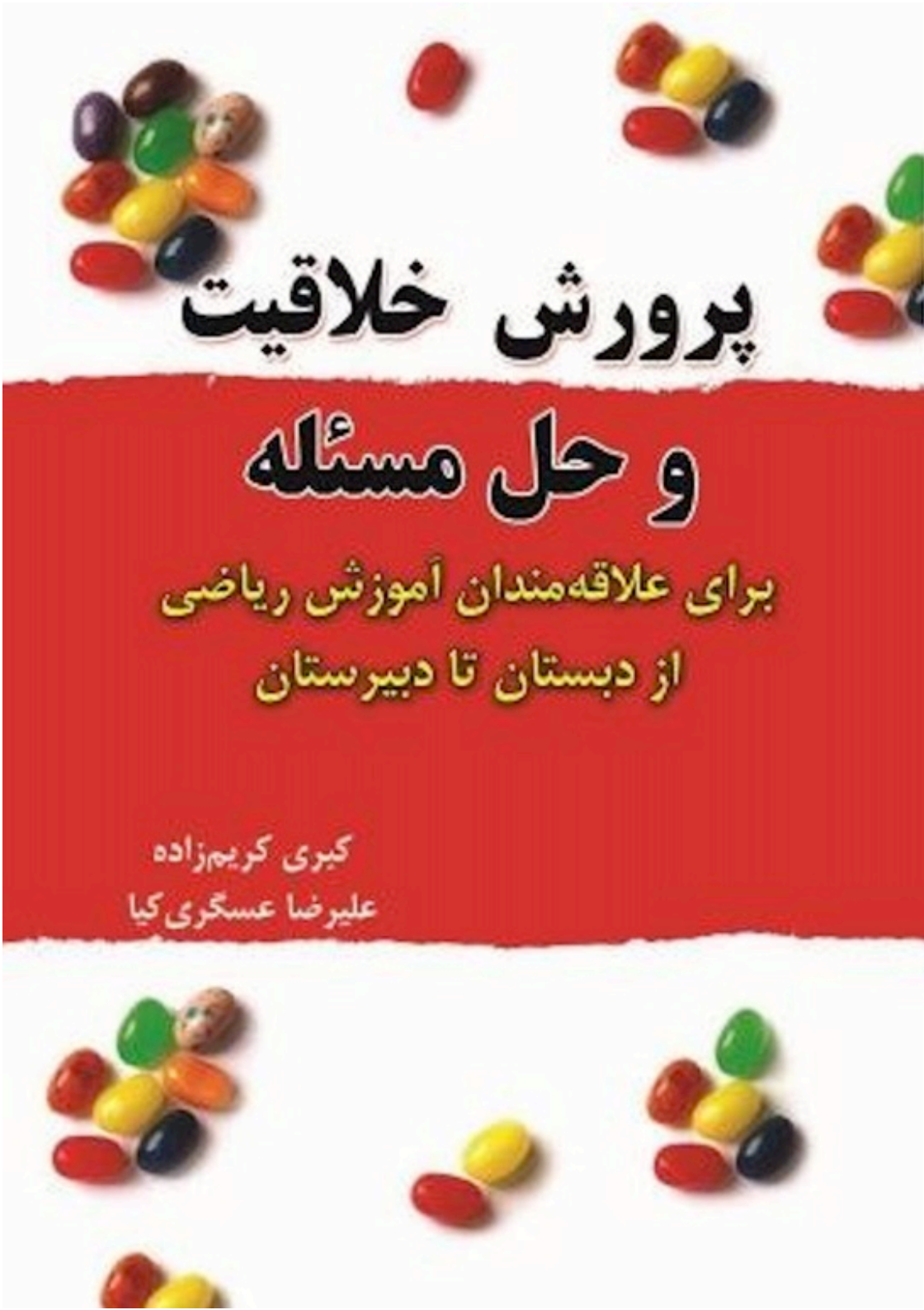

پرورش خلاقیت
و حل مسئله
برای علاقه‌مندان آموزش ریاضی
از دبستان تا دبیرستان
کبری کریم‌زاده
علیرضا عسگری کیا

پرورش خلاقیت و حل مسئله

نگارش و تألیف:

کبری کریم‌زاده

علیرضا عسگری‌کیا

سرشناسه	:	کریم‌زاده، کبری، ۱۳۴۴
عنوان و نام پدیدآور	:	پرورش خلاقیت و حل مسئله/ نگارش و تالیف کبری کریم‌زاده، علیرضا عسگری‌کیا.
مشخصات نشر	:	تهران: انتشارات با من، ۱۳۹۴.
مشخصات ظاهری	:	۱۰۴ ص.
شابک	:	۱۵۰۰۰۰ریال 978-600-7776-59-9
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
موضوع	:	حل مساله -- راهنمای آموزشی
موضوع	:	ریاضیات -- راهنمای آموزشی
موضوع	:	تدریس خلاق
شناسه افزوده	:	عسگری‌کیا، علیرضا، ۱۳۴۴ -
رده بندی کنگره	:	QA۶۳/ک۴پ۴ ۱۳۹۴
رده بندی دیویی	:	۷۶/۵۱۰
شماره کتابشناسی ملی	:	۳۹۴۳۳۹۳

عنوان کتاب	:	پرورش خلاقیت و حل مسئله
تألیف	:	کبری کریم‌زاده – علیرضا عسگری‌کیا
ناشر	:	بامن
شمارگان	:	۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ	:	اول، ۱۳۹۴
صفحه‌آرایی و طراحی جلد	:	رِدُنـــا ۰۹۳۵۸۱۴۵۸۵۹
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۷۷۷۶-۵۹-۹
قیمت	:	۱۵۰۰۰ تومان

تقدیم می شود به

صبا و سارا

پیش‌گفتار

ضرورتی که سبب شد نگارندگان موضوعِ نوشته‌ی حاضر را انتخاب و در حدِ بضاعتِ محدودِ خود اقدام به نگارشِ مطالبی پیرامونِ آن کنند، صرف‌نظر از تناسب موضوع با علائقِ تحصیلی و آموخته‌های قبلیِ آنها، نیازِ مبرمی بود که براساسِ تجربه‌ی سال‌ها تدریس در پایه‌های مختلفِ تحصیلی از یک سو و سال‌ها تدریس در دوره‌های آموزشِ ضمنِ خدمتِ معلمان از سوی دیگر احساس می‌شد. نیاز به نوعی آشناییِ حداقلی با برخی مفاهیمِ بنیادی در زمینه‌ی آموزشِ ریاضی و ارتباطِ آن با تدریسِ بهینه‌ترِ درسِ ریاضی به طورِ اعم و تدریسِ ریاضیاتِ مبتنی بر پرورشِ خلاقیت بالاخص.

به این وسیله شمه‌ای از درک و دریافتِ خود از خلالِ این تجارب و بر مبنای آن نیاز را به معرضِ داوری و احیاناً استفاده‌ی همکارانِ خود و دیگر علاقه‌مندانِ آموزشِ ریاضی و کلیه‌ی والدینی که به هر نحو درگیرِ آموزشِ فرزندانِ خود در مقاطعِ مختلفِ تحصیلی در درسِ ریاضیات هستند قرار می‌دهیم.

ملاحظه‌ی برخی موانع از جمله ناآشنایی یا کم‌آشنایی با اندیشه‌های کلیدی در زمینه‌ی آموزشِ ریاضی که تدریسِ مفاهیمِ بنیادی آن را توسطِ آموزگاران و دبیرانِ محترم به رغم کوششِ زایدالوصفِ ایشان با مشکل روبه‌رو می‌کند و در نتیجه سببِ نابرخورداری از چنانِ ترازِ مطلوبی می‌شود که بالضروره باید از آن برخوردار باشد، باعث شد نکاتی را که به گمانِ خود سبب سازِ آموزشِ بهترِ درسِ ریاضی می‌شود به ایجاز در قالبِ نوشته‌ی حاضر و به عنوانِ ره‌آوردِ ناچیزِ آن سال‌های تدریس به جامعه‌ی آموزگاران و دبیرانِ دانش دوست و دیگر علاقه‌مندانِ موضوعِ **پرورشِ خلاقیت و حلِ**

مسئله تقدیم نماییم. بسا والدینِ تحصیل‌کرده‌ای باشند که علاقه‌مندند فرزندان‌شان در درسِ ریاضی پیشرفت نموده و به مهارت‌های لازمه در یادگیریِ ریاضی دست پیدا کنند. شاید این گونه افراد نیز بتوانند از لابه‌لای مطالبِ حاضر نکاتِ مفیدی را بیابند که به ایشان کمک کند آموزشِ ریاضیِ فرزندانِ خود را در ضمنِ بهره بردن از راهنمایی‌های معلمان فرزندان‌شان به سطحِ بالاتری ارتقا داده و اسبابِ موفقیتِ تحصیلیِ بیشترِ آنها را در درسِ ریاضی فراهم آورند.

این اثر، که در مقایسه با آثارِ گذشتگان و معاصران، به یقین سزاوارِ نامِ اثر نخواهد بود، طیِ دورانی پر مشغله و به تفاریق فراهم آمده است. اما کاستی‌های آن بیش و پیش از آن که به سببِ این مشغله‌ها باشد، ناشی از کاستیِ تلاش و دانشِ نگارندگان است. پوزش‌خواهِ این کاستی‌ها هستیم.

از تمامی دوستان و همکارانی که به هر نحو قدمِ مساعدتی در فراهم آمدن این نوشته برداشته‌اند تشکر نموده، آرزومندِ توفیقاتِ روزافزون ایشان هستیم.

کبری کریم‌زاده، علیرضا عسگری‌کیا

بهارِ ۱۳۹۴

فهرست مطالب

عنوان صفحه

مقدمه ۹

فصل اول: یادگیری و خلاقیت

برخی نظریه‌های یادگیری ۱۳

رفتارگرایی ۱۳

مکتبِ گشتالت ۱۶

نظریه‌ی مراحلِ رشد ۱۷

خلاقیت؛ مفهوم و اهمیت ۲۰

خلاقیت چیست؟ ۲۰

ماهیتِ خلاقیت ۲۶

هوش و خلاقیت ۲۹

پرورشِ خلاقیت؛ آثار و چگونگی ۳۳

فصل دوم: آموزشِ ریاضی

درباره‌ی ریاضیات ۳۷

ریاضیات چیست؟ ۳۷

تاریخچه ۴۴

اهمیت و کاربرد ۴۹

آموزشِ ریاضیات ۵۵

اهدافِ آموزشِ ریاضی ۵۵

سیرِ تحولِ آموزشِ ریاضی ۶۱
بایدها و نبایدها در تدریسِ ریاضیات ۶۵

فصل سوم: حلِ مسئله

آموزشِ ریاضی مبتنی بر حلِ مسئله ۶۹
طرح و حلِ مسئله ۶۹
راهبردهای حلِ مسئله در ریاضیات ۷۳
سازماندهیِ حلِ مسئله در کلاسِ درسِ ریاضی ۸۰
روشِ چهار مرحله‌ای پولیا ۸۴
زندگی‌نامه‌ی پولیا ۸۴
چهار مرحله‌ی حلِ مسئله ۸۶
یک نمونه از کاربردِ روش پولیا ۸۹

پیوست‌ها

پیوستِ یک. عناوینِ توصیفیِ هوش‌بهر ۹۵
پیوستِ دو. جدولِ توانایی‌های ذهنی ۹۷
پیوستِ سه. پلیمپتنِ ۳۲۲ ..... ۹۵

مآخذ و مستندات

مآخذِ فارسی ۹۹
مآخذِ انگلیسی ۱۰۴

مقدمه

شاید بتوان آغازِ آموزش در نوعِ آدمی را به زمانی مربوط دانست که نخستین آدمیان در پیِ برقراریِ ارتباط با یکدیگر، به کمکِ اصوات و آواهایی ابتدایی، زبان را اختراع کردند.

تنوعِ تجربه‌های فردی و ضرورتِ حفظِ نوع به کمکِ بسیاری از این تجربه‌ها، این الزام را به همراه داشت که بتوان آنها را از فردی به فردی و از نسلی به نسلی انتقال داد. این مهم جز از طریقِ آموزش، در سپیده دمِ بشریت به گونه‌ای غیر رسمی و سپس با طلوعِ تمدن و شهرنشینی، در قالبِ مؤسساتِ آموزشیِ خاصی که زمانی نامِ آکادمی به خود می‌گرفت و زمانی نامِ نظامیه، میسر نبوده و نخواهد بود. در این میان، سهمِ تحقیقاتِ آموزشی در سده‌های اخیر و آموزشِ ریاضی در سده‌ی بیستم در بهبود و پرورشِ شیوه‌های سنتیِ یاددهی–یادگیری، به نحوی چشمگیر و روزافزون، اهمیت یافته و می‌یابد.

ضرورتِ پژوهش در امرِ آموزش به طورِ کلی و آموزشِ ریاضی بالاخص، اهمیتِ بیشتری خواهد یافت اگر در مقیاسِ جهانی، به تعداد و تنوعِ مراکزِ آموزشی که گذشته از انتقالِ دانش، متولیِ تولیدِ دانش نیز به شمار می‌روند، توجه کنیم.

این که بتوانیم ریاضیات را به بهترین وجه، به یاریِ اسلوب‌های نوینِ آموزشِ ریاضی و به خصوص در سال‌های نخستینِ دورانِ آموزشِ افراد به آنها بیاموزانیم، اگر هیچ فایده‌ی دیگری بر آن مترتب نباشد، حداقل به پرورش انسان‌هایی خواهد انجامید که به درکِ بهتری از نظمِ عالیِ هستی و منطقِ عمیق و مستحکمِ حاکم بر آن نائل آمده و به همین دلیل، خواهند توانست گامی یا گام‌هایی در مسیرِ کمال خویش بردارند:

سعی هر کس تا کمال وی بود قرب هر کس حسب حال وی بود[۱]

و این حسبِ حال را می توان به کمکِ آموزشی بهتر و مترقی‌تر، به کمالی بیشتر نزدیک نمود.

به آموزشِ ریاضی و بایدها و نبایدهای آن از هـر زاویه که بنگریم، ضرورتِ بحث و فحص و نقد و بـررسیِ انواعِ شیوه‌ها، راهبردها، متونِ آموزشی و . . . انکار ناپذیر است. به همین منظور نگارندگان، در خلالِ صفحاتِ پیشِ رو، به گمانِ خویش گامِ ناچیزی در حوزه‌ی آموزشِ ریاضی **از دیدگاهِ پرورش خلاقیت مبتنی بر روشِ حلِ مسئله‌ی پولیا** برداشته‌اند و سعی نموده‌اند موضوع را چنان تبویب نمایند که هـر یک از سه محورِ **یادگیری و خلاقیت**، **آموزشِ ریاضی**، **حلِ مسئله**، در قالبِ سه فصل و تحتِ همین عناوین، سهمی تقریباً یکسان از مجموعِ مطالبِ نوشته‌ی حاضر داشته باشند.

فصلِ اول را به **برخی نظریه های یادگیری** که به زعمِ ما در طراحیِ آموزشیِ کتاب‌های ریاضیِ پایه‌های مختلفِ تحصیلی در ایران موردِ توجهِ مؤلفانِ محترمِ این کُتُب بوده است و سپس **خلاقیت؛ مفهوم و اهمیتِ آن** اختصاص داده‌ایم.

نه نظریه‌های یادگیری منحصر به همان‌هایی هستند که در این فصل آمده‌اند و نه رویکردِ مؤلفانِ محترمِ کتاب‌های ریاضی محدود به این نظریه‌هاست؛ آنچه که هست، حدِ بضاعتِ نگارندگان در این مورد است. همچنین است در موردِ خلاقیت که خود موضوعی مستقل و سزاوار مداقه‌ی بیشتری است.

---

۱. فریدالدین عطار نیشابوری

در فصلِ دوم که به **آموزشِ ریاضی** می‌پردازد، در بخشِ **درباره‌ی ریاضیات** مختصری از ماهیتِ ریاضیات، مجملی از تاریخِ آن و ضرورت‌هایی که ریاضی ورزیدن را موجه جلوه می‌دهند، ارائه شده است. بخشِ دومِ این فصل به **آموزشِ ریاضیات** مربوط است که به سمتِ هدفِ نهاییِ این نوشته که بررسیِ ارتباطِ پرورشِ خلاقیت و حلِ مسئله است پیش می‌رود.

فصل سوم و پایانی با عنوانِ **حلِ مسئله** به دو موضوعِ مهم می‌پردازد؛ یکی **آموزشِ ریاضیِ مبتنی بر حلِ مسئله** است کـه امروزه در حکمِ پیشروترین روشِ آموزش در ریاضیات به حساب می‌آید و موردِ توجهِ بسیاری مراکزِ آموزشی و پژوهشی قرار دارد و دیگری **روشِ چهار مرحله‌ای پولیا** در حلِ مسئله است که اگر چه به مقیاسِ پیشرفت‌های معاصر در تمامِ زمینه‌های معرفتِ بشری کمی قدیمی به نظر می‌رسد، اما همچنان ارزش و تازگیِ خود را حفظ کرده است.

***

در سرتاسرِ این نوشته، به رسمِ شایعِ متونی از این دست، مطالبِ نقل شده از مراجعی که حسبِ ضرورت موردِ مراجعه‌ی نگارندگان قرار گرفته و فهرستِ عمده‌ترینِ آنها در بخشِ **مآخذِ و مستندات** آمده است، در داخلِ گیومه و به دنبالِ آن، آدرسِ مرجعِ مزبور که شماره‌ی ترتیبِ آن در فهرستِ مآخذ است و نیز شماره صفحاتِ مربوط به متنِ نقلِ قول شده از مرجعِ مورد نظر در پرانتز آورده شده است. نهایتِ سعیِ خود را به کار بستیم تا موردی از این ارجاعات از قلم نیفتاده و یا آدرسِ صفحاتِ متنِ مرجع به درستی قید شده باشد، معهذا اگر سهوی در این مورد پیش آمده که بعید می‌نماید، از

کلیه‌ی نگارندگان و مترجمانی که از آثارشان نقلِ مطلبی صورت گرفته است پوزش می‌طلبیم.

چنین به نظرِ نگارندگانِ رسید که برخی موضوعاتی که مستقیماً به بدنه‌ی اصلیِ این نوشته مربوط نبوده ولی ممکن است به ضرورتِ یادآوری یا کنجکاوی، خواننده از آنها بی‌نیاز نباشد در چهره‌ی سه پیوست، تحتِ عنوانِ **پیوست ها** به ضمیمه آورده شود تا فی‌المجلس الزامِ اجتناب ناپذیرِ مراجعه به منابعِ اصلی را تا فرصت و مجالِ مقتضیِ خواننده به تعویق افکند.

پانویس‌ها اغلب به ضبطِ لاتین اعلامِ غیر فارسی منحصر است که البته در مواردِ بی‌اهمیتی که به موضوعِ اصلیِ این نوشته مربوط نمی‌شده‌اند، از ذکرِ همین مختصر هم خودداری شده است.

فصل اول

یادگیری و خلاقیت

برخی نظریه‌های یادگیری

رفتارگرایی

یکی از نظریه‌های یادگیری که پس از توسعه و تکامل موجبِ بروزِ رویکردی متفاوت به آموزشِ ریاضی شده است، رفتارگرایی‌ست که اساساً به عنوانِ مکتبی در روان‌شناسی، توسطِ جان ب. واتسون[1] (۱۹۵۸– ۱۸۷۸) ابداع شد. وی در سخنرانیِ معروفِ خود به سالِ ۱۹۱۳ اظهار داشت:

"روان‌شناسی از دیدگاهِ یک رفتارگرا، یک شاخه‌ی کاملاً دقیق از علومِ طبیعی است. هدفِ نظریِ آن، پیشگویی و کنترلِ رفتار است. رفتارگرا در تلاش‌هایش برای دست‌یابی به طرحی یکسان از پاسخ‌های حیوانات، هیچ خطی برای جدا کردنِ انسان از حیوان رسم نمی‌کند. رفتارِ بشر با وجودِ تمامِ پیچیدگی‌های آن، تنها بخشی از طرحِ کلیِ تحقیقاتیِ رفتارگرا است." (**۱۲** - ص۱۳)

1. John B. Watson

به این ترتیب از نگاهِ یک رفتارگرا انسان موجودی است که مانندِ هر موجودِ زنده‌ی دیگر در برابرِ محرک‌هایی مشخص پاسخ‌هایی در قالبِ رفتارهایی متنوع بروز می‌دهد. بنابراین با دانستن این رفتارها می‌توان به شناختی از انسان نائل آمد. در نتیجه تمام پیچیدگی‌های رفتارِ آدمی و از جمله رفتارهای مربوط به یادگیری و آموزش را می‌توان با تحویلِ آنها به محرک‌های مناسب موردِ واکاوی قرار داد. بنابراین اگر کودکی در یادگیریِ ریاضی با دشواری‌هایی روبه‌روست و آن‌چنان رفتارِ یادگیریِ مناسبی را از خود بروز نمی‌دهد که لازم است، باید به دنبالِ انگیزه‌ها و عللِ بروزِ این رفتار گشت. آیا ظرفیت‌های یادگیریِ او محدود است؟ آیا به نحوِ مناسبی درگیرِ یادگیریِ ریاضی نشده و فی‌المثل با معلمِ خود یا با موضوعِ درسی ارتباطِ مناسبی برقرار نکرده است؟ آیا از سوی والدین خود برای کسب نمره‌های عالی در درسِ ریاضی چنان تحتِ فشار قرار گرفته که اساساً نسبت به ریاضیات دافعه پیدا کرده است؟ آیا . . .

"یادگیری از دیدگاهِ رفتارگرایی، به صورتِ دنباله‌ای از فعالیت‌های محرک–پاسخی که دارای روابطِ علت و معلولیِ قابلِ مشاهده هستند تعریف می‌شود، به گونه‌ای که تمرکزِ آن فعالیت‌ها بر شرطی‌سازیِ رفتارِ قابلِ مشاهده‌ی انسانی باشد. بر این اساس، یادگیری در کلاسِ درس باید دارای نظم و ترتیب بوده و هدف‌های آن به روشنی تعریف شده باشند. این اهداف باید در حدِ توانِ پاسخ‌دهیِ یادگیرنده بوده و به واحدهای قابلِ کنترل تقسیم شوند. فعالیت‌های محرک–پاسخ تا آنجا ادامه دارد که یادگیرنده بتواند پاسخِ مقتضی را ارائه کند." (**۱۲** - ص۱۵)

تدوینِ برنامه‌ی آموزشی چه خرد باشد و محدود به جلساتِ تدریسِ یک درسِ خاص که معلمی رفتارگرا آن را تنظیم کرده است و چه کلان و مربوط به برنامه‌ی آموزشیِ

یک کشور در دروسِ مختلف و در پایه‌های تحصیلیِ گوناگون که مدیرانِ آموزشی و برنامه‌ریزانِ کلان آن را تهیه کرده‌اند، ضرورتی است که بنا بر نگاهی رفتارگرایانه به امرِ آموزش اجتناب ناپذیر است. در واقع یادگیری در صورتی به بهترین وجه انجام می‌گیرد که:

"آ) اطلاعاتی که قرار است آموخته شوند در گام‌های کوچکی که درکِ آنها ساده‌تر است ارائه گردند؛

ب) به یادگیرندگان درباره‌ی یادگیری‌شان بازخوردِ فوری داده شود؛

پ) یادگیرندگان بتوانند با سرعتی متناسب با ظرفیت‌های خود چیز یاد بگیرند." (**۱۲**- صص۱۶- ۱۵)

به نظر می‌رسد در دوره‌های آموزش و تربیتِ معلمان در ایران تأکیدِ فراوانی بر رویکردِ رفتارگرایی وجود داشته و همچنان دارد. این امر از آنجا آشکار است که هنوز هم معلمان ناگزیر از تهیه‌ی طرحِ تدریسِ خود در قالبِ سنتیِ تعیین اهدافِ رفتاری و ... هستند. هیچ معلمِ باتجربه‌ای نیست که در کارِ خود موفق بوده و ضرورتِ وجودِ نظم و نظامی خاص در امرِ تدریس را منکر شود. نداشتن برنامه‌ی مدونی برای تدریسِ هر موضوعِ جزئی و کلی در قالبِ برنامه‌های روزانه، هفتگی، ماهانه و برای کلِ سالِ تحصیلی، بازدهیِ بهینه‌ای در کارِ تدریس به بار نمی‌آورد. معذلک گمان نمی‌رود تأکیدِ بیش از حد بر قالب‌های طرحِ تدریسِ مبتنی بر رویکردِ رفتارگرایی که گاه تا حدِ وسواسِ ملانُقَطی و ملال‌آور پیش می‌رود سودِ چندانی در پی داشته باشد.

