس:

$$|O_1O| \cdot |O_1O'| = |O_1P|^2 = R^2.$$

به این ترتیب نقطه O' منعکس نقطه O نسبت به دایره (O_1, R) خواهد بود ، به شرطی که آنرا به عنوان دایره انعکاس در نظر بگیریم . بنا بر این نقطه O که داده‌شده است ، پس ابتدا نقطه O' را پیدا می‌کنیم . به دنبال آن O_2 مرکز دایره مطلوب را بدست می‌آوریم .

نکته: با بکار بردن محاسبات‌بسیار پیچیده می‌توانیم ثابت کنیم که ترسیمات مفروض همچنان معتبر باقی خواهد ماند ، اگر نقطه O مرکز انعکاس در داخل دایره‌مفروض (O_1, R) قرار بگیرد .

* * *

در مسائل ۱۸–۱۵ نشان دادیم که چگونه می‌توان اشکال مربوط به انعکاس نقطه و خط راست و یا دایره را به کمک پرگار تنها رسم کنیم .

اکنون روش کلی ارائه میدهیم که ترسیمات هندسی را به کمک پرگار تنها به انجام می‌رساند . از ترسیماتی که توسط پرگار و خطکش انجام می‌گردد در نهایت شکلی مانند Φ حاصل می‌شود که از دوایر و خطوط راست و چند نقطه تشکیل شده است . حال اگر دایره‌ای مانند (O, r) را به عنوان دایره انعکاس طوری در نظر بگیریم که مرکز آن روی خط راست و یا دوایر شکل Φ نباشد و منعکس شکل Φ را نسبت باین دایره پیدا کنیم شکل Φ را خواهیم داشت . واضح است که شکل Φ' فقط از دوایر و چند نقطه تشکیل خواهد شد . در مسائل ۱۸–۱۵ مشاهده کردیم که هر یک از این نقاط و خطوط راست قابل ترسیم با پرگار تنها هستند .

اکنون فرض می‌کنیم که با مسئله‌ای مواجه هستیم که قابل ترسیم با پرگار و خطکش است اما ما تنها پرگار در دسترس داریم . باز فرض می‌کنیم که این مسئله‌قابل‌حل به کمک پرگار و خط کش ، شکلی مانند Φ داشته باشد که از چند دایره چند خط و چند نقطه تشکیل شده باشد . این شکل با چندعمل محدود و با رسم چند خط‌راست و چند دایره از طریق زیر به انجام خواهد رسید .

دایره مناسبی مانند (O, r) را به عنوان دایره انعکاس انتخاب کرده Φ',
منعکس شکل Φ را نسبت به دایره انعکاس پیدا کنیم . (مسائل ۱۸–۱۵)
شکل Φ' فقط از چند دایره و چند نقطه تشکیل خواهد شد .
(باید O را طوری انتخاب کنیم که روی خطوط و دوایر شکل Φ نباشد)

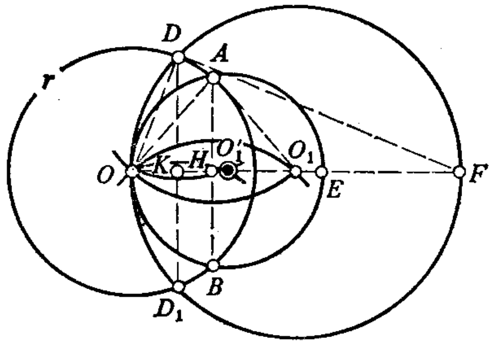
حال اگر منعکس شکلی را بدست آوریم که در شکل Φ' به عنوان **جواب** مطلوب محسوب می‌شود در آن صورت نتیجه مطلوب **حاصل می‌شود** :
باید توجه داشت که ترسیمات شکل Φ' را به ترتیبی انجام میدهیم که در ساختن شکل Φ توسط پرگار و خطکش بکار رفته است . به کمک روش فوق می‌توان تمام ترسیمات هندسی را که به کمک خطکش و پرگار انجام می‌گیرد ، تنها به کمک پرگار به انجام رساند . به این ترتیب نتایج مهم مهر–ماسچرونی یک بار دیگر به کمک انعکاس به اثبات می‌رسد .

نمونه مسئله ۷ را از این طریق به اثبات می‌رسانیم :

می‌خواهیم محل برخورد دو خط راست AB و CD راکه‌هرکدام‌ازآنها‌بادونقطه نشان داده شده‌اند پیدا کنیم . دایره دلخواه (O, r) را به عنوان دایره انعکاس طوری در نظر می‌گیریم که مرکز آن–نقطه O روی هیچ یک از خطوط مفروض قرار نداشته باشد . در این صورت منعکس این‌دوخط‌رانسبت به این دایره پیدا می‌کنیم . محل برخورد آنها نقطه X' را میدهد . (مسئله۱۶) و نقطه X منعکس X' (مسئله۱۵) همان نقطه مطلوب است که محل برخورد دو خط CD, AB را مشخص خواهد کرد . و قابل رسم است . در اینجا شکل Φ از دو خط راست CD, AB (دقیق‌تر از چهار نقطه D, C, B, A که بین آنها باید خط راست‌رسم شود) تشکیل شده است . و شکل Φ' از دو دایره تشکیل می‌شود که منعکس‌های این خطوط هستند . جواب مجازی مطلوب در شکل Φ' همان X' است و جواب حقیقی مطلوب X منعکس نقطه X' خواهد بود که محل برخورد دو خط را مشخص می‌کند . به طریق مشابه می‌توان مسئله ۶ (چهارمین مسئله اصلی) را هم حل کرد :
می‌خواهیم محل برخورد یک خط راست و یک دایره را مشخص کنیم . اگر خط راست از مرکز دایره نگذشته باشد ، در آن صورت می‌توان خود دایره را به عنوان‌دایره انعکاس انتخاب کرد . و حل مسئله بسیار آسان خواهد بود . صحت این‌ترسیمات‌مستقیما از قضیه (۱) نتیجه می‌شود .

▶ مسئله ۱۹ :
مرکز دایره مفروض را پیدا کنید .

طریقه رسم : نقطه دلخواهی مانند O را روی دایره مفروض اختیار می‌کنیم و دایره (O,r) را به شعاع دلخواه r رسم می‌کنیم تا دایره مفروض را در نقاط B,A قطع کند . دایره (O,r) را به عنوان دایره انعکاس انتخاب می‌کنیم و مرکز دایره‌ای را بدست می‌آوریم که منعکس خط راست AB باشد . (مسئله ۱۶) برای این منظور دایره‌های $(A,|OA|)$ و $(B,|OB|)$ را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O_1 قطع کنند . دایره $(O_1,|OO_1|)$ را رسم و نقاط D_1,D را که محل برخورد آن با دایره انعکاس است بدست می‌آوریم دایره‌های $(D,|OD|)$ و $(D_1,|OD_1|)$ مرکز دایره اصلی را مشخص خواهد کرد . شکل (۳۱)



31

اثبات : نقاط B,A منعکس یکدیگرند زیرا هر دو روی دایره انعکاس قرار دارند . به این ترتیب دایره مفروض و خط راست AB دو شکل منعکس متقابل هستند . در مسئله ۱۶ نشان داده شد که نقطه O_1' مرکز دایره مطلوب است و در این حالت آن دایره تبدیل به منعکس خط راست AB شده است .

می‌خواهیم توجه خوانندگان را به سادگی ظرافت حل مسئله آخر جلب کنیم . برای پیدا کردن مرکز دایره شش دایره رسم شده است و این ترسیمات بسیار ساده‌تر و دقیق‌تر از راه حلی است که معمولا به کمک پرگار صورت می‌گیرد . این* مسئله ، همچنین مسائل دیگری در هندسه پرگاری از جمله مسائل (۳) و (۸) (طریقه دوم) را می‌توان به عنوان تمرین به شاگردان داد . از این رو مسئله ۱۹ را بر اساس اصول انعکاس به اثبات

* شعاع r باید بیشتر از نصف شعاع دایره مفروض باشد . در غیر این صورت دوایر بیشتری خواهیم داشت . (به (مسئله ۱۵) در حالت دوم مراجعه کنید .)

نمی‌رسانیم .

اثبات : خط راست OO_1 بروتر AB دایره‌عمودوازوسطآن‌می‌گذرد (عمود نصف آن است) بنا بر این مرکز مورد نظر روی خط راست OO_1 خواهد بود . فرض می‌کنیم نقاط F, E به‌ترتیب محل برخورد خطراست OO با دایره‌معروض‌دایره $(O_1, |OO_1|)$ ، باشد . پاره‌خط OE قطر دایره مفروض خواهد بود . با در نظر گرفتن مثلث‌های قائم‌الزاویه ODF, OAE که در آنها به ترتیب Dk, AH ارتفاع هستند داریم :

$$|OA|^2 = |OE| \cdot |OH|$$

$$|OD|^2 = |OF| \cdot |OK|.$$

و با در نظر گرفتن اینکه :

$$|OD| = |OA| = r, \quad |OF| = 2\,|OO_1|,$$
$$|OH| = \frac{1}{2}\,|OO_1| \quad \text{و} \quad |OK| = \frac{1}{2}\,|OO_1'|,$$

داریم :

$$|OE| \cdot |OH| = |OF| \cdot |OK|$$

$$|OE| \cdot \frac{|OO_1|}{2} = 2\,|OO_1|\,\frac{|OO_1'|}{2}.$$

پس:

$$|OO_1'| = \frac{|OE|}{2}.$$

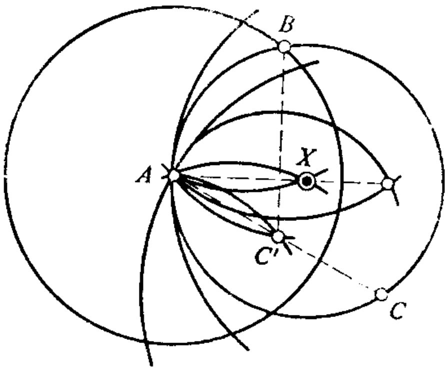
▶ مسئله ۲۰:

دایره‌محیطی‌مثلث مفروض ABC را رسم کنید .

طریقه رسم : دایره $(A, |AB|)$ را رسم و آن را دایره انعکاس در نظر می‌گیریم . نقطه C' ، منعکس نقطه C را پیدا می‌کنیم (مسئله ۱۵) وسپس منعکس خط راست BC' را بدست می‌آوریم : $(X, |AX|)$. (مسئله ۱۶) دایره $(X, |AX|)$ دایره مطلوب و یا دایره محیطی مثلث ABC است . شکل (۳۲)

اثبات : منعکس B برخودش منطبق است زیرا روی دایره انعکاس $(A, |AB|)$ قرار دارد . نقطه C' هم منعکس نقطه C است . در نتیجه دایره‌ای که از نقاط مفروض C, B, A ،

می‌گذرد ، منعکس خط راست BC' خواهد بود . و همچنان که در مسئله ۱۶ مشاهده کردیم نقطه X مرکز دایره مطلوب می‌شود . *



32

نکته : اکنون برای حل مسئله ۱۸ راه دیگری نشان میدهیم :

نقاط دلخواه A , B , C را روی دایره مفروض (O_1 , R) انتخاب می‌کنیم ومنعکس آنها را A' , B' , C' می‌نامیم . دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ دایره مطلوب است‌که یا منعکس دایره مفروض خواهد بود .

---

* در مسئله ۱۶ مرکز دایره‌ای را که منعکس خط راست مفروضی بود بدست می‌آوریم این ساختمان هندسی در حل مسئله ۱۹و۲۰ بکار رفته .

فصل دوم
ترسیمات هندسی
به کمک پرگار تنها اما مقید

در فصل اول،ترسیمات هندسی به کمک پرگار تنها را مورد مطالعه قرار دادیم که می‌توان آن راهندسه کلاسیک پرگاری نام نهاد. . در تئوری ساختمان هندسی پرگاری تنها ، آزاد بودیم تا پرگار را هر طور که بخواهیم بکار بریم . به عبارت دیگر در رسم هر نوع دایره با هر اندازه شعاع محدودیتی وجود نداشت .و پرگار چنان توصیف‌شده بود که هر دایره با هراندازه‌شعاع‌رامی‌توانستیم ترسیم کنیم . واضح است که در عمل دایره‌هایی را می‌توان رسم کرد که شعاع آنها بزرگتر از $R_{\max}$ و کوچکتر از $R_{\min}$ نباشد . اندازهٔ $R_{\max}$ بیشترین ، $R_{\min}$ کمترین‌فاصله شاخه‌های پرگار را مشخص می‌کنند اگر شعاع دوایری را که با پرگار می‌توانیم رسم‌کنیم با r نشان دهیم نامساوی‌زیر را خواهیم داشت :

$$R_{\min} \leqslant r \leqslant R_{\max}$$

و در این صورت فاصله باز شاخه‌های پرگار از پایین به پاره‌خط $R_{\min}$ و از بالا به پاره خط $R_{\max}$ محدود می‌شود .

در اینجاآن‌قسمت‌ازساختمانهای هندسی به کمک پرگار تنها را مورد مطالعه قرار

می‌دهیم ، که محدودیت‌های مشخصی برای میزان باز شدن شاخه‌های آن در نظر گرفته شده است .

بخش پنج
ساختمانهای هندسی ، با پرگار تنها وقتی که فاصله شاخه‌های آن از سمت‌بالا محدود است .

