کسرهای مسلسل

کارل د. اولدز
ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

(ریاضیات پیش دانشگاهی ـ ۹)

کسرهای مسلسل

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی- ۹)

کارل د. اولدز

ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

مرکز نشردانشگاهی، تهران

مرکزنشردانشگاهی
۵۹۰

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۷۷

Continued Fractions
New Mathematical Library (9)
C.D.Olds
The Mathematical Association of America, 1963

کسرهای مسلسل
تألیف کارل د. اولدز
ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی
ویراستهٔ شیوادخت شیوایی، عبدالحسین مصحفی، دکتر منوچهر وصال
مرکز نشردانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۰
تعداد ۵۰۰۰
حروفچینی: کلمه‌پرداز
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: معراج

حق چاپ برای مرکز نشردانشگاهی محفوظ است

اولدز کارل داگلاس، ۱۹۱۲ـ	Olds, Carl Douglas
کسرهای مسلسل	
عنوان اصلی:	Continued fractions
۱. کسرهای مسلسل الف. جلوداری ممقانی، محمد، ، مترجم. ب. مرکز نشردانشگاهی. ج. عنوان.	
QA۲۹۵	۵۱۲/۷۳

فهرست

عنوان | صفحه

بسم‌الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به‌کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای‌تربیت دانشمندان آینده فراهم‌می‌سازد. در بین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آموزش می‌دهند و راهنمایی می کنند، عدهٔ کمی این‌توانایی را دارند که درآن زمینهٔ‌علمی، و با رعایت همهٔ دقتها ونکته‌ها، کتابهایی تألیف‌کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، وگاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی بین خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جامعهٔ ریاضی آمریکا مجموعه‌ای از این‌گونه کتابها را زیر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد از آنها را منتشر کرده است‌که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این‌کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده‌وهر کدام، چه درآمریکا وچه در کشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش آنها پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل‌آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌درترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی‌که ترجمهٔ آنها آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می‌کنند و می‌توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن اصلی این کتابها در پیشگفتار خود ازجمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای این مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی دریك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری نیاز دارد. خواننده برای فهم مطالب اغلب این کتابها، هرچند به‌اطلاعات ریاضی چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل ماندن روی بخشهای پیچیده از آنها گذشت و بعد، برای مطالعهٔ عمیق به‌آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع مطالعه کرد. بهترین راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل ملاحظه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود که کوشش کند هرمسأله را خودحل کند وفقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. دراین کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات و پیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ کار و گسترش این گونه فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، وکامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار

درنگاه اول نوشتن عددی، چون $\frac{9}{7}$، به‌صورت

$$\frac{9}{7}=1+\frac{2}{7}=1+\frac{1}{\frac{7}{2}}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$$

کاری ساده و بی‌ارزش به‌نظر می‌رسد. با وجود این، کسرهای به‌این صورت که «کسرهای مسلسل» نامیده می‌شوند، به‌درك بسیاری از مسأله‌های ریاضی، به‌ویژه مسأله‌هایی که به‌ماهیت اعداد مربوط‌اند، کمك می‌کنند.

ریاضیدانهای بزرگ قرنهای هفده و هیجده میلادی به پژوهش در کسرهای مسلسل پرداختند وهم‌اکنون نیز پژوهش دراین موضوع ادامه دارد.

تقریباً در همهٔ کتابهای نظریهٔ‌اعداد، فصلی در کسرهای مسلسل وجود دارد. اما این نوشته‌ها فشرده و تا حدی برای نوآموز مشکل‌اند. هدف این کتاب ارائهٔ بحثی آسان درمورد کسرهای مسلسل ساده‌است که هرکس بامعلومات ریاضی کمی بتواند آن را درك کند.

ریاضیدانها اغلب به‌موضوع مورد بحث خود بیشتر به‌چشم یك هنرخلاق نگاه می‌کنند تا یك علم، واین نظردرصفحه‌های بعدی منعکس است. فصل ۱ نشان می‌دهد که چگونه ممکن است کسرهای مسلسل به‌طوراتفاقی کشف شوند وسپس بامثالهایی بسط کسرهای گویا به‌کسرهای مسلسل را روشن می‌سازد. در این فصل به‌تدریج نماد

کلیتری معرفی می‌شود وقضیه‌های مقدماتی مطرح و اثبات می‌شوند. درفصل ۲، این نتایج در حل معادله‌های دیوفانتی خطی به‌کار می‌روند. مطالعهٔ این فصل باید آسان باشد؛ زیرا به‌اندازهٔ کافی توضیحات لازم داده شده است.

فصل ۳ با بسط عددهای گنگ به‌کسرهای مسلسل نامتناهی سروکاردارد، ومشتمل بر بحثی مقدماتی در مورد حد است. در اینجا می‌بینیم کـه چگونه می‌توان به‌کمك کسرهای مسلسل، برای عددهای گنگ تقریبهای گویای هرچه بهتر به‌دست آورد. این نتایج و نتایج بعدی باایده‌هایی که درکتاب نیون[1]، اعداد: گویا و گنگ بحث شده است ارتباط نزدیك دارند و ایده‌های مشابه را تکمیل می‌کنند.

ویژگیهای دوره‌ای کسرهـای مسلسل در فصل ۴ مورد بحث قرار گرفته‌اند. خواننده این فصل‌را مشکلتر ازسایر فصلها خواهدیافت، امانتایج نهایی‌رضایتبخش‌اند. قسمت اصلی این فصل، به‌برهانی ازقضیهٔ لاگرانژ می‌پردازد مبنی براینکه بسط کسر مسلسل هرعدد گنگ درجهٔ دوم بعداز مرحله‌ای دوره‌ای است. این‌قضیه بعداً به‌عنوان کلید حل معادلهٔ پل[2] به‌کارمی‌رود.

فصل ۵ برای ارائهٔ چشم‌اندازی به‌آینده وراهنمایی خواننده‌برای مطالعهٔ بیشتر موضوع، طراحی شده‌است. در این فصل قضیهٔ معروف هورویتس[3] بحث می‌شود، و قضیه‌های دیگری‌که به‌آن نزدیك‌اند ذکر می‌شوند.

بدیهی‌است که شخص نباید کتاب ریاضی‌را «بخواند»؛ بهتراست مداد وکاغذی به‌دست‌گیرد وآن‌را بازنویسی‌کند. دانشجوی ریاضی باید هرمرحلهٔ اثبات‌را بفهمد واگرآن را در باراول مطالعه نفهمید باید درنظر داشته باشد که بعداً آن‌را دوباره مطالعه‌کند وآنقدرادامه دهد تا به‌درك‌کامل‌مطالب توفیق‌یابد. علاوه براین اوباید باحل مسأله‌های آخرهر بخش بیازماید که تاچه اندازه موضوع را درك کرده است. بیشتر این مسأله‌ها ماهیت مقدماتی دارند، به‌مطالب کتاب عمیقاً وابسته‌اند، و نباید موجب هیچ‌گونه مشکلی بشوند. جواب آنها درپایان‌کتاب آورده شده‌است.

پیوست‌اول‌از دوپیوست‌کتاب، اثباتی‌است ازاینکه معادلهٔ $x^2 - 3y^2 = -1$ دارای جواب صحیح نیست، وپیوست دوم گردایه‌ای از بسطهای گوناگون است‌که برای نشان‌دادن چگونگی توسعهٔ موضوع‌کسرهای مسلسل طراحی شده‌است؛ به‌دست آوردن بیشتر این‌بسطها مشکل‌است. سرانجام درپایان‌کتاب، فهرستی‌کوتاه ازمراجع آمده است. در متن کتاب، مثلاً، منظور از« کریستال [۲]» مرجع دوم در فهرست مراجع است.

---

1. Niven   2. Pell   3. Hurwitz

از اینکه گروه بررسی ریاضیات دبیرستانی* این کتاب را درمجموعهٔ ریاضیات پیش‌دانشگاهی پذیرفته‌است امتنان‌خود را ابراز می‌دارم، و نیز ازهیأت ویراستاران به‌خاطر پیشنهادهایی‌که موجب بهترشدن کتاب شده‌است، متشکرم. بخصوص ازدکتر آنلی‌لکس[1] نه‌تنها به‌خاطر مشاورت فنی بی‌دریغ ایشان، بلکه برای نقد متن کتاب نیز تشکرمی‌کنم. همچنین ازهمسرم که نسخه‌های دستنویس را ماشین‌کرده و ازخانم روت‌موری[2] که نسخهٔ ماشین شدهٔ نهایی را آماده‌کرده است متشکرم.

ك . د . اولدز
لوس‌آلتس، کالیفرنیا ۱۹۶۱

---

* School Mathematics Study Group

1. Dr. Anneli Lax
2. Ruth Murray

۱

بسط کسرهای گویا

۱.۱ مقدمه

تصور کنید که یك دانشجوی جبر می‌خواهد معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^{۲} - ۳x - ۱ = ۰ \tag{۱.۱}$$

را از راه زیر حل کند: وی نخست دو طرف معادله را بر x تقسیم می‌کند ومعادله را به‌صورت

$$x = ۳ + \frac{۱}{x}$$

می‌نویسد. هنوز درطرف راست این معادله مجهول x دیده می‌شود وازاین‌رومی‌توان به‌جای‌آن مساویش، $۳ + \frac{۱}{x}$، را قرارداد، که‌نتیجه می‌شود

$$x = ۳ + \frac{۱}{x} = ۳ + \cfrac{۱}{۳ + \cfrac{۱}{x}}.$$

دانشجو باچندبارتکرارعمل جایگزینی x با $۳+\frac{۱}{x}$، عبارت

$$x=۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{x}}}}} \qquad (۲.۱)$$

را به‌دست می‌آورد. چون درطرف راست این کسر «چند طبقه‌ای» بازهم x حضور دارد، به‌نظرنمی‌رسدکه او به‌جواب (۱.۱) نزدیکترشده باشد.

اما اگر به‌طرف‌راست معادلهٔ (۲.۱)، دقیقتر نگاه کنیم ودرمراحل متوالی توقف کنیم دنبالهٔ کسرهای

$$۳,\quad ۳+\frac{۱}{۳},\quad ۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳}},\quad ۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳}}},\ \dots, \qquad (۳.۱)$$

را درآن می‌بینیم. وقتی این کسرهای مرکب ساده وبه‌کسرهای اعشاری تبدیل‌شوند، به‌ترتیب عددهای

$$۳,\quad \frac{۱۰}{۳}=۳٫۳۳۳\dots,\quad \frac{۳۳}{۱۰}=۳٫۳,\quad \frac{۱۰۹}{۳۳}=۳٫۳۰۳۰۳,\ \dots$$

را به‌دست می‌دهند. آنگاه به‌این‌کشف مطبوع وغیرمنتظره می‌رسیم که این‌عددها(که بعداً آنها را همگراها خواهیم گفت) تقریبهای بهتر و بهتری از ریشهٔ مثبت معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض (۱.۱) را به‌دست می‌دهند. فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم نشان می‌دهد که این ریشه درواقع برابراست با

$$x=\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}=۳٫۳۰۲۷۷۵\dots,$$

که وقتی به‌۳٫۳۰۳ گرد شود، باآخرین عدد بالا تاسه رقم اعشارمطابقت دارد.

این محاسبات مقدماتی طرح چند سؤال جالب را موجب می‌شوند. نخست،

اگر همگراهای بیشتر و بیشتری از (۳.۱) را محاسبه کنیم، آیا همواره تقریبهای بهتر و بهتری برای $x=\frac{۱}{۲}(۳+\sqrt{۱۳})$ به‌دست خواهد آمد؟ دوم، فرض کنید فرایندی که به‌وسیلهٔ آن (۲.۱) را به‌دست آورده‌ایم به‌طور نامحدود ادامه یابد به‌گونه‌ای که به‌جای (۲.۱) عبارت نامختوم

$$x=۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳+\cdots}}, \tag{۴.۱}$$

را داشته باشیم، که در آن سه نقطه به‌معنای «فرایند ادامه دارد» است و نشان می‌دهد که کسرهای متوالی بدون آنکه پایانی داشته باشند ادامه دارند. دراین صورت آیا واقعاً عبارت طرف‌راست (۴.۱) مساوی با $\frac{۱}{۲}(۳+\sqrt{۳})$ خواهد بود؟ این، کسر اعشاری نامتناهی را به یاد ما می‌آورد. مثلاً، وقتی می‌گوییم کسر اعشاری نامتناهی $۰٫۳۳۳\ldots$ برابر است با $\frac{۱}{۳}$، منظورما چیست؟ این سؤالها وچندین سؤال دیگر را سرانجام مورد بحث قرارداده وبه‌آنها پاسخ خواهیم‌داد.

کسرهای چند طبقه‌ای نظیر (۲.۱) و (۴.۱) کسرهای مسلسل نامیده می‌شوند. مطالعهٔ این کسرها، ویژگیها وکاربرد آنها، یکی ازمبحثهای اعجاب‌انگیز در ریاضیات است. اما با مطلبهای ساده‌تری آغاز می‌کنیم. اول از همه تعریفهای اساسی را ارائه می‌کنیم.

۲.۱ تعریفها و نمادگذاری

عبارتی به‌صورت

$$a_۱+\cfrac{b_۱}{a_۲+\cfrac{b_۲}{a_۳+\cfrac{b_۳}{a_۴+\cdots}}} \tag{۵.۱}$$

را کسر مسلسل می‌نامند. درحالت کلی، عددهای $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... و $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$، ... ممکن است حقیقی یا مختلط باشند و تعداد جمله‌ها می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. اما، دراین کتاب بحث را به‌کسرهای مسلسل ساده محدود خواهیم کرد. این

کسرها به‌صورت

$$a_۱+\cfrac{۱}{a_۲+\cfrac{۱}{a_۳+\cfrac{۱}{a_۴+\cdots}}}, \qquad (۶.۱)$$

هستند، که در آن $a_۱$ معمولاً عددی صحیح، مثبت یا منفی است (ولی می‌تواند صفر باشد)، و جمله‌های $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$، ... عددهای صحیح مثبت هستند. در حقیقت، پیش از رسیدن به‌فصل ۳، بحث خود را به‌کسرهای مسلسل سادهٔ متناهی محدود خواهیم کرد. این کسرها به‌صورت

$$a_۱+\cfrac{۱}{a_۲+\cfrac{۱}{a_۳+\cfrac{۱}{a_۴+\cdots+\cfrac{۱}{a_{n-۱}+\cfrac{۱}{a_n}}}}}, \qquad (۷.۱)$$

هستند و تعداد جمله‌های آنها، $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n، متناهی است. این نوع کسر را، کسرمسلسل متناهی می‌نامند. از این به‌بعد وقتی می‌گوییم کسر مسلسل، منظورمان کسر مسلسل سادهٔ متناهی است، مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

مناسبتر است (۷.۱) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\frac{۱}{a_۴+}\cdots+\frac{۱}{a_n}, \qquad (۸.۱)$$

که درآن علامتهای + بعدازاولین آنها پایینتر نوشته شده‌اند تا فرایند «پایین رفتن» درتشکیل کسرمسلسل را به‌یاد آورند. همچنین مناسب است که کسر مسلسل (۸.۱) بانماد $[a_۱, a_۲, \ldots, a_n]$ نشان داده شود. بنابراین:

$$[a_۱, a_۲, \ldots, a_n]=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots+\frac{۱}{a_n} \qquad (۹.۱)$$

جمله‌های $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را خارج قسمتهای جزئی کسر مسلسل می‌نامند.

۳.۱ بسط کسرهای گویا

یك عددگویا کسری به‌صورت $\frac{p}{q}$ است که در آن p و q عددهای صحیح هستند و $q\neq ۰$.
در بخش بعد ثابت خواهیم کرد که هر کسر گویا، یا عدد گویا، را می‌توان به‌صورت یك کسر مسلسل سادهٔ متناهی بیان کرد.

مثلاً، کسر مسلسل نظیر $\frac{۶۷}{۲۹}$ عبارت است از

$$\frac{۶۷}{۲۹}=۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۴+\cfrac{۱}{۲}}}=۲+\frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۴+}\frac{۱}{۲}$$

یا

$$\frac{۶۷}{۲۹}=[۲,\ ۳,\ ۴,\ ۲].$$

این نتیجه را چگونه به‌دست آوردیم؟ نخست ۶۷ را بر ۲۹ تقسیم کردیم که خارج قسمت ۲ و باقیماندهٔ ۹ به‌دست آمدند، از این‌رو

$$\frac{۶۷}{۲۹}=۲+\frac{۹}{۲۹}=۲+\cfrac{۱}{\frac{۲۹}{۹}}. \qquad (۱۰.۱)$$

توجه کنید که در طرف راست به‌جای $\frac{۹}{۲۹}$ عکس معکوس آن $\frac{۲۹}{۹}$ را به‌کار برده‌ایم.
سپس ۲۹ را بر ۹ تقسیم کرده و

$$\frac{۲۹}{۹}=۳+\frac{۲}{۹}=۳+\cfrac{۱}{\frac{۹}{۲}}, \qquad (۱۱.۱)$$

را به‌دست آورده‌ایم. سرانجام، از تقسیم ۹ بر ۲ تساوی

$$\frac{۹}{۲}=۴+\frac{۱}{۲}, \qquad (۱۲.۱)$$

حاصل شده و دراین مرحله فرایند تبدیل تمام شده است. اکنون (۱۲.۱) را در(۱۱.۱)، وسپس (۱۱.۱) را در (۱۰.۱) جانشین می کنیم تا

$$\frac{۶۷}{۲۹}=۲+\frac{۱}{\frac{۲۹}{۹}}=۲+\frac{۱}{۳+\frac{۱}{\frac{۹}{۲}}}=۲+\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۴+\frac{۱}{۲}}},$$

یا

$$\frac{۶۷}{۲۹}=[۲,\ ۳,\ ۴,\ ۲]=[a_۱,\ a_۲,\ a_۳,\ a_۴]\,, \qquad (۱۳.۱)$$

به‌دست آید.

باید توجه کنیم که در معادلهٔ (۱۰.۱)، عدد ۲۹ × ۲ بزرگترین مضرب ۲۹ است که کوچکتر از ۶۷ است، و در نتیجه باقیمانده (در این حالت عدد ۹) لزوماً ناکوچکتر از ۰ ومسلماً کوچکتر از ۲۹* است.

اینك معادلهٔ (۱۱.۱) را در نظر بگیرید. دراینجا ۹ × ۳ بزرگترین مضربی از ۹ است که کوچکتر از ۲۹ است. باقیماندهٔ ۲، نیز، لزوماً ناکوچکتر از ۰ وکوچکتر از ۹ است.

در(۱۲.۱) عدد ۲ × ۴ بزرگترین مضربی از ۲ است که کوچکتر از ۹ است وباقیمانده برابر ۱ است که ناکوچکتر از ۰ ولی کوچکتر از ۲ است.

سرانجام، نمی‌توانیم ازمعادلهٔ (۱۲.۱) فراتر رویم، زیرا اگر بنویسیم

$$\frac{۹}{۲}=۴+\frac{۱}{\frac{۲}{۱}}=۴+\frac{۱}{۲},$$

آن‌گاه ۱ × ۲ بزرگترین مضربی از ۱ است که ۲ را می‌شمارد و به‌سادگی‌خواهیم داشت

---

* اگرعدد a کوچکتر از عدد b باشد، می‌نویسیم $a<b$. اگر a نابزرگتر از b، یعنی یا a کوچکتر از b یا a مساوی b باشد، می‌نویسیم $a\leqslant b$، به‌همین‌ترتیب، اگر a بزرگتر از b باشد، یا اگر a ناکوچکتر از b یعنی a بزرگتر از b یا a مساوی با b باشد، به‌ترتیب می‌نویسیم $a>b$، $a\geqslant b$. برای اطلاع از جزئیات بیشتر در مورد نابرابریها به‌کتاب «آشنایی با نابرابریها» ازهمین مجموعه مراجعه کنید.

$$\frac{۲}{۱}=۲\times۱+۰=۲,$$

ازاین‌رو محاسبه تمام شده‌است.

فرایندپیدا کردن بسط کسرمسلسل $\frac{۶۷}{۲۹}$ را می‌توان به‌صورت زیر مرتب‌کرد:

۶۷ را بر ۲۹ تقسیم می‌کنیم.
$۲\times۲۹=۵۸$ و ۵۸ را از ۶۷ کم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۶۷ & ۲۹ \\ \hline ۵۸ & ۲=a_۱ \\ \hline ۹ & \end{array}$$

۲۹ را بر ۹ تقسیم می‌کنیم.
$۲۷=۹\times۳$ و ۲۷ را از ۲۹ کم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲۹ & ۹ \\ \hline ۲۷ & ۳=a_۲ \\ \hline ۲ & \end{array}$$

۹ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.
$۸=۴\times۲$ و ۸ را از ۹ کم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۹ & ۲ \\ \hline ۸ & ۴=a_۳ \\ \hline ۱ & \end{array}$$

۲ را بر ۱ تقسیم می‌کنیم.
$۲=۱\times۲$ و ۲ را از ۲ کم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۲=a_۴ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

فرایند تمام‌شده‌است.

ازاین‌رو

$$\frac{۶۷}{۲۹}=[a_۱,\ a_۲,\ a_۳,\ a_۴,]=[۲,\ ۳,\ ۴,\ ۲].$$

دراین مثال، مشاهده می‌کنیم که درتقسیمهای متوالی، باقیمانده‌های ۹، ۲، ۱ عددهای نامنفی هستندکه دقیقاً معین می‌شوند وهر کدام ازمقسوم‌علیه متناظرش کوچکتر است. مثلاً باقیماندهٔ ۹ ازمقسوم‌علیه ۲۹ و باقیماندهٔ ۲ ازمقسوم‌علیه ۹ کوچکتراست، و الی آخر. باقیماندهٔ هر تقسیم؛ مقسوم‌علیه تقسیم بعدی است، ازاین‌رو باقیمانده‌های‌متوالی عددهای صحیح نامنفی هستند که کوچك و کوچکتـــر می‌شوند. بنابراین، سرانجام باقیماندهٔ صفرحاصل می‌شود، فرایند پایان می‌پذیرد.

هر باقیمانده که دراین فرایند حاصل‌می‌شود، عدد نامنفی یکتایی است. مثلاً، آیا می‌توانید ۶۷ را بر ۲۹ تقسیم کرده، بزرگترین خارج‌قسمت۲ را به‌دست آورید

به‌طوری‌که باقیماندهٔ حاصل عددی بجز ۹ باشد؟ این بدان معناست‌که در مورد کسر مفروض $\frac{۶۷}{۲۹}$ ، فرایند ما دقیقاً یك دنباله ازباقیمانده‌ها به‌دست می‌دهد.

به‌عنوان مثال دوم، بسط کسر مسلسل $\frac{۲۹}{۶۷}$ ، را پیدا می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\begin{array}{r|l} ۲۹ & ۶۷ \\ \cline{2-2} ۰ & ۰ = a_۱ \\ \cline{1-1} ۲۹ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۶۷ & ۲۹ \\ \cline{2-2} ۵۸ & ۲ = a_۲ \\ \cline{1-1} ۹ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲۹ & ۹ \\ \cline{2-2} ۲۷ & ۳ = a_۳ \\ \cline{1-1} ۲ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۹ & ۲ \\ \cline{2-2} ۸ & ۴ = a_۴ \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲ & ۱ \\ \cline{2-2} ۲ & ۲ = a_۵ \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

ازاین‌رو

$$\frac{۲۹}{۶۷} = [۰, ۲, ۳, ۴, ۲] = [a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵].$$

توجه‌کنید که دراین مثال $a_۱ = ۰$. برای بررسی درستی نتایج حاصل، تنهاکاری‌که باید انجام دهیم ساده‌کردن‌کسرمسلسل است:

$$۰ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۳ + \cfrac{۱}{۴ + \frac{۱}{۲}}}} = \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۳ + \frac{۲}{۹}}} = \cfrac{۱}{۲ + \frac{۹}{۲۹}} = \frac{۲۹}{۶۷} \cdot$$

مقایسهٔ بسط $\frac{۶۷}{۲۹}=[۲,۳,۴,۲]$ با بسط معکوس آن یعنی $\frac{۲۹}{۶۷}=[۰,۲,۳,۴,۲]$ این نتیجه‌را می‌دهد که اگر p بزرگتر از q باشد و داشته باشیم

$$\frac{p}{q}=[a_۱,\ a_۲,\ \cdots,\ a_n]$$

آن گاه

$$\frac{q}{p}=[۰\ ,\ a_۱,\ a_۲,\ \cdots,\ a_n]$$

ازخواننده می‌خواهیم که نتیجهٔ مشابه نظیر $p<q$ را بیان کنند.

مثالهای زیر برای جواب دادن به‌سؤالهایی کمك خواهندکرد که ممکن است برای یك دانشجوی دقیق مطرح باشند.

نخست، آیا بسط

$$\frac{۶۷}{۲۹}=[۲,\ ۳,\ ۴,\ ۲]=[a_۱,\ a_۲,\ a_۳,\ a_۴]$$

تنها بسط $\frac{۶۷}{۲۹}$ به‌صورت کسر مسلسل متناهی ساده‌است؟ اگر به‌عقب برگردیم و روشی راکه باآن این بسط را به‌دست‌آورده‌ایم، بررسی‌کنیم، به‌نظر می‌رسد جواب مثبت باشد. این مطلب درست است بجز اینکه همواره می‌توان در آخرین جمله، یا آخرین خارج‌قسمت جزئی، $a_۴$، تغییر کوچکی به‌وجود آورد، ازآنجاکه $a_۴=۲$، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۱}{a_۴}=\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱}}\cdot$$

ازاین‌رو، برابری

$$\frac{۶۷}{۲۹}=[۲,\ ۳,\ ۴,\ ۱,\ ۱]$$

نیز درست است. روشن است که بسط $[۲\ ,\ ۳\ ,\ ۴\ ,\ ۱\ ,\ ۱]$ را می‌توان به‌صورت اصلیش $[۲\ ,\ ۳\ ,\ ۴\ ,\ ۲]$ برگرداند. در بحث کلیتر زیر خواهیم دید که این تنها راه به‌دست آوردن یك بسط «دیگر» است.

دوم، چگونگی به‌دست آوردن بسط یك عددگویای منفی، $-\frac{p}{q}$ ، را بررسی می‌کنیم. این کار به‌تغییر کوچکی در فرایندی که قبلاً بیان شد، نیازمند است. مثلاً، برای پیدا کردن بسط کسر مسلسل $-\frac{۳۷}{۴۴}$ به‌صورت زیر اقدام می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} -۳۷ & ۴۴ \\ \cline{2-2} -۴۴ & -۱ \\ \cline{1-1} ۷ & \end{array}$$

(دنبال یك خارج قسمت منفی می‌گردیم، که وقتی در ۴۴ ضرب شود و حاصل آن از ۳۷− کم‌شود، کوچکترین باقیماندهٔ مثبت به‌دست آید.)

$$\begin{array}{r|l} ۴۴ & ۷ \\ \cline{2-2} ۴۲ & ۶ \\ \cline{1-1} ۲ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۷ & ۲ \\ \cline{2-2} ۶ & ۳ \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲ & ۱ \\ \cline{2-2} ۲ & ۲ \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

بنابراین،

$$-\frac{۳۷}{۴۴}=[-۱, ۶, ۳, ۲]=[-۱, ۶, ۳, ۱, ۱]=[a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵].$$

توجه کنید که $a_۱$ منفی‌است ولی $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$، $a_۵$ مثبت‌اند.

سؤال سوم این‌است: اگرصورت ومخرج $\frac{۶۷}{۲۹}$ را درعددی چون ۳ ضرب کنیم؛ وسپس کسر حاصل یعنی $\frac{۲۰۱}{۸۷}$ را بسط دهیم، آیاکسر مسلسل مربوط به $\frac{۲۰۱}{۸۷}$ باکسر مسلسل $\frac{۶۷}{۲۹}$ یکی خواهد بود؟ خواهیم دیدکه این بسطها یکی هستند، زیرا

$$\begin{array}{r|l} ۲۰۱ & ۸۷ \\ \cline{2-2} ۱۷۴ & ۲ \\ \cline{1-1} ۲۷ & \end{array} \qquad (۱۴۰۱)$$

$$\begin{array}{r|l} ۸۷ & ۲۷ \\ \cline{2-2} \underline{۸۱} & ۳ \\ ۶ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲۷ & ۶ \\ \cline{2-2} \underline{۲۴} & ۴ \\ ۳ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۶ & ۳ \\ \cline{2-2} \underline{۶} & ۲ \\ ۰ & \end{array}$$

بنا براین

$$\frac{۲۰۱}{۸۷}=\frac{۶۷}{۲۹}=[۲,\ ۳,\ ۴,\ ۲].$$

این موضوع یك ویژگی جالب کسرهای مسلسل‌را روشن می‌کند. اگر

$$[۲,\ ۳,\ ۴,\ ۲]=۲+\frac{۱}{۳+}\,\frac{۱}{۴+}\,\frac{۱}{۲}$$

را محاسبه می‌کردیم، $\frac{۶۷}{۲۹}$ را به دست می‌آوردیم و نه $\frac{۲۰۱}{۸۷}$ را . همواره کسر گویایی چون $\frac{p}{q}$ که تحویل‌ناپذیر است به‌دست می‌آوریم، یعنی، کسری که p و q صورت ومخرج آن، عامل مشترکی بزرگتراز ۱ ندارند. آیا در این مرحله می‌توانید دلیلی برای این موضوع پیدا کنید؟ درآینده دراین‌باره شرح خواهیم داد.

مجموعهٔ مسأله‌های ۱

۱. هریك ازکسرهای زیررا به‌کسرمسلسل سادهٔ متناهی تبدیل کنید.

(الف) $\frac{۱۷}{۱۱}$ (ب) $\frac{۵۱}{۳۳}$ (پ) $\frac{۳۵۴}{۱۰۰}=۳٫۵۴$ (ت) $\frac{۲۳۳}{۱۷۷}$

(ث) $\frac{۲۳}{۱۰۰}=۰٫۲۳$ (ج) $\frac{۳۵۵}{۱۰۶}$ (چ) ۳٫۱۴۱۵۹

۲. اگر

$$\frac{p}{q}=3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$$

$\frac{p}{q}$ را پیدا کنید.

۳. اگر $\frac{p}{q}=[0,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2]$، $\frac{p}{q}$ را پیدا کنید.

۴. اگر $\frac{p}{q}=[3,\ 7,\ 15,\ 1]$، $\frac{p}{q}$ را پیدا کنید. $\frac{p}{q}$ را به یک کسر اعشاری تبدیل کنید و آن را با π مقایسه کنید.

۵. بسط کسرهای مسلسل (الف) $\frac{11}{17}$، (ب) $\frac{33}{51}$ را پیدا کنید؛ این بسطها را با بسطهای (الف) و(ب) درمسألهٔ ۱ مقایسه کنید.

۶. نشان دهید که اگر $p>q$ و $\frac{p}{q}=[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$، آن‌گاه $\frac{q}{p}=[0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$، وبرعکس، اگر $\frac{q}{p}=[0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$ آن‌گاه $\frac{p}{q}=[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$.

۴.۱ بسط کسرهای گویا (بحث کلی)

پیش ازاین اصطلاحهای ویژهٔ مطالعهٔ کسرهای مسلسل را معرفی کرده مثالهای خاصی را بررسی‌کردیم. اما برای پیشرفت واقعی در مطالعهٔ خود باید حکمهای کلیتری را موردبحث قرار دهیم. کارکردن با نمادها به‌جای عددهای واقعی، اندیشه را آزاد می‌کند و اجازه می‌دهد که انتزاعی فکر کنیم. مثلاً گرچه نخستین قضیه تنها آنچه‌را اما بامثالها توضیح داده‌ایم به‌صورت کلی بیان می‌کند، اما ازهمین بیان کلی ایده‌های زیاد دیگری به‌سرعت نتیجه می‌شوند.

قضیهٔ ۱.۱ هرکسر مسلسل سادهٔ متناهی نمایش یك عددگویاست. برعکس، هرعدد گویای $\frac{p}{q}$ را می‌توان به‌صورت یك کسرمسلسل سادهٔ متناهی نمایش داد؛ بجز

موارد استثنایی که ذکر می‌شوند، این نمایش، یا بسط، یکتاست.

اثبات. حکم نخست قضیه با توجه به آنچه که درمثالهای حل‌شده توضیح دادیم روشن است، زیرا اگر بسطی خاتمه یابد همواره می‌توان باعمل در جهت معکوس بسط را به یك کسر گویا تبدیل کرد.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید $\frac{p}{q}$، $q>0$، یك کسر گویا باشد. p را بر q تقسیم می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{r_1}{q}, \quad 0\leqslant r_1<q,$$

که در آن a_1 عددصحیح و یکتایی‌است وچنان‌انتخاب‌شده‌است‌که باقیمانده نا کوچکتر از ۰ و کوچکتر از q را به‌دست دهد. چنان‌که در مثالهای حل‌شده مشاهده کردیم، a_1 می‌تواند منفی، صفر، یا مثبت باشد. اگر $r_1=0$، فرایند خاتمه می‌یابد و $[a_1]$ بسط کسر مسلسل $\frac{p}{q}$ است.

اگر $r_1\neq 0$، می‌نویسیم

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{q/r_1}, \qquad 0<r_1<q, \qquad (۱۵.۱)$$

وفرایند تقسیم را تکرار می‌کنیم، q را بر r_1 تقسیم می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{q}{r_1}=a_2+\frac{r_2}{r_1}, \qquad 0\leqslant r_2<r_1. \qquad (۱۶.۱)$$

توجه‌کنید‌که اکنون $\frac{q}{r_1}$ یك کسر مثبت است، بنابراین a_2 بزرگترین عدد یکتای‌مثبتی است‌که باقیماندهٔ r_2 را بین ۰ و r_1 محدود می‌کند. اگر $r_2=0$، فرایند متوقف می‌شود، و $\frac{q}{r_1}=a_2$ را از (۱۶.۱) در (۱۵.۱) قرار می‌دهیم و

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{a_2}=[a_1, a_2]$$

را به‌عنوان بسط کسرمسلسل $\frac{p}{q}$ به‌دست می‌آوریم.

اگر $r_2 \neq 0$، (۱۶.۱) را به‌صورت

$$\frac{q}{r_1}=a_2+\frac{1}{r_1/r_2}, \quad 0<r_2<r_1, \tag{۱۷.۱}$$

می‌نویسیم وفرایند تقسیم را با به‌کاربردن $\frac{r_1}{r_2}$ تکرار می‌کنیم.

مشاهده می‌کنیم که وقتی به یك باقیماندهٔ $r_n=0$ می‌رسیم، محاسبه‌متوقف‌می‌شود. آیا ممکن است که هرگز به یك r_n مساوی با صفر نرسیم، و فرایند تقسیم به‌طور نامحدود ادامه یابد؟ واضح است که این غیرممکن‌است، زیرا باقیمانده‌های r_1، r_2، r_3، ... یك‌دنبالهٔ نزولی $q>r_1>r_2>r_3>\dots$ ازعددهای صحیح نامنفی تشکیل می‌دهند، واگر سرانجام r_n صفر نشود، دنباله‌ای نامتناهی از عددهای صحیح مثبت و متمایز به‌دست می‌آید که همگی ازعدد صحیح q کمترند، واین امکان ندارد.

ازاین‌رو، با تقسیمهای متوالی دنبالهٔ معادله‌های زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{q}=a_1+\frac{r_1}{q}, && 0<r_1<q\\
&\frac{q}{r_1}=a_2+\frac{r_2}{r_1}, && 0<r_2<r_1\\
&\frac{r_1}{r_2}=a_3+\frac{r_3}{r_2}, && 0<r_3<r_2\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}}=a_{n-1}+\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, && 0<r_{n-1}<r_{n-2},\\
&\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=a_n+\frac{0}{r_{n-1}}=a_n+0, && r_n=0,
\end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

بعد از تقسیمهایی به‌تعداد متناهی، به‌معادله‌ای می‌رسیم که در آن باقیماندهٔ r_n صفر است.

اکنون نمایش $\frac{p}{q}$ به‌صورت یك‌کسرمسلسل سادهٔ متناهی آسان‌است. از دومعادلهٔ نخست (۱۸.۱) داریم

$$\frac{p}{q}=a_۱+\frac{۱}{q/r_۱}=a_۱+\cfrac{۱}{a_۲+\cfrac{۱}{\cfrac{r_۱}{r_۲}}}$$

با استفاده ازمعادلهٔ سوم (۱۸.۱)، به‌جای $\frac{r_۱}{r_۲}$

$$a_۳+\frac{۱}{r_۲/r_۳}$$

را قرار می‌دهیم، واین روش را ادامه داده سرانجام بسط

$$\frac{p}{q}=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots+\frac{۱}{a_n}=[a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n] \quad (۱۹.۱)$$

را به‌دست می‌آوریم.

یکتایی بسط (۱۹.۱) از شیوهٔ محاسبهٔ a_iها نتیجه می‌شود. باوجود این، این حکم باید بااین نکته همراه باشدکه دربسط به‌دست آمده همواره می‌توانیم آخرین جمله، a_n، را تغییردهیم، به‌طوری‌که تعداد جمله‌های بسط، به‌انتخاب ما، زوج یافرد باشد. برای مشاهدهٔ این مطلب، توجه کنیدکه اگر a_n بزرگتراز ۱ باشد می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۱}{a_n}=\cfrac{۱}{(a_n-۱)+\cfrac{۱}{۱}},$$

به‌طوری‌که به‌جای (۱۹.۱)

$$\frac{p}{q}=[a_۱, a_۲, \cdots, a_{n-۱}, a_n-۱, ۱] \quad (۲۰.۱)$$

را قرار می‌دهیم. ازطرف دیگر، اگر $a_n=۱$، آن‌گاه

$$\cfrac{۱}{a_{n-۱}+\cfrac{۱}{a_n}}=\frac{۱}{(a_{n-۱}+۱)},$$

به‌طوری که (۱۹.۱) به

$$\frac{p}{q}=[a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}+1] \qquad (۲۱.۱)$$

تبدیل می‌شود. پس به‌قضیهٔ زیر می‌رسیم:

قضیهٔ ۲.۱. هرعدد گویای $\frac{p}{q}$ رامی‌توان به‌صورت یك کسرمسلسل سادهٔمتناهی بیان‌کرد، وجملهٔ آخررا می‌توان چنان تغییرداد‌که تعداد جمله‌های بسط زوج یا فرد باشد.

جالب است توجه کنیم که معادله‌های (۱۸.۱) دقیقاً معادله‌هایی هستند که برای پیداکردن بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك عددهای صحیح p و q درروشی به‌نام الگوریتم اقلیدس به‌کار می‌روند.* [این روش درکتاب هفتم اصول‌اقلیدس (حدود ۳۰۰سال پیش‌ازمیلاد) آمده‌است؛ اما معلوم شدکه منشأ آن قدیمیتر است.]

برای پیداکردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك p و q ازطریق الگوریتم‌اقلیدس، معادله‌های (۱۸.۱) را به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$\begin{aligned}
p&=a_1q+r_1, && 0<r_1<q,\\
q&=a_2r_1+r_2, && 0<r_2<r_1,\\
r_1&=a_3r_2+r_3, && 0<r_3<r_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots \qquad (۲۲.۱)\\
r_{n-3}&=a_{n-1}r_{n-2}+r_{n-1}, && 0<r_{n-1}<r_{n-2},\\
r_{n-2}&=a_nr_{n-1}+0=a_nr_{n-1}, && 0=r_n.
\end{aligned}$$

معادلهٔ اول، $p=a_1q+r_1$، ازضرب دوطرف معادلهٔ اول (۱۸.۱) در q حاصل می‌شود؛ ومعادله‌های دیگر به‌همین‌نحو به‌دست می‌آیند.

---

* بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك (ب.م.م.) دو عدد صحیح p و q بزرگترین عدد صحیحی است که هم p وهم q را بشمارد. درنظریهٔ اعداد ب.م.م. عددهای صحیح p و q با نماد (p, q) نشان داده می‌شود، بنابراین، $(p, q)=d$. یعنی d بزرگترین عامل‌صحیح‌مشترك p و q است.

ثابت خواهیم کرد که آخرین باقیماندهٔ غیرصفر، r_{n-1}، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك p و q است. برای این کار، نخست دو شرطی راکه ب.م.م. دو عدد صحیح باید داشته باشد، بیان می کنیم. عدد d، ب.م.م. دوعدد صحیح p و q است اگر

(الف) d، هردوعدد صحیح p و q را بشمارد، و

(ب) هرمقسوم‌علیه مشترك p و q مانند c، d را بشمارد.

برای مثال، فرض کنید $p=۳\times۵\times۱۱$ و $q=۳^{۲}\times۵\times۱۳$. آن‌گاه ب.م.م. p و q برابر است با $d=۳\times۵$، زیرا (الف) $d=۳\times۵$ هم p و هم q را می‌شمارد؛ و (ب) مقسوم‌علیه‌های مشترك p و q یعنی ۳ و ۵، d را می‌شمارند.

تنها لازم است که به‌یك نکتهٔ دیگر توجه کنیم: اگر a، b و c عددهای صحیح باشند به‌طوری که

$$a=b+c,$$

هرعدد صحیح d که a و b را بشمارد c را نیز می‌شمارد. چون اگر d، a را بشمارد، آن‌گاه $a=da_{۱}$، که در آن $a_{۱}$ یك عدد صحیح است و اگر d، b را بشمارد، آن‌گاه $b=db_{۱}$، که در آن $b_{۱}$ یك عدد صحیح است. چون $c=a-b$، داریم

$$a-b=da_{۱}-db_{۱}=d(a_{۱}-b_{۱})=c,$$

بنابراین d، c را می‌شمارد. به‌همین‌ترتیب، هرعدد صحیح d که هم b وهم c را می‌شمارد، a را نیز می‌شمارد.

اکنون به‌معادله‌های (۲۲.۱) برمی گردیم. آخرین آنها،

$$r_{n-۲}=a_{n}r_{n-۱},$$

نشان می‌دهدکه $r_{n-۱}$، $r_{n-۲}$ را می‌شمارد، یعنی یکی‌از عاملهای آن است. معادلهٔ بالای آن، یعنی

$$r_{n-۳}=a_{n-۱}r_{n-۲}+r_{n-۱},$$

نشان می‌دهدکه $r_{n-۱}$، $r_{n-۳}$ رامی‌شمارد، زیرا $r_{n-۱}$ و $r_{n-۲}$ را می‌شمارد. به‌همین ترتیب، ازمعادلهٔ

$$r_{n-۴}=a_{n-۲}r_{n-۳}+r_{n-۲},$$

مشاهده می کنیم که $r_{n-۱}$، $r_{n-۴}$ رامی‌شمارد، زیرا هم $r_{n-۲}$ وهم $r_{n-۳}$ را می‌شمارد. با ادامهٔ این روش ازپایین به‌بالا، درمی‌یابیم که $r_{n-۱}$، $r_{۳}$ و $r_{۲}$ و بنابراین $r_{۱}$ را

می‌شمارد، وچون $r_۲$ و $r_۱$ را می‌شمارد، q را نیز می‌شمارد؛ وبالاخره چون $r_۱$ و q را می‌شمارد، p را نیز می‌شمارد. ازاین‌رو، $r_{n-۱}$ هم p وهم q را می‌شمارد، وشرط (الف) برقرار است.

سپس باید نشان دهیم که اگر c یك مقسوم‌علیه مشترك p و q باشد، آن‌گاه c، $r_{n-۱}$ را می‌شمارد. این بار از معادلهٔ اول (۲۲۰۱) آغاز می‌کنیم وبه‌طرف پایین پیش می‌رویم. اگر c، p و q را بشمارد، معادلهٔ اول (۲۲۰۱) نشان می‌دهد که c، $r_۱$ را می‌شمارد. اما اگر c هم q وهم $r_۱$ را بشمارد، معادلهٔ دوم (۲۲۰۱) نشان می‌دهد که c، $r_۲$ را می‌شمارد. با ادامهٔ همین شیوه، به‌معادلهٔ ماقبل آخرمی‌رسیم،

$$r_{n-۳}=a_{n-۱}r_{n-۲}+r_{n-۱},$$

که درآن c، $r_{n-۳}$ و $r_{n-۲}$ وبنابراین $r_{n-۱}$ را می‌شمارد. پس‌شرط(ب) برقراراست ونتیجه می‌گیریم که $r_{n-۱}$، ب.م.م. p و q است.

برای مثال، از الگوریتم اقلیدس برای تعیین ب.م.م. $p=۶۳۸۱$ و $q=۵۱۶۳$ استفاده می‌کنیم، به‌دست می‌آید

$$۶۳۸۱=۱\times۵۱۶۳+۱۲۱۸$$

$$۵۱۶۳=۴\times۱۲۱۸+۲۹۱$$

$$۱۲۱۸=۴\times۲۹۱+۵۴$$

$$۲۹۱=۵\times۵۴+۲۱$$

$$۵۴=۲\times۲۱+۱۲$$

$$۲۱=۱\times۱۲+۹$$

$$۱۲=۱\times۹+۳$$

$$۹=۳\times۳+۰\ ;$$

از این‌رو، ۳ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ۶۳۸۱ و ۵۱۶۸ است. در واقع، $۶۳۸۱=۳^۲\times۷۰۹$، که درآن ۷۰۹ عدد اول است، و $۵۱۶۳=۳\times۱۷۲۱$ که درآن ۱۷۲۱ نیز عدد اول است. (عدد اول، عددی است که دقیقاً دارای دومقسوم‌علیه صحیح مثبت است: ۱ وخود عدد.) ازاین‌رو، ۳ تنها عامل مشترك این دوعدد، و بنابراین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنهاست.

مجموعه مسأله‌های ۲

۱. کسرهای گویای زیر را به‌کسرهای مسلسل سادهٔ متناهی، با تعداد جمله‌های زوج و همچنین با تعداد جمله‌های فرد، بسط دهید.

(الف) $\frac{۲۹}{۵}$ (ب) $\frac{۵}{۲۹}$ (پ) $-\frac{۲۹}{۵}$

(ت) $\frac{۱۲۳}{۳۱}$ (ث) $-\frac{۱۲۳}{۳۱}$ (ج) $\frac{۳۱}{۱۲۳}$

۲. با استفاده از الگوریتم اقلیدس بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك (ب.م.م.) جفتهای اعداد زیر را پیدا کنید:

(الف) ۱۴۴۹،۱۳۸۰ (ب) ۲۰۱۵،۱۵۱۷ (پ) ۳۸۰۰،۲۲۹۹
(ت) ۷۴۵۵،۳۵۲۸.

۵.۱ همگراها و ویژگیهای آنها

کسرهای مسلسل درحل بسیاری از مسأله‌های جالب خیلی مفیدند، اما پیش‌از آنکه بتوانیم آنهارا به‌طور مؤثر به‌کار بگیریم باید برخی از ویژگیهای آنهارا با تفصیل بیشتری مطالعه کنیم.

دربخش ۴.۱ دیدیم که هر کسر گویای $\frac{p}{q}$ را می‌توان به‌صورت کسر مسلسل سادهٔ متناهی

$$\frac{p}{q}=[a_۱, a_۲, \dots, a_{n-۱}, a_n] \qquad (۲۳.۱)$$

بسط داد، که در آن $a_۱$ عددصحیح مثبت، منفی یا صفراست و $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n عددهای صحیح مثبت هستند. ازاین به‌بعد عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را خارج‌قسمتهای جزئی یا خارج‌قسمتهای کسر مسلسل می‌نامیم. با استفاده ازاین عددها کسرهای

$$c_۱=\frac{a_۱}{۱},\ \ c_۲=a_۱+\frac{۱}{a_۲},\ \ c_۳=a_۱+\frac{۱}{a_۲+\frac{۱}{a_۳}},\dots$$

را به‌دست می‌آوریم، که به‌ترتیب ازقطع‌کردن فرایند بسط بعد از مرحله‌های اول، دوم، سوم و ... حاصل‌می‌شوند. این کسرها به‌ترتیب همگراهای اول، دوم، سوم، ...

کسر مسلسل (۲۳.۱) نامیده می‌شوند. همگرای nام،

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots + \frac{1}{a_n} = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \; ,$$

با خود کسر مسلسل برابر است.

ارائهٔ روشی منظم برای محاسبهٔ این همگراها اهمیت دارد. می‌نویسیم

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1} \; ,$$

که در آن $p_1 = a_1$ و $q_1 = 1$. سپس می‌نویسیم

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2} \; ,$$

که در آن $p_2 = a_1 a_2 + 1$ و $q_2 = a_2$؛ سپس

$$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{p_3}{q_3} \; ,$$

$$c_4 = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4} = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1}{a_2 a_3 + a_4 + a_2 + a_4} = \frac{p_4}{q_4},$$

و الی آخر.

حال به‌همگرای c_3 دقیقتر توجه می‌کنیم که

$$c_3 = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3(a_2) + 1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3} \; ,$$

به‌طوری که

$$p_3 = a_3 p_2 + p_1 \quad (= a_3 a_1 a_2 + a_3 + a_1) \; ,$$

$$q_3 = a_3 q_2 + q_1 \quad (= a_3 a_2 + 1). \tag{۲۴.۱}$$

همچنین صورت و مخرج c_4 را به‌صورت زیر تجزیه کرده، می‌نویسیم

$$c_۴=\frac{a_۴(a_۱a_۲a_۳+a_۱+a_۳)+(a_۱a_۲+۱)}{a_۴(a_۲a_۳+۱)+(a_۲)}=\frac{a_۴p_۳+p_۲}{a_۴q_۳+q_۲}=\frac{p_۴}{q_۴},$$

به‌طوری که

$$p_۴=a_۴p_۳+p_۲ ,$$
$$q_۴=a_۴q_۳+q_۲ \cdot \qquad (۲۵.۱)$$

ممکن است با توجه به (۲۴.۱) و (۲۵.۱) حدس بزنیم که اگر

$$c_۵=[a_۱, a_۲, \cdots, a_۵]=\frac{p_۵}{q_۵}$$

آن‌گاه

$$p_۵=a_۵p_۴+p_۳,$$
$$q_۵=a_۵q_۴+q_۳, \qquad (۲۶.۱)$$

و به‌طور کلی، به‌ازای $i=۳, ۴, ۵, \dots, n$،

$$c_i=[a_۱, a_۲, \cdots, a_i]=\frac{p_i}{q_i},$$

که در آن

$$p_i=a_ip_{i-۱}+p_{i-۲} ,$$
$$q_i=a_iq_{i-۱}+q_{i-۲} \cdot \qquad (۲۷.۱)$$

درستی معادله‌های (۲۶.۱) را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم تأیید کرد. البته این مطلب درستی معادله‌های (۲۷.۱) را به‌ازای $i=۳, ۴, ۵, \dots, n$ نتیجه نخواهد داد، اما این یك مثال واقعی از تفکر استقرایی است. نخست فرمولها را ازطریق چند محاسبهٔ کوچك حدس می‌زنیم؛ گرچه به‌درستی آنهـا پی برده‌ایم، ولی باید یك اثبات رسمی ارائه دهیم. ازاین‌رو، ابتدا قضیه را بیان وسپس آن‌را با استقرا ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۳۰۱. p_i و q_i، صورت و مخرج c_i، همگرای iام کسر مسلسل $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ درمعادله‌های

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2} , \\ & \qquad\qquad (i=3, 4, 5, \ldots, n) \qquad (28.1) \\ q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2} , \end{aligned}$$

با مقادیراولیهٔ

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 , \qquad p_2 = a_2 a_1 + 1 , \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (29.1) \\ q_1 &= 1 , \qquad q_2 = a_2 , \end{aligned}$$

صدق می‌کنند.

