پژوهش هایی در ریاضیات

احمد شرف الدین

پژوهش‌هائی در ریاضیّات

از

احمد شرف‌الدّین

برای مطالعهٔ دانشجویان

پژوهشهائی در ریاضیات

از

احمد شرف‌الدین

پژوهشهائی در ریاضیات

شرف‌الدین، احمد

چاپ اول ۱۳۵۴

تعداد چاپ ۱۵۰۰ نسخه

چاپ: چاپخانهٔ تصویر

شمارهٔ ثبت کتابخانهٔ ملی ۶۷۸-۳۰ر۵ر۱۳۵۴

فهرست

موضوع	صفحه
۱۴. تعمیم قضیه ماکلورن.	۵۵
۱۵. تعمیم قضیه مماس بربیضی.	۵۸
۱۶. تعمیم قضیه‌مماس برهذلولی.	۶۲
۱۷. تعمیم قضیه مماس برسهمی.	۶۶
۱۸. تعمیم یکی‌از قضیه‌های هذلولی.	۶۹
۱۹. یکی ازخواص‌مماسی سطحهای درجه دوم.	۷۵
۲۰: چند خاصیت مماسی ازسطح درجه‌سوم $xyz=k$.	۷۶
۲۱. چند مسئله.	۸۰

پیشگفتار

دراین رساله آثار زیر را ارائه داده‌ام:

۱. اثبات تازه‌ای از دستور دو جمله‌ای نیوتون.

۲. اثبات تازه‌ای از یکی از قضایای هندسی نیوتون.

۳. محاسبه انتگرال تابع معکوس یك تابع.

۴، اثبات واگرائی انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

۵. اثبات‌های تازه‌ای از قضیه فیثاغورس.

۶. اثبات تازه‌ای از قضیه پاسکال.

۷. روشی برای‌تعیین مقاومت داخلی مولد الکتریکی. بحثی در باره مشابهت مقاومت داخلی مولدالکتریکی و ثابت زمان مدار (RوL).

۸. تعمیم‌های قضیه‌های استودم ولایب نیتس و پاپوس.

۹. نتیجه گیری یك اتحاد مثلثاتی از تعمیم قضیه استورم.

۱۰. اثبات تازه‌ای از دستور اندازه سطح مثلث.

۱۱. طرح افزار برای رسم منحنی سیسوئید (سیسوئید نگار).

۱۲. یك رابطه توافقی و کاربرد آن.

۱۳. تعبیر هندسی رابطهٔ:

$$(\sum_{1}^{n} i)^3 - \sum_{1}^{n} i^3 = 3 \sum_{k=1}^{k=n} \left[k(\sum_{1}^{k} i)^2 - k^2 \sum_{1}^{k} i \right]$$

۱۴. تعمیم قضیه ماکلورن.

۱۵. تعمیم قضیه مماس بر بیضی درسطح بیضیوار دوار.

۱۶. تعمیم قضیه مماس برهذلولی در سطح هذلولیوار دوار دو پارچه.

۱۷. تعمیم قضیه مماس بر سهمی در سطح سهمیوار دوار.

۱۸. تعمیم یکی از قضیه‌های هذلولی در سطح هذلولیوار دوار دو پارچه.

۱۹. یکی لز خواص مماسی سطحهای درجه دوم.

۲۰. چند خاصیت مماسی از سطح درجه سوم $xyz=k$.

۲۱. چند مسئله.

احمد شرف‌الدین

۱. دستور دو جمله‌ای نیوتون

دستور دو جمله‌ای نیوتون چنین است:

$$(a+b)^n=a^n+C^1_n\cdot a^{n-1}\cdot b+C^2_n\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\cdots+ \tag{1}$$
$$+C_n^p\cdot a^{n-p}\cdot b^p+\cdots+b^n$$

و یا بطور مختصر:

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p\cdot a^{n-p}\cdot b^p$$

اثبات رابطهٔ مسلم زیررا در نظر می‌گیریم:

$$(a+b)=a+b$$

در رابطهٔ بالا a را متغیر و b را ثابت فرض می‌کنیم. از دوطرف رابطهٔ مذکورتابع اولیه می‌گیریم، حاصل می‌شود:

$$\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{a^2}{2}+ab+c$$

در رابطهٔ اخیر، c مقداری است ثابت. این رابطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+2c$$

برای تعیین c، در دو طرف رابطه بالا مقدار a را مساوی صفر اختیار می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$b^2=2c$$

و لذا:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

دستور بالا، دستور مربع دو جمله‌ای است. حال اگر از دو طرف رابطه بالا تابع اولیه بگیریم و مقدار ثابت انتگرالگیری را به‌همان شیوه مذکور حساب‌کنیم حاصل‌می‌شود:

$$(a+b)^2=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

و به همین نحو می‌توان به پیش رفت.

برای اثبات‌درستی رابطهٔ (۱)، روش‌استقراء ریاضی را به‌کار می‌بریم یعنی‌می‌پذیریم که رابطهٔ:

$$(۲)\qquad (a+b)^{k}=\sum_{p=0}^{k} C_{k}^{p}\cdot a^{k-p}\cdot b^{p}$$

محقق است و درستی رابطهٔ:

$$(۳)\qquad (a+b)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^{p}\cdot a^{k+1-p}\cdot b^{p}$$

را ثابت می‌کنیم.

تابعهای اولیه دو طرف رابطهٔ (۲) را حساب می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{(a+b)^{k+1}}{k+1}=\left(\sum_{p=0}^{k} C_{k}^{p}\cdot\frac{1}{k+1-p}\cdot a^{k+1-p}\cdot b^{p}\right)+\alpha$$

α مقداری است ثابت. رابطه بالا را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$(۴)\quad (a+b)^{k+1}=\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{k+1}{k+1-p}C_{k}^{p}\cdot a^{k+1-p}\cdot b^{p}\right)+\beta$$

β مقداری اسث ثابت.

اکنون ثابت می‌کنیم که دررابطهٔبالا،ضریب $\frac{k+1}{k+1-p}C_{k}^{p}$ مساوی C_{k+1}^{p} است.

از رابطهٔ مسلم:

$$C_{k}^{p}=\frac{k!}{p!(k-p)!}$$

نتیجه می‌شود:

$$C_{k+1}^{p}=\frac{(k+1)!}{p!(k+1-p)!}=\frac{k!(k+1)}{p!(k-p)!(k+1-p)}=$$

$$\frac{k+1}{k+1-p}\cdot\frac{k!}{p!(k-p)!}=\frac{k+1}{k+1-p}C_k^p$$

یعنی:

$$C_{k+1}^p=\frac{k+1}{k+1-p}C_k^p$$

با رعایت رابطهٔ بالا، رابطه (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$(۵)\quad (a+b)^{k+1}=\left(\sum_{p=0}^{k}C^{p}\cdot a^{k+1-p}\cdot b^{p}\right)+\beta$$

اگر در دو طرف رابطه بالا، **a** را مساوی صفر اختیارکنیم حاصل می‌شود:

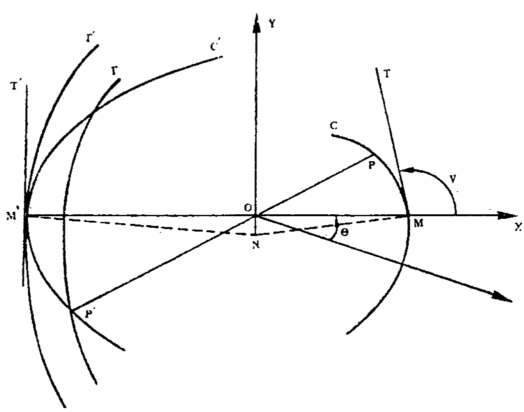
$$b^{k+1}=\beta$$

رابطهٔ (۵) با رعایت تساوی‌اخیر به صورت زیر در می‌آید:

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{p=0}^{k+1}C_{k+1}^{p}\cdot a^{k+1-p}\cdot b^{p}$$

۲. قضیه نیوین

قضیه. در صفحه P دو منحنی C و C' ونقطه O مفروض‌اند. اگر MM' خطی باشد که ازنقطه O بگذرد وپاره خط MM' از آن‌که محصور بین دو منحنی مذکور است دارای ماکسیموم (یا مینیموم) باشد، عمودهائی‌که از نقطه‌های M و M' و O به ترتیب بر منحنیهای C و C' وخط MM' رسم می‌شوند ازیك نقطه N می‌گذرند.



شکل۱

اثبات

ابتدا مسئله زیررا طرح وحل می‌کنیم.

از نقطه O خطی رسم کنید که منحنیهای C و C' را به ترتیب در نقطه‌های P و P' قطع کند بطوری که طول پاره‌خط PP' مساوی مقدارمعلوم l باشد.

برای حل، منحنی کونکوئید مربوط به‌منحنی C را نسبت به‌قطب O وبامدول l می‌سازیم منحنی Γ حاصل می‌شود.

محل تلاقی منحنی Γ بامنحنی C' نقطه‌مطلوب P' است. حال اگربخواهیم طول PP' دارای ماکسیموم یا مینیموم باشد لازم است که منحنی Γ بر منحنی C' مماس باشد. اگر منحنی Γ' یك منحنی از طایفه منحنیهای کونکوئید منحنی C باشد که در نقطه M' برمنحنی C' مماس باشد خط OM' خط مطلوب خواهدبود. توضیح می‌دهیم که جهت انحنای دومنحنی C و C' درماکسیموم یامینیموم بودن پاره‌خط MM' دخالت دارد مثلا اگربرآمدگی‌های دومنحنی C و C' در دونقطه M و M' به‌طرف نقطه O باشندطول MM' مینیموم‌است.

اکنون برای اثبات صحت شرط مشروح در قضیه نیوتون ، در دستگاه مختصات قطبی کار می‌کنیم.

درشکل(۱)، نقطه O قطب‌ومحور Ox محورقطبی انتخاب شده‌است. (درشکل ۱ محور قطبی Ox درزیر خط OM قراردارد) معادله منحنی C را در دستگاه مختصات مذکور، $\rho=f(\theta)$ فرض می‌کنیم.

اگر V زاویه شعاع حاصل OM بامماس MT باشد که درنقطه M برمنحنی C رسم شده‌است، رابطه زیرمسلم است (رجوع کنید به‌یك کتاب هندسی‌تحلیلی)

$$tg\,V=\frac{\rho}{\rho'}$$

دستگاه مختصات متعامد XOY را که محور OX آن منطبق برشعاع حامل OM است در نظرمی‌گیریم ونقطه N را محل‌تلاقی خط‌قائم برمنحنی C درنقطه M بامحور OY فرض می‌کنیم. معادله این‌خط قائم، دردستگاه مختصات XOY چنین است:

$$Y=\frac{-\rho'}{\rho}(X-\rho)$$

ازمعادله فوق اندازه جبری $\overline{ON}$ به‌آسانی حساب می‌شود:

$$\overline{ON}=\rho'=f'(\theta) \qquad (۱)$$

حال اگرطول $MM'=k$ فرض‌شود بدیهی‌است که معادله قطبی‌منحنی Γ' چنین‌می‌شود:

$$\rho=f(\theta)+k$$

اگرازنقطه M' قائمی برمنحنی Γ' رسم کنیم ومحل تلاقی آن را بامحور OY نقطه N' بنامیم طبق رابطه (۱) چنین داریم:

$$\overline{ON} = \left[f(\theta) + k \right]' = f'(\theta)$$

زیرا k مقداری است ثابت ولذا مشتق آن صفراست. نتیجه می‌شود که نقطه N' برنقطه N منطبق است. بنابراین عمودهائی که درنقاط M و M' و O بر منحنیهای C و C' وخط MM' رسم می‌شوند ازیك نقطه می‌گذرند.

۳. محاسبه انتگرال تابع معکوس یك تابع

تابع $y=f(x)$ راکه درفاصله (a,x) پیوسته وتغییرات آن همواره دریك جهت‌است درنظر می‌گیریم وتابع معکوس‌آن را $x=g(y)$ می‌نامیم.

دستور انتگرالگیری باروش جزء به جزء رادرباره تابع $f(x)$ به‌کار می‌بریم حاصل می‌شود:

$$(۱)\qquad \int_a^x f(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_a^x-\int_a^x xdf(x)$$

انتگرال سمت راست تساوی بالا، باتغییر متغیر $x=g(y)$ به‌صورت زیردر می‌آید:

$$\int_a^x xdf(x)=\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy$$

رابطه (۱) بارعایت رابطه اخیر به‌صورت زیردرمی‌آید.

$$(۲)\qquad \int^x f(x)dx=xf(x)-\int^{f(x)} g(y)dy$$

بااین دستورساده می‌توان انتگرال تابع معکوس یك‌تابع راحساب کرد.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگرتغییرات تابع $f(x)$ درفاصله (a,x) دریك جهت نباشد، دستور(۲) باز معتبراست.

اگر تغییرات تابع $f(x)$ درفاصله (a,x) در یك جهت نباشد، فاصله (a,x) را به فاصله‌های جزئی (a,α) ، (α,β) ،...و (λ,x) تقسیم می کنیم بطوری که تغییرات تابع $f(x)$ درهریك ازاین فاصله‌های جزئی دریك جهت‌باشد.

تابع‌های معکوس‌تابع $f(x)$ رادر فاصله‌های جزئی‌مذکور به‌ترتیب $g_1(x)$، $g_2(x)$، ... و $g_n(x)$ می‌نامیم وتابع‌معکوس تابع $f(x)$ رادر فاصله (a,x) به $g(x)$ نمایش‌می‌دهیم تابع اخیرچند نواخت است.

چون تابعهای $g_1(y)$ و $g_2(y)$ و...و $g_n(y)$ یك‌نواخت‌اند بنابررابطه (۱)می‌توان تساویهای زیررا نوشت.

$$\int_a^{\alpha} f(x)dx=\alpha f(\alpha)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(b)} g_1(y)dy$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\beta(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} g_2(y)dy$$

$$\int_{\lambda}^{x} f(x)dx=xf(x)-\lambda f(\lambda)-\int_{f(\lambda)}^{f(x)} g_n(y)dy$$

عضوهای نظیررابطه‌های بالارا باهم جمع‌می‌کنیم ودرنظر می گیریم که:

$$\int_a^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\dots+\int_{\lambda}^{x} f(x)dx=\int_a^{x} f(x)dx$$

ونیز انتگرال $\int_{f(\alpha)}^{f(x)} g(y)dy$ رابارابطهٔزیر **تعریف**می‌کنیم.

$$\int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy = \int_{f(a)}^{f(\alpha)} g_1(y)dy + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} g_2(y)dy + \cdots +$$

$$\int_{f(\lambda)}^{f(x)} g_n(y)dy$$

بارعایت نکات اخیر، رابطه‌حاصل ازجمع n رابطه مذکور به‌صورت زیرنوشته می‌شود.

$$\int_a^x f(x)dx = xf(x) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y)dy$$

رابطه بالارا می‌توان به‌صورت ساده زیرنوشت:

$$\int^x f(x)dx = xf(x) - \int^{f(x)} g(y)dy$$

که‌همان رابطه(۲) است. پس‌دستور (۲) همواره معتبراست چه تابع $f(x)$ در فاصله (a,x) دریك جهت تغییرکند وچه دریك جهت تغییرنکند.