در این فصل با پرگاری سرو کار داریم که از بالا به $R_{\max}$ محدود شده است . بنا بر این با این پرگار دایره‌هایی را می‌توانیم رسم کنیم که شعاع آنها بیشتر از مقدار R_{max} نباشد . برای اختصار بجای $R_{\max}$ ، Rرا بکار خواهیم برد . اگر شعاع دایره‌ای را که‌با پرگار مفروض قابل رسم است به r نشان دهیم خواهیم داشت :

$$0 < r \leqslant R.$$

▶ مسئله ۲۱ :

پاره خطی رسم کنید که 2^n بار کوچکتر از پاره‌خط مفروض AB باشد . (پاره خط ABرابه $2, 4, 8, \ldots, 2^n$. جزء مساوی تقسیم کنید .)

طریقه رسم : به آسانی دیده می‌شود که در حالت :

$$|AB| \leqslant \frac{R}{2}^*$$

ترسیمات مسئله ۱۰ را می‌توان انجام داد . زیرادر آنجا بزرگترین شعاع دایره برابر

$$|AC| = 2|AB| \leqslant R^{**}.$$

است . اگر $|AB| < 2R$ باشد

دایره‌های (A, r), (B, r) را باشعاع دلخواه r رسم می‌کنیم و محل برخورد آنها را C, Dمی‌نامیم . با تغییر دادن r همواره‌این‌امکان‌وجودداردکه $|CD| \leqslant R/2$

را بدست آورد . اکنون پاره‌خط CD را نصف مـی‌کنیم (مسئله ۱۰) و نقطه X_1 را بدست می‌آوریم . واضح است که X_1 پاره‌خط AB را نصف خواهد کرد .
عینا به طریق مشابه نقطه X_2 را پیدا می‌کنیم که پاره‌خط AX_1 را نصف می‌کنـد .

$$|AX_2| = (1/4)\,|AB| \leqslant R/2$$

ترسیمات نقاط $X_4,\ X_8,\ \ldots,\ X_{2^n}$ را می‌توان به‌حل مسئله ۱۰ منجرکرد . اگر تقسیمات $|AX_{2^n}| = \frac{|AB|}{2^n}$ را 2^n بار افزایش دهیم : در آن صورت پاره خط AB بـه 2^n جزء مساوی تقسیم خواهد شد . ترسیـمات بـرای حـالت $|AB| \geqslant 2R$ در مسئله 24 داده خواهد شد .

---

* برای مقایسه‌دوپاره‌خط AB و CD دایره (A, CD) را رسم می‌کنیم اگر نقطه B :

الف) در داخل این دایره قرار گیرد . $|AB| < |CD|$,

ب) روی دایره قرار گیرد . $|AB| = |CD|$,

ح) خارج دایره قرار گیرد . $|AB| > |CD|$.

برای بررسی $|AB| \leqslant \frac{R}{2}$ یا $2|AB| \leqslant R$ باید دایره (A,R) را رسم کنیم اگر نقطه B روی محیط (A, R) یا خارج آن باشد ، درآن‌صورت $2|AB| > |AB| \geqslant R$ اگر نقطه B در داخل دایره باشد خواهیم داشت $|AB| < R$ بنا بر این پاره‌خط $2|AB|$ قابل رسم (مسئله۲) و مقایسه با پاره‌خط R در روش بالا خواهد بود .

** در روش اول حل مسئله ۱۰ لازم است حالت $|AD_n| \leqslant R$ را بازاء $n = 1, 2, 3, \ldots$ امتحان گردد .

$$\lim_{n\to\infty} |AD_n|^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)a^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)a^2$$

$$=\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2 = 2\,|AB|^2,$$

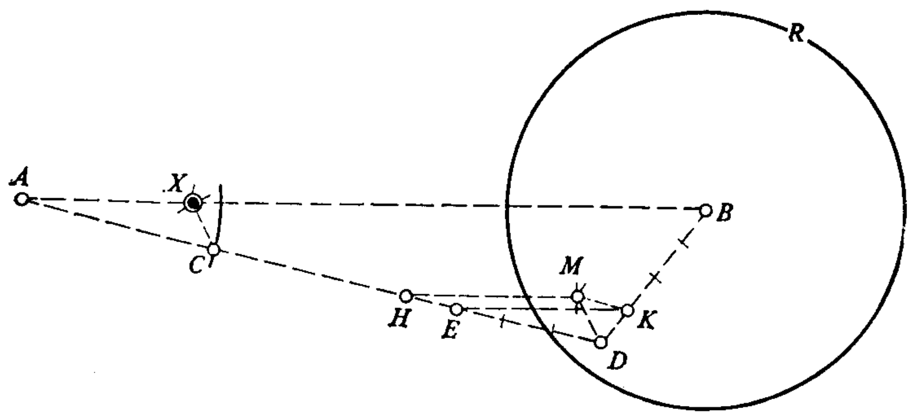
$$|AD_n| < \sqrt{2}\,|AB| < R.$$

▶ مسئله ۲۲

(اولین عمل اصلی) روی خط راستی که با دو نقطه A B* مشخص شده است چند نقطه پیدا کنید .

طریقه رسم

اگر $2R < |AB|$ باشد به مسئله ۵ منجر خواهد شد . پس حالتی را در نظر می‌گیریم که $|AB| \geqslant 2R$ باشد . دایره‌های (B,R) و (A, r) را رسم می‌کنیم که در آن r پاره‌خط دلخواهی است که مساوی و یا کوچکتر از R انتخاب شده است .
نقطه C را روی محیط دایره $(A . r)$ طوری انتخاب می‌کنیم که تقریبا فاصله‌اش از خط AB کمترباشد . (زاویه CAB هر چه ممکن است کوچکتر گردد .) حال پاره خط $|AD| = m|AC|$ را رسم می‌کنیم . (مسئله ۲ و $|AC| = r \leqslant R$) عدد طبیعی m را طوری انتخاب می‌کنیم تا نقطه D در داخل (B, R)** قرار گیرد . با تغییر دادن نقطه C ، روی کمان (A , r) و اگر لازم باشد با تغییر دادن اندازه r همواره می‌توان نقطه D را در داخل دایره (B , R) قرار داد . در چنین حالتی پاره‌خط:



33

$$|AC| = \ldots = |HD| = |AD|/m$$

را رسم می‌کنیم شکل (۳۳) اکنون عدد طبیعی n را طوری اختیار می‌کنیم که $2^{n-1} < m \leqslant 2^n$

باشد ، آنگاه پاره خط :

$$|DK| = (1/2^n) \times |BD|$$

را رسم می‌کنیم . (مسئله ۲۱ که در اینجا $|BD| < 2R$ است .)

پار خط DH را به 2^n جزء مساوی تقسیم می‌کنیم (مسئله ۲۱ و $|DH|=r\leqslant R$)

و پاره خط $|DE| = (m/2^n)\ |DH|$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۳

$m = 3,\ 2^{2-1} < 3 < 2^2,\ n = 2,\ |DE| = \frac{3}{4}|DH|$).

متوازی‌الاضلاع $HEKM$ را رسم مــی‌کنیم . برای این منظور لازم است دایره‌های $(H, |Ek|)$، $(k, |EH|)$ رسم شوند . (اگر M نقطه تقاطع این دوایر کاملا مشخص نشده باشد برای پیدا کردن نقطه M دایره $(E, |Ek|)$ را رسم کرده و روی آن وتر $|kP|=|PT|$ ، را برابر شعاع Ek اختیار می‌کنیم . محل برخورد دایره‌های $(H, |Ek|)$، $(P, |TH|)$ نقطه M را مشخص خواهد کرد .) سرانجام اگر دایره‌های $(A, |HM|)$ و $(C, |DM|)$ رسم گردند محل برخورد آنها X روی خط راست AB خواهد بود . و قبلا پیدا کردن نقاطی را که روی خط راست AB باشد به حل مسئله ۵ محول کرده‌ایم . ($|AX|<2R$)

اثبات : از ترسیمات بالا نتیجه می‌شود که :

$$\frac{|BD|}{|DK|} = 2^n \qquad \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{m\,|AC|}{\frac{m}{2^n}\,|AC|} = 2^n.$$

به این ترتیب مثلثهای EDK , ADB متشابه‌اند. (زاویه ADB در آنها مشترک است) پس

$$\angle DEK \cong \angle DAB$$

$$[EK] \parallel (AB).$$

---

* همانطور که قبلا دیده‌ایم نمی‌توانیم به‌کمک پرگار خط راست رسم کنیم تا چه برسد به پرگاری که مقید هم باشد . با وجود این می‌توانیم نقاطی روی امتداد خط مشخص کنیم .

** ــ نقطه D لازم نیست در داخل دایره (B, R) باشد مهم این است که داشته باشیم $|BD| < 2R$. نقطه می‌تواند در داخل دایره $(B, 2R)$ باشد اما ما قادر نیستیم چنین دایره‌ای را با پرگاری که داریم رسم کنیم .

چون [HM] موازی با [EK] است . (شکل $HEKM$ متوازی‌الاضلاع است) پس داریم :

$$[HM] \parallel (AB).$$

از مساوی بودن مثلث‌های DHM, ACX نتیجه می‌شود که [AX] موازی [HM] ، است در نتیجه نقطه X روی خط AB قرار می‌گیرد . شعاع همه دوایری‌که‌در حل مسئله رسم گردیده از R تجاوز نکرده است .

نکته : اگر $m = 2^n$ باشد درآنصورت m مقادیر ۲ و ۴ و ۸ و . . . ۱۶ . . . اختیارخواهدکرد و ترسیمات مسئله بطور قابل ملاحظه‌ای آسان خواهد بود . در این حالت نقطه E برنقطه H ونقطه M بر نقطه k منطبق خواهد شد و احتیاجی نخواهیم داشت تا پاره‌خط DH را به 2^n جزء مساوی تقسیم کنیم و متوازی‌الاضلاع $EKMH$ را رسم نمائیم . به این ترتیب وقتی اندازه r را تعییر میدهیم ، همیشه مطمئن خواهیم بود که m مقادیر ۲و۴و۸ و ۱۶ و . . . . .را اختیار می‌کند .

▶ مسئله ۲۳

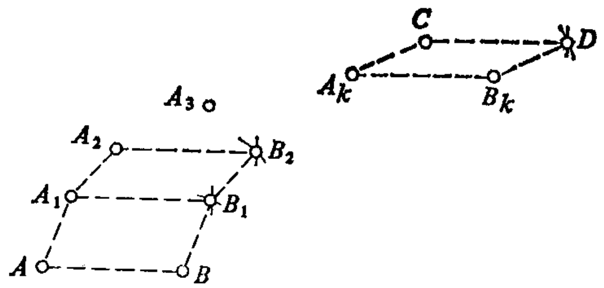
از نقطه C پاره‌خطی رسم کنید که مساوی و موازی پاره‌خط AB باشد .

طریقه رسم

اگر نقطه C روی خط راست AB نباشد ، درآنصورت مسئله منجر به ساختن متوازی‌الاضلاع $ABDC$ $(\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD})$ یا $ABCD'$ $(\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD'})$* خواهد شد .

اگر $|AB| \leqslant R$ و $|AC| \leqslant R$ باشد و فرض کنیم که نقطه C روی خط راست AB ، قرار ندارد در این صورت دایره‌های $(C, |AB|), (B, |AC|)$ را رسم می‌کنیم و محل برخورد آنهانقطه D خواهد بود . پاره‌خط CD پاره مطلوب خواهد بود و چهار ضلعی $ABDC$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود . اگر لازم باشد از نقطه C پاره‌خط را در خلاف جهت رسم مـی‌کنیم ($AB \uparrow\downarrow CD$)درآنصورت دایره $(A, |BC|)$ را به جای $(B, |AC|)$ رسم می‌کنیم . در حالتی‌که $|BC| > R$ باشد امکان رسم دایره $(A, |BC|)$ با پرگار مفروض وجود ندارد . همچنین می‌توان نقطه مورد نظر را بدست آورد به شرطی که بتوانیم‌به هر طریق روی دایره $(C, |AB|)$ نقطه D' ، سر دیگر قطر DD' از این دایره را پیدا می‌کنیم . شکل $ABCD'$ متوازی‌الاضلاع مطلوب خواهد بود .

اکنون فرض می‌کنیم $|AC|>R$ و $|BC|>R$ ، باشد . (شکل ۳۴)



34

نقاط دلخواه $A_1, A_2, \ldots, A_k$ از نقطه A به طرف نقطه C طوری اختیار می‌کنیم که

$$|AA_1| \leqslant R, |A_1A_2| \leqslant R, \ldots, |A_kC| \leqslant R,$$

سپس متوازی‌الاضلاع‌های :

$$ABB_1A_1, \quad A_1B_1B_2A_2, \ldots, A_{k-1}B_{k-1}B_kA_k.$$

را رسم می‌کنیم . اکنون متوازی‌الاضلاع $A_k B_k D C$ را هم رسم مــی‌کنیم (یا A_kB_kCD') پاره‌خط CD جواب مسئله خواهد بود . اگر در حالت خــاص نقطه A_i ، روی خط $A_{i-1} B_{i-1}$ قرار گیرد در آن صورت لازم است که بجای A_i نقطه دیگری اختیار کنیم . این طریقه رسم در حالتی که C روی AB قرار داشته باشد باز هم صادق است .