اثبات. پیش‌ازاین دیده‌ایم‌که $c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1}$ و $c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{(a_2 a_1 + 1)}{a_2}$.
اگردرمعادله‌های (۲۸.۱) به‌جای i، ۳ بگذاریم به‌دست می‌آوریم

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{a_3 (a_2 a_1 + 1) + a_1}{a_3 (a_2) + 1},$$

که صحت آن با محاسبهٔ مستقیم c_3 محقق می‌شود. فرض می‌کنیم که قضیهٔ ۳۰۱، به‌ازای عددهای ۳، ۴، ۵، ... تاعدد صحیح k، صحیح است، یا درستی آن بامحاسبهٔ مستقیم تحقیق شده‌باشد؛ یعنی، به‌ازای $j = 3, 4, 5, \ldots, k-1, k$، داشته باشیم

$$c_j = [a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j] = \frac{p_j}{q_j} = \frac{a_j p_{j-1} + p_{j-2}}{a_j q_{j-1} + q_{j-2}}, \qquad (30.1)$$

بر پایهٔ این فرض، می‌خواهیم ثابت کنیم که قضیهٔ ۳۰۱ لزوماً به ازای عدد صحیح بعدی، $k+1$، نیز برقراراست. برای اثبات

$$c_{k+1} = [a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}] = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \qquad (31.1)$$

ازمعادله‌های (۳۰.۱) استفاده می‌کنیم.

درمرحله‌های بعدی به‌تمرکز فکر نیاز داریم. نخست توجه می‌کنیم که تفاوت $c_{k+۱}$ با c_k دراین است که به‌جای a_k داریم $(a_k+۱/a_{k+۱})$ وکافی‌است معادلهٔ

$$c_k=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots+\frac{۱}{a_{k-۱}+}\frac{۱}{a_k}$$

را با

$$c_{k+۱}=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots+\frac{۱}{a_{k-۱}+}\frac{۱}{\left(a_k+\frac{۱}{a_{k+۱}}\right)}$$

مقایسه‌کنیم. این مطلب مارا متوجه می‌کندکه شاید با استفاده از فرمول c_k که از (۳۰.۱) با قراردادن k به‌جای j، به‌دست می‌آید یعنی‌از

$$c_k=[a_۱, a_۲, \ldots, a_{k-۱}, a_k]=\frac{p_k}{q_k}=\frac{a_k p_{k-۱}+p_{k-۲}}{a_k q_{k-۱}+q_{k-۲}} \qquad (۳۲.۱)$$

بتوانیم $c_{k+۱}$ را محاسبه‌کنیم. این‌کار شدنی است اگر مطمئن شویم که وقتی a_k را تغییر می‌دهیم مقادیر $p_{k-۲}$، $q_{k-۲}$، $p_{k-۱}$، $q_{k-۱}$ تغییر نمی‌کنند.

اگر به‌شیوهٔ محاسبهٔ آنها توجه‌کنیم تغییرنکردن آنها روشن می‌شود. درمعادلهٔ (۳۰.۱) نخست به‌جای j، $k-۲$ وسپس $k-۱$ قرار می‌دهیم. به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$\frac{p_{k-۲}}{q_{k-۲}}=\frac{a_{k-۲}p_{k-۳}+p_{k-۴}}{a_{k-۲}q_{k-۳}+q_{k-۴}},$$

و

$$\frac{p_{k-۱}}{q_{k-۱}}=\frac{a_{k-۱}p_{k-۲}+p_{k-۳}}{a_{k-۱}q_{k-۲}+q_{k-۳}}.$$

توجه می‌کنیم که عددهای $p_{k-۱}$ و $q_{k-۱}$ تنها به‌عدد $a_{k-۱}$ و به‌عددهای $p_{k-۲}$، $q_{k-۲}$، $p_{k-۳}$ و $q_{k-۳}$ بستگی دارند، که همهٔ آنها به‌نوبت خود به aها، pها و qهای ماقبل وابسته‌اند. ازاین‌رو، عددهای $p_{k-۲}$، $q_{k-۲}$، $p_{k-۱}$، $q_{k-۱}$ تنها به $k-۱$ خارج‌قسمت‌اول $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{k-۱}$ وابسته‌اند ومستقل‌از a_k هستند. این بدان‌معناست

که با گذاشتن $(a_k + 1/a_{k+1})$ به‌جای a_k، این عددها تغییر نمی‌کنند.

اکنون برای محاسبهٔ c_{k+1} آمادگی داریم. به‌طوری‌که توضیح داده‌ایم، در (۳۲.۱) به‌جای a_k قرار می‌دهیم $(a_k + 1/a_{k+1})$ تا

$$c_{k+1} = \left[a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, \left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right]$$

$$= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1} + q_{k-2}}$$

حاصل شود. اکنون با ضرب صورت ومخرج این کسر در a_{k+1}، به‌دست می‌آوریم

$$c_{k+1} = \frac{(a_k a_{k+1} + 1)p_{k-1} + a_{k+1}p_{k-2}}{(a_k a_{k+1} + 1)q_{k-1} + a_{k+1}q_{k-2}},$$

و با مرتب کردن دوبارهٔ جمله‌ها، داریم

$$c_{k+1} = \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}}.$$

حال ازفرض درستی فرمول (۳۰.۱) به‌ازای $j = k$، یعنی

$$a_k p_{k-1} + p_{k-2} = p_k,$$

$$a_k q_{k-1} + q_{k-2} = q_k$$

استفاده‌می‌کنیم. ازاین‌رو، درآخرین عبارت c_{k+1}، جمله‌های داخل پرانتز درصورت ومخرج را می‌توان به‌ترتیب با p_k و q_k جایگزین کرد. بنابراین داریم

$$c_{k+1} = \frac{a_{k+1}\,p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}\,q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

پس ثابت‌کرده‌ایم که اگر عبارت همگرای c_j که در (۳۰.۱) آمده‌است به ازای مقادیر $j = 3, 4, 5, \ldots, k$ برقرار باشد، آن‌گاه در مورد همگرای بعدی

$$c_{k+۱}=\frac{p_{k+۱}}{q_{k+۱}}$$

نیز برقرار است. اما در واقع، با محاسبهٔ مستقیم می‌دانیم که (۳۰.۱) به ازای $j=k=۳$ برقرار است. پس به‌ازای عدد بعدی $۴=۱+k$، و به‌همین ترتیب به‌ازای $k=۵,۶,۷,\ldots,n$ نیز برقراراست. بنابراین قضیهٔ (۳.۱) اثبات می‌شود.

توجه کنید که در برهان بالا درهیچ‌جا ازاین‌نکته‌که خارج‌قسمتهای a_i عددهای صحیح هستند، استفاده نکرده‌ایم. گرچه هر a_i یك عدد صحیح است، عدد $(a_k+۱/a_{k+۱})$ لزوماً چنین نیست. بااین‌حال، قراردادن آن به‌جای a_k، در برهان قضیه هیچ‌گونه خللی وارد نمی‌کند.

چه خوب بود اگر با معادله‌های (۲۸.۱)، دوهمگرای اول هم‌که با (۲۹.۱) داده شده‌اند، به‌دست می‌آمد. اگردر (۲۸.۱)، i را ۱ و ۲ بگیریم، جمله‌های تعریف نشدهٔ $p_۰$، $p_{-۱}$، $q_۰$، $q_{-۱}$ به‌دست می‌آیند. اما، اگراین مقادیرتعریف نشده را

$$(۳۳.۱)\qquad \begin{aligned} p_۰&=۱, & p_{-۱}&=۰\ , \\ q_۰&=۰, & q_{-۱}&=۱\ , \end{aligned}$$

بگیریم، آن‌گاه معادله‌های (۲۸.۱) به‌ازای $i=۱,۲,۳,\ldots,n-۱,n$ برقرار خواهندشد، وبه‌ازای دومقدار اول $i=۱,۲$ معادله‌های (۲۹.۱) نتیجه می‌شوند. با قراردادن ۱ به‌جای i در (۲۸.۱)، و با استفاده از (۳۳.۱)، به‌دست می‌آوریم

$$c_۱=\frac{p_۱}{q_۱}=\frac{a_۱p_۰+p_{-۱}}{a_۱q_۰+q_{-۱}}=\frac{a_۱ ۱+۰}{a_۱ ۰+۱}=\frac{a_۱}{۱}\ ;$$

وبه‌ازای $i=۲$، داریم

$$c_۲=\frac{p_۲}{q_۲}=\frac{a_۲p_۱+p_۰}{a_۲q_۱+q_۰}=\frac{a_۲a_۱+۱}{a_۲ ۱+۰}=\frac{a_۲a_۱+۱}{a_۲}\ .$$

ازاین‌رو، باتوجه به (۳۳.۱) نیازی به‌معادله‌های (۲۹.۱) نداریم و به‌جای آن از معادله‌های (۲۸.۱) به ازای $i=۱,۲,\ldots,n$، استفاده می‌کنیم. اما توجه‌کنید که $\frac{p_{-۱}}{q_{-۱}}$ و $\frac{p_۰}{q_۰}$ را ازجمله همگراها به‌حساب نمی‌آوریم.

اینک محاسبهٔ همگراهای متوالی را می‌توان به‌نظم درآورد. با مثالی این‌مطلب روشن خواهدشد. بسط کسرمسلسل $\frac{۱۲۰}{۴۹}$ عبارت است از

$$\frac{۱۲۰}{۴۹}=[۲,۲,۴,۲,۲]=[a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵]\cdot$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول ۱

i	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
a_i			۲	۲	۴	۲	۲
p_i	۰	۱	۲	۵	۲۲	۴۹	۱۲۰
q_i	۱	۰	۱	۲	۹	۲۰	۴۹
$c_i=\frac{p_i}{q_i}$			$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۲۲}{۹}$	$\frac{۴۹}{۲۰}$	$\frac{۱۲۰}{۴۹}$

$$p_i=a_ip_{i-۱}+p_{i-۲},\qquad q_i=a_iq_{i-۱}+q_{i-۲},\qquad i=۱,\ldots$$

توضیح جدول: درایه‌های سطر نخست جدول، مقادیر i هستند: $i=-۱,۰,۱,۲,\ldots$. زیرهر مقدار i مقادیر متناظر آن a_i، p_i، q_i، c_i درج شده‌اند. مثلا زیر $i=۴$ خواهیم داشت

$$a_۴=۲,\quad p_۴=۴۹,\quad q_۴=۲۰,\quad c_۴=\frac{۴۹}{۲۰}$$

جدول را به‌این طریق تشکیل می‌دهیم: درسطر دوم زیرهرمقدار i مقدارمتناظر a_i را می‌نویسیم. مقادیرویژهٔ $p_{-۱}=۰$، $p_۰=۱$، $q_{-۱}=۱$ و $q_۰=۰$ را درطرف چپ به‌ترتیب‌زیر، $i=-۱$ و $i=۰$ وارد می‌کنیم. سپس p_iها را محاسبه می‌کنیم.

نخست با استفاده ازمعادله‌های (۲۸.۱) به‌ازای $i=۱$، داریم

$$p_{۱}=a_{۱}p_{۰}+p_{-۱}=۲\times ۱+۰=۲.$$

۲

(نخستین دستگاه پیکانها را دنبال کنید $۱\longleftarrow ۰$.)

$p_{۱}=۲$ را زیر $i=۱$ درسطر سوم ثبت می‌کنیم. به‌ازای $i=۲$، خواهیم داشت

۲

$$p_{۲}=a_{۲}p_{۱}+p_{۰}=۲\times ۲+۱=۵, \qquad ۱\longleftarrow ۲$$

که درزیر $i=۲$ درهمان سطر ثبت می‌شود. به‌ازای $i=۳$، خواهیم داشت

۴

$$p_{۳}=a_{۳}p_{۲}+p_{۱}=۴\times ۵+۲=۲۲, \qquad ۲\longleftarrow ۵$$

والی‌آخر. برای محاسبهٔ q_iها همان رویه را با واردکردن مقادیر حاصل درسطر مربوط به q_iها دنبال می‌کنیم. به‌عنوان مثال،

۲

$$q_{۴}=a_{۴}q_{۳}+q_{۲}=۲\times ۹+۲=۲۰, \qquad ۲\longleftarrow ۹$$

ازاین‌رو، عدد ۲۰ درسطرچهارم، زیر $i=۴$ ثبت می‌شود.

مجموعه مسأله‌های ۳

توجه: مسأله‌های ستاره‌دار مشکلترند ومی‌توان آنها را درمرحلهٔ نخست مطالعه حذف کرد.

۱. عددهای گویای زیر را به‌کسرهای مسلسل سادهٔ متناهی بسط دهید و همگراهای متوالی c_i را برای هرعدد محاسبه کنید.

(الف) $\dfrac{۱۲۱}{۲۱}$ (ب) $\dfrac{۲۹۰}{۸۱}$ (پ) $\dfrac{۱۷۷}{۲۹۲}$ (ت) $\dfrac{۱۲۶}{۲۳}$

۲. هم‌ارز کسرهای مسلسل زیر را با تعداد فردی از خارج‌قسمتهای جزئی بیان کنید.

(الف) $[۲, ۱, ۱, ۴, ۱, ۱]$ (ب) $[۴, ۲, ۱, ۷, ۷, ۱]$

(پ) $[۰, ۴, ۲, ۶]$ (ت) $[۴, ۲, ۶, ۱]$

۳. برای هر کسر مسلسل درمسألهٔ ۲، تعدادِ خارج قسمتهای جزئی را n فرض کنید و $p_n q_{n-۱} - p_{n-۱} q_n$ را محاسبه کنید؛ سپس همین عدد را از روی نمایش این کسرهای مسلسل با تعداد فردی از خارج قسمتهای جزئی محاسبه کنید. برای مثال، درمسألهٔ ۲ (الف) $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_۶}{q_۶}$ را آخرین همگرا فرض کنید.

۴. همگراهای کسر مسلسل $[۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶]$ را محاسبه کنید و نشان دهید که $p_۶ = ۵p_۵ + ۵p_۴ + ۴p_۳ + ۳p_۲ + ۲p_۱ + ۲$. (مسألهٔ ۸ را ببینید.)

۵. در کسر مسلسل $[۳, ۱, ۴, ۱, ۵]$، $p_۵$ و $p_۴$ را محاسبه کنید. سپس $\frac{p_۵}{p_۴}$ را به کسر مسلسل سادهٔ متناهی تبدیل کرده، و آن‌را با کسر اولیه مقایسه کنید. همین عمل را در مورد $\frac{q_۵}{q_۴}$ انجام دهید. (مسألهٔ ۷ را ببینید.)

۶. همگراهای متوالی تقریبهای زیر از عددهای داخل پرانتز را محاسبه کنید.

(الف) ۳٫۱۴۱۵۹ (π) (ب) ۲٫۷۱۸ (e)

(پ) ۰٫۴۷۷۱ $(\log_{۱۰}۳)$ (ت) ۰٫۳۰۱۰ $(\log_{۱۰}۲)$

۷. ثابت کنید که، اگر $a_۱ \neq ۰$، آن‌گاه

$$\frac{p_n}{p_{n-۱}} = [a_n, a_{n-۱}, a_{n-۲}, \cdots, a_۱],$$

و

$$\frac{q_n}{q_{n-۱}} = [a_n, a_{n-۱}, a_{n-۲}, \cdots, a_۲].$$

راهنمایی: می‌دانیم که $p_n = a_n p_{n-۱} + p_{n-۲}$؛ از این‌رو

$$\frac{p_n}{p_{n-1}}=a_n+\cfrac{1}{\cfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}},$$

همچنین می‌دانیم که $p_{n-1}=a_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3}$؛ از این رو

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}=a_{n-1}+\cfrac{1}{\cfrac{p_{n-2}}{p_{n-3}}},$$

و الی آخر.

*۸. مسألهٔ ۴ را تعمیم دهید، اگر $\frac{p_1}{q_1}$، $\frac{p_2}{q_2}$، ...، $\frac{p_n}{q_n}$ همگراهای $[1,2,3,4,\dots,n]$ باشند، نشان دهید که

$$p_n=(n-1)p_{n-1}+(n-1)p_{n-2}+(n-2)p_{n-3}$$
$$+\dots+3p_2+2p_1+(p_1+1).$$

راهنمایی: در رابطهٔ $p_i=ip_{i-1}+p_{i-2}$، فرض کنید i مساوی با ۱، ۲، ۳، ...، n است و عبارتهای حاصل را جمع کنید. توجه کنید که $a_n=n$.

۶.۱ تفاضلهای همگراها

کسانی که تمرینهای قبل را حل کرده‌اند حتماً تاکنون حدس زده‌اند که همگراهای یك کسر مسلسل سادهٔ متناهی همواره تحویل‌ناپذیرند. این نتیجه‌ای از قضیهٔ اساسی زیر است.

قضیهٔ ۴.۱ اگر $p_i=a_ip_{i-1}+p_{i-2}$ و $q_i=a_iq_{i-1}+q_{i-2}$ همانند قضیهٔ ۳.۱ تعریف شوند، آن‌گاه به‌ازای $i\geqslant 0$،

$$p_iq_{i-1}-p_{i-1}q_i=(-1)^i$$

اثبات. با محاسبهٔ مستقیم معلوم می‌شود که قضیه به‌ازای $i=0, 1, 2$ صحیح است. وقتی $i=0$، داریم

$$p_0q_{-1}-p_{-1}q_0=1\times 1-0\times 0=1=(-1)^0;$$

وقتی $i=1$، داریم

$$p_1q_0-p_0q_1=a_1\times 0-1\times 1=(-1)^1;$$

وقتی $i=2$، داریم

$$p_2q_1-p_1q_2=(a_2a_1+1)\times 1-a_1a_2=1=(-1)^2.$$

ثابت می‌کنیم که اگر قضیه به‌ازای $i=k$ برقرار باشد، آن‌گاه به‌ازای عددصحیح بعدی $i=k+1$ نیز برقراراست. بنابرقضیهٔ ۳.۱ [معادله‌های (۲۸.۱) را ببینید.] می‌دانیم که به‌ازای $i=k+1$،

$$p_{k+1}=a_{k+1}p_k+p_{k-1} \qquad q_{k+1}=a_{k+1}q_k+q_{k-1};$$

ازاین‌رو می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}&=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})\\ &=a_{k+1}p_kq_k+p_{k-1}q_k-a_{k+1}p_kq_k-p_kq_{k-1}\\ &=(-1)(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k). \end{aligned} \tag{۳۴.۱}$$

فرض می‌کنیم که قضیه به‌ازای $i=k$ برقرارباشد، یعنی

$$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^k.$$

با قراردادن این نتیجه درآخرین سطر (۳۴.۱)، مشاهده می‌کنیم که

$$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(-1)(-1)^k=(-1)^{k+1}.$$

که همان حکم قضیه به‌ازای $i=k+1$ است، بنابراین ثابت کرده‌ایم که اگر قضیه به‌ازای $i=k$ برقرار باشد، به‌ازای $i=k+1$ نیز برقرار است. می‌دانیم که قضیه به‌ازای $i=0$ برقراراست؛ ازاین‌رو به‌ازای $i=0+1=1$، و بنابراین به ازای $i=1+1=2$، و به‌همین ترتیب به ازای تمام مقادیر $i=0,1,2,\dots,n$ برقرار است.

نتیجهٔ ۵.۱ هر همگرای $c_i=\dfrac{p_i}{q_i}$، $i\geqslant 1$، ازکسر مسلسل ساده، تحویل‌ناپذیر است، یعنی p_i و q_i مقسوم‌علیه‌های مشترک دیگری بجز $+1$ و -1 ندارند.

اثبات. چون

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i ,$$

پس هرعددی‌که p_i و q_i را بشمارد، باید مقسوم‌علیهی از $(-1)^i$ باشد. اما $+1$ و -1 تنها مقسوم‌علیه‌های $(-1)^i$ هستند؛ ازاین‌رو عددهای $+1$ و -1 تنها مقسوم‌علیه‌های مشترك p_i و q_i هستند. دربحث مربوط به‌الگوریتم اقلیدس، برای نمایش بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b، یعنی d، نماد $d=(a, b)$ را به‌کار بردیم، اینك می‌توان گفت‌که $(p_i, q_i)=1$، زیرا ۱ بزرگترین عددی است که‌هم p_i و هم q_i را می‌شمارد.

مجموعه مسأله‌های ۴

۱. درستی قضیهٔ ۴.۱ را با استفاده ازکسرمسلسل $[3, 1, 2, 2, 1, 5]$ با محاسبهٔ $p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0$، $p_1 q_0 - p_0 q_1$، $p_2 q_1 - p_1 q_2$ وغیره، بررسی کنید. همچنین تحقیق کنید که هریك از همگراهای $\frac{p_1}{q_1}$، $\frac{p_2}{q_2}$، ...، $\frac{p_6}{q_6}$ یك کسر گویای تحویل‌ناپذیر است.

۲. با استفاده از راهنماییهای زیر اثبات دیگری ازقضیهٔ ۴.۱ را ارائه دهید. توجه کنید که

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (a_i p_{i-1} + p_{i-2}) q_{i-1} - p_{i-1}(a_i q_{i-1} + q_{i-2})$$
$$= (-1)(p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1}) .$$

عبارت $p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1}$ همان عبارت $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i$ است بااین تفاوت‌که درآن $i-1$ جانشین i شده‌است. ازاین‌رو، این عمل «پایین آوردن» i به $i-1$ را می‌توان تکرارکرد وبه‌نتیجهٔ

$$p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1} = (-1)(p_{i-2} q_{i-3} - p_{i-3} q_{i-2})$$

دست یافت. پس‌از تکرار این‌عمل، نتیجهٔ نهایی زیر بدست می‌آید:

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i (p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0) = (-1)^i \times 1$$
$$= (-1)^i .$$

۷.۱ چند نکتهٔ تاریخی

این فصل را با ذکر چند نکتهٔ کوتاه دررابطه با تاریخ نظریهٔ کسرهای مسلسل به‌پایا می‌بریم. آثار دیرینهٔ ایدهٔ کسرمسلسل تاحدودی روشن نیست، زیرا بسیاری ازاحکا دیرین حساب به‌این‌کسرها اشاره‌هایی دارند، اما بحث منظمی از موضوع وجـو ندارد.

پیش‌ازاین دیده‌ایم که الگوریتم اقلیدس برای پیداکردن بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك دوعدد اساساً شبیه عمل تبدیل کسر به کسرمسلسل است. این شایدکهنترین گام مهم (۳۰۰ سال پیش‌ازمیلاد) دربسط مفهوم کسرمسلسل باشد.

درکارهای **آریابهاتا**[1] ریاضیدان هندی، که درسال ۵۵۰ میـلادی درگذشت، اشاره‌ای به‌کسرهای مسلسل دیده می‌شود. موضـوع جواب عمومی معادلهٔ سیال بـا استفاده ازکسرهای مسلسل که درآثارآریابهاتا آمده از قدیمیترین کوششهایی است که دراین موضوع به‌عمل آمده است (فصل بعد را ببینید). آثاری ازمفهوم‌کلی‌کسر مسلسل درنوشته‌های عربی ویونانی نیز دیده می‌شود.

اکثر صاحبنظران اعتقاد دارندکه نظریهٔ جدیدکسرهای مسلسل با نوشته‌هـای رافائل بمبلی[2] (متولد ۱۵۳۰ میلادی) ازاهالی بلونیه[3] آغاز شده است. کتاب وی در جبر (۱۵۷۲) شامل فصلی دربارهٔ جذر است. برای مثال، با نمادگذاری جدید، اونشان دادکه

$$\sqrt{۱۳}=۳+\frac{۴}{۶+}\frac{۴}{۶+}\cdots$$

این نشان می‌دهدکه، اساساً وی ازبسط

$$\sqrt{a^۲+b}=a+\frac{b}{۲a+}\frac{b}{۲a+}\cdots$$

آگاه بوده است.

دومیـن نویسنده‌ای که این کسرها را بـررسی کرد، پیتروآنتونیوکاتالدی[4] (۱۵۴۸-۱۶۲۶)، شهروند دیگری از بلونیه بود. درکتابی دربارهٔ نظریهٔ ریشه‌هـا (۱۶۱۳)، او $\sqrt{۱۸}$ را به‌صورت

1. Āryabhata 2. Rafael Bombelli 3. Bologna
4. Pietro Antonio Cataldi

$$۴۰+\frac{۲}{۸۰}\ \&\ \frac{۲}{۸۰}\ \&\ \frac{۲}{۸۰},$$

بیان کرده است. برای راحتی چاپ، او این عبارت را به‌صورت

$$۴:\&\ \frac{۲}{۸۰}\ \&\ \frac{۲}{۸۰}\ \&\ \frac{۲}{۸۰},$$

تغییر داد، که اساساً همان صورت

$$\sqrt{۱۸}=۴+\frac{۲}{۸+}\frac{۲}{۸+}\frac{۲}{۸+}\cdots$$

است.

سومین نویسندهٔ قدیمی که باید از او نام ببریم، دانیل شونتر[1] (۱۶۳۶–۱۵۸۵) است که در زمانهای مختلف، استاد زبان عبری، زبانهای شرقی و ریاضیات در دانشگاه آلتدورف[2] آلمان بود. وی در کتاب خود به‌نام هندسهٔ عملی[3] با پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۷۷ و ۲۳۳ تقریبهایی برای $\frac{۱۷۷}{۲۳۳}$ پیدا کرد و با استفاده از این محاسبات همگراهای $\frac{۷۹}{۱۰۴}$، $\frac{۱۹}{۲۵}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۱}{۱}$ و $\frac{۰}{۱}$ را به‌دست آورد.

نویسندهٔ برجستهٔ دیگری که کسرهای مسلسل را به‌کار برد لرد برونکر[4] (۱۶۸۴–۱۶۲۰) نخستین رئیس انجمن سلطنتی بود. وی حاصلضرب نامتناهی

$$\frac{۴}{\pi}=\frac{۳\times۳\times۵\times۵\times۷\times۷\times۹\times۹\times\cdots}{۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times۸\times۸\times۱۰\times\cdots},$$

را که ریاضیدان انگلیسی جان والیس[5] (۱۶۵۵) کشف کرده بود، به کسر مسلسل

$$\frac{۴}{\pi}=۱+\frac{۱^۲}{۲+}\frac{۳^۲}{۲+}\frac{۵^۲}{۲+}\frac{۷^۲}{۲+}\cdots,$$

1. Daniel Schwenter
2. Altdorf
3. *Geometrica Practica*
4. Lord Brouncker
5. John Wallis

تبدیل کرد ولی هیچ استفاده‌ای از این کسرها نکرد.

والیس در کتاب خود به‌نام حساب بینهایتها[1] که در سال ۱۶۵۵ منتشر شد، در بحث دربارهٔ کسر برونکر، تعداد زیادی از ویژگیهای مقدماتی همگراهای کسرهای مسلسل، از جمله روش تشکیل آنها را بیان کرد. وی همچنین برای نخستین بار نام «کسر مسلسل» را به‌کار برد.

ریاضیدان، مکانیکدان، منجم و فیزیکدان بزرگ هلندی، کریستین هویگنس[2] (۱۶۲۹–۱۶۹۵) ازکسرهای مسلسل برای تقریب زدن طرح دقیق دندانه‌های چرخهای افلاکنمای خود استفاده کرد (۱۶۹۸). این مطلب درکتاب وی موسوم به ترسیم اتوماتیک سیارات[3] که پس از مرگش درسال ۱۶۹۸ منتشر شد، شرح داده شده است.

پس از این آغاز، ریاضیدانانی چون اویلر[4] (۱۷۰۷–۱۷۸۳)، لامبرت[5] (۱۷۲۸–۱۷۷۷)، لاگرانژ[6] (۱۷۳۶–۱۸۱۳) و ریاضیدانان بسیار دیگری این نظریه را به‌صورتی‌که امروز با آن آشنا هستیم بسط داده‌اند. بویژه مقالهٔ مهم اویلر به‌نام دربارهٔ کسرهای پیوسته[7] (۱۷۳۷)، نظریهٔ جدید را پایه‌گذاری کرد.

کسرهای مسلسل در ریاضیات کنونی نقش‌مهمی بازی می‌کنند ویکی‌ازمهمترین ابزارها درکشفهای جدید درنظریهٔ اعداد و در حوزهٔ تقریبهای دیوفانتی[8] هستند. یك‌تعمیم مهم کسرهای مسلسل به‌نام نظریهٔ تحلیلی کسرهای مسلسل‌وجود دارد،که زمینهٔ وسیعی برای تحقیقات حال و آینده است. درزمینهٔ کامپیوتر، کسرهای مسلسل برای به‌دست آوردن تقریب تابعهای پیچیدهٔ مختلف به‌کار رفته‌اند، وزمانی‌که برای‌ماشینهای الکترونیك کدگذاری شدند، نتایج عددی سریع و ارزشمندی در اختیار دانشمندان وکسانی‌که در زمینه‌های ریاضیات عملی‌کار می‌کنند، قراردادند.*

1. *Arithmetica Infinitorum* 2. Christian Huygens
3. *Descriptio Automati Planetarii* 4. Euler
5. Lambert 6. Lagrange 7. *De Fractionibus Continius*
8. Diophantine approximations

* فصل نهم کتاب زیررا ببینید:

F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1956.

۲

معادله‌های دیوفانتی

۱.۲ مقدمه

بسیاری از معماها، چیستانها وسؤالهای فکری به‌معادله‌هایی ریاضی‌منتهی می‌شوند که جوابهای آنها باید عددهای صحیح باشند. یك‌مثال نمونه این‌است: کشاورزی‌تعدادی گاو به بهای هر رأس ۸۰ دلار و تعدادی گوسفند به‌بهای هر رأس ۵۰ دلارخرید. صورتحساب وی ۸۱۰ دلارشد. او چند رأس‌گاو و چند رأس‌گوسفند خریده‌است؟

اگر x تعدادگاوها و y تعدادگوسفندها باشد، داریم

$$۸۰x+۵۰y=۸۱۰ \qquad (۱.۲)$$

که معادل است با معادلهٔ

$$۸x+۵y=۸۱ \,. \qquad (۲.۲)$$

در این معادله، اگـر شرطی مقادیر x و y را محدود نکند، می‌توان به x هر مقداری، مثلاً $x=\frac{۱}{۲}$ را نسبت داد، وسپس معادلهٔ حاصل، یعنی،

$$۴+۵y=۸۱$$

را نسبت به y حل کـرد و $y=۷۷/۵$ را به‌دست آورد. ازاین‌نظر، معادلهٔ (۲.۲) یک‌معادلهٔ مبهم است، و به‌این‌معناست که هرمقداری به x بدهیم همواره مقدارمتناظری برای y به‌دست می‌آید.

اما، اگرمقادیر x و y را به‌عددهـای صحیح محدود کنیم، همچنانکه احتمالا کشاورز همین کار را می‌کند (زیرا احتمالا وی علاقه‌ای به‌نیمه گاو ندارد)، آن‌گاه مثال ما متعلق به‌ردهٔ بزرگی‌از مسأله‌ها می‌شودکه به‌دنبال جـوابهای صحیح x و y معادله‌های مبهم می‌گردند. معادله‌های مبهمی که باید برحسب عددهای‌صحیح (وگاهی عددهای گویا) حل شوند، به‌افتخار دیوفانتس[1] ریاضیدان یـونانی حدود قرن سوم میلادی که‌کتابی‌دربارهٔ این‌گونه معادله‌ها نوشت، غالباً معادله‌های دیوفانتی نامیده می‌شوند. باید متذکر شد که مسألهٔ داده‌شده دارای این قید اضافی است‌که x و y نه‌تنها عددهای صحیح‌اند بلکه باید مثبت هم باشند.

معادلهٔ (۲.۲) وهمچنین معادلهٔ (۱.۲) را می‌توان با روشهای‌زیادی حل کرد. درحقیقت درحل ایـن گونه معادله‌ها از طریق آزمایش وخطا یا از راه حـدسهای هوشمندانه هیچ مشکلی وجود ندارد. مثلا، اگرمعادلهٔ (۲.۲) را به‌صورت

$$۸۱-۸x=۵y,$$

بنویسیم، تنها نیازمند جستجوی مقادیرصحیحی‌از x هستیم که $۸x-۸۱$ مضربی از ۵ شود. با دادن مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰ به x درمی‌یابیم که $x=۲$ و $x=۷$ تنهامقادیر نامنفی‌هستند که به‌ازای‌آنها $۸x-۸۱$ مضرب نامنفی ۵ می‌شود. محاسبات عبارت‌اند از

$$x=۲,\ ۸۱-۸x=۸۱-۱۶=۶۵=۵\times ۱۳=۵y,\ y=۱۳,$$

$$x=۷,\ ۸۱-۸x=۸۱-۵۶=۲۵=۵\times ۵=۵y,\ y=۵;$$

ازاین‌رو، $(x,y)=(۲,۱۳)$ و $(x,y)=(۷,۵)$ دوجواب مسأله‌اند. بنابراین کشاورز توانسته‌است ۲ گاو و ۱۳ گوسفند، یا ۷ گاو و ۵ گوسفند بخرد.

روشهای دیگری بـرای حل معادله‌های دیوفانتی وجود دارد. دو روش دیگر نیـز ارائه خواهیم داد. روش اول را اویلر درکتاب عمومی جبر خـود که درسال ۱۷۷۰ انتشار یافت، بارها به‌کار برده‌است. روش‌دوم چگونگی کاربردکسرهای‌مسلسل را درحل این‌گونه معادله‌ها نشان خواهد داد.

1. Diophantus

۲.۲ روشی که اویلر زیاد به‌کار برده است*

دوباره معادلهٔ

$$۸x+۵y=۸۱ \qquad (۳.۲)$$

را درنظرمی‌گیریم. چون ضریب y کوچکتر است، معادله را نسبت به y حل می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$y=\frac{۸۱-۸x}{۵} \qquad (۴.۲)$$

۸۱ و ۸ هردوشامل مضربهایی از ۵ هستند، یعنی

$$۸۱=۵\times۱۶+۱,\quad ۸=۵\times۱+۳$$

بنابراین، ازمعادلهٔ (۴.۲)، داریم

$$y=\frac{(۵\times۱۶+۱)-(۵\times۱+۳)x}{۵}$$

$$=(۱۶-x)+\frac{۱-۳x}{۵} \qquad (۵.۲)$$

$$=(۱۶-x)+t,$$

که در آن

$$t=\frac{۱-۳x}{۵},$$

یا

$$۳x+۵t=۱ \qquad (۶.۲)$$

چون x و y باید عددهای صحیح باشند، از معادلهٔ (۵.۲) نتیجه می‌گیریم که t هم

---

* برای مثالهای بیشتر، به‌کتاب زیرمراجعه کنید:

O. Ore [10].

باید عدد صحیح باشد. بنابراین هدف ما پیداکردن عددهای صحیح x و t است که در معادلهٔ (۶.۲) صدق کنند. این ایدهٔ اساسی در روش اویلر است، یعنی، نشان دادن اینکه جوابهای صحیح معادلـهٔ داده شده با جوابهای صحیح معادله‌های مشابهی با ضریبهای کوچکتر مربوط هستند.

اکنون آخرین معادله را، دقیقاً نظیر تحویل (۳.۲) به (۶.۲)، به معادلهٔ ساده‌تری تحویل می‌کنیم. با حل (۶.۲) نسبت به x، که جملهٔ باضریب کوچکتر است، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x &= \frac{۱-۵t}{۳} = \frac{(۱-(۲\times۳-۱)t}{۳} \\ &= -۲t - \frac{t+۱}{۳} \qquad (۷.۲) \\ &= -۲t+u, \end{aligned}$$

که در آن

$$u = \frac{t+۱}{۳}$$

یا

$$t = ۳u - ۱ \,. \qquad (۸.۲)$$

بازهم، چون x و t باید عددهای صحیح باشند، u نیز باید عددی صحیح باشد. برعکس، معادلهٔ (۸.۲) نشان می‌دهد که، اگر u صحیح باشد،

$$t = ۳u - ۱$$

عددی صحیح است؛ و x نیز عددی صحیح است، زیرا بنابر (۷.۲)،

$$x = -۲t+u = -۲(۳u-۱)+u = ۲-۵u \,.$$

با قراردادن $x = ۲-۵u$ و $t = ۳u-۱$ در (۵.۲)، خواهیم داشت

$$y = ۱۶-۲+۵u+۳u-۱ = ۸u+۱۳,$$

از این‌رو y نیـز عددی صحیح است. این نشان می‌دهد که جواب صحیح عمومی

(۳.۲) عبارت است از

$$x = ۲ - ۵u,$$
(۹.۲)
$$y = ۱۳ + ۸u,$$

که در آن u هرعدد صحیح مثبت، منفی یا صفر است، یعنی،

$$u = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \ldots$$

درحقیقت، جایگذاری مستقیم در (۳.۲) نشان می‌دهد که

$$۸x + ۵y = ۸(۲ - ۵u) + ۵(۱۳ + ۸u) = ۸۱$$

درنتیجه (۳.۲) به‌ازای هرمقدارصحیح u یك‌جواب دارد وبنابراین (۳.۲) دارای بینهایت جواب است. چند جواب درزیرفهرست شده‌اند:

u	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
x	۱۲	۷	۲	-۳	-۸	-۱۳
y	-۳	۵	۱۳	۲۱	۲۹	۳۷

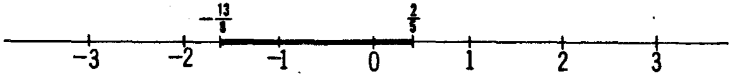
اگر مسأله چنان باشد که به‌مقادیرمثبت x و y محدود باشیم، آن‌گاه دو نابرابری را باید حل کنیم. مثلاً، اگر در (۹.۲) بخواهیم x و y هر دو مثبت باشند، باید دو نابرابری

$$۲ - ۵u > ۰, \qquad ۱۳ + ۸u > ۰,$$

را نسبت به u حل کنیم. این نابرابریها ایجاب می‌کنند که u عددی صحیح باشد به‌طوری که

$$u < \frac{۲}{۵}, \qquad u > -\frac{۱۳}{۸}.$$

با نگاهی به‌شکل ۱ می‌بینیم که تنها مقادیر صحیح ممکن u، ۰ و ۱ — هستند. قرار دادن متوالی $u = ۰$ و $u = -۱$ در (۹.۲) جوابهای اصلی مسألهٔ کشاورز، یعنی، $(x, y) = (۲, ۱۳)$ و $(x, y) = (۷, ۵)$، را نتیجه می‌دهد.



شکل ۱

با توجه به‌حل معادلهٔ (۳.۲) چند سؤال مطرح می‌شوند. مثلاً، چرا بایدمعادله را نسبت به y حل کنیم ونه نسبت به x، آیا صرفاً به‌این دلیل که ضریب y کوچکتر است؟ اگرمعادله را نخست نسبت به x حل می‌کردیم، آیا جواب کوتاهتری به‌دست می‌آوردیم؟ در دوخط پایینتراز معادلهٔ (۴.۲)، به‌جای ۸ عدد ۳ + ۱ × ۵ را قرار دادیم. چرا عدد ۲ − ۲ × ۵ را به‌جای ۸ قرار ندهیم؟ درحل معادلهٔ (۳.۲) نویسنده به‌فکرمعرفی کوتاهترین راه حل نبوده است. به‌دست آوردن جوابهای‌عمومی باکمترین تعداد مرحله‌ها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مجموعه مسأله‌های ۵

۱. با استفاده از روش اویلر، معادله‌های‌خطی دیوفانتی زیررا حل کنید. درهرحالت جوابهای صحیح ومثبت را، درصورت وجود، فهرست کنید.

(الف) $۱۵x+۴۷y=۲$ (ب) $۳۱x+۷y=۱$

(پ) $۱۵x+۴۷y=۴$ (ت) $۱۳x+۲۱y=۲۹۵$

۲. آیا معادلهٔ سیال $۶x+۱۵y=۱۷$ دارای جوابهای صحیح‌است؟ توجه کنید که طرف چپ بر ۳ بخشپذیراست. طرف راست چطور؟ اگر پیش برویم و برای حل از روش اویلراستفاده کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟

۳. معادلهٔ (۹.۲) را درنظر بگیرید و جدول زیررا به‌ازای مقادیرداده شدهٔ u کامل کنید.

u	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
x								
y								

روی کاغذگرافیك معمولی نقطه‌های (x, y) حاصل را رسم کنید وآنهارا با خط مستقیمی به‌هم وصل کنید. با استفاده از این نمودار جوابهای مثبت معادلهٔ

$8x+5y=81$ را به‌دست آورید.

۴. شخصی می‌خواهد با مبلغ ۲۳۷۰ دلار اسب و گاو خریداری کند. اگر قیمت یك اسب ۳۷ دلار وقیمت یك گاو ۲۲ دلار باشد، او چند اسب و چند گاو می‌تواند بخرد؟

۵. نشان دهید که معادلهٔ $17x-15y=5$ دارای بینهایت جواب صحیح مثبت است.

۶. عددهای صحیح u و v را به‌قسمی پیدا کنید که $u+v=84$ و u بر ۹ و v بر ۱۳ بخشپذیر باشد. راهنمایی: فرض کنید $u=9x$ و $v=13y$.

۷. عدد N را به‌قسمی پیدا کنید که باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۲۰، ۲ و بر ۳۰، ۱۲ باشد. راهنمایی: عددهای صحیح x و y را چنان پیدا کنید که

$$N=20x+2=30y+12\,.$$

لذا معادلهٔ $20x-30y=10$ را حل کنید.

۲.۳ معادلهٔ سیال $ax-by=\pm 1$

اکنون آماده‌ایم معادلهٔ سیال خطی $ax+by=c$ را، که در آن a، b و c عددهای صحیح ومعلوم، و x و y عددهای صحیح و مجهول‌اند، با استفاده از کسرهای مسلسل حل کنیم.

برای حل این مسأله ازطریق طی مرحله‌های آسان، قدم به‌قدم پیش‌می‌رویم و به بالاترین مرحله که به‌دست آوردن جواب هرمعادلهٔ حل شدنی به‌صورت $ax+by=c$ است دست می‌یابیم. نخست فرض می‌کنیم که ضریبهای x و y با علامتهای مختلف باشند وهیچ مقسوم‌علیه مشترکی جز ۱ نداشته‌باشند. بنابراین ابتدا به‌حل معادلهٔ

$$ax-by=1, \qquad (a,b)=1 \tag{2.10}$$

که در آن a و b عددهای صحیح‌مثبت‌هستند، می‌پردازیم. [معادلهٔ $-ax+by=1$، $(a,b)=1$، نیز از همین نوع است که در آن نقش x با y عوض شده است.] عددهای a و b نمی‌توانند مقسوم‌علیه مشترکی بزرگتر از ۱ داشته‌باشند، زیرا اگر، عدد صحیح d، a و b را بشمارد عدد ۱ درطرف راست معادله را نیز می‌شمارد. از

این‌رو، تنها مقدارممکن d عدد ۱ است. به‌عبارت دیگر، a و b نسبت به‌هم اول‌اند، یعنی $d=(a,b)=1$.

اکنون قضیهٔ زیر را بیان وثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰۲ معادلهٔ $ax-by=1$، که در آن a و b عددهای صحیح مثبت و نسبت به‌هم اول‌اند، دارای بینهایت جواب صحیح (x, y) است.

نخست $\frac{a}{b}$ را به کسر مسلسل سادهٔ متناهی تبدیل می‌کنیم

$$\frac{a}{b}=[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n] \tag{۱۱.۲}$$

و همگراهای c_1، c_2، ...، c_{n-1}، c_n را محاسبه می‌کنیم. دو همگرای آخر،

$$c_{n-1}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \qquad c_n=\frac{p_n}{q_n}=\frac{a}{b}$$

کلیدهای حل مسأله‌اند، زیرا این دو در رابطهٔ مذکور در قضیهٔ ۴۰۱، یعنی

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^n,$$

صدق می‌کنند و چون $p_n=a$، $q_n=b$، داریم

$$aq_{n-1}-bp_{n-1}=(-1)^n. \tag{۱۲.۲}$$

اگر n زوج باشد، یعنی اگر تعداد خارج‌قسمتهای جزئی a_1، a_2، ...، a_n زوج باشند، آن‌گاه $(-1)^n=1$ و (۱۲.۲) به

$$aq_{n-1}-bp_{n-1}=1 \tag{۱۳.۲}$$

تبدیل می‌شود. ازمقایسهٔ این معادله با معادلهٔ داده‌شدهٔ

$$ax-by=1,$$

مشاهده می‌کنیم که

$$x_0=q_{n-1}, \qquad y_0=p_{n-1}$$

یك جواب این معادله است.

اما، این، یك جواب خصوصی است و نه جواب عمومی. جواب خصوصی را با نماد $(x_۰, y_۰)$، نمایش می‌دهیم.

ازطرف دیگر، اگر n فرد باشد. به‌طوری‌که $(-۱)^n = -۱$، می‌توانیم کسر مسلسل (۱۱.۲) راکمی تغییر دهیم، اگر $a_n > ۱$ آن‌گاه به‌جای $\frac{۱}{a_n}$ بگذاریم

$$\frac{۱}{(a_n - ۱) + \frac{۱}{۱}},$$

و اگر $a_n = ۱$ آن‌گاه به‌جای $\frac{۱}{a_{n-۱} + \frac{۱}{a_n}}$ بگذاریم $\frac{۱}{a_{n-۱} + ۱}$.

بنا براین، اگر تعداد خارج‌قسمتهای جزئی (۱۱.۲) فرد باشد، می‌توان آن‌را به

$$[a_۱, a_۲, \cdots, a_n - ۱, ۱] \qquad \text{اگر } a_n > ۱،$$

یا به

$$[a_۱, a_۲, \cdots, a_{n-۱} + ۱] \qquad \text{اگر } a_n = ۱،$$

تبدیل کرد. درهردوحالت، تعداد خارج‌قسمتهای جزئی زوج است. بااستفاده ازاین کسرهای مسلسل، درهریك ازحالتها، $\frac{p_{n-۱}}{q_{n-۱}}$ و $\frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$ را مجدداً محاسبه می‌کنیم، وبازهم به‌معادلهٔ (۱۳.۲) می‌رسیم.

یك جواب خصوصی $(x_۰, y_۰)$ معادلهٔ (۱۰.۲) که به‌دست آمد، پیداکردن جواب عمومی کاری آسان است. برای این‌منظورفرض کنید (x, y) یك‌جواب دیگر (۱۰.۲) باشد. آن‌گاه

$$ax - by = ۱,$$

و

$$ax_۰ - by_۰ = ۱,$$

وتفریق این دومعادله نتیجه می‌دهد

$$a(x-x_0)=b(y-y_0)\,. \qquad (۱۴.۲)$$

این معادله نشان می‌دهد که b طرف چپ معادله را می‌شمارد. و لی‌چون a و b نسبت به‌هم اول‌اند b، a را نمی‌شمارد، پس b، $x-x_0$ را می‌شمارد، یعنی $x-x_0$ مضرب صحیحی‌از b است، ومی‌توان نوشت

$$x-x_0=tb \quad (\text{که } t \text{ عددی صحیح است})\,,$$

یا

$$x=x_0+tb\,.$$

با توجه به‌این رابطه، (۱۴.۲) نشان می‌دهد که

$$a(tb)=b(y-y_0),$$

ازاین‌رو

$$y-y_0=at\,.$$

درنتیجه، هر جواب $(x,\ y)$ معادلهٔ $ax-by=1$ به‌صورت

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+tb\\ y&=y_0+ta \end{aligned}\right\} \quad t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots \qquad (۱۵.۲)$$

است.

برعکس، اگر $(x_0,\ y_0)$ یك جواب خصوصی‌دلخواه $ax-by=1$ باشد، واگر معادله‌های (۱۵.۲) به‌ازای هرعدد صحیح دلخواه t، برقـرار باشند، آن‌گاه مقادیر $(x,\ y)$ درمعادله صدق خواهندکرد، زیرا

$$\begin{aligned} ax-by&=a(x_0+tb)-b(y_0+ta)\\ &=(ax_0-by_0)+tab-tab\\ &=ax_0-by_0=1\,. \end{aligned}$$

مقادیر x و y راکه از معادله‌های (۱۵.۲) به‌دست می‌آیند جوابهای عمومی‌معادلهٔ سیال $ax-by=1$ می‌نامیم.

مثال ۱. جوابهای صحیح معادلهٔ سیال زیر را پیدا کنید:

$$۲۰۵x-۹۳y=۱.$$

در اینجا ۴۱ × ۵ = ۲۰۵ و ۳۱ × ۳ = ۹۳ نسبت به‌هم اول‌اند، ازاین‌رو، معادله دارای جواب است.

حل. تعداد خارج‌قسمتهای جزئی کسر مسلسل $\frac{۲۰۵}{۹۳}=[۲, ۴, ۱, ۸, ۲]$ فرد است، ولی به‌جای‌آن می‌توان بسط معادل آن، یعنی کسر

$$\frac{۲۰۵}{۹۳}=[۲, ۴, ۱, ۸۱, ۱],$$

راکه تعداد خارج‌قسمتهایش زوج است، قرار داد. پس‌همگراهای این کسر را محاسبه می‌کنیم:

i	−۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
a_i			۲	۴	۱	۸	۱	۱
p_i	۰	۱	۲	۹	۱۱	۹۷	۱۰۸	۲۰۵
q_i	۱	۰	۱	۴	۵	۴۴	۴۹	۹۳
c_i			$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۹}{۴}$	$\frac{۱۱}{۵}$	$\frac{۹۷}{۴۴}$	$\frac{۱۰۸}{۴۹}$	$\frac{۲۰۵}{۹۳}$

در اینجا $n=۶$، $p_{n-۱}=p_۵=۱۰۸=y_۰$، $q_{n-۱}=q_۵=۴۹=x_۰$، و لذا بنابر (۱۵.۲)، جواب عمومی معادلهٔ $ax-by=۲۰۵x-۹۳y=۱$ عبارت است از

$$x=x_۰+tb=۴۹+۹۳t$$

$$t=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$$

$$y=y_۰+ta=۱۰۸+۲۰۵t$$

به‌منظور بررسی درستی‌این‌جواب، فرض کنید $t=۱$؛ آن‌گاه $x=۱۴۲$، $y=۳۱۳$

و $۲۰۵(۱۴۲)-۹۳(۳۱۳)=۲۹۱۱۰-۲۹۱۰۹=۱$. در بررسی کلی، داریم:

$$۲۰۵(۴۹+۹۳t)-۹۳(۱۰۸+۲۰۵t)=۱,$$

زیرا جمله‌های شامل t، حذف می‌شوند.