مکتبِ گشتالت[1]

ماکس ورتیمر[2] (۱۹۴۳- ۱۸۸۰) را بنیان‌گذارِ روان‌شناسیِ گشتالت می‌دانند. آزمایشِ ساده‌ای به شرح آتی وی را به اندیشه‌ی اصلیِ این مکتبِ روان‌شناسی رهنمون شد.

فرض کنید دو چراغ که در فاصله‌ی کمی نسبت به هم قرارگرفته‌اند متناوباً روشن و خاموش شوند. در ذهنِ ناظر، توهمِ حرکت که حاصل از توالیِ روشن و خاموش شدنِ چراغ‌ها است القا می‌شود. بنابراین می‌توان گفت این پدیده‌ی خاص حاویِ چیزی بیشتر از اجزای آن است.

این مثالِ ساده بیانگرِ باورِ اساسیِ گشتالتی‌ها به این مضمون است که: "هر پدیده‌ی مرکب از آحادِ حسی، چیزی به تجربه می‌افزاید که در آن آحاد به تنهایی موجود نیست و این چیزِ افزوده شده به تجربه همان **سازمان** است. به عبارتِ ساده‌تر کل بیشتر از مجموعِ اجزای آن است! واژه‌ی آلمانیِ گشتالت به معنیِ سازمان یا انگاره از همین جا به این نظریه‌ی روان‌شناسی اطلاق گردیده است." (**۲۹**- ص۲۹۱)

از دیدگاهِ موضوعِ مرتبط با نوشته‌ی حاضر، یادگیریِ ریاضی بر طبقِ نظریه‌ی گشتالت از این اندیشه مایه‌ور است که نمی‌توان یک موضوعِ ریاضی را صرفاً با درکِ اجزای تشکیل دهنده‌ی آن به طور کامل درک نمود؛ زیرا با کنارِ هم قرار گرفتنِ آن اجزاء، پدیده‌ی نهایی (یعنی موضوعِ ریاضیِ موردِ نظر) حاویِ روابطِ اجزای مزبور در شبکه‌ای پیچیده از نسبت‌ها است که بر آن اجزاء علاوه شده‌اند. روابطی که درکِ آن موضوعِ ریاضی را به عنوانِ موجودیتی جدید میسر می‌سازند.

1. Gestalt
2. Max Wertheimer

در بررسیِ مفاهیمِ ریاضی که در کتاب‌های مربوط به آموزشِ ریاضی چه در دوره‌ها و مقاطعِ تحصیلیِ مختلف و چه در قالبِ کتاب‌هایی که در جنبِ آموزشِ رسمی موردِ استفاده قرار می‌گیرند، رویکردهای ضمنیِ مبتنی بر این نظریه را که مدِ نظرِ طراحان و مؤلفانِ محترمِ کتاب‌های مزبور قرار گرفته‌اند به اجمال می‌توان ملاحظه نمود.

نظریه‌ی مراحلِ رشد

نظریه‌ی دیگری که در یادگیری و به ویژه یادگیریِ ریاضی بر اساسِ پرورشِ خلاقیت در کتاب‌های درسیِ و آموزشیِ ریاضی موردِ توجه است، نظریه‌ی یادگیریِ ژان پیاژه[1] (۱۹۸۰- ۱۸۹۶) روان‌شناسِ سویسی است که سال‌ها مدیریتِ پژوهش در انستیتوی روسو در ژِنِو را عهده‌دار بوده و در همان دوران نخستین کارهای اساسی‌اش در زمینه‌ی روان‌شناسیِ کودک را به ثمر رسانده است.

طرحِ مُجملِ این نظریه که مبتنی بر مراحلِ رشد یا تحولِ یادگیرنده است به شرح زیر می‌باشد:

"۱. مرحله‌ی حسی–حرکتی (از تولد تا حدودِ ۲ سالگی). تعامل با محیط در این مرحله صرفاً جنبه‌ی حسی و حرکتی دارد و از آنجا که کودک هنوز زبان نیاموخته است، برای اشیاء کلمه در اختیار ندارد و بنابراین اشیاء تا وقتی موجودند که از مقابلِ چشمانش کنار نرفته باشند. در اواخرِ این دوره کودک مفهومِ بقا و ثبات شیئ را درک می‌کند.

1. Jean Piaget

۲. تفکرِ پیش‌مفهومی (از حدودِ ۲ تا حدودِ ۴ سالگی). در ضمنِ این دوره که مرحله‌ی اول از دوره‌ی تفکرِ پیش‌عملیاتی است، کودک به اساسِ مفهوم‌آموزی دست می‌یابد. وی طبقه‌بندیِ اشیاء را برحسبِ شباهت‌های‌شان آغاز می‌کند. منطقِ کودک در این دوره از تحول نه قیاسی است و نه استقرایی، بلکه تمثیلی است. مثالی از این گونه استدلال چنین است: گاوها حیوان‌های بزرگِ چهارپا هستند. آن حیوان بزرگ و چهارپاست؛ پس آن حیوان یک گاو است.

۳. تفکرِ شهودی (از حدودِ ۴ تا حدودِ ۷ سالگی). کودک در این دوره که مرحله‌ی دوم از دوره‌ی تفکرِ پیش‌عملیاتی است مسائل را به طورِ شهودی حل می کند، البته نه بر طبقِ قانون منطق. شاخص‌ترین ویژگیِ تفکرِ کودک در این دوره این است که هنوز به مفهومِ بقا و ثبات دست نیافته است. بقا و ثبات به صورتِ توانایی درکِ این مطلب توسطِ کودک تعریف می‌شود که تعداد، طول، مقدار و شکلِ اشیاء صرف‌نظر از این که اشیای مزبور در چه وضعیتی قرار داشته باشند، تغییر نمی‌کند.

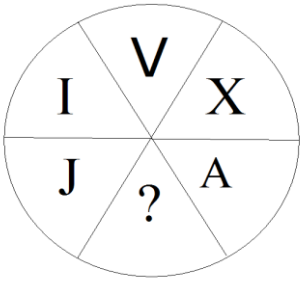
۴. عملیاتِ محسوس (از حدودِ ۷ سالگی تا حدودِ ۱۲،۱۱ سالگی). در این مرحله کودک قادر به درکِ مفهومِ بقا و ثبات می‌شود و نیز توانایی طبقه‌بندی و ردیف کردن را کسب می‌کند و مفهومِ عدد را می‌آموزد.

۵. عملیاتِ صوری (از حدودِ ۱۲،۱۱ سالگی تا حدودِ ۱۵،۱۴ سالگی). در این مرحله تفکرِ کودک بر موازینِ کاملِ منطق استوار شده و او قادر می‌شود مسائل و امورِ انتزاعی را درک کرده و از پسِ حل این مسائل برآید." (۳- صص۳۳۴- ۳۳۲)

لازم است در اینجا، به تناسبِ موضوعِ نوشته‌ی حاضر که به بررسیِ آموزشِ ریاضی از دیدگاهِ پرورشِ خلاقیت می‌پردازد، مرحله‌ی چهارم موردِ امعانِ نظرِ دقیق‌تری قرار

گیرد. ضرورتِ این توجه به ویژه از آنجا آشکار می‌شود که مرحله‌ی چهارم طبقِ تقسیم‌بندیِ پیاژه بر دوره‌ی آموزشِ ابتدایی در آموزش و پرورشِ ایران منطبق می‌شود. مرحله‌ای که اگر به درستی و در روالِ صحیحی به ظهور رسد، به احتمالی قریب به یقین کارِ آموزشِ ریاضی در دوره‌های بالاترِ تحصیلی را تسهیل می‌کند.

در مرحله‌ی عملیاتِ محسوس یادگیرنده (یعنی کودک) قادر به درکِ مفهومِ طبقه‌بندی و ردیف کردن (مرتب کردنِ اشیاء در نظمی خاص)، می‌شود و به علاوه عملاً توانایی طبقه‌بندی را کسب می‌کند. به عنوانِ مثالی از این توانایی به شکلِ زیر توجه کنید:



برای پر کردنِ جای خالی در این شکل کودک باید بداند حرفِ مقابلِ عدد رومیِ I یعنی A نخستین حرفِ الفبای انگلیسی است و حرفِ مقابلِ عددِ رومیِ X یعنی J دهمین حرفِ الفبای انگلیسی است. به این ترتیب با درکِ طبقه‌بندیِ نمادهای به کار رفته در این شکل به دو دسته، یکی معرفِ اعدادِ رومی و دیگری حروفِ الفبای انگلیسی، وی باید قادر باشد ضمنِ برقراریِ تناظر بینِ دو طبقه‌ی مزبور، متناظر با عدد رومی V پنجمین حرفِ الفبای انگلیسی یعنی E را به عنوانِ جواب یافته و با پر کردنِ جای خالی موفق به حلِ مسئله شود.

در مرحله‌ی عملیاتِ محسوس، همچنین درکِ انتزاعیِ مفهومِ عدد که از تجربه‌های زندگیِ روزمره در ارتباط با شمارش حاصل می‌آید، در ذهنِ کودک شکل گرفته و وی خواهد توانست عدد را فارغ از مصادیقِ عینیِ آن درک نماید. یعنی باید بالاخره بفهمد و بداند که فی‌المثل عددِ ۲ گذشته از تمامیِ مثال‌ها و مواردِ عینی نظیرِ ۲ درخت، ۲ گوسفند، ۲ کلاه و . . . فی‌نفسه ماهیتی مجرد و انتزاعی دارد. به این ترتیب فارغ از این مصادیق خواهد توانست محاسباتِ ریاضی با اعداد را درک کرده و در نهایتِ سهولت این محاسبات را به کار برد.

با توجه به رویکردهای مبتنی بر نظراتِ پیاژه در یادگیری و به ویژه یادگیریِ ریاضی، کمترین وظیفه‌ای که از دیدگاهِ پرورشِ خلاقیت از موضوعاتِ درسیِ ریاضیِ دوره‌های اولیه‌ی آموزشِ ریاضی انتظار می‌رود، رعایتِ نسبیِ چارچوبِ مرحله‌ی چهارمِ طبقه‌بندیِ پیاژه، یعنی مرحله‌ی عملیاتِ محسوس، در طراحیِ آموزشیِ کتاب‌های مناسب است.

خلاقیت؛ مفهوم و اهمیت

خلاقیت چیست؟

اکنون که در موردِ سه دیدگاه از دیدگاه‌ها و نظراتِ رایج در زمینه‌ی یادگیری و به طورِ اخص آموزش و یادگیریِ ریاضی مطالبی به اشاره بیان گردید، تلاش می‌کنیم با تعریفِ مفهومِ خلاقیت و تعیینِ حد و رسمِ آن، به هدفِ اصلیِ نوشته‌ی حاضرکه به بررسیِ ارتباطِ روشِ آموزشِ ریاضی مبتنی بر حلِ مسئله‌ی پولیا و پرورشِ خلاقیت می‌پردازد، نزدیک‌تر شویم.

خلاقیت به معنیِ نوآوری، ابداع، ایجاد و ابتکار معادلی است برای واژه‌ی creativity از مصدرِ to create که در فرهنگِ واژگانِ زبانِ انگلیسی چنین تعریف شده است: به وجود آوردن چیزی که پیش از این موجود نبوده است.

ارائه‌ی تعریفی دقیق از مفهومِ خلاقیت بسته به گرایشِ خاصی که در واکاویِ آن اختیار شود، یا بسته به مصادیقِ خاصی که از کار یا فکرِ خلاقانه انتظار می‌رود، مستلزمِ بحث و بررسیِ مفصلی است که در این مقال نمی‌گنجد و اساساً این نوشتار در پیِ چنین هدفی هم نیست. با وصفِ این، در خلالِ صفحاتِ بعد تا آنجا که ممکن باشد، به تبیینِ این مفهوم خواهیم پرداخت.

اگر از یک فردِ معمولی درباره‌ی مفهومِ خلاقیت پرسش کنیم، احتمالاً با پاسخ‌هایی نظیرِ نمونه‌های زیر روبه‌رو می‌شویم:

خلاقیت یعنی تبدیل کارهای ناممکن را به امورِ ممکن؛

خلاقیت یعنی این که بتوانیم خلافِ عادت‌های جاری عمل کنیم؛

خلاقیت یعنی گشودنِ راه‌های نو و قدم نهادن در راه‌هایی که کسی پیش از این آنها را نپیموده است؛

خلاقیت یعنی "چشم‌ها را باید شست، جورِ دیگر باید دید[۱]"؛

خلاقیت یعنی . . .

۱. از شعرِ معروفِ سهرابِ سپهری به نامِ "صدای پای آب"

صرف‌نظر از این که تا چه حد این برداشت‌ها از مفهومِ مزبور به واقعیت نزدیک است، هر یک به نوعی دربردارنده‌ی بخشی از واقعیتِ امر است. گو این که هیچ یک را نمی‌توان حتی یک توصیف از خلاقیت، چه رسد به یک تعریف از آن محسوب نمود. با وصفِ این، همگان خلاقیت را امری مثبت و پرورشِ آن را از ضرورت‌های آموزش و پرورشی واقع‌نگر می‌دانند. آموزش و پرورشی که هدفِ آن تربیت افرادی است که در رویارویی با مسائل و مشکلات و فائق آمدن بر آنها، تواناتر عمل می‌کنند و در برابرِ این مسائل و مشکلات به سادگی تسلیم نمی‌شوند.

"در این نوع آموزش، پرورشِ خلاقیت فرد را به جنبشی درونی وامی‌دارد. به او می‌آموزاند به نحوی دیگر بیندیشد و علاوه بر آن که به او اندیشه می‌دهد، او را اندیشه‌ورز تربیت می‌کند. به جای آن که ماهی به او بدهد، فنِ ماهی‌گیری را به او می‌آموزاند. در مقابل، آموزشِ غیر خلاق فرد را منفعل کرده و او را به تابعی صرف از راه و رسمِ گذشتگان تبدیل می کند." (**۱۶**- صص۱۴- ۱۳)

اساساً عملِ خلاقانه نوعی خلاف‌آمدِ عادت است. شاید این کلامِ شاعرِ شیواسخن حافظِ عزیز را در موردِ وحدتی که در پسِ کثرتِ امورِ به ظاهر نامرتبط با هم می‌دیده و در قالبِ بیتِ زیر به زبانِ شعر درآورده است، بتوان به تفسیری دیگر و به زبانی امروزی به خلاقیت وابسته دانست، چرا که در پسِ بسیاری از نظریه پردازی‌های خلاقانه‌ی معاصر در همه‌ی زمینه‌های معارفِ بشری، کشفی نهفته است که به پدیده‌هایی کثیر معنایی واحد می‌بخشد:

از خلاف‌آمدِ عادت بطلب کام که من کسبِ جمعیت از آن زلفِ پریشان کردم

فکر و کارِ خلاقانه در بسیاری از موارد با مخالفت و گاه معاندتِ آنان که به روش‌ها و شیوه‌های مرسوم خو کرده‌اند مواجه می‌شود. کیست که نداند وقتی جوردانو برونو نظراتی خلافِ آموزه‌های کلیسا در سده‌های تاریکیِ جهل و خرافه در مغرب زمین اظهار کرد چه بهای سنگینی بر چوبه‌ی آدم‌سوزی برای اظهارات و عقایدِ نوآورانه‌ی خود نپرداخت. کیست که نداند محکمه‌ی تفتیشِ عقاید به سببِ ترویجِ آموزه‌ی زمین مرکزی در نجوم به وسیله‌ی گالیله او را محاکمه و محکوم به حبسِ خانگی تا پایانِ عمر نمود.

اگر خلاقیت را "توان‌مندیِ ابداعِ راه‌حل برای مسئله‌ای خاص یا مجموعه‌ای از مسائلِ مرتبط" (۱-ص۸۲) تعریف کنیم، بدونِ شک یکی از عرصه‌های مناسبِ پرورشِ آن در آموزش و پرورشی که بر اساسِ پرورشِ خلاقیت بنیان یافته است، عرصه‌ی آموزشِ ریاضیات و طرح و حلِ مسائلِ ریاضی خواهد بود. از این چشم‌انداز بینِ آموزشِ ریاضی از یک سو و پرورشِ خلاقیت از سوی دیگر تلازمی منطقی احساس می‌شود. به گمانِ نگارندگان، نه تنها یکی از روش‌های پرورشِ خلاقیت در نوآموزان مواجه ساختنِ آنان با مسائلِ چالش‌انگیزِ ریاضی است بلکه حتی اگر به نحوِ صحیحی صورت گیرد به واقع مهم‌ترین راهِ این کار است.

البته باید این نکته را اضافه کرد که برداشتِ غالب در موردِ چیستیِ مسئله‌های ریاضی که آنها را آکنده از اعداد و روابطِ ریاضی و فرمول‌های پیچیده می‌داند، مشحون از شکل‌هایی عجیب و غریب و گاه درک ناپذیر، مبتنی بر تصورِ صحیحی از ریاضیات و مسئله‌های آن نمی‌باشد. یک مسئله‌ی ریاضی ضرورتاً به یاری فرمول‌های ساده یا پیچیده حل نمی‌شود. برای مثال این مسئله را در نظر بگیرید: یک بطریِ متوسط

نوشیدنی داریم و یک لیوان. لیوان مدرج نیست و بطری هم از همین بطری‌های معمولی است که در هر مغازه‌ای یافت می‌شود. چگونه دو دوست می‌توانند این نوشیدنی را فقط به کمکِ بطری و لیوان بینِ خود تقسیم کنند طوری که هر دو از این تقسیم راضی باشند؟ حلِ این مسئله و مسئله‌های مشابهی که در دنیای واقعی به کرات پیش می‌آید نیازی به محاسبه و فرمول و دستورالعمل‌های پیچیده‌ی ریاضی ندارد. تنها خلاقیت می‌خواهد و اندیشیدن به شیوه‌هایی که علی‌الاغلب مغایرِ شیوه‌های تفکرِ متعارف است. کلیدِ راه‌حلِ این مسئله‌ی خاص در درکی قرار دارد که سوای درکِ عموماً نادرستی است که از مسئله‌ی تقسیمِ چیزی بینِ دو یا چند نفر داریم، درکی که به جای توجه به مرضی‌الطرفین بودنِ تقسیم بر تساویِ قسمت‌ها تأکید می‌کند. در حدودِ صلاحیت و دانشِ نگارندگان نیست اما به نظر می‌رسد این مسئله لُبِ لُبابِ مسئله‌ی عدالت است.

ممارست در رویارویی با این گونه مسائل به مرور موجب می‌شود یادگیرندگان بیاموزند به روش‌هایی غیر متعارف هم می‌توان به مسائل اندیشید. (شما چه فکر می‌کنید؟ این مسئله را چگونه باید حل کرد؟ برای دیدنِ راه‌حل[۱] به پانوشتِ همین صفحه نگاه کنید.)

توان‌مندیِ ابداعِ راه‌حل مستلزمِ گشودنِ زاویه‌ی دیدی مستقل و متفاوت از آن نوع زاویه‌ی دیدِ قالبی‌ست که عموماً افراد در رویارویی با مسائل و مشکلات، بنا بر آن

۱. کافی است یکی از آن دو دوست به اندازه‌ای که فکر می‌کند لازم است نوشیدنی را از بطری به درونِ لیوان بریزد، با این شرط که انتخابِ لیوان یا باقی‌مانده‌ی بطری با دوستِ دیگر باشد!

دیدگاه به حلِ مسئله می‌پردازند. نکته‌ی حائزِ اهمیت آن است که این توان‌مندی هر بار که موفق به ابداعِ راه‌حلِ مسئله‌ای می‌شویم، نسبت به بار قبل تقویت می‌گردد.

برخوردِ خلاق با مسائل موکول به سه شرط زیر است:

"۱. داشتنِ مسئله،

۲. اندیشیدنِ مستقل،

۳. نگاهِ متفاوت به مسئله." (۱- ص۹)

بازهم به عنوانِ مثال، مسئله‌ی دیگری را مطرح می‌کنیم. دو تا شمع داریم که ماده‌ی سوختنیِ آنها به طورِ یکنواخت در شمع‌ها توزیع نشده است اما می‌دانیم هر یک ظرفِ نیم ساعت می‌سوزد و تمام می‌شود. چون توزیعِ ماده‌سوختنی در این دو شمع یکنواخت نیست ممکن است مثلاً نیمی از یک شمع در ۲ دقیقه بسوزد و نیمِ دیگرِ آن در ۲۸ دقیقه و شمع دیگر چنان باشد که مثلاً دو ثلثِ آن در ۵ دقیقه بسوزد و ثلثِ باقی‌مانده‌اش در ۲۵ دقیقه ولی به هر حال هر کدام همان طور که گفتیم در ۳۰ دقیقه می‌سوزند. خوب حالا بگویید به چه روشی می‌توان دقیقاً ۴۵ دقیقه را با این دو شمع اندازه گرفت. ممکن است بگویید معلوم است با استفاده از ساعتِ مچی‌مان! اما صرف‌نظر از این گونه پاسخ‌ها به راستی بدونِ هیچ وسیله‌ی زمان‌سنجیِ خاصی چگونه می‌توان ۴۵ دقیقه را اندازه‌گیری کرد؟ (برای پاسخ[۱] این مسئله ن.ک. پانوشتِ همین صفحه.)

۱. یک شمع را به طورِ معمول روشن می‌کنیم تا بسوزد و تمام شود، این نیم ساعت. بلافاصله شمعِ دیگر را از دو سر روشن می‌کنیم تا آن هم بسوزد و تمام شود، این هم ربع ساعتِ دیگر!

"انسان در بینِ انواعِ موجوداتِ عالم تنها نوعی است که می‌تواند از معلومات و یافته‌های گذشتگان توشه برگرفته، بر آنها افزوده و آنها را به آیندگان منتقل کند. شاید بتوان تولدِ هر انسان را تولدِ گرایشی جدید برای ترکیباتی جدید از اطلاعات درنظر گرفت." (۱- ص۳۷)

این توانایی که به صورتِ بالقوه در وجودِ هر انسانی به ودیعه گذاشته شده، فقط در صورتی بالفعل خواهد شد که بتوان فرصت و امکانِ این تبدیل را فراهم آورد. کیمیای این تبدیل آموزشی خلاقانه است که بر اساسِ پرورشِ خلاقیت طراحی شده باشد.