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که داشته باشیم $|AB|>R$ با بکار گرفتن حل مسئله (۲۲) نقاط $X_1, X_2, \ldots X_n$ را روی پاره‌خط AB ، با شرایط زیر بدست می‌آوریم :

$$|X_1X_2| \leqslant R, \ldots, |X_nB| \leqslant R.$$

سپس متوازی‌الاضلاع‌های :

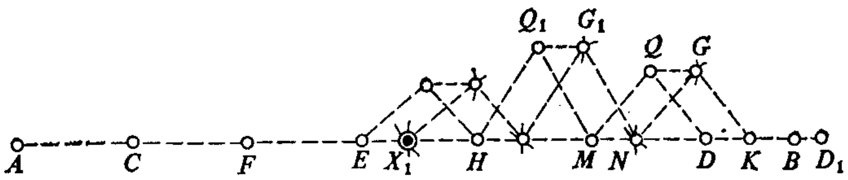
$$AX_1D_1C, X_1X_2D_2D_1, \ldots, \quad X_{n-1}X_nD_nD_{n-1}, \quad X_nBDD_n.$$

را می‌سازیم و پاره‌خط CD را که مورد نظر است بدست می‌آوریم .

▶ مسئله ۲۴

پاره خطی رسم کنید که 2^n بار کوچکتر از پاره‌خط AB باشد در صورتیکه $|AB| \geqslant 2R$ باشد. (پاره‌خطی را به 2^n جزء مساوی تقسیم کنید.)

طریقه رسم) روی پاره‌خط AB ، نقطه C را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $|AC| \leqslant R$ (مسئله ۲۲) پاره‌خط $|AD| = m|AC|$ را رسم می‌کنیم. (مسئله ۲) عدد طبیعی m را طوری اختیار می‌کنیم که $|AD| \leqslant AB$ و $|DB| < R$ باشد. سرانجام اندازه پاره‌خط AC دو، سه و یا . . . . . بار جدا می‌کنیم تا به نقطه B دسترسی پیدا کنیم. اگر در نهایت مقدار m طوری باشد که AC بدرستی در آن نگنجد در آن صورت پاره‌خط $|DD_1| = |AC|$ را بر آن اضافه می‌کنیم به این ترتیب $|AD_1| = (m+1)|AC|$ و $|AB| < |AD_1|$ و $|BD_1| < R$ خواهد بود. (شکل ۳۵ که در آن $m=6$ است.)



35

اکنون پاره‌خط BD را (یا BD_1 را) به کمک نقطه k نصف می‌کنیم. (مسئله ۲۱ و $|BD| < R$) وسط AD (یا AD_1) را E می‌نامیم و EX_1 را روی آن طوری انتخاب می‌کنیم که EX_1 موازی و مساوی Dk باشد (مسئله ۲۳) پس

$$|AX_1| = |AE| + |DK|$$

یا

$$|AX_1| = |AE| - |DK|, \quad).$$

(اگر E وسط AD_1 باشد)

برای این منظور نقاط Q , Q_1 . . . . . انتخاب و متوازی‌الاضلاع‌های

Q_1MNG_1 ، $MQGN$ ، $QDKG$ را تشکیل می‌دهیم . . . .

نقطه X_1 پاره‌خط مفروض AB را نصف خواهد کرد سپس AX_1 را نصف کرده و یک‌چهارم پاره‌خط AB را بدست می‌آوریم و به این کار ادامه می‌دهیم.

اگر $|AX_1| < 2R$ باشد طریقه ترسیمات مسئله (۲۱) را بکار می‌بریم و در غیر اینصورت ترسیمات شبیه ترسیمات بالا را انجام می‌دهیم .

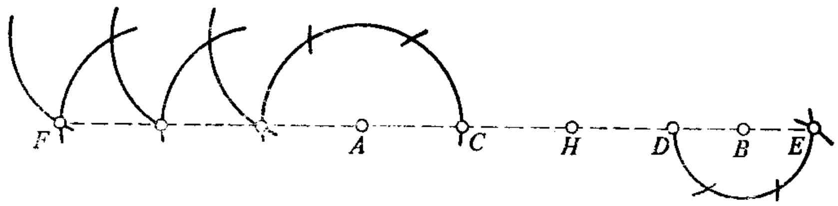
▶ مسئله۲۵

پاره خطی رسم کنید که n برابر پاره‌خط مفروض AB باشد در صورتیکه $|AB| > R$ است .

طریقه رسم) روی خط راست AB نقطه C را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم :

$$|AC| < R$$

(مسئله۲۲) اکنون پاره‌خط $|AD| = m|AC|$ را می‌سازیم (مسئله ۲ $|AC| < R$)
عدد m را طوری انتخاب می‌کنیم که : $|AD| \leqslant |AB|$ و $0 \leqslant |DB| < R$ اکنون باندازه پاره‌خط AC دو یا سه و یا . . . مرتبه روی خط مفروض جدا می‌کنیم تا به نقطه B دسترسی پیدا کنیم شکل (۳۶)



36

$|DE| = n|DB|$ را هم رسم می‌کنیم (مسئله۲و $|DB| < R$ و $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DE}$

(ضمیمه 1 کتاب مراجعه کنید)

سپس $|AF| = (n-1)m|AC|$ را با $\overrightarrow{AF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$. بدست می‌آوریم . پاره‌خط $|FE| = n|AB|$ جواب مسئله است . (در شکل۳۶، $m = 3,\ n = 2$)

اثبات :

$$\begin{aligned}|FE| &= |FA| + |AD| + |DE|\\ &= (n-1)m|AC| + m|AC| + n|DB|\end{aligned}$$

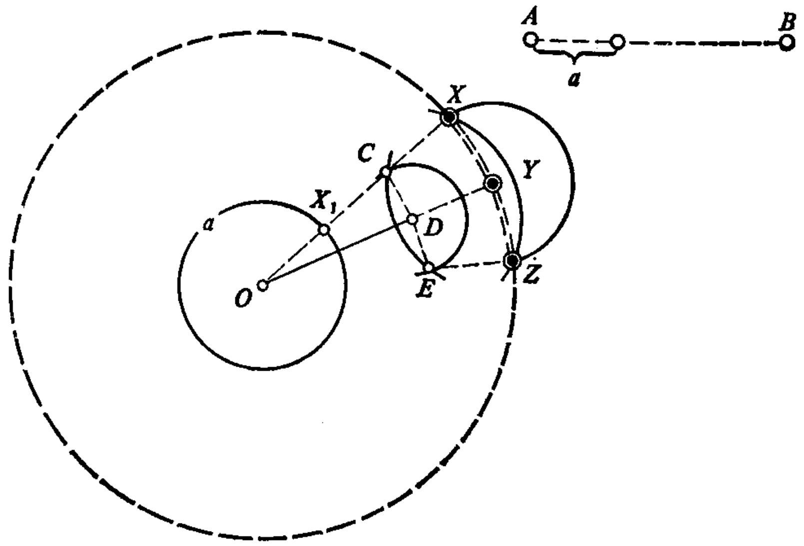
$$= nm\,|AC| + n\,|DB| = n\,(m\,|AC| + |DB|)$$
$$= n\,(|AD| + |DB|) = n\,|AB|.$$

نکته : برای رسم $|AM| = n\,|AB|$ لازم است که پاره‌خط $|EM| = (n-1)m|AC|$ رابجای پاره‌خط AF طوری رسم کنیم که : $\vec{EM} \uparrow\uparrow \vec{AB}$. سپس $|AM| = n\,|AB|$, بدست می‌آید و ترسیمات به‌پایان می‌رسد.

▶ مسئله ۲۶

(دومین عمل اصلی). دایره‌ای‌به‌مرکز معلوم O شعاع مفروض $|AB|$ رسم‌کنید.

طریقه رسم)اگر $|AB| \leqslant R$ باشد. دایره مستقیما به کمک پرگار مقید رسم می‌گردد اما اگر $|AB| > R$ باشد در آن صورت امکان رسم دایره با چنین پرگاری وجود ندارد. با وجود این می‌توان چند نقطه در این دایره را که مرکز و شعاع آن معلوم است مشخص کرد. شکل (۳۷).



37

برای این منظور پاره‌خط $a = |AB| / 2^n$ را رسم می‌کنیم (مسئله ۲۱، ۲۴) مقدار nرا طوری در نظر می‌گیریم که $a \leqslant R$ باشد. سپس دایره (O, a)رارسم ونقطه‌دلخواهی

مانند X_1 را روی آن انتخاب می‌کنیم و پاره‌خط $OX = 2^n OX_1$ را هم رسم می‌کنیم (مسئله۲و $OX_1 = a \leqslant R$)نقطه X روی دایره $(O, |AB|)$ قرار دارد. با تغییر دادن جای X_1 روی دایره (O, a) می‌توان نقاط دیگری را هم روی‌دایره بدست آورد. وقتی Y و X از دایره مفروض را داشته باشیم در صورتیکه $|XY| < R, \ |DX| \leqslant R,$ باشد می‌توانیم نقاط دیگری را هم بطریق زیر روی دایره اصلی مشخص کنیم:
دایره‌های $(Y, |XY|)$ و $(D, |DX|)$ را رسم و نقطه تلاقی آنها را Z می‌نامیم. نقطه Z به دایره مفروض تعلق‌دارد حال‌اگردایره‌های $(D, |DC|)$ و $(Y, |CY|)$ را رسم کنیم و محل برخورد آنها را E بنامیم سپس دایره‌های $(Z, |YZ|), (E, |EY|)$ را رسم کنیم نقطه دیگری از دایره مفروض بدست می‌آید. می‌توان این کار را ادامه داد.

اثبات: داریم:

$$|OX| = 2^n a = 2^n |AB|/2^n = |AB|.$$

نکته: اگر روی پاره‌خط AB نقطه اضافی مانند K داده شده باشدبه قسمی که $|AK| \leqslant R$ (یا $|BK| \leqslant R$)درچنین‌حالتی ترسیمات ما بسیار ساده خواهد بود. پاره‌خط $|AD| = m|AK|$ را رسم مـی‌کنیم (مسئله۲ ($|AK| \leqslant R$)وعدد طبیعی m راطوری تعیین می‌کنیم که‌داشته باشیم:

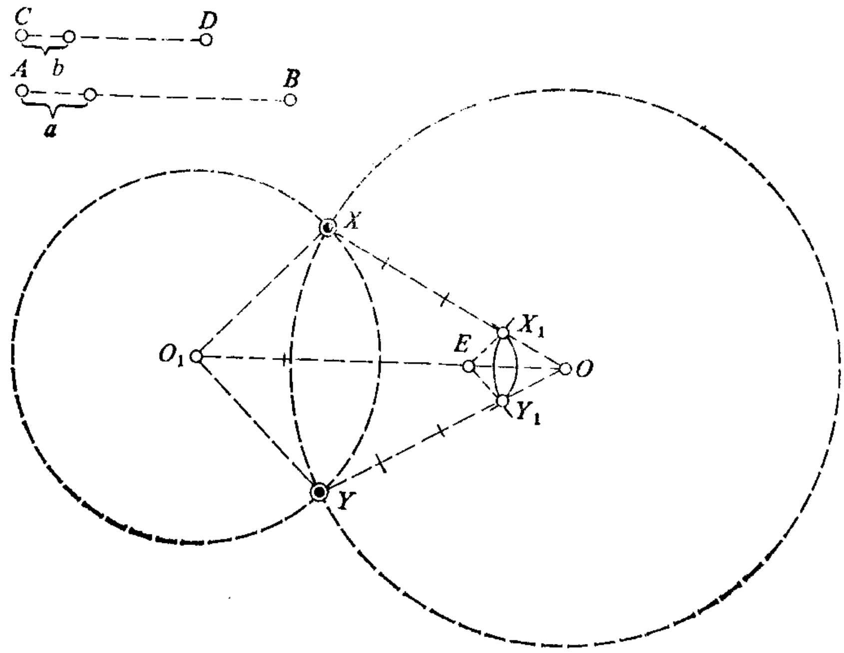
$$|AD| \leqslant |AB|$$
$$0 \leqslant |DB| < R.$$

برای این‌منظور باید به اندازه پاره‌خط AK دو یا سه و یا . . . . . مرتبه جدا کنیم (شکل۳۶) (اکنون دایره (O, a) را رسم مـی‌کنیم که در آن $a = |AK|$ مـی‌باشد ونقطه X_1 را روی آن‌اختیار کرده و پاره‌خط $|OC| = m|OX_1|$ را هم رسم مـی‌کنیم و سرانجام پاره‌خط $|CX| = |DB| * (\overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CX}),$ را جدا می‌کنیم در این صورت نقطه X روی دایره مفروض خواهد بود (شکل 37 را نگاه کنید)

▶ مسئله۲۷

(سومین عمل اصلی) محل برخورد دو دایره $(O, |AB|), (O_1, |CD|)$ را پیدا کنید

طریقه رسم) اگر شعاع‌های دو دایره بزرگتر از R نباشند، محل برخورد آنها مستقیما بدست می‌آید . اکنون فرض می‌کنیم که شعاع یکی و یا هر دوی آنها بزرگتر از R باشد .



38

پاره خط $a = |AB|/2^n$, $b = |CD|/2^n$, و $|OE| = |OO_1|/2^n$ را رسم می‌کنیم . (مسئله ۲۱و۲۴) . عدد n را طوری تعیین می‌کنیم که $b \leqslant R$, $a \leqslant R$ باشد . (شکل۳۸) دایره‌های (O,a) و (E,b) را رسم و محل برخورد آنهارا X_1 و Y_1 می‌نامیم حال اگر پاره‌خط $|OX| = 2^n |OX_1|$ و $|OY| = 2^n |OY_1|$, را رسم کنیم:

X و Y نقاط مطلوب ونقاط برخورد دودایره $(O, |AB|)$ و $(O_1, |CD|)$ بدست خواهد آمد .