مثال

۱. انتگرال زیررا هنگامی‌که n عددی صحیح ومثبت باشد حساب‌کنید.

$$\int e^{\sqrt[n]{x}}dx$$

تابع معکوس تابع $y = e^{\sqrt[n]{x}}$ چنین‌است $x = \log^n y$

چون انتگرال $\int \log^n y dy$ را می‌توان حساب کـرد پس انتگرال :

$$\int e^{\sqrt[n]{x}}dx$$

را می‌توان ازدستور (۲) مذکور درصفحه ۱۳ حساب‌کرد . محاسبه را برای $n=۲$ انجام می‌دهیم :

طبق دستور (۲) می‌نویسیم:

$$\int^{x} e^{\sqrt{x}}dx = xe^{\sqrt{x}} - \int^{e^{\sqrt{x}}} \log y^{۲} dy$$

ازطرفی می‌دانیم‌که:

$$\int \log^{۲} y dy = y\left[(\log y - ۱)^{۲} + ۱\right]$$

پس :

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = ۲e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - ۱)$$

۴. انتگرال زیررا حساب‌کنید.

$$I = \int \arcsin\frac{۱}{x}dx$$

حل. تابع معکوس تابع $y = \arcsin\frac{۱}{x}$ چنین است: $x = \frac{۱}{\sin y}$

طبق دستور (۲) می‌نویسیم:

$$\int^{x} \arcsin\frac{۱}{x}dx = x\arcsin\frac{۱}{x} - \int^{\arcsin\frac{۱}{x}} \frac{dy}{\sin y}$$

ازطرفی می‌دانیم‌که:

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \log tg\frac{y}{۲}$$

پس :

$$\int^{x} \arcsin\frac{۱}{x} = x\arcsin\frac{۱}{x} - \log tg\frac{\arcsin\frac{۱}{x}}{۲}$$

۳. انتگرال زیررا حساب کنید.

$$I = \int \arcsin\sqrt{x}\,dx$$

حل. تابع معکوس‌تابع $y = \arcsin\sqrt{x}$ چنین‌است:

$$x = \sin^{۲} y$$

طبق دستور (۲) می‌نویسیم:

$$\int^{x} \arcsin\sqrt{x}\,dx = x\arcsin\sqrt{x} - \int^{\arcsin\sqrt{x}} \sin^{۲} y\,dy$$

پس:

$$\int^{x} \arcsin\sqrt{x}\,dx = x\arcsin\sqrt{x} - \frac{۱}{۲}(\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x - x^{۲}})$$

$$= (x - \frac{۱}{۲})\arcsin\sqrt{x} + \frac{۱}{۲}\sqrt{x - x^{۲}}$$

۴. انتگرال معین زیررا حساب کنید.

$$\int_{\frac{۱}{۸۱}}^{۱} \text{Arccos}\frac{۱ - ۵\sqrt{x}}{۴\sqrt{x}}\,dx$$

تابع معکوس تابع $y = \text{Arccos}\frac{۱ - ۵\sqrt{x}}{۴\sqrt{x}}$ عبارت است‌از :

$$x = \frac{۱}{(۴\cos y + ۵)^{۲}}$$

دستور (۱) صفحه۱۳ را به‌کار می‌بریم ودر نظر می گیریم که:

$$x=\frac{۱}{۸۱} \Longrightarrow y=۰$$

$$x=۱ \Longrightarrow y=\pi$$

چنین به دست می‌آید:

$$(۱) \int_۰^\pi \frac{dy}{(۴\cos y+۵)^۲}=\left[\frac{y}{(۴\cos y+۵)^۲}\right]_۰^\pi-$$

$$\int_{\frac{۱}{۸۱}}^{۱} \text{Arccos}\frac{۱-۵\sqrt{x}}{۴\sqrt{x}}\,dx$$

اما:

$$\left[\frac{y}{(۴\cos y+۵)^۲}\right]_۰^\pi=\pi$$

و

$$\int_۰^\pi \frac{dy}{(۴\cos y+۵)^۲}=\int_۰^\pi \frac{dy}{(۹\cos^۲\frac{y}{۲}+\sin^۲\frac{y}{۲})^۲}=$$

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۲dz}{(۹\cos^۲z+\sin^۲z)^۲}=۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+tg^۲z}{(۹+tg^۲z)^۲}\cdot\frac{dz}{\cos^۲z}=$$

$$۲\int_۰^\infty \frac{۱+t^۲}{(۹+t^۲)^۲}dt=۲\int_۰^\infty \frac{۱+۹t^۲}{۹^۲(۱+t^۲)^۲}dt=$$

$$\frac{۲}{۲۷}\int_{۰}^{\infty}\left(\frac{۵}{۱+t^{۲}}-۴\frac{۱-t^{۲}}{(۱+t^{۲})^{۲}}\right)dt=$$

$$\frac{۲}{۲۷}\left(۵\operatorname{arctg}t-\frac{۴t}{۱+t^{۲}}\right)_{۰}^{\infty}=\frac{۵\pi}{۲۷}$$

اگردر تساوی (۱) به‌جای انتگرال سمت چپ و اولین جمله سمت راست مقادیرشان را قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$\frac{۵\pi}{۲۷}=\pi-I$$

پس :

$$I=\frac{۲۲\pi}{۲۷}$$

تمرین

انتگرالهای زیررا حساب کنید (n عددی است صحیح ومثبت)

$$\int \arcsin\frac{۱}{x^{n}}dx$$

$$\int \arccos\frac{۱}{x^{n}}dx$$

$$\int \arccos\sqrt[n]{x}\,dx$$

$$\int \arccos\sqrt[n]{x}\,dx$$

$$\int e^{\sqrt[n]{x}}\cdot\sqrt[n]{x}\cdot dx$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{n}}dx}{\sqrt{1-x^{\frac{2}{n}}}}$$

$$\int \arcsin \sqrt[n]{x}\,dx$$

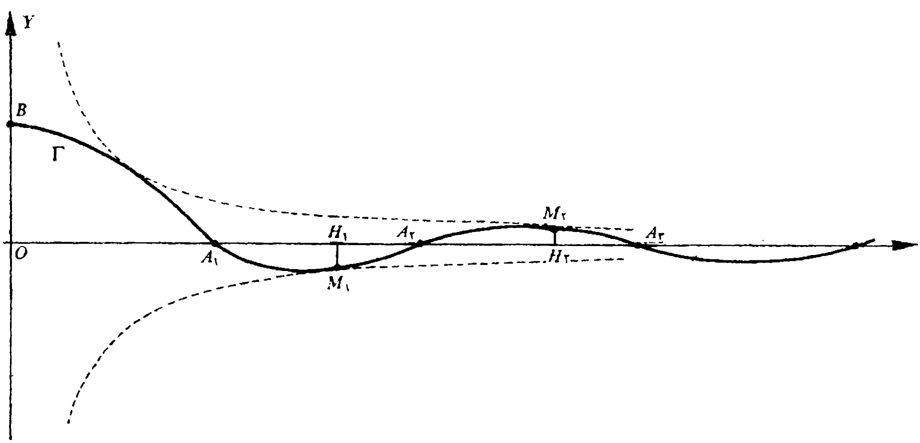
$$\int \arccos \sqrt[n]{x}\,dx$$

$$\int \sin \log x\,dx$$

$$\int \cos \log x\,dx$$

٤. اثبات واگرائی انتگرال $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$

منحنی Γ نمایش هندسی تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ بـرای $x>0$ به صورت زیـر است. این منحنی بین دو منحنی به معادله‌های $y=\frac{1}{x}$ و $y=-\frac{1}{x}$ محصور است.



شکل۲

انتگرال $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ مساوی است بامجموع اندازه‌های سطحهای محصور به

کمانهای منحنی Γ و محور xها باضافه اندازه سطح محصور به‌کمان BA_1 و محورهای x ها و yها.

از روی شکل دیده می‌شود کـه اندازهٔ سطح محصور به کمان $A_1M_1A_2$ و پاره‌خط A_1A_2 بزرگتر است از اندازه سطح مثلث $A_1M_1A_2$، نیز اندازه سطح شکل محصوربه کمان $A_2M_2A_3$ و پاره خط A_2A_3 بزرگتر است از انـدازه سطح مثلث $A_2M_2A_3$ و همچنین...

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر مجموع اندازه‌های سطحهای مثلثهای $A_1M_1A_2$ و $A_2M_2A_3$ و ... را حساب‌کنیم، حاصل بینهایت می‌شود و از آن نتیجه می‌گیریم که‌مجموع انـدازه‌هـای سطحهای محصور بـه منحنی Γ و محور xهـا بینهایت است و لذا انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$$ واگرا است.

ابتدا ثابت می‌کنیم‌طولهای قاعده‌های‌مثلثهای مذکور یعنی طولهای‌پاره‌خطهای A_1A_2 و A_2A_3 و... مساوی‌اند. برای این منظور طولهای نقاط تلاقی منحنی Γ با محور xهارا حساب می‌کنیم. این طولها جوابهای معادله زیراند:

$$\frac{\sin x}{x}=0 \quad , \quad x>0$$

ویا

$$\sin x=0 \quad , \quad x>0$$

جوابهای معادله بالا عبارتند از:

$$x=K\pi \quad , \quad K\in\{1,2,3,\cdots\}$$

و لذا:

$$\overline{A_1A_2}=2\pi-\pi=\pi \quad , \quad \overline{A_2A_3}=3\pi-2\pi=\pi \quad , \quad \cdots$$

بطورکلی به ازای $i\geqslant 1$ داریم:

$$\overline{A_iA_{i+1}}=\pi$$

اکنون طولهای ارتفاعهای مثلثهای مـذکور یعنی H_1M_1 و H_2M_2 و ... را حساب می‌کنیم. برای این منظورابتدا طولهای نقاط H_1 و H_2 و ... را حساب می‌کنیم این طولها جوابهای معادله زیراند:

$$\sin x = \pm ۱ \quad , \quad x > ۰$$

جوابهای معادله فوق عبارتند از:

$$x = \frac{\pi}{۲} + K\pi \qquad K \in \{۰, ۱, ۲, ۳, \cdots\}$$

و لذا طولهای ارتفاعهای مثلثهای مذکور یعنی قدر مطلق‌های عرضهای نقاط $M_۱$ و $M_۲$ و ... از رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{۱}{\frac{\pi}{۲} + K\pi} = \frac{۲}{\pi} \times \frac{۱}{۲K + ۱}$$

اگر درعبارت بالا به جای K مقادیر ۰، ۱، ۲، ... قرار دهیم طولهای ارتفاعهای $H_۱M_۱$ و $H_۲M_۲$ و ... حاصل می‌شود. مجموع اندازه‌های سطحهای مثلثهای مذکور عبارت است از مجموع زیر:

$$(۱) \qquad \pi \times \sum_{K=۰}^{K=\infty} \frac{۲}{\pi} \times \frac{۱}{۲K+۱} = ۲ \sum_{k=۰}^{k=\infty} \frac{۱}{۲K+۱}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که سریی که جمله عمومی‌آن $U_K = \frac{۱}{۲K+۱}$ استواگراست.

برای این منظور آن را با سری با جمله عمومی $V_K = \frac{۱}{۲K}$ مقایسه می‌کنیم. چون

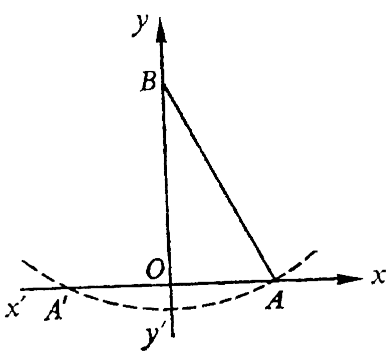
$$\lim_{K \to \infty} \frac{U_K}{V_K} = ۱$$

پس کافی است ثابت‌کنیم سری با جمله عمومی V_K واگراست،چون سری با جمله عمومی $\frac{۱}{K}$ واگراست (سری‌هارمونیك) پس سری V_K نیز واگراست.

۵. اثبات قضیه فیثاغورس

قضیه فیثاغورس. در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع طول وتر مساوی است بامجموع مربعهای طولهای دو ضلع مجاور به زاویه قائمه.

اثبات اول. دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ را در نظر می‌گیریم. شکل (۳)



شکل۳

دو نقطه A و B را به‌ترتیب بر محورهای $x'x$ و $y'y$ اختیار می‌کنیم و چنین‌قرار می‌گذاریم:

$$\overline{OA}=x$$

$$\overline{OB}=y$$

$$|\overline{AB}|=z$$

مسئلهٔ ساختمانی زیر را مطرح می‌کنیم:

در مثلث قائم‌الزاویه OAB طول وتر و اندازه جبری یکی از اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه معلوم است آن مثلث را بسازید.

مثلث قائم‌الزاویهٔ مطلوب به‌آسانی ساخته می‌شود و برای ضلع مجهول **دو مقدار مساوی و مختلف‌العلامه** به‌دست‌می‌آید (مثلا اگر z طول وتر AB و y اندازهٔ‌جبری ضلع OB معلوم باشند، بر محور $y'y$ نقطهٔ B را چنان اختیارمی‌کنیم‌که $\overline{OB}=y$ باشد سپس دایره‌ای به مرکز B وشعاع z رسم می‌کنیم. این دایره محور $x'x$ را در دو نقطهٔ A و A' که نسبت به نقطهٔ O قرینه‌اند قطع می‌کند).

از مسئلهٔ ساختمانی فوق نتیجه می‌شود که اولا بین طولهای سه‌ضلع مثلث قائم‌الزاویه رابطه‌ای وجود دارد وثانیاً این رابطه چنان است‌که به‌ازای دومقدار معلوم y و z (یا x و z) دو مقدار مساوی و مختلف‌العلامه برای x (یا y) به‌دست می‌دهد. یکی از معادلاتی که می‌تواند واجد شرطهای بالاباشد چنین است:

$$ax^2+by^2=f(z) \qquad (1)$$

a و b اعداد ثابت‌اند و $f(z)$ تابعی است از z.

چون رابطهٔ فوق باید همگن باشد* پس:

$$f(z)=cz^2$$

در رابطهٔ بالا، c مقداری است ثابت. بنابراین رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر است:

$$ax^2+by^2=cz^2 \qquad (2)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که در رابطهٔ بالا ضریبهای a و b و c مساوی‌اند.

در شکل (۳)، دو رأس O و B از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB را ثابت نگاه‌داریم و رأس A را روی محور $x'x$ به‌سوی نقطهٔ O حرکت می‌دهیم و بر آن منطبق می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که وقتی طول پاره خط OA مساوی صفر شود، طول پاره‌خط AB مساوی طول پاره خط OB می‌شود لذا اگر در معادلهٔ (۲)، x مساوی صفر شود، z مساوی y

---

* در رابطهٔ (۱) مقدار x^2 اندازه سطح را نشان می‌دهد: اندازه سطح مربعی به‌ضلع x؛ ونیز جمله ax^2، زیرا a یك ضریب است. به‌همین دلیل جملهٔ ay^2 اندازهٔ سطح را نشان می‌دهد لذا مجموع دو جملهٔ مذکور یعنی ax^2+by^2 نمایش اندازه یك سطح است پس طرف دوم تساوی (۱) یعنی $f(z)$ باید اندازه یك سطح را نشان دهد لذا $f(z)$ به‌صورت cz^2 است.

می‌شود ازاینجا حاصل می‌شود:

$$b=c \qquad (۳)$$

اگر دو رأس O و A از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB را ثابت نگاه داریم و رأس Bرا روی محور $y'y$ به‌سوی‌نقطهٔ O حرکت دهیم و همان شیوه استدلال بالا را بکار بریم‌حاصل می‌شود:

$$a=c \qquad (۴)$$

معادلهٔ (۲) با رعایت تساویهای (۳) و (۴) چنین می‌شود:

$$x^2+y^2=z^2 \qquad (۵)$$

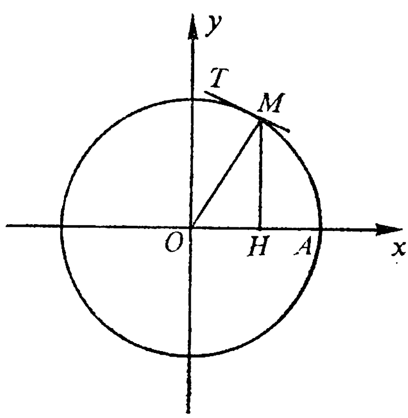
ویا

$$OA^2+OB^2=OC^2$$

اکنون ثابت می‌کنیم که بجز رابطهٔ (۵) هیچ رابطهٔ دیگری بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه وجود ندارد. چه‌اگر بجز رابطه (۵) رابطهٔ دیگری مانند $g(x,y,z)=0$ بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه وجود داشته باشد، از حذف یکی از متغیرها بین رابطهٔ (۵) ورابطهٔ اخیر رابطه‌ای بین دومتغیر به‌دست می‌آید واین قابل قبول نیست زیرا بین دوضلع یك مثلث هیچ رابطه‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد.

تبصره. اثباتی‌که دربالا ارائه شد یك اثبات جبری است و مربوط به هندسهٔ تحلیلی نیست.

اثبات دوم. بر محیط دایره (O,R) نقطهٔ $M(x,y)$را درنظر می‌گیریم



شکل ۴

پارامترهای‌هادی مماس MT و مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{OM}$ چنین‌اند:

$$MT\begin{vmatrix}dx\\ \\dy\end{vmatrix} \qquad\qquad \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix}x\\ \\y\end{vmatrix}$$

مماس MT بر شعاع OM عمود است پس بنا بر حاصلضرب عددی دو بردار چنین داریم:

$$xdx+ydy=0 \qquad (1)$$

از حل معادلهٔ دیفرانسیل بالا حاصل می‌شود:

$$x^2+y^2=c \quad \text{ثابت} \qquad (2)$$

برای تعیین مقدار ثابت c یك حالت خاص درنظرمی‌گیریم مثلا حالتی‌که نقطهٔ M بر نقطهٔ A (محل تلاقی محور Ox و دایره) قراردارد. دراینصورت $x=R$ و $y=0$. اگر این مقادیر را در رابطهٔ (۲) ببریم حاصل می‌شود:

$$x^2+y^2=R^2$$

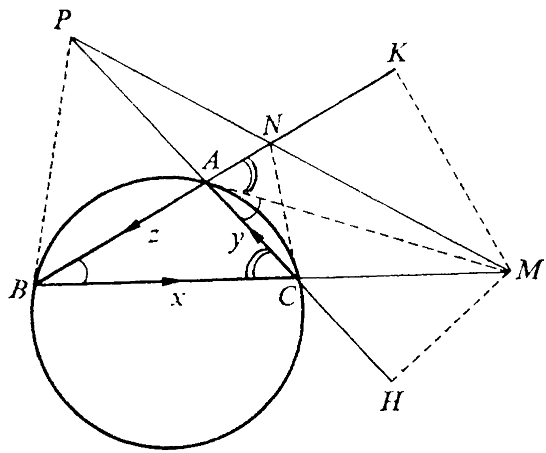
و چون $x=\overline{OH}$ و $y=\overline{HM}$ پس:

$$\overline{OH}^2+\overline{HM}^2=\overline{OM}^2$$

و این همان رابطهٔ فیثاغورس است

۰۶. اثبات قضیه پاسکال

قضیه پاسکال. از سه راس مثلث ABC مماسهائی بـر دایره محیطی آن مثلث رسم می‌کنیم تا اضلاع مثلث را در نقاط M و N و P قطع کنند. ثابت کنید این سه نقطه بر یك خط راست‌واقع‌اند.