ماهیتِ خلاقیت

خلاقیت از جمله موضوعاتی است که درباره ماهیتِ آن، توافقی نهایی در بینِ محققانِ این زمینه صورت نگرفته است. با وصفِ این می‌توان در تحلیل‌های متفاوتی که از ماهیتِ خلاقیت ارائه شده است دو رویکردِ اصلی را تشخیص داد:

"۱. رویکردِ شخصیتی، که بر اساسِ شخصیت ماهیتِ خلاقیت را موردِ بررسی قرار می دهد؛

۲. رویکردِ فرآیندی، که ماهیتِ خلاقیت را از نظرِ تولیدِ محصول خلاقانه تجزیه و تحلیل می‌کند." (۱۳- ص۲۸)

براساسِ این نظریه‌ها و دو محورِ فوق می‌توان در خصوصِ ماهیتِ خلاقیت مطالبی به شرحِ زیر بیان نمود: "ماهیتِ خلاقیت ناشی از تمایل به شکل دادنِ تجربه‌ها و عناصرِ اولیه به صورتِ ترکیبی تازه و مطابق الزاماتی خاص برای تولیدِ پدیده‌ای نو است. به بیانی دقیق‌تر، ماهیتِ مزبور از توانایی شخص در ایجادِ اندیشه‌ها، نظریه‌ها،

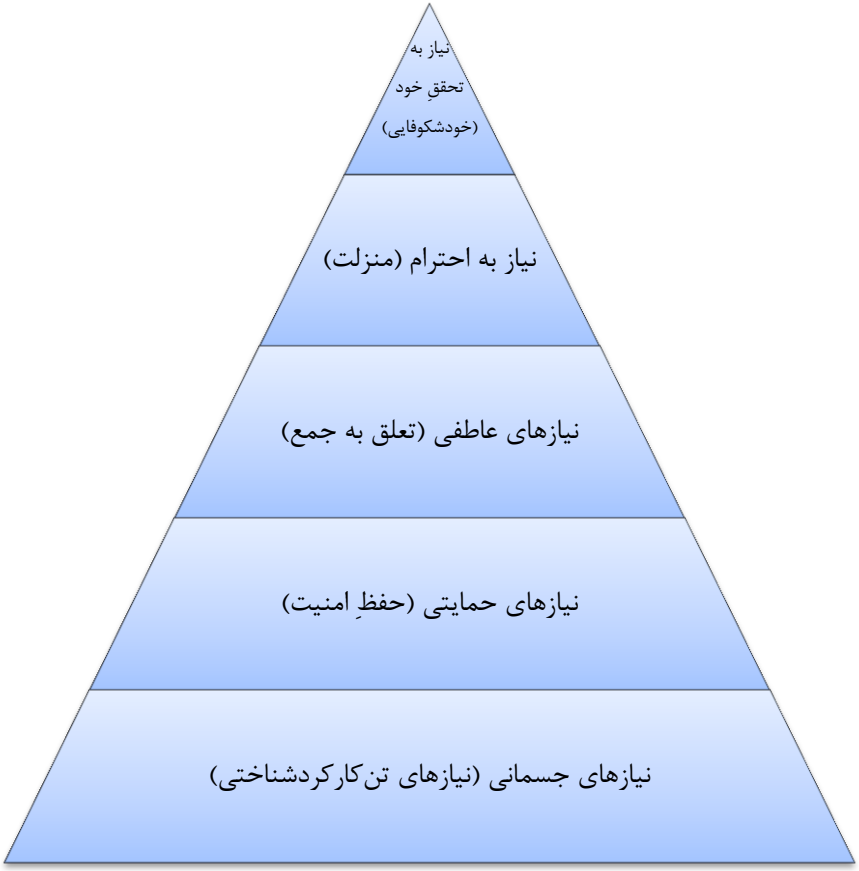
بینش‌ها و اشیایی جدید مایه می‌گیرد که توسطِ متخصصین به عنوانِ پدیده‌های ابتکاری و از لحاظ علمی، زیبایی‌شناسی و اجتماعی با ارزش قلمداد می‌شود.“ (**۱۳**- صص ۲۹- ۲۸)

از طرفِ دیگر ماهیتِ خلاقیت به رغمِ پیچیدگیِ آن به لحاظِ فرآیندی، متضمنِ گروه‌بندی نو و سامان‌دهیِ مجدد در مجموعه‌ی عملیاتی است که با تقسیمِ یک کل به اجزاء وجود دارد، آن هم به گونه‌ای که این اجزاء همچنان در ارتباطِ سازواره‌ی با یکدیگر باقی بمانند. در تفکرِ خلاق، روابطی برجسته و مشخص در ساختارِ درونیِ موقعیتِ موردِ بررسی، ایفای نقش می‌کنند. کلِ چنین فرآیندی عبارتست از تلاشِ فکریِ مستمر و بی‌وقفه، به شکلی گام به گام که هر گامِ آن در ارتباط با موقعیتِ مزبور، معنی پیدا می‌کند.

”از دیدگاهِ روانکاویِ جدید، ماهیتِ خلاقیت نتیجه‌ی تعارضی است که در ناخودآگاه ایجاد شده و به سببِ آن، ناخودآگاه تلاش می کند راه‌حلی برای این تعارض بیابد. اگر این تلاش در توافق و هماهنگی با بخشِ آگاهِ ذهن باشد، راه‌حلِ ارائه شده خلاقانه و فرآیندِ مزبور ذیلِ خلاقیت قرار می‌گیرد. اما اگر این راه‌حل با خودآگاه در تضاد و تناقض باشد، منجر به بیماریِ روانی می‌شود. از این نظر بیماری‌های روانی و خلاقیت از یک منبع نشأت می‌گیرند، با این تفاوت که فردِ خلاق بر محصولِ ناخودآگاهِ خویش کنترل معقولی دارد ولی بیمارِ روانی در کنترلِ رفتارِ خود دچارِ افراط و تفریطِ شدیدی است.“ (**۱۳**- صص۳۶- ۳۵)

در خاتمه دیدگاهِ دیگری را تشریح می کنیم که ماهیتِ خلاقیت را بر مبنای سلسله نیازهای اصلیِ انسان بیان می‌کند.

بنابر نظریه‌ی آبراهام مازلو[1] (۱۹۷۰- ۱۹۰۸) روان‌شناس معروفِ آمریکایی، نیازهای اساسیِ انسان را می‌توان در هرمِ زیر مصور نمود:



1. Abraham Mazlow

چنان که پیداست نیاز به خودشکوفایی که در موردِ قاطبه‌ی افرادِ آدمی ضرورتاً مبتنی بر بروز اندیشه یا کارهای خلاقانه است، در رأسِ این سلسله نیازها قراردارد.

اغلبِ کسانی که نیازهای اولیه‌ی آنها یعنی نیازهای جسمانی‌شان که قاعده‌ی هرمِ مازلو را تشکیل می‌دهد برآورده شده و دیگر دغدغه‌ی معیشت و امنیت را که نیازهایی هستند که بلافاصله پیش از نیازهای عاطفی قرار می‌گیرند نداشته و از حیثِ روابطِ عاطفی و احترامِ دیگران نسبت به خود نیز احساسِ کمبود نمی‌کنند، به زودی نارضایتیِ تازه‌ای را فراتر از نیازهای مردمِ عادی در خود احساس می‌نمایند که در واقع به تحققِ ارزش‌های اختصاصیِ فرد مربوط می‌شود. همان احساسِ نارضایتی و بی‌قراریِ خاصی که برخی از ما در پیِ ارضای نیازهای گوناگون‌مان اعم از نیازهای معیشتی، حمایتی، عاطفی و نیازِ به این که جایگاهِ خاصی نزدِ دیگران داشته باشیم بدان دچار می‌شویم. این بی‌قراری به شرطی فروکش می‌کند که با ابداعِ چیزی ورای امورِ متعارف و جاری، فرد بتواند در پرتوِ کارِ خلاقانه استعدادهای بالقوه‌ی خود را شکوفا کند.

هوش و خلاقیت

توصیفِ بهترِ خلاقیت مستلزمِ اشاره‌ای ولو گذرا به مفهومِ هوش از چشم‌اندازِ دیدگاه‌های رایجِ روان‌شناسیِ معاصر نیز هست. به این ترتیب می‌توان به درکی از ارتباط میان این دو مفهوم نائل آمد، به گونه ای که بتوان در پرتوِ این درک و فهم، موضوعِ این فصل را که به یادگیری و خلاقیت می‌پردازد با وضوحِ بیشتری شرح و بسط داد.

"برخی روان‌شناسان و از زمره‌ی ایشان آلفرد بینه[1] (۱۹۱۱- ۱۸۵۷) روان‌شناسِ فرانسوی، هوش را تواناییِ عمومیِ درک، استدلال و استنتاج می دانند که به شکل‌های گوناگون جلوه‌گر می شود." (۳- ص۴۷)

ویژگی‌های هوشِ عمومی را می‌توان به شرحِ زیر فهرست نمود:

"۱. توانایی آموختن و بهره‌گیری از تجربه؛

۲. توانایی تفکر یا استدلال به شیوه‌ی انتزاعی؛

۳. توانایی انطباق با نوساناتِ جهانی نااستوار و دائم‌التغییر؛

۴. توانایی برانگیختنِ خویش برای انجامِ سریعِ کارهایی که شخص انجامِ آنها را لازم تشخیص می‌دهد." (۳- ص۵۳)

بسیاری از روان‌شناسان اساساً در وجودِ مفهومی به نامِ هوشِ عمومی تردید کرده‌اند. به نظرِ ایشان هوش مجموعه‌ای از توانایی‌هایی است که تا حدودی مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. چارلز اسپیرمن[2] مبتکرِ تحلیلِ عاملی، این نظریه را طرح کرد که افراد به درجاتِ مختلف از یک عاملِ عمومیِ هوش که عاملِ جِی (G) خوانده می‌شود، برخوردارند. بسته به میزان برخورداری از این عامل، هر فردی را می‌توان به طورِ کلی هوش‌مند یا کودن نامید. عاملِ جِی به کمکِ آزمون‌های هوش اندازه‌گیری می‌شود. علاوه بر این عامل، عامل‌های اختصاصیِ دیگری وجود دارند هریک موسوم به عاملِ اِس (S)، که می‌توان آنها را تحتِ عناوینِ کلیِ زیر طبقه بندی نمود:

1. Alfred Binet
2. Charles Spearman

"۱. ادراکِ کلامی؛

۲. سیالیِ واژگان؛

۳. استعدادِ عددی؛

۴. استعدادِ فضایی؛

۵. حافظه؛

۶. سرعتِ ادراک؛

۷. استـدلال." (**۳**- صص۵۱- ۴۸)

خوانندهی محترم میتواند برای تعریف و دیدنِ معنای هر یک از این عوامل به پیوستِ یک مراجعه کند. در آنجا به اجمال هر کدام توضیح داده شدهاند.

"به هر روش که هوش را تعریف کرده و سطوح یا طبقهبندیهای مختلفی از آن ارائه دهیم، اغلبِ روانشناسان در این باور که همبستگیِ معناداری بینِ هوش و خلاقیت وجود دارد اتفاقِ نظر دارند." (**۳**- ص۵۴)

توضیح آن که، معمولاً در حلِ مسائلِ مختلف دو مرحلهی اساسی قابلِ تشخیص است. نخست بررسیِ راهحل های ممکن یا ابداعِ راهحلهای جدید است که این مرحله از تفکر را به دلیلِ سیرِ فکر در جهاتِ متعدد، مرحلهی **تفکرِ واگرا** مینامند. با کاستن از تعددِ این راهحلها به وسیلهی قوانینِ منطق و کاربردِ دانشهای کسب شده، مناسبترین راهحل انتخاب میشود که این مرحله را مرحلهی **تفکرِ همگرا** مینامند. به این ترتیب در مرحلهی تفکرِ واگرا به امکانِ راهحلهای گوناگون میاندیشیم و در

مرحله‌ی تفکرِ همگرا راه‌حلی را انتخاب کرده آن را موردِ امعانِ نظر قرار می‌دهیم. هرگاه افراد راه‌حل‌های ابداعیِ اولیه را به دلیلِ عدمِ تناسب یا ناتوانی از حلِ قطعی و نهاییِ مسئله کنار گذارند، مجدداً به تفکرِ واگرا می‌پردازند تا راه‌حل‌های تازه‌ای در ذهنِ ایشان شکل بگیرد. بدیهی است که مرحله‌ی تفکرِ واگرا با خلاقیت و نوآوری ارتباطِ بیشتری دارد.

بر مبنای یافته‌های اخیرِ روان‌شناسان، افرادی که در آزمون‌های هوش نمره‌هایی بالاتر از حدِ متوسط می‌گیرند، معمولاً در آزمون‌های خلاقیت نیز نمره‌های بالایی کسب می‌کنند. در سطوحِ بالای هوش‌بهر رابطه‌ی ناچیزی بینِ هوش و خلاقیت وجود دارد. برای تعریفِ هوش‌بهر و عناوینِ توصیفیِ سطوحِ مختلفِ آن می‌توان به کتاب‌های معتبر در این زمینه مراجعه کرد. شرحی مختصر در پیوستِ دو فراهم آمده است.

"چه بسیار افراد با هوش‌بهرِ بسیار بالا که از لحاظِ خلاقیت در سطحِ متوسط یا پایینی هستند. از سوی دیگر افرادی با بهره‌ی هوشیِ کمی بالاتر از حدِ متوسط از توانایی بالایی برای ارائه‌ی دستاوردهای خلاقانه برخوردارند. دستاوردهایی مانندِ کشفِ یک اصلِ علمی، اختراعِ وسیله‌ای جدید، نوشتنِ نمایشنامه‌ای برجسته و نظایرِ اینها." (۳- ص۵۵)

یک اندیشه یا یک محصولِ کار وقتی در زمره‌ی فکر یا کارِ خلاقانه طبقه‌بندی می‌شود که علاوه بر ابداعی بودن، به جا و مناسب نیز باشد. "مطالعه در احوالِ افرادی که به عنوانِ افرادِ خلاق محسوب می‌شوند نشان می‌دهد عواملِ شخصیتیِ مهمِ دیگری به جز هوش از جمله شرایطِ مهم برای تولیدِ دستاوردهای خلاق به شمار

می‌رود، عواملی نظیرِ: استقلال در قضاوت، برخورداری از انگیزه‌ی پیشرفت، ابتکارِ عمل و پایداری در برابر موانع.“ (۳- ص۵۶)

حال این سؤال مطرح می‌شود که پرورشِ خلاقیت چگونه ممکن خواهد شد؟ چه روش یا روش‌هایی برای این کار بایسته است؟ آثارِ مترتب بر پرورشِ خلاقیت چه خواهد بود؟ در بخشِ بعد مختصری به این موضوع می‌پردازیم.

پرورشِ خلاقیت؛ آثار و چگونگی

پرورشِ خلاقیت در افراد که باید از اوانِ کودکی آغاز شده و در دوره‌های رسمیِ آموزشی بر جنبه‌های مختلفِ استعداد و تفاوت‌های فردی متمرکز گردد، منجر به تربیتِ اشخاصی با ویژگی‌های والای فردی و اجتماعی خواهد شد. از اهمِ این ویژگی‌ها می‌توان به مواردِ زیر اشاره نمود:

”دوست داشتن زندگیِ خود و دیگران؛

کنجکاوی؛

خستگی ناپذیری؛

داشتنِ انسجامِ فکری؛

عدمِ نیاز به تأییدِ دیگران؛

داشتنِ بصیرت نسبت به رفتارِ خود و دیگران؛

ارزشمند دانستنِ زندگی؛

پشتکار و همت در رویارویی با مسائل و مشکلات؛

نهراسیدن از شکست؛

استقلال در افکار و اعمال؛

در گیر شدن در فعالیت‌های اجتماعی و خیرخواهانه." (۱۶- صص۸۰- ۶۸)

به منظور شکل دادن و تقویتِ این صفاتِ مثبت که منبعث از آموزش و پرورشی مبتنی بر اصل شکوفاییِ استعدادهاست، تعبیه و حفظِ فضاهای سه گانه‌ی زیر ضروری به نظر می‌رسد:

"۱. فضای عاطفی: منظور از فضای عاطفی شرایطی است که تحتِ آن شرایط فرد احساسِ امنیت نموده و قادر باشد به محرک‌هایی که از طرفِ محیط بر او تأثیر می‌گذارد واکنشِ مطلوب ارائه دهد.

۲. فضای عقلانی: فرد در فضای عقلانیِ مطلوب برای یادگیریِ بیشتر برانگیخته شده و در او انگیزه‌های متداومی ایجاد می‌شود تا فقط به دانشِ تخصصیِ خود بسنده نکرده و سعی نماید مفاهیمی بیشتر و فراتر از حیطه‌ی تخصصیِ خود کسب کند. در فضای عقلانیِ مطلوب فرد آماده می‌شود استعدادهای بالقوه‌ی خود را شکوفا کند یا در مسیرِ این شکوفایی به طور روزافزون گام‌های مؤثری بردارد.

۳. فضای فیزیکی: فضای فیزیکی تا آنجا که نیازهای فرد برای کوششِ خلاقانه را برآورده سازد، ضروری است. از اهمِ موارد و شرایطِ فیزیکی برای پرورشِ خلاقیت، می‌توان به کتابخانه‌ی مجهز، وسایـل آزمایشگاهیِ کافی، دسترسی به اینترنت و امثالِ اینها را نام برد." (۱۶- صص۵۳- ۵۱)

با توجه به این که در این نوشته به موضوعِ پرورشِ خلاقیت به کمکِ حلِ مسئله در ریاضیات می‌پردازیم، به اجمالِ فوق از مفهومِ خلاقیت و چگونگیِ پرورشِ آن اکتفا کرده، فصلِ حاضر را که به یادگیری و خلاقیت اختصاص داشت به پایان می‌بریم.

فصل دوم

آموزشِ ریاضی

درباره‌ی ریاضیات

ریاضیات چیست؟

معمولاً دروسِ مختلفِ ریاضیات برای پروردنِ مهارت‌هایی نظیرِ محاسبه، قدرتِ اقامه‌ی برهان و آگاهی از اصول و مبانیِ شاخه‌های گوناگونِ ریاضیات تدریس می‌شوند. بنابراین معلمِ ریاضیات باید تا حدودی از چارچوبِ کلیِ هر یک از این موارد آگاهی داشته باشد. اما علاوه بر اینها وی به چشم‌اندازِ وسیع‌تری از ریاضیات نیاز دارد که تنها شاملِ به خاطر سپردنِ قضایا، اثبات‌ها و انجامِ محاسباتِ ریاضی نیست. نمی‌توان تصورِ ریشه‌داری از آموزشِ ریاضی داشت، بدونِ آن که از چیستیِ ریاضیات تصورِ روشنی داشته باشیم. در این قسمت از فصلِ دوم که بنابر عنوانِ فصل به آموزشِ ریاضی اختصاص دارد سعی بر آن داریم تا حدودی به ماهیتِ ریاضیات و اصولِ اساسیِ حاکم بر فعالیتِ ریاضی بپردازیم تا به این وسیله به ارزیابیِ مناسبی از آموزشِ ریاضی و چگونگیِ انجامِ آن دست پیدا کنیم.

شخصی که می‌خواهد ریاضیات را بفهمد، باید این دیدِ اصلی را داشته باشد که ریاضیات برخلافِ علومِ دیگر، مستقیماً با اشیای جهانِ مادی سر و کار ندارد. گو این که در اساس اندیشه‌های بنیادی و راه‌گشای خود را از عالمِ اشیای عینی و واقعی اخذ می‌کند یا لااقل تا دیرزمانی چنین می‌کرده است.

"یک تفکرِ ثمربخش در خصوصِ ماهیتِ ریاضیات، تصورِ دو منظومه یا دو سطح از وجود است. یکی عالمِ اشیای مادی است که می‌توان آنها را به یاریِ حواسِ پنج‌گانه درک نمود و به طورِ مستقیم یا غیر مستقیم آن را مشاهده نمود. اما سطحِ دیگری نیز در کنارِ این موجودیتِ مادی می‌توان تصور نمود و آن دنیای اندیشه‌هاست. در این دنیاست که موجوداتِ ریاضی از قبیلِ نقطه، خط و صفحه وجود دارند. این موجودات اشیای مادی نیستند بلکه تصورات و انتزاعاتی از موجوداتِ مادی هستند." (۷- ص۶)

روابطِ بینِ این دو سطح بیانگرِ ماهیتِ فعالیت‌هایی است که ریاضی‌دانان انجام می‌دهند و ما به یاریِ آنها، به درکی از این که ریاضیات چیست، نائل می‌شویم. مهم‌ترینِ این فعالیت‌ها به شرحِ زیرند:

"۱. اوضاع و مسائلی که از جهانِ خارجی برمی‌خیزند موردِ بررسی قرار گرفته تا روابطِ بینِ این مسائل آشکار شود.

۲. روابطِ بین مؤلفه‌های مادی به زبانِ اشیای ریاضی ترجمه شده و در قالبِ این اشیاء موضوعِ تفکرِ ریاضی واقع می‌شوند.

۳. مجموعه‌ی احکامِ ریاضی به مددِ روش‌های ریاضی موردِ بررسی قرار می‌گیرند. در این مرحله روش‌های یک یا چند شاخه از ریاضیات به کار گرفته می‌شوند تا اعتبارِ احکامِ مزبور با توسل به منطق موردِ آزمایش واقع شوند.

۴. جواب‌ها و پیش‌بینی‌هایی که از الگو یا الگوهای ریاضی مشتق شده‌اند در موضوعِ فیزیکیِ موجود در دنیای اشیای مادی به محکِ تجربه آزموده می‌شوند تا درستی و اعتبارشان مشخص گردد.“ (۷- ص۶)

به طورِ خلاصه می‌توان گفت ارتباطِ ریاضیات به عنوانِ مجموعه‌ای از موجودات در دنیای اندیشه از یک سو و عالمِ فیزیکی به عنوانِ مجموعه‌ای از موجوداتِ دنیای واقعی از سوی دیگر، شامل سه مرحله زیر است:

”۱. شیرجه‌ای از جهانِ واقعی به جهانِ ریاضی؛

۲. شنا در جهانِ ریاضی؛

۳. بازگشت از جهانِ ریاضی به جهانِ واقعی در حالی که یک پیش‌بینی صید شده است.“ (۵- ص۷۹۹)

صورتبندیِ الگوهای ریاضی و کاربردِ آنها تنها بینِ موضوعاتِ فیزیکی و جهانِ اندیشه صورت نمی‌گیرد. ریاضی‌دانان علاوه بر آن، الگوهای دیگری را که خود تجریدی از دیگر موجوداتِ مجردِ ریاضی هستند صورت‌بندی کرده و آنها را در منظومه‌ای به مراتب مجردتر که از تعبیراتِ فیزیکی بیش از پیش فاصله دارد، تنظیم می‌نمایند.

ریاضیات به عنوانِ رکنی از ارکانِ اساسیِ معرفتِ بشری مجموعه‌ی سازگاری از احکام، موسوم به الگوهای ریاضی است که در فرآیندِ فعالیتِ ریاضی خلق می‌شوند. این فعالیت مستلزمِ روندهای زیر است:

"۱. تجرید؛

۲. استدلال؛

۳. تعبیر؛

۴. تعمیم." (۷- ص۸)

زیربنای این روندهای چهارگانه و بنابراین تمامیِ ریاضیات، چند اصل یا قاعده‌ی کلی است که به مرورِ ایام تقریباً موردِ اجماعِ همگیِ ریاضی‌دانان قرار گرفته است. در ذهن داشتن این اصول و قواعد به عنوانِ پیش‌زمینه‌ای که فعالیت‌های مربوط به آموزشیِ ریاضی در هر دوره‌ی تحصیلی و در هر پایه‌ای از این دوره‌ها در متنِ آنها رخ می‌دهد، آموزشِ ریاضی را به فرآیندی به مراتب علمی‌تر و آگاهانه‌تر بدل می‌کند. روشن است هنگامی که سر و کارِ ما با امرِ پیچیده‌ای چون پرورشِ خلاقیت است هرچه بیشتر با این اصول و مبادی آشنا باشیم شانسِ موفقیتِ خود را افزون‌تر ساخته‌ایم. به طورِ کلی امرِ محرزی است که هر چه در حوزه‌ی کارِ خود بیشتر بدانیم امکانِ بیشتری هست که آن کار را بهتر انجام دهیم. از این سبب بیانِ مجملی از این قواعد و اصول را به شرح زیر بیان می‌کنیم:

"۱. اصلِ تجرید: ریاضیات مستقیماً با هیچ شیئِ واقعی سر و کار ندارد و فقط به مفاهیمی می‌پردازد که از این اشیاء انتزاع یا تجرید شده‌اند.

۲. اصلِ گزینش در تجرید: فقط چند خاصیت و نسبت هستند که به گونه‌ای ریاضی از اشیاء منتزع می‌شوند. شکل، اندازه، تعداد، مکان و امثالِ اینها خواصی هستند که از راهِ تحلیلِ ریاضی به تجرید در می‌آیند، در حالی که رنگ، جرم، حالاتِ ماده و نظایرِ این موارد تجریدهایی در حیطه‌ی ریاضیات نیستند.

۳. اصلِ ترازمندیِ تجریدها: مفاهیم و روابطِ ریاضی بر اساسِ یک یا چند صفتِ مشترک جمع‌آوری می‌شوند که تجریدهای تازه‌تری که از آنها شکل می‌گیرند، بر اساسِ این دسته‌بندی‌هاست.

۴. اصلِ آزادیِ ریاضی: جداییِ مفاهیمِ ریاضی از جهانِ مادی سبب می‌شود هر گونه تصور و برداشتی که به هیچ تجربه‌ی فیزیکی بستگی نداشته باشد، میسر گردد.