اثبات :

$$|OX| = 2^n \cdot a = 2^n \cdot \frac{|AB|}{2^n} = |AB|,$$

$$|OY| = 2^n \cdot \frac{|AB|}{2^n} = |AB|.$$

از تشابه مثلث‌های OXO_1 و OX_1E داریم به طریق مشابه داریم :

$$(|OX|/|OX_1| = |OO_1|/|OE| = 2^n,$$ درهردومشترک O_1OX)

$$|O_1X| = 2^n \cdot |EX_1| = 2^n \cdot \frac{|CD|}{2^n} = |CD|.$$

با همین روش $|O_1Y| = |CD|.$ را پیدا می‌کنیم .

▶ مسئله ۲۸

نقطه C_1 قرینه نقطه مفروض C را نسبت به خط راست مفروض AB پیدا کنید .

طریقه رسم : برای حالتی که $|AC| \leqslant R$ و $|BC| \leqslant R$ باشد ، طریقه رسم در مسئله (۱) داده شده است .

اگر فاصله بین نقطه C و خط راست AB کمتر از R باشد در آن‌صورت با استفاده از مسئله (۲۲) می‌توان نقاط A_1 ، B_1 را روی خط مستقیم طوری پیدا کرد که $|CA_1| \leqslant R$ ، $|CB_1| \leqslant R$ باشد .

اکنون فرض می‌کنیم که فاصله بین نقطه C و خط راست AB بیشتر از R باشد . در اینصورت $|AB| < 2R$ درنظرمی‌گیریم و در غیر این صورت می‌توان چنین نقاطی را روی خط راست پیدا نمود . (مسئله ۲۲)

نقطه E را در صفحه طوری اختیارمی‌کنیم که $|CE| \leqslant R$ و امتداد CE خط راست AB را قطع کند پاره‌خط:

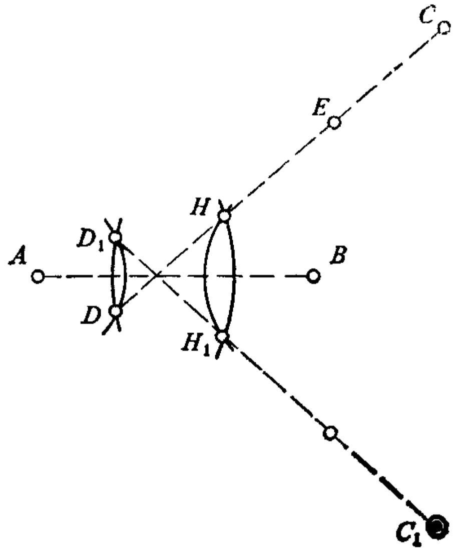
$$|CD| = m\,|CE| \;(|CE| = \ldots = |HD|,$$

را رسم می‌کنیم . مسئله ۲)

نقطه E و مقدار m به طریقی انتخاب کرده‌ایم که پاره‌خطهای $AD,\ AH,\ BD,$ BH ، کوچکتر از R باشد . نقاط D_1 و H_1 قرینه‌های D و H را نسبت به خط مفروض بدست می‌آوریم . (مسئله ۱)

اکنون پاره خط $|D_1C_1| = m\,|D_1H_1|$ را رسم و نقطه C_1 را که نقطه مطلوب یعنی قرینه نقطه C نسبت به خط راست AB می‌باشد به دست می‌آوریم . شکل (۳۹) پس:

$$\overset{*}{C_1} = S_{(AB)}(C).$$



39

نکته: اگر برای رسم قرینه C_1 از برخورد دایره‌های $(A,|AC|)$ و $(B,|BC|)$ در مسئله ۲۷ هم استفاده کنیم راه‌حل مسئله (۱) همچنان به قوت خود باقی می‌ماند.

▶ مسئله ۲۹

(چهارمین عمل اصلی) مطلوبست محل برخورد دایره $(O,|CD|)$ و خط راستی که دو نقطه A و B از آن داده شده است.

طریقه رسم) اگر خط راست از مرکز دایره مفروض نگذشته باشد درآن‌صورت نقطه O_1 قرینه O را نسبت به خط AB بدست می‌آوریم (مسئله ۲۸) سپس مختصات محل برخورد دایره‌های $(O,|CD|)$ و $(O_1,|CD|)$ را X و Y می‌نامیم. (مسئله ۲۷) این دو نقطه نقاط مطلوب مسئله هستند. .

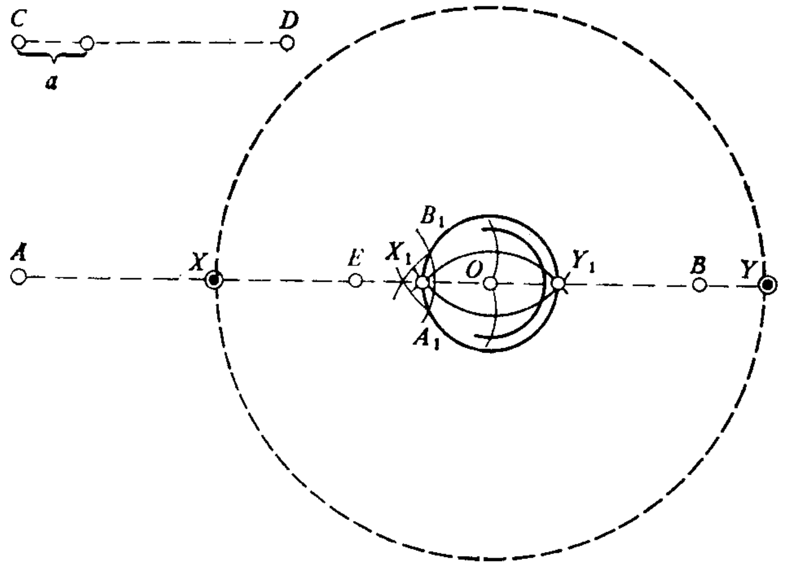
اگر خط مفروض از مرکز دایره گذشته باشد (شکل ۴۰) پاره‌خط $r = CD/2^n$ ، را با شرط $r \leqslant \frac{R}{2}$ رسم می‌کنیم (مسئله ۲۱ و ۲۴) بعد دایره (O,r) را هم رسم کرده و محل برخورد آن را با دایره (A,d) یا (B,d)، A_1 و B_1 می‌نامیم. که در آن d شعاع دایره و طولی دلخواه و کوچکتر یا مساوی R است. اگر دایره (A,R) یا دایره (B,R) در حالتی که $d=R$ می‌باشد دایره (O,R) را قطع نکنند، (در این حالت $|OA| > R+r$، $|OB| > R+r$) با بکار بردن مسئله (۲۲) نقطه E را روی خط راست AB طوری

پیدا می‌کنیم که $|OE| < R + r$ باشد . دایره (E,d) دایره (O,r) را در نقاط A_1 و B_1 قطع خواهد کرد . با تغییر دادن اندازه d می‌توانیم $a = |A_1B_1| \leqslant \frac{R}{2}$ را رسم کنیم . حال هر دو کمان A_1B_1 از دایره (O,r) را به کمک دو نقطه X_1 و Y_1 نصف می‌کنیم . (مسئله ۴) و سپس پاره‌خط‌های

$$|OX| = 2^n |OX_1|$$

$$|OY| = 2^n |OY_1|$$

را بدست می‌آوریم (مسئله ۲ $|OX_1| = |OY_1| = r \leqslant R/2$). نقاط X و Y نقاط مطلوبند یعنی محل برخورد خط و دایره مفروض را مشخص می‌کنند . بزرگترین دایره ترسیمات وقتی رسم



40

می‌شود که می‌خواهیم کمان A_1B_1 را نصف کنیم . وقتی یکی از کمانها نصف می‌گردد (مسئله ۴) شعاع بزرگترین دایره ، برابر با $|BC| = \sqrt{2a^2 + r^2}$ می‌شود .
(شکل ۵) با توجه به شرایط مسئله شعاع قابل قبول در نامساوی زیر صدق خواهد کرد :

$$\sqrt{2a^2 + r^2} \leqslant \sqrt{2\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} < R.$$

▶ مسئله ۳۰

پاره‌خطهای c , b , a مفروضند مطلوبست رسم پاره‌خط X به قسمی که X جزء چهارم

تناسب $a/b = c/x$ باشد.

طریقه رسم: اگر $c \leqslant R, b \leqslant R, a \leqslant R$ باشد در آن‌صورت رسم منجر به حل مسئله (۳) خواهد بود. اکنون فرض‌می‌کنیم که یکی از شرایط بالا نقض کردد.
پاره‌خط $a_1 = a/2^n,\ b_1 = b/2^n,$ و $c_1 = c/2^m$ را رسم می‌کنیم (مسئله ۲۱ و ۲۴) منتها اعداد طبیعی m, n را طوری تعیین می‌کنیم که $c \leqslant 2a_1, b_1 \leqslant R, a_1 \leqslant R$ باشد.
اکنون پاره‌خط x_1 را طوری رسم می‌کنیم که جزء چهارم تناسب $a_1/b_1 = c_1/x_1$ باشد.
حال $x = 2^m \cdot x_1$ را بدست می‌آوریم (مسئله ۲ و ۲۵) که پاره خط مطلوب است. یعنی جزء چهارم تناسب می‌باشد.

اثبات:
از تناسب

$$\frac{a}{2^n} : \frac{b}{2^n} = \frac{c}{2^m} : x_1.$$

خواهیم داشت:

$$a/b = c/2^m x_1.$$

▶ مسئله ۳۱

(پنجمین عمل اصلی) محل برخورد دو خط راست CD, AB را که هر یک از آنها با دو نقطه مشخص شده‌اند پیدا کنید.

طریقه رسم: پیدا کردن محل تلاقی دو خط در حالی که باز شدن شاخه‌های پرگار محدود هم باشد عینا مانند حل مسئله (۷) صورت می‌گیرد منتها به جای مسائل (۱) و (۳) به ترتیب از مسائل (۲۸) و (۳۰) استفاده می‌شود. برای پیدا کردن نقطه E و نقطه مطلوب X (محل برخورد دوخط راست CD, AB) از مسئله (۲۷) سود می‌بریم..
نکته: در استفاده از مسئله (۲۲) می‌توان نقاط D, C, B, A را که خطوط مفروض را مشخص می‌کنند طوری در نظر گرفت که شعاعهای دوایزی که در این ترسیمات بکار می‌روند بزرگتر از R نباشند یعنی امکان ترسیم با پرگار مقید مفروض ما وجود

داشته باشد با توجه به مطالب اساسی که در بالا گفته شد، می‌توان به نتایج زیر رسید:

تمام پنج عمل اصلی (عملیات پنج‌گانه) قابل اجرا به کمک پرگاری هستند که اندازه شعاع آن از مقدار معین R تجاوز نکند. هر مسئله مربوط به ساختمان هندسی، که قابل حل با پرگار و خط‌کش باشد، منجر به انجام یک‌سری عملیات ساده اساسی می‌گردد که در فصل (۱) از آن نام برده‌ایم. به این ترتیب می‌توان قضیه زیر را به عنوان یک قضیه همواره درست در نظر گرفت:

▶ قضیه: تمام مسائلی را که مربوط به ساختمانهای هندسی بوده و قابل حل با پرگار و خط کش باشند با پرگار تنها هم که شعاعهای آنها از حدود معینی تجاوز نکنند هم قابل ترسیم هستند.

* * *

اکنون می‌خواهیم روش کلی را جستجو کنیم که در حل مسائل ساختمانهای هندسی به کمک پرگار مقیدی که اندازه شعاع آن از R تجاوز نکند لازم است.

فرض می‌کنیم ساختمان مسئله معینی که قابل رسم با پرگار و خط کش می‌باشد، با پرگار تنها و مقید مورد نظر باشد. تصور کنیم که این مسئله به‌کمک پرگار تنها که به هیچ وجه مقید نیست حل شده باشد. در نتیجه شکل معینی مانند Φ خواهیم داشت، که از تعداد محدود و معینی دایره تشکیل شده است. شعاع بزرگترین دایره این شکل را با R_1، نشان میدهیم، اگر $R_1 \leqslant R$ باشد. در آنصورت ترسیمات مفروض قابل رسم با پرگار مقید خواهد بود.

اکنون فرض می‌کنیم $R_1 > R$ باشد. عدد طبیعی n را طوری اختیار می‌کنیم که:

$$R_1/2^n \leqslant R.$$

باشد اکنون اگر همه پاره خطهایی را که شعاعهای دوایر را هم تشکیل می‌دهند 2^n، کوچکتر کنیم و مسئله را با پرگاری که داده شده است حل کنیم، شکلی مانند Φ' حاصل می‌شود که مشابه شکل Φ، بوده و نسبت تشابه (تجانس) برابر $1/2^n$ خواهد بود.

دوایر شکل Φ' با پرگار مفروض قابل ترسیم هستند زیرا شعاعهای آنها بزرگتراز

$$R_1/2^n \ (R_1/2^n \leqslant R).$$

نیستند .