روش حل معادلهٔ

$$ax-by=-۱, \quad (a, b)=۱,$$

کاملا شبیه روشی است که درمورد (۱۰.۲) به‌کار رفت. کسر $\frac{a}{b}$ را به‌یك کسرمسلسل سادهٔ متناهی باهمگراهای به‌تعداد فرد تبدیل می‌کنیم. دراین‌حالت چون n فرد است، معادلهٔ (۱۲.۲) به‌رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود،

$$aq_{n-۱}-bp_{n-۱}=(-۱)^n=-۱,$$

با مقایسهٔ این معادله، با معادلهٔ

$$ax-by=-۱,$$

مشاهده می‌کنیم که

$$x_۰=q_{n-۱}, \qquad y_۰=p_{n-۱},$$

یك جواب خصوصی معادله داده‌شده است، همچون‌گذشته، جواب عمومی عبارت است از

$$x=x_۰+tb \qquad\qquad t=۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \ldots$$
$$y=y_۰+ta$$

مثال ۲. جوابهای صحیح معادلهٔ زیررا پیداکنید:

$$۲۰۵x-۹۳y=-۱۰$$

حل. عددهای ۲۰۵ و ۹۳ نسبت به‌هم اول‌اند، لذا معادلهٔ داده‌شده دارای جوابهای صحیح است. کسر $\frac{۲۰۵}{۹۳}$ را به‌صورت کسرمسلسل می‌نویسیم:

$$\frac{۲۰۵}{۹۳}=[۲, ۴, ۱, ۸, ۲]$$

تعداد خارج‌قسمتها فرد است، بنا براین $(-۱)^n=(-۱)^۵=-۱$ وشرط‌مطلوب برقراراست. برای پیداکردن همگراها جدول زیررا تنظیم می‌کنیم

i	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
a_i			۲	۴	۱	۸	۲
p_i	۰	۱	۲	۹	۱۱	۹۷	۲۰۵
q_i	۱	۰	۱	۴	۵	۴۴	۹۳
c_i			$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۹}{۴}$	$\frac{۱۱}{۵}$	$\frac{۹۷}{۴۴}$	$\frac{۲۰۵}{۹۳}$

این جدول نشان می‌دهد که $c_{n-۱}=\frac{p_{n-۱}}{q_{n-۱}}=\frac{p_۴}{q_۴}=\frac{۹۷}{۴۴}$، لذا یك جواب خصوصی معادله‌عبارت‌است از $x_۰=q_۴=۴۴$ و $y_۰=p_۴=۹۷$. بنا براین، جواب‌عمومی برابراست با

$$x=x_۰+tb=۴۴+۹۳t$$

$$t=۰, \pm۱, \pm۲, \dots$$

$$y=y_۰+ta=۹۷+۲۰۵t$$

به‌عنوان بررسی، t را -۱ بگیرید؛ آن‌گاه $(x, y)=(-۴۹, -۱۰۸)$ و

$$۲۰۵(-۴۹)-۹۳(-۱۰۸)=-۱۰۰۴۵+۱۰۰۴۴=-۱.$$

جالب توجه است‌که از یك جواب خصوصی $(x_۰, y_۰)=(q_{n-۱}, p_{n-۱})$ معادلهٔ

$$ax-by=۱,$$

یك جواب خصوصی $(x_۱, y_۱)$ معادلهٔ

$$ax-by=-۱, \qquad (۱۶.۲)$$

به‌دست می‌آید. جواب خصوصی (۱۶.۲) عبارت است از

$$x_1 = b - x_0 = b - q_{n-1},$$
$$y_1 = a - y_0 = a - p_{n-1}, \qquad (۱۷.۲)$$

زیرا

$$\begin{aligned} ax_1 - by_1 &= a(b - q_{n-1}) - b(a - p_{n-1}) \\ &= ab - ab - (aq_{n-1} - bp_{n-1}) \\ &= (-1)(aq_{n-1} - bp_{n-1}) \\ &= (-1)(+1) = -1, \end{aligned}$$

زیرا با توجه به‌رابطهٔ (۱۳.۲) می‌دانیم که $aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$. آن‌گاه جواب عمومی معادلهٔ $ax - by = -1$ به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + tb \\ y &= y_1 + ta \end{aligned}\right\} \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \qquad (۱۸.۲)$$

ودرستی این ادعا را می‌توان با جایگذاری مستقیم بررسی کرد.

مثال ۳. حل مثال ۲ را از حل مثال ۱ نتیجه بگیرید. یعنی معادلهٔ $205x - 93y = -1$ را با اطلاع ازاینکه $(x_0, y_0) = (49, 108)$ یک جواب خصوصی معادلهٔ $205x - 93y = 1$ است، حل کنید.

حل. با استفاده ازمعادله‌های (۱۷.۲) درمی‌یابیم که

$$x_1 = b - x_0 = 93 - 49 = 44,$$

$$y_1 = a - y_0 = 205 - 108 = 97,$$

یک جواب خصوصی معادلهٔ $205x - 93y = -1$ است. لذا بنا بر (۱۸.۲) جواب عمومی معادله، عبارت است‌از

$$x=۴۴+۹۳t$$
$$t=\circ,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \cdots \qquad (۱۹.۲)$$
$$y=۹۷+۲\circ۵t$$

که با جوابهای مثال ۲ مطابقت دارد.

ازروی یك جواب خصوصی معادلهٔ مثال ۱، مثال ۲ را از راه دیگری نیز می‌توان حل کرد. این راه درمثال زیرشرح داده شده است.

مثال ۴. راه حل سومی ازمعادلهٔ $۲\circ۵x-۹۳y=-۱$ ارائه دهید.

حل. چون $(x_\circ,\ y_\circ)=(۴۹,\ ۱\circ۸)$ یك جواب خصوصی معادلهٔ $۲\circ۵x-۹۳y=۱$ است، داریم

$$۲\circ۵(۴۹)-۹۳(۱\circ۸)=۱.$$

اگر دوطرف این تساوی را در -۱ ضرب کنیم، مشاهده می‌کنیم که

$$۲\circ۵(-۴۹)-۹۳(-۱\circ۸)=-۱;$$

لذا $(x_۱,\ y_۱)=(-۴۹,\ -۱\circ۸)$ یك جواب خصوصی معادلهٔ

$$۲\circ۵x-۹۳y=-۱$$

است، وجواب عمومی آن به‌صورت

$$x=x_۱+tb=-۴۹+۹۳t$$
$$t=\circ,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \cdots \qquad (۲\circ.۲)$$
$$y=y_۱+ta=-۱\circ۸+۲\circ۵t$$

به‌دست می‌آید. توجه کنید که جوابهای x و y معادله‌های (۲۰.۲) همان جوابهای معادله‌های (۱۹.۲) هستند، اما نه به‌ازای مقادیری برابر از t. مثلاً، جواب $(x,\ y)=(۲۳\circ,\ ۵\circ۷)$ در (۱۹.۲) به‌ازای $t=۲$ ودر (۲۰.۲) به‌ازای $t=۳$ به‌دست می‌آید.

مجموعه مسأله‌های ۶

۱. جوابهای عمومی معادله‌های زیررا پیدا کنید. درستی جواب را در هر مورد

بررسی کنید.

(الف) $13x-17y=1$ (ب) $13x-17y=-1$

(پ) $65x-56y=1$ (ت) $65x-56y=-1$

(ث) $56x-65y=1$

۴.۲ جواب عمومی معادلهٔ $ax-by=c$، $(a, b)=1$

پس از حل معادلهٔ سیال

$$ax-by=1, \tag{۲۱.۲}$$

که در آن a و b عددهای صحیح مثبت و نسبت به‌هم اول‌اند، حل معادلهٔ

$$ax-by=c, \tag{۲۲.۲}$$

که در آن c عدد صحیح دلخواهی است، مسألهٔ ساده‌ای است. زیرا، فرض کنید که (x_0, y_0) یك جواب خصوصی (۲۱.۲) باشد؛ دراین‌صورت

$$ax_0-by_0=1,$$

واز ضرب دوطرف این تساوی در c، به‌دست می‌آید

$$a(cx_0)-b(cy_0)=c,$$

لذا (cx_0, cy_0) یك جواب خصوصی (۲۲.۲) است. پس جواب عمومی معادلهٔ (۲۲.۲) عبارت است از:

$$\begin{aligned} x&=cx_0+bt \\ & \qquad\qquad t=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ y&=cy_0+at \end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

می‌توانید درستی جواب را با گذاشتن این مقادیر x و y در (۲۲.۲) تحقیق کنید.

مثال ۱. معادلهٔ

$$205x-93y=5$$

را حل کنید.

حل. از مثال ۱، بخش ۳.۲ می‌دانیم که $(x_0, y_0)=(۴۹, ۱۰۸)$ یك جواب خصوصی معادلهٔ $۲۰۵x-۹۳y=۱$ است، یعنی

$$۲۰۵(۴۹)-۹۳(۱۰۸)=۱.$$

با ضرب دوطرف این تساوی در ۵، به‌دست می‌آید

$$۲۰۵(۵\times۴۹)-۹۳(۵\times۱۰۸)=۵,$$

پس $(۵x_0, ۵y_0)=(۲۴۵, ۵۴۰)$ یك جواب خصوصی معادلهٔ داده‌شده است. بنا بر (۲۳.۲) جواب عمومی این‌معادله،

$$x=۲۴۵+۹۳t \qquad t=0, \pm۱, \pm۲, \ldots$$
$$y=۵۴۰+۲۰۵t$$

است. برای بررسی درستی آن، فرض کنید $t=۱$؛ آن‌گاه $(x, y)=(۳۳۸, ۷۴۵)$ و

$$۲۰۵(۳۳۸)-۹۳(۷۴۵)=۶۹۲۹۰-۶۹۲۸۵=۵.$$

مثال ۲. معادلهٔ

$$۲۰۵x-۹۳y=-۵$$

را حل کنید.

حل. درمثال اول این بخش یادآورشدیم که

$$۲۰۵(۴۹)-۹۳(۱۰۸)=۱.$$

ازضرب دوطرف این تساوی در ۵− به‌دست می‌آید

$$۲۰۵(-۵\times۴۹)-۹۳(-۵\times۱۰۸)=-۵,$$

یا

$$۲۰۵(-۲۴۵)-۹۳(-۵۴۰)=-۵,$$

پس $(x_0, y_0)=(-۲۴۵, -۵۴۰)$ یك جواب خصوصی‌معادلهٔ داده‌شده است.

دراین‌صورت، بنا برمعادلهٔ (۲۳.۲) جواب عمومی‌معادله، عبارت است از

$$x = -۲۴۵ + ۹۳t \qquad t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots .$$
$$y = -۵۴۰ + ۲۰۵t$$

برای بررسی درستی آن، فرض کنید $t = ۲$؛ آن‌گاه $(x, y) = (-۵۹, -۱۳۰)$ و

$$۲۰۵(-۵۹) - ۹۳(-۱۳۰) = -۱۲۰۹۵ + ۱۲۰۹۰ = -۵.$$

مجموعه مسأله‌های ۷

۱. با استفاده از جوابهای خصوصی مسأله‌های پایان بخش ۳.۲، جوابهای صحیح عمومی معادله‌های زیر را پیدا و درستی هرجواب را بررسی کنید.

(الف) $۱۳x - ۱۷y = ۵$ (ب) $۶۵x - ۵۶y = ۷$

(پ) $۵۶x - ۶۵y = -۳$

۵.۲ جواب عمومی معادلهٔ $ax + by = c$، $(a, b) = ۱$

این معادله، با چند تغییر کوچك، مانند معادلهٔ $ax - by = c$ حل می‌شود. بافرض اینکه a و b عددهای صحیح مثبت‌اند، نخست یك‌جواب خصوصی

$$ax + by = ۱, \quad (a, b) = ۱$$

را پیدا می‌کنیم. برای این منظور $\frac{a}{b}$ را به صورت یك‌کسر مسلسل ساده‌که تعداد خارج‌قسمتهایش زوج باشد بسط می‌دهیم. از جدول همگراها $p_{n-۱}$ و $q_{n-۱}$ را پیدا می‌کنیم. آن‌گاه همچون‌گذشته، داریم

$$aq_{n-۱} - bp_{n-۱} = ۱,$$

کلید حل‌معادلهٔ $ax + by = c$، نوشتن آن به‌صورت

$$ax + by = c \times ۱ = c(aq_{n-۱} - bp_{n-۱})$$

است. با تغییر ترتیب جمله‌ها به‌دست می‌آوریم

$$a(cq_{n-1}-x)=b(y+cp_{n-1}). \tag{۲۴.۲}$$

این تساوی نشان می‌دهد b که طرف راست را می‌شمارد طرف چپ را باید بشمارد؛ ولی چون $(a, b)=1$، و b نمی‌تواند a را بشمارد، پس b عامل $cq_{n-1}-x$ را می‌شمارد، ازاین‌رو عدد صحیح t وجود دارد که

$$cq_{n-1}-x=tb, \tag{۲۵.۲}$$

یا

$$x=cq_{n-1}-tb. \tag{۲۶.۲}$$

(۲۵.۲) را در (۲۴.۲) جانشین می‌کنیم، تا معادلهٔ

$$a(tb)=b(y+cp_{n-1})$$

به‌دست آید، این معادله را نسبت به y حل می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$y=at-cp_{n-1}. \tag{۲۷.۲}$$

برعکس، به‌ازای هر عدد صحیح t، گذاشتن مقادیر (۲۶.۲) و (۲۷.۲) در $ax+by$، نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} ax+by &= a(cq_{n-1}-tb)+b(at-cp_{n-1}) \\ &= acq_{n-1}-tab+tab-bcp_{n-1} \\ &= c(aq_{n-1}-bp_{n-1})=c\times 1=c, \end{aligned}$$

بنابراین معادلهٔ $ax+by=c$ برقرار است. لذا جواب عمومی معادلهٔ $ax+by=c$ عبارت است از

$$\left.\begin{aligned} x&=cq_{n-1}-tb \\ y&=at-cp_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad t=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots. \tag{۲۸.۲}$$

مثال ۱. معادلهٔ سیال

$$13x+17y=300$$

را حل کنید.

حل. ملاحظه می‌کنیم که $(x_{\circ}, y_{\circ}) = (۴, ۳)$ یك جواب خصوصی معادلهٔ

$$۱۳x - ۱۷y = ۱$$

است. یعنی $۱ = (۳)۱۷ - (۴)۱۳$، و بنابراین معادلهٔ داده‌شده را می‌توان به‌صورت

$$۱۳x + ۱۷y = ۳۰۰(۱۳ \times ۴ - ۱۷ \times ۳),$$

یا

$$۱۳x - ۱۳(۴ \times ۳۰۰) = -۱۷y - ۱۷(۳ \times ۳۰۰)$$

نوشت. این معادله نشان می‌دهد که

$$۱۳(x - ۱۲۰۰) = -۱۷(y + ۹۰۰), \qquad (۲۹.۲)$$

بنابراین ۱۷، $x - ۱۲۰۰$ را می‌شمارد، یعنی

$$x = ۱۲۰۰ + ۱۷t.$$

با قراردادن $۱۷t$ به‌جای $x - ۱۲۰۰$ در (۲۹.۲)، خواهیم داشت

$$y = -۱۳t - ۹۰۰.$$

ازاین‌رو، جواب عمومی معادلهٔ داده‌شده، عبارت است از

$$\begin{aligned} x &= ۱۲۰۰ + ۱۷t \\ & \qquad\qquad t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \dots . \\ y &= -۱۳t - ۹۰۰ \end{aligned}$$

مثال ۲. معادلهٔ سیال

$$۱۳x + ۱۷y = -۳۰۰$$

را حل کنید.

حل. معادلهٔ دوم درحل مثال ۱، دراینجا به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$۱۳x + ۱۷y = -۳۰۰(۱۳ \times ۴ - ۱۷ \times ۳),$$

و به‌جای معادلهٔ (۲۹.۲) داریم

$$۱۳(x+۱۲۰۰)=-۱۷(y-۹۰۰). \qquad (۲۹.۲\ \text{الف})$$

درنتیجه ۱۷، $x+۱۲۰۰$ را می‌شمارد ودرنتیجه

$$x=-۱۲۰۰+۱۷t,$$

باگذاشتن $۱۷t$ به‌جای $x+۱۲۰۰$، داریم

$$y=۹۰۰-۱۳t.$$

ازاین‌رو جواب عمومی معادلهٔ داده‌شده، عبارت است‌از

$$\begin{aligned} x&=-۱۲۰۰+۱۷t \\ & \qquad\qquad t=۰,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \pm۳,\ \cdots \\ y&=۹۰۰-۱۳t \end{aligned}$$

۶.۲ جواب عمومی معادلهٔ $Ax \pm By = \pm C$

با ضرب دوطرف هرمعادلهٔ به‌شکل

$$\pm Ax \pm By = C$$

در ۱ −، می‌توان معادله را به‌یکی‌از صورتهای

$$Ax+By=\pm C, \qquad Ax-By=\pm C, \qquad (۳۰.۲)$$

تبدیل کرد که درآنها A و B عددهای صحیح مثبت‌اند. مثلا، ازچهارمعادلهٔ

$$۳x+۷y=۱۰,\ ۳x-۷y=۱۰,\ -۳x-۷y=۱۰,\ -۳x+۷y=۱۰$$

دومعادلهٔ اول به‌صورت مطلوب هستند، ودومعادلهٔ بعدی را می‌توان به‌ترتیب با

$$۳x+۷y=-۱۰ \quad \text{و} \quad ۳x-۷y=-۱۰$$

جانشین کرد.

تمام معادله‌های به‌صورت (۳۰.۲) دارای جواب نیستند. برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض‌کنید d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك A و B باشد. آن‌گاه، اگر d، C را نشمارد هیچ‌کدام از معادله‌های (۳۰.۲) را نمی‌توان نسبت به‌عددهای صحیح x

و y حل کرد، زیرا طرف چپ هریك از ایـن معادله‌ها بر d بخشپذیرند درحالی‌که طرف راست چنین نیست.

از طرف دیگر، اگر d، C را بشمارد، آن‌گاه دو طرف معادله‌های (۳۰.۲) را بر d تقسیم می‌کنیم و آنها را به‌معادله‌هایی‌که پیشتر بررسی‌کردیم و جوابشان را می‌دانیم، یعنی

$$ax+by=c, \qquad ax-by=c, \tag{۳۱.۲}$$

تبدیل می‌کنیم‌که درآنها a و b نسبت به‌هم اول‌اند. برعکس، هرجواب معـادله‌های (۳۱.۲) خودبه‌خود جوابهای معادله‌های (۳۰.۲) را به‌دست می‌دهد.

مثال ۱. معادلهٔ

$$۴۱۰x-۱۸۶y=۱۰$$

را حل‌کنید.

حل. چون ۲×۵×۴۱=۴۱۰، ۲×۳×۳۱=۱۸۶، پس بـزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ۴۱۰ و ۱۸۶، برابر $d=۲$ است و ۱۰ را می‌شمارد، بنا بـراین معادله را می‌توان حل‌کرد. با تقسیم دوطرف معادله بر۲ به‌دست می‌آوریم

$$۲۰۵x-۹۳y=۵,$$

که درآن ۲۰۵ و۹۳ نسبت به‌هم اول‌اند. این معـادله‌ای است‌که درمثـال ۱ بخش ۴.۲ حل‌شد. جواب عمومی این‌معادله را درآنجا به‌صورت

$$x=۲۴۵+۹۳t,$$

$$y=۵۴۰+۲۰۵t,$$

پیداکردیم، با قراردادن‌آن در $۴۱۰x-۱۸۶y$ درمی‌یابیم‌که

$$۴۱۰(۲۴۵+۹۳t)-۱۸۶(۵۴۰+۲۰۵t)=۴۱۰\times ۲۴۵-۱۸۶\times ۵۴۰$$
$$=۱۰.$$

نتایج اصلی حاصل‌از مطالعهٔ معادله‌های دیوفانتی خطی را می‌توان به‌شرح‌زیر خلاصه‌کرد:

خلاصه: هرمعادله به‌صورت $Ax\pm By=\pm C$ تنها وقتی دارای جوابهای

صحیح x و y است که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك A و B، C را می‌شمارد. دراین حالت A، B و C را بر $d=(A,B)$ تقسیم کرده معادله را به‌یکی از دو صورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$ax+by=c, \qquad \text{(الف)}$$

$$ax-by=c, \qquad \text{(ب)}$$

که درهردومعادله a و b عددهای صحیح مثبت ونسبت به‌هم اول‌اند و c عددی است صحیح مثبت یا منفی. قدم بعدی بسط a/b به‌صورت یك کسرمسلسل ساده با تعدادی زوج از خارج‌قسمتهای جزئی وخواندن $p_{n-۱}$ و $q_{n-۱}$ از جدول همگراهاست. در این‌صورت $aq_{n-۱}-bp_{n-۱}=۱$، وجواب عمومی (الف) عبارت است‌از

$$\left.\begin{aligned} x&=cq_{n-۱}-tb \\ y&=ta-cp_{n-۱} \end{aligned}\right\} \quad t=۰,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \cdots \qquad \text{(ج)}$$

به‌همین‌ترتیب جواب عمومی (ب)، عبارت است‌از

$$\left.\begin{aligned} x&=cq_{n-۱}+tb \\ y&=cp_{n-۱}+ta \end{aligned}\right\} \quad t=۰,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \cdots \qquad \text{(د)}$$

جوابهای (ج) و (د) به‌ترتیب جوابهای عمومی $Ax\pm By=\pm C$ را درحالتهای (الف) و (ب) نمایش می‌دهند.

مجموعه مسأله‌های ۸

۱. از شش معادلهٔ زیر، دومعادله دارای جوابهای صحیح نیستند. جوابهای صحیح عمومی معادله‌های دیگررا پیداکنید.

(الف) $۱۸۳x+۱۷۴y=۹$	(ب) $۱۸۳x-۱۷۴y=۹$
(پ) $۷۷x+۶۳y=۴۰$	(ت) $۳۴x-۴۹y=۵$
(ث) $۳۴x+۴۹y=۵$	(ج) $۵۶x+۲۰y=۱۱$

۲. کسر $\frac{۶۸}{۷۷}$ را به صورت مجموع دو کسر با مخرجهای ۷ و ۱۱ بنویسید.

راهنمایی: عددهای صحیح x و y را به‌قسمی پیدا کنید که $\frac{۶۸}{۷۷}=\frac{x}{۷}+\frac{y}{۱۱}$.

۳. مجموع دو عدد صحیح و مثبت a و b برابر ۱۰۰ است. باقیماندهٔ تقسیم a بر ۷ برابر ۵ و باقیماندهٔ تقسیم b بر ۹ نیز برابر ۵ است. a و b را پیدا کنید.
راهنمایی: فرض کنید $a=۷x+۵$ و $b=۹y+۵$ و ازمعادلهٔ $a+b=۱۰۰$ استفاده کنید.

۴. جوابهای صحیح ومثبت (x, y) معادلهٔ $۱۳x+۱۷y=۳۰۰$ را پیداکنید.

۷.۲ ملوانها، نارگیلها و میمونها

مسألهٔ زیر دیرینهٔ قابل ملاحظه‌ای دارد و به‌صورتهای گوناگون گاهگاهی ظاهر می‌شود.

پنج ملوان درجزیره‌ای پیاده شدند. برای تأمین غذا، همهٔ نارگیلهایی را که می‌توانستند بیابند، جمع آوری کردند. شب‌هنگام، یکی ازآنها بیدارشد و تصمیم گرفت سهم خود را جداکند. وی نارگیلهارا به‌پنج دستهٔ برابرتقسیم کرد و دریافت که یك‌عدد نارگیل باقی می‌ماند، لذا این نارگیل اضافی را برای میمونها پرتاب کرد؛ وی‌سپس سهم خود را پنهان‌کرد و دوباره خوابید. مدتی بعد ملوان‌دومی بیدار شد وهمین فکر به‌ذهنش خطورکرد. وی نیز باقیماندهٔ نارگیلها را به‌پنج دستهٔ برابر تقسیم کرد و دریافت که یك‌عدد نارگیل باقی می‌ماند، وآن‌را برای میمونها پرتاب کرد و سپس سهم خود را پنهان‌کرد وخوابید. سه‌ملوان دیگرنیز به‌ترتیب، همین‌کار را انجام دادند وهرکدام یك‌عدد نارگیل برای میمونها پرتاب کردند.

صبح روز بعد، که همهٔ ملوانها خود را تا حد ممکن بی‌گناه جلوه می‌دادند، باقیماندهٔ نارگیلها را به‌پنج دستهٔ برابر تقسیم کردند واین‌بار نارگیلی اضافه نیامد. مسأله، پیداکردن کمترین تعداد ممکن نارگیلهای جمع‌آوری‌شده است.

برای حل‌مسأله، فرض‌کنید x تعداد نارگیلهای جمع آوری شده باشد. اولین ملوان تعداد $\frac{۱}{۵}(x-۱)$ نارگیل برداشت وتعداد $\frac{۴}{۵}(x-۱)$ نارگیل باقی گذاشت. ملوان دوم تعداد

$$\frac{۱}{۵}\left[\frac{۴}{۵}(x-۱)-۱\right]=\frac{۴x-۹}{۲۵}$$

نارگیل برداشت وچهار برابرهمین تعداد، یعنی تعداد

$$\frac{16x-36}{25}$$

نارگیل باقی ماند. به‌همین‌ترتیب درمی‌یابیم که تعداد نارگیلهای باقیمانده به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{64x-244}{125}, \quad \frac{256x-1476}{625}, \quad \frac{1024x-8404}{3125}$$

اکنون باید تعداد نارگیلها در آخرین مرحله مضربی‌از ۵ باشد، زیرا این نارگیلها به‌پنج قسمت برابر تقسیم شد و نارگیلی باقی نماند. ازاین‌رو

$$\frac{1024x-8404}{3125}=5y,$$

که در آن y عددی صحیح است. دوطرف این معادله را در ۳۱۲۵ ضرب می‌کنیم ومعادلهٔ سیال

$$1024x-15625y=8404 \qquad (32.2)$$

را به‌دست می‌آوریم. با تجزیه به‌عاملهای اول درمی‌یابیم که $1024=2^{10}$ و $15625=5^6$، نسبت به‌هم اول‌اند ومعادلهٔ (۳۲.۲) دارای جوابهای صحیح‌است. نخست یك جواب خصوصی (x_1, y_1) معادلهٔ

$$1024x-15625y=1 \qquad (33.2)$$

را پیدا می‌کنیم. برای این‌منظور همگراهای کسرمسلسل

$$\frac{1024}{15625}=[0, 15, 3, 1, 6, 2, 1, 3, 2, 1]$$

را محاسبه می‌کنیم.

این همگراها در جدول صفحهٔ بعد چاپ شده‌اند و دیده می‌شود که

$$c_9=\frac{711}{10849}$$

پس $x_1=q_9=10849$ و $y_1=p_9=711$ جواب‌خصوصی معادلهٔ (۳۳.۲) و

$$x_0=8404x_1=91,174,996, \qquad y_0=8404y_1=5,975,244$$

i	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
a_i			۰	۱۵	۳	۱	۶	۲	۱	۳	۲	۱
p_i	۰	۱	۰	۱	۳	۴	۲۷	۵۸	۸۵	۳۱۳	۷۱۱	۱۰۲۴
q_i	۱	۰	۱	۱۵	۴۶	۶۱	۴۱۲	۸۸۵	۱۲۹۷	۴۷۷۶	۱۰۸۴۹	۱۵۶۲۵
c_i											$\frac{۷۱۱}{۱۰۸۴۹}$	

یك جواب خصوصی معادلهٔ (۳۲.۲) است. جواب عمومی این‌معادله عبارت‌است‌از

$$x = ۹۱۱۷۴۹۹۶ + ۱۵۶۲۵t$$
$$t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots \qquad (۳۴.۲)$$
$$y = ۵۹۷۵۲۴۴ + ۱۰۲۴t$$

چون هم x و هم y باید مثبت باشند، در جستجوی مقداری از t هستیم که کوچکترین مقدار را برای x به‌دست دهد ودرعین‌حال y را مثبت سازد. با توجه به (۳۴.۲) درمی‌یابیم که t باید در دونامعادلهٔ زیر صدق کند

$$t > -\frac{۹۱,۱۷۴,۹۹۶}{۱۵۶۲۵} = -۵۸۳۵٫۲ \dots ,$$

$$t > -\frac{۵,۹۷۵,۲۴۴}{۱۲۰۴} = -۵۸۳۵٫۱ \dots .$$

از این‌رو مقدار مطلوب $t = -۵۸۳۵$ است. با گذاشتن این مقدار در معادله‌های (۳۴.۲)، به‌دست می‌آوریم

$$x = ۹۱,۱۷۴,۹۹۶ - ۹۱,۱۷۱,۸۷۵ = ۳۱۲۱,$$

$$y = ۵,۹۷۵,۲۴۴ - ۵,۹۷۵,۰۴۰ = ۲۰۴,$$

بدین معنا که تعداد نارگیلها در اصل ۳۱۲۱ بوده و در تقسیم نهایی به‌هر ملوان ۲۰۴ نارگیل رسیده است.

برای مطالعهٔ بحثی جالب دربارهٔ این مسأله و مسأله‌های وابسته به آن، مقالهٔ مارتین گاردنر[1] را تحت عنوان «Mathematical Games» درشمارهٔ آوریل سال ۱۹۵۸ مجلهٔ *Scientific American* ببینید. همچنین می‌توانید به کتابهای بسیار خوب *Recreational Mathematics, A Guide to the Literature* نوشتهٔ ویلیام ل. شف[2]، از انتشارات

National Council of Teachers of Mathematics

توجه کنید.

---

1. Martin Gardner 2. William L. Schaaf

۳

بسط عددهای گنگ

۱.۳ مقدمه

بحث ما تاکنون به‌بسط عددهای گویا محدود بود. ثابت کردیم‌که یك عدد گویا را می‌توان به‌یك‌کسر مسلسل سادهٔ متناهی بسط داد، و برعکس، هرکسرمسلسل سادهٔ‌متناهی نمایشگر یك عددگویا ست.

این فصل بسط عددهای گنگ را به‌صورت کسر مسلسل ساده مورد بحث قرار می‌دهد، وخواهیم دیدکه این‌کسرها پایان ندارند وهمواره ادامه می‌یابند.

عددگنگ عددی است‌که نتوان آن را به‌صورت خارج قسمت دو عدد صحیح نشان داد. عددهای

$$\sqrt{۲}\,,\ \sqrt{۳}\,,\ ۱\pm\sqrt{۲}\,,\ \frac{۳\pm\sqrt{۷}}{۵}$$

همگی گنگ‌اند. هرعدد به‌صورت

$$\frac{P\pm\sqrt{D}}{Q},$$

که درآن P، D و Q عددهای صحیح باشند و D مثبت باشد و مجذورکامل نباشد،

گنگ است. عددی ازاین نوع یك گنگ درجهٔ دوم یا اصم درجهٔ دوم نامیده می‌شود. زیرا این عدد ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم

$$Q^{۲}x^{۲}-۲PQx+(P^{۲}-D)=۰$$

است. بحث ما به‌بسط گنگهای درجهٔ دوم محدود خواهد شد.

عددهای گنگی وجود دارند که اصم درجهٔ دوم نیستند. عدد گنگ $\pi=۳٫۱۴۱۵۹\ldots$ مثالی ازاین نوع است. عددگنگ $\sqrt{۲}$ جواب معادلهٔ جبری $x^{۲}-۲=۰$ است، و به‌این‌جهت یك «عدد جبری» نامیده می‌شود. عدد جبری، عددی است چون x که در یك معادلهٔ جبری یعنی در معادله‌ای به‌شکل

$$a_{۰}x^{n}+a_{۱}x^{n-۱}+\cdots+a_{n}=۰,$$

که در آن $a_{۰}$، $a_{۱}$، . . .، a_{n} عددهای صحیح‌اند وهمه صفر نیستند، صدق کند. عددی که جبری نباشد، عدد متعالی نامیده‌می‌شود. می‌توان ثابت‌کرد که π متعالی است ولی اثبات آن آسان نیست.* عدد e نیزمتعالی‌است. بسط عددهای‌متعالی به‌کسرهای‌مسلسل بسیارمشکل‌است؛ بااستفاده ازتقریبهای اعشاری این‌عددها، نظیر $\pi=۳٫۱۴۱۵۹\ldots$ و $e=۲٫۷۱۸۲۸\ldots$، می‌توانیم چند جملهٔ اول بسط کسرمسلسل آنها را پیدا کنیم، اما روش به‌دست‌آوردن بسطهای π و e که درپیوست ۲ آورده شده‌اند، در محتوای این‌کتاب نمی‌گنجد.

کسانی‌که بخواهند بااین دو رده ازعددهای‌گنگ، یعنی عددهای‌گنگ جبری وعددهای متعالی، آشنا شوند و ویژگیهای عمیقتر هرکدام را مطالعه کنند می‌توانند نخستین‌کتاب این مجموعه را به‌نام اعداد: گویا و گنگ، اثر ایوان نیون، بخوانند.

۲.۳ مثالهای مقدماتی

شیوهٔ بسط یك عددگنگ اساساً همانند شیوه‌ای است که برای عددهای گویا به‌کار رفت. فرض کنید x عددگنگ دلخواهی باشد. $a_{۱}$، بزرگترین عددصحیح کمتر از x را محاسبه‌کنید، و x را به‌صورت

$$x=a_{۱}+\frac{۱}{x_{۲}},\quad ۰<\frac{۱}{x_{۲}}<۱,$$

* کتاب اعداد: گویا و گنگ ازاین مجموعه را ببینید.

که در آن عدد

$$x_2=\frac{1}{x-a_1}>1$$

گنگ است بیان کنید. x_2 گنگ است؛ زیرا اگر عدد صحیحی‌را از یك عدد گنگ کم کنیم، عدد حاصل وعکس آن گنگ هستند.

عمل را ادامه دهید، a_2 بزرگترین عدد صحیح کمتر از x_2 را محاسبه کنید، و x_2 را به‌صورت

$$x_2=a_2+\frac{1}{x_3},\quad 0<\frac{1}{x_3}<1,\quad a_2\geqslant 1,$$

بیان کنید، دراینجا نیز، عدد

$$x_3=\frac{1}{x_2-a_2}>1$$

گنگ است.

ادامهٔ این محاسبه انتها ندارد ومعادله‌های متوالی زیر را به‌وجود می‌آورد

$$\begin{array}{lll}
x=a_1+\dfrac{1}{x_2}, & x_2>1 & \\
x_2=a_2+\dfrac{1}{x_3}, & x_3>1, & a_2\geqslant 1\\
x_3=a_3+\dfrac{1}{x_4}, & x_4>1 & a_3\geqslant 1\\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots\\
x_n=a_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}, & x_{n+1}>1, & a_n\geqslant 1
\end{array} \tag{1.3}$$

که در آنها a_1، a_2، . . .، a_n، . . . همگی عددهای صحیح و x، x_2، x_3، x_4، . . . همگی عددهای گنگ‌اند. این فرایند پایان نمی‌یابد، زیـرا تنها راه پایان یافتن آن مساوی شدن عدد صحیح a_n با x_n است کـه غیرممکن است، زیرا تمام x_iها گنگ هستند.

ازگذاشتن x_2 از معادلهٔ دوم (۱.۳) درمعـادلهٔ اول، و بعد x_3 از معادلهٔ سوم

درنتیجهٔ حاصل وادامهٔ این‌عمل، کسرمسلسل سادهٔ نامتناهی

$$x = a_۱ + \frac{۱}{x_۲} = a_۱ + \frac{۱}{a_۲ + \frac{۱}{x_۳}} = a_۱ + \frac{۱}{a_۲ + \frac{۱}{a_۳ + \frac{۱}{x_۴}}} = \cdots$$

یا

$$x = [a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, \cdots]$$

به‌وجود می‌آید. سه نقطه نشان می‌دهندکه ادامهٔ فرایند بی‌انتهاست.

پیش از ادامهٔ بحث در جنبه‌های «نظـری» کسرهای مسلسل سادهٔ نامتناهی، برای اطمینان ازاینکه شیوهٔ بسط درك شده‌است، به‌ذکر یکی دومثال می‌پردازیم.

مثال ۱. $\sqrt{۲}$ را به کسرمسلسل سادهٔ نامتناهی بسط دهید.

حل. بزرگترین‌عدد صحیح کوچکتر از $\sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴$ برابر $a_۱ = ۱$ است. ازاین‌رو

$$\sqrt{۲} = a_۱ + \frac{۱}{x_۲} = ۱ + \frac{۱}{x_۲}.$$

این معادله‌را نسبت به $x_۲$ حل می‌کنیم

$$x_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} \cdot \frac{\sqrt{۲} + ۱}{\sqrt{۲} + ۱} = \sqrt{۲} + ۱.$$

درنتیجه،

$$\sqrt{۲} = a_۱ + \frac{۱}{x_۲} = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲} + ۱}.$$

بزرگترین عـدد صحیح کوچکتر از $x_۲ = \sqrt{۲} + ۱ = ۲٫۴۱۴۰\ldots$ برابر $a_۲ = ۲$ است، ازاین‌رو

$$x_۲ = a_۲ + \frac{۱}{x_۳} = ۲ + \frac{۱}{x_۳},$$

که در آن

$$x_۳=\frac{۱}{x_۲-۱}=\frac{۱}{(\sqrt{۲}+۱)-۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}\cdot\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}+۱>۱\,.$$

دراین مرحله می‌دانیم که

$$\sqrt{۲}=a_۱+\frac{۱}{x_۲}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{x_۳}}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{\sqrt{۲}+۱}}\,.$$

چون $x_۳=\sqrt{۲}+۱$ برابر $x_۲=\sqrt{۲}+۱$ است، نتیجهٔ محاسبات، $x_۴$، $x_۵$، ... هم $\sqrt{۲}+۱$ خواهند بود، پس خارج‌قسمتهای جزئی متوالی هم مساوی ۲ خواهند شد و بسط نامتناهی $\sqrt{۲}$ عبارت خواهد بود از

$$\sqrt{۲}=۱+\frac{۱}{۲+}\,\frac{۱}{۲+}\,\frac{۱}{۲+}\cdots=[۱,\ ۲,\ ۲,\ ۲,\ \cdots]=[۱,\ \overline{۲}]\,.$$

خط روی ۲ درطرف راست نشان می‌دهد که ۲ همواره تکرار می‌شود.

بی‌درنگ چند سؤال مطرح می‌شود. مثلاً، آیا ممکن است ثابت کنیم که کسر مسلسل نامتناهی $[۱,\ \overline{۲}]=[۱,\ ۲,\ ۲,\ \cdots]$ واقعاً عدد گنگ $\sqrt{۲}$ را نمایش می‌دهد؟ این مسأله که درنگاه اول واضح به‌نظر می‌رسد یکی ازمشکلترین مسأله‌هایی است که باید دراین فصل بحث شود. باوجود این، به‌این سؤال می‌توانیم یك جواب صوری بدهیم. یك جواب صوری، اجمالا به‌معنـی این است که برای به‌دست آوردن آن اعمالی انجام می‌دهیم بدون اینکه مجاز بودن هر عمل را بررسی کنیم. با این تفاهم، می‌نویسیم

$$x=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cdots}}}$$

یا

$$x-۱=\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cdots}}}$$

ازاین‌رو

$$x=۱+(x-۱),$$

یا ۱ = ۱، که هیچ اطلاعی از x به‌ما نمی‌دهد. اما، با استفاده از همین ایده، می‌توان نوشت

$$x=۱+\cfrac{۱}{۲+\left(\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cdots}}\right)}$$

$$=۱+\frac{۱}{۲+(x-۱)}=۱+\frac{۱}{x+۱},$$

ازاین رابطه می‌بینیم که

$$x-۱=\frac{۱}{x+۱}$$

بنابراین

$$x^۲=۲ \quad \text{یا} \quad (x-۱)(x+۱)=۱$$

ازاین‌رو

$$x=۱+\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۲+}\cdots=\sqrt{۲}$$

چند مثال دیگر ازهمین نوع می‌آوریم:

$$\sqrt{۳}=[۱,۱,۲,۱,۲,۱,۲,\dots]=[۱,\overline{۱,۲}],$$

$$\sqrt{۱۵}=[۳, ۱, ۶, ۱, ۶, \ldots]=[۳, \overline{۱, ۶}],$$
$$\sqrt{۳۱}=[۵, \overline{۱, ۱, ۳, ۵, ۳, ۱, ۱, ۱۰}].$$

درهر یك از این مثالها عددهایی که روی آنها خط دارد دورهٔ گردش بسط را تشکیل می‌دهند، عدد $\sqrt{۳۱}$ دورهٔ گردش کاملا طویلی دارد. این‌مثالها روشنگر قضیه‌ای‌هستند که‌اولین بار لاگرانژ درسال ۱۷۷۰ اثبات کرد: بسط کسر مسلسل هر گنگ درجهٔ دوم بعد ـ از چند مرحله دوره‌ای است. این قضیه در فصل ۴ ثابت خواهد شد.

مثال۲. بسط کسر مسلسل نامتناهی

$$x=\frac{۲۵+\sqrt{۵۳}}{۲۲}$$

را پیدا کنید.

حل. درست مانند مثال۱ عمل می‌کنیم. چون $\sqrt{۵۳}$ بین۷و۸ است، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x برابر است با $a_۱=۱$. پس

$$x=\frac{۲۵+\sqrt{۵۳}}{۲۲}=a_۱+\frac{۱}{x_۲}=۱+\frac{۱}{x_۲},$$

که در آن

$$x_۲=\frac{۱}{x-۱}=\frac{۲۲}{۳+\sqrt{۵۳}}\cdot\frac{۳-\sqrt{۵۳}}{۳-\sqrt{۵۳}}=\frac{\sqrt{۵۳}-۳}{۲}>۱.$$

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $x_۲$ برابر است با $a_۲=۲$. ازاین‌رو

$$x_۲=a_۲+\frac{۱}{x_۳}=۲+\frac{۱}{x_۳},$$

که در آن

$$x_۳=\frac{۱}{x_۲-۲}=\frac{۲}{\sqrt{۵۳}-۷}=\frac{\sqrt{۵۳}+۷}{۲}$$

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $x_۳$ برابر است با $a_۳=۷$، از این‌رو

$$x_۳=a_۳+\frac{۱}{x_۴}=۷+\frac{۱}{x_۴}$$

که در آن

$$x_۴=\frac{۱}{x_۳-۷}=\frac{۲}{\sqrt{۵۳}-۷}=\frac{\sqrt{۵۳}+۷}{۲}.$$

بنا بر این $x_۴=x_۳$ و آخرین محاسبه همواره تکرار خواهد شد. در نتیجه، بسط مطلوب عبارت است از

$$x=۱+\frac{۱}{x_۲}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{x_۳}}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۷+\cfrac{۱}{x_۴}}}=\cdots,$$

و سرانجام، به‌دست می‌آوریم

$$x=\frac{۲۵+\sqrt{۵۳}}{۲۲}=۱+\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۷+}\frac{۱}{۷+}\cdots=[۱,\ ۲,\ ۷,\ ۷,\ \cdots]$$
$$=[۱,\ ۲,\ \overline{۷}]$$

اکنون، در جهت عکس عمل می‌کنیم؛ با بسط نامتناهی شروع می‌کنیم و می‌کوشیم به‌مقدار مفروض x برسیم. بهتر است

$$x=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۷+\cfrac{۱}{۷+\cfrac{۱}{۷+\cdots}}}}$$

را به‌صورت

$$x=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{y}}$$

بنویسیم. در اینجا

$$y=۷+\cfrac{۱}{۷+\cfrac{۱}{۷+\cdots}}=۷+\frac{۱}{y}\cdot$$

y در معادلهٔ

$$y^۲-۷y-۱=۰$$

صدق می‌کند. این‌معادله‌را حل می‌کنیم و با توجه به‌اینکه $y>۰$،

$$y=\frac{۷+\sqrt{۵۳}}{۲}$$

به‌دست می‌آید. پس

$$x=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{y}}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۲}{۷+\sqrt{۵۳}}}\cdot$$

با ساده‌کردن طرف راست، به‌مقدار x که در مسأله داده شده است می‌رسیم:

$$x=\frac{۲۳+۳\sqrt{۵۳}}{۱۶+۲\sqrt{۵۳}}\cdot\frac{۱۶-۲\sqrt{۵۳}}{۱۶-۲\sqrt{۵۳}}=\frac{۲۵+\sqrt{۵۳}}{۲۲}$$

۳.۳ همگراها

همگراهای کسر مسلسل نامتناهی

$$x=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots=[a_۱, a_۲, a_۳, \ldots]$$

را درست مانند قبل محاسبه می‌کنیم، همگرای $c_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ را با همان فرمولهای

$$p_n=a_np_{n-۱}+p_{n-۲},$$

$$q_n=a_nq_{n-۱}+q_{n-۲},$$

به‌ازای همهٔ مقادیر $n\geqslant ۱$ محاسبه می‌کنیم، و $p_{-۱}$، $p_۰$، $q_{-۱}$ و $q_۰$ را مانند قبل $p_{-۱}=۰$، $p_۰=۱$، $q_{-۱}=۱$ و $q_۰=۰$ تعریف می‌کنیم و با همان برنامهٔ قبلی

محاسبات را انجام می‌دهیم.

مثال ۱. بسط کسر مسلسل نامتناهی عدد $\pi =$ ۳٫۱۴۱۵۹... با خارج‌قسمتهایی که درزیرمی‌آیند شروع می‌شود:

$$\pi = [۳, ۷, ۱۵, ۱, ۲۹۲, ۱, ۱, \ldots]$$

پنج همگرای اول آن را پیدا کنید. این همگراها به‌ترتیب تقریبهای بهتـری از π به‌دست می‌دهند.

حل. جدول همگراها به‌شرح زیراست:

i	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
a_i			۳	۷	۱۵	۱	۲۹۲
p_i	۰	۱	۳	۲۲	۳۳۳	۳۵۵	۱۰۳۹۹۳
q_i	۱	۰	۱	۷	۱۰۶	۱۱۳	۳۳۱۰۲
c_i			$\frac{۳}{۱}$	$\frac{۲۲}{۷}$	$\frac{۳۳۳}{۱۰۶}$	$\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$	$\frac{۱۰۳۹۹۳}{۳۳۱۰۲}$

در اینجا جالب است متذکر شویم که برای یافتن قدیمیترین تقریب π باید به‌پاپیروس رایند[1] که درموزهٔ بریتانیا نگهداری می‌شود و متعلق به‌۱۷۰۰ سال قبل ازمیلاد است، رجوع کنید. مقدار π درآن پاپیروس عددی ذکرشده است که با نماد دهدهی امروزی ۳٫۱۶۰۴ است.

بابلیها تقریب $\pi =$ ۳ را به‌کارمی‌بردند که دقت آن ازمقدار مصری کمتراست. ارشمیدس[2] (۲۲۵ سال قبل ازمیلاد) اعلام داشته‌است که نسبت محیط هردایره به‌قطر آن از $\ldots$ ۳٫۱۴۲۸۵ $= \frac{۲۲}{۷} = ۳\frac{۱}{۷}$ کوچکتر و از $\ldots$ ۳٫۱۴۰۸۴ $= ۳\frac{۱۰}{۷۱}$ بزرگتراست. این نتیجه باتوجه به‌محدودیت ابزارهای موجود درآن‌زمان فوق‌العاده

1. *Rhind Papyrus* 2. Archimedes

است.* تقریب

$$\frac{۳۵۵}{۱۱۳}=۳٫۱۴۱۵۹۲\cdots$$

تا شش رقم بعد ازممیز صحیح است. ارائهٔ اطلاعات بیشتر درمورد کاربرد کسرهای مسلسل برای به‌دست آوردن تقریبهای گویا برای عددهای گنگ درفصل ۵ ادامه‌خواهد یافت.

مجموعه مسأله‌های ۹

۱. درستی بسطهای زیر را تحقیق کنید و پنج همگرای اول آنها را محاسبه کنید.

(الف) $\sqrt{۶}=[۲, ۲, ۴, ۲, ۴, \cdots]=[۲, \overline{۲, ۴}]$

(ب) $\sqrt{۷}=[۲, \overline{۱, ۱, ۱, ۴}]$

(پ) $\sqrt{۴۳}=[۶, \overline{۱, ۱, ۳, ۱, ۵, ۱, ۳, ۱, ۱, ۱۲}]$

(ت) $\dfrac{۲۴-\sqrt{۱۵}}{۱۷}=[۱, ۵, \overline{۲, ۳}]$

(ث) $\dfrac{\sqrt{۳۰}-۲}{۱۳}=[۰, ۳, \overline{۱, ۲, ۱, ۴}]$

---

* غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان ومنجم معروف ایرانی، مخترع کسرهای‌دهدهی، نیز مقدار π را بادقتی بی‌سابقه حساب کرده است. علاوه برآن سینوس یك درجه را نیز با هفده رقم اعشار (که هرهفده رقم صحیح هستند) به‌دست آورده‌است. روش غیاث‌الدین درمحاسبهٔ سینوس یك درجه طریقهٔ تقریبهای متوالی بوده است (نقل از دایرة‌المعارف فارسی). غیاث‌الدین جمشید کاشانی مقدار تقریبی ۲π را در دستگاه شصت‌شصتی برابر

$$۶, ۱۶, ۵۹, ۲۸, ۱, ۳۴, ۵۱, ۴۶, ۱۴, ۵۰$$

به‌دست آورده است که همهٔ رقمهای آن درست است ودر دستگاه دهدهی (اعشاری) برابر است با:

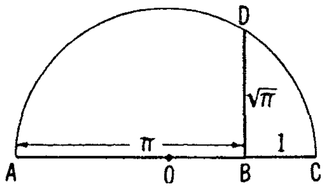
$$۲\pi=۶٫۲۸۳۱۸۵۳۰۷۱۷۹۵۸۶۵$$

(نقل از زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، تألیف ابوالقاسم قربانی). کاشانی نزدیك به‌دوقرن قبل از تولد نیوتن فوت کرده است.ــ و.

۲. مانند نیمهٔ دوم مثال ۲، بخش ۲.۳، تحقیق کنید که کسرهای مسلسل زیر عددهای گنگ مندرج درطرف راستشان‌را نمایش می‌دهند.

$$[۵, \overline{۱, ۱, ۱, ۱۰}]=\sqrt{۳۲} \quad (ب) \qquad [۲, ۲, ۴]=\sqrt{۶} \quad (الف)$$

۳. بحث و مسأله. مسألهٔ زیر یکی ازمسأله‌های کلاسیك خطکش و پرگار است: تنها با استفاده از خطکش و پرگار مربعی رسم کنید که مساحت آن مساوی مساحت دایرهٔ به‌شعاع ۱ باشد. مساحت دایرهٔ به‌شعاع ۱ برابر است با $A=\pi r^۲=\pi$، از این‌روضلع مربع باهمان مساحت برابر $\sqrt{\pi}$ خواهد بود، اگررسم طول π امکان داشت، باروش زیرمی‌توانستیم $\sqrt{\pi}$را رسم کنیم: فرض کنید $AB=\pi$، $BC=۱$، آن‌گاه نیمدایره‌ای به‌مرکز O که از A و C بگذرد رسم کنید؛ شکل ۲ را ببینید. BDرا عمود بر AC رسم کنید. دراین‌صورت $x=BD=\sqrt{\pi}$، برای اثبات ازمثلثهای متشابه ABD و CBD استفاده کنید.



شکل ۲

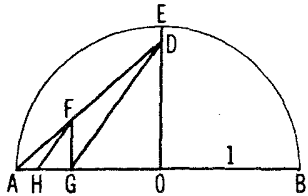
می‌توان ثابت کرد که طولی برابر با π را نمی‌توان با خطکش و پرگار رسم کرد. امـا، ترسیمهای تقریبی جالب زیادی وجود دارد. مثلا ژاکوب دوگلدر[1] بااستفاده از همگرای $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}=۳٫۱۴۱۵۹۲۰\ldots$ که در آخر بخش ۳.۳ بحث کردیم، ترسیم زیررا درسال ۱۸۴۹ ارائه داد. چون

$$\frac{۳۵۵}{۱۱۳}=۳+\frac{۴^۲}{۷^۲+۸^۲},$$

مقدار تقریبی π را به‌آسانی می‌توان به‌شرح زیر رسم کرد: فرض‌کنید O مرکز

1. Jakob de Gelder

دایرهٔ به‌شعاع $OE=۱$، AB قطرعمود بر OE، $OD=\frac{۷}{۸}$ و $AF=\frac{۱}{۲}$ باشد؛ شکل ۳ را ببینید. FG را موازی با EO و FH را موازی با DG رسم کنید. آن‌گاه، ثابت کنید که $AH=\frac{۴^۲}{۷^۲+۸^۲}$. تنها چیزی که باقی می‌ماند رسم پاره خطی به‌طول $AH+۳$ است.