شکل ۵

اثبات. سه محور x و y و z را بر سه ضلع مثلث مفروض ودر یك جهت دوران اختیار می‌کنیم تا دستگاه مختصات سه‌محوری (x,y,z) حاصل شود. اکنون معادله زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\frac{x}{\sin A}+\frac{x}{\sin B}+\frac{z}{\sin C}=0 \qquad (1)$$

چون در معادله(۱) مختصات z, y, x از درجه اول‌اند پس معادله (۱) معادله‌یك خط‌راست است که آن را Δ می‌نامیم.

در زیر ثابت می‌کنیم که مختصات P, N, M در معادله[1] صدق می‌کنند واز آن نتیجه می‌گیریم که این نقاط برروی یك خط راست قرار دارند.

می‌گوئیم چون نقطه‌M برروی محور xها قرار دارد پس ایکس این نقطه صفر است:

$$x_M = 0 \qquad (۲)$$

از طرفی بین y و z نقطه M رابطه زیر وجود دارد:

$$-\frac{y_M}{z_M} = \frac{\sin B}{\sin C} \qquad (۳)$$

زیرا در دو مثلث قائم‌الزاویه AMH و AKM می‌توان نوشت:

$$\sin B = \frac{MH}{AM}$$

$$\sin C = \frac{MK}{AM}$$

از مقایسه دو رابطه اخیر با رعایت رابطه زیر:

$$\frac{MH}{MK} = -\frac{y_M}{z_M}$$

رابطه (۳)حاصل‌می‌شود.

از دو رابطه (۲)و(۳) نتیجه می‌شودکه مختصات نقطه‌M در معادله (۱) صدق می‌کند پس نقطه M بر خط Δ واقع است.

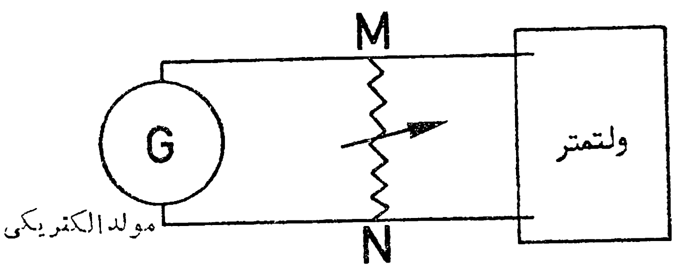
به‌همین شیوه ثابت می‌کنیم که دو نقطه N و P نیز بر خط Δ قرار دارند.

---

* رجوع کنید به‌کتاب «چند قضیه هندسه» اثر نگارنده. بخش اول. دستگاه مختصات چند محوری

۰۷ روشی برای تعیین مقاومت داخلی مولد الکتریکی

برای تعیین مقاومت داخلی مولدالکتریکی روشهای متعددی وجود دارد. یکی از این روشها این است که مولد را بطور موازی بر روی یك مقاومت متغیر R و ولتمتری که مقاومت ورودی آن بسیار بزرگ است می‌بندیم و برای بسامد و تراز برقی مولد مقادیر معینی اختیارمی‌کنیم.

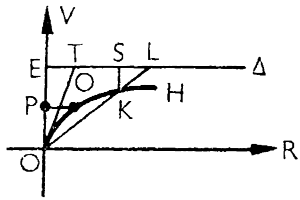


شکل ۶

اختلاف پتانسیل بین دو سر مقاومت R را برای مقادیر مختلف آن به وسیله ولتمتر اندازه می‌گیریم. فرض کنیم به ازای مقادیر مقاومتهای R_1 و R_2 و R_3 و... به ترتیب اختلاف پتانسیلهای i_1 و i_2 و i_3 و... حاصل شود. منحنی H نمایش هندسی تابع $V=f(R)$ را در دستگاه دو محور عمود بر هم OR و OV رسم می‌کنیم. این منحنی دارای خط مجانبی موازی محور OR است. در آزمایشگاه ملاحظه می‌شود که هنگامی که مقاومت متغیر R به اندازه کافی بزرگ شود، اختلاف پتانسیل e بین دو سر مقاومت R محسوساً ثابت می‌ماند. خط Δ مجانب منحنی H که موازی محور OR است به معادله زیر است.

$$V=e$$

از نقطه P وسط پاره خط OE (E نقطه‌ای است از محور Vها به عرض e) خطی



شکل ۷

موازی محور OR رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن را با منحنی H ، نقطه Q می‌نامیم . به آسانی می‌توان ثابت کرد که r مقاومت داخلی مولد مساوی طول قطعه خط $\overline{PQ}$ است

$$r = \overline{PQ}$$

در روش بالا باید چند اندازه‌گیری انجام داد تا تعداد کافی از نقاط منحنی معلوم گردد تا بتوان آن را با دقت رسم نمود.

در زیر با همان مونتاژ شکل(۶) روشی ذکر می‌کنیم که به‌یك اندازه‌گیری احتیاج دارد وبدین ترتیب روش بالا کاملا ساده می‌شود.

برای مقاومت R یك‌مقدار دلخواه R_1 در نظرمی‌گیریم واختلاف پتانسیل V_1 نظیر را اندازه می‌گیریم، نقطه $K(R_1, V_1)$را درصفحه مختصات مشخص‌می‌کنیم‌سپس‌نقطه L محل تلاقی‌خط OK را باخط Δ ونیز نقطهٔ S تصویر نقطه K برخط Δ تعین‌می‌کنیم، ثابت می‌کنیم طول پاره‌خط SL مساوی مقاومت داخلی مولد الکتریکی است:

$$r = SL$$

شدت جریانی راکه از مقاومت R می‌گذرد i می‌نامیم. چون مقاومت ورودی ولتمتر در مقابل مقاومت R بسیار بزرگ است لذا می‌توان از شدت جریانی‌که از ولتمتر می‌گذرد در مقابل شدت جریان i چشم پوشید، در اینصورت می‌توان نوشت:

$$i = \frac{e}{R+r}$$

اختلاف پتانسیل دو سرمقاومت R چنین است:

$$V = \frac{e}{R+r} R$$

مختصات نقطهٔ $K(R_1, V_1)$ بایددر معادله فوق صدق کند، پس :

(۱) $$V_1=\frac{e}{R_1+r}R_1$$

از طرفی معادله خط OK به‌صورت زیر است

(۲) $$V=\frac{V_1}{R_1}R$$

معادله (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

(۳) $$e=\frac{V_1}{R_1}\left(R_1+r\right)$$

از مقایسه دو رابطه (۲)و(۳) نتیجه می‌شود که طول نقطه L مساوی (R_1+r) است:

$$EL=R_1+r$$

ازطرفی:

$$\overline{ES}=R_K=R_1$$

پس :

$$\overline{SL}=\overline{EL}-\overline{ES}=r$$

مشابهت نقش مقاومت داخلی مولدالکتریکی و ثابت‌زمان مدار (L,R)

بحث ما درباره مدار شکل(۶) ومدار شکل (۸) است.

در شکل (۷)، از نقطه O بر منحنی H مماس رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با خطΔ، نقطه T می‌نامیم. از آنچه قبلا گفتیم به‌آسانی نتیجه می‌شود:

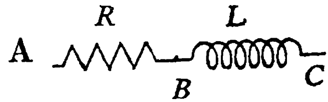
$$ET=r$$

زیرا اگر خط OK حول نقطه O بچرخد تانقطه K بر نقطه O قرار گیرد، خط OK به خط مماس OT تبدیل می‌شودوپاره‌خط SL به‌صورت پاره‌خط ET در می‌آید.

اگر تغییرات مقاومت R متناسب با زمان باشد، از روی شکل (۷) دیده می‌شود که هر قدر مقاومت داخلی r بزرگتر باشد ، پتانسیل e در دو سر مقاومت R دیرتر حاصل می‌شود (منظور ما از پتانسیل e پتانسیلی است که به ازای مقدار نسبتاً بزرگی از مقاومت R در دوسر آن حاصل می‌شود بطوری‌که اگر مقاومت R از این مقدار تجاوز کند اندازه e محسوساً ثابت بماند)

اکنون به شرح‌مطلب زیر می‌پردازیم وسپس‌مشابهت آن را بامطلب‌بالا یادآورمی‌شویم.

مداری که شامل مقاومت R و سلف L است در نظر می گیریم. شکل(۸)



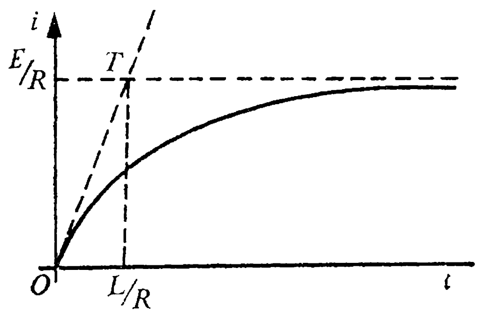
شکل ۸

در لحظه $t=0$ تانسیون E را بین A و B وارد می‌کنیم. جریانی که پس از زمان t در مدار حاصل می‌شود چنین‌است:

$$(۴)\quad i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

در رابطه بالا $\frac{L}{R}$ ثابت زمان مدار است (برای مطالعه اثبات صحت رابطه بالا به‌توضیح پایان این مطلب رجوع شود)،

منحنی نمایشگر تابع بالا، دارای خط مجانب موازی با محور Ot است. شکل (۹)



شکل ۹

مماس مرسوم بر این منحنی در مبدأ مختصات خط مجانب را در نقطه‌ای به طول $\frac{L}{R}$ قطع می‌کند. از روی شکل دیده می‌شود که هر قدر $\frac{L}{R}$ بزرگتر باشد جریان دائمی $i_\infty=\frac{E}{R}$ دیرتر برقرار می‌شود. (مطلب را بطور دقیق‌تر تعریف می‌کنیم: فرض کنیم i_1 جریانی باشد که پس‌از مدت‌محدود t درمدار حاصل شودو این‌جریان‌محسوساً مساوی با $i_\infty=\frac{E}{R}$ باشد. می‌گوئیم هرقدر $\frac{L}{R}$ بزرگتر باشد جریان i_1 دیرتر برقرار می‌شود.)

حال اگردو شکل (۷)و(۹) را باهم مقایسه‌کنیم معلوم می‌شودکه نقش r درمدار(۶) با نقش $\frac{L}{R}$ در مدار (۸) شبیه‌است. در مدار (۸) هرقدر ثابت زمان $\frac{L}{R}$ بزرگتر باشد

جریان دائمی در مدار دیرتر برقرار می‌شود؛ در مدار (۶) هر قدر مقاومت داخلی بزرگتر باشد پتانسیل حد یعنی e در دو سر مقاومت R دیرتر حاصل می‌شود.

توضیح. برای اثبات صحت رابطه (۴) ، ابتدا رابطه مسلم زیر را برای مدار(۸) می‌نویسیم:

$$V_A - V_C = Ri + L\frac{di}{dt}$$

درلحظه $t=0$ تانسیون E را بین A و B وارد می‌کنیم،جریان در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$(5)\quad E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

انتگرال عمومی معادله $Ri + L\frac{di}{dt} = 0$ را حساب می‌کنیم، این چنین:

$$\int\frac{di}{i} = -\int\frac{R}{L}dt$$

یا:

$$\text{Log}\, i = -\frac{Rt}{L} + \text{ثابت}$$

بدیهی است که یك جواب خصوصی معادله (۵) چنین است:

$$i = \frac{E}{R}$$

پس جواب معادله (۵) با رعایت آنکه در لحظه $t=0$ داریم $i=0$ به صورت زیر است:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

۸. تعمیم‌های قضیه های استورم[1] ولایب نیتس[2] وپاپوس[3]

ابتدا قضیه‌های استورم ولایب‌نیتس وپاپوس راذکر می‌کنیم.

۱. قضیه استورم. اگرمجموع توانهای pام فواصل یك نقطه از اضلاع یك n ضلعی منتظم مقدار ثابتی‌باشد و $2 < p < n - 1$ باشد، مکان این‌نقطه دایره است. قضیه‌استورم بابه‌کاربردن متغیرمختلط اثبات می‌شود.

۲. قضیه لایب‌نیتس. نقاط A_1، A_2، ...، وA_n واعداد λ_1، λ_2، ...، وλ_n مفروض‌اند مکان نقاطی‌مانندM که برای‌آنها عبارت:

$$\lambda_1\overline{MA_1}^2+\lambda_2\overline{MA_2}^2+\cdots+\lambda_n\overline{MA_n}^2$$

مقداری ثابت‌است اگر $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n\neq 0$ باشد یك کره است و اگر $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=0$ باشد یك‌صفحه است.

۳. قضیه پاپوس. $2n$ ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ ونقطه‌M واقع بردایره محیطی‌آن مفروض است. چنانچه H_1، H_2، ...، وH_{2n} تصاویر نقطه M براضلاع چندضلعی مذکورباشند رابطه زیر محقق است:

$$\overline{MH_1}\cdot\overline{MH_3}\cdots\overline{MH_{2n-1}}=\overline{MH_2}\cdot\overline{MH_4}\cdots\overline{MH_{2n}}$$

تعمیمهای قضیه‌های فوق

(۱') . تعمیم قضیه استورم . تصویر های نقطه M از صفحه چند ضلعی منتظم

---

۱. استورم (۱۸۵۵-۱۸۰۳) Sturm ریاضیدان فرانسوی‌است،وی‌زاده‌سویس‌است.

۲. لایب‌نیتس (۱۷۱۶ - ۱۶۴۹) Leibnitz ریاضیدان بزرگ‌آلمانی .

۳. پاپوس Pappus ریاضیدان مشهور یونان باستان

$A_1A_2\cdots A_n$ را براضلاع آن نقاط H_1،H_2،...وH_n می‌نامیم. اعداد صحیح ونا منفی p،q،...،tو$n>i$ وطول lرا معلوم فرض‌می‌کنیم. مکان هندسی نقاطی‌مانند M که فواصل آنها ازاضلاع چندضلعی منتظم مذکور، در رابطهٔ:

$$\overline{MH_1}^p\cdot\overline{MH_2}^q\cdots\overline{MH_i}^t+\overline{MH_2}^p\cdot\overline{MH_3}^q\cdots\overline{MH_{i+1}}^t+\cdots$$
$$+\overline{MH_n}^p\cdot\overline{MH_1}^q\cdots\overline{MH_{i-1}}^t=l^{p+q+\cdots+t}$$

صدق‌کند باشرط :

$$(1)\qquad 2(p+q+\cdots+t)<n+1$$

دایره است. (مجموعه دوایرهم مرکز)[1]

درحالت $p+q+\cdots t=1$ اگرlمساوی‌با مجموع‌فواصل یك‌نقطه دلخواه ازصفحه چندضلعی منتظم ازاضلاع آن باشدتمام نقاط صفحه دارای این‌خاصیت‌اند واگرمجموع فواصل یك نقطه‌دلخواه صفحه ازاضلاع چندضلعی‌مذکور مساویl نباشد هیچ‌نقطه ازصفحه دارای‌چنین خاصیتی نخواهدبود. درحکم اخیر فواصل نقطه از اضلاع چند ضلعی بااعداد جبری مشخص می‌شوند. برای مطالعهٔ این‌قرارداد علامت به‌کتاب «چندقضیه هندسه» اثر نگارنده رجوع کنید بخش‌اول.

حالتهای خاص:

الف. اگر $q=r=\cdots=t=0$ باشد حکمی حـاصل می‌شود که مشابه باقضیه استورم است.

ب. اگر $p=q=1$ و $r=s=\cdots=t=0$ باشد رابطه‌ای حاصل می‌شود که ازضرب دوطرف آن در $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ ، قضیه مربوط به اندازه سطح پودر (Podaire) یك نقطه نسبت به‌چندضلعی منتظم به‌دست می‌آید.