۵. اصلِ استنتاجی بودنِ ماهیتِ ریاضیات: بخش‌های عمده‌ای از ریاضیات را می‌توان در یک ساختارِ استنتاجی تنظیم کرد که در آن تمامِ اشیاء و روابطِ تعریف نشده به گونه‌ای دقیق مشخص شده و سایرِ اشیاء و روابط براساسِ مفاهیم تعریف نشده یا تعریف شده‌ی قبلی تعریف می‌شوند و هویتِ ریاضی می‌یابند. به علاوه هر قضیه در این ساختار، یا بر اساسِ قضایای قبلی، یا احکامِ از پیش پذیرفته شده‌ای موسوم به اصولِ موضوع، قابلِ اثبات هستند.

۶. اصلِ ترتیب در اصلِ موضوع سازی: ساختنِ اصولِ موضوعه برای بخش‌هایی از ریاضیات که این ساختار را می‌پذیرند، نقطه‌ی شروعِ آنها نیست بلکه ثمره و چکیده‌ی پرداخت شده‌ی تفکرِ استقرایی و استنتاجی است.

۷. اصلِ تنوع در اصلِ موضوع سازی: برای مجموعه‌ای از احکام می‌توان مجموعه‌هایی متمایز و همچنان سازگار از اصولِ موضوعه را در نظر گرفت.

۸. اصلِ دقتِ متغیر: دقتِ منطقی در براهینِ ریاضی مطلق نیست و در روندِ پیشرفتِ ریاضیات، دقتِ منطقی نیز به پیش می‌رود. یک برهانِ ریاضی که در زمانی موردِ پذیرشِ بی چون و چرا بوده است، ممکن است در زمانِ بعدی چندان دقیق به شمار نیاید.

۹. اصلِ میان‌کنش: بینِ جهانِ ریاضی و جهانِ مادی کنشِ دائمی وجود دارد. اشیای دنیای واقعی سببِ شکل گرفتنِ اشیای تجریدیِ دنیای ریاضیات شده و بسیاری اوقات، تصوراتِ ریاضی موجبِ پیدایشِ تعبیرهای سودمندی در دنیای واقعی می‌شوند.

۱۰. اصلِ رشد و تکامل: هنگامی که جامعه رشد می‌یابد ریاضیات هم وسعت پیدا می‌کند.

۱۱. اصلِ استدلالِ ریاضی: ریاضیات الزاماً و ضرورتاً از استدلالِ استقرایی و قیاسی استفاده می کند.

۱۲. اصلِ تعمیم: مفاهیمِ ریاضی که از دنیای واقعی منتزع شده در طیِ رشد و تکاملِ خود به مرحله‌ای می‌رسند که می‌توان مفاهیمِ عمومی‌تری را برحسبِ مفاهیمِ قبلی صورت‌بندی نمود. این دسته از مفاهیم به نوبه‌ی خود ممکن است در ساختاری تعمیم‌یافته‌تر شرکت کنند.» (**۷**- صص۱۱- ۹)

پرداختن به چیستیِ ریاضیات بدونِ اشاره به مجموعه دستاوردهای غنی در زمینه‌ای که تحتِ عنوانِ کلیِ فلسفه‌ی ریاضی نام‌گذاری شده است، ناقص خواهد بود. فلسفه‌ی ریاضی چنان که از نامِ آن پیداست، برخلافِ تجزیه و تحلیلی که از ماهیتِ ریاضی و ناظر به محتوای درونی آن ارائه می‌شود، تحقیق در معرفت شناسیِ ریاضی و نگریستن به ریاضیات از بیرون به آن است. هرگاه که در خصوصِ اشیای ریاضی و روابط و نسبت‌های فی‌مابینِ آنها یا ساختارهایی که ناشی از این روابط هستند گفتگو کنیم، یا از خواصِ آنها صحبت به میان آورده و به رد و اثباتِ احکام و گزاره‌هایی در این موارد بپردازیم، در درونِ ریاضیات و به کارِ ریاضی اشتغال داریم. اما آنگاه که به ماهیت و وجودِ اشیای ریاضی و عوارضِ ناشی از ماهیت و وجودِ آنها پرداخته و در بنیانِ معرفتیِ مفاهیمِ ریاضی چند و چون نماییم و به ریاضیات به عنوانِ یک کلِ معرفت‌شناختی بنگریم آن را از بیرون موردِ بررسی قرار داده و به فلسفه‌ی ریاضی اشتغال پیدا می‌کنیم.

سه مکتبِ عمده‌ی فلسفه‌ی ریاضی که هر یک طرف‌دارانی در بینِ بزرگترین ریاضی‌دانان معاصر دارند عبارتند از:

۱. مکتبِ صورت‌گرایی؛ که صرف‌نظر از مفهومِ ماهویِ اشیای ریاضی، صرفاً به نسبت‌ها و روابطِ این اشیاء و اصولِ حاکم بر این روابط می‌پردازد.

۲. مکتبِ ساختارگرایی؛ که به ساختارهای ریاضی به عنوانِ مفاهیمی بسیار کلی که اشیای ریاضی در متنِ آنها موجودیت می‌یابند نظر دارد.

۳. مکتبِ شهودگرایی؛ که اصلِ اساسیِ آن ادراکِ ریاضیات به عنوانِ مجموعه‌ای از روندهایی است که در تعدادی متناهی مرحله قادر به تولیدِ درک و تصوری از اشیای

ریاضی می‌باشند. بنابراین مکتبِ شهودگرایی بر اساسِ شهودِ اشیای ریاضی است که ریاضیات را بررسی می‌کند.

بی‌شک پرداختن به هر یک از این سه مکتب و ارائه‌ی توصیفِ مختصری از هر کدام، منجر به درک و دریافتِ عمیق‌تری از ریاضیات، محتوی و روش‌های آن می‌شود. معهذا تشریحِ بیشتر مکتب‌های پیش‌گفته ما را تا اندازه‌ای از هدفِ اصلیِ این فصل که ارائه‌ی شمایی کلی از آموزشِ ریاضی می‌باشد، دور خواهد ساخت. بنابراین به همین مختصر اکتفا کرده، خواننده‌ی علاقه‌مند را به منابعِ مقتضی که در این زمینه موجود است ارجاع می‌دهیم.

تاریخچه

حتی شرحِ مختصری از تاریخِ ریاضی مستلزمِ آن خواهد بود که صفحاتِ متعددی را به پیدایش، شکوفایی و نموِ ریاضیات اختصاص دهیم. مفاهیمِ اولیه‌ای که در ریاضیات در سپیده‌دمِ تاریخِ بشر و بسیار پیش از آن متولد شده به شمارش و مفهومِ تناظرِ یک-به‌یک باز می‌گردد. "مفهومِ عدد و فرآیندِ شمارش به قدری پیش از تاریخِ مضبوط تکوین یافته که کیفیتِ این تکوین تا حدودِ زیادی حدسی است." (۵- ص۷)

معذلک تصورِ این که چه ضرورت‌هایی در زندگیِ واقعی سببِ بروزِ مفهومِ عدد و شمارش شده چندان دشوار نمی‌نماید. شمارشِ تعدادِ رمه‌های طوایفِ کوچرو، تعدادِ درختانی که محوطه‌ی زندگیِ افرادِ قبایلِ یکجانشین را محصور می‌کرده‌اند، تعدادِ دوستان یا دشمنانِ شخص، فرزندان و همسرانش و مواردی از این دست همگی مستلزمِ مفهومِ تناظرِ یک‌به‌یک بوده‌اند. گره زدنِ طناب یا کندنِ دندانه‌هایی بر یک

قطعه چوب که راه‌های متداول و معمول در ادوارِ پیش از تاریخ برای حفظ و ضبطِ اعداد بوده‌اند، نمونه‌هایی از روشِ تناظرِ یک‌به‌یک هستند که اساساً شمارش بر بنیادِ آنها پی نهاده شده است.

"در ایشانگو[1] واقع در ساحلِ دریاچه‌ی ادواردز در زئیر تکه استخوانی پیدا شده است که قدمتِ آن به ۸۰۰۰ سال قبل می‌رسد و اعدادی را نشان می‌دهد که با کندنِ دندانه‌هایی بر آن مشخص شده‌اند." (۵- ص۸)

شاید الواحِ گلیِ مدفون در سرزمینِ بین‌النهرین در عراقِ امروزی را که توسطِ باستان‌شناسان از نیمه‌های قرنِ نوزدهم به این طرف از دلِ خاک بیرون آورده شده و با مساعیِ بسیار رمزگشایی شده‌اند بتوان نخستین اسنادِ تاریخی در موردِ ریاضیات در دنیای قدیم به شمار آورد. در این میان تلاشِ راولینسونِ انگلیسی که به کشفی رمزِ خطِ میخی انجامید سزاوارِ تحسین بسیاری است .در این الواح که همگی به خطِ میخی هستند، نشانه‌های متعددی از ریاضیاتی که بعضاً در عهدِ خود بسیار پیشرفته بوده مشاهده می شود؛ ریاضیاتی که البته بیشتر ماهیتِ هندسی داشته است.

"هندسه‌ی بابلی که پیوندِ نزدیکی با مساحیِ عملی داشته، با قواعدِ کلیِ محاسبه‌ی مساحتِ مستطیل، مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین، مساحتِ ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه و مثال‌هایی از سایرِ اشکال آشنا بوده است. به علاوه در لوحی که قدمتِ آن به سال‌های ۱۹۰۰–۱۶۰۰ ق.م. می‌رسد، نشانه‌های روشنی از ریاضیاتی بسیار پیشرفته (مفاهیمی نظیرِ سه‌تایی‌های فیثاغورسی و سکانتِ زوایا، آن هم در مبنای شصت شصتی!) دیده می‌شود." (۵- صص۴۳- ۳۷)

1. Ishango

برای اطلاع از جزئیاتِ لوحِ مزبور که به راستی شاهکاری از دورانِ تمدنِ بابلی به شمار می‌رود می‌توان به پیوستِ سه مراجعه نمود.

مصریان نیز در عهدِ شکوفاییِ تمدنِ خود در دورانِ فراعنه دستاوردهای مهمی در عـرصه‌ی ریاضیات پدید آورده بودند که بیشتر ماهیتِ عملی و محاسباتی داشته و کمتر به مسائلِ انتزاعی می‌پرداخته است. مسائلی که در زمانِ یونانی‌ها عرصه‌ی اصلیِ گسترشِ ریاضیات بوده است.

"با سر برآوردنِ شهرهای تجاری در کناره‌های ساحلیِ آسیای صغیر و تولدِ تمدن و فرهنگِ یونانی، تقریباً برای نخستین بار در تاریخِ ریاضیات، آدمیان شروع به پرسش‌هایی از چرایی و نه چگونگی، چنان که ریاضیاتِ بابلی و مصری تا حدودِ رفعِ احتیاجاتِ اولیه وعملی به آنها پرداخته بود، نمودند. پرسش‌هایی که مستلزمِ تولید و بسطِ اندیشه‌های مجرد و تولدِ ریاضیاتِ انتزاعی به معنای واقعیِ کلمه بود." (۵- ص۶۴)

میراثِ یونانی‌ها و دستاوردهای ایشان در ریاضیات چنان عظیم است که تا زمانِ پیدایشِ تمدنِ و فرهنگِ اسلامی، یعنی تا حدودِ هزار سال بعد از زمانِ شکوفاییِ فرهنگِ یونانی، تقریباً هیچ کارِ اساسیِ دیگری در ریاضیات، جز آنچه که آنان ابداع کرده بودند، انجام نشد.

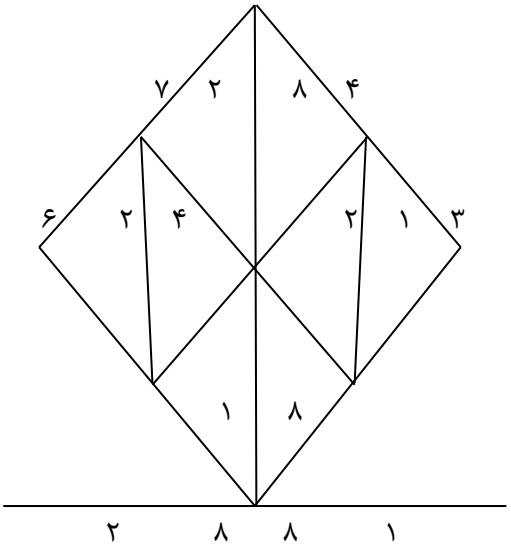
"کشفِ روابط عددی، معرفیِ انواعِ خاصی از اعداد نظیرِ اعدادِ تام و اعدادِ متحابه و اعدادِ مصور، اثباتِ قضیه‌ی فیثاغورس، کشفِ کمیت‌های گنگ، اتحادهای جبری، حلِ هندسیِ معادلاتِ درجه‌ی دوم، نگره‌ی مساحت‌ها، اجسامِ منتظم (اجسامِ افلاطونی) و مواردِ بیشمارِ دیگر که همگی در کتابِ معروفِ اصولِ اقلیدس در سیزده جلد و به

نحوی استادانه و به گونه‌ای اصلِ موضوعی تدوین شده‌اند، از جمله شاهکارهای ریاضیاتِ یونانی به شمار می‌روند.» (۵- صص ۸۸- ۶۹)

«اقلیدس (۳۶۵ - ۳۰۰ ق.م.) اولین کسی است که مجموعه‌ی نسبتاً کاملی از اصولِ هندسه‌ی مسطحه را ارائه کرد و تعدادِ زیادی قضیه را بر پایه‌ی این اصول ضمنِ استنتاج‌های منطقی به دست آورد.» (۱۸- ص۱۴۲)

با طلوع و گسترشِ اسلام دورانِ شکوه‌مندی از تولید و بسطِ دانشِ بشر در تمامِ زمینه‌های قابلِ تصورِ معرفتِ بشری در آن روزگار آغاز شد که از طریقِ ترجمه‌ی دستاوردهای یونانیان (در ضمنِ نهضتِ ترجمه در عهدِ خلفای عباسی) و تصحیح و تعمیقِ این دستاوردها و ابداعِ نگرش‌ها و نظریه‌های جدید، همه‌ی زمینه‌های مزبور و از جمله ریاضیات را به نحوی شگفت‌آور غنی ساخت.

مشاهیری چون محمدِ بن موسی خوارزمی، ابوبکرِ کرخی، محمدِ بن عیسی ماهانی، ثابتِ بن قره حرّانی، احمدِ اقلیدسی (که وجهِ تسمیه‌اش به دلیلِ شروحِ متعددی بود که بر کتابِ اصولِ اقلیدس نگاشته بود)، غیاث‌الدین جمشیدِ کاشانی و نام‌آورانِ دیگر شاهکارهای بی‌مانندی در اغلبِ مباحثِ ریاضی از هندسه و نظریه‌ی اعداد گرفته تا حلِ معادلات و روش‌ها و فنونِ محاسباتِ عددی ابداع نمودند. کافی است بدانیم روش‌های امروزیِ جمع، تفریق، ضرب و تقسیمِ اعداد با مختصر اصلاحاتی همان روش‌هایی است که اساساً به وسیله‌ی غیاث‌الدین جمشیدِ کاشانی به مجموعه دانشِ ریاضی اضافه شده است. روشی را که وی برای ضربِ اعداد به کار می‌برده و همانی است که فقط با تغییر در صورتِ ظاهر امروزه نیز به کار می‌رود با مثالِ ساده‌ی زیر برای ضرب دو عددِ ۶۷ و ۴۳ تشریح می‌توان مشاهده کرد:



خواننده‌ی علاقه‌مند با صرفِ مختصر وقت و دقتی به قانونِ حاکم بر این نمودار پی خواهد برد و بی‌گمان همچون نگارندگان از زیبایی و سهولتِ محاسباتیِ موجود در آن به کمالِ وجد درخواهد آمد.

پرداختن به سهمِ ریاضی‌دانان مسلمان در پیشرفتِ ریاضیات، در دورانی که تقریباً تمامیِ فعالیت‌های علمی در اروپا به رکود گراییده بود، از حوصله‌ی نوشته‌ی حاضر خارج است؛ تنها به عنوانِ مثالِ کوچکی از عمق و غنای آثارِ ریاضی در این دوران می‌توان به اثرِ معروفِ خیام در حلِ معادلات اشاره نمود. وی به یاریِ روش‌های هندسی و با استفاده از تقطیعِ مقاطعِ مخروطی توانست رده‌های وسیعی از معادلاتِ درجه‌ی سوم را حل کند که بن‌بستی واقعی برای ریاضیاتِ یونانی به شمار می‌رفت.

پس از ترجمه‌ی آثارِ ریاضی‌دانانِ مسلمان به زبانِ لاتینی فصلِ دیگری در تاریخِ تکاملِ دانشِ ریاضی گشوده می‌شود که از حدودِ قرن چهاردهم میلادی شروع شده و تا

کنون با شدت و وسعتی بی‌نظیر ادامه یافته است. به این ترتیب تقریباً تمامیِ دانشِ یونانیان و مسلمانان، به عنوانِ میراثی ارزشمند از این تمدن‌ها، در اختیارِ دانشمندانِ عصرِ رنسانسِ اروپا قرار گرفت. در مدتی قریب به شش قرن چنان ساختمانِ شکوه‌مندی بر بنیانِ این دانش‌های قبلی و به ویژه ریاضیات برافراشته شد که در هیچ دوره‌ی دیگری از تاریخِ تکاملِ معرفتِ بشری نظیرِ آن رخ نداده است.

حسابِ دیفرانسیل و انتگرال، هندسه‌ی سطوحی غیر از صفحه و کره، نظریه‌ی گروه‌های متناهی، نظریه‌ی گراف، نظریه‌ی احتمال، نظریه‌ی تحلیلیِ اعداد، آنالیزِ مختلط، توپولوژی، جبرِ جابه‌جایی و غیر جابه‌جایی و صدها موضوعِ متنوعِ دیگر، به گونه‌ای سرسام‌آور رشد و توسعه یافته و همچنان در حالِ گسترشِ بیش از پیش هستند. در سرعتِ بسطِ دانشِ ریاضی همین بس که انجمنِ ریاضیِ آمریکا مجله‌ی دو ماهانه‌ای موسوم به خلاصه‌ی ریاضی[1] در قطعِ رحلی منتشر می‌کند که تعدادِ تقریبیِ صفحاتِ آن در هر شماره به حدود یک هزار و پانصد صفحه می‌رسد و هر صفحه‌ی آن در دو ستون، حاویِ خلاصه مقالاتِ ریاضیِ منتشر شده طیِ دو ماهِ ماقبلِ انتشارِ نشریه‌ی مزبور است.

اهمیت و کاربرد

تا چه پایه ریاضیات در زندگیِ بشر مؤثر بوده و هست؟ آیا ریاضیات دانشی کاملاً انتزاعی است که فارغ از نیازهای دنیای واقعی محصولِ فکریِ افرادی است که فقط به منظورِ ریاضی ورزیدن بدان می‌پردازند؟ اگر چنین است، چه عواملی سبب می‌شوند که بعضی افراد عمری را صرفِ آموختن و آموزاندنِ ریاضیات یا کار و تحقیق در این عرصه

1. Mathematical Review

کنند؟ آیا به راستی پرداختن به ریاضیات چنان ارزش و اهمیتی دارد که نسل‌های زیادی از ریاضی‌دانان عمر و تلاشِ خود را مصروفِ تنها یک زمینه و موضوعِ خاص در ریاضیات کنند؟

رنه توم[1] ریاضی‌دانِ فرانسوی‌الاصلِ مقیمِ آمریکا، داستانی به این مضمون نقل می‌کند:

"روزگاری،

مردی بود که اژدهاکُشی می آموخت؛

تا در این فن استاد شد؛

اما هر چه گشت،

اژدهایی نیافت که بکشد؛

ناچار،

به تدریسِ فنِ اژدهاکُشی پرداخت!" (۲۰- ص۲۵۵)

آیا در لابه‌لای جملاتِ این داستان نوعی بینشِ سلبی نسبت به آموزشِ ریاضی احساس نمی‌شود؟ آیا به کمکِ ریاضیات می‌توانیم در زندگیِ روزمره‌ی خود، در هر کاری که بدان مشغول هستیم موفق‌تر باشیم؟ به عبارتِ بهتر، ریاضیات چه کمکی به ما می‌کند و چه کاربردهایی دارد؟

1. Rene Tom

حقیقت این است که ریاضی‌دان وقتی در کورانِ آفرینشِ فکریِ خود به ریاضیات مشغول می‌شود، چه بسا فارغ از این پرسش‌ها یا پرسش‌هایی از این دست، به کار و فعالیت بپردازد. با این حال چه ریاضی‌دانان و چه سایرین، همواره در مراحلی از زندگیِ خود، وقتی که به نحوی از انحاء با پرسشِ ضرورتِ ریاضیات روبه‌رو می‌شوند، در پیِ یافتنِ پاسخی برای این پرسش و کثیری پرسش‌های نظیر بر می‌آیند و بسته به نوعِ نگرش یا انگیزشی که دارند جواب‌هایی که ایشان یا دیگران را قانع کند برای این سؤالات می‌یابند.

صرف‌نظر از تنوعِ بینش‌های متفاوتی که در این زمینه وجود دارد، می‌توان گفت ریاضیات آفرینشی خلاقانه است که هم به هنر می‌ماند و هم به علم؛ بنابراین هم زیبایی‌شناسانه است و هم در پیِ پرده برگرفتن از رمزِ و رازی است که در هزارتوی پیچیده‌ی کتابِ طبیعت تعبیه شده است. این که بتوان قضایای ریاضی را برخوردار از زیبایی دانست، مستلزمِ آن است که این قضایا دست‌کم دارای پنج ویژگیِ زیر باشند:

"۱. کلیت؛

۲. عمق؛

۳. غیر منتظره بودن؛

۴. تلخیص؛

۵. حتمیت." (۸- ص۷)

به عنوانِ مثال، قضیه‌ی نامتناهی بودنِ اعدادِ اول و اثباتِ فوق‌العاده زیبای آن واجدِ تمامیِ این پنج شرط است. اثباتِ اقلیدس چنین است: اگر مجموعه‌ی اعدادِ اول متناهی

باشد با ضربِ همگیِ این اعداد در یکدیگر و افزودنِ عددِ یک به این حاصل به عددی دست پیدا می‌کنیم که ضرورتاً اول نیست زیرا از همه‌ی اعدادِ اولی که در اختیار داریم بزرگتر است. اما از سوی دیگر ممکن نیست مرکب باشد چه در غیر این صورت باید بر عاملِ اولی جز آنها که متناهی بودن‌شان را فرض گرفته بودیم بخش‌پذیر باشد ــ به سببِ وجود جمع‌وندِ یک که اکنون علتِ وجودی آن دانسته می‌شود. این تناقض فرضِ اولیه‌ی ما را باطل می‌کند؛ پس اعدادِ اول نامتناهی‌اند!

"این قضیه کلی است و به بیانِ خاصیت عمیقی از ساختارِ اعداد مربوط می‌شود. در واقع، عمقِ این قضیه به حدی است که می‌توان آن را ریشه‌ی درختِ پر شاخ و برگِ نظریه‌ی اعداد به شمار آورد. به علاوه اثباتِ خودِ اقلیدس از آن، که به برهان خلف صورت می‌گیرد [همان اثباتی که آمد] به نحوی غیر منتظره و بسیار خلاصه (در مقایسه با شمارِ کثیری از قضایای ریاضی) از حتمیتی تقریباً دو هزار و سیصد ساله برخوردار است." (۸- ص۷)

اما تنها این زیباییِ آفرینش در ریاضیات نیست که سبب می‌شود ریاضی‌دان بدان بپردازد. اهمیتِ وجودیِ ریاضیات و ضرورتِ استفاده از آن در بسیاری علومِ دیگر، هم به عنوانِ ابزاری برای توصیف و هم به عنوانِ وسیله‌ای که ما را قادر به پیش‌بینی‌هایی در آن علوم می‌کند بر کسی پوشیده نیست. مع‌الوصف، شاید ذکرِ چند مثال در این مورد بی‌مناسبت نباشد.