شکل ۳

۴. نشان دهید که $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)=[۱,۱,۱,۱,\ldots]$، همچنین تحقیق کنید که همگراهای این کسرمسلسل عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{۱},\ \frac{۲}{۱},\ \frac{۳}{۲},\ \frac{۵}{۳},\ \frac{۸}{۵},\ \frac{۱۳}{۸},\ \ldots$$

صورتها و مخرجها، هردو متشکل از دنبالهٔ عددهای فیبوناتچی[1] هستند:

$$۱,\ ۱,\ ۲,\ ۳,\ ۵,\ ۸,\ ۱۳,\ ۲۱,\ ۳۴,\ ۵۵,\ \ldots$$

هر یك ازاین عددها [بجز دوتای اول] مجموع دوعدد قبل ازخودش است. بحثی از این عددهای جالب در بخش ۱۰.۳ ارائه خواهد شد.

۵. عددهای فیبوناتچی، $F_۱=۱$، $F_۲=۱$، $F_۳=۲$، $F_۴=۳$، ... را می‌توان با قراردادن مقادیر $n=۱,۲,۳,\ldots$ درفرمول کلی

$$F_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n\right]$$

1. Fibonacci

به‌دست آورد. این مطلب را باجایگزین کردن مقادیر $n=۱, ۲, ۳, ۴$ دراین فرمول تحقیق کنید.

۶. درختی‌را تصور کنید که رشد هرشاخهٔ آن به‌ترتیب زیر است: درنخستین سال‌رشد شاخهٔ جدیدی تولید نمی‌کند. درطی سال دوم، یك‌شاخه تولید می‌کند، سپس‌یك سال توقف می‌کند، آن‌گاه مجدداً شاخه می‌دهد، و الی‌آخر. نمودار این درخت را بعد از یك دورهٔ رشد پنجساله رسم‌کنید و نشان دهیدکه اگر تنه وانشعابهای آن را شاخه تلقی کنیم،آن‌گاه درسال اول رشد، درخت تنها دارای یك شاخه (تنه) است، درسال دوم دوشاخه دارد و به‌طورکلی تعداد شاخه‌ها عددهای فیبوناتچی ... ,۸ ,۵ ,۳ ,۲ ,۱ را تولید خواهندکرد.

۷. بازی وایتوف (این بازی‌رادرسال۱۹۰۷ وایتوف[1] ابداع کرده‌است.) بازیکنهای A و B به‌نوبت مهره‌هایی را از دو دسته طبق قاعده‌های زیر برمی‌دارند: هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند هرچند مهره که بخواهد از دستهٔ اول یا دوم بردارد. اگر او بخواهد ازهردو دسته مهره بردارد، باید ازدسته‌ها به‌تعدادمساوی مهره بردارد. بازیکنی‌که آخرین مهره‌را ازروی میز بردارد، برندهٔ بازی است.

برای اینکه بازیکن A برنده شود باید بعد از بازی او یکی از ترکیبهای مناسب (مناسب برای A) زیرباقی بماند:

$$(۱, ۲), (۳, ۵), (۴, ۷), (۶, ۱۰), (۸, ۱۳), (۹, ۱۵), (۱۱, ۱۸), (۱۲, ۲۰), \ldots .$$

آن‌گاه، بازی B هرچه باشد،B ترکیب نامناسبی(نامناسب برای B) به‌جاخواهد گذاشت، و بازیکن A همیشه می‌تواند این وضعیت را به‌ترکیب مناسب (مناسب برای A) تبدیل کند. بنابراین اگر A دربازی اشتباه نکند، برندهٔ بازی خواهد بود.

می‌توان نشان داد که جفت nام عددهایی که یك ترکیب مناسب تشکیل می‌دهند با

$$(\{n\tau\}, \{n\tau^{۲}\}), \quad n=۱, ۲, ۳, \ldots$$

داده‌می‌شوند،که درآن $\tau=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$ و $\{x\}$ به‌معنای بزرگترین عدد صحیح

1. W. A. Wythoff

نابزرگتر از x است. این مطلب را به‌ازای $n=۱, ۲, ۳$، تحقیق کنید. برای توضیح بیشتر دربارهٔ این بازی وموضوعهای مربوط به آن، کتاب زیر را ببینید:

H. S. M. Coxeter, *The Golden Section, Phyllotaxis and Wythoff's Came*, Scripta Mathematica, vol. 19 (1953), pp. 135–143.

۸. با استفاده از خطکش و پرگار، نقطهٔ G را برپاره خط AB به دست آورید به‌طوری که $(AG)=\tau(GB)$، که در آن $\tau=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$.

۹. بااستفاده ازنتایج مسألهٔ ۸، نشان دهید که چگونه می‌توان یك پنج ضلعی منتظم را فقط بااستفاده ازخطکش وپرگار رسم کرد.

۴.۳ چند قضیهٔ دیگردربارهٔ همگراها

در قضیهٔ ۴.۱ ثابت شد که صورتهای p_n و مخرجهای q_n همگراهای $c_n=\frac{p_n}{q_n}$ کسر مسلسل سادهٔ نامتناهی

$$[a_۱, a_۲, \cdots, a_n, \cdots]$$

در رابطهٔ بازگشتی اساسی

$$p_n q_{n-۱}-p_{n-۱} q_n=(-۱)^n, \qquad n\geqslant ۰ \qquad (۲.۳)$$

صدق می‌کنند، اثبات ارائه‌شده درآنجا مستقل از متناهی یانامتناهی بودن کسر مسلسل بود.

باتقسیم دوطرف این معادله بر $q_n q_{n-۱}$، درمی‌یابیم که

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-۱}}{q_{n-۱}}=\frac{(-۱)^n}{q_n q_{n-۱}}, \qquad n\geqslant ۲ \qquad (۳.۳)$$

چون $c_n=\frac{p_n}{q_n}$، معادلهٔ (۳.۳) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

قضیهٔ ۱.۳. به‌ازای $n\geqslant ۲$، $c_n-c_{n-۱}=\frac{(-۱)^n}{q_n q_{n-۱}}$.

همچنین می‌توان ثابت کرد:

قضیهٔ ۲.۳. به‌ازای $n \geqslant ۳$، $c_n - c_{n-۲} = \dfrac{a_n(-۱)^{n-۱}}{q_n q_{n-۲}}$.

اثبات. روشن است که

$$c_n - c_{n-۲} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-۲}}{q_{n-۲}} = \frac{p_n q_{n-۲} - p_{n-۲} q_n}{q_n q_{n-۲}}$$

درصورت کسر طرف راست، قرار می‌دهیم

$$p_n = a_n p_{n-۱} + p_{n-۲}, \quad q_n = a_n q_{n-۱} + q_{n-۲},$$

و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} p_n q_{n-۲} - p_{n-۲} q_n &= (a_n p_{n-۱} + p_{n-۲}) q_{n-۲} - p_{n-۲}(a_n q_{n-۱} + q_{n-۲}) \\ &= a_n(p_{n-۱} q_{n-۲} - p_{n-۲} q_{n-۱}) \\ &= a_n(-۱)^{n-۱}, \end{aligned}$$

که در آن آخرین تساوی از (۲.۳) با قرار دادن $n-۱$ به‌جای n به‌دست می‌آید. این اثبات قضیهٔ ۲.۳ را کامل می‌کند.

این قضیه‌ها اطلاعات مهمی در مورد چگونگـی تغییر همگراهای c_n وقتی n افزایش می‌یابد، به‌دست می‌دهند. اگر در قضیهٔ ۱.۳، ابتدا n را ۲ وسپس ۳ بگیریم و به‌یاد آوریم که q_nها مثبت‌اند، مشاهده می‌کنیم که به‌ترتیب

$$c_۲ - c_۱ = \frac{۱}{q_۲ q_۱} > ۰, \qquad c_۳ - c_۲ = \frac{-۱}{q_۳ q_۲} < ۰,$$

این نابرابریها نشان می‌دهند که:

$$c_۱ < c_۲ \text{ وهمین‌طور } c_۳ < c_۲. \tag{۴.۳}$$

ازطرف دیگر، قضیهٔ ۲.۳ به‌ازای $n = ۳$ نشان می‌دهد که

$$c_۳ - c_۱ = \frac{a_۳(-۱)^۲}{q_۳ q_۱} = \frac{a_۳}{q_۳ q_۱} > ۰,$$

زیرا، $q_۳$، $q_۱$، $a_۳$ همه عددهای مثبت‌اند. بنا براین $c_۱ < c_۳$، و از ترکیب این نتیجه با نتایج (۴.۳) به‌دست می‌آید

$$c_1 < c_3 < c_2 .$$

همچنین، با قراردادن $n = 3$ وسپس $n = 4$ در قضیهٔ ۱.۳، و با درنظر گرفتن $n = 4$ در قضیهٔ ۲.۳، مشاهده می کنیم که

$$c_3 < c_4 < c_2 .$$

با ادامهٔ متوالی این‌شیوه، نابرابریهای

$$c_3 < c_5 < c_4 ,$$
$$c_5 < c_6 < c_4 ,$$
$$\dots\dots\dots$$

را به‌دست می آوریم. از ترکیب این نابرابریها، نتیجهٔ اساسی

$$c_1 < c_3 < c_5 < \dots < c_{2n+1} < \dots \quad \dots < c_{2n} < \dots < c_6 < c_4 < c_2$$

به‌دست می آید. این نتیجه‌را به‌صورت یك‌قضیه بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۳.۳. همگراهای فرد* c_{2n+1} یك‌کسرمسلسل سادهٔ نامتناهی تشکیل‌یك دنبالهٔ صعودی‌وهمگراهای‌زوج* c_{2n} تشکیل یك‌دنبالهٔ نزولی می‌دهند، وهرهمگرای فرد از هر همگرای زوج کوچکتراست. علاوه‌براین، هرهمگرای c_n، $n \geqslant 3$، بین دو همگرای پیشین قرار می‌گیرد.

مجموعه مسأله‌های ۱۰

۱. با استفاده از همگراهای $\sqrt{2}$، درستی قضیهٔ ۳.۳ را بررسی‌کنید.

۵.۳ مفاهیمی ازحد

چنان‌که‌دیدیم، از تبدیل عددگنگ x به‌کسرمسلسل نامتناهی، برابریهای زیر به‌ترتیب به‌دست آمدند:

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3},$$

$$\dots\dots\dots$$

---

*صحیح آن است که‌گفته شود همگراهای مرتبهٔ فرد، همگراهای مرتبهٔ زوج، اما‌مؤلف کتاب درهمه‌جا دراین مورد تسامح کرده‌است.ـــ م.

$$x_{n-1}=a_{n-1}+\frac{1}{x_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ودر پایان مرحلهٔ $(n-1)$ام، داشتیم

$$x=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{x_n}, \qquad (۵.۳)$$

که در آن x_n گنگ است ودیدیم که این فرایند می‌توانست به‌طور نامحدود ادامه یابد. این مطلب، شخص را وسوسه می‌کند که بنویسد

$$x=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\cdots,$$

(چنان که ما نوشتیم) واین نتیجه می‌دهد که کسر مسلسل نامتناهی طرف راست واقعاً عدد گنگ x را نمایش می‌دهد. بهتر است دربارهٔ معنی این عبارت فکر کنیم. این استنباط بدان معنی است که به‌نحوی می‌توان تعداد بینهایت عمل انجام داد ودرنتیجه به‌عددی رسید که ادعا می‌شود همان x، یعنی عدد گنگ داده‌شده‌است. اما، خواهیم دیدکه تنها از راه واردکردن مفهوم حد می‌توان ازنظرریاضی به‌این‌فرایند نامتناهی معنی داد.

برای‌روشن کردن این مطلب، نخست به‌عمل جمع‌معمولی برمی‌گردیم. کدام یك ازدومجموع نامتناهی زیر معنی دارد؟

$$A=1+1+1+1+\cdots,$$

$$B=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots.$$

روشن است که، اگر ۱ را مکرر باخودش جمع کنیم، می‌توانیم «مجموع» را هرقدر که بخواهیم بزرگ کنیم، از این‌رو می‌گوییم مجموع A وقتی تعداد جمله‌ها به‌طور نامتناهی افزایش یابد بینهایت می‌شود، و چنین نتیجه‌ای برای ما زیاد مفید نیست.

ازطرف دیگر، اگر عددهای 1، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$، ... را جمع کنیم، به‌ترتیب‌مجموعهای جزئی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$s_1=1,$$

$$s_2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1,$$

$$s_۳ = ۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ ,$$

. . . .

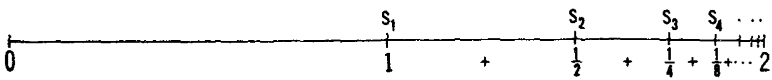
$$s_n = ۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ + \cdots + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} ,$$

. . . .

این عددها را می‌توان به صورتی که در شکل ۴ نشان داده شده‌اند نمایش داد، که در آن

$$s_۱ < s_۲ < s_۳ < \cdots < s_n < \cdots ,$$

بنا بر این مجموعهای جزئی همواره افزایش می‌یابند. اما هرمجموع جزئی s_n کوچکتر از ۲ است؛ یعنی، ۲ یک کران بالای مجموعهای جزئی s_n است.



شکل ۴

به‌منظور اثبات اینکه این عددها پیوسته به‌حد بالایی خود ۲ نزدیک می‌شوند، می‌نویسیم

$$s_n = ۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \cdots + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} ,$$

و نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۱}{۲} s_n = \left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ + \cdots + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^n .$$

سطر دوم را از سطر اول کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید

$$s_n\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right) = ۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^n ,$$

که نتیجه می‌دهد

$$s_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

وقتی n به‌طور نامحدود افزایش یابد، یعنی ، وقتی $n\longrightarrow\infty$، $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ به‌صفر میل می‌کند، پس s_n به ۲ نزدیك و نزدیکتر می‌شود، یا به‌حد ۲ میل می کند. می‌گوییم وقتی $n\to\infty$، s_n به ۲ همگرا می‌شود؛ یا به‌صورت نمادی می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} s_n=2$$

سپس این حد ۲ را برابر مقدار مجموع نامتناهی مورد بحث می‌گیریم و می‌نویسیم

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots=2\,.$$

این بحث ، مفهوم ریاضی حد را به‌اندازه‌ای که برای معنی دادن به‌یك کسر مسلسل نامتناهی لازم است، به‌اجمال، تقریباً قابل قبول، روشن می‌کند. همچنین این بحث، یك قضیهٔ اساسی آنالیز را که بدون اثبات می‌آوریم، روشن می‌کند.*

قضیهٔ ۴.۳ اگر دنبالهٔ عددهای $s_1, s_2, s_3, \ldots$ همواره افزایش یابند واگر به‌ازای هر n، s_n کوچکتر ازعددی ثابت مانند U باشد، آن‌گاه عددهای s_1، s_2، s_3، ... دارای حد l_U هستند و $l_U\leqslant U$. اگر عددهای s_1، s_2، s_3، ... همواره کاهش یابند اما همه ازعدد L بزرگتر باشند، آن‌گاه این عددها دارای حد l_L هستند و $l_L\geqslant L$.

اینك به‌بحث دربارهٔ کسرهای مسلسل سادهٔ نامتناهی برمی‌گردیم.

۶.۳ کسرهای مسلسل نامتناهی

منظورما معنی بخشیدن به‌کسر مسلسل نامتناهی

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\cdots$$

* برای بحث حد در دنباله‌ها، کتاب zippin [15] را ببینید، که در آن این قضیهٔ اساسی آنالیز (قضیهٔ ۴.۳) مورد بحث قرار می‌گیرد.

است . قضیهٔ ۳.۳ بیان می‌کند که همگراهای فرد $c_۱$، $c_۳$، $c_۵$، . . . دنبالهٔ صعودی عددهایی‌را تشکیل‌می‌دهند که همگرای $c_۲=U$ یك کران بالای همهٔ آنهاست، یعنی

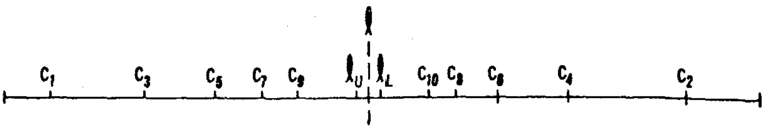
$$c_۱<c_۳<c_{۲n+۱}<\cdots\quad\cdots<c_{۲n}<\cdots<c_۴<c_۲=U;$$

لذا آنها به‌حدی چون $l_U\leqslant U$ همگرا هستند. به‌علاوه چون همهٔ همگراهای فرد از همهٔ همگراهای زوج کوچکترند حد l_U ازهمهٔ همگراهای زوج کمتر است.

ازطرف دیگر، همگراهای زوج $c_۲$، $c_۴$، $c_۶$، . . . ، $c_{۲n}$، . . . دنبالـهٔ نزولی عددهایی را تشکیل می‌دهند که $c_۱=L$ یك‌کران پایین همهٔ آنهاست، یعنی،

$$L=c_۱<c_۳<\cdots<c_{۲n+۱}<\cdots\quad\cdots<c_{۲n}<\cdots<c_۴<c_۲,$$

بنابراین همگراهای‌زوج به‌حد $l_L\geqslant L$ میل می کنند، و l_L ازهرهمگرای‌فرد بزرگتر است. با نظری به‌همگراها که درشکل ۵ رسم شده‌اند، مشاهده می کنیم که تاکنون‌ثابت کرده‌ایم همگراهای زوج دارای حد l_L و همگـراهای فرد دارای حد l_U هستند. اگر l_U با l_L برابر نباشد به‌اشکال برمی‌خوریم. اما، می‌توان ثابت‌کرد که $l_U=l_L$.



شکل ۵

برای این منظور، به‌قضیهٔ ۱.۳ برمی‌گردیم و به‌جای n، $۲k$ و به‌جای $n-۱$، $۲k-۱$ می‌گذاریم. به‌دست می‌آید

$$c_{۲k}-c_{۲k-۱}=\frac{(-۱)^{۲k}}{q_{۲k}q_{۲k-۱}},$$

یا، چون $(-۱)^{۲k}=۱$، داریم

$$c_{۲k}-c_{۲k-۱}=\frac{۱}{q_{۲k}q_{۲k-۱}}\qquad(۶.۳)$$

عددهای q_n از رابطهٔ بازگشتی

$$q_n=a_nq_{n-۱}+q_{n-۲};$$

محاسبه می‌شوند، وچون هر a_n (به‌ازای $n\geqslant ۲$) وهر q_n (به‌ازای $n\geqslant ۱$)عددهای

صحیح مثبت‌اند، نتیجه می‌شود که وقتی n افزایش یابد، q_nها بدون کران افزایش می‌یابند. ازاین‌رو $q_{۲k}\, q_{۲k-۱}$ مخرج کسر در (۶.۳)، وقتی k افزایش یابد، بدون کران افزایش می‌یابد، یعنی وقتی k به بینهایت میل کند، کسر $\frac{۱}{q_{۲k}q_{۲k-۱}}$ به‌صفر میل می‌کند. اما دراین صورت از معادلهٔ (۶.۳) نتیجه می‌گیریم که تفاضل $c_{۲k}-c_{۲k-۱}$ وقتی k به بینهایت میل کند، به‌صفر میل می‌کند، و این تنها وقتی ممکن‌است که $c_{۲k}$ و $c_{۲k-۱}$ یك حدمشترك داشته باشند، یعنی $l_L=l_U=l$. بنا براین ثابت کرده‌ایم که:

قضیهٔ ۵.۳. هرکسر مسلسل سادهٔ نامتناهی به یك حد l میل می‌کندکه بزرگتر از هر همگرای فرد وکوچکتر از هر همگرای زوج است.

به کجا رسیده‌ایم؟ آیا این حد l همان عدد x است که در آغاز کار کسرمسلسل را به‌وجودآورده است؟ درواقع این‌دو برابرند، ولی این‌مطلب باید ثابت شود.

برای این منظور، فرض می‌کنیم x عدد گنگ مفروضی باشد و به‌بسط (۵.۳)، یعنی

$$x=a_۱+\frac{۱}{a_۲}+\frac{۱}{a_۳}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۱}}+\frac{۱}{x_n},$$

برمی‌گردیم، که در آن x_n «بقیهٔ» کسراست، یعنی،

$$x_n=a_n+\frac{۱}{a_{n+۱}}+\frac{۱}{a_{n+۲}}+\cdots$$

$$=a_n+\frac{۱}{x_{n+۱}}, \tag{۷.۳}$$

که در آن

$$x_{n+۱}=a_{n+۱}+\frac{۱}{a_{n+۲}}+\cdots \tag{۸.۳}$$

چون $x_{n+۱}$ مثبت است، سطردوم (۷.۳) نشان می‌دهد که

$$x_n>a_n,$$

همچنین، (۸.۳) نشان می‌دهد که

$$\frac{۱}{x_{n+۱}} < \frac{۱}{a_{n+۱}} \quad \text{یا} \quad x_{n+۱} > a_{n+۱}.$$

دوباره بنا بر سطر دوم (۷.۳)،

$$x_n = a_n + \frac{۱}{x_{n+۱}},$$

و چون $\frac{۱}{a_{n+۱}} < \frac{۱}{x_{n+۱}}$، نتیجه می‌شود که

$$x_n < a_n + \frac{۱}{a_{n+۱}};$$

با ترکیب این نتایج، مشاهده می‌کنیم که

$$a_n < x_n < a_n + \frac{۱}{a_{n+۱}} \tag{۹.۳}$$

مرحلهٔ بعدی برهان، این است که نشان دهیم x بین c_n و $c_{n+۱}$ واقع است. برای این منظور، سه عبارت زیر را باهم مقایسه می‌کنیم:

$$c_n = a_۱ + \frac{۱}{a_۲ +} \cdots + \frac{۱}{a_{n-۱} +} \frac{۱}{a_n},$$

$$x = a_۱ + \frac{۱}{a_۲ +} \cdots + \frac{۱}{a_{n-۱} +} \frac{۱}{x_n}, \tag{۱۰.۳}$$

$$c_{n+۱} = a_۱ + \frac{۱}{a_۲ +} \cdots + \frac{۱}{a_{n-۱} +} \frac{۱}{a_n +} \frac{۱}{a_{n+۱}}.$$

نخست مشاهده می‌کنیم که این عبارتها در جملهٔ

$$a_۱ + \frac{۱}{a_۲ +} \cdots + \frac{۱}{a_{n-۱}}$$

مشترک‌اند، پس کافی است بقیهٔ جمله‌های این سه عبارت، یعنی

$$\frac{۱}{a_n}, \quad \frac{۱}{x_n}, \quad \frac{۱}{a_n + \frac{۱}{a_{n+۱}}},$$

باهم مقایسه شوند. اما طبق (۹.۳) می‌دانیم که

$$\frac{۱}{a_n} > \frac{۱}{x_n} > \frac{۱}{a_n + \frac{۱}{a_{n+۱}}},$$

و از (۱۰.۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که x همواره بین دو همگرای متوالی c_n و $c_{n+۱}$ قراردارد؛ یعنی

$$c_n < x < c_{n+۱} \quad \text{یا} \quad c_n > x > c_{n+۱}.$$

محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که

$$c_۱ < x < c_۲;$$

زیرا، (۹.۳) نتیجه می‌دهد $x_۱ > a_۱$، وچون $c_۱ = a_۱$ و $x = x_۱$، مشاهده می‌کنیم که $c_۱ < x$. ازطرف دیگر، $x = a_۱ + \frac{۱}{x_۲}$، که بنابر (۹.۳)، $x_۲ > a_۲$ یا $\frac{۱}{x_۲} < \frac{۱}{a_۲}$؛ ازاین‌رو

$$x = a_۱ + \frac{۱}{x_۲} < a_۱ + \frac{۱}{a_۲} = c_۲.$$

پس

$$c_۱ < x < c_۲.$$

همچنین معادله‌های (۱۰.۳) نشان می‌دهند که x بین $c_۲$ و $c_۳$، بین $c_۳$ و $c_۴$، بین $c_۴$ و $c_۵$ و الی آخر، واقع است. چون همهٔ همگراهای فرد از همهٔ همگراهای زوج کوچکترند، نتیجه می‌گیریم که

$$c_{۲k-۱} < x < c_{۲k}, \qquad k = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

یا به‌صورت گسترده‌تر:

$$c_۱ < c_۳ < \cdots < c_{۲k-۱} < \cdots < x < \cdots < c_{۲k} < \cdots < c_۴ < c_۲.$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که همگراهای $c_۱$، $c_۳$، ... ازطرف چپ به x وهمگراهای

c_2، c_4، . . . ازطرف راست به x میل می‌کنند. امامی‌دانیم که وقتی k به‌طور نامحدود افزایش یابد، همگراهای فرد c_{2k-1} وهمگراهای زوج c_{2k} به‌حد l میل می‌کنند؛ از این‌رو x و l باید مساوی باشند. بنابراین نوشتن

$$x=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$$

مجازاست وقضیهٔ زیررا ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۶.۳ اگرعدد گنگ x به‌کسرمسلسل سادهٔ نامتناهی $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ طبق قاعده‌هایی که بیان کرده‌ایم، بسط داده‌شود؛ آن‌گاه حد همگراهای c_1، c_2، ...، c_n، ... کسرمسلسل $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ همان عدد x است که درآغازکسرمسلسل را به‌وجود آورده است.

به‌دنبال این قضیه، باید قضیهٔ دیگری بیان شود مبنی براینکه هر عدد گنگ تنها یک کسر مسلسل سادهٔ نامتناهی دارد. این مطلب درست است و چنان‌که بیان شد، خواننده پی خواهد برد که بسط یک عددگنگ به دو روش مختلف، امکانپذیر نیست.

۷.۳ قضیه‌های تقریب

تجربهٔ ما دربارهٔ کسرهای مسلسل، وبه‌ویژه قضیهٔ ۶.۳، به‌خوبی روشن کرده است که در بسط کسرمسلسل عددگنگ x، هرهمگرا ازهمگرای قبلی به x نزدیکتر است. پیش از بیان این نتیجه به‌صورت یک قضیه چند نکتهٔ مقدماتی را بیان می‌کنیم.

فرض کنید

$$x=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{x_{n+1}}, \qquad (۱۱.۳)$$

بسط عددگنگ x باشد، که درآن

$$x_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}}+\cdots$$

فرض می‌کنیم که x_2، x_3، . . . همه عددهای مثبت‌اند؛ نیز توجه می‌کنیم که $x=x_1$. گرچه x_{n+1} شامل بینهایت خارج قسمت صحیح a_{n+1}، a_{n+2}، . . . است، ولی لزوماً عددی صحیح نیست و در نتیجه حق نداریم با آن مثل یک خارج قسمت جزئی رفتار کنیم.

اما فرض کنید (۱۱.۳) را به‌صورت

$$x=[a_1, a_2, \cdots, a_n, x_{n+1}]$$

یك کسر مسلسل «متناهی» بنویسیم و x_{n+1} را یك خارج قسمت‌جزئی به‌حساب آوریم. دراین صورت اگر همگراها را به‌روش معمولی محاسبه کنیم، آخرین «همگرا» (در قضیهٔ ۳.۱ قراردهید $i=n+1$ و $a_{n+1}=x_{n+1}$) با

$$\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}},$$

برابرمی‌شود، وممکن است مانندکسرهای مسلسل متناهی، این عدد برابر باعددگنگ مفروض x باشد. ازاین‌رو به‌نظرمنطقی می‌رسدکه بنویسیم

$$x=[a_1, a_2, \cdots, a_n, x_{n+1}]=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}, \quad (۱۲.۳)$$

باید تأکید شود که همچون گذشته p_n، q_n، p_{n-1}، q_{n-1} تنها به عددهای صحیح a_1، a_2، . . . ، a_n بستگی دارند. به‌ویژه، معادلهٔ (۱۲.۳) به ازای $n=0$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{x_1p_0+p_{-1}}{x_1q_0+q_{-1}}=\frac{x_1\times 1+0}{x_1\times 0+1}=x_1$$

وبنا برتعریف،

$$x_1=a_1+\frac{1}{a_2+\cdots}=x.$$

وقتی $n=1$، (۱۲.۳) نتیجه می‌دهد

$$[a_1, x_2]=\frac{x_2p_1+p_0}{x_2q_1+q_0}=\frac{x_2\cdot a_1+1}{x_2\cdot 1+0}=a_1+\frac{1}{x_2}$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+\cdots}=x.$$

این‌مطلب که (۱۲.۳) به‌ازای هر n برقرار است، دقیقاً باهمان روشی که قضیهٔ ۳.۱ را ثابت کردیم، ثابت می‌شود، مرحله‌های برهان تقریباً همان مرحله‌های برهان قضیه است. اکنون برای بیان قضیهٔ اصلی این بخش آمادگی داریم:

قضیهٔ ۷۰۳. هر همگرا از همگرای قبلی به مقدار کسر مسلسل سادهٔ نامتناهی نزدیکتر است.

اثبات. فرض کنید

$$x=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ x_{n+1}]\ ,$$

بسط عددگنگ مفروض x ،که در آن

$$x_{n+1}=[a_{n+1},\ a_{n+2},\ \cdots]\ ,$$

باشد. آن‌گاه، طبق (۱۲.۳) داریم

$$x=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}\ ,$$

وازاین تساوی به‌دست می‌آوریم

$$x(x_{n+1}q_n+q_{n-1})=x_{n+1}p_n+p_{n-1}\ ,$$

یا، باتغییر ترتیب جمله‌ها، به‌ازای $n\geqslant 2$، خواهیم داشت

$$x_{n+1}(xq_n-p_n)=-(xq_{n-1}-p_{n-1})=-q_{n-1}\left(x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$$

باتقسیم دوطرف این‌تساوی بر $x_{n+1}q_n$، به‌دست می‌آوریم

$$x-\frac{p_n}{q_n}=\left(-\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right)\left(x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$$

حال اگر $a=b\times c$، آن‌گاه $|a|=|b|\times|c|$، و $|a|=|-a|$؛* ازاین‌رو

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right|\times\left|x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|. \qquad (۱۳.۳)$$

---

* نماد $|a|$، که «قدرمطلق a» خوانده می‌شود، به‌این معنی‌است‌که

اگر $a\geqslant 0$ $|a|=a$ ؛

اگر $a<0$ $|a|=-a$.

مثلاً $|7|=7$ ، $|-7|=7$.

می‌دانیم که به‌ازای $n\geqslant ۲$، $x_{n+۱}>۱$ و $q_n>q_{n-۱}>۰$؛ ازاین‌رو

$$۰<\frac{q_{n-۱}}{x_{n+۱}q_n}<۱ ,$$

ودر نتیجه

$$۰<\left|\frac{q_{n-۱}}{x_{n+۱}q_n}\right|<۱ .$$

پس (۱۳.۳) نشان می‌دهد که

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|x-\frac{p_{n-۱}}{q_{n-۱}}\right|, \quad n\geqslant ۲,$$

یا

$$|x-c_n|<|x-c_{n-۱}|, \quad n\geqslant ۲,$$

این‌رابطه نشان می‌دهد که c_n از $c_{n-۱}$ به x نزدیکتراست و اثبات قضیه تمام است.

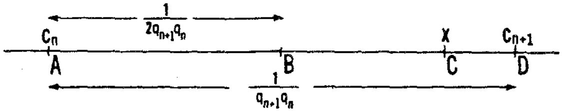
داشتن‌اندازه‌ای یا برآوردی ازاینکه c_n باچه دقتی x را تقریب می‌کند جالب است. درواقع، ازقضیهٔ ۱.۳ باجانشین‌کردن $n+۱$ به‌جای n می‌دانیم که

$$c_{n+۱}-c_n=\frac{(-۱)^{n+۱}}{q_{n+۱}q_n}.$$

ازقدرمطلق دوطرف این رابطه نتیجه می‌شود

$$|c_{n+۱}-c_n|=\frac{۱}{q_{n+۱}q_n}, \qquad n\geqslant ۱.$$

علاوه براین، بنا برقضیهٔ ۷.۳ می‌دانیم که x به $c_{n+۱}$ نزدیکتر از c_n است، ودرنتیجه قدرمطلق تفاضل x و c_n همواره ازنصف قدرمطلق تفاضل c_n و $c_{n+۱}$ بزرگترخواهد بود. اگروضعیت‌را ازروی نمودار بررسی کنیم، این مطلب روشن خواهد شد. شکل ۶ حالتی‌را نشان می‌دهد که n فرد است ودرنتیجه c_n درطرف چپ $c_{n+۱}$ است. روشن



شکل ۶

است که $AB<AC<AD$ یا

$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}}<\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

چون $q_{n+1}>q_n$، $q_nq_{n+1}>q_n^2$ و بنا بر این $\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2}$، و به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۸.۳

$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}}<\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2},\quad n\geqslant 1.$$

اگر x گنگ باشد، بینهایت همگرای $\frac{p_n}{q_n}$ وجود دارد که در قضیهٔ ۸.۳ صدق می‌کنند. بنا بر این قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۹.۳. اگر x گنگ باشد، بینهایت عدد گویای $\frac{p}{q}$، $q>0$ و $(p,q)=1$، وجود دارند که

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

این قضیه آغاز نظریهٔ تقریب گویای عددهای گنگ است، موضوعی که به‌اختصار درفصل ۵ بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱. نشان دهید که چند همگرای اول عدد

$$e=2{,}718282\ldots$$

تقریبهای بهتر و بهتری ازاین‌عدد به‌دست می‌دهند. این همگراها را باید با پیدا کردن چند همگرای اول عدد ۲٫۷۱۸۲۸۲، که مقدار تقریبی e است و هر شش رقم اعشار آن درست است، محاسبه کرد.

توضیح. به‌عدد گنگ e به‌صورتی کاملاً طبیعی در مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال برمی‌خوریم و به‌صورت

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

تعریف می‌شود. این مطلب را که دنبالهٔ عددهای

$$\left(۱+\frac{۱}{۱}\right)^۱,\ \left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^۲,\ \ldots,\ \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n,\ \ldots$$

واقعاً به‌حدی میل می‌کند، می‌توان با جدول عددی

n	$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$
۱۰	۲٫۵۹۳۷
۲۰	۲٫۶۵۳۳
۱۰۰	۲٫۷۰۴۸
۲۰۰	۲٫۷۱۱۵
۱۰۰۰	۲٫۷۱۶۹
.....	......

حدس زد. عدد e مبنای لگاریتم طبیعی است، درست همچون عدد ۱۰ که مبنای لگاریتم معمولی است. بسط کسر مسلسل e عبارت است از

$$e=[۲,\ ۱,\ ۲,\ ۱,\ ۱,\ ۴,\ ۱,\ ۱,\ ۶,\ ۱,\ ۱,\ ۸,\ \ldots];$$

که اثباتش بسیار مشکل است.

حل. با قبول بسط فوق برای e، یا با اکتفا کردن به تقریب

$$e=۲٫۷۱۸۲۸۲=\frac{۱۳۵۹۱۴۱}{۵۰۰۰۰۰},$$

درمی‌یابیم که

$$e=[۲,\ ۱,\ ۲,\ ۱,\ ۱,\ ۴,\ ۱,\ \ldots].$$

همگراهای متناظر عبارت‌اند از

$$\frac{۲}{۱}, \frac{۳}{۱}, \frac{۸}{۳}, \frac{۱۱}{۴}, \frac{۱۹}{۷}, \frac{۸۷}{۳۲}, \frac{۱۰۶}{۳۹}, \ldots,$$

و تبدیل این عددها به‌عددهای اعشاری، نشان می‌دهد که به‌ترتیب تقریبهای بهتر و بهتری برای e به‌دست می‌دهند.

برای آزمودن قضیهٔ ۹.۳، توجه کنید که $\frac{p_۷}{q_۷}=\frac{۱۰۶}{۳۹}$؛ بنابراین نابرابری

$$\left| e-\frac{p_۷}{q_۷} \right| < \frac{۱}{q_۷^۲},$$

یا

$$\left| e-\frac{۱۰۶}{۳۹} \right| < \frac{۱}{۳۹^۲}.$$

باید درست باشد. محاسبه نشان می‌دهد که

$$e-\frac{۱۰۶}{۳۹}=۰٫۰۰۰۳۳۲۶۴ \ldots,$$

که مسلماً از $\ldots ۰٫۰۰۰۶۵۷۴۶ = \frac{۱}{۳۹^۲}$ کوچکتـر است. مشاهده مـی‌کنیم که $\frac{۱۰۶}{۳۹}-e$ تقریباً نصف $\frac{۱}{۳۹^۲}$ است، و این نشان می‌دهد که به‌عنوان یك قضیهٔ تقریب، ممکن است بتوان قضیهٔ ۹.۳ را به‌طور قابل ملاحظه‌ای بهتر کرد. درفصل ۵ خواهیم دید که درواقع چنین است.

نابرابری

$$\left| x-\frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{۱}{q_n^۲}$$

درقضیهٔ ۸.۳ برای عددگویا یاگنگ x صادق است. در مثال بعدی یك عدد گویا را تقریب می‌کنیم.

مثال ۲. کسر $\frac{۲۰۶۵}{۹۰۲}$ داده شده است، کسری با صورت کوچکتر و مخرج

کوچکتر چنان پیدا کنید که تا سه رقم اعشار بر کسر مفروض منطبق باشد.

حل. $\frac{۲۰۶۵}{۹۰۲}$ را به کسر مسلسل تبدیل کرده و همگراهای آن را حساب می‌کنیم. جدول زیر حاصل این محاسبه‌هاست:

i	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
a_i			۲	۳	۲	۵	۵	۱	۳
p_i	۰	۱	۲	۷	۱۶	۸۷	۴۵۱	۵۳۸	۲۰۶۵
q_i	۱	۰	۱	۳	۷	۳۸	۱۹۷	۲۳۵	۹۰۲
c_i			$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۱۶}{۷}$	$\frac{۸۷}{۳۸}$	$\frac{۴۵۱}{۱۹۷}$	$\frac{۵۳۸}{۲۳۵}$	$\frac{۲۰۶۵}{۹۰۲}$

اکنون با مراجعه به‌قضیهٔ ۸.۳، درپی دو همگرای $c_n=\frac{p_n}{q_n}$ و $c_{n+۱}=\frac{p_{n+۱}}{q_{n+۱}}$ هستیم که نابرابری زیر را برقرار کنند

$$\left|\frac{۲۰۶۵}{۹۰۲}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{۱}{q_nq_{n+۱}}<۰٫۰۰۰۵.$$

یعنی می‌خواهیم $\frac{۲۰۶۵}{۹۰۲}$ را با آن $\frac{p_n}{q_n}$ تقریب بزنیم که خطای آن کمتر از نصف‌واحد دررقم چهارم اعشاری باشد. با اندکی محاسبه دیده می‌شود که

$$\frac{۸۷}{۳۸}=\frac{p_۴}{q_۴},\quad \frac{۴۵۱}{۱۹۷}=\frac{p_۵}{q_۵},$$

واین برای منظور ما کفایت می‌کند، زیرا

$$\left|\frac{۲۰۶۵}{۹۰۲}-\frac{۸۷}{۳۸}\right|<\frac{۱}{q_۴q_۵}=\frac{۱}{۳۸\times۱۹۷}<۰٫۰۰۰۱۳.$$

پس کسر مطلوب، $\frac{۸۷}{۳۸}$ است. توجه کنید که اگر به‌جای $\frac{۱}{q_nq_{n+۱}}$ با $\frac{۱}{q_n^۲}$ کار

می‌کردیم، جواب مسألهٔ ما همگرای بعدی، یعنی $\frac{۴۵۱}{۱۹۷}$ می‌شد، زیرا $\frac{۱}{۳۸^۲}$ کمتر از ۰٫۰۰۰۵ نیست. به‌منظور پیدا کردن مقادیر q_nq_{n+1} باشرط $\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\varepsilon$، که در آن ε هر عدد دلخواه است می‌توانستیم از یك جدول مربع اعداد استفاده کنیم وابتدا درستی $q_n^2>1/\varepsilon$ وسپس درستی $q_nq_{n+1}>\frac{1}{\varepsilon}$ را با آزمونی دیگر بررسی کنیم.

مجموعه مسأله‌های ۱۱

۱. کسر $\frac{۲۸۹۳}{۱۳۲۳}$ داده شده است، کسری باصورت ومخرج کوچکتر پیدا کنیدکه مقدار آن تا سه رقم بعد از ممیز باصورت اعشاری کسرمفروض منطبق باشد، یعنی خطای تقریب کمتر از ۵ واحد در رقم چهارم بعد ازممیز باشد.

۲. $\sqrt{۱۹}$ را به‌یك کسرمسلسل سادهٔ نامتناهی بسط دهید وکسری به‌دست آوریدکه آن را بادقت چهاررقم بعداز ممیز تقریب زند.

۳. بسط کسرمسلسل عدد π عبارت است از $[۳, ۷, ۱۵, ۱, ۲۹۲, ۱, ۱, ۱, \ldots]$. بااستفاده ازقضیهٔ ۸.۳ تحقیق کنیدکه چهار همگرای اول این بسط باچه دقتی π را تقریب می‌زنند.

۸.۳ تعبیرهندسی کسرهای مسلسل

درسال ۱۸۹۷، فلیکس کلاین[1] برای شیوه‌ای‌که همگراهای c_1، c_2، ...، c_n، ... یك کسرمسلسل عددگنگ به‌مقدار این عددگنگ میل می‌کنند، تعبیر جالبی ارائه کرد. فلیکس کلاین نه‌تنها ریاضیدانی برجسته بود، بلکه به‌بهترین وجهی مطالب ریاضی‌را برای عامه بیان می‌کرد. تجدید چاپ برخی از کارهای وی امروزه در دسترس علاقه‌مندان است.

فرض‌کنید α عددی‌گنگ باشدکه بسط آن

---

1. F. Klein: *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*, Teubner, 1907, pp. 17–25.

$$[a_۱, a_۲, \cdots, a_n, \cdots],$$

است وهمگراهای آن عبارت‌اند از

$$c_۱=\frac{p_۱}{q_۱},\quad c_۲=\frac{p_۲}{q_۲},\quad \cdots,\ c_n=\frac{p_n}{q_n},\cdots.$$

برای سادگی، α را مثبت فرض می‌کنیم و روی کاغذ نمودار، نقطه‌های (x, y) را که مختصات x و y آنها عددهای صحیح و مثبت هستند با نقطه علامت می‌گذاریم. تصور کنید که به‌این نقطه‌ها، که نقطه‌های مشبکه‌ای نامیده می‌شوند، میخ یا سوزن کوبیده باشیم. بعد خط $y=\alpha x$ را رسم می‌کنیم. این خط از هیچ یك از نقطه‌های مشبکه‌ای نمی‌گذرد؛ زیرا، اگر می‌گذشت نقطه‌ای مانند (x, y) با مختصات صحیح وجود می‌داشت که درمعادلهٔ $y=\alpha x$ صدق می‌کرد، و $\alpha=\frac{y}{x}$ عددی گویا می‌بود. اما این امکانپذیر نیست، زیرا α گنگ است.

اکنون تصور کنید که یك‌سر تکه‌ای نخ سیاه به‌نقطه‌ای بسیاردوراز خط $y=\alpha x$ بسته شده باشد وانتهای دیگر نخ در دست ما باشد. نخ را محکم می‌کشیم تا انتهایی که در دست ماست درمبدأ قرار گیرد. در حالی که نخ را محکم گرفته‌ایم، دستمان‌را ازمبدأ به‌طرف چپ حرکت می‌دهیم؛ نخ به بعضی از میخهای بالای خط گیرمی‌کند. اگر نخ را درجهت دیگر نیز حرکت دهیم نخ به‌میخهای دیگری گیرمی‌کند. شکل ۷ را ببینید.

میخهایی که در طرف پایین بانخ تماس پیدا می‌کنند، در نقطه‌های مشبکه‌ای بامختصات

$$(q_۱, p_۱),\quad (q_۳, p_۳),\quad (q_۵, p_۵), \cdots$$

نصب شده‌اند و به‌ترتیب باهمگراهای فرد

$$c_۱=\frac{p_۱}{q_۱},\quad c_۳=\frac{p_۳}{q_۳},\quad c_۵=\frac{p_۵}{q_۵}, \cdots,$$

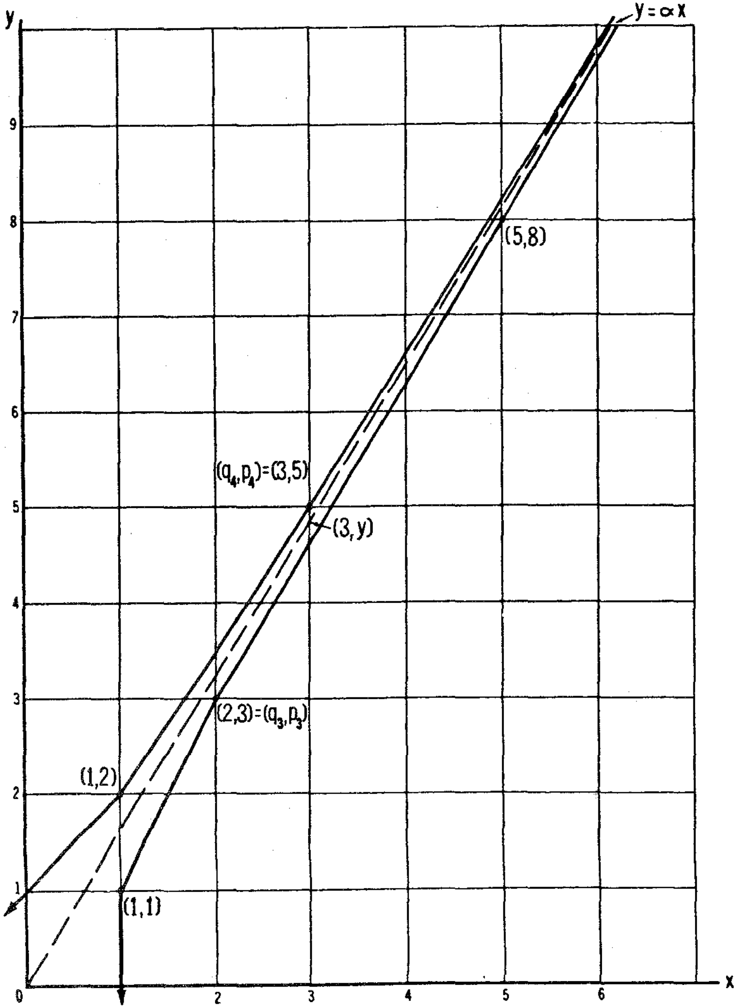
که همه کمتر از α هستند، متناظرند. میخهایی که دربالای‌خط بانخ تماس پیدا می‌کنند درنقطه‌های مشبکه‌ای

$$(q_۲, p_۲),\quad (q_۴, p_۴),\quad (q_۶, p_۶), \cdots$$

نصب شده‌اند وباهمگراهای زوج

$$c_{۲}=\frac{p_{۲}}{q_{۲}}, \quad c_{۴}=\frac{p_{۴}}{q_{۴}}, \quad c_{۶}=\frac{p_{۶}}{q_{۶}}, \ldots,$$

که همه از α بزرگترند، متناظرند. هریك از دو وضعیت نخ یك مسیر چندضلعی را



شکل ۷

تشکیل می‌دهد، که هر قدر روی آن جلو رویم به‌خط $y=\alpha x$ نزدیکتر می‌شویم.

مثال. نمودار کلاین را برای بسط کسر مسلسل

$$\alpha=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}=[۱,\ ۱,\ ۱,\ \cdots]$$

رسم کنید.

حل. دنبالهٔ همگراهای α

$$\frac{۱}{۱},\ \frac{۲}{۱},\ \frac{۳}{۲},\ \frac{۵}{۳},\ \frac{۸}{۵},\ \frac{۱۳}{۸},\ \cdots$$

است. نقطه‌ها یا میخهای متناظر با همگراهای فرد عبارت‌اند از: $(۱\ ,۱)$، $(۲\ ,۳)$، $(۵\ ,۸)$، . . . و همه زیر خط $y=\alpha x$ هستند؛ شکل ۷ را ببینید. نقطه‌های متناظر باهمگراهای زوج عبارت‌اند از $(۱\ ,۲)$، $(۳\ ,۵)$، $(۸,۱۳)$، . . . و بالای خط واقع‌اند.

مثلاً، نشان می‌دهیم که نقطهٔ $(q_۴,\ p_۴)=(۳\ ,۵)$ باهمگرای زوج $\frac{p_۴}{q_۴}=\frac{۵}{۳}$، که بزرگتر از α است، متناظر است. نقطهٔ $(۳\ ,\ y)$ را که در شکل ۷ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. چون این نقطه روی خط $y=\alpha x$ واقع است، مشاهده می‌کنیم که $y=۳\alpha$ یا $\alpha=\frac{y}{۳}$. نقطهٔ $(۳\ ,۵)$ بالای خط است بنابراین $y<۵$، یا

$\alpha=\frac{y}{۳}<\frac{۵}{۳}$؛ ازاین‌رو همگرای $\frac{۵}{۳}$ بزرگتر از α است.

اغلب ویژگیهای مقدماتی کسرهای مسلسل دارای تعبیر هندسی هستند. در واقع نظریهٔ کسرهای مسلسل ساده را می‌توان از راه هندسی بسط داد.*

مجموعه مسأله‌های ۱۲

۱. نمودار کلاین را برای بسط کسر مسلسل $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$، رسم کنید.

---

* کتاب زیر را ببینید:

H. Hancock, *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*, New York: The Macmillan Company, 1939, (Chapter 8).

۰۲ نمودار کلاین‌را برای بسط کسرمسلسل $\sqrt{3}$، رسم کنید.

۹.۳ حل معادلهٔ $x^{2}=ax+1$

کسرهای مسلسل را می‌توان برای تقریب زدن ریشه‌های مثبت هرمعادلهٔ چندجمله‌ای به‌کار برد، البته به‌شرط‌اینکه ریشهٔ مثبت وجود داشته باشد. اکنون معادلهٔ چندجمله‌ای درجهٔ دوم

$$x^{2}=ax+1 \tag{14.3}$$

را بررسی می‌کنیم.

اگر $a>0$، آن‌گاه ریشهٔ مثبت هرمعادلهٔ درجهٔ‌دوم به‌صورت (۱۴.۳) دارای بسط کسرمسلسل

$$x=a+\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\cdots$$

است. برای مشاهدهٔ این موضوع، تنها کافی است‌که دوطرف (۱۴.۳) را بر x تقسیم کنیم، و به‌دست آوریم

$$x=a+\frac{1}{x},$$

بنا براین

$$x=a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{x}}=a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ddots}}.$$

مثلا، وقتی $a=1$، معادلهٔ

$$x^{2}=x+1$$

دارای ریشهٔ مثبت

$$x=[1, 1, 1, 1, \cdots],$$

است وهمگراهای متوالی این کسر مسلسل تقریبهای بهتر و بهتری از جواب واقعی معادله یعنی $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ را به‌دست خواهند داد. همچنین مسألهٔ ۴ بخش ۳.۳ را

ببینید. بحث مفصلتری دربارهٔ این عدد خاص در بخش بعدی دنبال خواهدشد.

مجموعه مسأله‌های ۱۳

۱. با استفاده ازفرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، ریشهٔ مثبت هریك ازمعادله‌های زیر را پیدا کنید و جوابهای واقعی را با جوابهای تقریبی که از محاسبهٔ چند همگرای بسط کسرهای مسلسل این ریشه‌های مثبت به‌دست می‌آیند، مقایسه کنید.