قابل ذکر است که‌اگر بنا بر شرایط مسئله‌ای‌شکل Φ_1 در صفحه داده‌شده باشد ، در آن صورت باید نقطه‌ای از آن را به عنوان مرکز تجانس درنظرگرفت‌وشکل Φ_1' رابا نسبت تشابه (تجانس) $1/2^n$ رسم نمود . (یعنی‌شکل 2^n بار کوچکتر) فرض می‌کنیم که Ψ' جزئی از شکل Φ_1', باشد که جوابهای مسئله را مشخص می‌کند . در آن صورت شکل Ψ مشابه شکل Ψ' با نسبت تشابه 2^n بمرکزتجانس O جوابهای مسئله را مشخص خواهد کرد (شکلی 2^n باربزرگتر از Ψ')

این شکل را بدست می‌آوریم تا پاره خطهای $[OX_1], \ldots, [OX_k]$ که در آن

$$|OX_1| = 2^n\,|OX_1'|,\ |OX_2| = 2^n|OX_2'|,\ \ldots,\ |OX_k| = 2^n|OX_k'|,$$

می‌باشد بدست آیـد . $X_k', \ldots, X_2', X_1'$ نقاط تقاطع دوایر مرسوم در شکل Ψ' و $X_1, X_2, \ldots, X_k$ نقاط تقاطع و مراکز دایره‌های مرسوم در شکل Ψ را نشان خواهند داد که نمایش جوابهای مسئله است .

در شکل Ψ خطوط‌راست و دایره‌هایی که شعاع آنها بزرگتر از R باشند با پرگار داده شده قابل رسم نیستند . بنابر این آنها را می‌توان با چند نقطه دلخواه از پیرامونشان در ارتباط با هم نشان‌داد . مسائل (۲۲و۲۶)

برای بررسی مطالب بالا به عنوان‌مثال حل مسئله (۲۷) را در نظر می‌گیریم که در آن‌شکل Φ ازدایره‌های $(O,|AB|), (O_1,|CD|)$ تشکیل شده است و در آن سه پاره‌خط AB و CD و OO_1 وجود دارد $|CD|, |AB|$ شعاعهای دو دایره $|OO_1|$ فاصله بین مراکز O_1, O از این دو دایره را نشان میدهند .

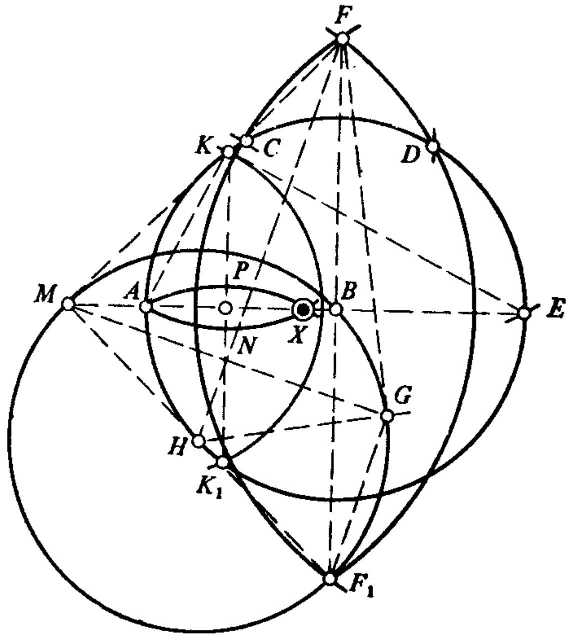
اکنون این دایره‌ها را به ترتیب شکلهای $\Phi_1, \Phi_2,$ و گزاره مسئله را با Φ_3 نشان‌میدهیم (شکل ۳۸ را نگاه کنید) شکل‌های $\Phi_1', \Phi_2',$ و Φ_3' به ترتیب عبارت‌خواهند بود از پاره‌خطهای OE, b, a که با مراکز O, C, A و نسبت تشابه (تجانس) $1/2^n$ ساخته شده‌اند . شکلی که دوایر $(O,a), (E,h)$ را تلفیق می‌کند (بامراکز E, O) به Φ' نشان دادیم که Ψ', جواب مطلوب شکل در اینجا عبارت از Y_1, X_1

خواهند بود در نتیجه جواب مسئله در شکل Ψ عبارت از نقاط $Y.X$ می‌شوند .
نقطه O مرکز تشابه است .
(شکل ۳۸ داریم : $2^n = 4 , n = 2$) در ساختن مسائل هندسی معمولا از عدد n اطلاعی نداریم . زیرا بدون اطلاع از R_1 یعنی شعاع بزرگترین دایره در شکل Φ نمی‌توان آن را به کمک پرگار رسم ، کرد . با در نظر گرفتن این موضوع روشی به کار می‌بریم که به کمک آن موفق شویم مسائل را با پرگار مفروض حل کنیم و حتی با همین پرگار مقید دایره‌هایی با شعاع $r_1 > R$ رسم کنیم .
عدد طبیعی n_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که $r_1/2^{n_1} \leqslant R.$ باشد . با کوچک کردن خط مفروض باندازه 2^{n_1} بار حل مسئله مفروض را مثل سابق شروع می‌کنیم درنتیجه یا مسئله را کاملا حل کرده به شکل Φ', می‌رسیم و یا اینکه دوباره با دایره‌ای **به شعاع** $r_2 > R$ ، مواجه می‌گردیم در این صورت عدد طبیعی n_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $r_2/2^{n_2} \leqslant R$ و دوباره پاره‌خطها را 2^{n_2} بار کوچک می‌کنیم .
(در اینجا پاره‌خط مفروض گزاره مسئلـــه $2^{n_1+n_2}$ بار تغییر می‌کند) .
سومین بار به حل مسئله می‌پردازیم و به این کار ادامه می‌دهیم . بعد از k مرحله متناهی شکل رسم خواهد شد . (پاره‌خط اصلی در این صورت $2^{n_1+n_2+\dots+n_k}$ بار کاهش خواهد یافت) .
با بکارگیری روش کلی برای حل مسائل ساختمانی به کمک پرگار مقید ، پیدا کردن منعکس یک‌نقطه ، یک خط راست و یا یک دایره آسان می‌گردد .
(مسائل ۱۸–۱۵) در پایان این بخش حل مسئله زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم :

▶ مسئله ۳۲

پاره خط مفروض AB را به پنج جزء مساوی تقسیم کنید در صورتیکه پاره‌خطی پنج برابر پاره خط $|AB| = a$ را نداریم .
در انبوه کارهای ماسچرونی ، این یکی تنها مسئله‌ای است که با محدودیت مشخص در فرض، آن را حل کرده است .

طریقه رسم : دایره (B, a) را رسم کرده و نقطه E سر دیگر قطر AE را پیدا می‌کنیم (در شکل (۴۱) $|AC| = |CD| = |DE| = a$).



. 41

اکنون دایره‌های $(E, |EC|), (A, |AD|)$ را هم رسم کرده و نقاط برخوردشان را F_1, F می‌نامیم . محل تقاطع دوایر $(B\ a), (F_1, a)$ را با H ، نشان میدهیم حال اگردایره‌های $(F, |AE|), (H, |HF_1|)$ رارسم کنیم و محل تقاطع آنها رانقطه G بنامیم دایره‌های $(A, |F_1G|)$ و (B, a) همدیگر را در K_1, K قطع می‌کنند . اگر دایره‌های $(K_1, |AK_1|), (K, |AK|)$ رسم شوند نقطه مطلوب X بدست خواهد آمد یعنی :

$$|BX| = \frac{1}{5}|AB|.$$

اثبات : نقطه M را روی دایره $(H, |HF_1|)$ طوری اختیار می‌کنیم که MF_1 قطر آن‌گردد . و نقطه N را هم محل برخورد خطوط راست MG, HF در نظر می‌گیریم . پاره‌خط:

$$|BF| = |BF_1| = \sqrt{2}a.$$

طول مماس مرسوم از نقطه F بر دایره $(H, |HF_1|)$ برابر است با :

$$b=\sqrt{|FF_1|\cdot|FB|}=\sqrt{2\sqrt{2}a\sqrt{2}a}=2a.$$

از طرف دیگر $|FG|=2a$ است پس خط راست $|FG|$ در نقطه G بر دایره $(H,|HF_1|)$ مماس خواهد بود. از مثلث قائم‌الزاویه FGH نتیجه می‌شود:

$$|HF|=\sqrt{|HG|^2+|GF|^2}=\sqrt{5}\,a.$$

مثلث FMF_1 متساوی‌الساقین است زیرا زاویه F_1BM که زاویه محاطی و روبرو به قطر F_1M از دایره $(H,|HF_1|)$ می‌باشد قائمه می‌باشد پس:

$$|MF_1|=|MF|=2a.$$

مثلث MGF هم متساوی‌الساقین است $(|MF|=|FG|=2a)$,
بنا بر این MG عمود بر HF خواهد بود در مثلث HGF که در آن GN ارتفاع می‌باشد داریم:

$$|HG|^2=a^2=|HF|\cdot|HN|=\sqrt{5}a\,|HN|$$

$$|HN|=\frac{a}{\sqrt{5}}.$$

از مثلث‌های قائم‌الزاویه HNG ، MGF_1 داریم:

$$|NG|=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2a}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\,|MG|,$$

$$|GF_1|^2=4a^2-\frac{16}{5}a^2=\frac{4}{5}\,a^2.$$

و بالاخره از مثلث قائم‌الزاویه AKE داریم:

$$|AK|^2=|GF_1|^2=|AE|\cdot|AP|$$
$$=2a\cdot\frac{|AX|}{2}=|AX|\cdot a,$$

$$|AX|=\frac{|GF_1|^2}{a}=\frac{4a}{5}.$$

پس:

$$|BX|=\frac{1}{5}\,|AB|.$$

بخش ششم

ساختمانهای هندسی به کمک پرگار تنها وقتی که شاخه‌های آن از سمت پایین محدود باشد .

در این بخش با پرگاری سر و کار داریم که شاخه‌های آن از سمت پایین محدود به پاره‌خط R_{min} می‌باشد با چنین پرگاری ، دایره‌هایی‌را می‌توان رسم کرد که شعاع آنها بزرگتر و یا مساوی $R_{\min}$. باشد .

در مطالبی که خواهیم داشت برای سادگی به جای $R_{\min}$، R را به کار خواهیم برد .

▶مسئله ۳۳

پاره خطی رسم کنید که n بار بزرگتر از پاره خط مفروض AA_1 باشد .

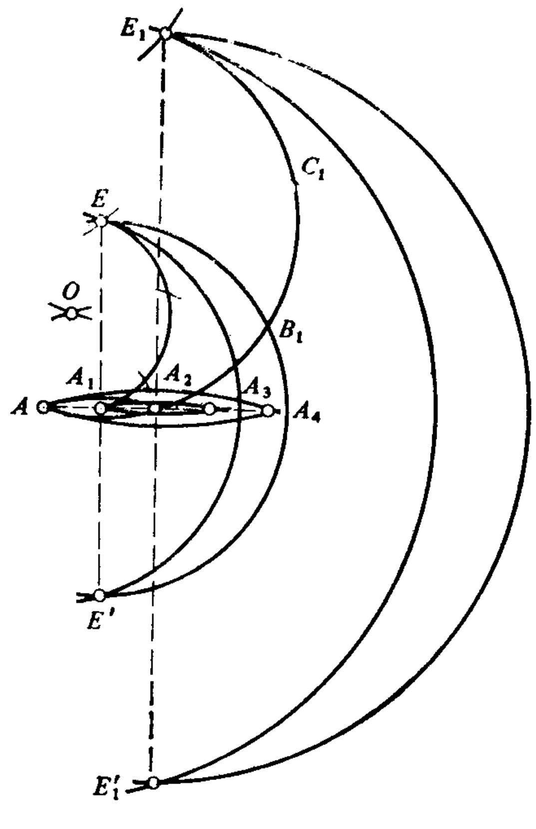
طریقه رسم : پاره خط A_1E را عمود بر پاره خط AA_1 رسم می‌کنیم . (مسئله ۸ ، در اینجا $|oA|\geqslant R$ در نظر می‌گیریم .) قرینه نقطه E را نسبت به خط AA_1 ، E' می‌نامیم (مسئله (۱) و در اینجا $|A_1E|>R$ ، $|AE|>R$) قرینه نقطه A را نسبت به خط EE' هم A_2 می‌نامیم $|AA_2| = 2|AA_1|$ شکل (۴۲)

سپس $[A_2E_1]\perp[AA_2]$ را رسم کرده و $E_1' = \mathbf{S}_{(AA_2)}(E_1)$ را بدست می‌آوریم.
اکنون اگر نقاط

$$A_4 = \mathbf{S}_{(E_1E_1')}(A), \qquad A_3 = \mathbf{S}_{(E_1E_1')}(A_1)$$ را پیدا کنیم.

داریم :

$$|AA_3| = 3\,|AA_1|,\ |AA_4| = 4\,|AA_1|.$$



42

به طریق مشابه یک بار دیگر هم ترسیمات را انجام میدهیم. بازاء $|AA_1|\geqslant R$ طریقه رسم را در مسئله (۲) نشان داده‌ایم. شعاع تمام دوایری‌که در این ترسیمات بکار رفته کمتر از R نبوده‌اند.

نکته: از ترسیمات فوق نتیجه می‌شود که نقاط ... A_2, A_4, A_8, A_{16}, را می‌توان مستقیما با جا گذاشتن نقاط A_3, A_5, A_6, A_7, بدست آورد. و از این طریق پاره‌خطی $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n$ مرتبه بزرگتراز AA_1 را رسم کرد.

▶ مسئله ۳۴

پاره خطی رسم کنید که n بار کوچکتر از پاره‌خط مفروض AB باشد. (پاره‌خطی را به n جزء مساوی تقسیم کیند.)