(۲ٔ). تعمیم‌قضیه لایب نیتس. مکان‌هندسی نقاطی که مجموع‌توانهایpام‌آنهااز راسهای یكn ضلعی‌منتظم مقدارثابتی باشد باشرط $2p<n+1$ دایره‌است (مجموعه دوایر هم‌مرکز).pعددی زوج فرض شده است .

۱ـ درکتاب «چند قضیه هندسه» تحقیق تکمیلی دیگری برقضیه استورم ارائه داده‌ام.

صفحه ۵۰، شماره۶۶

(۳´). تعمیم قضیه پاپوس. مکان‌هندسی نقاطی‌که فواصل آنها ازاضلاع یك $\text{۲}n$ ضلعی منتظم دررابطه زیرصدق‌کند، دایره است (مجموعه دایره‌های هم مرکز).

$$\overline{MH}_{۱}\cdot\overline{MH}_{۳}\cdots\overline{MH}_{۲n-۱}=\overline{MH}_{۲}\cdot\overline{MH}_{۴}\cdots\overline{MH}_{۲n}$$

تبصره. احکام فوق درمورد چند وجهی‌های منتظم باشرطهای خاصی معتبر است.

اثبات. در زیر قضیهٔ (۱´) راثابت می‌کنیم. اثبات احکام دیگر به طریقی مشابه انجام می‌گیرد.

می‌گوئیم قرینهٔ هرنقطه M ازمکان هندسی‌مطلوب که‌آن رامنحنی Γ می‌نامیم نسبت به محورهای تقارن چندضلعی منتظم مـورد بحث برروی همان منحنیΓ قرار دارد پس منحنی Γ دایره‌ای به‌مرکز O(مرکزدایره محیطی‌چند ضلعی‌منتظم مذکور) وشعاع OM را حداقل در $n+۱$ نقطه قطع می‌کند.

ازطرفی طبق‌یکی‌از قضایای هندسه تحلیلی‌می‌دانیم‌که تعدادنقاط تلاقی‌دومنحنی به‌درجه های αوβ مساوی $\alpha\cdot\beta$ است لذاتعداد نقاط تلاقی منحنی Γکه درجه‌آن $p+q+\ldots+t$ است بادایره به‌مرکزO وشعاع OM مساوی $۲(p+q+\cdots+t)$استپس‌اگرشرط:

$$۲(p+q+\cdots+t)<n+۱$$

محقق‌باشد لازم می‌آیدکه منحنیΓ بردایره منطبق‌باشد از اینجا نتیجه می‌شودکه منحنی Γ از دایره‌های هم مرکزتشکیل شده است.

نتیجه ـ ازروی قضیه فوق‌اتحاد مثلثاتی مشروح درشماره بعد نتیجه می‌شود.

۹. یك اتحاد مثلثاتی

برای بیان اتحادی که مورد نظر ماست به یك قرارداد احتیاج داریم که در زیر ذکر می‌کنیم.

قرارداد. چنین‌قرار می‌گذارم‌که تابع $\alpha(x)$ بتواند به‌دلخواه‌ما، $\sin x$ ویا $\cos x$را نشان دهد وتابع $\alpha'(x)$که آن‌را **تابع متمم** تابع $\alpha(x)$ می‌نامم، تابعهای $\cos x$ ویا$\sin x$ رانمایش دهد یعنی‌اگر در عبارتی که شامل $\alpha(x)$ و $\alpha'(x)$ است اگر‌به جای $\alpha(x)$، تابع $\sin x$ راقرار دهیم باید به‌جای $\alpha'(x)$ تابع $\cos x$ راقرار دهیم واگر‌به جای $\alpha(x)$، تابع $\cos x$ رااختیار‌کنیم بایدبه‌جای‌تابع $\alpha'(x)$ تابع $\sin x$ رااختیار نمائیم بااین قراردادعبارت $\alpha(x)\cdot\alpha'(y)$ دوتابع زیررا نشان می‌دهد:

$\sin x\cos y$ و $\cos x\sin y$

نیزفرض می‌کنیم که هر یك از تابعهای : $\beta(x)$ ، $\gamma(x)$ ،... و$\lambda(x)$ مانند تابع $\alpha(x)$ بتوانند $\sin x$یا$\cos x$ رابه دلخواه مانشان دهند و تابعهای $\beta'(x)$،$\gamma'(x)$،...،$\lambda'(x)$تابعهای متمم آنها باشند. بااین قرارداد اتحاد موردنظرما به‌صورت زیرنمایش‌داده می‌شود:

اتحاد مثلثاتی

$$\alpha^{p}(x)\cdot\beta^{q}(x+\frac{2\pi}{n})\cdot\gamma^{r}(x+2\frac{2\pi}{n})\cdots\lambda^{t}(x+i\frac{2\pi}{n})+$$

$$\alpha^{p}(x+\frac{2\pi}{n})\cdot\beta^{q}(x+2\frac{2\pi}{n})\cdot\gamma^{r}(x+3\frac{2\pi}{n})\cdots\lambda^{t}(x+\frac{2(i+1)\pi}{n})$$

$$+\alpha^{p}(x+۲\frac{۲\pi}{n})\cdot\beta^{q}(x+۳\frac{۲\pi}{n})\cdot\gamma^{r}(x+۴\frac{۲\pi}{n})\cdots\lambda^{t}(x+\frac{۲(i+۲)\pi}{n})$$

$$+\cdots=$$

$$\alpha'^{p}(x)\cdot\beta'^{q}(x+\frac{۲\pi}{n})\cdot\gamma'^{r}(x+۲\frac{۲\pi}{n})\cdots\lambda'^{t}(x+i\frac{۲\pi}{n})+$$

$$\alpha'^{p}(x+\frac{۲\pi}{n})\cdot\beta'^{q}(x+۲\frac{۲\pi}{n})\cdot\gamma'^{r}(x+۳\frac{۲\pi}{n})\cdots\lambda'^{t}(x+\frac{۲(i+۱)\pi}{n})$$

$$+\alpha'^{p}(x+۲\frac{۲\pi}{n})\cdot\beta'^{q}(x+۳\frac{۲\pi}{n})\gamma'^{r}(x+۴\frac{۲\pi}{n})\cdots\lambda'^{t}(x+\frac{۲(i+۲)\pi}{n})+\cdots$$

اگر $p+q+\cdots+t$ عددی‌فردباشد هریك ازدوطرف اتحاد بالامساوی صفراست دراینصورت بنابراتحاد بالا، تابعهائی مانند U_j،V_j، $\cdots$وZ_j می‌توان یافت‌که برای آنها رابطه زیر مسلم باشد.

$$\sum_{j=۱}^{j=n} U_j\cdot V_j\cdots Z_j=۰$$

اگر دررابطه فوق به‌جای p،q،...،tوi اعداد دلخواه بگذاریم تعدادی بی‌شماراتحاد مثلثاتی حاصل می‌شود.

مثلا اگر در اتحـاد فوق قرار دهیم $p=۳$ و $q=r=\cdots=t=۰$ اتحاد زیر حاصل می‌شود:

$$\cos^۳x+\cos^۳(x+\frac{۲\pi}{n})+\cos^۳(x+\frac{۴\pi}{n})+\cdots+\cos^۳[x+(n-۱)\frac{۲\pi}{n}]$$

$$=\sin^۳x+\sin^۳(x+\frac{۲\pi}{n})+\sin^۳(x+\frac{۴\pi}{n})+\cdots+$$

$$\sin^۳\left[x+(n-۱\frac{۲\pi}{n}\right]=۰$$

اثبات. برای اثبات صحت‌اتحاد بالااز تعمیم‌قضیه استورم که در شماره۸ مشروح است استفاده می‌کنیم.

دستگاه مختصاتی‌که مبدأآن مرکزچند ضلعی‌منتظم مذکور در تعمیم قضیه استورم است اختیار می‌کنیم.

معادله خطی راکه بر یکی از اضلاع این چند ضلعی متکی‌است می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$(1)\quad x\cos\theta + y\sin\theta - d = 0$$

درمعادله بالا، θ زاویه قطبی‌خطی‌است که ازمرکز چندضلعی برخط مذکورعمود شده‌است و d فاصله مبدأ مختصات ازهمان خطاست.

معادله‌های خطوطی‌که براضلاع دیگرچند ضلعی متکی‌هستند. چنین‌اند (این‌خطوط را درجهت دوران مثلثاتی بطور متوالی درنظرگرفته‌ایم)

$$x\cos(\theta+\frac{2\pi}{n}) + y\sin(\theta+\frac{2\pi}{n}) - d = 0$$

$$x\cos(\theta+\frac{4\pi}{n}) + y\sin(\theta+\frac{4\pi}{n}) - d = 0$$

. . . .

ازطرفی می‌دانیم که فاصله یك‌نقطه به‌مختصات (XوY) ازخط به‌معادله (۱) به صورت زیراست:

$$X\cos\theta + Y\sin\theta - d$$

پس برای تعیین‌معادله منحنی Γ ، دررابطه هندسی مذکور درصفحه(۳۶) به‌جای $\overline{MH_1}$و$\overline{HM_2}$ و... عبارتهای زیررا می‌گذاریم:

$$X\cos\theta + Y\sin\theta - d$$

$$X\cos(\theta+\frac{2\pi}{n}) + Y\sin(\theta+\frac{2\pi}{n}) - d$$

$$X\cos(\theta+\frac{4\pi}{n}) + Y\sin(\theta+\frac{4\pi}{n}) - d$$

. . . .

ومعادله حاصل‌را به‌صورت زیرنمایش می‌دهیم:

$$(2)\qquad f(X,Y) = 0$$

اکنون می‌گوئیم که چون منحنیΓ از یکعده دایره‌های هم مرکز تشکیل شده است پس درمعادله (۲)، ضریبهای‌دوجمله $A\cdot X^{P}\cdot Y^{Q}$ و $B\cdot X^{Q}\cdot Y^{P}$ باید مساوی باشند :

$A=B$. بارعایت این‌نکته می‌توان ازروی معادله (۲) اتحادهائی به‌دست‌آورد که‌یکی‌از آنها اتحاد موردبحث‌ما می‌باشد.

اگر $p+q+\cdots+t$ عددی فردباشد منحنی Γ ازیك‌عده دایره های هم مرکز و خط بینهایت تشکیل شده است. چون منحنی Γ شامل خط بینهایت است پس بـاید ضریبهای جمله‌های بزرگترین درجه معادله (۲) مساوی صفر باشند از اینجا نتیجه می‌شود کـه اگر $p+q+\cdots+t$ عددی فردباشد هریك از دوطرف اتحاد موردبحث مساوی صفرمی‌شود.

۱۰. دستور اندازه سطح مثلث

اگر در مثلث ABC طولهای اضلاع‌را به a و b و c و نصف محیط را به p و اندازه سطح را به S نمایش دهیم رابطه زیر محقق‌است:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)} \qquad (۱)$$

اثبات. اگرطولهای‌اضلاع مثلثی‌را بدهندمی‌توان‌آن‌مثلث‌را باخط کش وپر گارساخت از اینجا نتیجه می‌شود که بین S واضلاع مثلث یك **رابطه جبری** وجود دارد:

$$S=f(a,b,c)$$

ابتدا شکل‌کلی این رابطه را مشخص می‌کنیم:

ملاحظه می‌کنیم که اگر محیط مثلث صفر شود اندازه سطح آن صفر می‌شود پس عبارت $f(a,b,c)$ دارای عامل p^{λ} است. در این عامل λ همواره مثبت است و نمی‌تواند منفی یا صفرباشد؛ اگر $\lambda<0$ باشد وقتی p به‌سوی صفر میل‌کند تابع S که دارای عامل p^{λ} است به‌سوی بینهایت میل می‌کند و این غیرممکن است زیرا وقتی محیط مثلث به سوی صفر میل‌کند اندازه سطح‌آن به‌سوی بینهایت میل نمی‌کند پس λ نمی‌تواند منفی باشد. اگر $\lambda=0$ باشد، عامل p^{λ} مساوی یك می‌شود در اینصورت وقتی p به سوی صفر میل کند تابع S به‌سوی صفر میل نمی‌کند و این ممکن نیست. بطور خلاصه اگر λ منفی و یا صفر باشد تابع S نمی‌تواند استلزام:

$$p=0 \implies S=0$$

را نشان دهد.

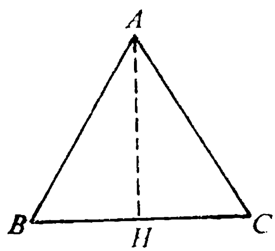
نیز ملاحظه می‌کنیم که اگر محیط مثلث مساوی دو برابر یك ضلع شود اندازه سطح آن صفر می‌شود پس S دارای‌عاملهای $(p-a)^{\alpha}$, $(p-b)^{\beta}$, $(p-c)^{\gamma}$ است . γ,β,α مثبت‌اند.

چون c,b,a در عبارت $f(a,b,c)$ دارای‌یك نقش‌اندپس $\alpha=\beta=\gamma$بنابراین‌اندازه سطح مثبت چنین است:

$$(۲) \quad S=p^{\lambda}\cdot(p-a)^{\alpha}\cdot(p-b)^{\alpha}\cdot(p-c)^{\alpha}\varphi_n(a,b,c)$$

$\varphi_n(a,b,b)$ تابعی است همگن. درجه‌این تابع را به n نمایش داده‌ایم.

برای تعیین‌λ,αوتابع φ_n یك حالت خاص در نظرمی‌گیریم، حالتی‌که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد. شکل (۱۰)



شکل ۱۰

اگر یك ضلع این‌مثلث‌مساوی a باشد داریم: $\overline{HB}=\frac{a}{۲}$, $AH=\frac{\sqrt{۳}a}{۲}$. لذا اندازه‌سطح این مثلث چنین می‌شود:

$$(۳) \quad S=HB\times AH=\frac{a}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}a}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

ازطرفی از رابطهٔ (۲) اندازه سطح همین مثلث متساوی‌الاضلاع بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(۴) \quad S=\left(\frac{۳a}{۲}\right)^{\lambda}\cdot\left(\frac{a}{۲}\right)^{۳\alpha}\cdot A\cdot a^{n}$$

در رابطهٔ بالا. A مقداری است‌ثابت.

از مقایسه دو رابطه (۳),(۴) حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{3a}{2}\right)^{\lambda}\left(\frac{a}{2}\right)^{3\alpha}\cdot A\cdot a^{n}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^{2}$$

برای آنکه رابطه بالا به ازای تمام مقادیر a محقق باشد باید داشته باشیم:

$$\mathrm{I}\begin{cases}\dfrac{A\cdot 3^{\lambda}}{2^{\lambda+3\alpha}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\[2ex] \lambda+3\alpha+n=2\end{cases}$$

دستگاه معادله‌های I دارای بینهایت جواب است اما فقط یك دستگاه جواب وجـود دارد که با شرایط مسئله تطبیق می‌کند چه اگر دستگاه معادله‌های I بجز دستگاه جواب $(A_1,\lambda_1,\alpha_1,n_1)$ دارای‌دستگاه جواب دیگری مانند $(A_2,\lambda_2,\alpha_2,n_2)$ باشدکه باشرایط مسئله مطابقت داشته باشد باید داشته باشیم

$$p^{\lambda_1}(p-a)^{\alpha_1}(p-b)^{\alpha_1}(p-c)^{\alpha_1}\varphi_{n_1}(a,b,c)\equiv$$

$$p^{\lambda_2}(p-a)^{\alpha_2}(p-b)^{\alpha_2}(p-c)^{\alpha_2}\varphi_{n_2}(a,b,c)$$

از اتحاد بالا نتیجه می‌شود:

$$\lambda_1=\lambda_2,\alpha_1=\alpha_2\ ,\ n_1=n_2\ ,\ A_1=A_2$$

بدین ترتیب ثابت شد که دستگاه I فقط دارای یك دستگاه جواب است‌که با شرایط مسئله تطبیق می‌کند پس اگر برای دستگاه معادله‌های I یك دستگاه جواب تعیین کنیم‌که با شرایط مسئله مطابقت داشته باشد دستگاه جواب مطلوب‌را یافته‌ایم.

اگرمعادله‌اول‌دستگاه I رادرنظر بگیریم‌به‌آسانی‌بطورذهنی‌معلوم‌می‌شود که‌اعداد $A=1$ و $\lambda=\frac{1}{2},\alpha=\frac{1}{2}$ دراین معادله صدق می‌کنند وسپس‌ازمعادله دوم‌دستگاه معلوم‌می‌شود $n=0$.