(الف) $x^{۲}-۳x-۱=۰$ (ب) $x^{۲}-۵x-۱=۰$

۲. فرض کنید که

$$x=b+\frac{۱}{a+}\frac{۱}{b+}\frac{۱}{a+}\cdots=[\overline{b,\ a}]$$

و b مضربی از a است، یعنی $b=ac$ (که c عدد صحیح است). نشان دهید که x درمعادلهٔ

$$x^{۲}-bx-c=۰$$

صدق می‌کند ومقدارآن برابر است با

$$x=\frac{b+\sqrt{b^{۲}+۴c}}{۲}.$$

۳. با نسبت دادن مقادیری خاص به‌a وb وباانتخاب همگراهای خاص $\frac{p_{n-۲}}{q_{n-۲}}$، $\frac{p_n}{q_n}$، $\frac{p_{n+۲}}{q_{n+۲}}$، تحقیق کنیدکه اگر

$$x=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b+}\frac{۱}{a+}\frac{۱}{b+}\frac{۱}{a+}\frac{۱}{b+}\cdots,$$

آن‌گاه

$$p_{n+۲}-(ab+۲)p_n+p_{n-۲}=۰.$$

۱۰.۳ عددهای فیبوناتچی

ساده‌ترین کسرمسلسل سادهٔ نامتناهی

$$\tau=[۱,\ ۱,\ ۱,\ \cdots],$$

است. τ درمعادلهٔ

$$\tau = ۱ + \frac{۱}{\tau} \quad \text{یا} \quad \tau^{۲} - \tau - ۱ = ۰,$$

که ریشهٔ مثبت آن

$$\tau = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

است، صدق می‌کند. همگراهای τ

$$\frac{۱}{۱}, \frac{۲}{۱}, \frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۳}, \frac{۸}{۵}, \frac{۱۳}{۸}, \ldots \qquad (۱۵.۳)$$

هستند. صورت ومخرج این کسرها هردو از دنبالهٔ عددهای صحیح

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, \ldots \qquad (۱۶.۳)$$

تشکیل شده‌اند. هریك ازاین‌عددها، بجز دوتای اول، برابرمجموع دوتای قبلی‌است؛ مثلا ۱+۱=۲، ۱+۲=۳ تا به آخـر. عددهای (۱۶.۳) به افتخار ریاضیدان بزرگ قرن‌سیزده میلادی لئوناردوفیبوناتچی[1] (۱۱۷۰–۱۲۵۰)عددهای‌فیبوناتچی نامیده می‌شوند، گرچه وی اولین‌کسی نبودکه ازآنها استفاده کرد.

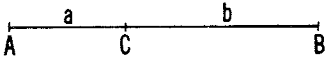
یونانیها ادعا می‌کردند که موجودات طبیعـی و هنری زیبایی خود را مدیون الگوهای ریاضی خاصی هستند. یکی از این الگوها، قـانون میانگین زرین یا برش زرین بود، که دارای صورتهای گوناگون است. درهندسه، این‌قانون‌ازتقسیمی‌به‌وجود آمده است که بعضی «خوشایندترین» تقسیم پاره خط AB بایك نقطهٔC می‌نامند.این تقسیم ازانتخاب نقطهٔC به‌گونه‌ای به‌دست می‌آیدکه نسبت جزء a به‌جزءb برابر با نسبت b به$a+b$، طول تمام پاره‌خط، باشد* (شکل ۸ را ببینید). یعنی

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} \quad \text{یا} \quad \frac{b}{a} = \frac{a}{b} + ۱$$

حال اگر b/a را x بنامیم، داریم

1. Leonardo Fibonacci

* این‌نسبت را درمتنهای فارسی «نسبت ذات وسطین وطرفین» نامیده‌اند. — و.



شکل ۸

$$x=\frac{۱}{x}+۱ \quad \text{یا} \quad x^{۲}-x-۱=۰$$

بنابراین $\tau=\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۵})=\frac{b}{a}=x$، یا $b=\tau a$. پس گفته می‌شود که پاره‌خطی به‌نسبت میانگین زرین تقسیم شده‌است، اگر یکی از تقسیمها، τ برابر دیگری باشد.

درسال ۱۵۰۹، لوکا پاچیولی[1] کتابی منتشر کرد به‌نام نسبت‌الهی[2]، که‌موضوع آن مطالعهٔ عدد τ بود. شکلها و ترسیمهای این کتاب از لئوناردوداوینچی[3] است. در این کتاب پاچیولی سیزده ویژگی جالب τ را شرح داده است.

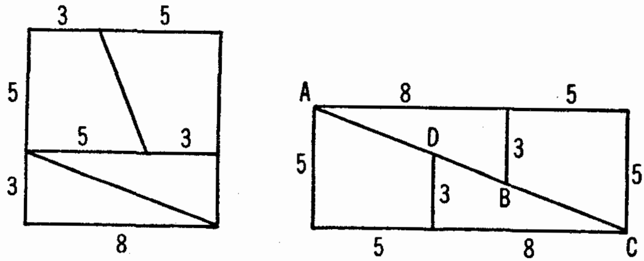
میانگین زرین درموضوعهایی که ظهور آنها انتظار نمی‌رود، وارد می‌شود: در تقارن پنج‌ضلعی برخی گلها و جانوران دریایی، درتناسبهای بدن انسان، وغیره. آدمی میانگین زرین را در هنرهای تجسمی و جنبه‌های مختلف طراحی معاصر، به‌ویژه در مشاغل ترسیمی و تبلیغی به‌کار گرفته است. مثلاً، به‌نظر اکثر مردم خوش‌ترکیبترین مستطیل، از لحاظ زیباشناسی، آن‌است که نسبت تقریبی اضلاع آن ۱ به‌τ باشد. نمونهٔ آن کارت شناسایی ۵ × ۳ است. نسبت ۳ به‌۵ تقریباً برابر نسبت ۱ به‌τ است.

درهندسه، میانگین زرین، کلید رسم پنج ضلعی منتظم است. عدد τ در رابطه با بسیاری از بازیهای ریاضی، و همگراهای آن در رابطه با بعضی حیله‌های هندسی ظاهرمی‌شوند. شاید رایجترین این حیله‌ها درمورد یك مربع ۸ در۸ است، که به‌نظر می‌رسد، چنانکه درشکل ۹ (الف) نشان داده شده‌است، می‌توان آن را به‌قطعه‌هایی تقسیم کرد و بااین قطعه‌ها یك مستطیل ۵ در ۱۳ تشکیل داد. مساحت این مربع ۶۴ = ۸ × ۸ است، درحالی که مساحت مستطیلی که به‌نظر می‌رسد باقطعات مربع ساخته شده باشد، ۶۵ = ۱۳ × ۵، است. پس مساحت مربع به‌طریقی یك واحد افزایش یافته است.

این معما برحقایق زیراستوار است: همگراهای (۱۵.۳) دارای این ویژگی هستندکه مخرج هرکدام برابر صورت همگرای قبلی است. به‌ویژه داریم،

---

1. Luca Pacioli
2. *Divina Proportione*
3. Leonardo da Vinci



شکل ۹ (الف)

$$\frac{p_۵}{q_۵}=\frac{۸}{۵},\quad \frac{p_۶}{q_۶}=\frac{۱۳}{۸},\quad q_۶=p_۵=۸.$$

اکنون رابطهٔ

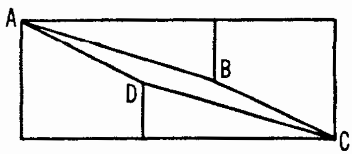
$$p_n q_{n-۱}-p_{n-۱}q_n=(-۱)^n$$

را درنظر بگیرید، که دراین حالت بهازای $n=۶$، داریم

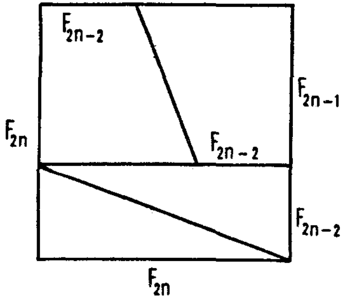
$$۱۳\times ۵-۸\times ۸=۱.$$

$p_۶$ و $q_۵$ را ابعاد مستطیل و $p_۵$ و $q_۶$ $(p_۵=q_۶)$ را ابعاد مربع انتخاب کردهایم، و رابطهٔ فوق بیان می‌کندکه اختلاف مساحت این شکلها تنها یك واحد است.

در واقع، نقطههای A، B، C و D بر یك خط نیستند، بلکه رأسهای یك متوازیالاضلاع $ABCD$ هستند (شکل ۹ (ب) راکه درآن متوازیالاضلاع $ABCD$ بزرگتر از واقع است ببینید) که مساحت آن دقیقاً همان یك واحد «اضافی» است. درمستطیل شکل ۹ (الف)، تفاوت زاویههای منفرجهٔ ADC و ABC با ۱۸۰° کمتر از ۱٫۲۵ درجه است.



شکل ۹ (ب)



شکل ۹ (پ)

به‌طور کلی، اگر عددهای فیبوناتچی را با رابطه‌های

$$F_{۱}=۱, \quad F_{۲}=۱,$$

$$F_k=F_{k-۲}+F_{k-۱}, \quad k>۲$$

تعریف کنیم و اگر مربعی به‌ضلع $F_{۲n}$ را (با اندیس زوج) همچون شکل ۹ (پ) به‌قطعه‌هایی تقسیم کنیم، آن‌گاه می‌توان نشان داد که وقتی این قطعه‌ها را برای ساختن مستطیلی پهلوی‌هم بگذاریم شکافی به‌شکل متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به‌مساحت یك‌واحد وارتفاع $\frac{۱}{\sqrt{F_{۲n}^{۲}+F_{۲n-۲}^{۲}}}$ ظاهر می‌شود. اگر $F_{۲n}$ بزرگ باشد(مثلا، $F_{۲n}=۱۴۴$ یا $F_{۲n-۲}=۵۵$)، شکاف به‌قدری باریك است که در شکل به‌زحمت دیده می‌شود.

۱۱.۳ روشی برای محاسبهٔ لگاریتم اعداد*

دانیل شانکس[1]، درمجله‌ای در زمینهٔ محاسبات عددی[2] روشی برای محاسبهٔ لگاریتم اعداد شرح می‌دهد که به‌دلیل امکان به‌کاربردن کامپیوترهای سریع دراینجا به‌توضیح آن می‌پردازیم.

برای محاسبهٔ $\log_{b_۰} b_۱$، لگاریتم عدد $b_۱$ درمبنای $b_۰$ (که در آن $۱<b_۱<b_۰$)، دودنبالهٔ زیررا محاسبه می‌کنیم: دنبالهٔ

---

* این بخش تاحدی فنی است ومی‌توان بدون از دست دادن رشتهٔ مطالب ازمطالعهٔ آن صرفنظر کرد.

1. Daniel Shanks
2. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, Vol. 8, No. 45, April 1954, pp. 60–64.

$$b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots$$

و دنبالهٔ عددهای صحیح و مثبت

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots,$$

که در آن عددهای n_1، b_2، n_2، b_3، . . . با رابطه‌های زیر تعیین می‌شوند

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}, \qquad b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}},$$

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}, \qquad b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

$$b_k^{n_k} < b_{k-1} < b_k^{n_k+1}, \qquad b_{k+1} = \frac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

بنابراین، ابتدا عدد صحیح n_1 را طوری پیدا می‌کنیم که

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}.$$

این نابرابریها نشان می‌دهند که

$$b_0 = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}}, \tag{۱۷.۳}$$

که در آن $\frac{1}{x_1} < 1$؛ آن‌گاه

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}} \tag{۱۸.۳}$$

را محاسبه می‌کنیم، وعدد صحیح n_2 را که به‌ازای آن

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$$

تعیین می‌کنیم. اگر n_2 عدد موردنظر باشد، آن‌گاه

$$b_1 = b_2^{n_2 + \frac{1}{x_2}}, \qquad x_2 > 1. \tag{۱۹.۳}$$

اکنون روش محاسبه ادامه می‌یابد.

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$$

را محاسبه وعددصحیح n_3 را طوری پیدا می‌کنیم که

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1} ,$$

بنا بر این

$$b_2 = b_3^{n_3 + \frac{1}{x_3}}, \qquad x_3 > 1 ,$$

تا به‌آخر.

برای پی بردن به اینکه در واقع داریم $\log_{b_0} b_1$ را محاسبه می‌کنیم، توجه می‌کنیم که از معادله‌های (۱۷.۳) و (۱۸.۳) داریم

$$b_2 = b_0 b_1^{-n_1} = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}} b_1^{-n_1} = b_1^{\frac{1}{x_1}} ,$$

یا

$$b_1 = b_2^{x_1}$$

ازطرف دیگر، از (۱۹.۳) داریم

$$b_1 = b_2^{n_2 + \frac{1}{x_2}}$$

و بنا بر این می‌توانیم بنویسیم

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2} \cdot$$

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که

$$x_2 = n_3 + \frac{1}{x_3} ,$$

تا به‌آخر. باحل معادلهٔ (۱۷.۳) برحسب b_1 واستفاده ازاین نتایج، داریم

$$b_1 = b_0^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{x_1}}} = b_0^{\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{x_2}}}}$$

یا

$$=b_{۰}^{\frac{۱}{n_{۱}+\frac{۱}{n_{۲}+\frac{۱}{n_{۳}+\cdots}}}},$$

و بنا براین طبق تعریف لگاریتم، داریم

$$\log_{b_{۰}} b_{۱} = \frac{۱}{n_{۱}+\frac{۱}{n_{۲}+\frac{۱}{n_{۳}+\cdots}}}.$$

مثال. $\log_{۱۰}۲$ را محاسبه کنید.

حل. به‌ازای $b_{۰}=۱۰$، $b_{۱}=۲$، داریم

$$۲^{۳} < ۱۰ < ۲^{۴},$$

پس $n_{۱}=۳$ و $b_{۲}=\frac{۱۰}{۲^{۳}}=۱٫۲۵$. با استفاده از جدول توانها، مشاهده می‌کنیم که

$$(۱٫۲۵)^{۳} < ۲ < (۱٫۲۵)^{۴}.$$

بنا براین $n_{۲}=۳$ و $b_{۳}=\frac{۲}{(۱٫۲۵)^{۳}}=۱٫۰۲۴$. محاسبات بعدی طولانیترند ولی آنهارا بایك ماشین حساب می‌توان به‌آسانی انجام داد. مقالهٔ شانکس نتایج زیر را به‌دست می‌دهد:

$b_{۱}=۲$	$n_{۱}=۳$
$b_{۲}=۱٫۲۵$	$n_{۲}=۳$
$b_{۳}=۱٫۰۲۴$	$n_{۳}=۹$
$b_{۴}=۱٫۰۰۹۷۴۱۹۵۸$	$n_{۴}=۲$
$b_{۵}=۱٫۰۰۴۳۳۶۲۷۹$	$n_{۵}=۲$
....	.....

این نتایج نشان می‌دهندکه

$$\log ۲ = \frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۹+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۲+}\cdots = [۰, ۳, ۳, ۹, ۲, ۲, \ldots].$$

حال همگراها را محاسبه می‌کنیم:

i	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
a_i			۰	۳	۳	۹	۲	۲
p_i	۰	۱	۰	۱	۳	۲۸	۵۹	۱۴۶
q_i	۱	۰	۱	۳	۱۰	۹۳	۱۹۶	۴۸۵
c_i			۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۲۸}{۹۳}$	$\frac{۵۹}{۱۹۶}$	$\frac{۱۴۶}{۴۸۵}$

همگرای $c_۶$ تقریب ۰ر۳۰۱۰۳۰۹۳ را به‌دست می‌دهد؛ مقدار $\log ۲$ تا ۱۱ رقم اعشار برابر است با ۰ر۳۰۱۰۲۹۹۹۵۶۶. به‌طور کلی می‌توان نشان‌داد که تعداد رقمهای اعشاری دقیق درهر همگرای $\log ۲$ یکی بیش از همگرای قبلی است.

۴

کسرهای مسلسل دوره‌ای

۱.۴ مقدمه

تاکنون نشان داده‌ایم که در تبدیل به‌کسرمسلسل، عددهای گویا دارای بسط متناهی وعددهای‌گنگ دارای بسط نامتناهی هستند.

در فصل ۳ بیشتر با بسط عددهای گنگ درجهٔ دوم یا اصمهای درجهٔ دوم، یعنی باعددهای گنگ از نوع

$$\frac{P\pm\sqrt{D}}{Q},$$

سروکارداشتیم، که در آن P، Q، D عددهای صحیح‌اند و D مثبت است و مجذور کامل نیست. درتمام مثالهای مورد بحث، بسط این عددها یادوره‌ای محض بود، نظیر بسط $(۱+\sqrt{۱۰})/۳$ که در زیرآمده است، یا از مرحله‌ای به‌بعد دوره‌ای می‌شد، مانند

$$\sqrt{۲}=[۱, ۲, ۲, ۲, \cdots]=[۱, \overline{۲}],$$

$$\sqrt{۱۹}=[۴, \overline{۲, ۱, ۳, ۱, ۲, ۸}],$$

$$\frac{1+\sqrt{10}}{3}=[1, 2, 1, 1, 2, 1, \cdots]=[\overline{1, 2, 1}],$$

که در آنها، مانند گذشته خط روی خارج قسمتهای جزئی حاکی از تکرار بی‌پایان آنهاست. نشان‌دادن اینکه هرکسر مسلسل دوره‌ای محض، یا هرکسری‌که ازمرحله‌ای به‌بعد دوره‌ای است یا معرف یك‌عدد گنگ درجهٔ دوم‌است چندان مشکل نیست. قضیهٔ مشکلتر راکه هرگنگ درجهٔ دوم دارای بسط‌کسر مسلسلی است‌که بعد از مرحلهٔ معینی دوره‌ای است، برای نخستین بار درسال ۱۷۷۵ لاگرانژ اثبات کرد. هدف این فصل ارائهٔ اثبات این قضیه‌هاست. این‌کار در چند مرحله‌عمل خواهد شد.

نخست نشان‌می‌دهیم که یك‌کسرمسلسل دوره‌ای محض، یك عددگنگ درجهٔدوم از نوع خاصی‌را نمایش می‌دهد، کــه گنگ درجهٔ دوم ساده شده نامیده می‌شود؛ در آغاز بخش ۲.۴ مثالی ارائه شده‌است و به‌دنبال آن برهان حالت‌کلی می‌آید.

دربخش ۳.۴ بحثی با تفصیل بیشتردرموردگنگهای درجهٔ دوم ودربخش ۴.۴ بررسی عمیقتری درموردگنگهای درجهٔ دوم ساده‌شده ارائه‌خواهد شد. ازنتیجه‌هایی که دراین بخشها به‌دست می‌آوریم دربخش ۵.۴ برای اثبات اینکه هرگنگ درجهٔ دوم ساده‌شده دارای بسط‌کسر مسلسل دوره‌ای محض است استفاده می‌کنیم. به‌دنبال آن اثبات قضیهٔ لاگرانژ را می‌آوریم مبنی براینکه بسط‌کسر مسلسل هرگنگ درجهٔ دوم ازمرحله‌ای به‌بعد دوره‌ای است، و برعکس، هرکسر مسلسل دوره‌ای معرف یك گنگ درجهٔ دوم است.

این فصل با بحث مختصری دربارهٔ معادلهٔ سیال

$$x^2-Ny^2=1, \qquad (1.4)$$

پایان مــی‌پذیرد که در آن x و y عددهای صحیح مجهول‌اند و N عدد صحیــح معلومی است ومجذورکامل نیست. در سال ۱۶۵۷ فرما[1] ادعا کرد که معادلهٔ (۱.۴) دارای بینهایت جواب است ولی اثباتی ارائه نداد.* در همــان سال لرد برونکر[2] روش‌کلی حل این‌معادله‌را به‌دست‌داد. نخستین بحث کامل معادلهٔ (۱.۴) را لاگرانژ درحدود سال ۱۷۶۶ ارائه داده است. معادلهٔ (۱.۴) معمولاً به معادلهٔ پل[3] مشهور

---

1. Fermat

* درواقع فرما این معادله را برای به‌مبارزه طلبیدن ریاضیدانهای انگلیسی معــاصر خود طرح‌کرده بود. برای اطلاع دربارهٔ تاریخچهٔ‌کامل موضوع، کتاب زیررا ببینید: *Dickson* [4, vol. 2, p. 341].

2. Lord Brouncker 3. Pell

است؛ ولی درحقیقت پل هیچ کارمستقلی دراین موضوع نکرده است.* بسیاری از مؤلفان این معادله‌را معادلهٔ فرما می‌نامند.

درسراسر تاریخ ریاضیات اشاره‌هایی به‌معادله‌های سیال‌ازنوع پل‌شده‌است. جالبترین‌مثال‌دررابطه بامسألهٔ‌مشهورارشمیدس به‌نام «مسألهٔ‌گله» به‌وجود می‌آید.** حل این مسأله مشتمل برهشت مجهول است که هرکدام تعداد یك‌نوع گله‌را نمایش می‌دهد و در معادله‌ها و شرایط معینی صدق می‌کنند. این مسأله را می‌توان به‌معادلهٔ

$$x^۲ - ۴۷۲۹۴۹۴ y^۲ = ۱,$$

خلاصه کرد، که کوچکترین جواب x و y آن به‌ترتیب عددهایی ۴۵ و۴۱ رقمی هستند. کوچکترین جواب مسألهٔ‌گله که متناظر بااین مقادیر x و y است، ازعددهایی باصدها هزار رقم تشکیل شده است. هیچ مدرکی مبنی براینکه پیشینیان به حل این مسأله نزدیك شده‌باشند، در دست نیست. در واقع بعضی از تاریخ‌نویسان در اینکه این مسأله به‌ارشمیدس ربطی داشته باشد شك دارند، درحالی‌که برخی دیگر عقیده دارندکه این مسأله‌را ارشمیدس به‌اراتستن[1] پیشنهادکرده‌است. برای اطلاعات بیشتر کتابهای زیررا ببینید:

Heath [6, p. 121], *Dickson* [4, vol. 2, p. 342].

۲.۴ کسرهای مسلسل دوره‌ای محض

پاره‌ای ازکسرهای مسلسل، مانند

$$\sqrt{۱۱} = [۳, ۳, ۶, ۳, ۶, \cdots] = [۳, \overline{۳, ۶}],$$

تنها بعد ازمرحلهٔ خاصی دوره‌ای‌اند. برخی دیگر، نظیر

$$\sqrt{۱۱} + ۳ = [۶, ۳, ۶, ۳, ۶, \cdots] = [\overline{۶, ۳}],$$

---

* جان‌پل (۱۶۱۱ـ۱۶۸۵) معلم و دانش‌پژوه بزرگی بود. در سیزده سالگی درکالج ترینیتی، کمبریج پذیرفته شد و قبل از بیست سالگی به‌هشت زبان مسلط بود. وی در آمستردام در سالهای ۱۶۴۳ـ۱۶۴۶ و در بردا در سالهای ۱۶۴۶ـ۱۶۵۲ استاد ریاضی بود و درسالهای ۱۶۵۴ـ۱۶۵۸ نمایندگی کرامول در سوییس را داشت. او در سال ۱۶۶۳ به‌عضویت انجمن سلطنتی انتخاب شد.

** برای‌توضیح دربارهٔ مسألهٔ گله‌کتاب زیررا ببینید:

The World of Mathematics by James R. Newman, New York: Simon and Schuster, 1956, pp. 197–198.

1. Eratosthenes

از همان آغاز دوره‌ای‌اند و دوره‌ای محض نامیده می‌شوند. عددهایی که با کسرهای مسلسل دوره‌ای محض نمایش داده‌می‌شوند، گنگهای درجهٔدوم نوع‌خاصی هستند، واکنون بررسی می‌کنیم که چگونه می‌توان این‌عددهارا ازسایرگنگهای‌درجهٔ دوم تشخیص داد.

(الف) یك مثال عددی. کسرمسلسل دوره‌ای محض

$$\alpha=[۳, ۱, ۲, ۳, ۱, ۲, \cdots]=[\overline{۳, ۱, ۲}]$$

را درنظر بگیرید. می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha=۳+\frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{\alpha}. \qquad (۲.۴)$$

اکنون لازم است نتیجه‌ای‌راکه دربخش ۷.۳ مطالعه‌کردیم، یادآوری کنیم. در آن بخش نشان دادیم‌که اگر

$$\alpha=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\cdots\frac{۱}{+a_n+}\frac{۱}{\alpha_{n+۱}}, \qquad (۳.۴)$$

که درآن

$$\alpha_{n+۱}=a_{n+۱}+\frac{۱}{a_{n+۲}+}\cdots, \qquad (۴.۴)$$

آن‌گاه

$$\alpha=\frac{\alpha_{n+۱}p_n+p_{n-۱}}{\alpha_{n+۱}q_n+q_{n-۱}}, \qquad (۵.۴)$$

که درآن $\frac{p_{n-۱}}{q_{n-۱}}$ و $\frac{p_n}{q_n}$ به‌ترتیب همگراهای متناظر باخارج قسمتهای جزئی $a_{n-۱}$ و a_n هستند. درواقع، (۵.۴) نشان می‌دهد که می‌توانیم (۳.۴) را به عنوان یك کسر مسلسل متناهی درنظر بگیریم‌ودرمحاسبهٔα، می‌توانیم $\alpha_{n+۱}$ را یك‌خارج قسمت‌جزئی مجاز تلقی کنیم.

درمورد کسرمسلسل دوره‌ای محض

$$\alpha=[\overline{a_۱, a_۲, \cdots, a_n}]=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots\frac{۱}{+a_n+}\frac{۱}{\alpha_{n+۱}},$$

مشاهده می‌کنیم که

$$\alpha_{n+1}=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots=\alpha,$$

و بنا براین معادلهٔ (۵.۴) نشان می‌دهد که α را می‌توان ازمعادلهٔ

$$\alpha=\frac{\alpha p_n+p_{n-1}}{\alpha q_n+q_{n-1}} \tag{۶.۴}$$

محاسبه کرد.

اکنون (۶.۴) را در حالت خاص (۲.۴)، با استفاده از $a_1=3$، $a_2=1$، $a_3=2$ و $\alpha=[\overline{3,1,2}]$ اعمال می‌کنیم. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم

i	-1	0	1	2	3	4
a_i			3	1	2	α
p_i	0	1	3	4	11	$11\alpha+4$
q_i	1	0	1	1	3	$3\alpha+1$

بنا براین، به‌دست می‌آوریم

$$\alpha=\frac{\alpha p_3+p_2}{\alpha q_3+q_2}=\frac{11\alpha+4}{3\alpha+1}\,.$$

که از آن به‌معادلهٔ درجهٔ دوم

$$3\alpha^2-10\alpha-4=0\,, \tag{۷.۴}$$

می‌رسیم که ازساده کردن معادلهٔ (۲.۴) نیز به‌دست می‌آید.

اکنون عدد β را که از وارونه کردن ترتیب دورهٔ گردش α به‌دست می‌آید، یعنی،

$$\beta=[\overline{2,1,3}]=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{\beta}$$

را درنظر می‌گیریم. بااعمال (۶.۴) در β، به‌دست می‌آوریم

$$\beta=\frac{۱۱\beta+۳}{۴\beta+۱}; \qquad (۸.۴)$$

که به‌معادلهٔ درجهٔ دوم

$$۴\beta^{۲}-۱۰\beta-۳=۰ \qquad (۹.۴)$$

منجر می‌شود. معادلهٔ (۹.۴) را می‌توان به‌صورت

$$۳\left(-\frac{۱}{\beta}\right)^{۲}-۱۰\left(-\frac{۱}{\beta}\right)-۴=۰ \qquad (۱۰.۴)$$

نوشت. بامقایسهٔ (۷.۴) و (۱۰.۴) مشاهده‌می‌کنیم که جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم

$$۳x^{۲}-۱۰x-۴=۰ \qquad (۱۱.۴)$$

$x=\alpha$ و $x=-\frac{۱}{\beta}$ هستند. این ریشه‌ها نمی‌توانند برابر باشند، چون α و β مثبت‌اند، بنابراین α و $-\frac{۱}{\beta}$ علامتهای مختلف دارند. به‌علاوه، $\beta>۱$، و بنابراین $-۱<-\frac{۱}{\beta}<۰$. این نشان می‌دهد که معادلهٔ درجهٔ دوم (۷.۴) یا (۱۱.۴) دارای ریشهٔ مثبت α و ریشهٔ منفی $\alpha'=-\frac{۱}{\beta}$ است که در آن $-۱<\alpha'<۰$.
مقادیرعددی α و α' ازحل‌معادلهٔ درجهٔ دوم (۷.۴) به‌آسانی به‌دست‌می‌آیند:

$$\alpha=\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۳}, \qquad \alpha'=\frac{۵-\sqrt{۳۷}}{۳}$$

و β، ریشهٔ مثبت (۹.۴) برابراست با

$$\beta=\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۴},$$

و بنابراین

$$-\frac{۱}{\beta}=\frac{-۴}{۵+\sqrt{۳۷}}=\frac{-۴}{۵+\sqrt{۳۷}}\cdot\frac{۵-\sqrt{۳۷}}{۵-\sqrt{۳۷}}=\frac{۵-\sqrt{۳۷}}{۳},$$

که نشان می‌دهد $\frac{۱}{\beta}$ـــ با α' برابـر است. به عـلاوه تا سه رقم اعشار داریـم $۱>\alpha=۳٫۶۹۴$ و $\alpha'=-۰٫۳۶۱$، پس $-۱<\alpha'<۰$. واضح است که کسر مسلسل دوره‌ای محض α گنگ درجهٔ دوم است.

(ب) حالت کلی. اکنون قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۱.۴. اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n عددهای صحیح مثبت باشند، کسر مسلسل دوره‌ای محض

$$\alpha=[\overline{a_۱, a_۲, \cdots, a_n}]$$

بزرگتر از ۱ و ریشهٔ مثبت معادلهٔ درجهٔ دومی با ضریبهای صحیح است. به‌علاوه، اگر $\beta=[\overline{a_n, a_{n-۱}, \cdots, a_۱}]$ کسر مسلسلی باشد کـه از وارونه کردن ترتیب دورهٔ گردش α به دست آیـد، آن‌گاه $\alpha'=-\frac{۱}{\beta}$ ریشهٔ دوم، یا ریشهٔ مزدوج معادلهٔ درجهٔ دومی است که α درآن صدق می‌کند، و α' بین ۱ــ و ۰ واقع است.

توجه کنید که نتیجهٔ $-۱<\alpha'<۰$ در این قضیه مهم است.

اثبات. برای اثبات به‌دو نتیجه‌ای که درمسألهٔ ۷، مجموعه مسأله‌های ۳ بخش ۵.۱ آمده‌اند، ودراینجا تکرارمی‌کنیم، نیاز داریم: اگر

$$\frac{p_n}{q_n}=[a_۱, a_۲, \cdots, a_{n-۱}, a_n], \qquad (۱۲.۴)$$

آن‌گاه

$$\frac{p_n}{p_{n-۱}}=[a_n, a_{n-۱}, \cdots, a_۲, a_۱]=\frac{p'_n}{q'_n} \qquad (۱۳.۴)$$

و

$$\frac{q_n}{q_{n-۱}}=[a_n, a_{n-۱}, \cdots, a_۳, a_۲]=\frac{p'_{n-۱}}{q'_{n-۱}}, \qquad (۱۴.۴)$$

که درآن $\frac{p'_n}{q'_n}$ و $\frac{p'_{n-۱}}{q'_{n-۱}}$ به‌ترتیب نمایانگر همگراهای nام و $(n-۱)$ام کسر مسلسل $[a_n, a_{n-۱}, \cdots, a_۲, a_۱]$ هستند. چون صورت ومخرج هرهمگرا نسبت

به‌هم اول‌اند، نتیجه می‌شود که

$$p_n' = p_n, \quad p_{n-1}' = q_n,$$
$$q_n' = p_{n-1}, \quad q_{n-1}' = q_{n-1}' . \qquad (۱۵.۴)$$

چون α دوره‌ای محض است، می‌توانیم آن را به‌صورت

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots + \frac{1}{a_n +} \frac{1}{\alpha},$$

وهمچنین بنا بر (۶.۴)، به‌صورت

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}, \qquad (۱۶.۴)$$

بنویسیم، که‌در آن $\frac{p_n}{q_n}$ و $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ به‌ترتیب همگراهای nام و$(n-1)$ام کسر مسلسل $[\overline{a_1, a_2, \ldots, a_n}]$ هستند. معادلهٔ (۱۶.۴) بامعادلهٔ درجهٔ دوم

$$q_n \alpha^2 - (p_n - q_{n-1}) - p_{n-1} = 0 \qquad (۱۷.۴)$$

هم‌ارزاست.

با وارونه‌کردن دورهٔ‌گردش α، به‌دست می‌آوریم

$$\beta = a_n + \frac{1}{a_{n-1} +} \cdots + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{\beta},$$

وباز بنا بر (۶.۴) مشاهده می‌کنیم که

$$\beta = \frac{\beta p_n' + p_{n-1}'}{\beta q_n' + q_{n-1}'} \qquad (۱۸.۴)$$

که در آن $\frac{p_n'}{q_n'}$ و $\frac{p_{n-1}'}{q_{n-1}'}$ به ترتیب همگراهای nام و $(n-1)$ام کسر مسلسل $[\overline{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1}]$ هستند. با استفاده از نتایج (۱۵.۴)، می‌توانیم (۱۸.۴) را به

$$\beta=\frac{\beta p_n+q_n}{\beta p_{n-1}+q_{n-1}}$$

تبدیل کنیم. پس β درمعادلهٔ

$$p_{n-1}\beta^2-(p_n-q_{n-1})\beta-q_n=0,$$

که هم‌ارز معادلهٔ

$$q_n\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2-\left(p_n-q_{n-1}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)-p_{n-1}=0 \qquad (19.4)$$

است، صدق می‌کند. با مقایسهٔ (۱۷.۴) و (۱۹.۴) نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ درجهٔ دوم

$$q_nx^2-(p_n-q_{n-1})x-p_{n-1}=0$$

دارای دوریشه است: ریشهٔ $x_1=\alpha$ و ریشهٔ $x_2=-\frac{1}{\beta}$. اکنون β کسر مسلسل دوره‌ای‌محض $[\overline{a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1}]$ است، که در آن a_n، a_{n-1}، . . . ، a_1 همه عددهای‌مثبت‌اند. بنا بر این‌داریم $\beta>1$، $0<\frac{1}{\beta}<1$، وهمچنین $-1<-\frac{1}{\beta}<0$.
به‌عبارت‌دیگر، ریشهٔ $\alpha'=-\frac{1}{\beta}$ بین ۱ — و ۰ واقع است. این مطلب اثبات قضیه را کامل می‌کند.

عکس قضیهٔ ۱.۴ نیز صحیح است (ودر بخش ۵.۴ اثبات خواهد شد)، یعنی اگر $\alpha>1$ عددگنگ درجهٔدوم باشد، وبنا بر این دریك معادلهٔ درجهٔ دوم باضریبهای صحیح صدق کند، و اگرریشهٔ دوم این معادله، α'، بین ۱ — و ۰ قرار داشته باشد، آن‌گاه بسط کسرمسلسل α دوره‌ای محض است، این نکتهٔ مهم،گرچه درکارهای‌اولیهٔ لاگرانژ به‌طورضمنی وجود داشت، نخستین بار گالوا[1] درسال ۱۸۲۸ آنرا اثبات کرد. مطلبی‌که باید روی‌آن تأکید شود؛ این‌است‌که با این دو سه شرط روی α و α' عددهایی که بسط کسر مسلسل دوره‌ای محض دارند، به‌طورکامل مشخص می‌شوند.

کسرهای مسلسل سادهٔ دوره‌ای‌را می‌توان به‌صورت زیر تقسیم کرد:

(۱) کسرهایی‌که جزء غیرتکراری ندارند، مانند

1. Galois

$$\alpha=[\overline{a_۱, a_۲, \cdots, a_n}].$$

(۲) کسرهایی که تنها خارج قسمت $a_۱$ جزء غیر تکراری آنهاست، مانند

$$\alpha=[a_۱, \overline{b_۱, b_۲, \cdots, b_n}].$$

(۳) کسرهایی که دست‌کم دارای دو خارج‌قسمت غیرتکراری‌هستند، مانند

$$\alpha=[a_۱, a_۲, a_۳, \overline{b_۱, b_۲, \cdots, b_n}].$$

درمورد کسرهای نوع (۱) ثابت کردیم که α گنگ درجهٔ‌دومی‌است که دریك معادلهٔ درجهٔ دوم باضریبهای صحیح صدق می‌کند وریشهٔ دوم این معادله، یعنی α'، بین ۱ — و ٥ قراردارد. درموارد (۲) و (۳) نیزمی‌توان ثابت کردکه α گنگ درجهٔ دومی‌است که دریك معادلهٔ درجهٔ دوم باضریبهای صحیح صدق می‌کند، اما درحالت (۲) ریشهٔ دوم این معادله یعنی α'، یاکوچکتر از ۱ — یا بزرگتر از ٥ است اما در حالت (۳) ریشهٔ دوم لزوماً بزرگتر از ٥ است. این دو حکم اخیررا اثبات نخواهیم کرد.

مجموعه مسأله‌های ۱۴

۱. اگر $\alpha=[\overline{۲, ۶}]$ و $\beta=[\overline{۶, ۲}]$،

(الف) بامحاسبهٔ عددی، تحقیق کنیدکه $\alpha>۱$ و $\beta>۱$،

(ب) معادله‌ای راکه α یك ریشهٔ آن است، پیداکنید.

(پ) نشان دهید که ریشهٔ دیگر این معادله، α'، در رابطهٔ $\alpha'=-\frac{۱}{\beta}$، صدق می‌کند وبین ۱ — و ٥ است.

۲. بامحاسبهٔ عددی، تحقیق کنیدکه

(الف) $\alpha=[\overline{۱, ۲, ۳}]$ درمعادلهٔ‌درجهٔ دومی‌که، ریشهٔ دیگر آن، α'، بین ۱ — و ٥ قرار ندارد، صدق می‌کند.

(ب) $\gamma=[۱, ۲, \overline{۳}]$ درمعادلهٔ درجهٔ دومی‌که، γ' ریشهٔ دیگر آن مثبت است، صدق می‌کند.

۳.۴ گنگهای درجهٔ دوم

دراین بخش عددهایی به‌صورت

$$A+B\sqrt{D}$$

را بررسی خواهیم کرد، که در آنها A و B عددهای گویای دلخواه‌اند و D عددی صحیح،مثبت‌وثابت‌است ومربع‌کامل‌نیست، ازاین‌رو $\sqrt{D}$ و بنابراین $A+B\sqrt{D}$ گنگ است.

نخست مشاهده می‌کنیم که، به‌ازای عددصحیح ومثبت وثابت D که مربع‌کامل نیست، عدد $A+B\sqrt{D}$ را، بجزصورتهای پیش‌پاافتاده‌ای نظیر

$$\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۳}\sqrt{۵}=\frac{۶}{۴}+\frac{۲}{۶}\sqrt{۵},$$

تنها به‌یك طریق می‌توان نوشت. به‌عبارت دیگر،

$$A_۱+B_۱\sqrt{D}=A_۲+B_۲\sqrt{D}$$

اگر وتنها اگر $A_۱=A_۲$ و $B_۱=B_۲$. برای اثبات این مطلب، معادله را به‌صورت

$$A_۱-A_۲=(B_۲-B_۱)\sqrt{D}$$

می‌نویسیم. اگر $B_۲\neq B_۱$، آن‌گاه

$$\sqrt{D}=\frac{A_۱-A_۲}{B_۲-B_۱}$$

گویا خواهدبودکه خلاف فرض است.از این‌رو فرض $B_۱\neq B_۲$ به‌تناقض‌می‌انجامد، و نتیجه مـی‌گیریم که $B_۱=B_۲$، وبنابراین $A_۱-A_۲=۰$ یا $A_۱=A_۲$.

حال، ادعا می‌کنیم که وقتی این نوع عددها به‌وسیلهٔ اعمال مقدمـاتی حساب (جمع، تفریق، ضرب وتقسیم) ترکیب‌شوند، نتیجه عددی‌است ازهمان نوع. اثبات این ویژگیها را به‌خواننده واگذار می‌کنیم (مسألهٔ ۱ از مجموعه مسأله‌هـای ۱۵ را ببینید)، ولی به‌این نکته‌توجه‌کنیدکه«عددهای به‌صورت $A+B\sqrt{D}$»حالت $B=۰$، یعنی عددهای گویا را دربردارند. البته در بحث گنگهـای درجهٔ دوم فرض می‌شود

$B\neq \circ$، زیرا درغیراین‌صورت عددگویاست و گنگ نیست.

اینک ثابت‌می‌کنیم که هرعدد $x=A+B\sqrt{D}$، که A و $B\neq\circ$ گویا هستند و D عدد صحیح و مثبت است و مربع کامل نیست، ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دومی چون $ax^{۲}+bx+c=\circ$ است، که درآن ضریبهای $a>\circ$، b، c عددهای صحیح‌اند وشرط $b^{۲}-۴ac>\circ$ برقراراست. روشن‌است که اگر $a=\circ$، آن‌گاه $x=-c/b$ گویا خواهد شد و بنابراین نمی‌تواند عددگنگ $A+B\sqrt{D}$ باشد.

به‌منظوراثبات عبارت ایرانیك دربالایادآوری می‌کنیم‌که هرمعادلهٔ درجهٔ‌دوم

$$ax^{۲}+bx+c=\circ\ ,\quad a>\circ,$$

دارای ریشه‌های

$$x=r_{۱}=-\frac{b}{۲a}+\frac{\sqrt{b^{۲}+۴ac}}{۲a}=A+B\sqrt{D},$$

$$x=r_{۲}=-\frac{b}{۲a}-\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}=A-B\sqrt{D}\ ,$$

است، که درآنها $D=b^{۲}-۴ac$، ودرنتیجه

$$r_{۱}+r_{۲}=-\frac{b}{a}=۲A,$$

$$r_{۱}r_{۲}=\frac{c}{a}=A^{۲}-B^{۲}D.$$

درنتیجه، چون $a\neq\circ$، می‌توانیم $ax^{۲}+bx+c=\circ$ را به‌صورت

$$x^{۲}-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=\circ\ ,$$

یا

$$x^{۲}-۲Ax+(A^{۲}-B^{۲}D)=\circ$$

بنویسیم.

برعکس، بامحاسبهٔ مستقیم، دیده می‌شود که

$$x = A + B\sqrt{D}$$

(و $x = A - B\sqrt{D}$) درآخرین معادله صدق می‌کنند:

$$(A \pm B\sqrt{D})^۲ - ۲A(A \pm B\sqrt{D}) + (A^۲ - B^۲D)$$
$$= A^۲ \pm ۲AB\sqrt{D} + B^۲D - ۲A^۲ \mp ۲AB\sqrt{D} + A^۲ - B^۲D = ۰ .$$

ضریبهای معادلهٔ $x^۲ - ۲Ax + (A^۲ - B^۲D) = ۰$ که $A + B\sqrt{D}$ و $A - B\sqrt{D}$ در آن صدق می‌کنند، لزوماً عددهای صحیح نیستند، اما اگر آن‌را در a، مخرج مشترك عددهای گویای $۲A$ و $A^۲ - B^۲D$ ضرب کنیم، معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^۲ + bx + c = ۰$$

را به‌دست می‌آوریم که هر سه‌ضریب آن، $a > ۰$، $b = -۲aA$ و $c = a(A^۲ - B^۲D)$، عددهای صحیح‌اند.

درپایان، مبین $b^۲ - ۴ac$ معادلهٔ اخیرمثبت است؛ زیرا داریم

$$b^۲ - ۴ac = (-۲aA)^۲ - ۴a^۲(A^۲ - B^۲D) = ۴a^۲B^۲D > ۰ ,$$

چون D مثبت فرض‌شده بود. همچنین توجه کنید که $b^۲ - ۴ac$ مربع کامل نیست.

بحث فوق ما را به‌تعریف دقیق یك گنگ درجهٔ دوم یا اصم درجهٔ دوم رهنمون می‌سازد؛ وآن عددی است که دریك معادلهٔ درجهٔ دوم که ضریبهای آن صحیح‌اند و مبین آن مثبت است ولی مربع کامل نیست، صدق می‌کند. بنابراین، طبق‌این تعریف، عددهای $A + B\sqrt{D}$ که با آنها سروکارداشتیم باشرط $B \neq ۰$ همگی اصمهای‌درجهٔ دوم هستند.

اصم‌درجهٔ دوم $A + B\sqrt{D}$، $B \neq ۰$، در یک و تنها یك معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ که در آن a و b و c عامل مشترکی ندارند، صدق می‌کند. زیرا، اگر $x = A + B\sqrt{D}$ ریشهٔ

$$g_۱(x) = a_۱x^۲ + b_۱x + c_۱ = ۰ ,$$

ونیز ریشهٔ

$$g_۲(x) = a_۲x^۲ + b_۲x + c_۲ = ۰ ,$$

باشد، آن‌گاه ریشهٔ

$$a_2g_1(x)-a_1g_2(x)=(a_2b_1-a_1b_2)x+(a_2c_1-a_1c_2)=0$$

نیزخواهد بود. اکنون اگر $a_2b_1-a_1b_2\neq 0$، آن‌گاه این معادله نتیجه می‌دهد که

$$x=-\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}$$

گویاست، که خلاف فرض گنگ بودن x است. بنابراین دراین‌حالت $x=A+B\sqrt{D}$ نمی‌تواند درهردو معادله صدق کند. ازطرف دیگر، اگر $a_2b_1-a_1b_2=0$، آن‌گاه معادلهٔ

$$(a_2b_1-a_1b_2)x+(a_2c_1-a_1c_2)=0$$

نتیجه می‌دهد $a_2c_1-a_1c_2=0$، وازاین‌رو

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}=k\,,$$

درنتیجه $a_2=ka_1$، $b_2=kb_1$ و $c_2=kc_1$، درواقع‌دومعادلهٔدرجهٔ دوم $g_1(x)=0$ و $g_2(x)=0$ هم‌ارزند، یکی صرفاً مضرب ثابتی ازدیگری است.

هر گنگ درجهٔ دوم

$$\alpha=A+B\sqrt{D}$$

دارای مزدوج

$$\alpha'=A-B\sqrt{D}$$

است، که صرفاً ازتغییر علامت B، ضریب $\sqrt{D}$، به‌دست می‌آید. این تعریف چند نتیجهٔ مفید دارد:

۰۱ اگر α درمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، صدق کند α' هم در آن صدق می‌کند. **(چرا؟)**

۰۲ مزدوج مزدوج عدد گنگ درجهٔ دوم α برابر α است. این مطلب مستقیماً از تعریف مزدوج یا ازنتیجهٔ ۱، نتیجه‌می‌شود؛ زیرا یک‌معادلهٔ درجهٔ دوم تنهادارای دو ریشه است.

۰۳ مزدوج مجموع، تفاضل، حاصلضرب، یا خارج قسمت دو اصم درجهٔ دوم α_1 و

α_2 به‌ترتیب برابر است بامجموع، تفاضل، حاصلضرب یاخارج‌قسمت مزدوجهای آنها. به‌صورت نمادی داریم:

$$(\alpha_1+\alpha_2)'=\alpha_1'+\alpha_2',$$

$$(\alpha_1-\alpha_2)'=\alpha_1'-\alpha_2',$$

$$(\alpha_1\cdot\alpha_2)'=\alpha_1'\cdot\alpha_2',$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)'=\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}$$

نخستین ادعا را اثبات وبقیه‌را به‌عنوان مسأله رها می‌کنیم. بنابراین اگر

$$\alpha_1=A_1+B_1\sqrt{D} \quad \text{و} \quad \alpha_2=A_2+B_2\sqrt{D}$$

آن‌گاه مزدوج مجموع برابراست با

$$(\alpha_1+\alpha_2)'=[(A_1+A_2)+(B_1+B_2)\sqrt{D}]'$$
$$=(A_1+A_2)-(B_1+B_2)\sqrt{D}.$$

ازطرف دیگر، مجموع مزدوجها برابراست با

$$\alpha_1'+\alpha_2'=(A_1+B_1\sqrt{D})'+(A_2+B_2\sqrt{D})'$$
$$=(A_1-B_1\sqrt{D})+(A_2-B_2\sqrt{D})$$
$$=(A_1+A_2)-(B_1+B_2)\sqrt{D},$$

واز مقایسهٔ دونتیجهٔ فوق مشاهده می‌کنیم که

$$(\alpha_1+\alpha_2)'=\alpha_1'+\alpha_2'.$$

مجموعه مسأله‌های ۱۵

۱. نشان دهیدکه اگر $\alpha_1=A_1+B_1\sqrt{D}$، $\alpha_2=A_2+B_2\sqrt{D}$ (که در آنها A_1، A_2، B_1، B_2 عددهای گویا هستند و D عدد صحیح مثبت است ومربع کامل

نیست)، آن‌گاه هر یك از عددهای $\alpha_1+\alpha_2$، $\alpha_1-\alpha_2$، $\alpha_1\cdot\alpha_2$ و $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ($\alpha_2\neq 0$) را می‌توان به‌صورت $A+B\sqrt{D}$، که در آن A و B گویا هستند، بیان کرد.

۲. عددهای α_1 و α_2 مسألهٔ ۱ را در نظر بگیرید و مزدوج α را α' بنامید، نشان دهید که

$$(\alpha_1-\alpha_2)'=\alpha_1'-\alpha_2', \quad (\alpha_1\cdot\alpha_2)'=\alpha_1'\cdot\alpha_2' \text{ و } \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)'=\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}$$

۳. اگر $A+BC\sqrt{M}+C\sqrt{N}=0$ و اگر A، B، C گویا باشند و M و N عددهای صحیح مثبت باشند و مربع کامل نباشند، چنان‌که $\dfrac{\sqrt{M}}{\sqrt{N}}$ گویا نباشد، ثابت کنید که $A=B=C=0$.

۴.۴ گنگهای درجهٔ دوم ساده‌شده

معادلهٔ درجهٔ دوم

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0, \quad a>0,$$

که در آن a، b، c عددهای صحیح‌اند، دارای ریشه‌های

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{P+\sqrt{D}}{Q}, \qquad (۲۰.۴)$$

و

$$\alpha'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}, \qquad (۲۱.۴)$$

است، که در آن

$$P=-b, \quad D=b^2-4ac, \quad Q=2a>0, \qquad (۲۲.۴)$$

عددهای صحیح هستند. اگر فرض کنیم که $D>0$ مربع کامل نیست، آن‌گاه ریشه‌های α و α' اصمهای درجهٔ دوم به‌صورت $A\pm B\sqrt{D}$ هستند، که در آن $A=\dfrac{P}{Q}$ و

$B=\frac{۱}{Q}$ عددهای گویا می‌باشند.

با این فرضها، گنگ درجهٔ دوم α که در (۲۰.۴) آمده است، ساده‌شده نامیده می‌شود اگر α بزرگتر از ۱ باشد واگر مزدوج آن α'، که‌در (۲۱.۴) آمده است، بین ۱− و ۰ قرار گیرد. این مطالب در درك عمیقتر شکل و ویژگیهای گنگهای درجهٔ دوم ساده شده دارای اهمیت‌است. در بقیهٔ این فصل، P، Q و D همان تعریف(۲۲.۴)را خواهند داشت.

اکنون، فرض کنید عدد α که در(۲۰.۴) آمده‌است،گنگ درجهٔدوم ساده‌شده است، یعنی

$$\alpha=\frac{P+\sqrt{D}}{Q}>۱, \qquad -۱<\alpha'=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}<۰$$

شرطهای $\alpha>۱$ و $\alpha'>-۱$ نتیجه می‌دهند که $\alpha+\alpha'>۰$، یا

$$\frac{P+\sqrt{D}}{Q}+\frac{P-\sqrt{D}}{Q}=\frac{۲P}{Q}>۰$$

وچون $Q>۰$، نتیجه می‌گیریم که $P>۰$. همچنین از

$$\alpha'=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}<۰, \qquad Q>۰$$

نتیجه می‌شود که $P-\sqrt{D}<۰$ یا $۰<P<\sqrt{D}$. نابرابری $\alpha>۱$ نتیجه می‌دهد که $P+\sqrt{D}>Q$؛ و نابرابری $\alpha'>-۱$ نشان می‌دهد که $P-\sqrt{D}>-Q$، یا $\sqrt{D}-P<Q$. سرانجام مشاهده می‌کنیم که

$$P^۲-D=(-b)^۲-(b^۲-۴ac)=۴ac=۲c\times Q.$$

تاکنون نشان داده‌ایم که اگر α یك گنگ درجهٔ دوم ساده شده به‌صورت (۲۰.۴) باشد، آن‌گاه عددهای صحیح P و Q، درشرطهای

$$۰<P<\sqrt{D} \text{ و } \sqrt{D}-P<Q<\sqrt{D}+P<۲\sqrt{D} \qquad (۲۳.۴)$$

صدق می‌کنند.