اثباتِ ریاضیِ جان مایکل[1] ریاضی‌دانِ قرنِ هیجدهم از این قضیه‌ی نجومی که اکثرِ ستارگانی که قدرِ نجومی‌شان (که در واقع به معنای میزانِ درخشندگیِ آنهاست) یکسان است و به نظر می‌رسد در آسمان خیلی نزدیک به هم هستند واقعاً در فضا نیز به هم نزدیک‌اند، از اولین مواردِ استفاده از اندیشه‌های اصلیِ نظریه‌ی احتمالات در مسائلِ دنیای واقعی است. "مایکل با این فرض که ستارگان به تصادف در فضا پراکنده شده‌اند، بر اساسِ جداولِ نجومی احتمالِ آن را که دو ستاره‌ی دور از هم، نزدیک به هم رؤیت شوند محاسبه نمود و مشاهده کرد این احتمال به قدری ناچیز است که دو ستاره‌ی مزبور در واقعِ امر نیز باید به هم نزدیک باشند." (**۲۸**- ص۴۰)

مدل‌های زیستیِ ریاضی در تجزیه و تحلیلِ رشد و زوال در سیستم‌های جمعیتیِ انواعِ موجوداتِ زنده، بارها کاراییِ خود را نشان داده‌اند. "این مدل‌های زیستی چه در مواردی که تعدادِ افرادِ جامعه بنابر قانونِ رشدِ نمایی افزایش می‌یابند (مانندِ تکثیر باکتری‌ها)، چه در مواردی که افزایشِ مزبور تابعِ عواملِ پیچیده‌تری باشد (مانندِ قوانینِ حاکم بر دو جمعیتِ شکار و شکارچی در یک زیست‌بوم)، با میزانِ بالایی از دقت موفق به توصیفِ این نوع از جامعه‌ها شده‌اند." (**۱۵**- صص۱۲- ۸)

رنگ‌آمیزی نقشه‌های جغرافیایی معمولاً تابعِ این قاعده است که دو ناحیه‌ی هم‌مرز دارای رنگ‌های متفاوتی باشند، مشروط بر آن که مرز را نه یک نقطه بلکه یک منحنی یا اجتماعی از پاره‌خط‌ها، در نظر بگیریم. پرسشی که به طورِ طبیعی به ذهن متبادر می‌شود این است که برای رنگ‌آمیزیِ انواعِ نقشه‌های جغرافیایی حداکثر به چند رنگ نیاز است؟ این مسئله که طرحِ آن به حدودِ یکصد و چهل سال قبل باز می‌گردد، تقریباً

1. John Michel

بلافاصله به طورِ حدسی پاسخ داده شد: چهار رنگ! و از آن پس به مسئله‌ی چهار رنگ معروف شد. "در خلالِ سال‌های ۱۹۷۸- ۱۹۷۶ گروهی از پژوهش‌گرانِ آمریکایی با استفاده از روش‌های ریاضی و تقلیلِ انواعِ نقشه‌های ممکن به تعدادی حالتِ مشخص و محدود، به کمک رایانه موفق به حلِ کاملِ مسئله‌ی چهار رنگ شده و حدسِ چهار رنگ را اثبات نمودند." (**۲۱**- صص۶۵- ۶۳)

"امروزه نظریه‌ی ماتریس‌ها در حلِ اکثرِ معادلاتِ دیفرانسیلی که مهندسان در عرصه‌های مختلف با آنها روبه‌رو می‌شوند موردِ نیازِ جدی است. در مهندسیِ صنایع مباحثِ مربوط به برنامه‌ریزیِ خطی با استفاده از ماتریس‌ها مدل‌سازی می‌شود. مسائلِ تحقیق در عملیات که طیفِ بسیار گسترده‌ای از موضوعاتِ اقتصادی، نظامی و صنعتی را در بر می‌گیرد، به یاریِ روش‌های جبرِ خطی که شاخه‌ای بارآور از ریاضیات است، تجزیه و تحلیل می‌گردد." (**۲۶**- ص۳۳)

طیِ جنگِ جهانیِ دوم ریاضی‌دانِ انگلیسی آلن تورینگ[1] در ارتباط با کدهایی که ارتشِ آمریکا برای هدایتِ کشتی‌های انگلیسی ارسال می‌کرد، با استفاده از روابطِ عددی و حساب موفق به ابداعِ نظریه‌ای موسوم به رمزنگاری گردید که پایه‌ای برای پیروزی‌های متفقین در نبردهای دریایی شد. "نظریات تورینگ در زمینه‌ی ماشین‌های با حالات متناهی به طراحی برخی ابزارهای محاسباتی منجر شد که شکلِ پیشرفته و امروزیِ آنها رایانه‌هایی است که کلیه‌ی زمینه‌های زندگیِ بشرِ امروزی با تمامِ پهناوری فوق‌العاده‌اش بدونِ آنها غیر قابلِ تصور به نظر می‌رسد." (**۲۷**- ص۹)

1. Allen Turing

به رغمِ تمامِ کاربردهایی که ریاضیات در حیاتِ بشرِ معاصر دارد، حتی اگر هیچ یک از بخش‌های ریاضی کاربردِ خاصی نمی‌داشت باز هم پرداختن به ریاضی، آموختن و آموزاندنِ آن، آن‌قدر ضرورت داشت که بخش‌هایی از آموزشِ رسمیِ مـدرسه‌ای را متولیان و برنامه‌ریزانِ آموزشی الزاماً به آن اختصاص دهند.

یقیناً فرآیندِ یادگیریِ ریاضی در ساختارِ تفکرِ شخص تحولی (ولو به طورِ ناخودآگاه) ایجاد می‌کند که تحتِ تأثیر آن، افراد در رویارویی با مسائل و مشکلاتِ زندگی به گونه‌ای منطقی‌تر، با واقع‌بینیِ بیشتر و به مراتب کارآمدتر عمل می‌کنند. چگونه ممکن است پس از شش ماه شرکت در دوره‌های بدن‌سازی به عضلاتی ورزیده دست یافت اما با شرکت در کلاس‌های درسِ ریاضی ذهنِ آدمی پرورشی درخور و سزاوار نیابد. به علاوه همچنان که به دیگران حق می‌دهیم به هر فعالیتِ ذوقیِ مناسبِ سلیقه و استعدادهای خود بپردازند، علاقه‌مندانِ ریاضی نیز این حق را دارند که ریاضی بیاموزند، ریاضی بیندیشند و ریاضی بیاموزانند.

آموزشِ ریاضیات

اهدافِ آموزشِ ریاضی

شاید برخی از معلمانِ ریاضی نیازی به توجیهِ آموزشِ ریاضیات احساس نکنند، اما اگر دانش‌آموزی از ضرورتِ آموزشِ ریاضی سؤال کند، یا پدر و مادری نگرانِ پیشرفتِ فرزندشان در دروسِ ریاضیِ خود باشند و بنابراین این پرسش را مطرح کنند که اساساً آموزشِ ریاضیات به چه کار می‌آید، باید بتوان آن دانش‌آموز یا آن پدر و مادر را به

نحوی قانع نمود. از این رو لازم است در آغازِ این بخش، به ذکرِ حداقلی از مجموعه‌ی دلایلی که آموزشِ ریاضیات را موجه جلوه می‌دهند، اشاره کنیم.

"یک دلیلِ اولیه که می‌توان بلافاصله برای توجیهِ اهمیتِ آموزشِ ریاضیات ارائه داد این است که بگوییم تحصیلِ ریاضیات به زندگیِ فرد و از طریقِ او به جامعه‌ای که فرد در آن زندگی می کند، کمک می‌نماید. ریاضیات به درجاتِ گوناگونی به هر یک از چهار زمینه‌ی متداخلِ زندگیِ فرد، یعنی زمینه‌های شغلی، انتفاعی، تفریحی و فرهنگی کمک می‌نماید." (**۷**- صص۳۷- ۳۶)

برای بعضی، هدف از آموزشِ مدرسه‌ای آماده شدن برای اشتغال است. اما برای کسانی که نگاهِ منطقی‌تری به آموزش و به ویژه آموزشِ ریاضی دارند، صرفِ آمادگیِ افراد برای داشتن شغلی با درآمدِ بیشتر کفایت نمی‌کند، زیرا علاوه بر داشتنِ منبعی برای کسبِ درآمد، فرد باید بتواند از کاری که معاشِ او را تأمین می‌کند احساسِ رضایت نیز داشته باشد. به این منظور "آموزش باید به گونه‌ای باشد که سببِ توسعه‌ی تمامِ منابعِ درونیِ فرد شود. اما توسعه‌ی این منابع و پرورشِ آنها در تمامِ موارد مستلزمِ تفکر است و ریاضیات را می‌توان یک مکتبِ تفکر دانست. به عنوان مثال از تفکری که می‌توان در ریاضی آموخت، می‌توان آموزشِ تفکرِ تجریدی را نام برد. حال چه زمینه‌ای برای این گونه آموزش مفیدتر و مؤثرتر از مثلاً آموزشِ اعداد خواهد بود که البته بخشی اساسی از آموزشِ ریاضی را به خود اختصاص می‌دهد." (**۹**- صص۳۷- ۳۵)

بحث پیرامونِ آموزشِ ریاضیات منحصر به زمانِ معاصر یا موضوعی در حدِ پژوهش‌های بسیار تخصصیِ دانشگاهی و فارغ از نتایجِ کاربردی نیست. ضرورت‌هایی که آموزشِ ریاضیات را ایجاب می‌کنند، علاوه بر آماده‌سازیِ فرد برای اشتغالی توأم با

رضایت یا تمرینی از تفکر، متضمنِ فوایدِ دیگری نیز هست. این فواید در قالبِ اهدافِ آموزشِ ریاضی در طراحیِ آموزشی در همه‌ی جوامعِ پیشرفته یا در حالِ توسعه منظورِ نظرِ متخصصانِ تعلیم و تربیت قرار دارند.

اهدافِ آموزشِ ریاضی که به عنوانِ مثال در آموزش و پرورشِ ایران در نظر گرفته شده در قالبِ مواردِ زیر تعیین شده است:

"۱. پرورشِ نظمِ فکری و درست اندیشیدن از طریقِ آموزشِ صحیحِ دانسته‌ها به منظورِ به دست آوردنِ نتیجه‌ها؛

۲. ایجادِ توانایی برای انجامِ محاسباتِ عددی در زندگیِ روزمره؛

۳. ایجادِ توانایی در انجامِ محاسباتِ ذهنی و حدس و تخمین زدنِ کمیت‌ها در حدودِ نیازهای زندگیِ روزمره؛

۴. آموزشِ ریاضیاتِ موردِ نیاز در رابطه با سایرِ دروسِ دوره‌ی آموزشِ همگانی؛

۵. ایجادِ توانایی در برآوردِ راه‌حلِ مسائلِ و حدس زدنِ جوابِ آنها؛

۶. ایجادِ توانایی درکِ محتوای ریاضیِ مسائل، به قالبِ ریاضی درآوردنِ آنها و حل‌شان." (۱۸- ص۳)

برای هر معلمِ موفقِ ریاضی، علاوه بر توانایی در مهارت‌های عمومیِ آموزشی و داشتنِ دانشِ تخصصیِ کافی، آگاهی از اهدافِ آموزشِ ریاضی، توافقِ کلی با این اهداف، پذیرفتنِ آنها به عنوانِ پس‌زمینه‌ای که فرآیندِ آموزش در آن رخ می‌دهد و بالاخره در نظر داشتن دائمیِ این اهداف الزامی به نظر می‌رسد.

"فرو رفتن در حلِ مسئله‌های دور از ذهن که به زعمِ برخی، شاید هرگز در زندگیِ روزمره به کار نیاید و آموختنِ اثبات‌های پر طول و تفصیل به چه کار می‌آید؟ بسیاری بر این عقیده‌اند که ریاضیات تمرینی فکری برای تقویت و شکوفاییِ اندیشه و ذهنِ آدمی است." (**۱۷**- ص۹)

این تمرینِ فکری، تفکرِ انتزاعی و تواناییِ صورت‌بندیِ نظام‌مندِ مشکلات و مسائل را به ما می‌آموزاند. هر چند ممکن است این مسائل مستقیماً به ریاضی مربوط نباشند، ولی روشی که در تجزیه و تحلیلِ آنها به کار می‌رود و شگردهایی که در حلِ آنها ما را کمک می‌کند، معمولاً به طورِ اساسی ریاضی هستند.

ایجادِ نظمِ فکری از طریقِ ریاضی، هدفِ پنهانِ دیگری است که از آموزشِ ریاضی می‌توان انتظار داشت. تبیینِ صحیحِ مفروضات و مقدمات برای رسیدن به احکام و نتایج که در حلِ هر مسئله‌ای ساختارِ کلیِ حاکم بر ارائه‌ی راه‌حل را شکل می‌دهد، پیش و بیش از همه‌ی در کوشش‌های فکریِ بشر در ریاضیات است که نمودِ واقعی پیدا می‌کند.

"در یک جمع‌بندیِ کلی می‌توان اهدافِ آموزشِ ریاضی را در سه مقوله دسته‌بندی کرد:

الف) اهدافِ مربوط به محتوا؛

ب) اهدافِ مربوط به فرآیند؛

پ) اهدافِ عاطفی." (**۷**- صص۳۹- ۳۸)

این مقاصد و اهداف مربوط می‌شوند به دانشِ ریاضیات، روش‌های ریاضیِ تفکر که همان روش‌های کسبِ مهارت‌های ریاضی هستند و بالاخره ارزیابِی ریاضیات. توضیحِ مختصرِ این اهداف به قرارِ زیر است:

"الف) اهدافِ مربوط به محتوا در مطالعه‌ی ریاضیات به نتایجِ زیر منجر می‌شوند:

۱. دانشِ الگوهای ریاضی که دستکاری و درکِ محیطِ فراگیرنده را، هم از جنبه‌ی توصیفی و هم از نظرِ ذهنی امکان‌پذیر می‌سازد.

۲. مهارت در دست‌کاری و محاسبه‌ی اعمال و روابطِ موجود در الگوهای ریاضی که در محیطِ زندگیِ فراگیرنده، چه از لحاظِ مادی و چه از لحاظِ ذهنی مفید هستند.

۳. آموختنِ زبانی که مفاهیمِ دقیقِ مربوط به الگوهای ریاضی را، هم در محیطِ عینی و هم در محیطِ ذهنی فراگیرنده، به گونه‌ای صریح روشن می‌سازند.

ب) اهدافِ مربوط به فرآیند که در کسبِ رفتارهای وابسته به فعالیتِ ریاضی جلوه‌گر می‌شوند، موجبِ بروزِ توانایی‌های زیر می‌گردند:

۱. تعبیرِ مجدد، به کار بستن و بررسیِ امکانِ استفاده از یک الگوی ریاضیِ خاص در یک موردِ خاص، هم از لحاظِ محیطِ عینی و هم از لحاظِ محیطِ ذهنی.

۲. انتزاع، تجسم و تنظیمِ یک الگوی ریاضی بر اساسِ موضوعاتِ محیطِ عینی یا موضوعاتِ محیطِ ذهنی.

۳. کشفِ روابطِ جدید در یک الگوی موجود یا ارائه‌ی تجریدهایی از آن الگو و بررسیِ درستیِ آن روابط یا تجریدها از طریقِ آزمایش.

۴. انتقال به نظام‌های دیگر و به کار بردنِ صحیحِ اندوخته‌هایی نظیرِ تجرید، صورت‌بندی، استقرا، قیاس، تجزیه و ترکیب.

پ) بالاخره می‌توان گفت اهداف و مقاصدِ عاطفیِ آموزشِ ریاضیات و روی آوردن به فعالیت‌های ریاضی به ارزیابی‌های زیر منجر می‌شوند:

۱. توانایی هوشِ آدمی در اختراع و اکتشافِ روابطی که کاربردِ آنها به او اجازه می‌دهد روی محیطِ خویش اثر گذارده و به آن نظم و ترتیب بدهد.

۲. توانایی هوشِ آدمی که پا را فراتر از معلوماتِ و مشهوداتِ محیطِ عینیِ خود گذارده و در تفکر و تحلیل مستغرق می‌گردد.

۳. لذتی که می‌توان از طریقِ دنبال کردنِ فعالیت‌های ذهنی و عشق ورزیدن به دانش به دست آورد.

۴. درکِ ریاضیات و دانشِ ریاضی به عنوانِ بخشی واقعی از میراثِ فرهنگیِ نسلِ آدمی که نیازمندِ پشتیبانیِ اجتماع است.» (**۷**- صص۳۹- ۳۸)

علاوه بر تمامیِ اهداف و نتایجی که بر آموزشِ ریاضیات مترتب است و صرف‌نظر از تمامیِ توانایی‌های منطقی و عاطفی که می‌تواند از دستاوردهای این آموزش باشد و این موارد به نوبه‌ی خود ضرورت‌های کافی برای توجیهِ آموزشِ ریاضیات را امکان‌پذیر می‌سازد، بهتر است به افراد اجازه داد ریاضی بورزند تنها به این دلیل که این کار لذت‌بخش و خوشایندِ ایشان است. در این میان بدیهی است که این گونه فعالیت‌های ریاضی نه آسیبی به خودِ فرد می‌زند و نه به اجتماعی که فرد در آن زندگی می‌کند.

بهتر است بپذیریم اشخاصی هستند و باید هم باشند که از انجامِ فعالیتِ ریاضی محظوظ می‌شوند و به رغمِ تمامیِ ارزش‌های علمی، اقتصادی، صنعتی و دیگر ارزش‌هایی از این دست که این فعالیت‌ها، نظریه‌پردازی‌ها، راه‌حل‌ها و . . . می‌توانند داشته باشند، غوطه‌وری و استغراق در لذتِ کشفی که از فعالیتِ ریاضی عایدِ افراد می‌گردد توجیهِ به حدِ بایسته بسنده‌ای برای پرداختن به ریاضیات خواهد بود، توجیهی که آموزشِ ریاضیات را برای ایجادِ توانایی ریاضی ورزیدن موجه جلوه می‌دهد.

سیرِ تحولِ آموزشِ ریاضی

دستاوردهای آدمی در تمامِ زمینه‌های علمی، ادبی، فلسفی و سایر زمینه‌های معرفتِ بشری به وسیله‌ی آموزش از فردی (معلم) به فردی (متعلم) و از نسلی به نسلِ دیگر انتقال یافته است. آموختنِ آن چیزهایی که نسل‌های پیشین بدانها دست یافته‌اند، افزودن برآنها و آموزاندشان به نسل‌های بعد سنتِ همیشگیِ جوامعِ بشری بوده و هست. در ریاضیات نیز آنچه موجباتِ انتقالِ آفریده‌ها و پرداخته‌های ریاضی را از نسلی به نسلِ دیگر فراهم می‌آورد، آموزشِ ریاضیات است.

"از حدودِ ۳۳۰۰ سال پیش از میلاد و در حوالیِ بین‌النهرین که نوشتن در سومر آغاز شد، به همراهِ آن ریاضیات نیز به عنوانِ یک دانش و مهارتِ منسجم توسعه یافت و تدریسِ سازمان یافته‌ی آن نیز به موازاتِ بسطِ دانشِ ریاضی پا به عرصه‌ی وجود نهاد. به منشی‌های سلطنتی محاسباتِ حسابی شاملِ ارزشِ مکانیِ کسرهای شصتگانی و استفاده از جداولِ عددی آموزش داده می‌شد تا در شغلِ آینده‌ی خود به عنوانِ کارگزارانِ دولتی، دانشِ ریاضیِ کسب شده را به کار گیرند." (۱۹- صص۵- ۴)

چنان که در بخشِ تاریخچه‌ی ریاضیات در همین فصل آمد، بابلی‌ها از دانشِ ریاضیِ نسبتاً پیشرفته‌ای که گاه مایه‌ی اعجاب می‌شود، آگاهی داشته‌اند. پس از ایشان مصریان نیز ریاضیاتِ عملی را که از مساحی ریشه می‌گرفت، بسط دادند. هم در میانِ بابلی‌ها و هم در میانِ مصریان افرادی که معمولاً از کاهنان انتخاب می‌شدند از آموزش‌های ویژه‌ای در ریاضی برخوردار می‌گردیدند تا بتوانند از عهده‌ی حلِ مسائلی برآیند که معابد و دربارهای شاهانِ بابلی یا فراعنه‌ی مصری با آنها روبه‌رو می شدند.

با شروعِ عصرِ طلاییِ فرهنگ و تمدنِ یونانی ریاضیات نیز از حالتِ محاسباتی و عملیاتیِ خود که بنا بر احتیاجاتِ دنیای واقعی در تمدن‌های سومری، بابلی و مصری نضج گرفته بود، خارج شده و به صورتِ دانشی انتزاعی در آمد که در پی چرایی بود، نه چگونگی. می‌توان تالس را از نخستین ریاضی‌دانانی برشمرد که ریاضیاتِ قیاسی را برای اولین بار به یونانیان و از آنجا به بشریت عرضه نمودند. داستانِ معروفِ محاسبه‌ی ارتفاعِ اهرام که از پسِ سده‌های فراوانی که از بنای آن می‌گذشت از یاد و خاطره‌ی مصریان هم‌روزگارِ تالس زدوده شده بود حاجت به تکرار ندارد. معهذا به طورِ خلاصه، وی در ساعتی از روز که در آن طولِ قدش با سایه‌اش برابر بود نتیجه گرفت باید سایه‌ی هرم نیز با ارتفاعِ آن یکی باشد و در نتیجه با اندازه‌گیریِ طولِ سایه‌ی هرم به ارتفاعِ آن دست یافت. نکته‌ی اصلیِ این استدلال که بر مبنای قیاسِ ساده‌ای بینِ قدِ شخص و سایه‌ی او در ساعتِ خاصی از روز و قد و سایه‌ی هرمِ بزرگ در همان ساعت استوار بود سزاوارِ آن است که از اولین استدلال‌های قیاسی به شمار رود.

شاید بتوان فیثاغورس را بنیان‌گذارِ اولین مدرسه‌ای دانست که در آن، در کنارِ علومِ دیگر، ریاضیات نیز تدریس می‌شد.

"پیروانِ فیثاغورس وی را در چنان هاله‌ای از اساطیر پوشانده‌اند که با هر میزان قطعیت، اطلاعِ بسیار کمی از زندگیِ او در دست است. وی ظاهراً در حدودِ سالِ ۵۷۲ پیش از میلاد در جزیره‌ی ساموس در دریای اژه تولد یافت. وی نزدِ تالس تحصیلِ فلسفه کرد و خود مدرسه‌ی مشهورِ فیثاغورسی را تأسیس نمود که علاوه بر آن که فرهنگستانی بود برای مطالعه‌ی فلسفه و علومِ طبیعی، ریاضیات نیز جزءِ برنامه‌ی رسمیِ آموزشیِ آن بود. آموزشِ ریاضی در مدرسه‌ی مزبور شاملِ مطالعه‌ی حساب، هندسه، موسیقی و نجوم بود. در قرونِ وسطی به این موضوعاتِ درسی چهارگانه، علومِ سه گانه‌ی دستورزبان، منطق و معانیِ بیان نیز افزوده شد که آموختنِ آنها از ضروریاتِ موردِ نیازِ یک فردِ تحصیل کرده به شمار می‌آمد." (۵- صص۶۹- ۶۸)

"در مدارسِ ابتدایی که در دورانِ باستان شکل گرفتند، به کودکان حسابِ پایه آموزش داده می‌شد. از دانش‌آموزان انتظار می‌رفت که دستگاه‌های شمارشِ موردِ استفاده‌ی جامعه را یاد بگیرند و بتوانند اعمالِ ساده‌ای انجام دهند که آنها را برای مواجه شدن با موضوعاتِ عملیِ موردِ نیازِ جامعه آماده می‌کرد. این رویکرد به آموزشِ ریاضی مدتِ چندین سده پایدار ماند تا در سده‌های هفدهم و هیجدهم اصلاح‌گرانی در اروپا به آموزشِ ریاضی سمت و سوی دیگری دادند. جهت‌گیریِ متفاوتی در تدریسِ ریاضی در آموزشِ عمومیِ غرب به وجود آمد. در نیمه‌های قرنِ نوزدهم بروزِ انقلابِ صنعتی در اروپا و آمریکا باعثِ ملاحظاتِ دوباره‌ای در برنامه‌ی آموزشِ ریاضی در مدارس شد که بر تجربه بیش از نظریه تأکید داشت." (۱۹- صص۸- ۶)

در دهه‌های آخرِ قرنِ نوزدهم و مقارنِ انقلابِ صنعتی و پیشرفت در همه‌ی زمینه‌های فنی و از جمله ارتباطات، در جامعه‌ی ریاضی‌دانانِ آن زمان ارتباطاتِ

بین‌المللیِ گسترده‌تری به وجود آمد که به تأسیسِ کمیسیونی بین‌المللی برای تدریسِ ریاضیات انجامید. این کمیسیون در چهارمین کنگره‌ی بین‌المللیِ ریاضی‌دانان در سالِ ۱۹۰۸ تشکیل شد. پس از آن آموزشِ ریاضی در روندِ تبدیل شدن به یک رشته‌ی دانشگاهی پیشرفتِ قابلِ ملاحظه‌ای را آغاز کرد. "هم‌زمان با انجامِ مطالعاتی درباره‌ی رویکردهای متفاوتِ تدریس و تغییراتِ برنامه‌ی درسی، تحقیق در باره‌ی فرآیندهایی که دانش‌آموزان در یادگیریِ ریاضی به کار می‌گیرند، شروع به گسترش کرد. طیِ دهه‌ی ۱۹۷۰ توسطِ انجمن‌های بین‌المللی محققانِ آموزشِ ریاضی که تعدادشان در حالِ افزایشِ فوق‌العاده‌ای بود، کنفرانس‌های متعددی برگزار گردید و علائقِ متنوعی به موضوعاتی نظیرِ فلسفه‌ی آموزشِ ریاضی، تربیتِ معلمانِ ریاضی و یادگیری با استفاده از ریاضی به وجود آمد." (۱۹- ص۹)

در ایران نیز با تأسیسِ دانشسرای عالی که بعدها به دانشگاهِ تربیتِ معلم (و با نامِ جدیدِ دانشگاهِ خوارزمی) تبدیل شد، نهضتی فراگیر در زمینه‌ی آموزش به طورِ کلی و آموزشِ ریاضی به ویژه، آغاز شد که نسل‌های متعددی از معلمانِ ریاضیِ موفق ثمره‌ی آن می‌باشند. پس از انقلابِ اسلامی و طیِ سال‌های اخیر، رشته‌ی دانشگاهیِ آموزشِ ریاضی در برخی از دانشگاه‌های کشور راه‌اندازی شد که هدفِ اصلیِ آن تربیتِ متخصصانی در این زمینه با دانش و آگاهیِ کافی از روش‌های نوینِ آموزشِ ریاضی و آموزشِ این روش‌ها به معلمانِ ریاضی طیِ دوره‌های کوتاه یا بلند مدتِ ضمنِ خدمت می‌باشد.