دستگاه اعداد:

$$\left(A=۱\,,\ \alpha=\frac{۱}{۲}\,,\ \lambda=\frac{۱}{۲}\,,\ n=۰\right)$$

در معادله‌های دستگاه I صدق می‌کنند وبعلاوه با شرایط مسئله مطابقت دارند پس این اعداد جوابهای مطلوب‌اند. اگر این اعداد را در رابطهٔ (۲) ببریم حاصل می‌شود

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

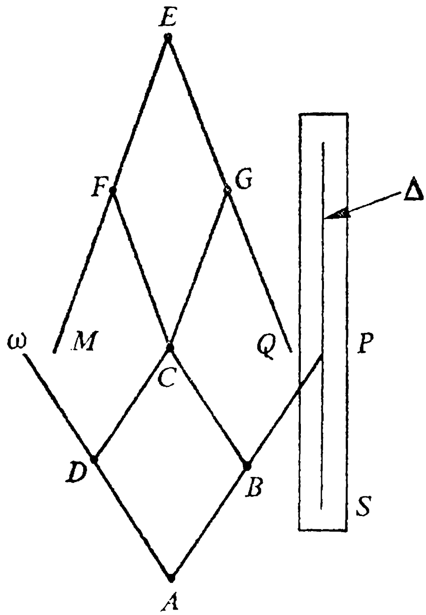
۱۰. طرح افزار برای رسم منحنی سیسوئید

درکتاب «چند مسئله مشهور هندسه» طرح افزاری را برای رسم منحنی سیسوئید شرح داده‌ام (اقتباس ازکتاب Leçons sur les constructions géométriques اثر Henri LEBESGUE) . درزیرطرح افزاری راارائه داده‌ام که می‌تواند منحنی سیسوئید را درحالت کلی یعنی درحالتی که منحنی‌هادی دلخواه باشدرسم کند درصورتی که افزاری که در کتاب مذکور از آن گفتگو شده‌است منحنی‌سیسوئید رافقط درموردی که منحنی‌هادی دایره‌باشد وبعلاوه شرطهای دیگری برقرارباشد رسم می کند.

تعریف منحنیهای سیسوئیدی . درصفحه P نقطهO ومنحنی C وخط راست D راکه برO نمی‌گذرد درنظر می‌گیریم. خط دلخواهی ازO می‌گذرانیم ونقطه‌های تلاقی‌آن رابا منحنیC وخط D به‌ترتیب Pو Q می‌نامیم. برخط OP نقطهM راچنان اختیارمی‌کنیم که $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{PQ}$ باشد. هنگامی‌که نقطـه P منحنی C را می‌پیماید نقطه M یك منحنی Γ می‌پیماید‌که منحنی سیسوئیدی منحنی C نسبت به‌نقطه O وخط D نامیده می‌شود . نقطه O راقطب ومنحنیC را هادی می‌نامند.

طرح افزار برای رسم منحنیهای سیسوئیدی. درلوزی مفصلی ABCD دو میله AB و AD به اندازه‌های خود تـا نقاط Pو ω امتداد دارند. در لوزی مذکور میله‌های DC, BC, AD, AB دوبه‌دو درنقاط D, C, B, A به‌هم مفصل شده‌اند ومی‌توانند

حول این‌مفصلها حرکت‌کنند.



شکل ۱۱

این‌دستگاه را دستگاه (I) می‌نامیم. دراین‌دستگاه، هنگامی‌که میله‌ها حرکت‌می‌کنند همواره سه‌نقطه P,C,ω برروی یك خط راست‌اند و بعلاوه داریم:

$$(۱)\quad \overrightarrow{\omega C}=\overrightarrow{CP}$$

نیزدستگاه مفصلی (II) راکه ازلوزی مفصلی EFCG وامتدادهای دومیله‌آن EF و EG ساخته شده‌است بطوری که :

$$EM=EQ=۲EF$$

درنظر می‌گیریم. هنگامی‌که میله‌های دستگاه اخیر حول مفصلها حرکی می‌کنند همواره سه نقطه Q,C,M بریك خط راست‌اند و بعلاوه‌داریم:

$$(۲)\quad \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CQ}$$

لولائی‌که ازمفصل C می‌گذرد بین دو دستگاه IوII مشترك است.

دو دستگاه (I) و (II) به وسیلهٔ دومیله هم طول EB و ED به هم مربوط‌اند. این

دو میله درنقاط E وB وD به میله‌های دیگر مفصل شده‌اند.(درشکل ۱۱ دومیله EB و ED را رسم نکرده‌ایم)

دستگاه حاصل از دستگاههای (I) و (II) و دو میلهٔ EB و ED را دستگاه R می‌نامیم.

در دستگاه R هنگامی که میله‌ها حرکت کنند همواره سه نقطهٔ A و C و E بر یك خط راست‌اند زیرا این سه‌نقطه برروی عمود منصف پاره خط BD جای دارند. چون دو خط ωCP و MCQ به‌ترتیب بردوخط CA و CE عمودا‌ند پس هنگامی که میله‌های دستگاه حرکت می‌کنند چهار نقطهٔ ω و M و Q و P همواره بریك خط راست‌اند.

از مطلب اخیر و رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{QP}$$

از آنچه یاد شد معلوم می‌شود‌که دستگاه R یك سیسوئید نگار است.

میله Aω در نقطهٔ ω دارای سوراخی است‌که سوزنی ازآن‌عبور می‌کند واین سوزن عمود برصفحهٔ ωAB است. میله EM در نقطهٔM دارای سوراخی است‌که مداد رسم‌کنندهٔ منحنی سیسوئیدی ازآن عبور می‌کند. امتداد این مداد بر صفحهٔ MEG عمود است.

میلهٔ AP در نقطهٔ P دارای سوراخی است‌که میلهٔ نازکی ازآن عبور می‌کند که امتداد آن برصفحهٔ PAD عمود است،این میله از شیار راست Δ که در پلاك مستطیل‌شکل S به‌وجود آمده است می‌گذرد.

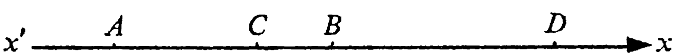
اکنون برای رسم منحنی سیسوئیدی Γ که هادی‌آن منحنی C وقطب آن نقطهٔ O است، پلاك S را روی صفحهٔ P چنان قرار می‌دهیم‌که شیار Δ روی خط D قرار گیرد ، نیز سوزن ω دستگاه را در قطب ω قرار می‌دهیم ونقطهٔ Q را روی منحنی C حرکت می‌دهیم، مدادی که‌در نقطهٔ M است منحنی سیسوئیدی مطلوب را رسم می‌کند.

۱۲. یك رابطهٔ توافقی

اگر نقاط A و B و C و D تشکیل تقسیم توافقی دهند، رابطه‌های زیر محققاند:

$$\overline{AB}^{2}=\overline{AC}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{BD} \qquad (۱)$$

$$\overline{CD}^{2}=\overline{CA}\cdot\overline{CB}+\overline{DA}\cdot\overline{DB} \qquad (۲)$$



شکل۱۲

اثبات. چنین داریم:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (۳)$$

محور $x'x$ را منطبق برخط AB اختیار می‌کنیم و بر روی آن، نقطه A را مبدا می‌گیریم (برای آسانی محاسبه). طولهای نقطه‌هـای B و C و D را در روی این محور، به ترتیب b و c و d می‌نامیم. رابطه (۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{-c}{b-c}=\frac{d}{b-d}$$

ویا

$$c(d-b)=d(b-c)$$

به دو طرف تساوی بالا، عبارت $-b(d-b)$ را می‌افزاییم حاصل می‌شود:

$$(c-b)(d-b)=d(b-c)-b(d-b)$$

پس‌از اختصار نتیجه می‌شود:

$$b^2=cd+(c-b)(d-b) \qquad (۴)$$

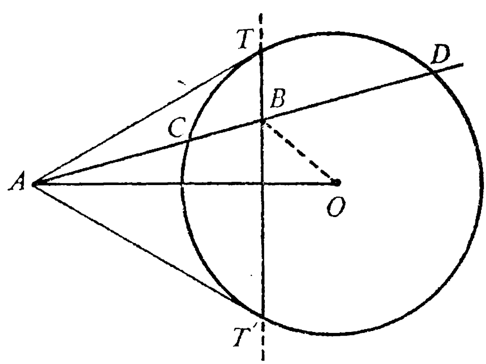
رابطه (۴)، همان رابطه (۱) است.

با استدلالی مشابه به‌آنچه گذشت می‌توان درستی رابطه (۲) را ثابت کرد.

مورد استعمال

الف. قضیه. دایره (O,R) و نقطه ثابت A در صفحه آن مفروض است. خط‌متحرك AX دایره مفروض‌را در نقاط C و D قطع می‌کند. مطلوب است مکان‌هندسی نقطه B مزدوج توافقی نقطه A نسبت به‌نقطه‌های C و D هنگامی که خط AX حول نقطه A بچرخد.

قضیه بالا قضیه اساسی قطب وقطبی‌است.



شکل ۱۳

اثبات. بنابر رابطه توافقی (۱) یا (۲) می‌نویسیم:

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{BD} \qquad (۵)$$

اما بنابر یکی از قضیه‌های قوت نقطه نسبت به دایره، می‌توان نوشت:

$$\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\overline{AO}^2-R^2$$

$$\overline{BC}\cdot BD=\overline{BO}^2-R^2$$

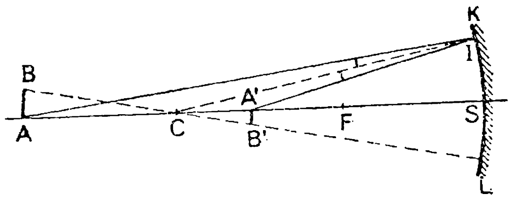
رابطه (۵) با رعایت دو رابطه بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\overline{BA}^2-\overline{BO}^2=\overline{AO}^2-2R^2 = \text{ثابت}$$

یعنی تفاضل مربعهای فاصله‌های نقطهٔ متحرك B از دو نقطه ثابت A وO مقداری است ثابت پس مکان آن خطی است مستقیم عمود بر AO.

ب. کاربرداز در آینه‌های کروی.

آینه کروی M به مرکز C را در نظر می‌گیریم .شکل(۱۴). تصویرشکل AB را به A´B´ نموده‌ایم. برای ترسیم‌تصویر A´B´ ،شعاع تابش دلخواه AI را رسم می‌کنیم وزاویه CIA´ را مساوی زاویه AIC می‌سازیم، نقطه A´ تصویر نقطه A حاصل می‌شود (زیرا می دانیم کـه شعاع تابش و شعاع بازتاب نسبت بـه شعاعی از آینه که از نقطه فرود می گذرند قرینه‌اند).



شکل ۱۴

چون زاویه دهانه آینه یعنی زاویه گشادگی KCL کوچك است (مثلا در حدود $\frac{۱}{۲۰}$ رادیان یا ۳ درجه[1]) پس زاویه CIS محسوساً یك زاویه قائمه است زیرا مثلث CIS متساوی‌الساقین است و دراین مثلث زاویه رأس کوچك است . پس خط IS نیمساز خارجی زاویه AIA' است لذا دستگاه حاصل از چهار خط AIوA´I و CI و SI ، یك دستگاه اشعه توافقی است پس بنا بر رابطه توافقی (۱)و(۲) می‌توان نوشت:

$$\overline{SC}^{۲}=\overline{SA}\cdot\overline{SA'}+\overline{CA}\cdot\overline{CA'}$$

ویا

$$R^{۲}=۴f^{۲}=\overline{SA}\cdot\overline{SA'}+\overline{CA}\cdot\overline{CA'}$$

در رابطه بالا f فاصله‌کانونی است و SA و SA´ فاصله‌های راس آینه از شئی و تصویراند

۱ــ برای آنکه شکل واضح باشد زاویه KCL رابزرگ گرفته‌ایم.

و CA و CA' فاصله‌های مرکز آینه از شئی وتصویراند.

رابطه‌های:

رابطهٔ **دکارت**
$$\frac{۱}{SA}+\frac{۱}{SA'}=\frac{۲}{SC}=\frac{۱}{SF} \qquad (۶)$$

و

رابطهٔ **نیوتون**
$$\overline{FA}\cdot\overline{FA}'=\overline{FS}^{۲} \qquad (۷)$$

همان رابطه‌های توافقی مشهوراند که در هندسه از آنها سخن میرود.

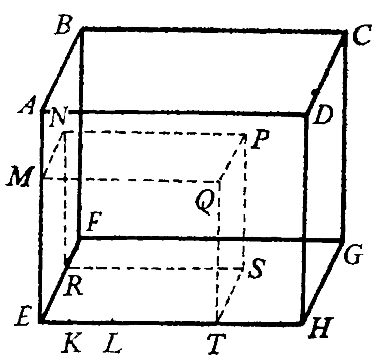
۱۳. تعبیر هندسی رابطهٔ

$$(\sum_{۱}^{n} i)^{۳} - \sum_{۱}^{n} i^{۳} = ۳\sum_{k=۱}^{k=n}\left[k(\sum_{۱}^{k} i)^{۲} - k^{۲}(\sum_{۱}^{k} i)\right]$$

مطلب بالا تعمیم کارکرجی است.

اثبات. برای اثبات درستی رابطه بالا، مکعب **ABCDEFGH** را به ضلع $EH = \sum_{۱}^{n} i$ در نظر می‌گیریم و آن را مکعب **I** می‌نامیم و فرض می‌کنیم:

$$EK = ۱ \ , \ KL = ۲, \cdots, \overline{TH} = n$$



شکل۱۵

اکنون مکعب **II** به ضلع **ET** یعنی مکعب **MNPQERST** را از مکعب **I** جدا می‌کنیم و جسم باقیمانده را $R_۱$ می‌نامیم. اندازه جسم باقیمانده چنین است:

$$V_1 = 3n(\sum_1^n i)^2 - 3n^2 \sum_1^n i) + n^3$$

سپس از مکعب II، مکعب III به ضلع $\sum_1^{n-1} i$ را جدا می‌سازیم و جسم باقیمانده را R_2 می‌نامیم و همچنین . . .

عبارتهای حجم‌های R_2، R_3، . . . را با روشی که‌برای محاسبه حجم جسم R_1 به‌کار بردیم حساب می‌کنیم. حجم‌های جسم‌های R_1، R_2، R_3، . . . را جمع می‌کنیم و حاصل‌را مساوی با $(\sum_1^n i)^3$ که حجم مکعب I است قرار می‌دهیم رابطهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۱۴. تعمیم قضیهٔ ماکلورن در فضای n بعدی

قضیهٔ ماکلورن. زاویهٔ دلخواه OU_1U_2 ونقطهٔ P واقع در صفحهٔ این زاویه و به‌فاصله‌های مساوی از دوضلع آن مفروض‌اند. دایرهٔ متغیر ω که همواره بر دو نقطهٔ ثابت O و P می‌گذرد دونیمخط OU_1 و OU_2 را به‌ترتیب در نقاط A_1 و A_2 قطع می‌کند بطوری‌که مجموع:

$$\overline{OA_1}+\overline{OA_2}$$

ثابت می‌ماند.

تعمیم قضیهٔ ماکلورن. کنج دلخواه $OU_1U_2U_3\ldots U_n$ در فضای n بعدی ونقطهٔ P که از وجوه این‌کنج به‌یك فاصله است مفروض‌اند. کره متغیر S که همواره بر دو نقطهٔ ثابت O و P می‌گذردنیمخط‌های OU_1 ، EU_2 ، OU_3 ، ... و OU_n را به‌ترتیب در نقاط A_1، A_2، A_3، ... و A_n قطع می‌کند بطوری‌که مجموع

$$\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\overline{OA_3}+\cdots+\overline{OA_n}$$

ثابت می‌ماند.

اثبات

قضیهٔ ماکلورن با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس در چهار ضلعی محاطی ونیز با استفاده از قضایای مربوط به مقاله دوم ثابت شده است.

نگارنده قضیهٔ ماکلورن را با تبدیل انعکاس ثابت‌کرده است. این طریقهٔ اثبات‌امکان می‌دهدکه قضیهٔ ماکلورن را درفضای سه‌بعدی و در فضای $n>3$ بعدی تعمیم دهیم .

برای اثبات قضیه درفضای n بعدی، دستگاه مختصات $Ox_1x_2x_3\ldots x_n$ را در نظر می‌گیریم که محورهای آن دو به دو برهم عمودند، معادلهٔ کرهٔ Σ که بر نقطهٔ O مبدأ مختصات می‌گذرد چنین است

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_nx_n=0 \qquad (۱)$$

اکنون نقطه O را قطب انعکاس و p را قوت انعکاس اختیار می‌کنیم وثابت می‌کنیم منعکس کرهٔ Σ نسبت به‌نقطهٔ O ، یك صفحه است یعنی بطورکلی منعکس یك کره نسبت به‌یکی از نقاط آن، یك صفحه است.

منعکس یك نقطهٔ $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ نقطهٔ $M'(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$ است بطوری که اولا سه نقطهٔ O و M و M' بریك خط راست باشند وثانیاً $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=p$ باشد.