تاکنون دلیلی برای معرفی مفهوم اصمهای درجهٔ دوم ساده‌شده بیان‌نکرده‌ایم.

هر چند که این مطلب یك مفهوم بنیادی در نظریهٔ اعداد است، و با نظریهٔ صورتهای درجهٔ دوم ساده‌شده رابطهٔ نزدیك دارد. برای ما در اینجا، اهمیت این مطلب در این است که به‌ازای هر D تنها تعدادی متناهی عدد اصم درجهٔ دوم به‌صورت (۲۰.۴) وجود دارد. این مطلب مستقیماً از نابرابریهای (۲۳.۴) نتیجه می‌شود؛ زیرا برای یك عدد مفروض D، تنها تعـدادی متناهی عدد صحیـح و مثبت P و Q وجود دارد که $P<\sqrt{D}$ و $Q<۲\sqrt{D}$.

آیا ممکن است که به‌ازای یك عدد مفروض D هیچ اصم درجـهٔ دوم ساده شده‌ای به‌صورت $(P+\sqrt{D})/Q$ وجود نداشته باشد؟ اگر چنین باشد، ممکن است دربارهٔ مجموعه‌ای تهی از اصمهای درجهٔ دوم ساده‌شده صحبت کنیم. اما به‌ازای هر $D>۱$ مفروض که مربع کامل نباشد، همواره دست‌کم یك اصم درجهٔ دوم ساده‌شدهٔ وابسته به‌آن به‌صورت

$$\alpha=\lambda+\sqrt{D}$$

وجود دارد، که درآن λ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $\sqrt{D}$ است. با این λ، روشن است که عدد $\alpha=\lambda+\sqrt{D}$ بزرگتر از ۱ است ومزدوج آن، $\alpha'=\lambda-\sqrt{D}$، در $-۱<\alpha'<۰$ صدق می‌کند. معادلهٔ درجهٔ دومی که α و α' در آن صـدق می‌کنند عبارت است از

$$x^۲-۲\lambda x+\lambda^۲-D=۰\ .$$

لازم است که نتیجهٔ زیر را داشته باشیم: اگر α یك اصم درجهٔ دوم ساده‌شده باشد، می‌توان آن‌را به‌صورت

$$\alpha=a_۱+\frac{۱}{\alpha_۱},$$

بیان کرد که در آن $a_۱$ بزرگترین عـدد صحیح کوچکتر از α و $\alpha_۱$ مجدداً یك اصم درجهٔ دوم ساده‌شده است.

به‌منظور اثبات این نتیجه، فرض کنید که اصم درجهٔ دوم ساده‌شدهٔ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\frac{P+\sqrt{D}}{Q}$$

ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، کـه در آن a، b، c عددهـای

صحیح‌اند، $a>0$، $P=-b$، $Q=2a$ و $D=b^2-4ac>0$ مربع کامل نیست؛ (۲۲.۴) را ببینید. α را به صورت $\alpha=a_1+\frac{1}{\alpha_1}$ می‌نویسیم، که در آن a_1 بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از α است. روشن است که $\alpha=a_1+\frac{1}{\alpha_1}$ درمعادلهٔ درجهٔ دوم

$$a\left(a_1+\frac{1}{\alpha_1}\right)^2+b\left(\alpha_1+\frac{1}{\alpha_1}\right)+c=0,$$

یا

$$(aa_1^2+ba_1+c)\alpha_1^2+(2aa_1+b)\alpha_1+a=0$$

صدق می‌کند. با حل این معادله برحسب α_1، به‌دست می‌آوریم

$$\alpha_1=\frac{P_1+\sqrt{D_1}}{Q_1},$$

که در آن داریم

$$P_1=2aa_1+b, \quad Q=-2(aa_1^2+ba_1+c),$$

و

$$D_1=(2aa_1+b)^2-4a(aa_1^2+ba_1+c)=b^2-4ac=D.$$

این عبارتها صورت صریح α_1 را به‌دست می‌دهند. همچنین روشن است که P_1، Q_1 و $D_1=D$ عددهای صحیح‌اند و جزء گنگ

$$\alpha_1=\frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1}$$

با جزء گنگ α، یعنی با $\sqrt{D}$، برابر است.

اکنون نشان می‌دهیم که α_1 یك اصم درجهٔ دوم ساده‌شده است. برای این منظور، یادآوری می‌کنیم که a_1 بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از α است؛ بنابراین $1>\frac{1}{\alpha_1}>0$، پس $\alpha_1>1$، واین خواستهٔ ماست. تنهامطلبی که باقی‌می‌ماندا ثبات $-1<\alpha_1'<0$ است. از حل معادلهٔ $\alpha=a_1+\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)$ برحسب α_1 و باپیدا

کردن مزدوج عدد حاصل به‌دست می‌آوریم

$$\alpha_1{}' = \left(\frac{1}{\alpha - a_1}\right)' = \frac{1}{\alpha' - a_1} \cdot$$

درنتیجه

$$-\frac{1}{\alpha_1'} = a_1 - \alpha' > 1 \text{ ,}$$

زیرا $a_1 \geqslant 1$ و طبق فرض $-1 < \alpha' < 0$، درنتیجه $1 > -\alpha_1' > 0$ یا $0 > \alpha_1' > -1$. ازاین‌رو α_1 یك اصم درجهٔ دوم ساده‌شده است ودرنتیجه می‌توان درنابرابریهای (۲۳.۴) به‌جای P، Q و D مقادیر P_1، Q_1 و $D_1 = D$ را گذاشت.

درپایان، ثابت می‌کنیم که اگر α یك گنگ درجهٔ دوم ساده‌شده باشد، آن‌گاه وابستهٔ آن $\beta = -\frac{1}{\alpha}$ نیز یك گنگ درجهٔ دوم ساده‌شده است، زیرا نابرابریهای $\alpha > 1$ و $-1 < \alpha' < 0$ نتیجه می‌دهند که $\beta > 1$ و $\beta' = -\frac{1}{\alpha'}$ بین ۱ — و ۰ قرار دارد.

مجموعه مسأله‌های ۱۶

۱. نشان دهید که اگر $\alpha = \frac{1}{3}(5 + \sqrt{37})$ به‌صورت $\alpha = a_1 + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)$ بیان‌شود، که درآن a_1 بزرگترین عدد صحیح کوچکتراز α است، آن‌گاه α_1 گنگ درجهٔ دوم ساده‌شده است.

۲. نشان دهید برای اینکه α [تعریف شده در (۲۰.۴)] گنگ درجهٔ دوم ساده‌شده باشد، شرطهای (۲۳.۴) لازم وکافی‌هستند. به‌عبارت‌دیگر ثابت کنید که ازشرطهای (۲۳.۴) رابطه‌های $\alpha > 1$ و $-1 < \alpha' < 0$ نتیجه می‌شوند.

۳. تمام‌گنگهای درجهٔ دوم ساده‌شدهٔ به‌صورت $(P + \sqrt{43})/Q$ را پیدا کنید.

۵.۴ عکس قضیهٔ ۱۰۴

اکنون برای اثبات قضیهٔ زیر آمادگی داریم.

قضیهٔ ۲.۴ (عکس قضیهٔ ۱.۴). اگر گنگ درجهٔ دوم ساده‌شدهٔ $\alpha > 1$ ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دومی با ضریبهای صحیح باشد و مزدوج آن α'، بین ۱ — و ۰ قرار گیرد، آن‌گاه کسر مسلسل α دوره‌ای محض است.

اثبات. نخست بسط α به‌کسر مسلسل را مورد مطالعه قرار می‌دهیم؛ سپس نشان می‌دهیم که این کسر لزوماً دوره‌ای محض است.

نخستین مرحله بیان کردن گنگ درجهٔ دوم ساده‌شدهٔ α به‌صورت

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} = a_1 + \frac{1}{\alpha_1} \qquad (۲۴.۴)$$

است، که در آن a_1 بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از α است و همچنین

$$\alpha_1 = \frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1} > 1,$$

یک گنگ درجهٔ دوم ساده‌شدهٔ وابسته به D است. این مطلب را در بخش ۴.۴ ثابت کردیم.

(۲۴.۴) نخستین قدم درراه تبدیل α به‌کسر مسلسل است. با تکرار این فرایند درمورد α_1، به‌دست می‌آوریم

$$\alpha_1 = \frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1} = a_2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

که در آن a_2 بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از α_1 است و

$$\alpha_2 = \frac{P_2+\sqrt{D}}{Q_2} > 1$$

گنگ درجهٔ دوم ساده‌شده است. دراین مرحله داریم

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2},$$

که در آن α، α_1، α_2 ساده شده‌اند و

$$\alpha=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{\alpha_2}\cdot$$

با ادامهٔ این فرایند، قدم به‌قدم زنجیری از معادله‌های

$$\alpha_0=a_1+\frac{1}{\alpha_1}\,,$$

$$\alpha_1=a_2+\frac{1}{\alpha_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{n-1}=a_n+\frac{1}{\alpha_n}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

را تولید می‌کنیم که در آنها $\alpha=\alpha_0$، α_1، α_2، ... [که خارج قسمتهای کامل نامیده می‌شوند] گنگهای درجهٔ دوم ساده‌شدهٔ وابسته به D هستند و داریم

$$\alpha=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$$

چون α گنگ است، این فرایند پایان نمی‌پذیرد، و ازاین‌رو ظاهراً تعداد بینهایت اصمهای درجهٔدوم ساده‌شدهٔ α_0، α_1، ...، α_n، ... وابسته به D تولید می‌شوند. ولی در بخش ۴.۴ ثابت کرده‌ایم که تنها تعدادی متناهی α_iهای وابسته به‌عدد داده‌شدهٔ D وجود دارند؛ بنابراین، بالاخره باید به‌اصم درجهٔ دومی برسیم که قبلاً آمده است. پس، فرض کنید که در دنبالهٔ

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_{l-1},\ \alpha_l,\ \ldots \qquad (۲۵.۴)$$

همهٔ خارج قسمتهای کامل α_0، α_1، ...، α_{l-1} متفاوت باشند و α_l نخستین خارج قسمت کاملی باشد که قبلاً آمده است. بنابراین $\alpha_l=\alpha_k$، $0\leqslant k<l$.

اکنون می‌توان ثابت کرد که

(۱) وقتی که یك خارج قسمت کامل تکرار شود، تمام خارج قسمتهای کامل بعدی تکرار می‌شوند، به‌عبارت دیگر $\alpha_k=\alpha_l$ نتیجه‌می‌دهد $\alpha_{k+1}=\alpha_{l+1}$، $\alpha_{k+2}=\alpha_{l+2}$، ....

(۲) نخستین خارج قسمت کامل $\alpha=\alpha_0$ تکراری است؛ به‌عبارت دیگر، دنبالهٔ

$\alpha=\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ دوره‌ای محض است.

برای اثبات (۱) صرفاً یادآور می‌شویم که

$$\alpha_k=a_{k+1}+\frac{1}{\alpha_{k+1}}=\alpha_l=a_{l+1}+\frac{1}{\alpha_{l+1}},$$

وچون a_{k+1} و a_{l+1} بزرگترین عددهای صحیح کوچکتر از $\alpha_k=\alpha_l$ هستند، نتیجه می‌گیریم $a_{k+1}=a_{l+1}$. آن‌گاه، نتیجه می‌شود که عکسهای α_{k+1} و α_{l+1} برابرند و درنتیجه $\alpha_{k+1}=\alpha_{l+1}$. همچنین تکرار این استدلال نتیجه می‌دهد که $\alpha_{k+2}=\alpha_{l+2}$، $\alpha_{k+3}=\alpha_{l+3}$، $\ldots$.

برای اثبات (۲) نشان خواهیم داد که تساوی $\alpha_k=\alpha_l$ به‌ازای $0<k<l$ نتیجه‌می‌دهد $\alpha_{k-1}=\alpha_{l-1}$، $\alpha_{k-2}=\alpha_{l-2}$، $\ldots$، $\alpha_0=\alpha_{l-k}$. برای این منظور، از مزدوجهای خارج قسمتهای کامل برابر α_k و α_l استفاده می‌کنیم. داریم $\alpha_k'=\alpha_l'$ که از آن

$$\beta_k=-\frac{1}{\alpha_k'}=-\frac{1}{\alpha_l'}=\beta_l \qquad (۲۶.۴)$$

نتیجه می‌شود. اکنون اگر $k\neq 0$، خواهیم داشت

$$\alpha_{k-1}=a_k+\frac{1}{\alpha_k} \quad \text{و} \quad \alpha_{l-1}=a_l+\frac{1}{\alpha_l};$$

با مزدوج گرفتن، به‌دست می‌آوریم

$$\alpha_{k-1}'=a_k+\frac{1}{\alpha_k'} \quad \text{و} \quad \alpha_{l-1}'=a_l+\frac{1}{\alpha_l'}$$

و لذا

$$-\frac{1}{\alpha_k'}=a_k-\alpha_{k-1}' \quad \text{و} \quad -\frac{1}{\alpha_l'}=a_l-\alpha_{l-1}',$$

که هم‌ارز است با

$$\beta_k=a_k+\frac{1}{\beta_{k-1}} \quad \text{و} \quad \beta_l=a_l+\frac{1}{\beta_{l-1}}. \qquad (۲۷.۴)$$

چون α_{k-1} و α_{l-1} ساده‌شده هستند، داریم

$$-1 < \alpha'_{k-1} < 0 \quad و \quad -1 < \alpha'_{l-1} < 0$$

بنا بر این

$$0 < -\alpha'_{k-1} = \frac{1}{\beta_{k-1}} < 1 \quad و \quad 0 < -\alpha'_{l-1} = \frac{1}{\beta_{l-1}} < 1 .$$

این نابرابریها نشان می‌دهند که در (۲۷۰۴)، a_k و a_l به‌ترتیب بزرگترین عددهای صحیح کوچکتر از β_k و β_l هستند؛ وچون $\beta_k = \beta_l$، نتیجه می‌گیریم $a_k = a_l$ و لذا، همچنین

$$a_k + \frac{1}{\alpha_k} = a_l + \frac{1}{\alpha_l} . \qquad (۲۸۰۴)$$

چون طرف چپ (۲۸۰۴) برابر α_{k-1} وطرف راست آن α_{l-1} است، نشان‌داده‌ایم که از $\alpha_k = \alpha_l$ نتیجه می‌شود $\alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}$. اکنون اگر $k-1 \neq 0$، یعنی اگر α_k نخستین خارج قسمت کامل نباشد، این بحث‌را می‌توانیم k مرتبه تکرارکرده‌وثابت کنیم که

$$\alpha_{k-2} = \alpha_{l-2}, \quad \alpha_{k-3} = \alpha_{l-3}, \cdots$$

تا اینکه به‌نخستین جملهٔ α رسیده و به‌دست آوریم

$$\alpha_{k-k} = \alpha_0 = \alpha_{l-k} = \alpha_s .$$

ازاین‌رو، در بسط گنگ درجهٔ دوم سادهٔ‌شدهٔ α به‌یك‌کسرمسلسل، زنجیری از معادله‌های

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{s-2} = a_{s-1} + \frac{1}{\alpha_{s-1}},$$

$$\alpha_{s-1} = a_s + \frac{1}{\alpha_s} = a_s + \frac{1}{\alpha},$$

را تولید می‌کنیم که α، $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، . . .، $\alpha_{s-۱}$ همه متفاوت‌اند و $\alpha_s=\alpha$، و از این مرحله به‌بعد αها تکرار می‌شوند.

چون به‌ازای هر $\alpha_k>۱$ فقط یك بزرگترین عددصحیح a_k کوچکتر از α_k وجود دارد، روشن‌است که دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_s نیز تکرار خواهد شد:

$$\alpha_s=a_{s+۱}+\frac{۱}{\alpha_{s+۱}}=\alpha_۰=a_۱+\frac{۱}{\alpha_۱}\cdot$$

درنتیجه، کسرمسلسل α به‌صورت

$$\alpha=[\overline{a_۱, a_۲, \cdots, a_s}]$$

ودوره‌ای محض است. این مطلب اثبات قضیهٔ ۲.۴ راکامل می‌کند.

پیش ازاینکه اثبات را به‌تمام گنگهای درجهٔ دوم (ساده‌شده یا نشده) تعمیم دهیم تعبیری‌هندسی ازویژگی دوره‌ای خارج قسمتهای کامل $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، . . . درعبارتهای

$$\alpha=a_۱+\frac{۱}{\alpha_۱},\ \alpha_۱=a_۲+\frac{۱}{\alpha_۲}, \cdots,\ \alpha_k=a_{k+۱}+\frac{۱}{\alpha_{k+۱}}\ , \cdots$$

را ارائه‌می‌دهیم. دوتابع $F(x)$ و $G(x)$ را به‌قسمی تعریف می‌کنیم که F، α_n را به $\frac{۱}{\alpha_{n+۱}}$ و G، $\frac{۱}{\alpha_{n+۱}}$ را به‌عکس آن، $\alpha_{n+۱}$، بنگارد. ابتدا با اعمال F روی یك α_n و سپس با اعمال G روی $F(\alpha_n)$، $\alpha_{n+۱}$ را به‌دست خواهیم آورد.

برای تعریف تابع F، مشاهده می‌کنیم که

$$\frac{۱}{\alpha_{k+۱}}=\alpha_k-a_{k+۱}$$

که در آن $a_{k+۱}$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از α_k است. به‌فرض‌آنکه بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x با نماد $\{x\}$ نمایش داده شود*، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۱}{\alpha_{k+۱}}=\alpha_k-\{\alpha_k\}\ ,$$

---

* نماد معمولی «بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x»، $[x]$ است. چون همین نمادبرای نمایش کسرمسلسل نیز به‌کارمی‌رود، برای جلوگیری ازاشتباه، نماد $\{x\}$ را برای‌نمایش جزء صحیح x پذیرفته‌ایم.

و F را باضابطهٔ:

$$F(x)=x-\{x\}$$

تعریف می‌کنیم. اکنون تابعی داریم که به هر α_k عکس αی بعدی را نسبت می‌دهد، یعنی

$$F(\alpha_k)=\alpha_k-\{\alpha_k\}=\frac{۱}{\alpha_{k+۱}}\cdot$$

اکنون چون عکس عکس یك عدد باخودآن عدد برابر است، تعریف مناسب G صرفاً عبارت می‌شود از

$$G(x)=\frac{۱}{x} \qquad \text{درنتیجه} \qquad G\left(\frac{۱}{\alpha_{k+۱}}\right)=\alpha_{k+۱}$$

به‌عبارت دیگر،

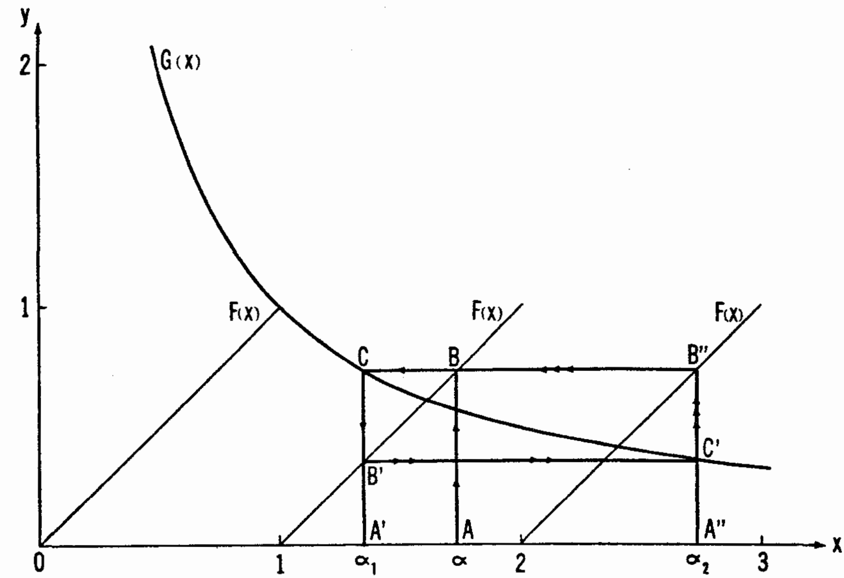
$$G[F(\alpha_k)]=\alpha_{k+۱}\cdot$$

برای‌عملی‌ساختن‌تعبیر هندسی‌موردنظر، نمودارهای‌دوتابع $F(x)=x-\{x\}$ و $G(x)=۱/x$ را روی یك کاغذ نمـودار رسم می‌کنیم؛ شکل ۱۰ را ببینید. نمودار $F(x)$ متشکل از پاره خطهایی موازی است و نمودار $G(x)$ به‌ازای مقادیر مثبت x یك شاخه از هذلولی متساوی‌الساقین $y=۱/x$ است.

α گنگ درجهٔ دوم مفروض را روی محور افقی (درنقطهٔ A) مشخص می‌کنیم و با انـدازه‌گیری فاصلهٔ قائم نقطهٔ A تا نمـودار $F(x)$ [یعنی فاصلهٔ A تا نقطـهٔ B = $F(\alpha)$] مقدار $F(\alpha)=۱/\alpha_۱$ را پیدا می‌کنیم. سپس نقطه‌ای روی نمودار G پیدا می‌کنیم که عرض از مبدأ آن مساوی عرض از مبدأ نقطهٔ B، یعنی برابر $۱/\alpha_۱$ باشد. این نقطـه را C می‌نامیم. تصویر C روی محور xها مقـدار $\alpha_۱$ را به‌دست می‌دهد، زیرا

$$G(\alpha_۱)=\frac{۱}{\alpha_۱}\cdot$$

اکنون این‌فرایند را باشروع از $\alpha_۱$ تکرارمی‌کنیم؛ از A' به B' وازآن به C' می‌رسیم. طول ازمبدأ C' مقدار $\alpha_۲$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۰

جهت پیکانها در روی شکل، مسیرهایی‌را نشان می‌دهند که هر αرا به‌αی بعدی وصل می‌کنند؛ مسیر از α به α_1 با یك پیکان تنها، مسیر از α_1 به α_2 با یك جفت پیکان، و غیره. اگر در طول یك مسیر، به‌نقطه‌ای از هذلولی برسیم که قسمت قبلی مسیر آن را پوشانیده باشد آن‌گاه تکرار وجود خواهد داشت و α_iها دوره‌ای خواهند بود. برعکس اگر α_iها دوره‌ای باشند آن‌گاه ناگزیر مسیر تکرار خواهد شد.

مجموعه مسأله‌های ۱۷

۱. نشان‌دهید که $\alpha = ۱ + \sqrt{۲}$ ساده‌شده است و بسط آن کسرمسلسل دوره‌ای محض $[\overline{۲}]$ است.

۲. نشان دهید که $\sqrt{۸}$ ساده‌شده نیست و بسط کسر مسلسل آن دوره‌ای محض نیست.

۳. با استفاده از روش نموداری کـه در پایان این بخش بیـان شد، نشان دهید که $\sqrt{۵}$ گرچه دوره‌ای محض نیست ولی دارای بسط کسر مسلسل دوره‌ای [۲, ۴]

است. مشاهده‌می‌کنید که خارج قسمتهای جزئی a_1، a_2، . . . را می‌توان با ترسیم قطعه‌ای از $F(x)$ معین‌کرد که به‌ترتیب با مسیرهای خارج‌شده از α، α_1، . . . برخورد می‌کند.

۶.۴ قضیهٔ لاگرانژ

قضیهٔ ۳.۴. هر عدد گنگ درجهٔ دوم α دارای یك بسط‌کسر مسلسل است که ازمرحله‌ای به‌بعد دوره‌ای است.

اثبات. نکتهٔ اصلی اثبات نشان دادن این‌است که وقتی یك‌عددگنگ درجهٔ‌دوم α به یك کسر مسلسل بسط یابد، ناگزیر خارج قسمت کامل ساده‌شده‌ای مانند α_{n+1} به‌دست می‌آید، و بنا برقضیهٔ ۲.۴، از آن به‌بعد این‌کسر مسلسل دوره‌ای خواهد بود.

فرض‌کنید که بسط α

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

باشد. طبق معادلهٔ (۵.۴) می‌دانیم که

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

که در آن α و α_{n+1} گنگهای درجهٔ دوم‌اند و $\alpha_{n+1} > 1$. با مزدوج گرفتن ازدوطرف این معادله، به‌دست می‌آوریم

$$\alpha' = \frac{\alpha'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha'_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

که چون برحسب α'_{n+1} حل‌شود، داریم

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{\alpha' q_{n-1} - p_{n-1}}{\alpha' q_n - p_n}.$$

پس از تجزیهٔ صورت ومخرج این معادله خواهیم داشت:

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \dfrac{p_n}{q_n}}\right)$$

(۲۹.۴)

$$= -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}\right)$$

که در آن $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ و $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ همگراهای α هستند. اما از آنچه دربارهٔ همگراها در فصل ۳ خواندیم می‌دانیم که وقتی n به‌طور نامحدود افزایش یابد، c_{n-1} و c_n هر دو به‌حد α میل می‌کنند و درنتیجه وقتی n به بینهایت میل کند،

(۳۰.۴) $\qquad \frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}$ به سمت $\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = 1$ میل می‌کند.

همچنین می‌دانیم که همگراهای c_n متناوباً کوچکتر از α و بزرگتر از α هستند، و از این‌رو وقتی n افزایش می‌یابد مقادیر کسر (۳۰.۴) نه‌تنها به ۱ نزدیکتر و نزدیکتر می‌شوند، بلکه متناوباً کمی کوچکتر از ۱ و کمی بزرگتر از ۱ می‌شوند. همچنین توجه داریم که در (۲۹.۴)، عددهای q_n و q_{n-1} هر دو صحیح و مثبت‌اند (بخش ۶.۳ را ببینید) و $q_n > q_{n-1} > 0$، به‌طوری که $1 > \frac{q_{n-1}}{q_n}$. پس، به‌محض پیداشدن مقداری از n که کسر (۳۰.۴) را کمی کوچکتر از ۱ کند، مقدار α'_{n+1} که در (۲۹.۴) داده شده است الزاماً بین ۱ــ و ۰ قرار خواهد گرفت. این مطلب ثابت می‌کند که α_{n+1} ساده‌شده است، و بنا بر قضیهٔ ۲.۴، از آن به‌بعد کسر مسلسل α دوره‌ای خواهد بود. بنابراین قضیهٔ لاگرانژ اثبات شده است.

مجموعه مسأله‌های ۱۸

۱. نشان‌دهید که $\alpha = \frac{1}{9}(8 + \sqrt{37})$ ساده‌شده نیست، اما اگر

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{+ a_n +} \frac{1}{\alpha_{n+1}},$$

سرانجام به یک $\alpha_{n+۱}$ می‌رسیم که ساده‌شده‌است، وتحقیق کنید که بسط از آن به بعد دوره‌ای است.

۷.۴ کسر مسلسل $\sqrt{N}$

اگر $N>۰$ عددی صحیح باشد و مربع کامل نباشد، کسرمسلسل بسط $\sqrt{N}$ شکل جالبی دارد. نخست توجه کنید که $\sqrt{N}$ بزرگتر از ۱ است ولذا مزدوج آن $-\sqrt{N}$ نمی‌تواند بین ۱ــ و ۰ باشد، ازاین رو $\sqrt{N}$ ساده‌شده نیست، وبسط آن

$$\sqrt{N}=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\cdots+\frac{۱}{a_{n-۱}+}\frac{۱}{a_n+}\cdots \qquad (۳۱.۴)$$

نمی‌تواند دوره‌ای محض باشد. ازطرف‌دیگر، چون $a_۱$ بزرگترین عددصحیح کوچکتر از $\sqrt{N}$ است، عدد $\sqrt{N}+a_۱$ بزرگتر از ۱ و مزدوج آن، $-\sqrt{N}+a_۱$، بین ۱ــ و ۰ واقع است، بنابراین $\sqrt{N}+a_۱$ ساده شده است. با اضافه‌کردن $a_۱$ به‌دو طرف (۳۱.۴) به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt{N}+a_۱=۲a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots,$$

وچون این بسط دوره‌ای محض است باید به‌صورت

$$\begin{aligned}\alpha&=\sqrt{N}+a_۱\\&=۲a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots+\frac{۱}{a_n+}\frac{۱}{۲a_۱+}\frac{۱}{a_۲+}\cdots\end{aligned} \qquad (۳۲.۴)$$

باشد. درنتیجه بسط $\sqrt{N}$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\sqrt{N}&=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\frac{۱}{a_۳+}\cdots+\frac{۱}{a_n+}\frac{۱}{۲a_۱+}\frac{۱}{a_۲+}\cdots\\&=[a_۱,\overline{a_۲,a_۳,\cdots,a_n,۲a_۱}],\end{aligned} \qquad (۳۳.۴)$$

که در آن دورهٔ گردش از جملهٔ بعد ازجملهٔ اول شروع و به‌جملهٔ $۲a_۱$ ختم می‌شود. مثلاً،

$$\sqrt{۲۹}=[۵,\overline{۲,۱,۱,۲,۱۰}]$$

$$\sqrt{19}=[4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}].$$

توجه کنید که دورهٔ گردش باصرفنظر کردن از جملهٔ $2a_1$ متقارن است [به‌عبارت دیگر، دورهٔ گردش یك جزء متقارن دارد]. این جزء متقارن ممکن است جملهٔ میانی داشته باشد یا نداشته باشد [برحسب آنکه تعداد جمله‌هایش فرد یا زوج باشد].

برای بررسی جزء متقارن، باتوجه به‌بخش ۲.۴ یادآوری می‌کنیم که اگر $\alpha' = -\sqrt{N}+a_1$ مزدوج $\alpha=\sqrt{N}+a_1$ باشد، آن‌گاه بسط $-\frac{1}{\alpha'}$ همان بسط α است با این تفاوت که جمله‌های دورهٔ گردش به‌ترتیب عکس قرارگرفته‌اند. از این‌رو با معکوس کردن ترتیب جمله‌های دورهٔ گردش در (۳۲.۴)، به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{1}{\alpha'}=\frac{1}{\sqrt{N}-a_1}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\cdots+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{2a_1+}\cdots \qquad (۳۴.۴)$$

ازطرف دیگر، بسط $(\sqrt{N}-a_1)^{-1}$ را با استفاده از (۳۳.۴) به‌آسانی می‌توان به‌دست آورد؛ a_1 را ازدوطرف (۳۳.۴) کم می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$\sqrt{N}-a_1=0+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots,$$

وچون دوطرف را معکوس کنیم به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\sqrt{N}-a_1}=a_2+\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots \qquad (۳۵.۴)$$

اما، می‌دانیم که بسط کسرمسلسل یك عدد یکتاست، لذا بامقایسهٔ (۳۴.۴) و (۳۵.۴)، نتیجه می‌گیریم که

$$a_n=a_2,\ a_{n-1}=a_3,\ \cdots,\ a_3=a_{n-1},\ a_2=a_n.$$

و نتیجه می‌شود که کسر مسلسل $\sqrt{N}$ لزوماً به‌صورت

$$\sqrt{N}=[a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, \cdots, a_4, a_3, a_2, 2a_1}]$$

است. مثالهای بیشتری را در جدول ۲ صفحهٔ ۱۴۷ ببینید.

۸.۴ معادلهٔ پل، $x^2-Ny^2=\pm 1$

در آغاز این فصل خاطرنشان کردیم که مسألهٔ گلهٔ ارشمیدس به‌حل معادلهٔ

$$x^2-4729494y^2=1$$

می‌انجامد. دراین بخش جوابهای صحیح x و y معادلهٔ

$$x^2-Ny^2=1 \qquad (۳۶.۴)$$

را بحث می‌کنیم، که در آن $N>0$ عددی صحیح ومفروض است، و x و y عددهایی صحیح ومجهول‌اند که‌درجستجوی مقادیر آنها هستیم. فرض می‌کنیم که N مربع کامل نباشد؛ درغیراین‌صورت معادله جالب نیست، زیرا تفاضل دومربع کامل بجز دومورد خاص $(\pm 1)^2-0^2$ هرگز برابر ۱ نیست. (چرا؟)

بسط کسر مسلسل $\sqrt{N}$ همهٔ ابزارهای مورد نیاز برای حل معادلهٔ پل، $x^2-Ny^2=1$ یا $x^2-Ny^2=-1$، را دراختیارقرارمی‌دهد، مشروط براینکه برای آن جوابهایی وجود داشته باشد. می‌دانیم که

$$\sqrt{N}=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots$$
$$(۳۷.۴)$$
$$=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

که در آن

$$\alpha_{n+1}=2a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots=\sqrt{N}+a_1. \qquad (۳۸.۴)$$

ودوباره ازاین واقعیت استفاده می‌کنیم که

$$\sqrt{N}=\frac{\alpha_{n+1}p_n+p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1}}\ , \qquad (۳۹.۴)$$

که در آن p_{n-1}، q_{n-1}، p_n و q_n از دو همگرای $c_{n-1}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ و $c_n=\frac{p_n}{q_n}$ محاسبه می‌شوند که در(۳۷.۴) بلافاصله پیش‌ازجملهٔ $2a_1$ می‌آیند. باقراردادن‌طرف راست (۳۸.۴) به‌جای α_{n+1} در(۳۹.۴) نتیجه می‌گیریم

$$\sqrt{N}=\frac{(\sqrt{N}+a_1)p_n+p_{n-1}}{(\sqrt{N}+a_1)q_n+q_{n-1}};$$

پس از حذف مخرج دراین معادله خواهیم داشت

$$\sqrt{N}(\sqrt{N}+a_1)q_n+q_{n-1}\sqrt{N}=(\sqrt{N}+a_1)p_n+p_{n-1}$$

که هم‌ارز است با

$$Nq_n+(a_1q_n+q_{n-1})\sqrt{N}=(a_1p_n+p_{n-1})+p_n\sqrt{N}\cdot$$

این‌معادله، به‌صورت $a+b\sqrt{N}=c+d\sqrt{N}$ است که‌در آن a، b، c، d عددهای صحیح‌اند و $\sqrt{N}$ گنگ است و نتیجه می‌شود کــه $a=c$ و $b=d$ (بخش ۳.۴ را ببینید). از این‌رو آخرین معادله ایجاب می‌کند که

$$Nq_n=a_1p_n+p_{n-1}$$

و

$$a_1q_n+q_{n-1}=p_n\cdot$$

ازحل این معادله‌ها p_{n-1} و q_{n-1} را برحسب p_n و q_n به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} p_{n-1}&=Nq_n-a_1p_n\ , \\ q_{n-1}&=p_n-a_1q_n\cdot \end{aligned} \tag{۴۰.۴}$$

اما از قضیهٔ ۴.۱ می‌دانیم که

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^n,$$

وبه‌ازای مقادیر p_{n-1} و q_{n-1} از (۴۰.۴)، این معادله به‌صورت

$$p_n(p_n-a_1q_n)-q_n(Nq_n-a_1p_n)=(-1)^n;$$

یعنی به‌صورت

$$p_n^2-Nq_n^2=(-1)^n \tag{۴۱.۴}$$

است.

اگر n زوج باشد، معادلهٔ (۴۱.۴) به‌صورت

$$p_n^2-Nq_n^2=(-1)^n=1$$

درمی‌آید، وبنا بر این یك جواب خصوصی معادلهٔ $x^2-Ny^2=1$ عبارت است از

$$x_1=p_n,\quad y_1=q_n.$$

اگر n فرد باشد، آن‌گاه

$$p_n^2-Nq_n^2(-1)^n=-1,$$

و $x_1=p_n$ و $y_1=q_n$ یك جواب خصوصی معادلهٔ $x^2-Ny^2=-1$ را به‌دست می‌دهند.

اگر n فرد باشد و بخواهیم جوابی از $x^2-Ny^2=1$ را نیز داشته باشیم، در بسط $\sqrt{N}$ تا دومین دورهٔ گردش، یعنی تا جایی که a_n برای دومین بار ظاهر می‌شود، پیش می‌رویم. اما با توجه به این که

$$\sqrt{N}=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2a_1}+\cdots$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n+1}}+\cdots,$$

وقتی جملهٔ a_n برای دومین بار ظاهر می‌شود، درواقع جملهٔ a_{2n} است؛ درنتیجه

$$p_{2n}^2-Nq_{2n}^2=(-1)^{2n}=1,$$

و بنا بر این

$$x_1=p_{2n},\quad y_1=q_{2n}$$

که باز یك جواب خصوصی $x^2-Ny^2=1$ را به‌دست می‌دهد.

تحلیلی که انجام گرفت نشان می‌دهد که همواره می‌توانیم جوابهای خصوصی معادلهٔ

$$x^2-Ny^2=1,$$

وگاهی جوابهای خصوصی معادلهٔ $x^2-Ny^2=-1$ را پیدا کنیم. همهٔ معادله‌های از نوع $x^2-Ny^2=-1$ را نمی‌توان حل کرد. مثلاً، می‌توان ثابت کرد (پیوست ۱ را در پایان کتاب ببینید) که معادلهٔ $x^2-3y^2=-1$ جواب صحیح ندارد.

در اینجا مثالهای خود را به‌معادله‌هایی محدود می‌کنیم که جواب دارند.

مثال ۱. یك جواب خصوصی معادلهٔ $x^۲ - ۲۱y^۲ = ۱$ را پیدا کنید.

حل. در اینجا $N = ۲۱$، و بنا بر جدول ۲، بسط کسر مسلسل نظیر، عبارت است از

$$\sqrt{۲۱} = [۴, \overline{۱, ۱, ۲, ۱, ۱, ۸}] = [a_۱, \overline{a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶, ۲a_۱}],$$

که نشان می‌دهد $a_n = a_۶$، بنا بر این $n = ۶$ وعددی زوج است. پس ازمحاسبه داریم $c_۶ = \frac{۵۵}{۱۲}$، ازاین‌رو

$$x_۱ = p_۶ = ۵۵, \quad y_۱ = q_۶ = ۱۲,$$

و

$$x_۱^۲ - ۲۱y_۱^۲ = ۵۵^۲ - ۲۱ \times ۱۲^۲ = ۳۰۲۵ - ۳۰۲۴ = ۱$$

بنا بر این $x_۱ = ۵۵$، $y_۱ = ۱۲$ یك جواب خصوصی معادلهٔ داده‌شده است.

مثال ۲. یك جواب خصوصی $x^۲ - ۲۹y^۲ = ۱$ را پیدا کنید.

حل. بسط $\sqrt{۲۹}$ برابر است با

$$\sqrt{۲۹} = [۵, \overline{۲, ۱, ۱, ۲, ۱۰}] = [a_۱, \overline{a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, ۲a_۱}],$$

بنا بر این $n = ۵$ وفرد است. اولین پنج همگرای این کسر عبارت‌اند از

$$\frac{۵}{۱}, \frac{۱۱}{۲}, \frac{۱۶}{۳}, \frac{۲۷}{۵}, \frac{۷۰}{۱۳} = \frac{p_۵}{q_۵}.$$

ولی به‌ازای $x_۱ = p_۵ = ۷۰$، $y_۱ = q_۵ = ۱۳$ مقدار $x^۲ - ۲۹y^۲$ برابر $۷۰^۲ - ۲۹ \times ۱۳^۲ = -۱$ است نه $+۱$. از این‌رو باید دورهٔ گردش بعدی را درنظر بگیریم که همگراهای زیر را به‌دست می‌دهد

$$\frac{۷۲۷}{۱۳۵}, \frac{۱۵۲۴}{۲۸۳}, \frac{۲۲۵۱}{۴۱۸}, \frac{۳۷۷۵}{۷۰۱}, \frac{۹۸۰۱}{۱۸۲۰} = \frac{p_{۱۰}}{q_{۱۰}},$$

واگر

$$x_۱ = ۹۸۰۱, \quad y_۱ = ۱۸۲۰$$

جدول ۲

N	کسر مسلسل $\sqrt{N}$	x_1	y_1	$x_1^2-Ny_1^2$
۲	$[۱, \overline{۲}]$	۱	۱	−۱
۳	$[۱, \overline{۱, ۲}]$	۲	۱	+۱
۵	$[۲; \overline{۴}]$	۲	۱	−۱
۶	$[۲, \overline{۲, ۴}]$	۵	۲	+۱
۷	$[۲, \overline{۱, ۱, ۱, ۴}]$	۸	۳	+۱
۸	$[۲, \overline{۱, ۴}]$	۳	۱	+۱
۱۰	$[۳, \overline{۶}]$	۳	۱	−۱
۱۱	$[۳, \overline{۳, ۶}]$	۱۰	۳	+۱
۱۲	$[۳, \overline{۲, ۶}]$	۷	۲	+۱
۱۳	$[۳, \overline{۱, ۱, ۱, ۱, ۱. ۶}]$	۱۸	۵	−۱
۱۴	$[۳, \overline{۱, ۲, ۱, ۶}]$	۱۵	۴	+۱
۱۵	$[۳, \overline{۱, ۶}]$	۴	۱	+۱
۱۷	$[۴, \overline{۸}]$	۴	۱	−۱
۱۸	$[۴, \overline{۴, ۸}]$	۱۷	۴	+۱
۱۹	$[۴, \overline{۲, ۱, ۳, ۱, ۲, ۸}]$	۱۷۰	۳۹	+۱
۲۰	$[۴, \overline{۲, ۸}]$	۹	۲	+۱
۲۱	$[۴, \overline{۱, ۱, ۲, ۱, ۱, ۸}]$	۵۵	۱۲	+۱
۲۲	$[۴, \overline{۱, ۲, ۴, ۲, ۱, ۸}]$	۱۹۷	۴۲	+۱
۲۳	$[۴, \overline{۱, ۳, ۱, ۸}]$	۲۴	۵	+۱
۲۴	$[۴, \overline{۱, ۸}]$	۵	۱	۱+
۲۶	$[۵, \overline{۱۰}]$	۵	۱	−۱
۲۷	$[۵, \overline{۵, ۱۰}]$	۲۶	۵	+۱
۲۸	$[۵, \overline{۳, ۲, ۳, ۱۰}]$	۱۲۷	۲۴	+۱
۲۹	$[۵, \overline{۲, ۱, ۱, ۲, ۱۰}]$	۷۰	۱۳	−۱
۳۰	$[۵, \overline{۲, ۱۰}]$	۱۱	۲	+۱
۳۱	$[۵, \overline{۱, ۱, ۳, ۵, ۳, ۱, ۱, ۱۰}]$	۱۵۲۰	۲۷۳	+۱
۳۲	$[۵, \overline{۱, ۱, ۱, ۱۰}]$	۱۷	۳	+۱
۳۳	$[۵, \overline{۱, ۲, ۱, ۱۰}]$	۲۳	۴	+۱
۳۴	$[۵, \overline{۱, ۴, ۱, ۱۰}]$	۳۵	۶	+۱
۳۵	$[۵, \overline{۱, ۱۰}]$	۶	۱	+۱
۳۷	$[۶, \overline{۱۲}]$	۶	۱	−۱
۳۸	$[۶, \overline{۶, ۱۲}]$	۳۷	۶	+۱
۳۹	$[۶, \overline{۴, ۱۲}]$	۲۵	۴	+۱
۴۰	$[۶, \overline{۳, ۱۲}]$	۱۹	۳	+۱

را درنظر بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$x_{\text{۱}}^{\text{۲}}-\text{۲۹}y_{\text{۱}}^{\text{۲}}=\text{۹۶۰۵۹۶۰۱}-\text{۹۶۰۵۹۶۰۰}=\text{۱}.$$

جواب به‌دست آمده برای این‌مثال وهمچنین برای مثال ۱ را می‌توان با جدول ۲ تطبیق کرد. دراین جدول درمقابل $N=\text{۲۱}$ بسط

$$\sqrt{N}=\sqrt{\text{۲۱}}=[\text{۴},\ \overline{\text{۱},\ \text{۱},\ \text{۲},\ \text{۱},\ \text{۱},\ \text{۸}}],$$

و در طرف راست این بسط جواب $x_{\text{۱}}=\text{۵۵}$ و $y_{\text{۱}}=\text{۱۲}$ را برای معادلهٔ $x^{\text{۲}}-\text{۲۱}y^{\text{۲}}=\text{۱}$ مشاهده می‌کنیم.

درمقابل $N=\text{۲۹}$ بسط

$$\sqrt{N}=\sqrt{\text{۲۹}}=[\text{۵},\ \overline{\text{۲},\ \text{۱},\ \text{۱},\ \text{۲},\ \text{۱۰}}].$$

وجواب $x_{\text{۱}}=\text{۷۰}$ و $y_{\text{۱}}=\text{۱۳}$ را برای معادلهٔ $x^{\text{۲}}-\text{۲۹}y^{\text{۲}}=-\text{۱}$ می‌بینیم، که نشان می‌دهد برای به‌دست آوردن جوابی برای $x^{\text{۲}}-\text{۲۹}y^{\text{۲}}=+\text{۱}$ باید به‌دومین دورهٔ گردش گذر کنیم.

مجموعه مسأله‌های ۱۹

۱. ثابت کنید چنان‌که در جدول ۲ نشان داده شده $x_{\text{۱}}=\text{۸}$ و $y_{\text{۱}}=\text{۳}$ یك جواب $x^{\text{۲}}-\text{۷}y^{\text{۲}}=\text{۱}$ است.

۲. نشان دهید که $x_{\text{۱}}=\text{۱۸}$، $y_{\text{۱}}=\text{۵}$ یك جواب $x^{\text{۲}}-\text{۱۳}y^{\text{۲}}=\text{۱}$ است، و برای پیداکردن یك جواب $x^{\text{۲}}-\text{۱۳}y^{\text{۲}}=\text{۱}$ جزء دوره‌ای بعدی را به‌کار ببرید.

۹.۴ چگونگی تعیین جوابهای دیگر معادلهٔ پل

دیدیم که معادلهٔ پل از نوع $x^{\text{۲}}-Ny^{\text{۲}}=\text{۱}$، راکه درآن N عدد صحیح است و مربع کامل نیست، همواره می‌توان حل کرد، ولی همهٔ معادله‌های از نوع $x^{\text{۲}}-Ny^{\text{۲}}=-\text{۱}$ جواب ندارند. اما اگر هریك از این دو نوع معادله‌ها دارای جواب باشند، روشی‌که در بخش ۸.۴ به‌اختصار شرح داده شد، همواره کوچکترین جواب مثبت (مینیمال) را فراهم خواهد کرد، یعنی این روش همواره یك جفت کوچکترین عددهای صحیح $x_{\text{۱}}>\text{۰}$ و $y_{\text{۱}}>\text{۰}$ را به‌گونه‌ای فراهم خواهد کرد که $x_{\text{۱}}^{\text{۲}}-Ny_{\text{۱}}^{\text{۲}}=\text{۱}$ یا $x_{\text{۱}}^{\text{۲}}-Ny_{\text{۱}}^{\text{۲}}=-\text{۱}$. آن‌گاه‌که کوچکترین جواب مثبت به‌دست آمد، به‌طور منظم می‌توانیم جوابهای مثبت دیگر را به‌دست آوریم. این حکمها را

ثابت نخواهیم کرد؛ قضیه‌های اصلی مربوط به‌مطلب را بیان می‌کنیم و آنها را با ذکر مثال فقط توضیح می‌دهیم.

قضیهٔ ۴.۴. اگر $(x_۱, y_۱)$ کوچکترین جواب مثبت $x^۲-Ny^۲=۱$ باشد آن‌گاه تمام جوابهای مثبت (x_n, y_n) را می‌توان از معادلهٔ

$$x_n+y_n\sqrt{N}=(x_۱+y_۱\sqrt{N})^n \qquad (۴۲.۴)$$

به‌ترتیب به‌ازای $n=۱, ۲, ۳, \ldots$ به‌دست‌آورد.

با بسط $(x_۱+y_۱\sqrt{N})^n$ به‌وسیلهٔ قضیهٔ دوجمله‌ای ومساوی قراردادن قسمتهای گویا باهم وقسمتهای گنگ محض باهم درمعادلهٔ حاصل، مقادیر x_n و y_n از(۴۲.۴) به‌دست‌می‌آیند. مثلاً، اگر $(x_۱, y_۱)$ کوچکترین جواب مثبت معادلهٔ $x^۲-Ny^۲=۱$ باشد، آن‌گاه می‌توان باانتخاب $n=۲$ در (۴۲.۴)، جواب $(x_۲, y_۲)$ را پیدا کرد. ازاین رابطه، داریم

$$x_۲+y_۲\sqrt{N}=(x_۱+y_۱\sqrt{N})^۲=(x_۱^۲+Ny_۱^۲)+(۲x_۱y_۱)\sqrt{N},$$

بنابراین $x_۲=x_۱^۲+Ny_۱^۲$ و $y_۲=۲x_۱y_۱$. روی این مقادیر که محاسبهٔ مستقیم انجام دهیم معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} x_۲^۲-Ny_۲^۲&=(x_۱^۲+Ny_۱^۲)^۲-N(۲x_۱y_۱)^۲\\ &=x_۱^۴+۲Nx_۱^۲y_۱^۲+N^۲y_۱^۴-۴Nx_۱^۲y_۱^۲\\ &=x_۱^۴-۲Nx_۱^۲y_۱^۲+N^۲y_۱^۴\\ &=(x_۱^۲-Ny_۱^۲)^۲=۱, \end{aligned}$$

زیرا طبق فرض، $(x_۱, y_۱)$ یك جواب $x^۲-Ny^۲=۱$ است.

اگر x_n و y_n را از معادلهٔ (۴۲.۴) محاسبه کنیم، نشان‌دادن $x_n^۲-Ny_n^۲=۱$ کارآسانی است. بنابر (۴۲.۴)، داریم

$$x_n+y_n\sqrt{N}=(x_۱+y_۱\sqrt{N})(x_۱+y_۱\sqrt{N})\cdots(x_۱+y_۱\sqrt{N}),$$

که عبارت طرف راست دارای n عامل است. چون مزدوج حاصلضرب برابر حاصلضرب مزدوجهاست، این رابطه نتیجه می‌دهد

$$x_n-y_n\sqrt{N}=(x_1-y_1\sqrt{N})\,(x_1-y_1\sqrt{N})\cdots(x_1-y_1\sqrt{N})$$

یا

$$x_n-y_n\sqrt{N}=(x_1-y_1\sqrt{N})^n \qquad (۴۳.۴)$$

حال $x_n^2-Ny_n^2$ را تجزیه کرده و رابطه‌های (۴۲.۴) و (۴۳.۴) را به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned} x_n^2-Ny_n^2&=(x_n+y_n\sqrt{N})\,(x_n-y_n\sqrt{N})\\ &=(x_1+y_1\sqrt{N})^n\,(x_1-y_1\sqrt{N})^n\\ &=(x_1^2-Ny_1^2)^n=1. \end{aligned}$$

بنابراین x_n و y_n جوابهای $x^2-Ny^2=1$ هستند.

مثال ۱. درمثال ۱ بخش ۸.۴ دیدیم که $x_1=55$ و $y_1=12$ جواب (مینیمال) معادلهٔ $x^2-21y^2=1$ است. جواب دوم (x_2, y_2) را می‌توان باقراردادن $n=2$ در (۴۲.۴) به‌دست آورد؛ این رابطه نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} x_2+y_2\sqrt{21}&=(55+12\sqrt{21})^2\\ &=3025+1320\sqrt{21}+3024\\ &=6049+1320\sqrt{21} \end{aligned}$$

ولازم‌می‌آیدکه $x_2=6049$ و $y_2=1320$. این مقادیردرمعادلهٔ $x^2-21y^2=1$ صدق می‌کنند، زیرا

$$(6049)^2-21(1320)^2=36590401-36590400=1$$

به‌طورکلی جوابهای معادلهٔ پل به‌سرعت بزرگ می‌شوند.