بایدها و نبایدها در تدریسِ ریاضیات

ژرژ پولیا[1] (۱۹۸۵- ۱۸۸۷)، ریاضی‌دانِ برجسته‌ی مجارستانی حاصلِ سال‌ها تجربه‌ی بارآورِ تدریسِ ریاضیِ خویش را در سالِ ۱۹۶۳ در مقاله‌ای تحتِ عنوانِ **ده توصیه به معلمان** در قالبِ ده پیشنهاد به خامه‌ی تحریر درآورد. جنابِ آقای دکتر علی رجالی با الهام گرفتن از این مقاله، چهارده توصیه به دبیرانِ ریاضی را در مقاله‌ای با همین عنوان که در مجله‌ی رشدِ آموزشِ ریاضی به چاپ رسیده است به معلمان و به ویژه معلمانِ ریاضی پیشنهاد نموده‌اند.

به رغمِ آن که بسیاری بر این باورند که امرِ تدریس در جریانِ فرآیندِ تدریس شکل می‌گیرد و بنابراین هیچ دستورالعملِ از قبل تعیین شده‌ای را نمی‌توان به گونه‌ای قالبی به کسی تحمیل نمود، معذلک کمتر معلمی یافت می‌شود که منکرِ سودمندیِ آگاهی از تجاربِ تدریسِ دیگر معلمان باشد.

"یکی از هدف‌های آموزشِ ریاضیات علاقه‌مند ساختن و برانگیختنِ دانش‌آموزان به ارج‌گذاریِ ریاضیات و وادار ساختنِ آنان به استفاده از فرصت‌های فراگیریِ آن است. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که به منظورِ حفظِ یک جوِ فراگیری، در پیِ آموختن یا ابداعِ راهبردهای مناسبی در امرِ تدریس باشیم. هر معلمِ علاقه‌مندی مایل است که به حداقلی از این راهبردها آگاهی داشته و گاه برخی از آنها را به طورِ واقعی در کلاسِ درسِ خود بیازماید." (**۷**- ص۱۷۹)

1. George Polya

به همین منظور نگارندگان بر آن شدند به تناسبِ موضوعِ فصلِ حاضر درباره‌ی آموزشِ ریاضی، چهارده توصیه‌ی فوق‌الذکر را که به تعبیری شکلِ ایرانی شده‌ی توصیه‌های پولیا محسوب میشود در خاتمه‌ی فصل و در این بخش بیاورند تا شاید خواننده‌ی این سطور که بعید نیست خود معلمی علاقه‌مند باشد، از حاصلِ تجربه‌های معلمانِ بزرگی چون پولیا بهره‌مند شود. این چهارده توصیه به قرارِ زیرند: (۱٤- صص۴۸-۴۴)

۱. به شغلِ خود علاقه‌مند باشید. معلمی که به کارِ خود علاقه داشته باشد با تمامِ توان در جهتِ حلِ مشکلاتِ آموزشیِ خود می‌کوشد و این امر سبب می‌شود که روزبه‌روز کیفیتِ کارِ خود را بالا ببرد. معلمی که بدونِ علاقه تدریس کند، دانش‌آموزان را از مطالعه و یادگیری دلسرد می‌نماید و نقشِ مخربی در آینده‌ی آنها به جا می‌گذارد. پولیا در مقاله‌ی خود می‌نویسد: 'شما اگر از موضوعی خسته و کسل باشید شنوندگانِ خود را خسته و کسل خواهید کرد.'

۲. به علمِ ریاضی و موضوعی که تدریس می‌کنید آگاهی داشته باشید. عدمِ تسلط به موضوعی که تدریس می‌شود باعثِ اتلافِ وقتِ دانش‌آموزان از یک طرف و هتکِ شخصیت و حیثیتِ حرفه‌ای معلم از طرفِ دیگر می‌شود.

۳. برای تدریس خود را آماده سازید. معلمِ ریاضیِ خوب کسی است که علاوه بر تسلط بر موضوعِ تدریس، مثال‌های مناسبی بزند و پرسش‌های جالبی طرح کند.

۴. اطلاعاتِ خود را به‌هنگام نگاه دارید. برای به‌هنگام کردنِ اطلاعات، مطالعه‌ی شخصی، بحث و گفتگو با سایرِ معلمانِ ریاضی و شرکتِ مستمر در دوره‌های آموزشیِ ضمنِ خدمت، مفید خواهد بود.

۵. با دیگر معلمان مشورت کنید. روش‌های جالبی که توسطِ معلمانِ باتجربه در موردِ تدریسِ موضوعاتِ مختلف مطرح می‌شوند، می‌توانند برای ادامه‌ی کارِ معلم کم‌تجربه‌تر مفید و آموزنده باشند. معمولاً قدرتِ ابتکار و ارائه‌ی روش‌های جدیدِ تدریس، در اثرِ آگاهی از تجربه‌ی سایرِ معلمان به دست می‌آید.

۶. از آموزشِ غلطِ مفاهیمِ ریاضی یا بدآموزیِ آنها اجتناب کنید. به بیانِ دیگر در آموزشِ موضوعاتی که تدریس می‌کنید، صادق باشید.

۷. به دانش‌آموزان جرأت دهید. با تشویق آنها را به ریاضی علاقه‌مند کنید. با دخالت دادنِ دانش‌آموزان در ارائه‌ی مثال‌های حل شده در قدمِ اول و سپس ارائه‌ی مسائلِ جدید در قدم‌های بعدی، می‌توان جرأتِ مبارزه‌طلبی در برابرِ مسائلِ ریاضی را در دانش‌آموز به وجود آورد.

۸. سعی کنید هر دانش‌آموز را در سطحِ خودش ارزیابی کنید. برای یاد دادن، ارتباطِ نزدیک ضروری است. تلاش کنید انتظارات و مشکلاتِ دانش‌آموزان را در فراگیری درک کرده، در پیِ رفعِ این مشکلات باشید.

۹. به دانش‌آموزان روشِ تفکرِ ریاضی را بیاموزانید. مغزِ آنان را پر از محفوظات نکنید. ارائه‌ی حجمِ انبوهی از اطلاعات و محفوظات به ایشان، به آنان فرصتِ کافی برای اندیشیدن نمی‌دهد.

۱۰. به دانش‌آموزان حدس زدن را بیاموزانید. به گفته‌ی پولیا: ’معلمِ خوب باید بتواند حدس زدن را در دانش‌آموزانِ خود تقویت کند، زیرا کشفِ ریاضی بر روی مشاهده، حدس و تجربه بنا نهاده شده است.‘

۱۱. به دانش‌آموزان روش‌های درست خواندنِ مسئله و به طورِ همزمان حلِ آن را بیاموزانید.

۱۲. با راهنمایی کردنِ دانش‌آموزان به آنها امکان کشفِ مطالبِ جدید را بدهید. در واقع به آنها بیاموزانید که خود بیاموزند. معلمی معلمِ خوب است که بیشتر نقشِ راهنما داشته باشد. اجازه دادن به دانش‌آموزان برای همکاری در امرِ تدریس، به این منظور که ایشان خود مطالب را کشف کنند، بسیار مفید است.

۱۳. در کلاس به دانش‌آموزان اجازه و فرصتِ فعالیتِ ریاضی دهید.

۱۴. انگیزه‌ی لازم را جهتِ یادگیریِ مطالب و موضوعاتِ ریاضی در دانش‌آموزان ایجاد و تقویت کنید. بیانِ زیبایی‌های ریاضیات، اشاره به کاربردهای ریاضی در سایرِ علوم، بیانِ مختصری از تاریخِ ریاضی در ارتباط با هر موضوعِ درسی و به کار بردنِ روشِ تدریسِ مؤثرِ ریاضی، از عواملِ ایجادِ انگیزه در دانش‌آموزان به شمار می‌رود.

فصل سوم

حلِ مسئله

آموزشِ ریاضی مبتنی بر حلِ مسئله

طرح و حلِ مسئله

"معلمی را در نظر بگیرید که مشغولِ تدریس است و می‌بیند که یکی از شاگردان به او گوش نمی‌دهد یا حرف‌هایش را نمی‌فهمد. معلم ممکن است چنین فکر کند که این وضع مشکلی به حساب نمی‌آید. او ممکن است فقط به دنبالِ مقصر بگردد یعنی خیال کند که این شاگرد است که تقصیر دارد و بنابراین راه‌حلِ مشکل این است که کمی تشر بزند یا کمی تهدید و تنبیه کند. احیاناً برعکسِ این حالت به ذهنِ او برسد و خیال کند که تقصیرِ خودِ اوست که به درستی درس را بیان نکرده و بنابراین لازم است روشِ خود را اصلاح کند." (۲- ص۷۳۳)

یکی از چنین روش‌های اصلاحی روشِ طرح و حلِ مسئله است. به این معنا که به جای طرحِ مستقیمِ موضوعات و مباحثِ درسی یا ارائه‌ی کلیه‌ی مطالب به دانش‌آموز به گونه‌ای حفظی، سهمی از تفکر را برای وی به این ترتیب قائل شد که در موردِ هر مبحث با طرحِ پرسش‌واره‌ای مقدماتی ذهنِ دانش‌آموز را به فکر کردن در اطرافِ موضوعِ موردِ بحث هدایت نمود تا او بتواند شخصاً به درکِ موضوع نائل گردد. به

علاوه در مراحلِ بعدیِ پس از طرحِ مسئله راهنمایی‌های مناسبی جهتِ حلِ آن به دانش‌آموز ارائه کرد.

"کسی که به طرحِ مسئله‌ای معین می‌پردازد اگر از چیزهایی بگوید که مخاطبانش راه‌حل یا جوابی حاضر و آماده برای آن داشته باشند، به سرعت در می‌یابد که دچارِ ضعفِ طرحِ مسئله است و برای رفعِ ضعف‌هایش در این کار باید توجه، دقت، شناخت و فهمِ خود را عمیق‌تر از سایرین کند. هنگامی که از کلاسِ درس درخواست می‌شود مسئله‌ای معین را حل کنند، بیشترِ معلمین چنین تصور می‌کنند که بدین ترتیب محصلین وادار شده‌اند که با ذهنی فعال به موضوعِ درس بنگرند، از حالت یادگیریِ انفعالی بیرون بیایند و قوای خلاقِ ذهنِ خود را فعلیت بخشند." (**۲**- صص۷۷۸- ۷۷۷)

واضح است که چنین طرحِ مسئله‌ای اگر چه از آموزشِ مستقیم و بدونِ حلِ مسئله مطلوبیت بیشتری دارد، معهذا به معنیِ موردِ نظرِ ما در پرورش خلاقیت تکافوی اهدافی را که از آموزشی مبتنی بر این گونه پرورش انتظار می‌رود، نخواهد کرد.

در ریاضیات به ویژه طرحِ مسئله در آموزشِ مفاهیمِ ریاضی اهمیتی به سزا دارد. معلمی که نتواند به درستی مفهومی را در قالبِ مسائل طرح نموده و دانش‌آموز را به حلِ آنها سوق دهد، به طوری که خودِ دانش‌آموز نتواند اندیشه‌های اصلیِ موضوعِ ریاضیِ موردِ تدریس را درک کند، در کارِ خود با موفقیتِ زیادی روبه‌رو نخواهد شد.

"حلِ مسئله یکی از هدف‌های اصلیِ آموزشِ ریاضی است. شورای ملیِ معلمانِ ریاضی[1] (NCTM) در آمریکا و کانادا (دو کشورِ بسیار پیشرفته در تولیدِ دانشِ ریاضی)،

1. National Council of Teachers of Mathematics

بر لزوم وجودِ حلِ مسئله در ریاضیاتِ مدرسه‌ای تأکید کرده و اظهار می‌دارد که حلِ مسئله قسمتِ اصلی و مهمِ ریاضی است و بدونِ آن ریاضیات تنها مجموعه‌ای از تمرین‌ها و مهارت‌ها و نوعی فریب برای دانش آموزان خواهد بود. حلِ مسئله علاوه بر ارزشِ حیاتی که در ریاضیات دارد، در شاخه‌های دیگرِ علوم نیز کاربردهای فراوانی دارد و اغلب، این کاربردها منجر به طرحِ مسائل مهمی در ریاضیات می شوند." (**۲۵**- ص۱۸)

"از نظرِ ذهنی فرآیندِ حلِ مسئله دارای حرکت و فعالیت است و به عنوانِ یکی از عواملِ تشویقی و نیرویی محرکه برای فعالیتِ دانش‌آموزان محسوب می‌شود. حلِ مسئله شادی‌بخش است و در پرورشِ خلاقیتِ شخص نقشِ مؤثری دارد، به طوری که از آن به عنوانِ یک هنر نام برده می‌شود. به علاوه هنرِ حلِ مسئله برای درکِ ریاضیات و قدردانی از آن که یک هدفِ آموزشی است، لازم و ضروری خواهد بود." (**۲۵**- صص۱۶-۱۵)

فرآیندِ حلِ مسئله فرآیندی پیچیده است که چندین جنبه‌ی مختلف دارد. هنگامی که به شدت کار می‌کنیم با هوشیاری از پیشرفتِ کارِ خودمان آگاهی داریم. اگر این پیشرفت سریع باشد بر خود می‌بالیم و شاد می‌شویم و اگر کند باشد افسردگی پیدا می‌کنیم. چه چیز برای پیشرفت در حلِ مسائل اساسی است؟

پاسخ به این پرسش در گروِ ارائه‌ی تعریفی مناسب از حلِ مسئله است. تعریفی که بتوان بر اساسِ آن روش‌های مناسبِ آموزشِ مبتنی بر حلِ مسئله را ارائه نمود. صاحب نظرانِ متعددی در این خصوص مطالبی اظهار نموده‌اند که در ادامه و در حدِ مجالِ این نوشته به برخی از آنها اشاره می‌کنیم و سعی می‌نماییم تا قدرِ مشترکی از این تعاریف استخراج کنیم، آن هم البته در صورتی که اساساً چنین قدرِ مشترکی وجود داشته باشد.

"کانتوسکی[1] حلِ مسئله را موقعیتی می‌داند که شخص با آن روبه‌رو می‌شود و هیچ الگوریتمِ از پیش آماده‌ای برای حلِ آن در دست ندارد. تریسمن[2] حلِ مسئله را با عبارتِ **انجام می‌دهی در حالی که نمی‌دانی چه انجام می‌دهی،** تعریف می‌کند. لِش[3] با دیدگاهی به مراتب وسیع‌تر حلِ مسئله را فراتر از جواب‌های به دست آمده می‌داند و در واقع آن را ابزار و روشِ تفکر برای یادگیری از طریقِ فرصت‌های قابلِ دسترسی معرفی می‌کند. شوئنفلد[4] از این هم فراتر رفته و تمامِ ریاضیات را حلِ مسئله می داند." (۲۵- ص۱۶)

با توجه به تعاریفی که در بالا برای حلِ مسئله ارائه شد ، می‌توان مسئله را موقعیتی جدید و ناآشنا در نظر گرفت که کسی که قصد دارد آن را حل کند نمونه و الگویی قبلی از آن در ذهن ندارد؛ در نتیجه روشِ سریعِ ارائه‌ی راه‌حل برای مسئله را نمی‌داند. به این ترتیب مسئله در خلقِ اندیشه‌های سازنده نقشِ مؤثری بر عهده دارد زیرا حلِ آن، مستلزمِ به کار گیریِ انواعِ توانایی‌های مسئله حل کردن است و این در حالی است که تمرینِ معمولی موقعیتی تکراری و معمولاً پیش پا افتاده است و ممکن است در مقایسه با تجاربِ قبلیِ نظیر فقط در جزئیات فرق داشته باشد.

به رغمِ تعاریفِ متعدد و نسبتاً متفاوتی که برای حلِ مسئله بیان گردید، اغلبِ آنها در ضرورت، کلیات و روش‌های عمومیِ حلِ مسئله تا حدودِ زیادی مشترک هستند. در ریاضیات آموزشِ بدونِ حلِ مسئله فاقدِ اعتبار است. در واقع یادگیریِ زنجیره‌ای از

1. Kantowski
2. Trisman
3. Lesh
4. Schoenfeld

مفاهیم، قضایا، استدلال‌ها و روش‌های ریاضی بدونِ آن که یادگیرنده در فرآیندِ بازتولیدِ این پاره‌ها سهیم نباشد روحِ خلاقیت را در فرد نابود می‌کند.

معلمِ ریاضیات فرصتِ بزرگی پیشِ روی خود دارد. اگر وقتِ اختصاصیِ تدریسِ خود را به تمرین دادنِ شاگردان در عملیاتِ پیشِ پا افتاده بگذراند، علاقه و دلبستگیِ آنان را به موضوعی که دارد تدریس می‌کند می‌کشد و شاید تا حدودی مانعِ رشد و تکاملِ عقلیِ ایشان شود. باید اذعان کرد فرصتی را که در اختیار داشته به صورتِ نامناسبی مصرف کرده است.

"ولی اگر کنجکاویِ دانش‌آموزان را با مطرح کردنِ مسائلی متناسب با دانش و شناخت آنها برانگیزد و در حلِ مسائل با طرح کردنِ پرسش‌های راهنما به یاریِ ایشان برخیزد، می‌تواند ذوق و شوق و وسیله‌ای برای اندیشیدنِ مستقل در آنها پدید آورد." (**۱۰**- ص۱۳)

راهبردهای حلِ مسئله در ریاضیات

در این قسمت برخی راهبردهای تثبیت شده در حلِ مسئله‌های ریاضی را که تقریباً موردِ توافقِ همگیِ ریاضی‌دانان و متخصصان آموزشِ ریاضی قرار دارند، بیان می‌کنیم. این راهبردها بر مبنای قدرِ مشترکِ تعاریف موجود از حلِ مسئله سازماندهی شده‌اند که در بخش قبل به خلاصه‌ای از آنها اشاره شد. به علاوه نه تنها در مسائلِ ریاضی، بلکه در حلِ هر مسئله‌ای می‌توان برخی از این راهبردها را با تصحیحی مختصر در صورت و روش، به کار برد.

"شاید این سؤال پیش بیاید که آیا هر مسئله‌ای از طریقِ یک راهبردِ خاص حل می‌شود؟ در پاسخِ این سؤال به این نکته اشاره می‌کنیم که یکی از راه‌هایی که دانش‌آموز را به یک مسئله‌حل‌کنِ ماهر تبدیل می‌کند این است که وی از طریقِ راهبردهای گوناگون به حلِ مسئله‌ای واحد بپردازد." (**۱۱**- ص۳)

بنابراین لازم است راهبردهای اصلی در این مورد به اجمال بیان شوند. کلیه‌ی این راهبردها از کتابِ **چگونه مسئله را حل کنیم؟**، مأخذِ شماره‌ی ۱۰، اخذ شده‌اند. البته به منظورِ پرهیز از طولانی شدنِ متن گاه خلاصه‌ای از مطالبِ لازمه‌ی این بخش که به راهبردهای حلِ مسئله مربوط می‌شود ذکر شده است. لذا در خصوص هر یک از این موارد، شماره‌ی صفحاتی از مأخذِ مزبور را که موردِ استفاده قرار گرفته‌اند بدونِ ذکرِ شماره‌ی منبع، برخلافِ رسمِ مألوفِ ارجاعاتِ این نوشته مشخص کرده‌ایم.

۱. استقرا و استقرای ریاضی:

استقرا عبارتست از فرآیندِ اکتشافِ قوانینِ کلی از طریقِ ملاحظه و ترکیب نمودنِ نمونه‌های جزیی که در همه‌ی علوم و حتی در ریاضیات، موردِ بهره‌برداری قرار می‌گیرد. به عنوانِ مثال ممکن است برحسبِ تصادف مشاهده کنیم:

$$۱ + ۸ + ۲۷ + ۶۴ = ۱۰۰$$

که با توجه به مجذورها و مکعب‌ها، می‌توان به این تساوی شکلِ بسیار جالبِ توجهِ زیر را داد:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ = ۱۰^۲$$

می‌توانیم حالاتِ خاصِ دیگری را موردِ تحقیق قرار دهیم و جدولِ زیر را به دست آوریم:

$$۱^۳ = ۱^۲$$

$$۱^۳ + ۲^۳ = ۹ = ۳^۲$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ = ۳۶ = ۶^۲$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ = ۱۰۰ = ۱۰^۲$$

...

از مشاهده‌ی این مواردِ خاص استنباط می‌شود:

'حاصلِ جمعِ نخستین n مکعب، یک مربع است'

قانونی که هم‌اکنون به آن اشاره کردیم بر مبنای استقرا بیان شده است. استقرا در آن می کوشد که فراسوی ملاحظات و مشهودات، به نظم و انسجام برسد.

در بسیاری حالات نظیرِ حالتی که در اینجا موردِ بحث قرار گرفت، منبعِ حدسی که بیان می‌شود استقراست و ادعایی که به کمکِ نمادهای ریاضی صورت‌بندی شده، به صورتِ تجربی به دست آمده است و به همین دلیل در مرحله‌ی بعد، استقرای ریاضی همچون مکملی برای استقرای اولیه و در حکمِ اثباتِ ریاضی آن به کار می‌رود. به این ترتیب استقرای ریاضی وسیله‌ای برای تحقیقِ درستیِ گزاره‌ی اولیه است. (صص۶۰-۵۶)

۲. رسمِ شکل:

اَشکال نه تنها موضوعِ بحثِ مسائلِ هندسی را تشکیل می‌دهند، بلکه همچنین کمکِ مهمی به حلِ همه گونه مسائلی می‌کنند که در آغاز هیچ ارتباطی با هندسه

ندارند. دو دلیل عمده برای توجه به اَشکال در حلِ مسائل وجود دارد. این دو دلیل عبارتند از

الف) اگر مسئله‌ی ما یک مسئله‌ی هندسی باشد باید برای آن یک شکل در نظر بگیریم زیرا اگر بخواهیم همه‌ی جزئیات را در نظر آوریم نمی‌توانیم همه‌ی آنها را همزمان در خاطر داشته باشیم، بلکه ملاحظه‌ی آنها پس از آن که ترسیم شده باشند امکان‌پذیر است.