طریقه رسم : بازاء $|AB| \geqslant R$ طریقه رسم در مسئله (۹) نشان داده شده است. اکنون فرض می‌کنیم $|AB| < R$ باشد. پاره خط $|AB'| = m|AB|$ را رسم می‌کنیم. (مسئله ۳۳) و عدد طبیعی n را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $|AB'| \geqslant R$ اکنون اگر پاره خط را به nm جزء مساوی تقسیم می‌کنیم (مسئله۹) پاره خط مطلوب AX بدست خواهد آمد:

$$|AX| = \frac{|AB'|}{nm}.$$

. در حقیقت داریم :

$$|AX| = \frac{|AB'|}{nm} = \frac{m\,|AB|}{nm} = \frac{|AB|}{n}.$$

نکته: اگر در این حالت ترسیمات مسئله (۱۰) را به جای مسئله (۹) بکار ببریم خواهیم داشت :

$$|AX| = \frac{1}{2^n}\,|AB|.$$

صحت راه حل مسئله (۵) در ترسیم با پرگاری کـــه شاخه‌های آن از پایین هم محدود باشد، به قوت خود باقی می‌ماند.

▶ مسئله ۳۵:

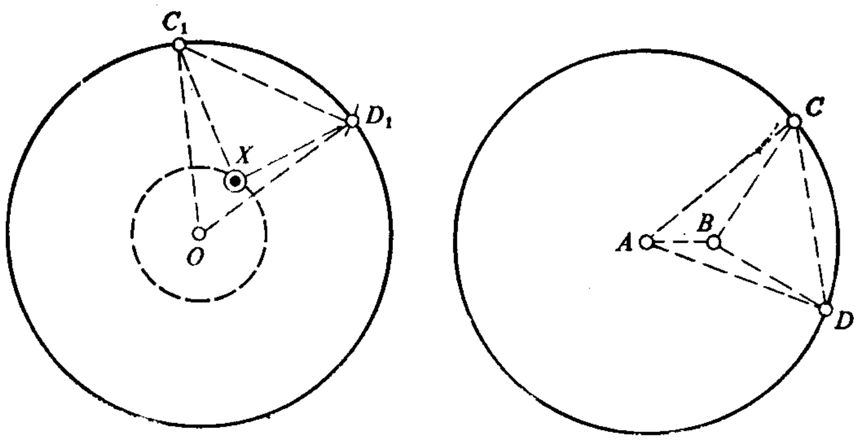
(دومین عمل اصلی) دایره‌ای به مرکز مفروض O و شعاع معلوم $r = |AB|$، رسم کنید.

طریقه رسم : اگر $|AB| \geqslant R$ باشد دایره مستقیما به کمک پرگار رسم می‌شود..

اما اگر $|AB| < R$ باشد در آن صورت چنین دایره‌ای با پرگار مفروض قابل رسم نیست در این حالت می‌توان نقاطی چند از پیرامون دایره را مشخص کرد، و به کمک آنها مرکز و شعاع دایره رابدست آورد.

فرض می‌کنیم که داشته باشیم $|AB| < R$.

دایره‌های (O,a) ، (A,a) را که در آن $a > R+r$ و مقدار دلخواهی است رسم کرده و نقاط D, C را روی دایره دوم طوری اختیار می‌کنیم که داشته باشیم $|CD| \geqslant R$ نقطه C_1 ، را هم روی (O,a) اختیار کرده دایره $(C_1, |CD|)$ را رسم می‌کنیم تا دایره (O,a) ، را در نقطه D_1 قطع کند . اکنون اگر دایره‌های $(C_1, |CB|)$ ، $(D_1, |BD|)$ را رسم کنیم محل تقاطع آنها نقطه X خواهد بود که روی دایره مطلوب (O,r) قرار دارد . با تغییر دادن وتر C_1D_1 روی دایر (O,a) می‌توان نقاط دیگری از دایره مطلوب را بدست آورد



43

شکل (۴۳) صحت ترسیمات فوق مستقیما از قابل انطباق بودن مثلث‌های ACD ، OC_1D_1 و BCD ، XC_1D_1 بدست آید .

اکنون روش کلی نشان میدهیم که چگونه می‌توان ساختمانهای هندسی را به کمک پرگار تنها و با شعاعی که از R کمتر نباشد انجام داد .

به کمک این روش هر مسئله ساختمانی را که شامل عملیات اصلی سوم و چهارم و پنجم باشد و به کمک پرگار و خط کش رسم می‌شوند می‌توان رسم کرد (مسائل ۷–۵) و این منطبق بر روشی است که در بخش پنجم بدان اشاره کرده‌ایم .

اختلاف این دو روش در این است که پاره‌خطهای مفروض در فرض مسئله 2^n با کاهش پیدا نکرده برعکس n یا 2^n بار بیشتر شده‌اند . (مسئله ۳۳)

فرض کنیم که رسم یک مسئله ساختمانی قابل رسم به کمک پرگار و خط کش، بار پرگار تنها که شعاع آن از پایین محدود به R می‌باشد **مورد** نظر باشد . حال تصور کنیم که این مسئله با پرگار تنها که مقید نباشد هم حل شده است ، در نتیجه شکلی مانند

Φ خواهیم داشت که تنها از دوایــر تشکیل شده است . شعاع کوچکترین دایره‌ای را که در شکل Φ رسم شده به R_1 نشان میدهیم . عدد طبیعی n را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $nR_1 \geqslant R$ شکل Φ' را مشابه شکل Φ و n بار بزرگتر بدست می‌آوریم . قسمتی ازشکل Φ' را که مربوط به‌نتیجه مطلوب یا جواب مسئله است به Ψ' نشان میدهیم اکنون اگر شکل Ψ را که n بار کوچکتر از Ψ' بوده و جزء نتیجه مطلوب شکل Φ. است‌بدست‌آوریم جواب مسئله بدست‌خواهد آمد .
(مسئله ۳۴)

به این ترتیب به قضیه زیر می‌رسیم :

▶قضیه : تمام مسائل مربوط به ساختمانهای هندسی که قابل رسم به کمک پرگار و خط کش باشند ، قابل رسم به کمک پرگار تنها هم خواهند بود که دایره‌هایی با شعاع کمتر از a رسم نمی‌کنند .

* * *
*

بخش هفتم

ساختمانهای هندسی به‌کمک پرگاری که‌فاصله شاخه‌های آن ثابت است .

ترسیمات به کمک پرگاری که‌فاصله شاخه‌های آن ثابت‌باشد ، یعنی پرگاری که دایره‌هایی به شعاع ثابت R رسم می‌کنـد توسط بسیاری از دانش پژوهان مورد مطالعه قرار گرفته است قسمت اعظم "کتاب ساختمانهای هندسی" که توسط ریاضیدان عرب بنام ابویاف تالیف شده اختصاص به این موضوع دارد . لئونارد داوینچی ، کاردانو ، تارتاگلیا ، فرراری‌ودیگران‌برای‌حل‌مسائل‌ساختمانی به‌کمک‌پرگارتنهاوباشعاع‌ثابت بـه کار پرداخته‌اند .

به‌کمک‌پرگارتنهاوباشعاع‌ثابت‌می‌توانیم‌خطراستی‌عمودبرپاره‌خط AB دریک‌سر آن رسم کنیم . بشرطی که $|AB|<2R$ باشد . (مسئله ۸)
می‌توانیم پاره‌خط R را $2, 3, 4, \ldots$ بار بـزرگ کنیم (مسئله ۲) اگر $|AB|<2R$, $|AB|\neq R$ باشد در آن صورت می‌توانیم با تغییر دادن جای نقاط قرینه C_1 , C نقاطی چند از یک خط راست را بدست آوریم (مسئله۵) منتها با این پرگار نمی‌توان پاره‌خط و یا کمانی را به چند جزء مساوی تقسیم کرد و یا پاره خطی را که جزء چهارم یک تناسب است بدست آورد‌به‌این‌ترتیب‌ساختمانهای‌هندسی‌که‌به‌کمک‌پرگار و یا خط کش انجام می‌شوند باپرگار به شعاع ثابت عملی نیستند . در دوبخش قبل مسائلی را مورد مطالعه قرار دادیم که به کمک پرگار تنها و با تحمیل شرایطی بر میزان شعاع آن رسم می‌شدند و روش کلی هم که ترسیمات با چنین پرگارهایی را امکان پذیر

می‌ساخت بیان کردیم . اکنون این سئوال طبیعی پیش می‌آید که :

آیا می‌توان ساختمانهای هندسی را به کمک پرگاری که میزان باز شدن شاخه‌های آن از بالا و پایین محدود باشد انجام داد ؟ یعنی با پرگاری که شعاعهای دوایر مرسوم با آن بین R_{max} و R_{min}. باشند . جواب این سوال را ک . "یاناگی‌هارا" ریاضی‌دان ژاپنی داده‌است .

یاناگی‌هارا ثابت کرده است که تمام مسائل ترسیمی که به کمک پرگار و خط‌کش قابل رسم باشند ، با پرگار تنهایی که میزان باز شدن شاخه‌های آن از بالا و پایین محدود باشد یعنی با پرگاری که شعاع دایره‌های مرسوم با آن بین R_{min} و R_{max}. باشند قابل ترسیم هستند اثبات این موضوع در این کتاب پیچیده و انتزامی خواهد بود .

در قضایای اصلی یاناگی‌هارا اختلاف $R_{max} - R_{min}$ به اندازه کافی کوچک انتخاب شده است . به عبارت دیگر تمام مسائل قابل ترسیم به کمک پرگارو خط کش ، با پرگار تنهایی میسر گشته که میزان باز شـــدن آن "تا اندازه‌ای" ثابت‌است و همانطور که در آغاز این بخش گفتیم تمام این‌مسائل با پرگاری که فاصله شاخه‌های آن ثابت باشند قابل حل نیستند .

بخش هشتم

ساختمانهای هندسی به کمک پرگار تنها بشرطی که تمام دوایر مرسوم با آن از یک نقطه گذشته باشند.

در این‌بخش مسائلی از هندسه ساختمانی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که به کمک پرگار تنها رسم می‌شوند. و در عین‌حال تمام دوایر مرسوم با آن از یک نقطه صفحه می‌گذرند. *

تعریف: زاویه بین دودایره متقاطع (در حالت کلی دو منحنی) عبارت است‌زاویه بین خطوط مماسی‌است که د رنقاط تقاطع رسم می‌شوند. دایره ها را متعامد می‌نامند اگر زاویه بین آنها قائمه باشد.

▶ قضیه ۱: اگر دایره (O_1, R) و دایره انعکاس (O, r) بر هم عمود باشند در آن صورت منعکس اولی خود ش خواهد بود. **

اثبات: اگر دو دایره متعامد باشند، در آن صورت زاویه OAO_1 یعنی زاویه بین شعاع‌هایی که نقطه تقاطع را به مراکز آنها وصل می‌کند قائمه خواهد بود. پس خطراست

---

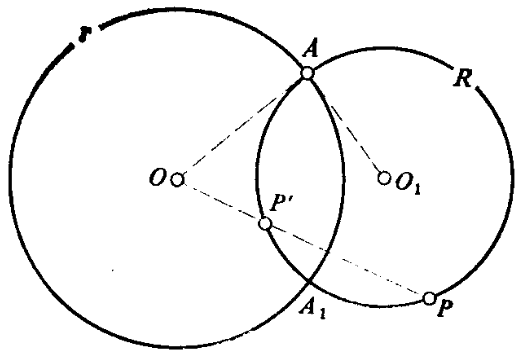
* : در این بخش محدودیتی برای شاخه‌های پرگار در نظر گرفته نشده است.

** عکس قضیه هم درست است اما در این بخش بکار نرفته است.

OA در نقطه A مماس بر دایره (O_1, R) بوده و خواهیم داشت :

$$|OP|\cdot|OP'| = |OA|^2 = r^2.$$

تساوی فوق همواره در مورد هر قاطع نظیر OP صادق بوده و نقطه P' منعکس نقطه P و کمان APA_1 از دایره (O_1, R) منعکس کمان $AP'A_1$ خواهد بود . شکل (۴۴) در مسئله (۱۱) رسم پاره خطی را که 3^n بار بزرگتر از پاره خط AA باشد ملاحظه کردیم . در آن ترسیمات همه دوایر از نقطه A گذشته بودند . تنها مورد استثناء دایره $(A, |AA_0|)$ بود که برای پیدا کردن نقاط E و E' بکار می‌رفت و از نقطه A نمی‌گذشت شکل (۱۸)



44

مانمی‌توانیم دایره $(A, |AA_0|)$ را رسم می‌کنیم اما به‌طریق زیر عمل‌می‌کنیم . دهانه پرگار را به اندازه $|AA.|$ باز می‌کنیم و نوک مداد پرگار را در نقطه A قرار داده بدون اینکه اندازه دهانه پرگار را تغییر دهیم شاخه دیگر پرگار را روی کمان $(A., |AA.|)$ در نقطه E قرار میدهیم . و $(E, |AE|)$ را رسم می‌کنیم و محل حمل تلاقی آن را با دوایر $(A., |AA.|)$ بدست می‌آوریم تا نقطه C بدست آید . عینا به طریق مشابه نقطه C' هم بدست می‌آید .

حالا شما با یک عمل اضافی در ساختمانهای هندسی به کمک پرگار تنها هم آشنا شدید . به این ترتیب می‌توان پاره خطی به طول 3^n برابر طول پاره خط مفروض به کمک دوایری که از یک نقطه می‌گذرند رسم کرد . (مسئله۱۱)

حل مسائل (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) از راهی بدست آمده‌اند که همه دوایر مرسوم در آنها از نقطه O که مرکز انعکاس می‌باشد گذشته‌اند .

(به شکلهای ۲۶، ۲۸، ۲۹ نگاه کنید .)