مثال ۲. جدول ۲ نشان می‌دهد که $x_1=2$ و $y_1=1$ جوابی از معادلهٔ $x^2-3y^2=1$ است. جواب دوم (x_2, y_2) از معادلهٔ

$$x_2+y_2\sqrt{3}=(2+1\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3},$$

به‌دست می‌آید. بنابراین $x_2=7$، $y_2=4$، $7^2-3\times4^2=1$، جواب سوم

$(x_۳, y_۳)$ ازمعادلهٔ

$$x_۳+y_۳\sqrt{۳}=(۲+۱\sqrt{۳})^۳=۲۶+۱۵\sqrt{۳},$$

حاصل می‌شود، ازاین‌رو $x_۳=۲۶$ و $y_۳=۱۵$، که در معادله صدق می‌کنند، زیرا

$$(۲۶)^۲-۳(۱۵)^۲=۶۷۶-۶۷۵=۱.$$

این شیوه‌را می‌توان ادامه داد.

قضیهٔ ۵.۴. فرض‌کنید $x^۲-Ny^۲=-۱$ حلپذیر بوده و $(x_۱, y_۱)$کوچکترین جواب مثبت آن باشد. در این صورت همهٔ جوابهای مثبت، (x_n, y_n)، معادلهٔ $x^۲-Nx^۲=-۱$ را می‌توان از معادلهٔ

$$x_n+y_n\sqrt{N}=(x_۱+y_۱\sqrt{N})^n \qquad (۴۴.۴)$$

به‌ترتیب به‌ازای $n=۱, ۳, ۵, ۷, \ldots$ به‌دست آورد. به‌علاوه بااستفاده ازهمان مقادیر $x_۱$ و $y_۱$، همهٔ جوابهای مثبت معادلهٔ $x^۲-Ny^۲=۱$ از

$$x_n+y_n\sqrt{N}=(x_۱+y_۱\sqrt{N})^n \qquad (۴۵.۴)$$

به‌ازای $n=۲, ۴, ۶, \ldots$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۳. جدول ۲ نشان می‌دهد که $x_۱=۳$ و $y_۱=۱$ جواب مینیمال معادلهٔ $x^۲-۱۰y^۲=-۱$ است. جواب دوم‌را می‌توان با قرار دادن $n=۳$ در(۴۴.۴) به‌دست آورد. داریم

$$x_۳+y_۳\sqrt{۱۰}=(۳+۱\sqrt{۱۰})^۳=۱۱۷+۳۷\sqrt{۱۰},$$

پس $x_۳=۱۱۷$ و $y_۳=۳۷$؛ که یك جواب معادله است، زیرا

$$(۱۱۷)^۲-۱۰(۳۷)^۲=۱۳۶۸۹-۱۳۶۹۰=-۱$$

اگر در (۴۵.۴)، $n=۲$ را انتخاب کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$x_۲+y_۲\sqrt{۱۰}=(۳+۱\sqrt{۱۰})^۲=۱۹+۶\sqrt{۱۰}$$

نتیجه‌می‌گیریم $x_۲=۱۹$، $y_۲=۶$، و $۱۹^۲-۱۰\times۶^۲=۱$ یعنی‌این‌عددها جواب $x^۲-۱۰y^۲=۱$ هستند.

در پایان این بخش متذکر می‌شویم که، مطالعهٔ معادلهٔ $x^۲ - Ny^۲ = ۱$ مقدمه‌ای است برمطالعهٔ معادله‌های درجهٔ دوم دومجهولی کلیتر، معادله‌هایی به‌صورت

$$Ax^۲ + Bxy + Cy^۲ + Dx + Ey + F = ۰,$$

که A، B، C، D، E، و F عددهای‌صحیح معلوم و x و y عددهای صحیح مجهول‌اند. جوابهای این معادله را (درصورت وجود)، می‌توان با تغییرات خاصی روی x و y به‌جوابهای متناظری از معادلهٔ $x^۲ - Ny^۲ = M$ وابسته کرد. این‌کار مشتمل بر یك مطالعهٔ وسیع است و ما باید به‌همین مقدمه اکتفا کنیم.

مجموعه مسأله‌های ۲۰

۱. جدول ۲ نشان می‌دهد که $x_۱ = ۱۷$ و $y_۱ = ۴$ جواب مینیمال معادلهٔ $x^۲ - ۱۸y^۲ = ۱$ است. بااستفاده از قضیهٔ ۴.۴، دو جواب بعدی این معادله را پیدا کنید.

۲. جدول ۲ نشان می‌دهد که $x_۱ = ۱۸$، $y_۱ = ۵$ جواب مینیمال معادلهٔ $x^۲ - ۱۳y^۲ = -۱$ است. با استفاده ازقضیهٔ ۵.۴ جواب بعدی این معادله را پیدا کنید. همچنین دوجواب معادلهٔ $x^۲ - ۱۳y^۲ = ۱$ را به‌دست آورید.

۳. معادلهٔ فیثاغورسی $x^۲ + y^۲ = z^۲$ را درنظر بگیرید، اگر m و n عددهای صحیح باشند، آن‌گاه مقادیر

$$x = ۲mn, \quad y = m^۲ - n^۲, \quad z = m^۲ + n^۲$$

همواره جوابهای صحیح معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ را به‌دست می‌دهند. زیرا اتحاد زیر همواره برقرار است:

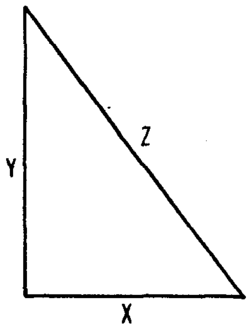
$$(۲mn)^۲ + (m^۲ - n^۲)^۲ = (m^۲ + n^۲)^۲$$

اینك این مسأله را مطرح می‌کنیم که همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه به‌ضلعهای x و y را بیابیم که x و y عددهای صحیح‌متوالی‌باشند، شکل ۱۱ را ببینید. دراین‌صورت

$$y - x = m^۲ - n^۲ - ۲mn = (m-n)^۲ - ۲n^۲ = \pm ۱.$$

فرض کنید $m - n = u$، $n = v$، پس $m = u + n = u + v$. اکنون مسأله، به‌پیداکردن جوابهای صحیح معادلهٔ

$$u^۲ - ۲v^۲ = \pm ۱$$



شکل ۱۱

می‌انجامد. این معادله‌را حل کرده وچهارجواب نخست $z^{۲}=y^{۲}+x^{۲}$ را پیدا کنید به‌طوری که $y-x=\pm ۱$.

۴. مجموعهٔ عددهای‌صحیح (x, y, z) یعنی‌طول ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱۱ را چنان پیداکنید که وقتی این‌عددها افزایش‌یابند، θ، زاویهٔ بین x و z به $^\circ$۶۰ میل کند.

۵

آخرین گفتار

۱.۵ مقدمه

دراین‌فصل، از نتایجی که پس از کسب مهارت درمطالب چهار فصل اول‌حاصل‌می‌شود، برخی را اجمالاً بررسی می‌کنیم. پیش از این اشاره‌کردیم که مطالعهٔ همه جانبه‌ای درمورد معادلهٔ پل، $x^۲-Ny^۲=M$، امکانپذیر است واین‌مطالعه به‌جوابهای‌عمومی وصحیح معادلهٔ

$$Ax^۲+Bxy+Cy^۲+Dx+Ey+F=\circ$$

منجرمی‌شود. اما، در اینجا تأکید ما روی قضیه‌هایی است‌که به‌تقریب کردن عددی گنگ به‌صورت کسری گویا مربوط می‌شوند. اثبات این قضیه‌ها و قضیه‌های دیگر مربوط به‌آن‌را می‌توان درکتابهای نیون [۸]* وهاردی و رایت[۵]** پیداکرد.

۲.۵ صورت مسأله

درسراسراین فصل، α یك‌عددگنگ مفروض و $\frac{p}{q}$ یك‌کسرگویاست که در آن p و q

* Niven [8] ** Hardy and Wright [5]

عامل مشترك ندارند. روشن است که همواره می‌توان کسر گویای $\frac{p}{q}$ با مخرج مثبت را پیدا کرد که به‌قدر دلخواه به α نزدیك باشد؛ به‌عبارت دیگر، اگر ε عدد داده‌شده‌ای، هرقدرهم کوچك باشد، همواره عددهای نسبت به‌هم اول p و q را می‌توان یافت که

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\varepsilon. \tag{۱.۵}$$

اما نکتهٔ جالب این نیست، آنچه که ما یلیم بدانیم این است که در رابطهٔ (۱.۵)، بامعلوم بودن α و ε، q چقدر باید بزرگ باشد؟ یا، بامعلوم‌بودن α و q، ε را چقدر می‌توان کوچك کرد؟

پیش ازاین‌کارهایی در این راستا انجام داده‌ایم. درقضیهٔ ۹.۳ فصل ۳، ثابت کردیم که اگر α گنگ باشد، بینهایت کسر گویا به‌صورت $\frac{p}{q}$، $q>0$، وبه‌ساده‌ترین صورت وجود دارد، که

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}. \tag{۲.۵}$$

هریك ازهمگراهای $\frac{p_1}{q_1}$، $\frac{p_2}{q_2}$، . . .، $\frac{p_n}{q_n}$، . . . از بسط کسر مسلسل α، می‌تواند به جای کسر $\frac{p}{q}$ در (۲.۵) به‌کار رود.

قضیهٔ زیر، که بدون اثبات بیان می‌شود، نابرابری (۲.۵) را روشنتر بیان می‌کند.

قضیهٔ ۱.۵. از هر دو همگرای متوالی $\frac{p_n}{q_n}$ و $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ بسط کسر مسلسل α، دست‌کم یکی از آنها (که آن را $\frac{p}{q}$ می‌نامیم) درنابرابری

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2} \tag{۳.۵}$$

صدق می‌کند.

علاوه براین، نابرابری (۳.۵) دارای این ویژگی جالب هم هست که اگر α

عددی گنگ و $\frac{p}{q}$ کسری گویا به‌ساده‌ترین صورت باشد و $q \geqslant ۱$، به‌طوری که

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{۱}{۲q^{۲}}$$

آن‌گاه می‌توان ثابت کرد که $\frac{p}{q}$ لزوماً یکی از همگراهای بسط کسر مسلسل سادهٔ α است.

۳.۵ قضیهٔ هورویتس[1]

در رابطه با تقریبهای بهتر، نابرابری (۳.۵) این سؤال را تداعی می‌کند: به‌ازای عدد گنگ α، آیا عدد $k>۲$ وجود دارد که نابرابری

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{۱}{kq^{۲}},\quad q\geqslant ۱ \tag{۴.۵}$$

بینهایت جواب p/q داشته باشد؟ اگر چنین است، k تا چه حد می‌تواند بزرگ باشد؟

می‌توان نشان داد که، اگر $[a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_{n}, \ldots]$ بسط کسر مسلسل α، و اگر p_n/q_n همگرای nام این کسر باشد، آن‌گاه

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{۱}{a_n q_n^{۲}}. \tag{۵.۵}$$

از این‌رو اگر عددهای $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، a_n، ... خیلی سریع بزرگ شوند، می‌توان تقریبهای بسیار خوبی برای α به‌دست آورد. از طرف دیگر اگر در دنبالهٔ $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، a_n، ... بدون توجه به‌اینکه چقدر پیش رویم، عددهایی کوچک وجود داشته باشند، آن‌گاه تقریب p_n/q_n به‌ازای a_n کوچک، نمی‌تواند تقریب خیلی خوبی باشد.

از نقطه‌نظر تقریب، «ساده‌ترین» عددها، بدترین به‌معنای زیر هستند: «ساده‌ترین» عدد گنگ

$$\xi=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}=[۰, ۱, ۱, \ldots]=[۰, \overline{۱}]$$

1. Hurwitz

است، که در آن هر a_i کوچکترین مقدار ممکن را دارد. همگراهای ξ، کسرهای

$$\frac{۰}{۱}, \frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۵}, \frac{۵}{۸}, \ldots$$

هستند، به‌طوری‌که $q_{n-۱} = p_n$ و

$$\frac{q_{n-۱}}{q_n} = \frac{p_n}{q_n} \to \xi.$$

می‌توان نشان داد که به‌ازای مقدار بسیار بزرگ n، عبارت

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲} - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

به $۱/\sqrt{۵}\, q_n^۲$ نزدیك ونزدیکتر می‌شود.

این ملاحظات بردرستی قضیهٔ زیر دلالت دارند که برای نخستین بار در سال ۱۸۹۱ هورویتس آن‌را ثابت کرد.

قضیهٔ ۲.۵. هر عدد گنگ α، دارای بینهایت تقریب گویای p/q است، که درنابرابری

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{۱}{\sqrt{۵} q^۲}, \quad q \geqslant ۱ \qquad (۶.۵)$$

صدق می‌کنند. عدد $\sqrt{۵}$ بهترین‌عدد ممکن‌است. قضیه به‌ازای هرعدد بزرگتر از $\sqrt{۵}$ نادرست است.

منظور از «نادرست» دراینجا، این است که اگرهرعدد $k > \sqrt{۵}$ جانشین $\sqrt{۵}$ شود، آن‌گاه به‌ازای α تنها تعدادی متناهی از تقریبهای گویای p/q وجود خواهند داشت و نه تعدادی نامتناهی. درمورد اینکه $\sqrt{۵}$ بهترین عدد ممکن به‌این معناست، نیون [۸] اثباتی مقدماتی ارائه می‌دهد.

یك اثبات (از طریق کسرهای مسلسل) قضیهٔ ۲.۵ براین واقعیت استوار است که دربسط کسرمسلسل α، بعد ازهمگرای اول، حداقل یکی ازسه همگرای‌متوالی در نابرابری (۶.۵) صدق می‌کند.

دراثبات اصلی قضیهٔ ۲.۵، هورویتس از کسرهای مسلسل استفاده‌نمی‌کند؛ بلکه وی مبانی اثبات خود را بر ویژگیهای کسرهایی به‌نام دنباله‌های فیری[1] پی‌ریزی

1. Farey

می‌کند. به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n، مجموعهٔ عددهای گویای a/b که مرتب‌صعودی باشند و $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$ و $(a, b)=1$، به نام دنبالهٔ F_n تعریف می‌شود. نخستین چهار دنبالهٔ اول F_n عبارت‌اند از:

$$F_1: \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$F_2: \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$F_3: \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$F_4: \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}.$$

این دنباله‌ها ویژگیهای مفید زیادی دارند؛ یکی از مهمترین این ویژگیها در رابطه با بحث ما این‌است: اگر به‌ازای هر n، عدد گنگ $0<\beta<1$ بین دو کسر متوالی p/q و r/s از دنبالهٔ F_n قرار گیرد، آن‌گاه می‌توان دست‌کم یکی از سه نسبت p/q، $(p+r)/(q+s)$، r/s را در نابرابری

$$\left|\beta-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,y^2}$$

به‌جای x/y قرار داد.

به‌منظور آنکه این نابرابری به‌ازای عددگنگ $\alpha>1$ نیز برقرار باشد، فرض می‌کنیم $\beta=\alpha-n$ که در آن n بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از α است. با قرار دادن این β درنابرابری فوق، به‌دست می‌آوریم

$$\left|\alpha-\left(n+\frac{x}{y}\right)\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,y^2} \quad \text{یا} \quad \left|\alpha-\frac{x'}{y}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,y^2},$$

که در آن $x'=ny+x$. این‌مطلب محور اصلی اثبات هورویتس را تشکیل می‌دهد. تفصیلات کامل را در کتاب لووك [7][1] ببینید.

---

1. Leveque [7]

ریاضیدانها هرگز به «بهترین نتیجهٔ ممکن»، نظیر ثابت $\sqrt{5}$ در قضیهٔ ۲.۵، اکتفا نمی‌کنند. ظاهراً این‌گونه گزاره‌ها همواره پژوهشهای بیشتری را موجب می‌شوند. اگر ردهٔ خاصی از گنگها را کنار هم بگذاریم، آیا می‌توان ثابت قضیه را با عدد بزرگتری جانشین کرد؟ در حقیقت بله. ردهٔ گنگهایی که باید حذف شوند متشکل از همهٔ عددهایی است که با عدد بحرانی $\xi=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ هم‌ارزند؛ همان عددکه موجب پذیرش $\sqrt{5}$ به‌عنوان «بهترین ثابت ممکن» در نابرابری (۶.۵) شد. نشان خواهیم داد که همهٔ عددهای هم‌ارز با ξ، درآخر بسط کسر مسلسلشان، همان دورهٔ گردش ξ را دارند، و بنا بر این تقریب زدنشان بسیار مشکل است.

تعریف: عدد x را هم‌ارز باعدد y می‌نامیم(و می‌نویسیم $x\sim y$)، اگرعددهای صحیح a، b، c، d باشرط

$$ad-bc=\pm 1 \tag{۷.۵}$$

وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که بتوان x را برحسب y به‌صورت کسر

$$x=\frac{ay+b}{cy+d} \tag{۸.۵}$$

بیان کرد. مثلاً اگر $y=\sqrt{2}$ و $x=(2\sqrt{2}+3)/(\sqrt{2}+1)$ آن‌گاه $x\sim y$، زیرا به‌ازای $a=2$، $b=3$، $c=1$ و $d=1$ داریم $x=(a\sqrt{2}+b)/(c\sqrt{2}+d)$ و $ad-bc=2-3=-1$. به‌سادگی می‌توان دید هم‌ارزیی‌که اکنون تعریف‌شد تمام ویژگیهای مقرر دریك رابطهٔ هم‌ارزی را دارد؛ یعنی

(۱) انعکاسی‌است، یعنی هر x هم‌ارزخودش است $(x\sim x)$.

(۲) متقارن است، یعنی، اگر $x\sim y$ آن‌گاه $y\sim x$.

(۳) ترایاست، یعنی، اگر $x\sim y$ و $y\sim z$ آن‌گاه $x\sim z$.

یك رابطهٔ هم‌ارزی مجموعهٔ اعداد را به رده‌های هم‌ارزی تقسیم می‌کند، به‌نحوی که هرعدد تنها وتنها به‌یك ردهٔ هم‌ارزی تعلق دارد.

اکنون اگرعدد حقیقی α دارای بسط کسرمسلسل

$$\alpha=[a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}],$$

باشد، از

$$\alpha=\frac{\alpha_{n+۱}p_n+p_{n-۱}}{\alpha_{n+۱}q_n+q_{n-۱}}$$

و $p_nq_{n-۱}-p_{n-۱}q_n=(-۱)^n$ (قضیهٔ ۴.۱ را ببینید) نتیجه می‌شود که $\alpha\sim\alpha_{n+۱}$ [با (۷.۵) و (۸.۵) مقایسه کنید]. از این‌رو اگر α و β دو عدد حقیقی دلخواه با بسطهای کسر مسلسل

$$\alpha=[a_۱, a_۲, \cdots, a_n, \alpha_{n+۱}], \quad \beta=[b_۱, b_۲, \cdots, b_m, \beta_{m+۱}]$$

باشند، و اگر $\alpha_{n+۱}=\beta_{m+۱}$ آن‌گاه $\alpha\sim\alpha_{n+۱}\sim\beta_{m+۱}\sim\beta$، بنابراین $\alpha\sim\beta$. به‌ویژه هر دو عدد گویای x و y هم‌ارزند، زیرا بسط کسر مسلسل آنها را همواره می‌توان به‌صورت

$$x=[a_۱, a_۲, \cdots, a_n, ۱]$$

$$y=[b_۱, b_۲, \cdots, b_m, ۱]$$

نوشت و چون $۱\sim۱$، پس $x\sim y$.

به‌این پرسش که چه وقت یك عدد گنگ هم‌ارز با عدد گنگ دیگر است، قضیهٔ زیر، که بدون اثبات آمده است، پاسخ می‌دهد:

قضیهٔ ۳.۵. دو عدد گنگ α و β هم‌ارزند اگر و تنها اگر

$$\alpha=[a_۱, a_۲, \cdots, a_m, c_۰, c_۱, c_۲, \cdots]$$

$$\beta=[b_۱, b_۲, \cdots, b_n, c_۰, c_۱, c_۲, \cdots],$$

یعنی، اگر و تنها اگر دنبالهٔ خارج قسمتهایی که در α ازجملهٔ بعد از خارج قسمت mام شروع می‌شود همان باشد که در β ازجملهٔ بعد از خارج قسمت nام شروع می‌شود.

اکنون به‌قضیهٔ هورویتس برمی‌گردیم. تعداد بینهایت عدد گنگ هم‌ارز با $\xi=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$ وجود دارد؛ فرض می‌کنیم که هریك از این عددها به کسر مسلسل ساده‌ای بسط داده شده باشد. دراین‌صورت بنا بر قضیهٔ ۳.۵، ازمرحله‌ای به بعد، هر یك از این بسطها همان دنبالهٔ خارج‌قسمتهای $c_۰, c_۱, c_۲, \ldots$ را خواهد داشت که دیگری دارد، ودرنتیجه تمام این گنگهای هم‌ارز، همان نقش را درقضیهٔ هورویتس دارند که $\xi=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$ دارد. به‌نظر منطقی می‌رسد که حدس بزنیم اگر عدد ξ و تمام

گنگهای هم‌ارز آن را از بحث خارج کنیم، آن‌گاه ثابت $\sqrt{5}$ در قضیهٔ هورویتس را می‌توان باعدد بزرگتری جایگزین کرد، درحقیقت قضیهٔ زیر را می‌توان ثابت کرد.

قضیهٔ ۴.۵. هر عدد گنگ β که با $\xi=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ هم‌ارز نباشد، دارای بینهایت تقریب گویای p/q است که در نابرابری

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{8}\,q^2} \tag{9.5}$$

صدق می‌کنند.

قضیه‌های زیادی نظیر این قضیه وجـود دارد. مثلاً اگر β با $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ یا بـا $\sqrt{2}$ هم‌ارز نباشد، آن‌گاه عدد $\sqrt{8}$ در (۹.۵) را می‌توان باهرعدد نابزرگتر از $\sqrt{221}/5$ جایگزین کرد.

اخیراً به‌تقریبهای «قناس» یا غیرمتقارن عددهای گنگ علاقـه نشان داده شده است. مثلاً قضیهٔ زیر که سگره[1] درسال ۱۹۴۹ آن‌را اثبات کرد، و اخیراً ایوان نیون* اثبات بسیار ساده‌ای از آن‌را با استفاده از دنباله‌های فیری ارائه داده است.

قضیهٔ ۵.۵. به‌ازای هرعدد حقیقی $r\geqslant 0$، عددگنگ α را می‌توان با بینهایت کسر گویای p/q به‌گونه‌ای تقریب کرد که

$$-\frac{1}{\sqrt{1+4rq^2}}<\frac{p}{q}-\alpha<\frac{r}{\sqrt{1+4rq^2}}$$

این قضیه به‌ازای $r=1$، همان قضیهٔ هورویتس است. بـه‌ازای $r\neq 1$ توجه داشته باشید که کران پایین صرفاً قرینهٔ کران بالا نیست وعبارت نامتقارن است.

رابینسن[2] (۱۹۴۷) با استفاده از کسرهای مسلسل، اثباتی برای قضیهٔ سگره ارائه داد وهمچنین ثابت کرد که به‌ازای $\varepsilon>0$، نابرابریهای

---

1. B. Segre

* *On Asymmetric Diophantine Approximations*, The Michigan Math. Journal, vol. 9, No.2, 1962, pp. 121–123.

2. R. M. Robinson

$$-\frac{1}{(\sqrt{5}-\varepsilon)q^2}<\frac{p}{q}-\alpha<\frac{1}{(\sqrt{5}+1)q^2}$$

بینهایت جواب دارند. این نتیجه جالب است، زیرا نشان می‌دهد که می‌توان یك طرف نابرابری هورویتس‌را تقویت کرد بدون آنکه تضعیف طرف دیگر ضرورت داشته باشد.

۴.۵ نتیجه

قضیهٔ هورویتس نمونه‌ای ازدسته‌ای کامل ازقضیه‌ها ومسأله‌هایی است که زیرعنوان کلی تقریبهای دیوفانتی بررسی می‌شوند. این موضوع سابقه‌ای طولانی دارد؛ اما هنوز مسأله‌های حل نشدهٔ زیادی درآن وجود داردکه برای حل مبارز می‌طلبند. درسالهای اخیر روشهای جدیدی برای حل مسأله‌های دراین زمینه ابداع شده است. اما برای کسانی که می‌خواهند در این موضوع تحقیق کنند، مطالعهٔ کسرهای مسلسل جاپای اساسی، واحتمالاً همیشگی، خواهد بود.

بدون تردید، در زمینهٔ تقریبهای دیوفانتی، راههای تحقیق برای دانشجویان علاقه‌مند باز است؛ این کتاب را می‌توان به‌عنوان نقطهٔ شروع مطالعهٔ بیشتر مبحثهای متنوع به‌کار برد. البته با خواندن کتابهایی نظیر پرون[1] [۱۱] می‌توان عمیقتر وارد موضوع کسرهای مسلسل شد. از طرف دیگر، موضوع به کسرهای مسلسل تحلیلی (وال[2] [۱۴] را ببینید) که استیلتیس[3] و دیگران آن را ابداع کرده‌اند، توسعه یافته که موضوعی است زیبا و درارتباط نزدیك باهندسهٔ اعداد؛ هندسه‌ای که مینکوفسکی[4] آن‌راپایه‌ریزی کرده‌است. برای آشنایی باهندسهٔ اعداد هاردی ورایت[۵] را ببینید.

مجموعه مسأله‌های ۲۱

۱. شش همگرای نخست $\alpha=\frac{1}{3}(1+\sqrt{10})$ را محاسبه کنید ونشان دهید که بعد از نخستین همگرا، از هرسه همگرای متوالی، دست‌کم یکی‌ازآنها در نابرابری هورویتس (۶.۵) صدق می‌کند.

۲. چهارسطر ازدنباله‌های فیری دراین بخش آمده‌است. سطر بعدی، F_5، را حساب کنید.

---

1. Perron [11] 2. Wall [14] 3. Stieltjes
4. Minkowski

۳. عدد $\alpha=\frac{1}{3}(\sqrt{10}-2)$ را بین دوعنصر متوالی p/q و r/s از دنبالهٔ فیری F_2 قرار دهید و تحقیق کنید که دست کم یکی از عددهای p/q، $(p+r)/(q+s)$ و r/s در نابرابری (۶.۵) صدق می کند.

۴. نشان دهید که $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ با $y=\frac{-10x+7}{7x-5}$ هم‌ارز است. x و y را به‌صورت کسرهای مسلسل ساده بسط دهید و با استفاده از آنها درستی قضیهٔ ۳.۵ را به‌طور عددی بیازمایید.

۵. ثابت کنید رابطهٔ هم‌ارزی که در این بخش تعریف شد (۱) انعکاسی، (۲) متقارن، و (۳) ترایاست.

پیوست ۱

اثبات اینکه $x^2-3y^2=-1$ جواب صحیح ندارد

برای اینکه نشان دهیم معادلهٔ $x^2-3y^2=-1$، نسبت به عددهای صحیح x و y قابل‌حل نیست، نخست توجه می‌کنیم که x و y نمی‌توانند هردو زوج یا هردو فرد باشند. زیرا درحالت نخست، اگر $x=2x_1$ و $y=2y_1$ هردو زوج باشند، آن‌گاه

$$x^2-3y^2=4(x_1^2-3y_1^2)$$

زوج است و نمی‌تواند برابر ۱− باشد. به‌همین نحو، درحالت دوم، اگر $x=2x_1+1$ و $y=2y_1+1$ هردو فرد باشند، آن‌گاه

$$x^2-3y^2=(2x_1+1)^2-3(2y_1+1)^2$$

$$=2(2x_1^2-6y_1^2+2x_1-6y_1-1)$$

نیز زوج است (دوبرابر یك‌عدد صحیح) و نمی‌تواند برابر ۱− باشد. بنابراین‌اگر $x^2-3y^2=-1$ دارای جواب صحیح باشد، آن‌گاه باید x زوج و y فرد؛ یا x فرد و y زوج باشد.

فرض کنید x زوج و y فرد باشد، یعنی $x=2x_1$ و $y=2y_1+1$، آن‌گاه

$$y^2=4y_1^2+4y_1+1=4y_1(y_1+1)+1 \qquad (1)$$

وچون y_1 و y_1+1 عددهای صحیح متوالی‌اند، یکی از آنها باید زوج باشد. پس $y_1(y_1+1)$ بر ۲ وبنابراین $4y_1(y_1+1)$ بر ۸ بخشپذیر است، و از (۱) نتیجه

می‌گیریم که $y^۲$ به‌صورت $۸n+۱$ است که در آن n یك عدد صحیح است. در نتیجه

$$x^۲-۳y^۲=(۲x_۱)^۲-۳(۸n+۱)=۴x_۱^۲-۲۴n-۳$$
$$=۴(x_۱^۲-۶n-۱)+۱=۴l+۱,$$

که در آن $l=x_۱^۲-۶n-۱$ یك عدد صحیح است. ولی عددی به‌صورت $۴l+۱$ نمی‌تواند برابر -۱ باشد، زیرا، دراین‌صورت، $۴l=-۲$، و بنابراین $l=-\frac{۱}{۲}$ عددی صحیح نخواهد بود. اثبات این‌مطلب راکه اگر $x^۲-۳y^۲=-۱$، آن‌گاه x نمی‌تواند فرد و y نمی‌تواند زوج باشد، به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

لذا جوابهای صحیح x و y برای معادلهٔ

$$x^۲-۳y^۲=-۱$$

وجود ندارد. درحقیقت اگر N به‌گونه‌ای باشد که $N-۳$ عدد صحیح مضرب ۴ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $x^۲-Ny^۲=-۱$ جواب ندارد. ازطرف دیگر، اگر $N=p$ عددی اول به‌صورت $۴k+۱$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $x^۲-py^۲=-۱$ همواره‌دارای جواب است.

معادلهٔ اخیر با قضیهٔ مشهوری که آن‌را فرما درسال ۱۶۴۰ بیان واویلر درسال ۱۷۵۴ اثبات کرد، ارتباط نزدیك دارد.

قضیه: هرعدد اول P به‌صورت $۴k+۱$ را می‌توان به‌صورت مجموع دومربع نوشت، و این نمایش یکتاست. یعنی، تنها یك‌جفت عدد صحیح P و Q وجود دارند که $p=P^۲+Q^۲$.

وقتی این قضیه ارائه شد، طبیعی بود که ریاضیدانها به‌دنبال روشهایی جهت محاسبهٔ‌عددهای P و Q برحسب عدد اول P باشند. دراین مورد، لژاندر (۱۸۰۸)، گاوس (۱۸۲۵)، سره (۱۸۴۸) ودیگران روشهایی را ارائه‌کرده‌اند. بدون آنکه وارد جزئیات اثبات شویم، نکته‌های اساسی روش لژاندر را معرفی می‌کنیم.

روش لژاندر براین حقیقت استوار است که دورهٔ‌گردش کسر مسلسل

$$\sqrt{p}=[a_۱,\overline{a_۲,a_۳,\cdots,a_n,۲a_۱}]=[a_۱,\overline{a_۲,a_۳,a_۴,\cdots,a_۴,a_۳,a_۲,۲a_۱}]$$

دارای یك جزء متقارن $a_۲, a_۳, a_۴, \ldots, a_۴, a_۳, a_۲$ است که $۲a_۱$ بعد از آن

می‌آید. اما، در بخش ۸.۴ ثابت کردیم که اگر جزء متقارن دارای جملهٔ میانی نباشد (n فرد باشد)، آن‌گاه معادلهٔ $x^۲-py^۲=-۱$ قابل حل است. عکس این مطلب نیز درست است، یعنی اگر $x^۲-py^۲=-۱$ قابل‌حل باشد،آن‌گاه درجزء متقارن دورهٔ گردش کسر مسلسل $\sqrt{p}$ جملهٔ میانی وجود ندارد، ازاین‌رو این کسر به‌صورت

$$\sqrt{p}=[a_۱, \overline{a_۲, a_۳, \cdots, a_m, a_m, \cdots, a_۳, a_۲, ۲a_۱}]$$

وهم‌ارزاست با:

$$\sqrt{p}=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\cdots+\frac{۱}{a_m+}\frac{۱}{\alpha_{m+۱}},$$

که در آن

$$\alpha_{m+۱}=[\overline{a_m, a_{m-۱}, \cdots, a_۳, a_۲, a_۲, a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_m}]$$

از وسط جزء متقارن شروع می‌شود. اما $\alpha_{m+۱}$ یك کسر مسلسل دوره‌ای محض است وازاین‌رو به‌صورت

$$\alpha_{m+۱}=\frac{P+\sqrt{p}}{Q}$$

درمی‌آید (قضیهٔ ۱.۴ را ببینید.) علاوه براین، دورهٔ گردش بسط $\alpha_{m+۱}$ متقارن است وبنابراین عدد β، که از $\alpha_{m+۱}$ با وارونه کردن دورهٔ گردش آن حاصل می‌شود، با $\alpha_{m+۱}$ برابراست. اما طبق قضیهٔ ۱.۴، مزدوج $\alpha_{m+۱}$ یعنی $\alpha'_{m+۱}$ به‌صورت

$$\alpha'_{m+۱}=-\frac{۱}{\beta},$$

با β دررابطه است. ازاین‌رو

$$\alpha'_{m+۱}\cdot\beta=\alpha'_{m+۱}\cdot\alpha_{m+۱}=-۱.$$

این بدان معناست که

$$\frac{P+\sqrt{p}}{Q}\cdot\frac{P-\sqrt{p}}{Q}=-۱$$

$$p=P^۲+Q^۲.$$

به‌عنوان مثال، به‌فرض $P=13=4\times3+1$ و با بسط $\sqrt{13}$ خواهیم داشت

$$\sqrt{13}=[a_1, \overline{a_2, a_3, a_3, a_2, 2a_1}]=[3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}],$$

بنا براین

$$\alpha_{m+1}=\alpha_3=[\overline{1, 1, 6, 1, 1}].$$

درنتیجه تنها کاری که باید انجام دهیم محاسبهٔ α_3 است. بنا براین

$$\sqrt{13}=3+\frac{1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1=\frac{3+\sqrt{13}}{4}=1+\frac{1}{\alpha_2},$$

$$\alpha_2=\frac{1+\sqrt{13}}{3}=1+\frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3=\frac{2+\sqrt{13}}{3}=\frac{P+\sqrt{p}}{Q},$$

پس $P=2$، $Q=3$ و

$$P=13=2^2+3^2.$$

مجموعه مسأله‌های ۲۲

۱. $p=29$ را به‌صورت مجموع دومربع بنویسید.

۲. $p=433$ را به‌صورت مجموع دومربع بنویسید.

۳. دو دسته‌سرباز هرکدام به‌صورت مربعی با b ردیف که هرردیف دارای b سرباز است، آرایش داده شده‌اند. نشان دهیدکه ترکیب این دو مربع از سربازان در یك مربع یکتا غیرممکن است.

همچنین نشان‌دهیدکه اگریك سرباز به‌یکی ازمربعها وارد یا ازآن خارج‌شود، درآن صورت ترکیب دودسته دریك مربع‌گاهی ممکن خواهد بود.

پیوست ۲

چند بسط گوناگون

درزیر مجموعهٔ کوچکی ازکسرهای مسلسل گوناگون راکه بیشترسابقهٔ تاریخی جالبی دارند ارائه می‌کنیم.* این مجموعه به‌کسرهای مسلسل ساده محدود نیست.

۱. بمبلی[1]، ۱۵۷۲. بانمادگذاری جدید اساساً می‌دانست که

$$\sqrt{۱۳} = ۳ + \cfrac{۴}{۶ + \cfrac{۴}{۶ + \ddots}} .$$

۲. کاتالدی[2]، ۱۶۱۳. بسط کسر مسلسل $\sqrt{۱۸}$ را به‌صورت

$$\sqrt{۱۸} = ۴.\& \frac{۲}{۸}.\& \frac{۲}{۸}.\& \frac{۲}{۸}.\ \ldots$$

وهمچنین به‌صورت زیر بیان کرد

$$\sqrt{۱۸} = ۴ \cdot \& \frac{۲}{۸.} \& \frac{۲}{۸.} \& \frac{۲}{۸.} \ldots .$$

---

* کتاب Smith [۱۳] را ببینید.

1. Bombelli   2. Cataldi

۰۳ لرد برونکر[1]، حدود ۱۶۵۸.

$$\frac{۴}{\pi}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۹}{۲+\cfrac{۲۵}{۲+\cfrac{۴۹}{۲+\cfrac{۸۱}{۲+\cdots}}}}}$$

این بسط ازنظر تاریخی باحاصلضرب نامتناهی

$$\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times۸\times۸}{۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times۷\times۷\times۹}\cdots$$

که والیس[2] آن را در سال۱۶۵۵ارائه داده است رابطهٔ نزدیك دارد. این‌هردو کشف مرحلهٔ مهمی درتاریخ $\pi=۳٫۱۴۱۵۹\ldots$ بوده‌اند.

۰۴ اویلر، ۱۷۳۷. وی بسطهای زیررا یافت‌که باعدد

$$e=۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹\ldots=\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n,$$

مبنای لگاریتم طبیعی سروکاردارند.

$$e-۱=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۴+\cdots}}}}}$$

$$=[۱,۱,۲,۱,۱,۴,۱,۱,۶,۱,۱,۸,\ldots].$$

1. Lord Brouncker 2. Wallis

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}.$$

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}.$$

آخرین بسط، تقریبی سریع برای e فراهم می‌کند. مثلاً، همگرای هفتم $(e-1)/2$ برابر است با ۳۹۸۹۵۹/۳۴۲۷۶۲. بنابراین، تقریباً داریم

$$e=\frac{1084483}{398959}=2.71828182845\ldots.$$

اختلاف این عدد با عدد e یک واحد در رقم دوازدهم بعد از ممیز است.

۵. لامبرت، ۱۷۶۶.

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\ddots}}}}.$$

$$\tan x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\ddots}}}}.$$

لامبرت بااستفاده ازاین بسطها نتیجه‌گرفت که

الف) اگر x عددی‌گویا وغیرصفر باشد، آن‌گاه e^x نمی‌تواند گویا باشد.
ب) اگر x عددی گویا وغیرصفر باشد، آن‌گاه $\tan x$ نمی‌تواند گویا باشد.

بنابراین‌چون $\tan(\pi/۴)=۱$، نه $\pi/۴$ ونه π هیچ‌کدام نمی‌توانندگویا باشند.
نقطه‌های‌ضعف‌اثبات‌لامبرت‌را‌لژاندر درکتاب *Elements de geometrie* (۱۷۹۴) تصحیح کرده است.

۶. لامبرت، ۱۷۷۰.

$$\pi=۳+\cfrac{۱}{۷+\cfrac{۱}{۱۵+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲۹۲+\ddots}}}}$$

$$=[۳,۷,۱۵,۱,۲۹۲,۱,۱,۱,۲,۱,۳,۱,۱۴,۲,۱,۱,۲,۲,۲,۲,۱,۸۴,۲,\dots].$$

برخلاف بسط e، به‌نظر نمی‌رسد که بسط کسر مسلسل سادهٔ $\pi=۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۶\dots$ دارای هیچ‌گونه نظمی باشد. همگراهای π عبارت‌اند از

$$\frac{۳}{۱},\ \frac{۲۲}{۷},\ \frac{۳۳۳}{۱۰۶},\ \frac{۳۵۵}{۱۱۳},\ \frac{۱۰۳۹۹۳}{۳۳۱۰۲},\ \frac{۱۰۴۳۴۸}{۳۳۲۱۵},\ \dots$$

کسر

$$\frac{۳۵۵}{۱۱۳}=۳٫۱۴۱۵۹۲۹۲۰۳۵\dots$$

π را باخطای حداکثر ۳ واحد در رقم هفتم بعدازممیز تقریب می‌کند.

۷. $$\sqrt{a^۲+b}=a+\cfrac{b}{۲a+\cfrac{b}{۲a+\cfrac{b}{۲a+\ddots}}},\quad a^۲+b>۰.$$

۰۸

$$\sqrt{۲}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\ddots}}}.$$

۰۹

$$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\ddots}}}.$$

همگراهای این‌عددعبارت‌اند از $\frac{۱}{۱}$، $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۵}{۳}$، $\frac{۸}{۵}$، . . .، هم صورت وهم‌مخرج ایـن‌کسرها هردو از دنبالهٔ عددهای فیبوناتچی ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، . . . تشکیل شده‌اند.

۰۱۰ اشترن[1]، ۱۸۳۳.

$$\frac{\pi}{۲}=۱-\cfrac{۱}{۳-\cfrac{۲\times۳}{۱-\cfrac{۱\times۲}{۳-\cfrac{۴\times۵}{۱-\cfrac{۳\times۴}{۳-\cfrac{۶\times۷}{۱-\cfrac{۵\times۶}{۳-\ddots}}}}}}}$$

۰۱۱

$$\sin x=\cfrac{x}{۱+\cfrac{x^۲}{(۲\times۳-x^۲)-\cfrac{۲\times۳x^۲}{(۴\times۵-x^۲)+\cfrac{۴\times۵x^۲}{(۶\times۷-x^۲)+\ddots}}}}.$$

---

1. Stern

۱۲. لامبرت، ۱۷۷۰.

$$\tan x=\cfrac{x}{۱-\cfrac{x^۲}{۳-\cfrac{x^۲}{۵-\cfrac{x^۲}{۷-\ddots}}}}.$$

۱۳. گاوس، ۱۸۱۲.

$$\tanh x=\cfrac{x}{۱+\cfrac{x^۲}{۳+\cfrac{x^۲}{۵+\ddots}}}.$$

۱۴. لامبرت، ۱۷۷۰؛ لاگرانژ، ۱۷۷۶.

$$\arctan x=\cfrac{x}{۱+\cfrac{۱x^۲}{۳+\cfrac{۴x^۲}{۵+\cfrac{۹x^۲}{۷+\cfrac{۱۶x^۲}{۹+\ddots}}}}},\quad |x|<۱$$

۱۵. لامبرت، ۱۷۷۰؛ لاگرانژ، ۱۷۷۶.

$$\log(۱+x)=\cfrac{x}{۱+\cfrac{۱^۲x}{۲+\cfrac{۱^۲x}{۳+\cfrac{۲^۲x}{۴+\cfrac{۲^۲x}{۵+\cfrac{۳^۲x}{۶+\cfrac{۳^۲x}{۷+\ddots}}}}}}},\quad |x|<۱$$

۱۶. لاگرانژ، ۱۸۱۳.

$$\log\frac{۱+x}{۱-x}=\cfrac{۲x}{۱-\cfrac{۱x^{۲}}{۳-\cfrac{۴x^{۲}}{۵-\cfrac{۹x^{۲}}{۷-\cfrac{۱۶x^{۲}}{۹-\ddots}}}}},\quad |x|<۱$$

۱۷. لاگرانژ، ۱۷۷۶.

$$(۱+x)^{k}=\cfrac{۱}{۱-\cfrac{kx}{۱+\cfrac{\frac{۱(۱+k)}{۱\times ۲}x}{۱+\cfrac{\frac{۱(۱-k)}{۲\times ۳}x}{۱+\cfrac{\frac{۲(۲+k)}{۳\times ۴}x}{۱+\cfrac{\frac{۲(۲-k)}{۴\times ۵}x}{۱+\cfrac{\frac{۳(۳+k)}{۵\times ۶}x}{۱+\ddots}}}}}}},\quad |x|<۱$$

۱۸. لاپلاس، ۱۸۰۵؛ لژاندر، ۱۸۲۶.

$$\int_{۰}^{x}e^{-u^{۲}}du=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}-\cfrac{\frac{۱}{۲}e^{-x^{۲}}}{x+\cfrac{۱}{۲x+\cfrac{۲}{x+\cfrac{۳}{۲x+\cfrac{۴}{x+\ddots}}}}},\quad x>۰.$$

این‌همان انتگرال احتمال است که در نظریهٔ احتمال و آمار به‌کار می‌رود.

حل مسأله‌ها

مجموعه مسأله‌های ۱

۱. (الف) [۱, ۱, ۱, ۵] (ب) [۱, ۱, ۱, ۵] (پ) [۳, ۱, ۱, ۵, ۱, ۳]
(ت) [۱, ۳, ۶, ۴, ۲] (ث) [۰, ۴, ۲, ۱, ۷]
(ج) [۳, ۲, ۱, ۶, ۲, ۲] (چ) [۳, ۷, ۱۵, ۱, ۲۵, ۱, ۷, ۴]

۲. $\frac{۹۳}{۲۹}$.

۳. $\frac{۱۱}{۳۱}$.

۴. $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}=۳٫۱۴۱۵۹۲۹۲۰۴\ldots$، و $\pi=۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۶\ldots$.

۵. (الف) [۰, ۱, ۱, ۱, ۵] (ب) [۰, ۱, ۱, ۱, ۵]

۶. اگر $p>q>۰$، آن‌گاه $\frac{p}{q}>۱$ و

$$\frac{p}{q}=[a_۱, a_۲, \ldots, a_n]=a_۱+\cfrac{۱}{a_۲+\cfrac{۱}{a_۳+\ddots+\cfrac{۱}{a_n}}},$$

که در آن a_1 عدد صحیح بزرگتر از صفر است. عکس $\frac{p}{q}$ برابر است با

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{\frac{p}{q}}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

$$=0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

$$=[0,a_1,a_2,\dots,a_n].$$

برعکس، اگر $q<p$، آن‌گاه $\frac{q}{p}$ به‌صورت

$$\frac{q}{p}=0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

است وعکس آن برابر است با

$$\frac{p}{q}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

مجموعه مسأله‌های ۲

۱. (الف) [۵, ۱, ۳, ۱]، [۵, ۱, ۴] (ب) [۰, ۵, ۱, ۴]، [۰, ۵, ۱, ۳, ۱]
(پ) [−۶, ۵]، [−۶, ۴, ۱] (ت) [۳, ۱, ۲۹, ۱]، [۳, ۱, ۳۰]
(ث) [−۴, ۳۱]، [−۴, ۳۰, ۱] (ج) [۰, ۳, ۱, ۳۰]، [۰, ۳, ۱, ۲۹, ۱]

۲. (الف) ۶۹، (ب) ۱، (پ) ۱۹، (ت) ۲۱.

مجموعه مسأله‌های ۳

۱. (الف) [۵, ۱, ۳, ۵]، همگراها: $\frac{۵}{۱}$، $\frac{۶}{۱}$، $\frac{۲۳}{۴}$، $\frac{۱۲۱}{۲۱}$.

(ب) [۳, ۱, ۱, ۲, ۱, ۱, ۱, ۱, ۲]، همگراها: $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۴}{۱}$، $\frac{۷}{۲}$، $\frac{۱۸}{۵}$، $\frac{۲۵}{۷}$، $\frac{۴۳}{۱۲}$، $\frac{۶۸}{۱۹}$، $\frac{۱۱۱}{۳۱}$، $\frac{۲۹۰}{۸۱}$.

(پ) [۰, ۱, ۱, ۱, ۱, ۵, ۱, ۸]، همگراها: $\frac{۰}{۱}$، $\frac{۱}{۱}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۱۷}{۲۸}$، $\frac{۲۰}{۳۳}$، $\frac{۱۷۷}{۲۹۲}$.

(ت) [۵, ۲, ۱۱]، همگراها: $\frac{۵}{۱}$، $\frac{۱۱}{۲}$، $\frac{۱۲۶}{۲۳}$.

۲. (الف) [۲, ۱, ۱, ۴, ۲] (ب) [۴, ۲, ۱, ۷, ۸]
(پ) [۰, ۴, ۲, ۵, ۱] (ت) [۴, ۲, ۷].

۳. تعداد خارج قسمتها زوج باشد: (الف) $\frac{p_۶}{q_۶}=\frac{۵۱}{۲۰}$، $\frac{p_۵}{q_۵}=\frac{۲۸}{۱۱}$، بنابراین

$$p_۶q_۵ - p_۵q_۶ = ۵۱ \times ۱۱ - ۲۸ \times ۲۰ = ۵۶۱ - ۵۶۰ = ۱,$$

(ب) ۱، (پ) ۱، (ت) ۱.

تعداد خارج قسمتها فرد باشد: (الف) [۲, ۱, ۱, ۴]، $\frac{p_۵}{q_۵}=\frac{۵۱}{۲۰}$، $\frac{p_۴}{q_۴}=\frac{۲۳}{۹}$،

ازاین‌رو

$$p_۵q_۴ - p_۴q_۵ = ۵۱ \times ۹ - ۲۳ \times ۲۰ = ۴۵۹ - ۴۶۰ = -۱,$$

(ب) ۱ −، (پ) ۱ −، (ت) ۱ −.

۴. $۱۳۹۳ = ۵ \times ۲۲۵ + ۵ \times ۴۳ + ۴ \times ۱۰ + ۳ \times ۳ + ۲ \times ۱ + ۲$.

۵. $[۵, ۱, ۴, ۱, ۳] = \frac{۱۳۴}{۲۳} = \frac{p_۵}{p_۴}$؛ این‌را باکسر اصلی مقایسه کنید.

به‌همین نحو، $[۵, ۱, ۴, ۱] = [۵, ۱, ۵] = \frac{۳۵}{۶} = \frac{q_۵}{q_۴}$.

۶. (الف) $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۲۲}{۷}$، $\frac{۳۳۳}{۱۰۶}$، $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$، $\frac{۹۲۰۸}{۲۹۳۱}$، $\frac{۹۵۶۳}{۳۰۴۴}$، $\frac{۷۶۱۴۹}{۲۴۲۳۹}$، $\frac{۳۱۴۱۵۹}{۱۰۰۰۰۰}$.

(ب) $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۸}{۳}$، $\frac{۱۱}{۴}$، $\frac{۱۹}{۷}$، $\frac{۸۷}{۳۲}$، $\frac{۱۰۶}{۳۹}$، $\frac{۱۳۵۹}{۵۰۰} = \frac{۲۷۱۸}{۱۰۰۰}$.

(پ) $\frac{۰}{۱}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱۰}{۲۱}$، $\frac{۲۱}{۴۴}$، $\frac{۵۲}{۱۰۹}$، $\frac{۷۳}{۱۵۳}$، $\frac{۱۲۵}{۲۶۲}$، $\frac{۲۳۲۳}{۴۸۶۹}$، $\frac{۴۷۷۱}{۱۰۰۰۰}$.

(ت) $\frac{۰}{۱}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۳}{۱۰}$، $\frac{۲۸}{۹۳}$، $\frac{۳۱}{۱۰۳}$، $\frac{۹۰}{۲۹۹}$، $\frac{۳۰۱}{۱۰۰۰}$.

۷. ازرابطهٔ $p_n = a_n p_{n-۱} + p_{n-۲}$ مشاهده می‌کنیم که

$$\frac{p_n}{p_{n-۱}} = a_n + \frac{۱}{\frac{p_{n-۱}}{p_{n-۲}}},$$

وازاین واقعیت که $p_{n-۱} = a_{n-۱}p_{n-۲} + p_{n-۳}$ می‌بینیم که

$$\frac{p_{n-۱}}{p_{n-۲}} = a_{n-۱} + \frac{۱}{\frac{p_{n-۲}}{p_{n-۳}}}.$$

به‌همین ترتیب

$$\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}=a_{n-2}+\frac{1}{\dfrac{p_{n-3}}{p_{n-4}}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{p_3}{p_2}=a_3+\frac{1}{\dfrac{p_2}{p_1}}=a_3+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_1}.$$

اکنون نتیجهٔ موردنظر با جانشین‌کردنهای متوالی از این معادله‌ها به‌دست می‌آید. حکم مسأله درمورد q_n/q_{n-1} به‌روشی مشابه ثابت می‌شود.