ب) یک کیفیتِ جزئی که در تخیلِ ما نقش بسته باشد ممکن است فراموش شود ولی اگر بر روی کاغذ بیاید، باقی می‌ماند و چون به آن بازگردیم، ما را به یادِ ملاحظاتِ قبلی می‌اندازد. (ص۵۷)

۳. حلِ مسئله‌ی وابسته یا کمکی:

اگر نمی‌توانید مسئله‌ای را حل کنید اجازه ندهید که این شکست شما را غمگین سازد بلکه در آن بکوشید که با کسبِ موفقیتی آسان‌تر مایه‌ی تسلیِ خاطری برای خود پیدا کنید و تلاش کنید تا نخست مسئله‌ای وابسته به آن مسئله را حل کنید. سپس جرأت خواهید یافت تا بارِ دیگر مسئله‌ی اصلی را موردِ حمله قرار دهید. برتریِ آدمی در آن است که بر گردِ مانعی که نمی‌تواند آن را از پیشِ پای خود بردارد بگردد و چاره‌اندیشی کند و هنگامی که مسئله‌ی اصلی حل‌ناشدنی به نظر می‌رسد، به طرحِ مسئله‌ی کمکیِ مناسبی بپردازد و آن را حل کند. (ص۶۶)

۴. استفاده از همه‌ی داده‌ها:

در نتیجه‌ی بسیج شدنِ تدریجیِ همه‌ی شناخت و دانشِ ما، دریافتی که از مسئله داریم در پایانِ حلِ آن بسیار بیش از آغازِ آن خواهد بود. طرحِ پرسش‌هایی نظیرِ آیا آنچه را که نیازمندِ آن بوده‌ایم به دست آورده‌ایم؟، آیا ادراک و دریافتِ ما درست و تمام است؟، آیا همه‌ی داده ها را به کار برده‌ایم؟ و پرسش‌هایی از این دست نه تنها در ساختنِ یک برهان، بلکه در وارسی و امتحانِ صحتِ آن نیز سودمند واقع می‌شوند. هدفِ این پرسش‌ها آزمایشی از کمال و تمامیت تصور و دریافتِ ما از مسئله است. اگر نتوانیم داده، شرط یا فرضی اساسی از مسئله را به حساب بیاوریم، تصور و دریافتِ ما قطعاً ناتمام و ناقص خواهد بود. (صص۶۸-۶۶)

۵. برهانِ خلف:

در برهانِ خلف یک گزاره از طریقِ باطل کردنِ فرضی مغایرِ آن، با استخراجِ امری آشکارا محال از فرضِ صحیح بودنِ فرضِ مزبور به اثبات می‌رسد. در این نوع برهان که به برهانِ غیرمستقیم نیز موسوم است، راست بودنِ یک ادعا از طریقِ اثباتِ نادرستیِ فرضِ مقابلِ آن صورت می‌گیرد. به عنوانِ مثال گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید:

'دنباله‌ی اعدادِ اول نامتناهی است'

اگر فرض کنیم یک آخرین عددِ اولِ p وجود دارد (فرضِ خلف)، می‌توانیم عددِ q را به صورتِ زیر بسازیم:

$$q = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times \ldots \times p + ۱$$

این عددِ q بزرگتر از p است و برحسبِ فرضِ خلف نمی‌تواند اول باشد و می‌بایستی بر یک عددِ اول بخش‌پذیر باشد. حال گوییم همه‌ی اعدادِ اولی که در اختیار داریم، بنا به فرضِ خلف اعدادِ ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، . . . و p هستند، ولی q به هریک از آنها که تقسیم شود باقیمانده‌ای برابر با ۱ دارد. در نتیجه q بر هیچ یک از اعدادِ اول یاد شده بخش‌پذیر نیست و لذا اول است و این چیزی است آشکارا نادرست. بنابراین فرضِ اصلیِ ما می‌بایست نادرست بوده باشد. به این ترتیب توانستیم ثابت کنیم رشته‌ی اعدادِ اول بی‌پایان است. (صص۸۵-۸۰)

۶. تجزیه‌ی شرط:

نخستین وظیفه‌ی ما فهمیدنِ مسئله است. پس از آن که مسئله را به صورتِ یک کل فهمیدیم، واردِ جزئیاتِ آن می‌شویم. اجزای مختلفِ آن، یعنی مجهول، داده‌ها و شرط را جداگانه موردِ ملاحظه قرار می‌دهیم. پس از آن که شرط را به عنوانِ یک کل فهمیدیم اجزای مختلفِ آن را از یکدیگر جدا کرده و هر یک را جداگانه می‌آزماییم. (صص۱۰۱-۱۰۰)

۷. تغییرِ شکلِ مسئله:

تغییر دادنِ صورت مسئله کاری اساسی است. نمی‌توانیم امیدِ آن داشته باشیم که هر مسئله‌ی شایسته‌ی صرفِ وقت برای حل کردنِ آن را بدونِ تمرکزِ شدید حل کنیم. اما از طرفی با تمرکزِ توجه، به آسانی خسته می‌شویم. برای آن که توجهِ خود را فعال نگاه داریم لازم است چیزی که موردِ توجهِ ما قرار گرفته، پیوسته در حالِ تغییر باشد. اگر در حلِ مسئله پیشرفت کنیم توجهِ ما مشغول و علاقه‌مندی ما زنده است. ولی اگر نتوانیم پیش برویم توجهِ ما پژمرده می‌شود و علاقه و شوقِ ما فرو می‌نشیند، از مسئله خسته

می‌شویم و افکارِ ما سرگردانی پیدا می‌کنند و خطرِ آن هست که مسئله را روی‌هم‌رفته گم کنیم. برای گریز از این خطر لازم است در باره‌ی مسئله پرسشِ تازه‌ای برای خود طرح کنیم و به اصطلاح صورت مسئله را تغییر دهیم. (صص۱۳۰-۱۲۸)

۸. آزمایشِ حدس:

ممکن است حدسی در موردِ حلِ یک مسئله درست باشد ولی پذیرفتن آن به عنوانِ حقیقتی به اثبات رسیده، کاری ابلهانه است. حدس ممکن است غلط باشد، ولی از نظر دور کردنِ آن نیز کارِ ابلهانه‌ی دیگری است. حدس‌هایی از گونه‌ی خاص شایسته‌ی آن هستند که در معرضِ آزمایش در آمده و جدی گرفته شوند. این گونه حدس‌ها معمولاً دست‌کم بخشی از تمامِ حقیقت را در بر دارند. نادرستیِ بسیاری از حدس‌ها در پایانِ کار معلوم می‌شود، ولی همان‌ها نیز در راهبریِ ما به حدسیِ بهتر سودمند واقع خواهند شد. (صص۱۴۶-۱۴۵)

* * *

دیدگاه‌های نوین در موردِ راهبردهای حلِ مسئله، همچنان که در موردِ راهبردهای پیش‌گفته ملاحظه می‌شود، به گونه‌ای نظام‌مند بر پرورشِ خلاقیت مبتنی می‌باشند. بر طبقِ این دیدگاه‌ها، راهبردهای حلِ مسئله را می‌توان در قالبِ مواردی که در زیر خواهد آمد به طورِ خلاصه بیان نمود. پرداختن به هر یک از این موارد مستلزمِ توضیحی مختصر و ذکرِ مثالی از هر کدام خواهد بود که برای رعایتِ اختصار فقط به ذکر هر مورد اکتفا کرده و این بخش را به پایان می‌بریم. این موارد عبارتند از:

"۱. رسمِ شکل؛

۲. تنظیمِ جدولِ نظام‌دار؛

۳. حذفِ حالت‌های نامطلوب؛

۴. الگویابی؛

۵. حدس و آزمایش؛

۶. زیرمسئله‌ها؛

۷. حلِ مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط با مسئله‌ی اصلی؛

۸. روشِ جبری.» (۱۱- ص۳ و ص۱۰۵)

سازمان‌دهیِ حلِ مسئله در کلاسِ درسِ ریاضی

«به منظورِ ایجادِ فرصت‌های مناسب جهتِ افزایشِ تعامل و هم‌فکریِ دانش‌آموزان، کارِ گروهی به عنوان یکی از روش‌های اصلیِ تدریسِ ریاضی از طریقِ حلِ مسئله، به کار گرفته می‌شود. گروه‌های کوچک یک محیطِ طبیعی ایجاد می‌کنند تا از طریقِ آن افراد بتوانند با هم تعامل و گفت و گو داشته و ارتباطاتِ ریاضی را بهتر درک کنند. کسب و رشد مهارت‌های اجتماعی نظیرِ گوش دادن، سازگاری، رسیدن به توافقِ عمومی، دفاع از اندیشه‌ها و بهبودِ آنها از نتایجِ متنوعی است که در رابطه با نقشِ کارِ گروهی در کلاسِ درسِ ریاضی حاصل می‌آید.» (۲۵- ص۱۷)

به رغمِ نتایجِ متنوع و مثبتِ کارِ گروهی، رها کردنِ دانش‌آموزان در حینِ فرآیندِ حلِ مسئله به حالِ خود، نه تنها از چنین نتایجی برخوردار نخواهد بود بلکه باعثِ گمراهی و سردرگمیِ ایشان نیز می‌شود. به‌علاوه این که اغلب پیش می‌آید در هر نوع گروه‌بندی

و در هر گروهی دانش‌آموزانی یافت شوند که به سبب برخی دلایل تمایل به همکاری با سایرِ اعضای گروه نداشته و حتی مخلِ فعالیت اعضای علاقه‌مندِ گروه باشند. از این روست که نقشِ معلمِ ریاضی به عنوانِ هدایت‌گر و سازمان‌دهنده‌ی گروه‌های کوچکِ حلِ مسئله ضروری می‌نماید. به هر حال صرف‌نظر از شأن و جایگاهِ معلم معمولاً موقعیتِ کاریزماتیکِ او نیز به این هدایت‌گری و سازمان‌دهی کمک می‌نماید. بنابراین ارائه‌ی الگوهای مناسبِ کارِ گروهی و سازمان‌دهیِ آنها از مهم‌ترین وظیفه‌های هر معلمی است که قصد دارد به مددِ این روش در پیِ آموزشِ مفاهیمِ ریاضی به دانش‌آموزان برآید.

این الگوهای مناسب برای کارِ گروهی کمک‌کارِ معلم در پیشبردِ اهدافِ آموزشیِ وی به وسیله‌ی گروه‌بندی است. فی‌الواقع اصلی‌ترین هدف که یادگیری بوده و مقدم بر هر هدفِ دیگری و از جمله پرورشِ خلاقیت بایستی مدِ نظرِ معلم واقع شود به یاری گروه‌بندیِ مناسب و استفاده از الگوی درخور با سهولت و برآیندِ بیشتر و بهتری به سرانجام می‌رسد.

یکی از الگوهای مناسب در این مورد مدلِ **K-W-D-L** است[1] که شاملِ چهار مرحله بوده و هر گروه از دانش‌آموزان پس از طرحِ مسئله توسطِ معلم طیِ چهار مرحله نتایجِ کارِ خود را اعلام می‌کنند. این چهار مرحله سازگاریِ زیادی با روشِ چهار مرحله‌ای حلِ مسئله‌ی پولیا دارد که در بخشِ دوم این فصل به آن خواهیم پرداخت. این مراحل عبارتند از:

"مرحله‌ی ۱. چه می‌دانم؟ (What I Know?)؛ **K**

1. What I Know?, What I Want to find out?, What I Did?, What I Learned?

مرحله‌ی ۲. چه چیزی را می خواهم بیابم؟ (What I Want to find out?)؛ **W**

مرحله‌ی ۳. چه کردم؟ (What I Did?)؛ **D**

مرحله‌ی ۴. چه یاد گرفتم؟ (What I Learned?)؛ **L**" (۲۵- ص۱۷)

توضیحِ مختصرِ این چهار مرحله یا گام به شرح زیر است:

"گام ۱. چه می‌دانم؟ (**K**)

در این گام دانش‌آموزان صورت مسئله را می‌خوانند و در موردِ این که راجع به مسئله چه می‌دانند با یکدیگر بحث و گفتگو می‌کنند. ممکن است آنها طیِ این بحث‌ها به طورِ موقتی دچارِ بحرانِ فکری شوند. در این موقع معلم در تنظیم و دسته‌بندیِ اطلاعاتِ مسئله آنها را کمک می‌کند تا به آرامی و به تدریج، نظمِ فکریِ خود را بازیابند. این مرحله شاملِ خواندن، توضیح دادن، بحث کردن و رسمِ شکل و نمودار است تا از طریقِ این راهبردها مسئله را بهتر بفهمند. (ن.ک. مرحله‌ی فهمیدنِ مسئله در روشِ پولیا)

گام ۲. چه چیزی را می‌خواهم بیابم؟ (**W**)

در این گام دانش‌آموزان مجهول یعنی آنچه را که می‌خواهند بیابند شناسایی کرده و در موردِ آن به توافق می‌رسند. این مرحله شاملِ تصمیم‌های دانش‌آموزان به منظورِ طرحِ نقشه برای حلِ مسئله است. در این مرحله ممکن است دانش آموزان به داده‌های دیگری به جز اطلاعاتِ مستقیمِ مسئله نیاز داشته باشند. در این صورت آنها که در یک گروهِ کوچک کار می کنند، برای تعیینِ منبع و داده‌های موردِ نیاز می‌توانند رأی‌گیری

کرده، تبادلِ نظر نموده، آزمایش انجام داده و بالاخره به کتاب‌های مرجع مراجعه نمایند. (ن.ک. مرحله‌ی طرحِ نقشه در روشِ پولیا)

گام ۳. چه کردم؟ (**D**)

در دو گامِ **K** و **W** دانش‌آموزان اغلب به فهمِ مسئله و طرحِ نقشه مشغول هستند. گامِ **D** شاملِ روایت‌ها و یادداشت‌های دانش‌آموزان در موردِ چگونگیِ اجرای گام‌های **K** و **W** است. این مرحله به آنها کمک می‌کند تا آگاهانه در موردِ اجرای نقشه‌ها و فرآیندهایی که در دو مرحله‌ی قبل طراحی و اجرا کرده‌اند، فکر کرده و آنها را ارزیابی نمایند. (ن.ک. مرحله‌ی اجرای نقشه در روشِ پولیا)

گام ۴. چه یاد گرفتم؟ (**L**)

با توجه به این که نتیجه‌ی بحث‌های قبل می‌توانند در شکل‌های مختلفی تجلی بیابند، هر دانش‌آموز به تنهایی راه‌حلِ مسئله و برداشت‌های خود را یادداشت می‌کند و آنها را برای دیگران می‌خواند. این مرحله به یادگیرندگان کمک می‌کند تا پاسخ‌های خود را توضیح داده و از آنها دفاع کنند، و همچنین به دیگران اجازه دهند کارِ آنها را بررسی کرده و در موردِ آن نظر بدهند. بالاخره اعضای هر گروه علاوه بر گزارش‌های فردی، نتایجِ حاصل را به صورتِ گروهی نیز به معلم تحویل می‌دهند.“ (**۲۵**- صص۱۸-۱۷)

آموزشِ ریاضی بر اساسِ مدلِ فوق، هم مستلزمِ مهارتِ فوق‌العاده‌ی معلمِ ریاضی در هدایتِ پنهانِ گروه‌های حلِ مسئله برای رسیدن به نتیجه‌ی مطلوب است و هم انتخاب و ارائه‌ی مسائلی که ظرفیتِ مناسبی برای اجرای این الگو را داشته باشند. با

توجه به این دو شرط است که روشِ کارِ گروهی در این مدل که از اهمیتی به سزا برخوردار است، به نتیجه‌ی مثبتی که از آن انتظار می‌رود خواهد انجامید.

روشِ چهار مرحله‌ای پولیا

این قسمت از فصلِ حاضر را به توضیحِ روشِ حلِ مسئله‌ی پولیا اختصاص داده و نخست، مختصری از شرحِ حالِ این ریاضی‌دان و معلمِ بزرگِ مجارستانی را به عنوانِ دیباچه‌ای برای فهمِ بهتر بخش‌های بعدی آورده‌ایم. این شرحِ حال، از مقاله‌ی زندگی‌نامه‌ی ژرژ پولیا به قلمِ استادِ گرانمایه جنابِ آقای دکتر علیرضا مدقالچی اخذ شده که آدرسی دقیقِ آن در بخشِ مآخذِ فارسی آمده است.

بیان، شرح و ارائه‌ی مثال‌هایی از روشِ پولیا بخش‌های دیگری هستند که در صفحاتِ آتی این قسمت به ترتیب خواهند آمد.

زندگی‌نامه‌ی پولیا

ژرژ پولیا در تاریخِ سیزدهمِ دسامبرِ ۱۸۸۷ در شهرِ بوداپستِ مجارستان به دنیا آمد. پدرِ وی حقوق‌دان و استادی بدونِ کرسیِ دانشگاه بوداپست بود که وقتِ خود را صرفِ تحقیق در اقتصاد و آمار می‌کرد. وقتی پولیا ده ساله بود پدرش فوت کرد و در ۱۹۰۵ به اصرارِ مادرش که مایل بود وی حرفه‌ی پدر را دنبال کند، در رشته‌ی حقوق و در همان دانشگاهِ بوداپست ثبتِ نام نمود، ولی به علتِ عدمِ علاقه فقط یک نیم‌سال در این رشته و سپس به مدتِ دو سال در رشته‌ی زبان و ادبیات تحصیل کرد.

او که دوستدارِ ادبیات بود به فلسفه نیز علاقه داشت. یکی از اساتیدِ فلسفه او را متقاعد کرد که مطالعه‌ی ریاضیات و فیزیک او را در درکِ مسائلِ فلسفی یاری می‌کند.

لذا مطالعه‌ی جدیِ ریاضیات را شروع کرد و به این ترتیب بود که پولیا به سوی ریاضیات کشیده شد تا بالاخره در سالِ ۱۹۱۲ دکترای خود را در ریاضیات اخذ نمود.

در سال‌های جنگِ جهانیِ اول به رغمِ الزامِ خدمتِ سربازی برای همه، تحتِ تأثیرِ نفوذِ برتراند راسل از بازگشت به مجارستان امتناع کرد و در سویس اقامت گزید تا این که در سالِ ۱۹۱۸ به عنوان شهروندِ سویس درآمد و در این سال ازدواج نمود. سال‌های اقامت در سویس برای پولیا به طورِ باور نکردنی بارآور بود. در این زمان هر سال در حدودِ دوازده مقاله چاپ نمود که شگفت‌آورتر از تعدادِ این مقالات، دامنه‌ی وسیع آنها بود.

در سالِ ۱۹۴۰ که اوضاع به سببِ جنگِ جهانیِ دوم به وخامت می‌گرایید عازمِ آمریکا شد. پولیا قبل از عزیمت به آمریکا پیش‌نویسِ کتابی در زمینه‌ی حلِ مسئله را نخست به زبانِ آلمانی و سپس به انگلیسی نوشت و آن را تحتِ عنوان ***چگونه مسئله را حل کنیم؟*** منتشر نمود. از سالِ انتشارِ رسمیِ این کتاب در ۱۹۴۵ تا زمانِ مرگِ وی در سالِ ۱۹۸۵ متجاوز از یک میلیون نسخه از آن به فروش رفته است.

پولیا در سالِ ۱۹۴۷ به عنوانِ عضوِ آکادمیِ علومِ پاریس برگزیده شد. وی در سالِ ۱۹۶۳ مدالِ خدماتِ برجسته را از انجمنِ ریاضیِ آمریکا دریافت کرد. در سالِ ۱۹۸۰ در دانشگاهِ برکلی به عنوانِ رئیسِ افتخاریِ چهارمین کنگره‌ی بین‌المللیِ آموزشِ ریاضی مفتخر گردید. از سالِ ۱۹۳۵ تا ۱۹۶۰ او استادِ راهنمای رساله‌ی دکترای بیش از سی دانشجو بود که اکثرِ آنها اکنون از ریاضی‌دانانِ نام‌آورِ جهان هستند.

در هفتمِ سپتامبرِ ۱۹۸۵ پولیا با کوله‌باری از افتخاراتِ ریاضی دارِ فانی را وداع گفت. شاید مهمترین افتخاراتِ او این باشد که موردِ تحسین و احترامِ بی‌حدِ همکاران،

دانشجویانِ سابق و دوستانِ بسیارِ خود بود. بر دیوارِ کتابخانه‌ی دانشگاهِ استنفورد فقط یک تمثال وجود دارد و آن متعلق به ژرژ پولیاست.

چهار مرحله‌ی حلِ مسئله

"هر بار که ریاضی‌دانی مسئله‌ای را حل می‌کند، این عمل به مسائلِ بسیارِ دیگری که جدید و به همان اندازه‌ی مسئله‌ی موردِ بحث جمیل‌اند، منجر می شود. البته غالبِ این مسائل مشکل‌اند و مانند هر نظامِ فکریِ دیگر، تنها می‌توانند توسطِ کسانی درک شوند که ریاضی را عمیقاً آموخته و با آن به خوبی آشنا باشند." (**۲۲**- پنج)

بنابراین می‌توان گفت حلِ مسئله قلبِ تپنده‌ی پیکرِ با شکوه ریاضیات است و تا زمانی که این قلب ضربان داشته باشد، کالبدِ ریاضیات زنده و زایا خواهد ماند. خورشیدِ ریاضیات وقتی فرو خواهد مرد که دیگر مسئله‌ای برای حل وجود نداشته باشد. به همین دلیل است که بسیاری از ریاضی‌دانان و دست اندرکارانِ آموزشِ ریاضی، سعی در تجزیه و تحلیلِ فرآیندِ حلِ مسئله داشته‌اند. در این میان، کارِ کلاسیکِ پولیا که در ۱۹۴۵ تحتِ عنوان **چگونه مسئله را حل کنیم؟** انتشار یافت ارزش و اعتبارِ خاصی دارد که هنوز با گذشتِ حدودِ هفتاد سال، مبنای بسیاری نظریه‌پردازی‌های امروزی در زمینه‌ی حلِ مسئله است. به همین دلیل در این بخش به توضیحِ مختصرِ فرآیندِ چهار مرحله‌ای پولیا در حلِ مسئله می‌پردازیم. این چهار مرحله عبارتند از:

"۱. فهمِ مسئله:

پاسخ دادنِ به یک پرسش که هنوز فهمیده نشده باشد کاری ابلهانه است. دانش‌آموز باید مسئله را درست بفهمد، ولی تنها و منحصراً فهمیدنِ مسئله کافی

نیست بلکه وی باید میلِ پیدا کردنِ جواب را نیز داشته باشد. اگر در فهمِ مسئله یا در تمایلِ دانش‌آموز به حلِ مسئله نقصی وجود داشته باشد، این نقص غالباً برخاسته از خطای او نیست. مسئله باید خوب انتخاب شود و گاه باید مجسم ساختن و نمایش دادنِ آن به صورتی طبیعی و دلپسند میسر باشد. قبل از هر چیز بیانِ لفظیِ مسئله باید فهمیده شود. معلم می‌تواند تا حدی این نتیجه را موردِ آزمایش قرار دهد. او از شاگرد می‌خواهد که صورتِ مسئله را بیان کند و شاگرد باید بتواند به صورتی روان به بیان کردنِ صورت مسئله بپردازد. همچنین لازم است که شاگرد بتواند بخش‌های اصلیِ مسئله را که عبارتند از: مجهول، داده‌ها و شرط بیان کند. بنابراین معلم هرگز نباید این پرسش‌ها را فراموش کند: مجهول چیست؟، داده ها کدامند؟ و شرط چیست؟ دانش‌آموز باید اجزای اصلیِ مسئله را به دقت و مکرر بررسی کرده و از جهاتِ گوناگون موردِ ملاحظه قرار دهد. اگر شکلی به مسئله وابسته است باید آن شکل را رسم کند. اگر دادنِ نام‌هایی به اشیاء ضرورت دارد باید علامت‌های مناسب را به کار بَرَد. به طورِ خلاصه می‌توان گفت فهمِ مسئله شاملِ دو مرحله است:

الف) آشنا شدن

ب) کار کردن برای فهمِ بهتر.