طرز پیدا کردن نقطه X منعکس نقطه C را در حالت $|OC| \leqslant r/2$ در نظر بگیرید .

مسئله (۱۵)

برای اینکه همه دوایر بدون استثنا از نقطه O بگذرند ، لازم است که پاره‌خط $|OC_1| = 3^n |OC| > r/2$ را به جای پاره خط $|OC_1| = n |OC| > \frac{r}{2}$ رسم کنیم شکل(27 .) $|OX| = 3^n |OC'_1|$. را بدست آوریم .

(مسئله ۱۱ اوایل این بخش را ملاحظه کنید)

به این ترتیب این امکان وجود دارد که به کمک پرگار تنها : منعکس یک نقطه ، دایره‌ای را که از مرکز انعکاس گذشته باشد و منعکس یک خط راست است بالاخره خط راستی را که(دو نقطه آن) منعکس دایره‌ای ما ربر مرکز انعکاس می باشد رسم کرد .

در هر یک از این ساختمانهای هندسی به دوایری اکتفا می‌کنیم که از یک نقطه مانند O یعنی مرکز انعکاس گذشته باشد .

* * *

همانطور که د رمقدمه ملاحظه شد ج ــ استینر *J. Steiner* نشان داد که تمام مسائل ساختمانهای هندسی که با خط‌کش و پرگار رسم می‌شوند ، به کمک یک‌خط‌کش تنها قابل رسم هستند ، به‌شرطی که در صفحه رسم یک دایره ثابت (کمکی)(O_1, R)، و مرکز آن داده‌شده باشد .

حال فرض می‌کنیم‌که یک مسئله معین از طریق استینر حل‌شده باشدو در نتیجه‌شکلی مانند Φ خواهیم داشت که تنها از اجزاء دایره کمکی و **خطهای** راست تشکیل شده است .حال دایره دلخواهی مانند (O, r) را طوری انتخاب می‌کنیم که‌مرکز آن یعنی نقطه O روی دایره(O_1, R)و یا روی خطوط راست شکل Φ نباشداین دایر ه را دایره انعکاس انتخاب می‌کنیم .اکنون‌شکل Φ' منعکس شکل Φ. را نسبت به این دایره رسم می‌کنیم. شکل Φ' فقط هم شامل چند دایره خواهد بود که از نقطه O یعنی مرکز انعکاس گذشته‌اند . (بجزء دایره انعکاس (O, r) و دایره استینر (O_1, R))

اگر دایره انعکاس (O,r) بر دایره کمکی (O_1 , R) عمود باشد ، در آن صورت بنا بر قضیه (۱) دایره (O_1,R) استینر منعکس خود خواهد بود . (یعنی همزمان متعلق به شکل Φ و Φ' خواهد بود) . شکل Φ تشکیل شده از خطوط راست و دایره استینر و **منعکس آن** Φ' **شامل دایره استیز است و دوایری که از مرکز انعکاس می‌گذرند و** شاید چند نقطه **جداگانه** . (مراکز این دوایر) برای رسم Φ'' **لازم است که فقط از حل مسائل (۱۵) و (۱۶)** استفاده کنیم .

به این ترتیب در ساختمان شکل Φ' منعکس شکل Φ تمام دوایری که رسم می‌شوند ، از نقطه O خواهند گذشت (وقتی دایره انعکاس و دایره استیز بر هم عمود باشند) در اینجا دو استثناء وجود دارند که عبارتند از دایره انعکاس و دایره استینر (O_1 , R) یادآوری می‌کنیم که عملیات ساختن شکل Φ' عینا شبیه عملیات ساختن **شکل Φ می‌باشد برای مثال مسئله زیر را در نظر می‌گیریم :**

▶ **مسئله ۳۶**

خط راست $A O_1$ و نقطه C در خارج آن داده شده‌اند . خط راستی رسم کنید که از نقطه C بگذرد و بر خط راست $O A_1$ عمود باشد . نقطه تلاقی آنها را هم پیدا کنید :

طریقه رسم : فرض می‌کنیم (O_1,R) دایره استینر باشد که در آن $R = |O_1 A|$ با استفاده از روش استینر شکل Φ را در سه مرحله می‌سازیم :

(۱) خط راست AO_1 را امتداد می‌دهیم تا دایره (O_1,R) را در نقطه B قطع کند .

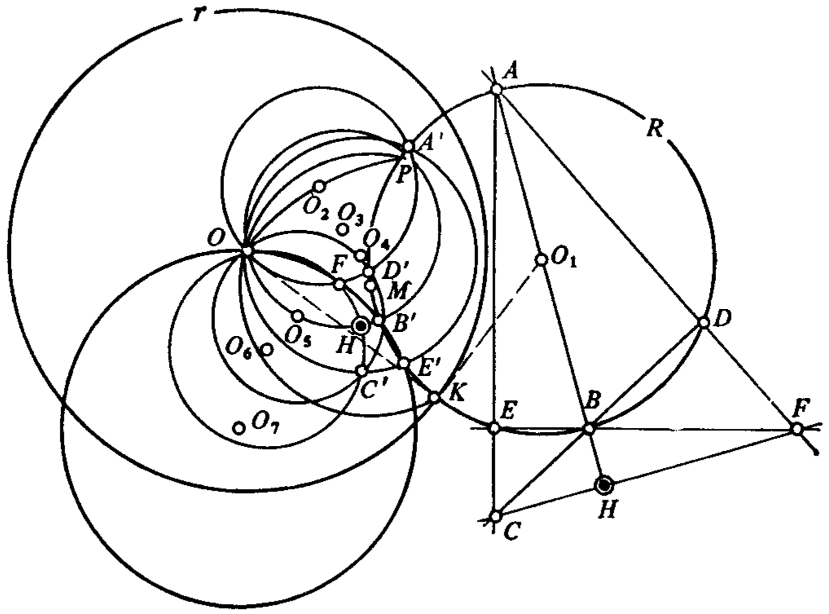
(۲) خط راست $A C$ و $B C$ را رسم می‌کنیم و نقاط تقاطع آنها را با دایره استینر E و D ، می‌نامیم .

(۳) اکنون اگر خطوط راست $B E , A D$ را رسم کنیم و نقطه تقاطع آنها را $\bar{F}$ بنامیم خط راست $C F$ بر $A O_1$ عمود خواهد بود . محل برخورد خطوط $A B , C F$ را هم با H ، نمایش میدهیم . شکل (۴۵)

اثبات : خطوط EF , CD ارتفاعات مثلث $A C F$ هستند و چون زوایای $A D B$ و $A E B$ ، قائمه‌اند (روبرو به قطر دایره (O_1 , R) هستند) پس $(F C)$ بر $(A O_1)$ عمود خواهد بود زیرا سه ارتفاع مثلث در یک نقطه متقارب هستند .

شکل Φ در این مسئله تشکیل شده است از :

دایره استینر (O_1 , R) و شش خط راست $A O_1 , A C , A D , C D , C F , E F$.



45

در آغاز ترسیمات ، شکل شامل دایره استینر، خط راست $A O_1$ و نقطه O بود. اکنون حل مسئله (۳۶) را به کمک پرگار تنها به شرطی که تمام دایره‌های مرسوم در آن بجزء دو تا از یک نقطه گذشته باشند مورد مطالعه قرار می‌دهیم :

طریقه رسم : ابتدا دایره (O , r) را طوری تعیین می‌کنیم که متعامد بر دایره (O_1 , R) استینر گردد. که در آن $R = |O_1 A|$ برای این منظور دو نقطه دلخواه K و M را روی دایره (O_1 , R) انتخاب و $(K O)$ را عمود بر $[K O_1]$ رسم می‌کنیم (مسئله ۸ ، طریقه دوم) یعنی دایره‌های $(K , |K P|) , (M , |K M|)$ را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند. نقطه P در اینجا محل برخورد دایره‌های $(M , |K M|)$ ، (O_1 , R) است. شکل (۴۵)

با تغییر دادن نقاط K و M این امکان وجود دارد که نقطه O را طوری تعیین کنیم که روی هیچ یک از خطوط راست شکل Φ قرار نگیرد. دایره $(O , |O K|)$ بر دایره استینر (O_1 , R) عمود است. بنا بر این اگر دایره (O , r) که در آن $r = |O K|$ می‌باشد دایره انعکاس فرض شود ، در آن صورت منعکس دایره استینر (O_1 , R) بر خودش منطبق خواهد شد .

شکل Φ' منعکس شکل Φ از هفت دایره $(O_2, |OO_2|)$، $(O_3, |OO_3|)$، $(O_4, |OO_4|)$، $(O_5, |OO_5|)$، $(O_6, |OO_6|)$، $(O_7, |OO_7|)$ و بالاخره (O_1, R)* تشکیل شده است.

(منعکس دایره استینر بر خودش منطبق است بنابر این این دایره همزمان به شکل های Φ, Φ', تعلق دارد.) شش دایره اول از نقطه O مرکز انعکاس می‌گذرد و به ترتیب منعکس‌های خطوط راست EF, CF, CD, AC, AO_1, AF از شکل Φ هستند.

نقاط $H', F', E', D', C', B', A'$ از شکل Φ' به ترتیب منعکس‌های H, F, E, D, C, B, A از شکل Φ. هستند.

تمام دوایری که برای ساختن اولین شش دایره از شکل Φ. رسم شده‌اند و همچنین دایره‌هایی $(M, |KM|)$ ($|K|, |KP|$) از نقطه O مرکز انعکاس گذشته‌اند.

در آغاز شکل ϕ شامل نقطه C، خط راست AO_1 بود که دایره (O_1, R) استینر را هم به آن اضافه کردیم. برای رسم سایر خطوط در شکل Φ به کمک پرگار تنها، یعنی برای مشخص کردن D, E, B و نقاط مطلوب H, F با استفاده از روش استینر شکل Φ' را در سه مرحله به انجام می‌رسانیم.

۱) دایره $(O_3, |OO_3|)$ منعکس خط راست AO_1 را رسم (مسئله ۱۶) و محل برخورد آنرا با دایره (O_1, R) استینر A' و B' می‌نامیم. (A' منعکس نقطه A است.) اکنون نقطه B منعکس B' را بدست می‌آوریم (مسئله ۱۵) نقطه B محل برخود خط راست AO_1 و دایره (O_1, R) خواهد بود. (شکل ۴۵ را نگاه کنید)

۲) دایره‌های $(O_4, |OO_4|)$، $(O_5, |OO_5|)$ را که منعکس‌های خطوط راست BC, AC هستند رسم می‌کنیم. این دوایر دایره استینر را به ترتیب در B', E', A'، D' قطع خواهند کرد. حال نقاط E و D منعکس‌های D', E' را هم بدست می‌آوریم.

۳) سرانجام دایره‌های $(O_2, |OO_2|)$، $(O_7, |OO_7|)$ را که منعکس‌های خطوط راست BE, AD هستند رسم و محل برخورد آنها را F' می‌نامیم. با پیدا شدن F' نقطه F منعکس آنرا پیدا می‌کنیم. CF خط مطلوب خواهد بود.

---

* : مراکز این دوایر یعنی $O_1, O_7, O_6, O_5, O_4, O_3, O_2$ را می‌توان نقاط راکنده جدا از هم از شکل ϕ' در نظر گرفت.

اکنون اگر ادیره $(O_6, |OO_6|)$ منعکس خط راست CF ، دایره $(O_3, |OO_3|)$ ، را در نقطه H' قطع کند ، نقطه H منعکس نقطه H' نقطه مطلوب مسئله خواهد بود . بنا بر آنچه که در بالا به آن اشاره شدقضیه زیر را می‌توان بیان کرد :

▶ قضیه۲ : **هر مسئله** ساختمان هندسی قابل ترسیم به کمک پرگاروخط کش ، بگونه‌ای قابل رسم به کمک پرگار تنها هستند که تمام دوایر مرسوم در آن به جزء دو دایره (دایره انعکاس و دایره کمکی استینر) از یک نقطه‌یعنی مرکزانعکاس می‌گذرند

* * *

اکنون فرض می‌کنیم که یک مسئله به روش استینرحل شده باشد . در نتیجه شکلی مانند Φ خواهیم داشت که از دایره (O_1, R) و خطوط راستی که بعضی از آنها از O_1 مرکز دایره کمکی می‌گذرند تشکیل شده است . اگر دایره (O_1, R) استینربه عنوان مرکز انعکاس انتخاب شود و Φ' منعکس شکل Φ ترسیم گردد در آنصورت Φ' شامل خطوط راست و چند دایره خواهد بود که تمام خطوط راست و دوایر به استثنای دایره (O_1, R) ، از یک نقطه قبلا تعیین شده O_1 خواهد گذشت .
پس قضیه زیر را داریم :

▶ قضیه۳ .

هر ساختما ن هندسی را به کمک خط کش و پرگار طوری می‌توان رسم کرد که تمام خطوط راست و دوایر آن بجزء یکی (دایره انعکاس که در اینجا دایره کمکی استینر است) از یک نقطه قبلا تعیین شده بنام مرکز انعکـــاس بگذرنـــد .

اکنون فرض می‌کنیم در حل یک مسئله مربوط به ساختمانهای هندسی به کمک پرگار تنها ، بتوانیم فقط یکبار از خط کش استفاده کنیم . (به عبارت دیگر خط راست AB روی صفحه کاغذ به کمک خط کش رسم شده باشد) . دایره دلخواهی مانند (O, r) ، که مرکز آن یعنی O روی خط AB قرار ندارد ، به عنوان دایره انعکاس در نظر می‌گیریم . و دایره (O_1, R) منعکس خط راست مفروض را نسبت به آن بدست می‌آوریم (مسئله ۱۶) دایره (O_1, R) از نقطه O مرکز انعکاس می‌گذرد و در آن $R = |OO_1|$ می‌باشد .