۸. موقع ساختن جدول همگراها، ازاین واقعیت که $p_n=np_{n-1}+p_{n-2}$، استفاده کردیم. دراین رابطه بهn به‌ترتیب‌اعداد n، $n-1$، $n-2$، ...، ۳، ۲، ۱ را نسبت‌دهید. معادله‌های زیر را به‌دست می‌آورید:

$$\begin{aligned}p_n&=np_{n-1}+p_{n-2}\\ p_{n-1}&=(n-1)p_{n-2}+p_{n-3}\\ p_{n-2}&=(n-2)p_{n-3}+p_{n-4}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ p_3&=3p_2+p_1\\ p_2&=2p_1+1\end{aligned}$$

باجمع کردن طرفهای راست وچپ این معادله‌ها، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}p_n+p_{n-1}+{}&p_{n-2}+\cdots+p_3+p_2+p_1\\ =np_{n-1}+{}&p_{n-2}\\ &+(n-1)p_{n-2}+p_{n-3}\\ &+(n-2)p_{n-3}+p_{n-4}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+3p_2+p_1\\ &+2p_1+1\\ &+p_1.\end{aligned}$$

p_n را درطرف چپ رها کنید وجمله‌های $p_{n-۱}$، $p_{n-۲}$، ...، $p_۲$، $p_۱$ را از دو طرف معادله کم کنید، عبارت مطلوب را به‌دست می آورید، یعنی

$$p_n=(n-۱)p_{n-۱}+(n-۱)p_{n-۲}+(n-۲)p_{n-۳}$$
$$+\cdots+۳p_۲+۲p_۱+(p_۱+۱).$$

مجموعه مسأله‌های ۴

۱.
$$p_۰q_{-۱}-p_{-۱}q_۰=۱\times۱-۰\times۰=۱=(-۱)^۰,$$
$$p_۱q_۰-p_۰q_۱=۳\times۰-۱\times۱=(-۱)^۱,$$
$$p_۲q_۱-p_۱q_۲=۴\times۱-۳\times۱=(-۱)^۲,$$

و غیره. حل قسمت دوم مسأله با محاسبات ساده‌ای صورت می‌گیرد.

مجموعه مسأله‌های ۵

۱. (الف) نشان دهید، $x=-۳y+t$ که در آن $t=\dfrac{۲-۲y}{۱۵}$. بنابراین $y=۱-۷t-u$، که درآن $u=t/۲$ یا $t=۲u$. ازاین‌رو

$$y=۱-۷(۲u)-u=۱-۱۵u,$$
$$x=-۳(۱-۱۵u)+۲u=-۳+۴۷u.$$

جواب مطلوب عبارت است از

$$x=-۳+۴۷u,\quad y=۱-۱۵u,\quad u=۰,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \pm۳,\ \cdots.$$

برای اینکه x و y هر دو مثبت باشند، u باید عددی صحیح باشد به طوری که $u<\dfrac{۱}{۱۵}$ و $u>\dfrac{۳}{۴۷}$. روشن است که چنین عدد صحیحی وجود ندارد؛ از این‌رو جواب صحیحی که هم x وهم y درآن مثبت باشند، وجود ندارد. توجه کنید که برخی از جوابها ممکن است صورت پارامتری دیگری داشته باشند ولی باز هم همان مقادیر x و y را به‌دست دهند.

(ب) $x=-۲+۷u, \quad y=۹-۳۱u, \quad u=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$

معادله جواب صحیح مثبت ندارد، زیرا عدد صحیح u وجودندارد که همزمان از $\frac{۹}{۳۱}$ کوچکتر و از $\frac{۲}{۷}$ بزرگتر باشد.

(پ) $x=-۶+۴۷u, \ y=۲-۱۵u, \ u=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$

معادله جواب مثبت ندارد.

(ت) $x=۳۴-۲۱w, \quad y=۱۳w-۷, \quad w=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$

برای جوابهای مثبت، w باید عدد صحیحی کوچکتر از $\frac{۳۴}{۲۱}$ و بزرگتر از $\frac{۷}{۱۳}$ باشد. بنابراین $w=۱$، و تنها جواب مثبت معادله عبارت است از $(x,y)=(۱۳,۶)$.

۲. معادلهٔ داده شده جواب صحیح ندارد. بااستفاده از روش اویلر به‌معادله‌هایی می‌رسیم که نمی‌توان آنهارا برحسب عددهای صحیح حل کرد. مثلا $x=۳-۳y-u$ که در آن $u=\frac{۱}{۶}(۱+۳y)$. اما به‌ازای هیچ مقدارصحیحی از y، u نمی‌تواند عددی صحیح باشد. چرا؟

۳. اگر این خط مستقیم بادقت رسم شود، باید از دو نقطهٔ $(x, y)=(۲, ۱۳)$ و $(x, y)=(۷, ۵)$ بگذرد.

۴. فرض کنید x تعداد اسبها و y تعداد گاوها باشد. در این صورت $۳۷x+۲۲y=۲۳۷۰$. جواب عمومی این معادله عبارت است از $x=۲۲t+۴$، $y=۱۰۱-۳۷t$. برای جوابهای مثبت، t باید عدد صحیحی بین $-\frac{۲}{۱۱}$ و $\frac{۱۰۱}{۳۷}$ باشد. ازاین‌رو $t=۰, ۱, ۲$ وجوابهای‌مثبت عبارت‌اند از

$(x, y)=(۴, ۱۰۱), (۲۶, ۶۴), (۴۸, ۲۷)$.

۵. $x=۱۵u-۵$، $y=۱۷u-۶$. برای جوابهای مثبت، لازم است که $u>\frac{۱}{۳}$ و $u>\frac{۶}{۱۷}$، بنابراین $u=۱, ۲, ۳, \ldots$.

۶. جواب معادلهٔ $9x+13y=u+v=84$ عبارت است از

$$x=5+13t \text{ و } y=3-9t$$

ازاین‌رو $u=9(5+13t)$ و $v=13(3-9t)$، که t عدد صحیح دلخواه است.

۷. جواب معادلهٔ $2x-3y=1$ عبارت است از $x=3u-1$، $y=2u-1$.
ازاین‌رو $N=20x+2=60u-18$، که در آن u عدد صحیح دلخواهی است. مثلاً، وقتی که $u=-1$،

$$N=-78=-4(20)+2=-3(30)-12.$$

مجموعه مسأله‌های ۶

(در تمام حالتها $t=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$)

۱. (الف) $\frac{13}{17}=[0, 1, 3, 4]$، $n=4$، $x_0=q_3=4$، $y_0=p_3=3$، ازاین‌رو

$$x=x_0+tb=4+17t, \quad y=y_0+ta=3+13t.$$

(ب) $\frac{13}{17}=[0,1,3,3,1]$، $n=5$، $x_0=q_4=13$، $y_0=p_4=10$، بنابراین

$$x=x_0+tb=13+17t, \quad y=y_0+ta=10+13t.$$

(پ) $\frac{65}{56}=[1,6,4,2]$، $n=4$، $x_0=q_3=25$، $y_0=p_3=29$، ازاین‌رو

$$x=25+56t, \quad y=29+65t.$$

(ت) $\frac{65}{56}=[1,6,4,1,1]$، $n=5$، $x_0=q_4=31$، $y_0=p_4=36$، ازاین‌رو

$$x=31+56t, \quad y=36+65t.$$

(ث) $\frac{56}{65}=[0, 1, 6, 4, 1, 1]$، $n=6$، $x_0=q_5=36$، $y_0=p_5=31$،
بنابراین

$$x=36+65t, \quad y=31+56t.$$

مجموعه مسأله‌های ۷

(درتمام حالتها $t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

۰۱ (الف) $x_0=4$، $y_0=3$، $c=5$، $x=cx_0+bt=20+17t$، $y=cy_0+at=15+13t$. آزمون جواب:

$$13(20+17t)-17(15+13t)=5.$$

(ب) $x_0=25$، $y_0=29$، $c=7$، $x=cx_0+bt=175+56t$، $y=cy_0+at=203+65t$.

(پ) $x_0=29$، $y_0=25$، یك جواب خصوصی $56x-65y=-1$ است؛ ازاین‌رو $c=3$، $x=cx_0+bt=87+65t$، $y=cy_0+at=75+56t$.

مجموعه مسأله‌های ۸

۰۱ (الف) بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك $(183(=3\times 61)$، $174(=2\times 3\times 29)$ برابر ۳است، وچون۳ عدد ۹ را می‌شمارد معادلهٔ داده‌شده حلپذیر است. دوطرف این معادله را بر ۳ تقسیم کرده و معادلهٔ حاصل یعنی $61x+58y=3$ را حل می‌کنیم. نخست معادلهٔ $61x+58y=1$ را حل می‌کنیم، دراین مورد از بسط $\frac{61}{58}=[1, 19, 2, 1]$ برمی‌آید که $x_0=q_{n-1}=39$ و $y_0=p_{n-1}=41$. از این‌رو جواب معادلهٔ داده شده بنا برمعادلهٔ (۲۸.۲)، عبارت است از

$$x=cq_{n-1}-tb=3\times 39-58t=117-58t,$$

$$y=at-cp_{n-1}=61t-3\times 41=61t-123.$$

(ب) دراین حالت باید معادلهٔ $61x-58y=3$ را حل کنیم. طبق معادلهٔ (۲۳.۲)، جواب معادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$x=cx_0+bt=117+58t, \quad y=cy_0+at=123+61t$$

(پ) این‌معادله حلپذیر نیست، زیرا $77=7\times 11$ و $63=3^2\times 7$ وبزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ۷۷ و ۶۳ برابر ۷ است که $40(=2^3\times 5)$ را نمی‌شمارد.
(ت) چون $34(=2\times 17)$ و $49(=7^2)$ نسبت به‌هم اول‌اند معادلهٔ داده شده را طبق روشهای بخش ۴.۲ حل می‌کنیم. جواب مطلوب عبارت است از

$$x=۶۵+۴۹t,\quad y=۴۵+۳۴t\,.$$

(ث) $x=۶۵-۴۹t$، $y=۳۴t-۴۵$.

(ج) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $(۷\times ۲^۳=)۵۶$ و $(۵\times ۲^۲=)۲۰$ برابر ۴ است و ۱۱ را نمی‌شمارد ومعادلهٔ داده‌شده جواب صحیح ندارد.

۲. جواب معادلهٔ $۱۱x+۷y=۶۸$ عبارت است از $x=۱۳۶-۷t$، $y=۱۱t-۲۰۴$. تنها جواب معادله وقتی که x و y هر دو مثبت باشند $x=۳$ و $y=۵$ است که به‌ازای $t=۱۹$ حاصل می‌شود.

۳. از راهنمایی درمسأله درمی‌یابیم که $۷x+۹y=۹۰$. جواب عمومی این‌معادله عبارت است از $x=۳۶۰-۹t$، $y=۷t-۲۷۰$. برای به‌دست‌آوردن‌مقادیر مثبت a و b کافی است شرطهای $x\geqslant ۰$ و $y\geqslant ۰$ برقرار باشند، یا اینکه t عدد صحیح نابزرگتراز $\frac{۳۶۰}{۹}$ وبزرگتر از $\frac{۲۷۰}{۷}$ باشد. بنابراین‌می‌توانیم $t=۳۹$ یا $t=۴۰$ را انتخاب کنیم.

به‌ازای $t=۳۹$؛ $x=۹$، $y=۳$، $a=۶۸$ و $b=۳۲$.

به‌ازای $t=۴۰$؛ $x=۰$، $y=۱۰$، $a=۵$ و $b=۹۵$.

۴. جواب عمومی عبارت است از $x=۱۲۰۰-۱۷t$، $y=۱۳t-۹۰۰$. مقدار $t=۷۰$ به‌تنها جواب مثبت $x=۱۰$، $y=۱۰$ منجرمی‌شود.

مجموعه مسأله‌های ۹

۱. بسطها درصورت مسأله‌ها داده‌شده‌اند. پنج همگرای اول آنها عبارت‌اند از:

(الف) $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۵}{۲}$، $\frac{۲۲}{۹}$، $\frac{۴۹}{۲۰}$، $\frac{۲۱۸}{۸۹}$

(ب) $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۵}{۲}$، $\frac{۸}{۳}$، $\frac{۳۷}{۱۴}$

(پ) $\frac{۶}{۱}$، $\frac{۷}{۱}$، $\frac{۱۳}{۲}$، $\frac{۴۶}{۷}$، $\frac{۵۹}{۹}$

(ت) $\frac{۱}{۱}$، $\frac{۶}{۵}$، $\frac{۱۳}{۱۱}$، $\frac{۴۵}{۳۸}$، $\frac{۱۰۳}{۸۷}$

(ث) $\frac{۰}{۱}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۳}{۱۱}$، $\frac{۴}{۱۵}$.

۲. (الف) فرض کنید $x=[۲, \overline{۲, ۴}]=۲+\frac{۱}{y}$، $y=۲+\frac{۱}{۴+\frac{۱}{y}}$. بنابراین

$y=\frac{۲+\sqrt{۶}}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۶}-۲}$ و $x=۲+(\sqrt{۶}-۲)=\sqrt{۶}$.

(ب) فرض کنید $x=۵+\frac{۱}{y}$، $y=۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱۰+\frac{۱}{y}}}}$، آن‌گاه

$۷y^۲-۱۰y-۱=۰$ یا $y=\frac{۵+\sqrt{۳۲}}{۷}=\frac{۱}{\sqrt{۳۲}-۵}$.

ازاین‌رو $x=۵+(\sqrt{۳۲}-۵)=\sqrt{۳۲}$.

۳. برای نشان دادن اینکه $AH=\frac{۴۲}{۷^۲+۸^۲}$، با توجه به‌شکل ۳ صورت مسأله، در مثلث AOD داریم $(AD)^۲=\frac{۷^۲+۸^۲}{۸^۲}$. از مثلثهای متشابه AGF و AOD به‌دست می‌آید:

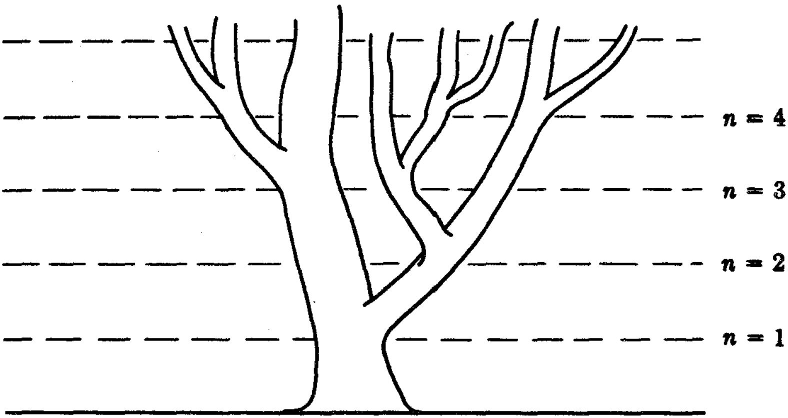
$$\frac{AF}{AG}=\frac{AD}{۱},\quad \frac{(AF)^۲}{(AG)^۲}=(AD)^۲,\quad (AG)^۲=\frac{(AF)^۲}{(AD)^۲},$$

وچون $AF=۱/۲$،

$$(AG)^۲=\frac{۴۲}{۷^۲+۸^۲}$$

ازطرف دیگردرمثلثهای متشابه AHF و AGD داریم $AF/AD=AH/AG$. اما از قبل می‌دانیم که $AF/AD=AG/۱$. پس از تقسیم این‌دو برهم خواهیم داشت

$$۱=\frac{AH}{(AG)^۲},\quad AH=\frac{۴۲}{۷^۲+۸^۲}.$$



شکل ۱۲

۶. در سال nام، F_n، تعداد کل شاخه‌ها، متشکل است از O_n، تعداد شاخه‌هایی که حداقل یکساله‌اند و Y_n، تعداد شاخه‌هایی که کمتر از یك سال دارند، یعنی $F_n = O_n + Y_n$. درسال بعد تعداد شاخه‌ها عبارت خواهد بود از

$$F_{n+۱} = ۲O_n + Y_n = O_n + O_n + Y_n = F_n + O_n$$

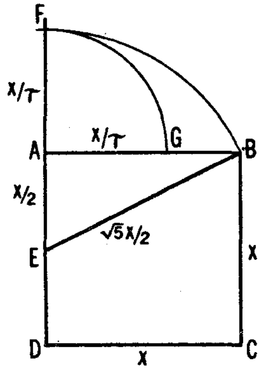
چون تعداد شاخه‌های حداقل یکساله با تعداد کل شاخه‌های یك سال قبل برابر است، $O_n = F_n$، پس به‌ازای $n = ۲, ۳, \ldots$؛

$$F_{n+۱} = F_n + F_{n-۱}$$

و $F_۱ = ۱$ (زیرا در سال اول تنها تنهٔ درخت وجود داشت) واین همان فرمول بازگشتی عددهای فیبوناتچی است.

۸. راه حل اول: طبق شکل ۱۳ (الف)، مربع $ABCD$ به ضلع $AB = x$ را رسم می‌کنیم؛ نقطهٔ E را [روی AD] چنان انتخاب می‌کنیم که $AE = ED$. آن‌گاه $EB = \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}\,x$ را رسم می‌کنیم. به‌مرکز E و به‌شعاع EB، کمان BF را رسم می‌کنیم. دراین‌صورت

$$AF = EF - AE = \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}x - \frac{۱}{۲}x = \frac{۱}{۲}x(\sqrt{۵} - ۱) = \frac{x}{\tau},$$



شکل ۱۳ (الف)

که در آن $\tau = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$. اکنون به‌مرکز A و به‌شعاع AF کمان FG را رسم می‌کنیم. روشن است که $AG = x/\tau$. بنابراین

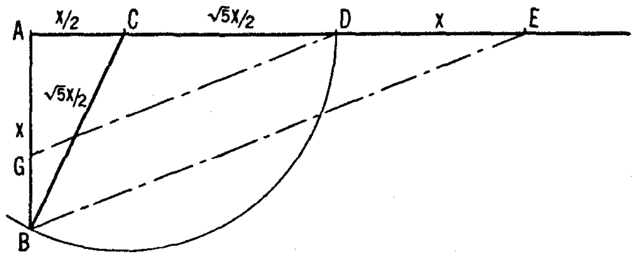
$$GB = AB - AG = x - \frac{x}{\tau} = x\left(۱ - \frac{۱}{\tau}\right) = x\left(\frac{\tau - ۱}{\tau}\right) = \frac{x}{\tau^{۲}}.$$

درنتیجه،

$$\frac{AG}{GB} = \frac{x/\tau}{x/\tau^{۲}} = \tau; \quad AG = \tau(GB).$$

راه‌حل دوم: مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC را مطابق‌شکل ۱۳ (ب) چنان رسم می‌کنیم که $AB = x$ و $AC = \frac{x}{۲}$. با رسم دایرهٔ به‌مرکز C و به‌شعاع $BC = \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}\,x$ نقطهٔ D را [برامتداد AC] به‌دست می‌آوریم. دراین‌صورت $AC + CD = \tau x$، که در آن $\tau = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$. [برامتداد AD] نقطهٔ E را چنان انتخاب می‌کنیم که $DE = AB = x$ و BE و همچنین GD را موازی آن رسم می‌کنیم. دراین صورت

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AD}{DE} = \frac{\tau x}{x} = \tau; \quad AG = \tau(GB)$$

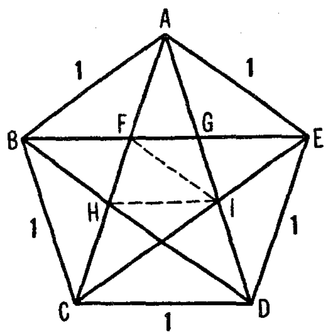


شکل ۱۳(ب)

۹. در پنج‌ضلعی‌منتظم $ABCDE$ به‌ضلع ۱، نخست ثابت‌می‌کنیم که AD با BC و BE با CD موازی‌است. از این‌رو $BG=CD$. به‌همین‌ترتیب، ثابت‌می‌کنیم که HI موازی BE و BH موازی FI است و بنابراین $HI=BF$. با استفاده‌از مثلثهای متشابه، مشاهده می‌کنیم که $AD/AI=CD/HI$. اما $CD=BG=AI$ و $HI=BF=ID$، بنابراین $AD/AI=AI/ID$، یا $(AD)(ID)=(AI)^۲$. اما $AI=۱=BC$، و اگر فرض کنیم $AD=x$، آن‌گاه $ID=x-۱$ و بنابراین:

$$x(x-۱)=۱;\quad x^۲-x-۱=۰$$

در نتیجه $x=\tau=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$. با استفاده از نتایج مسألهٔ ۸، پاره‌خطی به‌طول τ را می‌توان رسم کرد. بنابراین،



شکل ۱۴

برای رسم یك پنج ضلعی منتظم، پاره خط $CD=۱$ را رسم می‌کنیم؛ و با رسم دایره‌های به‌مرکزهای C و D و به‌شعاع $AC=CD=\tau$، نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه چون $AB=BC=AE=DE=۱$ نقطه‌های B و E را نیز می‌توان به‌دست آورد.

مجموعه مسأله‌های ۱۰

۱. دربسط $\sqrt{۲}=[۱,\overline{۲}]$، همگراهای فرد عبارت‌اند از $\frac{۱}{۱}$، $\frac{۷}{۵}$، $\frac{۴۱}{۲۹}$، . . . و همگی از . . . $\sqrt{۲}=۱٫۴۱۴$ کوچکترند. همگراهای زوج عبارت‌اند از $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۱۷}{۱۲}$، $\frac{۹۹}{۹۰}$، . . . وهمگی از $\sqrt{۲}$ بزرگترند. به‌علاوه $\frac{۳}{۲}>\frac{۷}{۵}>\frac{۱}{۱}$ و غیره.

مجموعه مسأله‌های ۱۱

۱. $[۲,۵,۲,۱,۴,۵,۱,۲]=\frac{۲۸۹۳}{۱۳۲۳}$ و $c_۱=\frac{۲}{۱}$، $c_۲=\frac{۱۱}{۵}$، $c_۳=\frac{۲۴}{۱۱}$،

$c_۴=\frac{۳۵}{۱۶}$، $c_۵=\frac{۱۶۴}{۷۵}$، $c_۶=\frac{۸۵۵}{۳۹۱}$، . . . .

محاسبه نشان می‌دهد که

$$\left|\frac{۲۸۹۳}{۱۳۲۳}-\frac{۱۶۴}{۷۵}\right|<\frac{۱}{q_۵q_۶}<۰٫۰۰۰۵,$$

بنابراین تقریب مطلوب $\frac{۱۶۴}{۷۵}$ است. در این مسأله کافی است به جای $\frac{۱}{q_۵q_۶}$ از $\frac{۱}{q_۵^۲}$ استفاده کنیم، زیرا $\left(\frac{۱}{۷۵}\right)^۲<۰٫۰۰۰۵$.

۲. $\sqrt{۱۹}=۴٫۳۵۸۸۹\ldots=[۴,\overline{۲,۱,۳,۱,۲,۸}]$. همگراهای این کسرمسلسل عبارت‌اند از $\frac{۴}{۱}$، $\frac{۹}{۲}$، $\frac{۱۳}{۳}$، $\frac{۴۸}{۱۱}$، $\frac{۶۱}{۱۴}$، $\frac{۱۷۰}{۳۹}$، $\frac{۱۴۲۱}{۳۴۶}$، . . . .

همگرای $c_۷=\frac{۱۴۲۱}{۳۲۶}$ نتیجه می‌دهد $۱/q_۷^۲=۱/۳۲۶^۲<۰٫۰۰۰۰۰۵$،

ازاین‌رو $c_{۷}$ تقریب مطلوب است.

۳. پنج همگرای اول π عبارت‌اند از $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۲۲}{۷}$، $\frac{۳۳۳}{۱۰۶}$، $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$، $\frac{۱۰۳۹۹۳}{۳۳۱۰۲}$.
عددهای زیر را به‌نوبت محاسبه می‌کنیم،

$$\frac{۱}{۱\times ۷},\ \frac{۱}{۷\times ۱۰۶},\ \frac{۱}{۱۱۳\times ۳۳۱۰۲}.$$

مثلاً $\frac{۱}{۷\times ۱۰۶} = ۰٫۰۰۱۳۴\ldots$؛ بنابراین خطای استفاده از $\frac{۲۲}{۷}$ به جای π حداکثر برابر است با $۰٫۰۰۱۳۴\ldots$.

مجموعه مسأله‌های ۱۲

۱. $\alpha = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱) = [۰, ۱, ۱, ۱, \ldots]$. نقطه‌های

$$\begin{aligned}(x,y) &= (q_n, p_n)\\ &= (۱,۰), (۱,۱), (۲,۱), (۳,۲), (۵,۳), (۸,۵), (۱۳,۸), \ldots\end{aligned}$$

را تعیین و خط $y=\alpha x$ را که در آن $\alpha = ۰٫۶۲$ یك مقدار تقریبی $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$ است، رسم کنید.

۲. $\alpha = \sqrt{۳} = [۱, \overline{۱, ۲}]$. نقطه‌های

$$\begin{aligned}(x,y) &= (q_n, p_n)\\ &= (۱,۱), (۱,۲), (۳,۵), (۴,۷), (۱۱,۱۹), (۱۵,۲۶), \ldots\end{aligned}$$

را تعیین و خط $y=\sqrt{۳}\,x$، $\sqrt{۳} = ۱٫۷۳۲\ldots$ را رسم کنید.

مجموعه مسأله‌های ۱۳

۱. (الف) $x = \frac{۱}{۲}(۳+\sqrt{۱۳}) = ۳٫۳۰۲۷۷\ldots$. چندهمگرای اول عبارت‌اند از

$$\frac{۳۳}{۱۰}=۳٫۳۰۰۰\ldots,\quad \frac{۱۰}{۳}=۳٫۳۳۳۳\ldots,\quad \frac{۳}{۱}=۳٫۰۰۰\ldots$$

$$.\frac{۱۰۹}{۳۳}=۳٫۰۳۰۳\ldots$$

(ب) $x=\frac{۱}{۲}(۵+\sqrt{۲۹})=۵٫۱۹۲۵۸\ldots$، چند همگرای اول عبارت‌اند از

$$\frac{۱۳۵}{۲۶}=۵٫۱۹۲۳\ldots\text{،}\quad \frac{۲۶}{۵}=۵٫۲۰۰۰\ldots\quad \text{،}\frac{۵}{۱}=۵٫۰۰۰۰\ldots$$

$$.\frac{۷۰۱}{۱۳۵}=۵٫۱۹۲۶\ldots$$

۲. می‌نویسیم

$$x=b+\cfrac{۱}{a+\cfrac{۱}{x}}=\frac{(ab+۱)x+b}{ax+۱};$$

چون $b=ac$، پس $ax^{۲}-abx-ac=۰$، وبنا بر این x درمعادلهٔ هم‌ارز با این معادله، یعنی $x^{۲}-bx-c=۰$ صدق می‌کند.

۳. مثلا فرض کنید $a=۱$ و $b=۲$، آن‌گاه $x=[۰,۱,۲,۱,۲,\ldots]=[۰,\overline{۱,۲}]$. چند همگرای اول این کسر عبارت‌اند از
$\frac{۰}{۱}$، $\frac{۱}{۱}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۸}{۱۱}$، … . فرض کنید

$$\frac{p_{n-۲}}{q_{n-۲}}=\frac{p_{۱}}{q_{۱}}=\frac{۰}{۱},\quad \frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{۳}}{q_{۳}}=\frac{۲}{۳},\quad \frac{p_{n+۲}}{q_{n+۲}}=\frac{p_{۵}}{q_{۵}}=\frac{۸}{۱۱},$$

پس $p_{n+۲}-(ab+۲)p_n+p_{n-۲}=۰$ نتیجه‌می‌دهد $۸-۴\times(۲)+۰=۰$.
حالتهای دیگر را بیازمایید.

مجموعه مسأله‌های ۱۴

۱. (الف) $\alpha=\frac{۱}{۳}(\sqrt{۱۲}+۳)>۱$، $\beta=\sqrt{۱۲}+۳>۱$.

(ب) $۳\alpha^۲-۶\alpha-۱=۰$.

(پ) $\alpha'=\frac{۱}{۳}(۳-\sqrt{۱۲})=-۰٫۱۵۴\ldots$،

$-\frac{۱}{\beta}=-\frac{۱}{(\sqrt{۱۲}+۳)}=\frac{۱}{۳}(۳-\sqrt{۱۲})$.

۲. (الف) $۲\alpha^۲+۲\alpha-۷=۰$، $\alpha=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۵}-۱)>۱$،

$\alpha'=\frac{۱}{۲}(-۱-\sqrt{۱۵})<-۲$.

(ب) $۳\gamma^۲-۵\gamma+۱=۰$، $\gamma=\frac{۱}{۶}(۵+\sqrt{۱۳})>۱$،

$\gamma'=\frac{۱}{۶}(۵-\sqrt{۱۳})=۰٫۲۳۲\ldots>۰$.

مجموعه مسأله‌های ۱۵

۱.
$$\alpha_۱\pm\alpha_۲=(A_۱\pm A_۲)+(B_۱\pm B_۲)\sqrt{D};$$
$$\alpha_۱\cdot\alpha_۲=(A_۱+B_۱\sqrt{D})\cdot(A_۲+B_۲\sqrt{D})$$
$$=A_۱A_۲+B_۱B_۲D+(A_۱B_۲+A_۲B_۱)\sqrt{D}$$
$$\frac{\alpha_۱}{\alpha_۲}=\left(\frac{A_۱A_۲-B_۱B_۲D}{A_۲^۲-B_۲^۲D}\right)+\left(\frac{A_۲B_۱-A_۱B_۲}{A_۲^۲-B_۲^۲D}\right)\sqrt{D},\ A_۲^۲-B_۲^۲D\neq۰,$$

زیرا اگر $A_۲^۲-B_۲^۲D=۰$، آن‌گاه D باید مربع کامل باشد.

۲.
$$(\alpha_۱-\alpha_۲)'=(A_۱-A_۲)-(B_۱-B_۲)\sqrt{D}$$
$$=(A_۱-B_۱\sqrt{D})-(A_۲-B_۲\sqrt{D})=\alpha_۱'-\alpha_۲';$$
$$(\alpha_۱\cdot\alpha_۲)'=(A_۱A_۲+B_۱B_ۂD)-(A_۱B_۲+B_۱A_۲)\sqrt{D}$$
$$=(A_۱-B_۱\sqrt{D})(A_۲-B_۲\sqrt{D})=\alpha_۱'\cdot\alpha_۲';$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)'=\left(\frac{A_1A_2-B_1B_2D}{A_2^2-B_2^2D}\right)-\left(\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_2^2-B_2^2D}\right)\sqrt{D};$$ —

ازطرف دیگر

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}=\frac{A_1-B_1\sqrt{D}}{A_2-B_2\sqrt{D}}\times\frac{A_2+B_2\sqrt{D}}{A_2+B_2\sqrt{D}}$$

$$=\left(\frac{A_1A_2-B_1B_2D}{A_2^2-B_2^2D}\right)-\left(\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_2^2-B_2^2D}\right)\sqrt{D}.$$

۳. $A+B\sqrt{M}=-C\sqrt{N}$. بنابراین $2AB\sqrt{M}=C^2N-A^2-B^2M$. اگر $AB\neq 0$، آن‌گاه طرف‌چپ این تساوی گنگ وطرف راست آن گویاست، که‌غیرممکن‌است. اگر $AB=0$، آن‌گاه $A=0$ یا $B=0$. اگر $A=0$ و $B\neq 0$، آن‌گاه از $A+B\sqrt{M}+C\sqrt{N}=0$ نتیجه می‌شود $\sqrt{M}/\sqrt{N}=-C/B$ که متناقض بافرض‌است. درنتیجه اگر $A=0$ آن‌گاه $B=0$ وبنابراین $C=0$. اگر $B=0$ آن‌گاه $A+C\sqrt{N}=0$، بنابراین $A=0$، $C=0$.

مجموعه مسأله‌های ۱۶

۱. بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $\frac{1}{3}(5+\sqrt{37})$ برابر ۳ است. اگر

$$\alpha=\frac{5+\sqrt{37}}{3}=3+\frac{1}{\alpha_1}$$، آن‌گاه $$\frac{1}{\alpha_1}=\frac{-4+\sqrt{37}}{3}$$، و

$$\alpha_1=\frac{3}{-4+\sqrt{37}}=\frac{4+\sqrt{37}}{7}>1.$$

ازطرف دیگر، $\alpha_1'=\frac{1}{7}(4-\sqrt{37})$ تقریباً برابراست با $-\frac{2}{7}$. بنابراین $-1<\alpha_1'<0$. درنتیجه α_1 ساده شده است.

۲. از رابطه‌های $0<P<\sqrt{D}$ و $\sqrt{D}-P<Q<\sqrt{D}+P$، (۲۳۰۴) را ببینید، نتیجه می‌شود

$$\alpha=\frac{P+\sqrt{D}}{Q}>\frac{Q}{Q}=1.$$

چون $Q>0$ و $P-\sqrt{D}<0$، پس

$$\alpha'=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}<0.$$

همچنین، $\sqrt{D}-P<Q$ نتیجه می‌دهد $(\sqrt{D}-P)/Q<1$، بنابراین

$$\alpha'=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}>-1.$$

۳. تمام عبارتهایی‌که به‌صورت $\frac{P+\sqrt{43}}{Q}$ هستند ودر آنها P و Q عددهای صحیح‌اند ودرشرط (۲۳.۴) صدق می‌کنند به‌طریق زیر به‌دست می‌آیند:

اگر $P=1$، آن‌گاه $\sqrt{43}-1<Q<\sqrt{43}+1$ ، یعنی، $6\leqslant Q\leqslant 7$؛ این نابرابریها عددهای

$$\frac{1+\sqrt{43}}{6},\quad \frac{1+\sqrt{43}}{7}$$

را به‌دست می‌دهند.

اگر $P=2$، آن‌گاه $5\leqslant Q\leqslant 8$ وعددهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{2+\sqrt{43}}{5},\quad \frac{2+\sqrt{43}}{6},\quad \frac{2+\sqrt{43}}{7},\quad \frac{2+\sqrt{43}}{8}$$

اگر $P=3$، آن‌گاه $4\leqslant Q\leqslant 9$ و عددهای زیر به‌دست می‌آیند

$$\frac{3+\sqrt{43}}{n},\quad n=4,5,6,7,8,9.$$

باهمین روش، به‌ازای $P=4,5,6$، عددهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{4+\sqrt{43}}{k},\quad k=3,4,\dots,10;$$

$$\frac{۵+\sqrt{۴۳}}{l}, \qquad l=۲, ۳, \ldots, ۱۱;$$

$$\frac{۶+\sqrt{۴۳}}{m}, \qquad m=۱, ۲, \ldots, ۱۲.$$

مجموعه مسأله‌های ۱۷

۱. $\alpha=۱+\sqrt{۲}>۱$، $\alpha'=۱-\sqrt{۲}=۱-۱٫۴۱۴\ldots$ بین ۱ — و ۰ قرار دارد. همچنین $۱+\sqrt{۲}=۲+\frac{۱}{\alpha_۱}$، $\alpha_۱=۱+\sqrt{۲}=\alpha$، بنا بر این $\alpha=[۲, ۲, ۲, \ldots]=[\overline{۲}]$.

۲. $\alpha=\sqrt{۸}>۱$، $\alpha'=-\sqrt{۸}$ بین ۱ — و ۰ قرار ندارد. $\sqrt{۸}=[۲, \overline{۱, ۴}]$.

مجموعه مسأله‌های ۱۸

۱. $\frac{۸+\sqrt{۳۷}}{۹}=۱+\frac{۱}{\alpha_۱}$

$$\alpha_۱=\frac{۱+\sqrt{۳۷}}{۴}=۱+\frac{۱}{\alpha_۲}, \qquad \alpha_۲=\frac{۳+\sqrt{۳۷}}{۷}=۱+\frac{۱}{\alpha_۳}$$

$$\alpha_۳=\frac{۴+\sqrt{۳۷}}{۳}=۳+\frac{۱}{\alpha_۴}, \qquad \alpha_۴=\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۴}=۲+\frac{۱}{\alpha_۵}$$

$\alpha_۵=\alpha_۲$، که در آن $\alpha_۲$ گنگ درجهٔ دوم ساده شده‌است. بنا براین

$$\frac{۸+\sqrt{۳۷}}{۹}=[۱, \overline{۱, ۱, ۳, ۲}].$$

توجه کنید که α و $\alpha_۱$ ساده شده نیستند، اما

$$\alpha_۲=\frac{۳+\sqrt{۳۷}}{۷}>۱, \qquad -۱<\alpha_۲'=\frac{۳-\sqrt{۳۷}}{۷}<۰ .$$

بنابراین $\alpha_{۲}$ ساده شده‌است و کسر مسلسل از این به‌بعد دوره‌ای است.

مجموعه مسأله‌های ۱۹

۰۱ $\sqrt{۷} = [۲, \overline{۱, ۱, ۱, ۴}]$ و همگراهای آن عبارت‌اند از ۲/۱، ۳/۱، ۵/۲، ۸/۳ $= p_{۴}/q_{۴}$. بنابراین $p_{۴} = x_{۱} = ۸$، $q_{۴} = y_{۱} = ۳$، و

$$x_{۱}^{۲} - ۷y_{۱}^{۲} = ۶۴ - ۷ \times (۹) = ۶۴ - ۶۳ = ۱.$$

۰۳ $\sqrt{۱۳} = [۳, \overline{۱, ۱, ۱, ۱, ۶}]$. پنج همگرای اول‌عبارت‌اند از ۳/۱، ۴/۱، ۷/۲، ۱۱/۳ و ۱۸/۵ $= p_{۵}/q_{۵}$، بنابراین $p_{۵} = x_{۱} = ۱۸$ و $q_{۵} = y_{۱} = ۵$ یك جواب $x^{۲} - ۱۳y^{۲} = -۱$ را به‌دست می‌دهد. با ادامهٔ محاسبه تا همگرای دهم، به‌دست می‌آوریم $p_{۱۰}/q_{۱۰} = ۶۴۹/۱۸۰$. بنابراین $x_{۲} = ۶۴۹$، $y_{۲} = ۱۸۰$ یك جواب $x^{۲} - ۱۳y^{۲} = ۱$ است.

مجموعه مسأله‌های ۲۰

۰۱ بنابر قضیهٔ ۴.۴، دوجواب بعدی، $(x_{۲}, y_{۲})$ و $(x_{۳}, y_{۳})$، از

$$x_{۲} + y_{۲}\sqrt{۱۸} = (x_{۱} + y_{۱}\sqrt{۱۸})^{۲} \quad \text{و} \quad x_{۳} + y_{۳}\sqrt{۱۸} = (x_{۱} + y_{۱}\sqrt{۱۸})^{۳}$$

به‌دست می‌آیند. رابطهٔ اول نتیجه می‌دهد

$$x_{۲} + y_{۲}\sqrt{۱۸} = x_{۱}^{۲} + ۱۸y_{۱}^{۲} + ۲x_{۱}y_{۱}\sqrt{۱۸}.$$

ازآنجاکه $A + B\sqrt{D} = C + E\sqrt{D}$ اگر وتنها اگر $A = C$ و $B = E$، و چون $x_{۱} = ۱۷$،$y_{۱} = ۴$، داریم

$$x_{۲} = x_{۱}^{۲} + ۱۸y_{۱}^{۲} = (۱۷)^{۲} + ۱۸(۴)^{۲} = ۵۷۷,$$

$$y_{۲} = ۲x_{۱}y_{۱} = ۲ \times ۱۷ \times ۴ = ۱۳۶$$

و

$$x_{۲}^{۲} - ۱۸y_{۲}^{۲} = (۵۷۷)^{۲} - ۱۸(۱۳۶)^{۲} = ۱.$$

از رابطهٔ مربوط به $x_{۳}$، داریم

$$\begin{aligned} x_{۳} + y_{۳}\sqrt{۱۸} &= x_{۱}^{۳} + ۳x_{۱}^{۲}y_{۱}\sqrt{۱۸} + ۳x_{۱}y_{۱}^{۲} \times ۱۸ + y_{۱}^{۳} \times ۱۸\sqrt{۱۸} \\ &= x_{۱}^{۳} + ۵۴x_{۱}y_{۱}^{۲} + (۳x_{۱}^{۲}y_{۱} + ۱۸y_{۱}^{۳})\sqrt{۱۸} \end{aligned}$$

بنا براین

$$x_۲ = x_۱^۳ + ۵۴x_۱y_۱^۲ \quad و \quad y_۲ = ۳x_۱^۲y_۱ + ۱۸y_۱^۳.$$

اگر دراین رابطه‌ها، ۱۷ را به‌جای $x_۱$ و ۴ را به‌جای $y_۱$ قراردهیم، درستی رابطهٔ $x_۲^۲ - ۱۸y_۲^۲ = ۱$ را می‌توانیم تحقیق کنیم.

۲. طبق قضیهٔ ۵.۴ جواب دوم $x^۲ - ۱۳y^۲ = -۱$ از

$$x_۲ + y_۲\sqrt{۱۳} = (x_۱ + y_۱\sqrt{۱۳})^۳$$
$$= x_۱^۳ + ۳۹x_۱y_۱^۲ + (۳x_۱^۲y_۱ + ۱۳y_۱^۳)\sqrt{۱۳}$$

به دست می‌آید، جواب مینیمال معادله، $x_۱ = ۱۸$، $y_۱ = ۵$ است، که جواب دوم، یعنی $x_۲ = x_۱^۳ + ۳۹x_۱y_۱^۲$، $y_۲ = ۳x_۱^۲y_۱ + ۱۳y_۱^۳$ را معین می‌کند. جوابهای $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۴, y_۴)$ معادلهٔ $x^۲ - ۱۳y^۲ = ۱$ از رابطه‌های

$$x_۴ + y_۴\sqrt{۱۳} = (x_۱ + y_۱\sqrt{۱۳})^۴ \quad و \quad x_۲ + y_۲\sqrt{۱۳} = (x_۱ + y_۱\sqrt{۱۳})^۲$$

به‌دست می‌آیند. محاسبهٔ این‌جوابها به‌خوانندهٔ ساعی واگذارمی‌شود.

۳. جدول ۲ نشان‌می‌دهدکه $u_۱ = ۱$، $v_۱ = ۱$ جواب مینیمال $u^۲ - ۲v^۲ = -۱$ است. نتیجه می‌گیریم $u_۱ = ۱$، $v_۱ = n_۱ = ۱$، $m_۱ = ۲$، $x_۱ = ۴$، $y_۱ = ۳$، $z_۱ = ۵$؛

$$x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵ = z_۱^۲.$$

جوابهای دیگر $u^۲ - ۲v^۲ = \pm ۱$ از رابطه‌های

$$u_k + v_k\sqrt{۲} = (u_۱ + v_۱\sqrt{۲})^k = (۱ + \sqrt{۲})^k \text{، به‌ازای } k = ۲, ۳, \ldots$$

به‌دست می‌آیند. بنا براین، به‌ازای $k = ۲$، داریم $u_۲ + v_۲\sqrt{۲} = ۳ + ۲\sqrt{۲}$، و

$u_۲ = ۳$، $v_۲ = n_۲ = ۲$، $m_۲ = ۵$، $x_۲ = ۲۰$، $y_۲ = ۲۱$، $z_۲ = ۲۹$؛

$$x_۲^۲ + y_۲^۲ = ۸۴۱ = z_۲^۲.$$

به‌ازای $k = ۳$، داریم $u_۳ + v_۳\sqrt{۲} = (۱ + \sqrt{۲})^۳ = ۷ + ۵\sqrt{۲}$، و $u_۳ = ۷$،

$v_۳ = n_۳ = ۵$، $m_۳ = ۱۲$، $x_۳ = ۱۲۰$، $y_۳ = ۱۱۹$، $z_۳ = ۱۶۹$؛

$$x_۳^۲ + y_۳^۲ = ۱۴۴۰۰ + ۱۴۱۶۱ = ۲۸۵۶۱ = z_۳^۲.$$

به ازای $k=۴$ داریم $u_۴+v_۴\sqrt{۲}=(۱+\sqrt{۲})^۴=۱۷+۱۲\sqrt{۲}$،
$u_۴=۱۷$، $v_۴=n_۴=۱۲$، $m_۴=۲۹$، $x_۴=۶۹۶$، $y_۴=۶۹۷$، $z_۴=۹۸۵$؛

$$x_۴^۲+y_۴^۲=۴۸۴۴۱۶+۴۸۵۸۰۹=۹۷۰۲۲۵=z_۴^۲.$$

۴. همان‌گونه که در صورت مسألهٔ ۳، از مجموعه مسأله‌های ۲۰ توضیح داده شد، طول ضلعهای این مثلث را می‌توان به‌صورت

$$x=m^۲-n^۲ \quad ، y=۲mn \quad ، z=m^۲+n^۲$$

نوشت که در آن m و n عددهای صحیح و مثبت‌اند و $m>n$. در نتیجه

$$\tan\frac{\theta}{۲}=\frac{\sin\theta}{۱+\cos\theta}=\frac{y/z}{۱+(x/z)}=\frac{۲mn/(m^۲+n^۲)}{۱+(m^۲-n^۲)/(m^۲+n^۲)}=\frac{n}{m}\cdot$$

اگر دنبالهٔ عددهای صحیح $n_۱$، $n_۲$، . . . و $m_۱$، $m_۲$، . . . را بتوانیم چنان پیدا کنیم که دنبالهٔ نسبتهای $n_۱/m_۱$، $n_۲/m_۲$، . . . به‌سمت $۱/\sqrt{۳}$ میل کند، آن‌گاه $\theta/۲$ به‌سمت $°۳۰$ و θ به‌سمت $°۶۰$ میل خواهد کرد. برای پیدا کردن این دنباله‌ها، $\sqrt{۳}$ را به‌صورت کسرمسلسل می‌نویسیم

$$\sqrt{۳}=۱+\frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۲+}\cdots$$

و m_i و n_i را به‌ترتیب صورت و مخرج همگرای c_i می‌گیریم. درمی‌یابیم که:

$$m_i:\ ۲, ۵, ۷, ۱۹, ۲۶, ۷۱, \ldots$$

$$n_i:\ ۱, ۳, ۴, ۱۱, ۱۵, ۴۱, \ldots$$

ومثلثهای‌متناظر با این عددها به‌ضلعهای $(۳, ۴, ۵)$، $(۱۶, ۳۰, ۳۴)$، . . . هستند. مثلث ششم به‌ضلعهای $(۳۳۶۰, ۵۸۲۲, ۶۷۲۲)$ است، و زاویهٔ θ از آن بین $°۶۰$ و $°۶۱$ است و به $°۶۰$ بسیار نزدیکتراست.

مجموعه مسأله‌های ۲۱

۱. شش همگرای اول . . . $۱٫۳۸۷۴\ldots=(۱+\sqrt{۱۰})\frac{۱}{۳}=\alpha$ عبارت‌اند از

$\frac{۱}{۱}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۴}{۳}$، $\frac{۷}{۵}$، $\frac{۱۸}{۱۳}$، $\frac{۲۵}{۱۸}$ که همگرای $\frac{۷}{۵}$ درنابرابریهای (۶.۵) صدق می‌کند؛ توجه کنید که $\frac{۱}{۱}$ نیز در (۶.۵) صدق می‌کند.

۲. $F_{۵}: \frac{۰}{۱}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۵}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۵}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \frac{۱}{۱}$.

۳. در $F_{۲}$، $\alpha = ۰٫۳۸۷\ldots$ بین $\frac{۰}{۱}$ و $\frac{۱}{۲}$ قرار دارد. ازعددهای

$$\frac{۰}{۱}،\quad \frac{۰+۱}{۱+۲}=\frac{۱}{۳}،\quad و\ \frac{۱}{۲}،$$

اولی در (۶.۵) صدق می‌کند. دوعدد دیگر به α نزدیک‌می‌شوند ولی درنابرابری فوق صدق نمی‌کنند.

۴. $x \sim y$ زیرا $(-۱۰)(-۵)-(۷)(۷)=۱$.

$x=[\overline{۱}]$ و $y=[-۲, ۱, ۱, ۴, ۱]= \frac{-۱۶۹-\sqrt{۵}}{۱۱۸}$.

۵. (۱) به ازای $a=۱$، $b=۰$، $c=۰$، $d=۱$ داریم $x=\frac{ax+b}{cx+d}$ و

$ad-bc=۱-۰=۱$، پس $x\sim x$.

(۲) اگر $x=\frac{ay+b}{cy+d}$ و $ad-bc=\pm ۱$، آن‌گاه

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}=\frac{Ax+B}{Cx+D},$$

که در آن $AD-BC=ad-bc=\pm ۱$. بنابراین $y\sim x$.

(۳) چون $x\sim y$ و $y\sim z$، می‌توان نوشت

$$x=\frac{ay+b}{cy+d},\quad y=\frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

که در آن به‌ترتیب

$ad-bc=\pm ۱$ و $a'd'-b'c'=\pm ۱$. درنتیجه

$$x=\frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+d}=\frac{(aa'+bc')z+ab'+bd'}{(ca'+dc')z+cb'+dd'}=\frac{Az+B}{Cz+D},$$

و

$$\begin{aligned}AD-BC&=(aa'+bc')(cb'+dd')-(ab'+bd')(ca'+dc')\\&=aa'dd'+bb'cc'-a'bcd'-ab'c'd\\&=a'd'(ad-bc)-b'c'(ad-bc)\\&=(ad-bc)(a'd'-b'c')\\&=\pm ۱.\end{aligned}$$

مجموعه مسأله‌های ۲۲

۱. داریم $\sqrt{۲۹}=[۵,\overline{۲,۱,۱,۲,۱۰}]$، بنابراین باید $\alpha_۳$ را محاسبه کنیم:
$\alpha_۳=\frac{۲+\sqrt{۲۹}}{۵}$، ازاین‌رو $P=۲$، $Q=۵$، و $۲۹=۲^۲+۵^۲$.

۲.

$$\sqrt{۴۳۳}=[۲۰,\overline{۱,۴,۴,۲,۲,۱,۳,۱۳,۱,۱,۱,۱,۱۳,۳,۱,۲,۲,۴,۴,۱,۴۰}],$$

بنابراین باید $\alpha_{۱۱}$ را محاسبه کنیم:

$\alpha_{۱۱}=\frac{۱۲+\sqrt{۴۳۳}}{۱۷}$، بنابراین $P=۱۲$، $Q=۱۷$ و $۴۳۳=۱۲^۲+۱۷^۲$.

۳. چون $\sqrt{۲}$ گنگ است، پیداکردن دوعدد صحیح a و b به‌طوری که

$\sqrt{۲}=\frac{a}{b}$ یا به‌طوری که $a^۲=۲b^۲=b^۲+b^۲$

غیرممکن است.

ازطرف دیگر

$$\sqrt{۲}=۱+\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۲+}\cdots$$

وهمگراهای این کسرمسلسل عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{۱},\ \frac{۳}{۲},\ \frac{۷}{۵},\ \frac{۱۷}{۱۲},\ \frac{۴۱}{۲۹},\ \frac{۹۹}{۷۰},\ \ldots,\ \frac{p}{q},\ \ldots$$

وهمواره داریم

$$p^۲-۲q^۲=\pm۱ \text{ یا } p^۲\pm۱=۲q^۲=q^۲+q^۲.$$

بنابراین قسمت دوم مسأله را به‌ازای مقادیری از p و q که $p^۲+۱=۲q^۲$ یا $p^۲-۱=۲q^۲$ می‌توان حل کرد.