۲. طرحِ نقشه:

هنگامی دارای یک نقشه و برنامه برای حلِ مسئله هستیم که لااقل به صورتِ کلی بدانیم برای به دست آوردنِ مجهول لازم است به چه محاسباتی بپردازیم و چه شکل‌هایی را ترسیم کنیم. راهِ میانِ فهمِ مسئله و طرحِ نقشه ممکن است دراز و پُرزحمت باشد. در حقیقت کارِ عمده برای حلِ یک مسئله دست یافتن به اندیشه‌ای

دربارهی نقشه و برنامهای برای حلِ مسئله است. این اندیشه ممکن است به صورتِ برقی که میجهد، همچون یک اندیشهی روشن به ذهنِ حلکنندهی مسئله برسد. بهترین کاری که معلم در این خصوص برای دانشآموزِ خود میتواند بکند این است که به صورتِ غیر مستقیم سببِ آن شود که چنین اندیشهای در ذهنِ دانشآموز ایجاد گردد. برای داشتنِ اندیشهای نیکو باید چیزی را به یاد بیاوریم که ارتباطی با موضوعِ موردِ بحث داشته باشد. بنابراین مصلحت آن است که کار با این پرسش آغاز شود که آیا از مسئلهی مشابهی که قبلاً حل کرده باشید خبر دارید؟ اگر در کارِ به یاد آوردنِ یک مسئله که ارتباطِ نزدیکی با مسئلهی حاضر دارد توفیق حاصل کنیم، بخت یار ما خواهد بود. در این صورت نقشهای خام و اولیه برای حلِ این مسئله فراروی ما خواهد بود.

۳. اجرای نقشه:

طرحِ نقشه و تصورِ اندیشهی حلِ آن آسان نیست، برای آن که به نتیجه برسد فرصت لازم دارد. شناختِ به دست آمدهی قبلی و عادتهای خوبِ ذهنی، متمرکز کردنِ فکر بر روی هدف و از همهی اینها گذشته، یاری کردنِ بخت در کار است. اجرای نقشه آسانتر است. آنچه به آن نیاز داریم به طور عمده حوصله و شکیبایی است. نقشه طرحی کلی به دست میدهد و باید خود را متقاعد سازیم که جزئیات با طرحِ کلی سازگار است. بنابراین باید جزئیات را یکی پس از دیگری با حوصله موردِ آزمایش قرار دهیم تا این که هر چیز به صورتِ کامل روشن شود و هیچ گوشهی تاریکی که ممکن است خطایی در آن پنهان شده باشد باقی نماند. اگر دانشآموز واقعاً نقشهای را برای حلِ مسئله طرح کرده باشد، از آن پس کارِ معلم آسانتر خواهد شد.

معلم در مرحله‌ی اجرای نقشه باید در این باره تأکید داشته باشد که دانش‌آموز هر گام را که برداشته است امتحان کند و از درستیِ آن مطمئن شود.

۴. به عقب نگریستن:

حتی دانش‌آموزانِ بسیار خوب در آن هنگام که جوابِ مسئله را یافته و رشته‌ی برهان را به وضوح نوشته باشند، کتاب‌های خود را می‌بندند و منتظرِ مسئله‌ی بعدی می‌مانند. اما با این کار یک مرحله‌ی مهم و آموزنده را فراموش کرده‌اند و آن غافل شدن از نگریستنِ به تمامِ حلِ مسئله از راه دوباره‌سازی و دوباره آزمودنِ نتیجه و راهی است که به آن انجامیده است. با این کار و در این مرحله می‌توانند شناختِ خود را نیرومند سازند و ملکه‌ی حلِ مسئله را در خود تقویت نمایند." (۱۰- صص۱۶- ۷)

یک نمونه از کاربرد روش پولیا

برای آن که به درکِ بهتری از روشِ چهار مرحله‌ای پولیا نائل شویم، با مثالِ زیر پیش رفتن در این مراحل را گام به گام توضیح می‌دهیم.

مثال: نشان دهید اگر عددی پنج برابرِ حاصلضربِ ارقامش باشد، بر هفت بخش‌پذیر خواهد بود.

۱. فهمِ مسئله:

می‌توان از خلالِ پرسش‌ها، پاسخ‌ها و راهنمایی‌های زیر به فهمِ روشنی از مسئله رسید.

معلم : مجهول چیست؟

دانش آموز: عددی که پنج برابرِ حاصل‌ضربِ ارقامِ خود است.

معلم : بهتر است از نو مسئله را بخوانی.

دانش آموز: آهان، مسئله پیدا کردنِ چنین عددی نیست، مسئله این است که اگر چنین عددی وجود داشته باشد باید بر هفت بخش‌پذیر باشد.

معلم : بسیار خوب، داده‌های مسئله کدامند؟

دانش آموز: این که اگر حاصل‌ضربِ ارقام را پنج برابر کنیم خودِ عدد به دست می‌آید.

معلم : آیا برای چنین عددی مثالی در ذهن داری؟

دانش آموز: خیر اما می‌توانم آن را x بنامم یا حتی بهتر، چون با ارقامِ آن سر و کار داریم آن را $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ می‌نامم، ولی به این ترتیب تعدادِ زیادی مجهول در میان می‌آید.

معلم : آیا لازم است این مجهول‌ها را بیابیم، توجه کن که ما خودِ عدد را نمی‌خواهیم بلکه می‌خواهیم بدانیم اگر چنین عددی در میان باشد آیا بر هفت بخش‌پذیر خواهد بود؟

دانش آموز: درست است، فراموش کرده بودم چه می‌خواهیم.

معلم: آیا شرطی در مسئله بیان شده است؟

دانش‌آموز: بلی، این که این عدد پنج برابرِ حاصل‌ضربِ ارقامش است.

معلم: آیا می‌توانی این شرط را با توجه به علامتی که برای عدد انتخاب کرده‌ای به طورِ خلاصه بیان کنی؟

دانش‌آموز: می‌نویسیم

$$a_n a_{n-1}. \ . \ . a_1 a_0 = 5 \times a_n \times a_n \times . \ . \ . \times a_1 \times a_0$$

۲. طرحِ نقشه:

یک نقشه‌ی احتمالی که ممکن است به ذهنِ دانش‌آموز برسد تقلیلِ مسئله به حالت‌های ساده‌تر مثلِ اعدادِ دو رقمی یا سه رقمی است. نقشه‌ی دیگر تحلیلِ تساویِ فوق بر مبنای آشنایی با قواعدِ بخش‌پذیری است که در این مورد باید از پیش قواعدِ بخش‌پذیری بر برخی اعداد از جمله ۵ را بداند. با انتخابِ هر یک از این شگردها یا به اصطلاحِ پولیا نقشه‌ها، دانش‌آموز پای در راهی می‌گذارد که ممکن است بن‌بست باشد. به این معنا که به جای آن که وی را به حلِ مسئله نزدیک‌تر کند از آن دور نماید. به عنوانِ مثال اگر چنین عددی را دو رقمی در نظر بگیرد یعنی اگر

$$a_1 a_0 = 5 \times a_1 \times a_0$$

در این صورت بدیهی است که رقمِ یکانِ این عدد باید صفر یا پنج باشد. دانش‌آموزِ زیرک بلافاصله می‌فهمد که صفر بودنِ یکان سبب می‌شود یکی از عواملِ ضرب در طرفِ راستِ تساویِ فوق صفر و در نتیجه حاصل‌ضرب هم صفر و علی‌هذا سمت چپ یعنی همان عددِ موردِ نظر باید صفر باشد که نتیجه‌ی بی‌مایه‌ای است. پس نتیجه می‌شود $a_0 = 5$ که با بازنویسی تساوی برحسبِ نتیجه‌ی اخیر به تساویِ زیر می‌رسیم؛

$$a_1 5 = 5 \times a_1 \times 5$$

دانش‌آموز باید مفهومِ ارزشِ مکانی و تبدیل شکلِ ارقامیِ عدد به حاصلِ طبیعیِ آن را نیز بداند که در این صورت خواهد نوشت

$$10 \times a_1 + 5 = 5 \times a_1 \times 5$$

$$2 \times a_1 + 1 = 5 \times a_1$$

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

که آشکارا نتیجه‌ی نادرستی است. لذا اساساً هیچ عددِ دو رقمی با این ویژگی وجود ندارد که بخواهد بر هفت بخش‌پذیر باشد.

۳. اجرای نقشه:

اگر دانش آموز مراحلِ قبل را خود یا به یاریِ معلم پیموده باشد به این مرحله که مرحله‌ی اجرای نقشه است و در واقع جرقه‌ی شروعِ آن در مرحله‌ی قبل زده شده است، خواهد رسید. با بحثی نظیرِ آنچه آمد البته به مراتب با توضیحات و جزئیاتِ بیشتر که تفصیلِ آن از حوصله‌ی این نوشته خارج است به این نتیجه خواهد رسید که رقمِ دهگان باید دو یا هفت باشد و سپس با کنار نهادنِ حالتِ دو بودنِ این رقم، نتیجه می‌گیرد رقمِ دهگان هفت است و بنابراین یکی از عواملِ ضرب در طرفِ راست باید هفت باشد که به وضوح نتیجه می‌دهد عددِ مزبور دارای شمارنده‌ی هفت است.

۴. به عقب نگریستن:

در واقع مسئله تا پیش از این مرحله حل شده است، اما اکنون دانش‌آموز می‌تواند با طرحِ سؤالاتی نظیرِ سؤالات زیر، به درکِ بهتری از مسئله و لاجرم حلِ آن برسد.

الف) آیا در اساس می‌توان وجودِ چنین عددی را تحتِ شرایطی دیگر اثبات نمود؟

ب) آیا دست‌کم می‌توان مثالی از این گونه اعداد ارائه کرد؟ توجه کنید که یافتنِ ولو یک مثال به منزله‌ی اثباتِ وجودِ چنین اعدادی هم هست، گو این که در ریاضیات اثبات‌هایی وجودی یافت می‌شود که ساختنی نیستند. یعنی بدونِ آن که نحوه‌ی به دست آوردن این اعداد ارائه شود یا حتی مثالی از آنها به دست آید، وجودِ آنها محقق می‌گردد. مثالی بارز در این خصوص قضیه‌ی اساسیِ جبر است که وجودِ دقیقاً n ریشه‌ی مختلط یا حقیقی را برای هر معادله‌ی چندجمله‌ای برحسبِ یک متغیر از همین درجه اثبات می‌کند بدونِ آن که روشِ به دست آوردنِ این ریشه‌ها را مشخص کند.

بد نیست برای خاتمه‌ی این قسمت و در نتیجه بخش و فصلِ حاضر با آن، خواننده‌ی علاقه‌مند عدد ۱۷۵ را در نظر بگیرد و شرطِ مسئله را در موردِ آن تحقیق نماید.

پیوست‌ها

پیوستِ یک. عناوینِ توصیفیِ هوش‌بهر

هوش‌بهر که در زبان انگلیسی به IQ[1] شهرت دارد، شاخصی برای سنجشِ هوش است. این شاخص برای نخستین بار توسطِ ویلیام اِشترن[2] (۱۸۷۱-۱۹۳۸) روان‌شناسِ آلمانی، به صورتِ زیر پیشنهاد شد:

$$\text{هوش‌بهر} = \frac{\text{سنِ ذهنی}}{\text{سنِ تقویمی}} \times ۱۰۰$$

سنِ ذهنی را معمولاً با آزمون‌های استانداردی که در این زمینه طراحی و اجرا شده است می‌سنجند. نمونه‌ی متداولِ این آزمون‌ها، آزمونِ بینه است که در دانشگاهِ استنفورد در سالِ ۱۹۱۶ تهیه شده و پس از آن بارها موردِ تجدیدِ نظر قرار گرفته است و به همین جهت به آزمونِ استنفورد- بینه[3] مشهور می‌باشد.

در جدولِ صفحه‌ی بعد عناوینِ توصیفی که با این آزمون پیوند یافته و عموماً به کار می‌رود، نشان داده شده است.

1. Intelligence Quotient
2. William Stern
3. Stanford-Binet

عنوانِ توصیفی	هوش‌بهر
بسیار برجسته	بیشتر از ۱۳۹
برجسته	۱۳۹ – ۱۲۰
بالاتر از حدِ متوسط	۱۱۹ – ۱۱۰
متوسط	۱۰۹ – ۹۰
پایین‌تر از حدِ متوسط	۸۹ – ۸۰
مرزی	۷۹ – ۷۰
عقب‌مانده‌ی ذهنی	کمتر از ۷۰

پیوستِ دو. جدولِ توانایی‌های ذهنی

عامل‌های اختصاصیِ هوش (عواملِ S)، که در قالبِ توانایی‌های ادراکِ کلامی، سیالی واژگان و... دسته‌بندی می‌شوند، در جدولِ زیر تعریف شده اند.

توانایی	تعریف
ادراکِ کلامی	توانایی درکِ معنیِ واژه‌ها.
سیالیِ واژگان	توانایی به خاطر آوردنِ سریعِ واژه‌ها که نمونه‌ی آن در واژه-سازی با حروف و پیدا کردنِ واژه‌های هم‌قافیه دیده می‌شود.
استعدادِ عددی	توانایی کار کردن با اعداد و اجرای محاسباتِ عددی.
استعدادِ فضایی	توانایی تجسمِ روابطِ فضایی–شکلی، مانندِ تشخیصِ یک شکل وقتی که سمت‌گیریِ آن تغییر کرده باشد.
حافظه	توانایی به خاطر سپردنِ محرک‌های کلامی، مانندِ واژه‌های جفتی یا جمله‌ها.
سرعتِ ادراک	توانایی ادراکِ سریعِ جزئیاتِ دیداری و یافتنِ شباهت‌ها و تفاوت‌ها در تصاویرِ اشیاء.
استدلال	توانایی یافتنِ قواعدِ کلی بر اساسِ مواردِ ارائه شده، مانندِ تشخیصِ قاعده‌ی حاکم بر یک سلسله اعداد پس از دیدنِ فقط بخشی از آن سلسله.

پیوستِ سه. پلیمپتنِ ۳۲۲

"شاید مهم‌ترین لوح از مجموعِ حدودِ نیم میلیون لوحِ بابلی که در حفاری‌های بین‌النهرین به دست آمده و تا کنون تجزیه و تحلیل شده، لوحی باشد که به پلیمپتن ۳۲۲ معروف است. قدمتِ این لوح که به شماره‌ی کاتالوگِ ۳۲۲ در مجموعه‌ی جِی. اِی. پلیمپتن[1] در دانشگاهِ کلمبیا ثبت گردیده، به ۱۶۰۰ تا ۱۹۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد. لوحِ پلیمپتن شاملِ چهار ستون از اعداد است که ستونِ اول معرفِ شماره‌ی ردیف و دو ستونِ بعدی به ترتیب ساق و وترِ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را تشکیل می‌دهد که اضلاعِ آن اعدادی درست هستند. علاوه بر این، نوعِ انتخابِ مثلث‌های قائم‌الزاویه به گونه‌ای است که طولِ ساق و وترِ این مثلث‌ها، در مبنای شصتگانی تشکیلِ اعدادی منظم می‌دهند که در تقسیم، اعدادِ ممیزدار تولید نمی‌کنند و بنابراین محاسبه با آنها بسیار ساده است. رمزِ این که ضرورتِ تقسیم در این لوح بر چه اساسی استوار بوده در ستونِ چهارم نهفته است. این ستون مجذورِ سکانتِ زاویه‌ی مقابل به ساقِ مثلث‌های انتخابی است." (۵ – صص۴۵-۴۳)

به این ترتیب، می‌توان حدس زد بابلی‌ها با محاسباتِ عددیِ پیشرفته در دستگاهی شصتگانی، قضیه‌ی فیثاغورس، سه‌تایی‌های اولیه‌ی فیثاغورسی، فرمول‌هایی برای تولیدِ این سه‌تایی‌ها و مفهومِ سکانتِ یک زاویه آشنا بوده‌اند. نکته‌ی شگفت‌آورتر این که مقادیرِ سکانتِ واقع در ستونِ چهارمِ لوحِ پلیمپتن، مبتنی بر تغییرِ مقداری از هر سطر به سطرِ دیگر به اندازه‌ی یک‌شصتم است که در این صورت، زاویه‌ی متناظر از ۴۵ درجه به ۳۱ درجه، کاهش می‌یابد.

1. G. A. Plimpton

مآخذ و مستندات

مآخذِ فارسی

۱ ابوترابیان، محمد رضا؛ **پرورش نسل خلاق در ایران** (جلدِ اول: **آسیب شناسی**)؛ انتشاراتِ مدرسه، چاپِ اول (هفده + ۴۵۲ ص)، تهران ۱۳۸۲

۲ ابوترابیان، محمدرضا؛ **پرورش نسل خلاق در ایران** (جلد دوم: **راهبرد**)؛ انتشاراتِ مدرسه، چاپِ اول (۵۸۰ ص)، تهران ۱۳۸۲

۳ اتکینسون، ر.ل. و اتکینسون، ر.س.؛ **زمینه روان‌شناسی** (جلدِ دوم، ویرایشِ هشتم: ۱۹۸۳)، ترجمه‌ی: دکتر محمد نقی براهنی و دیگران؛ انتشاراتِ رشد، چاپِ هفتم (۶۶۹ ص)، تهران ۱۳۷۵

۴ انجمن ریاضی ایران (ویراستاران: دکتر مهدی بهزاد و دیگران)؛ **واژه نامه ریاضی و آمار**؛ مرکزِ نشرِ دانشگاهی، چاپِ چهارم (چهارده + ۱۱۲ + ۲۳۰ ص)، تهران ۱۳۸۴

۵ ایوز؛ ه. و.؛ **آشنایی با تاریخ ریاضیات** (جلدِ اول، ویرایش دوم: ۱۹۸۳)، ترجمه‌ی: دکتر محمدقاسم وحیدی اصل؛ مرکزِ نشرِ دانشگاهی، چاپِ سوم (یازده + ۳۳۸ ص)، تهران ۱۳۷۳

۶ بابلیان، اسماعیل و دیگران؛ **ریاضی سوم دبستان**؛ اداره‌ی چاپ و توزیعِ کتاب‌های درسی، (۱۹۲ ص)، تهران ۱۳۸۳

۷ باسلر، سی. و کولب، جی.؛ **آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی**، ترجمه‌ی: جواد همدانی‌زاده؛ مرکزِ نشرِ دانشگاهی، چاپِ اول (۳۳۸ص)، تهران ۱۳۶۸

۸ بیژن‌زاده، محمدحسن؛ **زیبایی در ریاضیات**، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل۱۷؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص۹-۶، تهران ۱۳۶۷

۹ پولیا، ژرژ؛ **اهداف آموزش ریاضی**، ترجمه‌ی: علیرضا طالب‌زاده و زهرا گویا، مجله‌ی رشدِ آموزشِ ریاضی، شماره‌ی مسلسل ۷۲؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۴۱-۳۵، تهران ۱۳۸۲

۱۰ پولیا، ژرژ؛ **چگونه مسئله را حل کنیم؟**، ترجمه‌ی: احمد آرام؛ سازمانِ انتشاراتِ کیهان، چاپِ دوم (بیست و نه + ۲۳۰ ص)، تهران ۱۳۶۹

۱۱ تابش، یحیی و دیگران؛ **آموزش هنر حل مسئله** (ریاضیات تکمیلی)؛ شرکتِ چاپ و نشرِ کتاب‌های درسی (۳۴۶ ص)، تهران ۱۳۸۰

۱۲ چمن آرا، سپیده؛ **تأثیرات رفتار گرایی بر آموزش ریاضی و نظرات منتقدان آن**، مجله‌ی رشدِ آموزشِ ریاضی، شماره‌ی مسلسل۷۱؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۲۱- ۱۱، تهران ۱۳۸۲

۱۳ حسینی، افضل السادات؛ **ماهیت خلاقیت و شیوه های پرورش آن؛** انتشارات آستان قدس رضوی، چاپِ اول (۱۵۵ ص)، مشهد ۱۳۷۸

۱۴ رجالی، علی؛ **چهارده توصیه به دبیران ریاضی**، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل ۴۲؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۴۸-۴۴، تهران ۱۳۷۴

۱۵ شریف، ملک‌منصور؛ **مفهوم مدل‌های زیستی در ریاضی**، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل۱۲؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۱۲-۸، تهران ۱۳۶۵

۱۶ شمیسا، علی و علی‌پور، بیژن؛ **پرورش خلاقیت**؛ نشرِ دکلمه‌گران، چاپِ اول (۲۲۵ ص)، تهران ۱۳۷۶

۱۷ شهریاری، پرویز؛ **شما هم می توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**؛ انتشاراتِ مدرسه، چاپِ اول (۳۴۲ ص)، تهران ۱۳۷۸

۱۸ فرزان، مسعود و دیگران؛ **روش تدریس ریاضی دوره راهنمایی تحصیلی**؛ شرکت چاپ و نشرِ کتاب‌های درسی ایران، (۳۳۲ص)، تهران۱۳۸۰

۱۹ کیل پاتریک، جیمز؛ **سیر تاریخی آموزش ریاضی**، ترجمه‌ی: فردین باتمانی و زهرا گویا، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل ۷۱؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۱۰-۵، تهران ۱۳۸۲

۲۰ گرینبرگ، اِم. جی.؛ **هندسه های اقلیدسی و نا اقلیدسی**، ترجمه‌ی: دکتر محمدهادی شفیعیها؛ مرکزِ نشرِ دانشگاهی، چاپِ اول، تهران ۱۳۶۲

۲۱ گولووینا، آی. اِم. و یاگلوم، اِل. آی.؛ **استقرا در هندسه**، ترجمه‌ی: سعید ذاکری (عنوانِ ترجمه: مروری کوتاه بر تاریخچه‌ی مسئله‌ی ۴ رنگ)، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل ۱۲؛ انتشارات دفترِ تحقیقات و برنامه-ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۶۵-۶۳، تهران ۱۳۶۵

۲۲ لانگ، سرژ؛ **هنر ریاضی ورزیدن (سه گفتگوی عام)**، ترجمه‌ی: غلامرضا یاسی‌پور؛ نشرِ علومِ پایه، چاپ اول (ده + ۱۶۵ ص)، تهران ۱۳۷۱

۲۳ مدقالچی، علیرضا؛ **ریاضیات چیست؟**، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره-ی مسلسل ۸؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص: ۱۹-۱۴، تهران ۱۳۶۴

۲۴ مدقالچی، علیرضا؛ **زندگی‌نامه جورج پولیا**، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل ۱۷؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص۱۳-۱۰، تهران ۱۳۶۷

۲۵ مرتاض مهربانی، نرگس؛ **معرفی مدل K-W-D-L برای سازمان‌دهی حل مسئله در کلاس درس ریاضی**، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل ۷۴؛ انتشاراتِ دفترِ برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۲۲-۱۵، تهران ۱۳۸۳

۲۶ نجفی، محمد علی؛ **نقش ریاضیات در سایر علوم** (بخش اول)، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل ۱۵؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۹-۴ و ص ۳۳، تهران ۱۳۶۶

۲۷ نجفی، محمد علی؛ **نقش ریاضیات در سایر علوم** (بخش دوم)، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل۱۶؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۱۴-۸، تهران ۱۳۶۶

۲۸ ویتنی، ک. ا.؛ **آمار، خورشید و ستارگان**، ترجمه‌ی: دکتر علی عمیدی، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی مسلسل ۸؛ انتشاراتِ دفترِ تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیفِ کتاب‌های درسی، صص ۴۳-۴۰، تهران ۱۳۶۴

مآخذِ انگلیسی

1 Polya, George; **Ten Commandments for Teachers**, *Journal of Education of the Faculty and College of Education of the University of British Columbia*; pp: 61-69, March 1959

2 Roberts, Anne; **A Partnership in Mathematics Education**, *Notices of AMS*; pp: 547-553, American Math. Society Publications, May 1995

3 Schoenfeld, Alan H.; **Purposes and Methods of Research in Mathematics Education**, *Notices of AMS*; pp: 641-649, American Math. Society Publications, June/July 2000

4 Summers, Della & Others; **Longman Dictionary of Contemporary English**; Longman Publications, Third Edition (Twenty + 1668 p.), Essex (England) 1995