این دو شرط را می‌توان چنین نوشت:

$$\mathrm{I}\begin{cases}\dfrac{x_1}{x'_1}=\dfrac{x_2}{x'_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{x'_n}\\[2mm] \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{x'^2_1+x'^2_2+\cdots+x'^2_n}=p\end{cases}$$

از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{II}\begin{cases}x_1=\dfrac{px'_1}{x'^2_1+x'^2_2+\cdots+x'^2_n}\\[2mm] x_2=\dfrac{px'_2}{x'^2_1+x'^2_2+\cdots+x'^2_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=\dfrac{px'_n}{x'^2_1+x'^2_2+\cdots+x'^2_n}\end{cases}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر نقطهٔ M سطح کرهٔ Σ را بپیماید نقطه M' منعکس آن یك صفحه را می‌پیماید. برای این منظور در معادله کرهٔ Σ یعنی معادله (۱) به‌جای x_1، x_2، ...،وx_n مقادیر آنها از رابطه‌های دستگاه II می گذاریم و اختصارهای لازم را به‌عمل می‌آوریم حاصل می‌شود:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n+p=0$$

معادلهٔ بالا معادلهٔ یك صفحه است. پس ثابت شد که منعکس یك کره نسبت به‌یکی از نقاط آن یك صفحه است.

اکنون دستگاه مختصات $Ou_1u_2\ldots u_n$ راکه محورهای آن Ou_1 ، Ou_2 ، ...، به‌ترتیب بر یالهای OU_1،OU_2،... کنج $OU_1U_2\ldots U_n$ منطبق‌اند درنظر می گیریم.

منعکس کرهٔ S را نسبت به‌نقطه O با قوت p می‌سازیم یك صفحه حاصل می‌شود که آن را Π می‌نامیم بدیهی است که صفحه Π برنقطه ´P منعکس نقطه P می‌گذرد. حال اگر کره S تغییر کندولی همواره بردونقطه O و P بگذرد منعکس آن یعنی صفحه Π تغییر خواهدکرد ولی همواره برنقطه ´M خواهدگذشت.

نقاط تلاقی‌صفحه Π را با یالهای کنج مفروض، A'_{1}، A'_{2}، ...،و A'_{n} می‌نامیم و قرار می‌دهیم:

$$\overline{OA'_{1}}=a_{1}\ ,\ \overline{OA'_{2}}=a_{2}\ ,\ \dots\ ,\ \overline{OA'_{n}}=a_{n}$$

معادله صفحه Π در دستگاه مختصات $Ou_{1}u_{2}\dots u_{n}$ چنین است :

$$\frac{u_{1}}{a_{1}}+\frac{u_{2}}{a_{2}}+\dots+\frac{u_{n}}{a_{n}}=1 \qquad (2)$$

اگر مختصات نقطهٔ P را درهمین دستگاه مختصات ، $(l,l,\dots,l)$ فرض کنیم چون مختصات این نقطه در معادله (۲) صدق می‌کند پس:

$$\frac{1}{a_{1}}+\frac{1}{a_{2}}+\dots+\frac{1}{a_{n}}=\frac{1}{l} \qquad (3)$$

چون نقاط A'_{1} ، A'_{2} ، ... و A'_{n} به‌ترتیب منعکس‌های نقاط A_{1}،A_{2}،...،وA_{n} اند پس:

$$\overline{OA_{1}}=\frac{p}{a_{1}}\ ,\ \overline{OA_{2}}=\frac{p}{a_{2}}\ ,\ \dots\ ,\ \overline{OA_{n}}=\frac{p}{a_{n}}$$

از رابطه (۳) و رابطه‌های اخیر حاصل می‌شود:

$$\overline{OA_{1}}+\overline{OA_{2}}+\dots+\overline{OA_{n}}=\frac{p}{l}$$

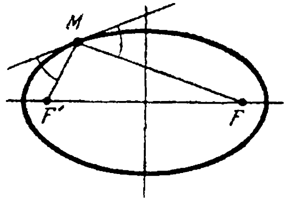
چون p و l اعداد ثابت‌انـد پس $\frac{p}{l}$ ثابت‌استولذامجموع.

$$\overline{OA_{1}}+\overline{OA_{2}}+\dots+\overline{OA_{n}}$$

با تغییر کرهٔ S ثابت می‌ماند.

۱۵. تعمیم قضیه مماس بر بیضی در سطح بیضوار دوار

قضیه. خط مماس بر بیضی با دو شعاع حاملی که از نقطه تماس می‌گذرند زاویه‌های مساوی می‌سازد. شکل ۱۶



شکل ۱۶

تعمیم قضیه. خط مماس بر سطح بیضوار دوار، با دو شعاع حاملی که از نقطه تماس می‌گذرند دو زاویه مساوی می‌سازد و این دو زاویه در حالت کلی در دو طرف صفحهٔ نصف‌النهاری که از نقطه تماس می‌گذرد قرار دارند.

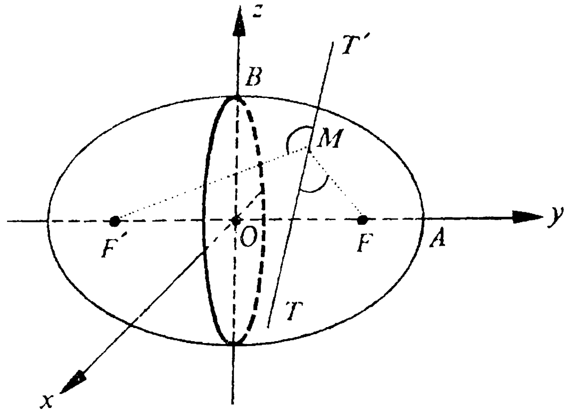
اثبات. خط TT' را که در نقطه M به این سطح مماس است در نظر می‌گیریم. شکل (۱۷).

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$F\hat{M}T = F'\hat{M}T'$$

در این شکل داریم:

$\overline{OA} = a \ , \ \overline{OB} = b \ , \ F'F = 2c$



شکل۱۷

معادلهٔ بیضوار دوار درحول محور $\mathbf{Oy}$، چنین‌است:

$$\frac{y^{۲}}{a^{۲}}+\frac{x^{۲}+z^{۲}}{b^{۲}}=۱ \qquad (۱)$$

اندازه های جبری تصاویر بردارهای $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\overrightarrow{\mathbf{MF'}}$ بر روی محور هـای مختصات چنین است :

$$\overrightarrow{\mathbf{MF}}\left|\begin{array}{l}-x\\ c-y\\ -z\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{\mathbf{MF'}}\left|\begin{array}{l}-x\\ -c-y\\ -z\end{array}\right.$$

کوسینوسهای‌هادی دونیمخط $\mathbf{MF}$و $\mathbf{MF'}$ چنین‌است:

$$\overrightarrow{\mathbf{MF}}\left|\begin{array}{l}\dfrac{-x}{\alpha}\\[2ex] \dfrac{c-y}{\alpha}\\[2ex] \dfrac{-z}{\alpha}\end{array}\right. \qquad \alpha=\sqrt{x^{۲}+(c-y)^{۲}+z^{۲}}$$

$$\overrightarrow{MF'}\left|\begin{array}{l}\dfrac{-x}{\beta}\\[2ex]\dfrac{-c-y}{\beta}\\[2ex]\dfrac{-z}{\beta}\end{array}\right.\qquad\qquad \beta=\sqrt{x^2+(c+y)^2+z^2}$$

کوسینوسهای هادی‌دو نیمخط MT و MT' چنین‌است:

$$MT\left|\begin{array}{l}\dfrac{dx}{ds}\\[2ex]\dfrac{dy}{ds}\\[2ex]\dfrac{dz}{ds}\end{array}\right.\qquad\qquad MT'\left|\begin{array}{l}-\dfrac{dx}{ds}\\[2ex]-\dfrac{dy}{ds}\\[2ex]-\dfrac{dz}{ds}\end{array}\right.$$

بنابر رابطه حاصلضرب عددی (اسکالر) دوبردار می‌توان نوشت:

$$(2)\quad \cos F\hat{M}T=-\frac{xdx+(y-c)dy+zdz}{\alpha\cdot ds}$$

و

$$(3)\quad \cos F'\hat{M}T'=-\frac{xdx+(y+c)by+zdz}{\beta\cdot ds}$$

ازدوطرف رابطه (۱) دیفرانسیل می‌گیریم حاصل می‌شود:

$$(4)\quad \frac{ydy}{a^2}+\frac{xdx+zdz}{b^2}=0$$

صورت‌کسر طرف راست رابطه(۲)، بارعایت رابطه(۴) وتساوی مسلم $a^2=c^2+b^2$ به‌صورت زیرخلاصه می‌شود:

$$(\frac{c^2}{a^2}y-c)dy$$

عبارت α بارعایت رابطه (۱) وتساوی محقق $a^2=c^2+b^2$ به‌شکل زیرخلاصه می‌شود:

$$\left(\frac{c}{a}y-a\right)$$

پس :

$$(۵)\quad \cos\widehat{FMT}=-\frac{c}{a}\cdot\frac{dy}{ds}$$

برای محاسبهٔ $\cos\widehat{F'MT'}$، کافی‌است درطرف راست رابطهٔ (۵) مقدار c رابه $-c$ و dy را به $-dy$ تبدیل کنیم. چنین‌می کنیم، حاصل می‌شود:

$$(۶)\quad \cos\widehat{F'MT'}=-\frac{c}{a}\cdot\frac{dy}{ds}$$

ازمقایسه رابطه‌های (۵) و (۶) نتیجه می‌شود:

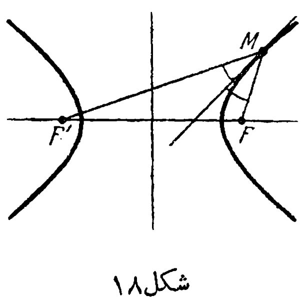
$$\cos\widehat{FMT}=\cos\widehat{F'MT'}$$

ولذا :

$$\widehat{FMT}=\widehat{F'MT'}$$

۱۶ . تعمیم قضیه مماس بر هذلولی در سطح هذلولیوار دوار دو پارچه

قضیه. خط مماس برهذلولی بادوشعاع حاملی که از نقطه تماس می‌گذرند زاویه‌های مساوی می‌سازند. شکل ۱۸

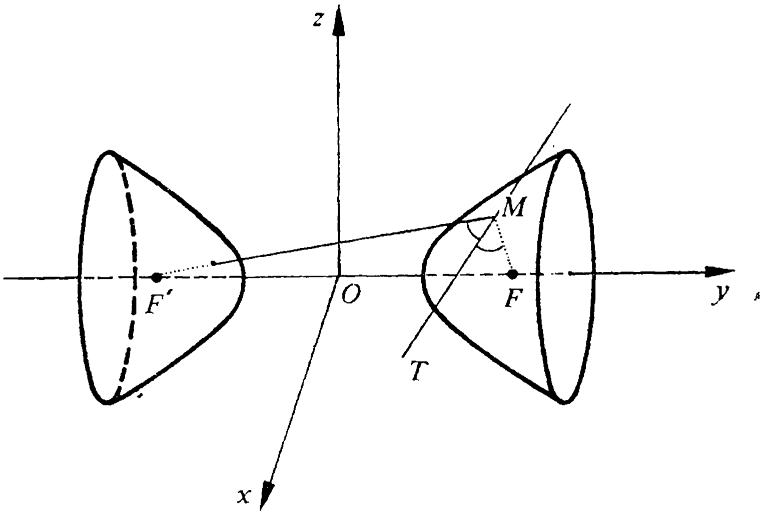


شکل۱۸

تعمیم قضیه . خط مماس برسطح هذلولیوار دوار دوپارچه بادوشعاع حاملی که از نقطه تماس می‌گذرند دوزاویه مساوی تشکیل می‌دهد واین دوزاویه در حالت کلی دریک طرف صفحه نصف‌النهاری که برنقطه تماس می‌گذرد قراردارند. شکل۱۹

اثبات. خط MT مماس برسطح رادرنظر می‌گیریم می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\widehat{FMT}=\widehat{F'MT}$$



شکل۱۹

معادله هذلولیوار دوار دوپارچه که محور دوران آن محور Oy است چنین‌است:

$$(١)\quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2+z^2}{b^2}=1$$

اندازه‌های جبری تصویر های دوبردار $\overrightarrow{MF}$ و $\overrightarrow{MF'}$ برروی‌محورهای مختصات چنین‌اند :

$$\overrightarrow{MF}\left|\begin{array}{l}-x\\ c-y\\ -z\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{MF'}\left|\begin{array}{l}-x\\ -c-y\\ -z\end{array}\right.$$

لذاکوسینوسهای هادی دونیمخط MF و MF′ به‌ترتیب چنین‌اند:

$$MF\left|\begin{array}{l}\dfrac{-x}{\alpha}\\[2mm] \dfrac{c-y}{\alpha}\\[2mm] \dfrac{-z}{\alpha}\end{array}\right. \qquad \alpha=\sqrt{x^2+(c-y)^2+z^2}$$

$$MF' \left| \begin{array}{l} -x \\ -c-y \\ -z \end{array} \right. \qquad \beta=\sqrt{x^{2}+(c+y)^{2}+z^{2}}$$

کوسینوسهای هادی خط مماس MT چنین‌اند:

$$MT \left| \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{array} \right.$$

بنابررابطه حاصلضرب عددی دوبردار می‌توان نوشت:

$$(٢) \qquad \cos \widehat{FMT} = -\frac{xdx+(y-c)dy+zdz}{\alpha \cdot ds}$$

و

$$(٣) \qquad \cos \widehat{F'MT} = -\frac{xdx+(y+c)dy+zdz}{\beta \cdot ds}$$

ازدوطرف رابطهٔ (١) دیفرانسیل می گیریم حاصل‌می‌شود:

$$(۴) \qquad \frac{ydy}{a^{2}}-\frac{xdx+zdz}{b^{2}}=0$$

صورت کسر طرف راست رابطهٔ (٢) با رعایت رابطهٔ (۴) و تساوی مسلم $c^{2}=a^{2}+b^{2}$ به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$(\frac{c^{2}}{a^{2}}y-c)dy$$

عبارتα بارعایت رابطهٔ(١) وتساوی‌مسلم $c^{2}=a^{2}+b^{2}$ به‌شکل زیرخلاصه می‌شود:

$$\alpha=(\frac{c}{a}y-a)$$

پس :

$$(۵) \quad \cos \widehat{FMT} = -\frac{c}{a} \cdot \frac{dy}{ds}$$

صورت کسر طرف دوم رابطهٔ (۳) رابه‌صورت زیر در می‌آوریم:

$$\left(\frac{c^2}{a^2}y+c\right)dy$$

عبارت β پس‌از اختصار چنین می‌شود:

$$\beta=\left(\frac{c}{a}y+a\right)$$

ولذا:

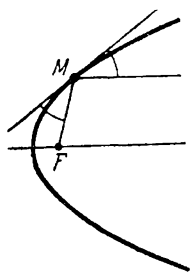
$$(6)\quad \cos \widehat{F'MT}=-\frac{c}{a}\cdot\frac{dy}{ds}$$

ازمقایسه رابطه‌های (۵)و(۶) نتیجه می‌شود:

$$\widehat{FMT}=\widehat{F'MT}$$

۱۷. تعمیم قضیه مماس بر سهمی در سطح سهمیوار دوار

قضیه. خط مماس بر سهمی با شعاع حاملی که از نقطه تماس می‌گذرد و با خطی که از نقطه تماس موازی محور سهمی رسم شود دو زاویه مساوی می‌سازد. شکل ۲۰



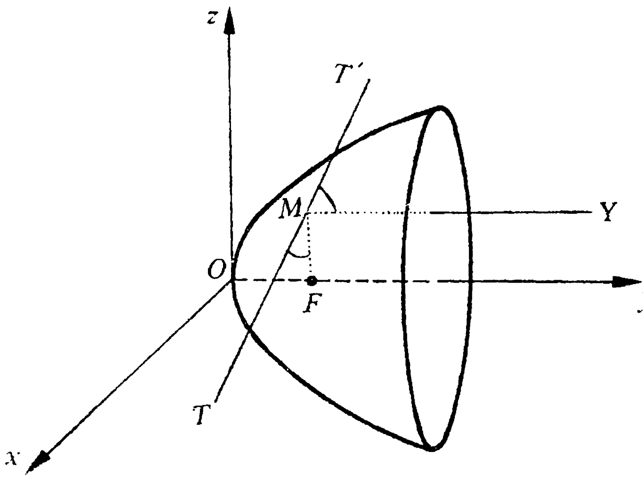
شکل ۲۰

تعمیم قضیه. خط مماس برسطح سهمیوار دوار با شعاع حاملی که از نقطه تماس می‌گذرد وخطی که ازنقطه‌تماس موازی محور سطح مذکور رسم شود دو زاویه‌مساوی‌می‌سازد و این دو زاویه در حالت کلی در دوطرف صفحه نصف‌النهاری کـه بـر نقطه تماس می‌گذرند قرار دارند.