در تمام ساختمانهای هندسی به روش استینر با انتخاب دایره کمکی (O_1,R)، شکل Φ. فقط شامل خطوط راست و دایره (O_1,R) خواهد بود و شکل Φ' منعکس آن جز ی از AB و دوایری که را در بر خواهد گرفت که از مرکز انعکاس O می‌گذرند . در عین حال فرض بر این است ذر روش استینر هیچ یک از خطوط راست از نقطه O واقع بر روی (O_1,R) نگذشته‌اند در غیر این صورت می‌توان دایره دیگری را به‌عنوان دایره انعکاس انتخاب کرد .

اگر خط راست AB ، رسم نشده‌باشداما استفاده‌ازخطکش‌برای‌یکبارمجاز باشد ،درآن‌صورت‌دایره‌دلخواه (O_1,R) رادرصفحه‌به‌عنوان‌دایره‌کمکی‌انتخاب کرده‌و مسئله‌رابه‌طریق استینر بـه انجام می‌رسانیم سپس نقطه‌ای مانند O روی محیط همان دایره طوری اختیار می‌کنیم که روی‌هیچ یک از خطوط راست شکل ϕ قرار نداشته باشد . دایره (O,r) را باشعاع $r<2R$ رسم می‌کنیم ونقاط تلاقی آنرا با دایره (O_1,R) ، A و B می‌نامیم .

اکنون خط‌کش را برداشته خط راست AB را که منعکس دایره (O_1,R) نسبت به دایره (O,r) می‌باشد رسم می‌کنیم (به عنوان دایره انعکاس در نظر گرفته‌شده) سپس شکل Φ' منعکس شکل Φ. را بدست می‌آوریم .

قضیه۴ : اگر خط راستی درصفحه‌رسم‌شده باشد ، در آن صورت تمام مسائل مربوط به ساختمانهای هندسی که به کمک خط کش و پرگار ، قابل رسم هستند توسط پرگار تنهـــا هم قابل رسم خواهند بود به قسمی که تمام دوایر مرسوم در آن به جزء یکی (دایره انعکاس) از یک نقطه صفحه گذشته باشد

اکنون فرض می‌کنیم که به کمک خط کش شکل مشخصی مانند Ψ را داشته باشیم که از خطوط راست و چند پاره خط(فاصله دو خط موازی یا یک متوازی‌الاضلاع و غیره) تشکیل شده باشد . فرض کنیم که‌به روش استینر مسئله معینی‌را با شکل کمکی Ψ حل‌کرد ه باشیم سرانجام شکل Φ را که تنها از خطوط راست تشکیل شده است و Ψ زیر مجموعه آن می باشد در اختیار خواهیم داشت. دایره دلخواه (O,r) را طوری رسم می‌کنیم که مرکزآن‌روی‌هیچ‌یک‌ازخطوطشکل Φ. قرارنگیرد .وبه‌عنوان دایره

انعکاس انتخاب شود . شکل Φ' منعکس شکل Φ. را هم‌رسم می‌کنیم . شکل Φ' تنها شامل دوایری خواهد بود که از نقطه O مرکز دایره انعکاس می‌گذرند .

قضیه۵ : اگر شکل معینی که تنها شامل خط راست و چند پاره خط میباشد در صفحه‌ای داده شده باشند در آن صورت تمام مسائل مربوط به ساختمانهای هندسی، که‌بروش‌استینر و با استفاده از آن، به‌عنوان شکل کمکی قابل حل باشند، به کمک پرگار تنها هم قابل حل خواهد بود وتمام دوایر بجزء یکی (دایره‌انعکاس) از یک نقطه دلخواه انتخاب شده خواهند گذشت

در آغاز این بخش، به عملیات اضافی اشاره کردیم که می شد مسئله (۱۵) را طوری‌حل کنیم که تمام دوایر مرسوم‌در آن بجزءیکی (دایره‌انعکاس (O,r)) از نقطه‌ای مانند O که به عنوان مرکز دایره انعکاس انتخاب شده **بگذرد**
اما اگر از این عملیات اضافی استفاده نشودلازم می‌آمد تا برای پیدا کردن نقاط E, E', E'_p, E_2, E'_2 که در مسئله (۱۱) و همچنین مسئله (۱۵) بکار رفته بودند دوایر $(A, |AAi|)$ را رسم کنند . در این حالت در قضیه دوم عبارت : بجزء دو (دایره انعکاس و دایره کمکی‌استینر) با عبارت : بجزء دایره کمکی (O_1, R) استینر و دایره انعکاس (O,r) و شاید چند دایره **متحدالمرکز** (O, ri) تغییر پیدا می‌کنند .

در قضایای ۳، ۴، ۵ عبارت : "بجزء یکی" (دایره انعکاس) به عبارات : بجزء "دایره‌انعکاس (O,r) و شاید چند دایره **متحدالمرکز** (O, ri) که در آن $i=1,2,\ldots$ می‌باشد" عوض می‌شود . و بجای قضیه (۳) می‌توان قضیه زیر را بکار برد :

قضیه ۳́ : هر مسئله مربوط به ساختمانهای هندسی را بـه کمک پرگار و خط‌کش چنان می‌توان حل کرد که در آن تمام خطوط راست و دوایر بجزء دایره انعکاس (O,r) و احتمالا چند دایره هم **مرکز** (O, ri) که در آن $i=1,2,\ldots$ می‌باشد از یک نقطه مانند O که قبلا به‌عنوان مرکز انعکاس تعیین گردیده بگذرند .

به این ترتیب تمام دوایر مرسوم در شکل را می‌توان به دو دسته تقسم کرد : اول دوایری که از یک نقطه مانند O می‌گذرند و دوم دوایری (یکی‌یابیشتر) که‌نقطه O مرکز آنها محسوب می‌شود . دایره انعکاس (O,r) همواره در میان این دوایر متحد المرکز قرار دارد .

ضمیمه (۱)

نمادها و کاربردشان در این کتاب

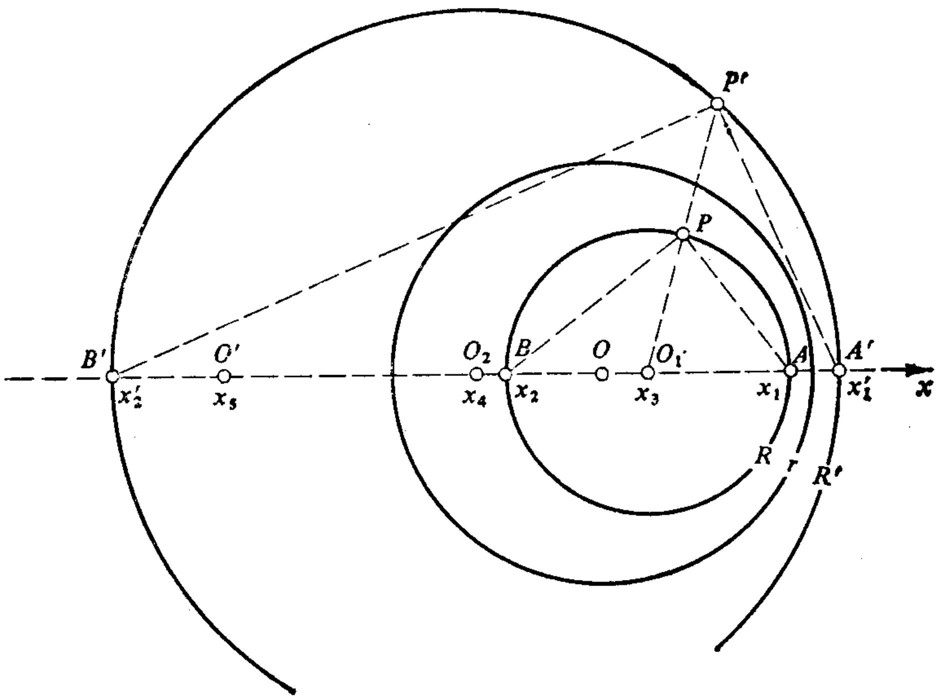
مجموعه اعداد طبیعی .	$\mathbf{N}$
اشکال هندسی .	Φ, Ψ
خط راستی که از نقاط A , B می‌گذرد .	(AB)
پاره خطی که ابتدا و انتهای آن به ترتیب A , B است .	$[AB]$
نیم خط AB.	$[AB)$
موازی	$\parallel$
خط AB موازی با خط CD.	$(AB) \parallel (CD)$
عمود	$\perp$
پاره خط AB عمود بر پاره خط CD است .	$[AB] \perp [CD]$
زاویه ، $<ABC$ یعنی زاویه $\angle ABC$	$\angle$
بزرگی ــ مقدار یک زاویه مثلا $\widehat{ABC} = 60^o$.	$\widehat{\ }$
کمان ، $\overset{\smile}{AB}$ یعنی کمان AB	$\smile$
مثلث	$\triangle$
علامت تشابه $\triangle ABC \sim \triangle CDE$	$\sim$
علامت انطباق $\triangle ABC \cong \triangle CDE$	$\cong$
تعلق داشتن علامت عضویت $A \in (CD)$ یعنی نقطه A به خط CD تعلق دارد .	$\in$
زیر مجموعه ، شامل بودن $[AB] \subset \Phi$ یعنی پاره خط AB به شکل ϕ تعلق دارد .	$\subset$
علامت جمع	$\cup$
علامت اشتراک $E = (AB) \cap (CD)$ یعنی E محل تلاقی دو خط AB , CD است .	$\cap$

مجموعه تهی. $M = \phi$ یعنی مجموعه M تهی است.	$\varnothing$
نقطه A بطول x.	$A\ (x)$
مجموعه M شامل عضوهای c , b , a.	$M = \{a;\ b;\ c;\}$
دایره یا کمانی به مرکز O و شعاع r.	$(O,\ r)$
بردار AB.	$\overrightarrow{AB}$
دو بردار موازی و هم جهت. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$	$\uparrow\uparrow$
دو بردار موازی و غیر هم جهت	$\uparrow\downarrow$
قرینه نقطه C نسبت به خط راست AB.	$\mathrm{S}_{(AB)}\ (C)$
مجانس (تشابه) بمرکز O و ضریب K.	$\mathbf{H}_O^k$

ضمیمه (۲)

اثبات مسئله (۱۸) در حالت کلی .

در حالتی که نقطه O مرکز دایره انعکاس در خارج دایره مفروض (O_1, R) باشد مسئله (۱۸) به طریق دیگر اثبات می‌شود . در این طریق کلی نیازی به رسم مماس OP ، نیست .



46

اثبات : O(مرکز انعکاس) را مبدأ مختصات و امتداد خطی را که O را به O_1 مرکز دایره مفروض وصل می‌کند محور طولها در نظر بگیریم . مختصات نقاط واقع بر روی محور ها عبارت خواهند بود از :

$A(x_1), A'(x'_1), B(x_2), B'(x'_2), O_1(x_3), O_2(x_4), O'(x_5)$

(به شکلهای ۲۵ ، ۳۰ ، ۴۶ نگاه کنید .) پس داریم :

$$R=\frac{|x_2-x_1|}{2}, \quad R'=\frac{|x_2'-x_1'|}{2}, \tag{1}$$

$$|x_3|=\frac{|x_1+x_2|}{2}, \quad |x_4|=\frac{|x_1'+x_2'|}{2}, \tag{2}$$

$$|x_1|\cdot|x_1'|=|x_2|\cdot|x_2'|=r^2. \tag{3}$$

فرض می‌کنیم O' منعکس نقطه O_2 باشد (مرکز دایره مطلوب که منعکس دایره‌مفروض است) در نتیجه :

$$|x_4|\cdot|x_5|=r^2. \tag{4}$$

اکنون لازم است ثابت کنیم که :

$$|x_3|\cdot|x_5-x_3|=R^2, \tag{5}$$

یعنی نقطه O' منعکس نقطه O است اگر دایره (O_1, R) دایره انعکاس انتخاب شود از تساوی‌های (۱) ـ (۴) داریم :

$$\begin{aligned}
|x_3|\cdot|x_5-x_3| &= \frac{1}{2}|x_1+x_2|\cdot\left|\frac{1}{2}|x_1+x_2|-\frac{r^2}{|x_5|}\right| \\
&= \frac{1}{2}|x_1+x_2|\cdot\left|\frac{|x_1+x_2|}{2}-\frac{2r^2}{|x_1'+x_2'|}\right| \\
&= \frac{|x_1+x_2|}{2}\cdot\left|\frac{|x_1+x_2|}{2}-\frac{2r^2}{\left|\frac{r^2}{x_1}+\frac{r^2}{x_2}\right|}\right| \\
&= \frac{|x_1+x_2|}{2}\cdot\left|\frac{|x_1+x_2|^2-4|x_1|\cdot|x_2|}{2|x_1+x_2|}\right| \\
&= \frac{1}{4}\left||x_1+x_2|^2-4|x_1|\cdot|x_2|\right|=\frac{1}{4}|x_2-x_1|^2=R^2.
\end{aligned}$$

که قضیه ثابت شده است .

از همین مترجم منتشر شده است:

۱) آمادگی برای کنکور، جلدهای ۱ و ۲
۲) ریاضیات برای کنکور تشریحی
۳) تئوری‌های سری در مسائل و تمرینات
۴) بازآموزی ریاضیات

انتشارات گوتنبرگ

۱۳۶۷

بها ۲۵۰ ریال