اثبات. خط TT' مماس برسطح سهمیواردوار و نیمخط MY موازی و همسو بـا نیمخط Oy است می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\widehat{FMT} = \widehat{YMT'}$$

معادله سطح سهمیوار دوار در حول محور Oy به صورت زیر است:



شکل۲۱

$$(۱)\qquad x^{۲}+z^{۲}=۲py$$

اندازه‌های جبری تصویرهای بردار $\overrightarrow{MF}$ برمحورهای مختصات چنین است:

$$\overrightarrow{MF}\left|\begin{array}{l} -x \\ c-y \\ -z \end{array}\right.$$

c فاصله کانون F ازرأس O است

لذا کوسینوسها هادی نیمخط MF چنین است:

$$MF\left|\begin{array}{l} \dfrac{-x}{\alpha} \\[2ex] \dfrac{c-y}{\alpha} \\[2ex] \dfrac{-z}{\alpha} \end{array}\right. \qquad \alpha=\sqrt{x^{۲}+(c-y)^{۲}+z^{۲}}$$

کوسینوسهای هادی نیمخط مماس MT چنین است:

$$MT\left|\begin{array}{l} \dfrac{dx}{ds} \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} \\[2ex] \dfrac{dz}{ds} \end{array}\right.$$

بنابر رابطه عددی دو بردار می‌نویسیم:

$$(۲) \qquad \cos \widehat{FMT} = -\frac{xdx+(y-c)dy+zdz}{\alpha \cdot ds}$$

از دو طرف رابطه (۱) دیفرانسیل می‌گیریم حاصل می‌شود.

$$xdx+zdz=pdy$$

صورت کسر طرف راست رابطه (۲) با رعایت رابطهٔ بالا و رابطه مسلم $p=۲c$ به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$(y+c)dy$$

عبارت α با رعایت رابطهٔ (۱) و تساوی مسلم $p=۲c$ بدین صورت درمی‌آید:

$$a=(y+c)$$

پس:

$$(۴) \qquad \cos \widehat{FMT} = -\frac{dy}{ds}$$

برای محاسبه $\cos \widehat{YMT'}$، کوسینوسهای هادی‌دونیمخط MY و MT' را می‌نویسیم:

$$MY \left| \begin{array}{l} ۰ \\ \\ ۱ \\ \\ ۰ \end{array} \right. \qquad\qquad MT' \left| \begin{array}{l} -\dfrac{dx}{ds} \\ \\ -\dfrac{dy}{ds} \\ \\ -\dfrac{dz}{ds} \end{array} \right.$$

با رعایت مقادیر بالا حاصل می‌شود:

$$(۵) \qquad \cos \widehat{YMT'} = -\frac{dy}{ds}$$

از مقایسه دو رابطه (۴) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$\widehat{FMT} = \widehat{YMT'}$$

۱۸. تعمیم یکی از قضیه‌های هذلولی در سطح هذلولیوار دوار دوپارچه

قضیه*. اگرازنقطه M واقع برهذلولی H مماسی برآن رسم‌کنیم‌ونقاط تلاقی‌خط مماس‌را بادوخط مجانب هذلولی، A وB بنامیم خواص زیرمحقق است.

الف . نقطه M وسط پاره‌خط AB است.

ب. باتغییر نقطه M برهذلولی H، اندازه سطح مثلثی‌که خط‌مماس بادومجانب‌می‌سازد ثابت می‌ماند.

تعمیم قضیه. اگرازنقطه M واقع برسطح هذلولیوار دوار دوپارچه H، صفحه T رابرآن مماس‌کنیم ومقطع این‌صفحه رابامخروط مجانب سطح مذکور بیضی E بنامیم خواص زیرمحقق است:

الف. نقطه M مرکز بیضی E است.

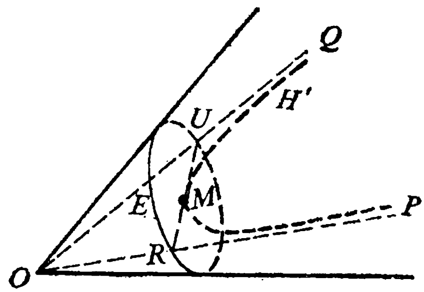
ب. باتغییر نقطه M برسطح H، حجم مخروطی‌که صفحه مماس از مخروط مجانب جدامی‌کند ثابت می‌ماند.

اثبات .

الف. می‌خواهیم‌ثابت‌کنیم نقطه M مرکز بیضی E است.

* این قضیه در الکترونیك درمبحث لامپهای الکترونی و ترانزیستورهابه‌کار می‌آید.

برخط OM صفحه دلخواه ω راعبور می‌دهیم ومقطع آن را باسطح H، هذلولی ´H می‌نامیم. فصل‌مشترك صفحه ω رابا سطح مخروط مجانب، دوخط OP و OQ می‌نامیم. بدیهی است که این‌دوخط مجانب‌های منحنی ´H‌اند.



شکل۲۲

فصل مشترك صفحه مماس برسطح H درنقطه M با سطح مخروط مجانب را بیضی E می‌نامیم. نقاط تلاقی‌این‌بیضی‌را بادوخط OP وOQ به R وU نمایش داده‌ایم.

اگر ازنقطه M برهذلولی ´H مماس رسم‌می کنیم، این‌مماس هم در صفحه ω وهم در صفحه بیضی E قراردارد پس‌این مماس همان خط RU است. طبق قضیه‌ای که در صفحه قبل درباره خط مماس برهذلولی ذکر کردیم نتیجه می‌شود که :

$$RM = MU$$

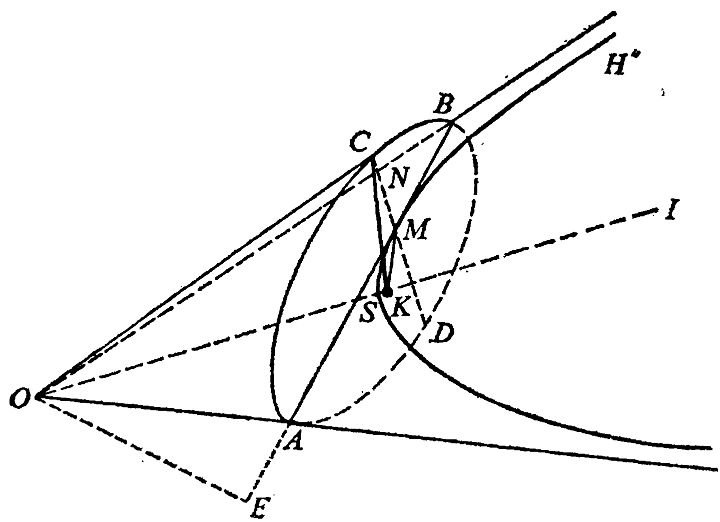
اکنون اگرصفحه ω را درحول خط OM حرکت دهیم، به‌همان شیوه که هم اکنون ثابت‌کردیم می‌توان ثابت‌کرد که نقطه M همواره بروسط پاره‌خطی که فصل‌مشترك صفحهω با بیضی E است قراردارد. ازاینجا نتیجه می‌شود که نقطه M مرکز بیضی E است.

ب. ثابت می‌کنیم حجم‌مخروطی که صفحه مماس‌برسطح‌هذلولیوار H، ازسطح مخروط مجانب جدا می‌کند ثابت است.

فصل‌مشترك صفحه نصف‌النهاری‌که برنقطه M می‌گذرد باسطح H يك‌هذلولی است‌که آن‌را "H می‌نامیم. شکل۲۴. خط AMB مماس‌براین‌هذلولی‌یکی‌از محورهای بیضی E است (به علت تقارن نسبت به‌صفحه نصف‌النهاری)

خط CMD محور دیگراین بیضی‌برصفحه مثلث OAB عموداست.

اندازه حجم مخروطی‌که رأس‌آن نقطه O وقاعده‌آن بیضی‌باقطرهای AB وCD است چنین است:



شکل ۲۳

$$V=\frac{۱}{۳}\overline{OE}\cdot(\pi\overline{MA}\cdot\overline{MC})$$

دررابطه بالا، OE ارتفاع مخروط است. رابطه بالارا به‌صورت زیر می‌نویسیم:

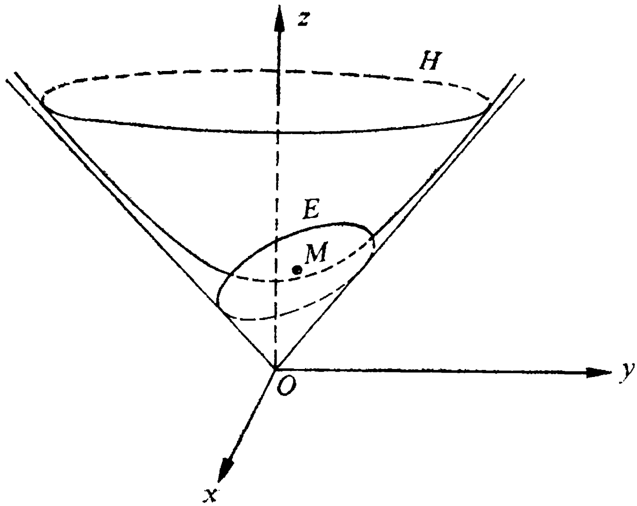
$$V=\frac{۱}{۳}\pi(\overline{OE}\cdot\overline{MA})\cdot\overline{MC}$$

مقدار داخل‌پرانتز اندازه سطح مثلث OAB است. هنگامی‌که نقطه M روی‌هذلولی H" حرکت‌کند اندازه سطح‌مثلث OAB ثابت می‌ماند (طبق‌قضیه مماس بر هذلولی،مذکور در صفحه۶۹). پس‌برای آنکه‌ثابت کنیم‌حجم V باتغییر نقطه M برسطح H ثابت‌می‌ماند کافی است ثابت‌کنیم طول قطر CD ازبیضی E باتغییرنقطه M برسطح H ثابت می‌ماند. برای‌اثبات‌این مطلب، ازنقطه M عمود MK را برخط OI محور سطح H وارد می‌کنیم. صفحه‌ای‌که از نقطه M برمحور OI عمود رسم‌شود سطح H وسطح مخروط مجانب را در دو دایره قطع می‌کندکه K مرکزمشترك آنها است و KM و KC شعاعهای آنها هستند. درمثلث قائم‌الزاویه KMC داریم:

$$\overline{MC}^{۲}=\overline{KC}^{۲}-\overline{KM}^{۲}$$

ثابت می‌کنیم‌که $(\overline{KC}^{۲}-\overline{KM}^{۲})$ باتغییرنقطه M برسطح H ثابت‌می‌ماند؛ بدین‌گونه مطلب موردنظر ثابت می‌شود.

معادله سطح $\mathbf{H}$ را می‌نویسیم:



شکل۲۴

$$\frac{z^۲}{a^۲}-\frac{x^۲+y^۲}{b^۲}=۱ \qquad (۱)$$

معادله سطح مخروط مجانب این‌سطح چنین است:

$$\frac{z^۲}{a^۲}-\frac{x^۲+y^۲}{b^۲}=۰ \qquad (۲)$$

درشکل‌بالا، محور $\mathbf{Oz}$ دستگاه مختصات برخط $\mathbf{OI}$ محورسطح $\mathbf{H}$ منطبق‌است. چون صفحه مثلث $\mathbf{KMC}$ برمحور $\mathbf{Oz}$ عموداست پس‌می‌توان نوشت:

$$\overline{KM}^۲=x_M{}^۲+y_M{}^۲$$

بارعایت معادله (۱) حاصل می‌شود:

$$(۳) \quad \overline{KM}^۲=\frac{b^۲}{a^۲}z_M{}^۲-b^۲$$

ونیز :

$$\overline{KC}^۲=x_C{}^۲+y_C{}^۲$$

بارعایت معادله (۲) حاصل می‌شود:

$$(۴)\ \overline{KC}^{2}=\frac{b^{2}}{a^{2}}z_{C}^{2}$$

عضوهای نظیر رابطه‌های (۳) و (۴) را ازهم کم می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$\overline{KC}^{2}-\overline{KM}^{2}=\frac{b^{2}}{a^{2}}(z_{C}^{2}-z_{M}^{2})+b^{2}$$

چون صفحه مثلث MKC موازی صفحه xOy است پس $z_{C}=z_{M}$ ولذا:

$$\overline{KC}^{2}-\overline{KM}^{2}=b^{2} \quad \text{ثابت}$$

چون حجم V باتغییر نقطه M برسطح H ثابت می‌ماند پس برای محاسبه حجم V کافی است یك حالت خاص درنظر بگیریم وما نقطه M را برنقطه S راس سطح هذلولیوار H اختیار می‌کنیم. دراینصورت مخروطی که صفحه‌مماس درنقطه S ازسطح مجانب جدامی‌کند یك مخروط دواراست که طول شعاع‌قاعده‌آن مساوی b وطول‌ارتفاع‌آن OS=a است پس:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi ab^{2}$$

ضمناً ثابت شدکه درمجموعه بیضی‌های E قطرهائی که امتداد آنها عمود برمحور دوران سطح H اند دارای طول ثابت‌اند.

به‌آسانی می‌توان ثابت کردقطری‌ازبیضی که عمود برمحور دوران است قطراقصر بیضی است. ثابت می‌کنیم:

$$(۵) \qquad CD<AB$$

نقطه M را برسطح H حرکت می‌دهیم تابرنقطه S قرار گیرد. صفحه‌ای که درنقطه S برسطح H مماس‌شود مخروط مجانب‌را دردایره‌ای که آن را Ω می‌نامیم قطع‌می‌کند. قطراین دایره مساوی پاره خط CD است.

اگرازنقطه S مماس برهذلولی "H رسم‌کنیم تادومجانب این‌منحنی‌را درنقاط ´A و ´B قطع‌کند پاره‌خط ´A´B قطری از دایره Ω است. پس برای اثبات نامساوی (۵) کافی است ثابت‌کنیم:

$$A'B'<AB$$

قرار می‌دهیم:

$$\overline{OA}=p\ ,\ \overline{OB}=q \quad \widehat{AOB}=\alpha$$

درمثلث OAB چنین داریم:

$$AB^{2}=p^{2}+q^{2}-2pq\cos\alpha \qquad (6)$$

اندازه سطح مثلث OAB چنین‌است:

$$s=\frac{1}{2}p\cdot q\sin\alpha \qquad (5)$$

ازدورابطه (۶)و(۷) حاصل‌می‌شود:

$$AB^{2}=p^{2}+q^{2}-4pqs\,cotg\alpha$$

چون باتغییرنقطه M مقدار $s\,cotg\alpha$ ثابت می ماند لذا برای‌آنکه $\overline{AB}^{2}$ مینیموم باشد لازم است $p^{2}+q^{2}$ مینیموم باشد.

رابطه مسلم زیررا می‌نویسیم:

$$p^{2}+q^{2}=(p-q)^{2}+2pq$$

چون‌دررابطه بالاحاصلضرب pq ثابت‌است پس $p^{2}+q^{2}$ وقتی‌مینیموم‌است‌که $(p-q)^{2}=0$ باشد ویا $p=q$. پس‌طول‌پاره‌خط AB وقتی مینیموم است‌که $OA=OB$ باشد یعنی پاره خط AB برپاره خط $A'B'$ منطبق‌شود، لذا:

$$A'B'<AB$$

۱۹. یکی از خواص مماسی سطحهای درجه‌دوم

قضیه. منحنی مسطح Γ واقع برسطح درجه‌دوم S ونقطه دلخواه H غیرواقع براین سطح را درنظر می‌گیریم. تصویرمنحنی Γ رانسبت به‌مرکز O برروی سطح Γ منحنی Γ' فرض می‌کنیم. نقاط X و X' رادونقطه نظیراز دومنحنی Γ و Γ' دراین‌تصویرمرکزی‌فرض می‌کنیم. ثابت‌کنید فصل‌مشترکهای صفحه‌های T و T' که برسطح S درنقاط X و X' مماس‌اند هنگامی که این‌نقاط منحنیهای Γ و Γ' را می‌پیمایند همواره دریك‌صفحه قراردارند.

برای‌مطالعه‌اثبات‌این‌مطلب‌رجوع کنیدبه‌کتاب«چندقضیه‌هندسه»اثر نگارنده. صفحه ۴۵ شماره ۶۱

۲۰. چند خاصیت مماسی از سطح درجه سوم $xyz=k$

اگر از نقطه M واقع برسطح درجه سوم S به‌معادلهٔ:

$$xyz=k$$

صفحه‌ای بر آن مماس کنیم ونقاط تلاقی این صفحه‌را با محورهای مختصات A وB وC بنامیم، خواص زیرمحقق است:

الف. نقطه M گرانیگاه مثلث ABC است[۱].

ب. اندازه حجم‌هرم $OABC$ باتغییر نقطه M برسطح S ثابت می‌ماند[۲].

پ. چنانچه ازنقطه‌ای دلخواه واقع بریکی‌از محور های مختصات خطهائی (یا صفحه هائی) برسطح S مماس کنیم مکان هندسی نقطه‌های تماس یك‌هذلولی است.

اثبات

راه نخست. نقطه $M(a,b,c)$ رابرسطح S درنظرمی گیریم و از آن‌نقطه ، صفحهٔ $x'o'y'$ راموازی صفحه xoy عبور می‌دهیم. این‌صفحه، سطحS رادر مقطع H' قطع‌می کند. این‌مقطع یك هذلولی‌است زیرامعادلهٔ آن دردستگاه مختصات $O'x'y'$ به‌صورت زیراست:

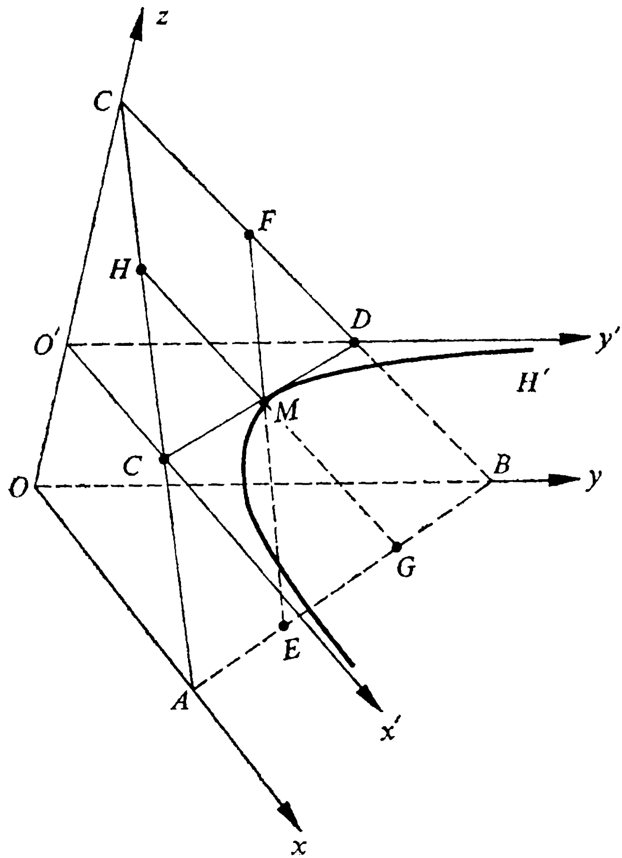
۱و۲ــ دوحکم (الف)و(ب) تعمیم‌های دوحکم زیراند:

اگرازنقطه M واقع برمنحنی هذلولی مماس بر آن رسم‌کنیم ونقطه های تلاقی‌آن را بادو مجانب منحنی ، AوB بنامیم خواص زیرمسلم است :

الف. نقطهM بروسط پاره‌خط AB واقع‌است.

ب. باتغییرنقطه M برمنحنی، اندازه سطح مثلث OAB ثابت می‌ماند.

$$x'x' = \frac{k}{c}$$



شکل ۲۵

اگرازنقطهٔ M، مماس CD رابرهذلولی ′H رسم کنیم تادو مجانب آن منحنی یعنی ′O′x و ′O′y رادرنقاط C وD قطع کندنقطه M بروسط پاره‌خط CD قراردارد(یکی‌ازقضیه های‌مقطع‌های مخروطی). می‌دانیم که خطCD درصفحه مماس‌برسطح S یعنی‌درصفحهٔABC قرار دارد.

نیزاگراز نقطهM صفحه‌هائی موازی باصفحه xOzوyOz رسم کنیم و مقطعهای آنها راباسطحSهذلولی‌های "Hو'"H بنامیم، مماسهای EFوGH که ازنقطهM برهذلولی‌های مذکور رسم‌می‌شوند درصفحهٔ مماس‌قرار می گیرند ونقطهM بروسط پاره‌خطهای EFوGH

واقع است.

ملاحظه می‌شود که از نقطهٔ M واقع بر صفحه مثلث ABC سه‌خط CD و EF و GH راموازی با اضلاع آن مثلث رسم کرده‌ایم ونقطه M بروسط این‌سه پاره‌خط قراردارد پس‌نقطهٔ M برروی سه‌میانه واقع است ودرنتیجه گرانیگاه مثلث ABC است.

ب. اگرازنقطهٔ M سه‌صفحه موازی باصفحه‌های مختصات رسم کنیم یك‌مکعب مستطیل P حاصل می‌شود که وجه‌های آن برسه صفحه مذکور وسه‌صفحه مختصات قرار دارند. حجم این‌معکب مستطیل $\frac{۲}{۹}$ حجم‌هرم $OABC$ است. هنگامی‌که نقطه M برسطح S حرکت‌می‌کند حجم مکعب مستطیل P ثابت می‌ماند زیرا:

$$\text{ثابت} = k = xyz = P\ \text{حجم مکعب مستطیل}$$

پس، اندازه حجم‌هرم $OABC$ باتغییر نقطه M برسطح S است ثابت‌می‌ماند.

پ. اگر نقطه ثابتی‌مانند A برمحور Ox اختیارکنیم وازآن نقطه‌صفحهٔ T را برسطح S مماس‌کنیم‌وفصل مشترك این‌صفحه مماس‌را باصفحه yoz خط BC بنامیم، باتغییر صفحه مماس‌حجم‌هرم $OABC$ ثابت مـی‌ماند (حکم قبل). درنتیجه باتغییر صفحه‌مماس، اندازهٔ سطح مثلث OBC ثـابت مـی مـاند، لـذامکان هندسی نقطهٔ K وسط پـاره خط BC یـك هـذلـولـی است [۱]. چـون نقطه M محـل تمـاس صفحه مماس T بـاسطح S مجانس نقطهٔ K درتجانس به‌مرکز A ونسبت $\frac{۲}{۳}$ است(خاصیت گرانیگاه‌مثلث)پس‌مکان‌هندسی نقطهٔ تماس M یك‌هذلولی‌است.

راه دوم: معادله سطح S چنین‌است:

$$f(x,y,z)=xyz-k=۰$$

معادله صفحه مماس برسطح S در نقطه $M(x,y,z)$ که براین سطح واقع است، به صورت زیراست:

$$(X-x)f'_x+(Y-y))f'_y+(Z-z)f'_z=۰$$

وچون:

$$f'_x=\frac{k}{x}\ ,\ f'_y=\frac{k}{y}\ ,\ f'_z=\frac{k}{z}$$

۱ـ اگردو نقطه A و B بردوخط OU و OV چنان حرکت کنند که اندازه‌سطح‌مثلث OAB ثابت‌باشد پوش‌خط AB یك‌هذلولی است ونقطه تماس خط AB باهذلولی، بروسط پاره‌خط AB واقع‌است.

پس‌معادله صفحه مماس چنین است:

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=۳$$

ازمعادله فوق مختصات نقاط C, B, A به‌دست می‌آید:

$$A\left|\begin{array}{l}X=۳x\\Y=۰\\Z=۰\end{array}\right.\qquad B\left|\begin{array}{l}X=۰\\Y=۳y\\Z=۰\end{array}\right.\qquad C\left|\begin{array}{l}X=۰\\Y=۰\\Z=۳z\end{array}\right.$$

ازرابطه‌های فوق معلوم می‌شودکه نقطهٔ M گـرانیگاه مثلث ABC است.

اثبات قسمت‌های(ب)و(پ)ازروی‌معادله‌صفحه‌مماس آسان‌است وبه‌عهده‌خواننده‌واگذارمی‌شود.

تبصره . اگرمحورهای مختصات عمود برهم‌نباشند حکمهای الف و ب و پ همچنان معتبراند یعنی‌اگرسطحی درنظربگیریم‌که حاصلضرب فاصله‌های نقاط‌آن ازسه صفحه دلخواه مقدارثابتی باشد احکام مذکور برای این‌سطح مسلم‌است.

۲۱. چند مسئله

۱. دستور اندازه سطح چهار ضلعی. در چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ مختصات چهار راس معلوم‌اند :

$$A_1 \left| \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \end{array} \right. , \quad A_2 \left| \begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} x_3 \\ y_3 \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} x_4 \\ y_4 \end{array} \right.$$

ثابت کنید اندازه سطح چهار ضلعی $A_1A_2A_3A_4$ چنین است:

$$(1) \qquad S=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & -1 \\ x_2 & y_2 & 1 & +1 \\ x_3 & y_3 & 1 & -1 \\ x_4 & y_4 & 1 & +1 \end{vmatrix}$$

حل. در چهار ضلعی مفروض دو قطر را رسم می‌کنیم تا چهار مثلث $A_1A_2A_3$ و $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ و $A_4A_1A_2$ حاصل شود . در باره اندازه سطح این مثلث‌ها و اندازه سطح چهار ضلعی مذکور رابطه زیر برقرار است:

$$(2) \qquad S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{4}\left(S_{A_1A_2A_3}+S_{A_2A_3A_4}+S_{A_3A_4A_1}+S_{A_4A_1A_2}\right)$$

می‌دانیم که اندازه سطح مثلث $A_1A_2A_3$ بر حسب مختصات سه راس آن چنین است :

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

به همین‌گونه ، اندازه‌های سطحهای سه مثلث $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ را با دترمینان می‌نویسیم و سپس اندازه‌های سطحهای چهار مثلث $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ را در رابطه (۲) می‌گذاریم. با اندك تأمل می‌توان دریافت که عبارتی که داخل پرانتز رابطه (۲) حاصل می‌شود نصف بسط دترمینانی است که دررابطه (۱) نوشته شده است .

۲. درستی رابطه زیر را ثابت کنید .

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{k=l}(-1)^{k}C_{n}^{2k+1}tg^{2k+1}\frac{2\pi}{n}=0$$

n عددی است صحیح ومثبت . اگر n فرد باشد $l=\frac{n-1}{2}$ و اگر n زوج باشد

$$l=\frac{n-2}{2}$$

حل. رابطه مسلم زیرا را می‌نویسیم :

$$(2)\quad (\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^{n}=1$$

اثبات درستی رابطه‌بالا با استفاده از دستور زیر آسان است:

$$(2)\quad (\cos x+i\sin x)^{m}=\sin mx+i\sin mx$$

اکنون طرف چپ رابطهٔ (۲) را بنابر دستور دوجمله‌ای نیوتون بسط می‌دهیم، بدین صورت:

$$(3)\quad (\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^{n}=\sum_{p=0}^{p=n}i^{p}\cdot C_{n}^{p}\cos^{n-p}\frac{2\pi}{n}\sin^{p}\frac{2\pi}{n}$$

در بسط بالا به‌جای توانهای i مقدارهای آنها را می‌گذاریم :

$$i^{0}=1\ ;\ i^{1}=i\ ;\ i^{2}=-1\ ;\ i^{3}=-i\ ;\ i^{3}=+1\ ,\ \cdots$$

مجموع جمله‌های موهومی بسط بالا چنین است (جمله‌هائی که در آنها توان i فرد است)

$$(۳) \quad \sum_{k=0}^{k=l} i^{2k+1} \cdot C_n^{2k+1} \cdot \cos^{n-(2k+1)} \frac{2\pi}{n} \cdot \sin^{2k+1} \frac{2\pi}{n}$$

عبارت بالا باید مساوی صفر باشدزیرا درسمت راست تساوی (۲) مقدار موهومی‌وجود ندارد. اگرعبارت (۳) را مساوی صفر بگذاریم و دوطرف تساوی‌حاصل را بر $i\cos^n\frac{2\pi}{n}\neq 0$ قسمت کنیم رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود

۳. ثابت‌کنید بین هرسه عدد مثبت c,b,a رابطهٔ زیر محقق است:

$$4(ab+bc+ac) = (\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}-\sqrt{c+a})\cdot(\sqrt{a+b}-\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})(-\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})$$

حل. کنج سه وجهی سه قائمه $OXYZ$ را در نظر می‌گیریم وبریالهای OX و OY و OZ آن به‌ترتیب، سه طول:

$$\overline{OC}=\sqrt{c}\ ,\ \overline{OB}=\sqrt{b}\ ,\ \overline{OA}=\sqrt{a}$$

را جدا می‌کنیم. طبق یکی از قضایای هندسه تحلیلی ، بین اندازه‌های سطحهای چهار مثلث ABC و OAB و OBC و OCA رابطهٔ زیر محقق است

$$(۱) \qquad S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA}$$

اما

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}$$

ولذا

$$S^2_{OAB} = \frac{1}{4}ab$$

و به همین شیوه حاصل می‌شود

$$S^{۲}_{OBC}=\frac{۱}{۴}bc \qquad S^{۲}_{OCA}=\frac{۱}{۴}ca$$

از طرفی می‌دانیم که اگر طولهای اضلاع مثلثی، α و β و γ ونصف محیط آن p باشد، اندازه سطح آن مثلث چنین است:

$$S=\sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)} \qquad (۲)$$

در مثلث ABC طولهای اضلاع چنین‌اند:

$$AB=\sqrt{a+b}\ ,\ BC=\sqrt{b+c}\ ,\ CA=\sqrt{c+a}$$

اگر این مقادیر را در دستور (۲) ببریم، اندازهٔ سطح مثلث ABC حاصل می‌شود. حال اگر در رابطهٔ (۱) به‌جای اندازه‌های سطحها ، عبارتهای آنها را بگذاریم، اتحاد مورد بحث به‌دست می‌آید.

۷. مجموع n جمله‌ای سری زیر را حساب کنید:

$$\sum_{K=۱}^{K=n-۱}\frac{۱}{\sin(x+K\frac{\pi}{n})\sin(x+(K-۱)\frac{\pi}{n})}$$

راهنمائی: برای حل این مسئله ازحکم شمارهٔ ۶۶ مشروح درکتاب «چند قضیه هندسه» اثر نگارنده استفاده کنید.

۸. تکمله بر قضیهٔ گوس. بر روی سطح مخروطی دلخواه S به رأس O، دونقطهٔ ثابت A و B اختیار می‌کنیم. بر سطح S یك منحنی دلخواه Γ که از دونقطهٔ A, B می‌گذرد درنظرمی گیریم. نقطهٔ دلخواه M را برمنحنی Γ اختیار می‌کنیم وزاویه‌خط OM را با صفحه‌ای که در نقطهٔ M بر منحنی Γ عمود است α می‌نامیم. ثابت کنیدانتگرال:

$$\int_{A}^{B}\frac{\cos\alpha\, ds}{r}$$

بر روی تمام منحنی‌های Γ که از A و B می‌گذرند و بر سطح S قرار دارند یکسان است. (در انتگرال بالا $r=\overline{OM}$ و ds جزء کمان است) .

آثاری ازمولف این کتاب

۱. درباره معادله‌های جبری (اثرتحقیقی). مشتمل بر:

الف. حل آنالوژیك معادله جبری وکاربردآن درمعادله‌های با ضریبهای پارامتری.

این‌موضوع درمجله AICA ارگان «انجمن بین‌المللی ماشینهای حساب آنالوژیك» منتشرشده است.

ب. دوروش برای حل‌معادله جبری‌درجه‌چهارم.

این مطلب در مجلهٔ Revue de mathematiques speciales منتشر شده است.

پ. بحثی درباره عدم امکان حل‌جبری معادله‌های جبری ازدرجه چهارم به‌بالا

ت. آباك‌برای حل‌معادلهٔ: $ax^p+bx^q+cx^r+d=0$

ث. روشی‌عملی برای حل‌معادله درجه پنجم.

ج. رابطه‌ای بین‌جوابها وضریبهای دومعادله دو مجهولی‌که هریك از آنها از درجه دوم‌است.

۲. چندقضیه هندسه (اثرتحقیقی)،

این کتاب شامل قضیه‌هائی‌است‌که مولف به‌راههای‌تازه اثبات‌کرده و یاتعمیم داده‌است. مولف قضیه‌های تازه‌ای نیز طرح‌کرده واثبات‌کرده است.

۳. چند مسئله مشهور هندسه (تالیف)

این کتاب شامل‌برخی مسائل‌مشهور هندسه است‌که کاربرد فیزیکی دارند ویادر زیبائی شناسی وتوجیه پدیده‌های طبیعت به‌کار می‌آیند ویاروش استدلال درآنها موردتوجه بوده‌است.

۴. تمرینهای ریاضیات مقدماتی (طرح وحل مؤلف)

شامل مسائلی درجبر ومثلثات‌وهندسه.

۵. جبر بول وکار بردآن در زنجیرهای اتصالیها

بها : ۱۰۰ ریال

مرکز پخش : مؤسسه انتشارات امیرکبیر